МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
для студентів I курсу денної форми навчання, рівня вищої освіти «молодший бакалавр» зі спеціальності 101- Екологія

"Затверджено"
на засіданні групи забезпечення спеціальності 101 " Екологія"
Протокол № 1 від 3.09.21 Голова групи ________ Чугай А.В.

"Затверджено"
на засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол № 13 від 18.06 Зав.кафедри ________ Глушков О.В.

Одеса 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
для студентів I курсу денної форми навчання, рівня вищої освіти «молодший бакалавр» зі спеціальності 101- Екологія

"Затверджено"
на засіданні групи забезпечення спеціальності 101 " Екологія"
Протокол № 1 від 3.09.21

Одеса 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів І курсу денної форми навчання, рівня вищої освіти

«молодший бакалавр» зі спеціальності 101- Екологія

Одеса 2021

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Вища математика“ для студентів I року денної форми навчання, рівня вищої освіти «молодший бакалавр», спеціальність –Екологія.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю.., д.ф.-м.н., проф., Флорко Т.О., к.ф.-м.н.

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ЗМІСТ

I ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальності Екологія. Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни “Вища математика” - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв’язуванні задач і аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни “Вища математика” базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Роз’яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв’язуванні задач даної дисципліни.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен

знати основні визначення, положення та теореми лінійної і векторної алгебри, диференціального і інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних; основні види диференціальних рівнянь; ознаки збіжності числових рядів; вигляд рядів Тейлора та Маклорена; означення ймовірності та теореми додавання і добутку ймовірностей, основні елементи комбінаторики.

вміти використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики щодо розв’язання прикладних математичних задач.

1.2 Зміст дисципліни

1.2.1 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу.

Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення. Системи координат на прямій, площині і у просторі. Вектори. Лінійні операції над векторами. Проекція вектору на вісь. Напрямні косинуси і довжина вектору. Скалярний добуток векторів і його властивості. Довжина вектору і кут між двома векторами в координатній формі. Умова ортогональності двох векторів. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Умова колінеарності двох векторів. Мішаний добуток трьох векторів. Матриці, дії над ними. Поняття та обчислення оберненої матриці. Ранг матриці. Власні вектори та власні значення матриці. Системи двох і трьох лінійних рівнянь. Матричний запис системи лінійних рівнянь. Правило Крамера. Система n лінійних рівнянь з m невідомими. Метод Гаусса. Поняття лінійного (векторного) простору. Вектор як елемент лінійного простору. Лінійні оператори. Рівняння ліній на площині. Різні форми рівняння прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, їхні геометричні властивості і рівняння. Рівняння площини і прямої в просторі. Кут між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою і площиною. Рівняння поверхні в просторі. Циліндричні поверхні, сфера. Конуси. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди.

Основні елементарні функції, їх властивості і графіки. Складні і зворотні функції, їх графіки. Числові послідовності, їх роль в обчислювальних процесах. Границя функції у точці. Границя функції на нескінченності. Нескінченно малі в точці функції, їхні властивості. Порівняння нескінченно малих. Теореми про границі. Визначні границі.Безперервність функцій у точці. Безперервність основних елементарних функцій. Властивості функцій, безперервних на відрізку: обмеженість, існування найбільшого і найменшого значень, існування проміжних значень.

1.2.2 Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Поняття функції, диференційованої у точці. Диференціал функції. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст у різних задачах. Правило здобування похідної і диференціалу. Похідна складеної і оберненої функції. Інваріантність форми I-го диференціалу.

Диференціювання функцій, заданих параметрично. Точки екстремуму функцій. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, їх застосування. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей. Похідна і диференціали вищих порядків. Умови монотонності функції. Екстремуми функції, необхідна та достатні умови. Дослідження опуклості функції. Точки перегину. Асимптоти графіку функції. Поняття про асимптотичне розкладання. Загальна схема дослідження функцій і побудова її графіка. Функції багатьох змінних. Область визначення. Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку. Скалярне поле. Фізичний зміст його характеристик. Похідна за напрямком у точці. Градієнт функції у точці.

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця основних первісних. Безпосереднє інтегрування функцій. Інтегрування частинами та підстановкою. Інтегрування раціональних дріб за допомогою розкладання на найпростіші дроби. Тригонометричні підстановки і метод «раціоналізації» інтегралів. Задачі, що призводять до поняття визначеного інтегралу. Найпростіші властивості визначеного інтегралу, теорема про середнє. Похідна від інтегралу за верхньою границею. Формула Ньютона-Лейбниця. Геометричний зміст визначеного інтегралу. Обчислення інтеграла за допомогою інтегрування частинами і заміни змінної. Невласні інтеграли. Основні властивості, ознаки збіжності, абсолютна і умовна збіжність. Наближене обчислення невласних інтегралів.

1.2.3 Диференціальні рівняння

Звичайні диференціальні рівняння (ДР). Основні типи ДР 1-го порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння, лінійні рівняння, Бернуллі, рівняння в повних диференціалах. Основні типи ДР вищих порядків. ДР, що припускають пониження порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні ДР 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Системи лінійних ДР 1-го порядку.

1.2.4 Ряди

Числові ряди. Збіжність і суми рядів. Необхідна умова збіжності. Дії з рядами. Методи дослідження збіжності рядів. Функціональні ряди, область збіжності, методи її визначення, степеневі ряди. Розкладання функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях. Ряди Фур'є. Розкладання функцій у тригонометричні ряди Фур'є. Застосування тригонометричних рядів Фур'є в наближених обчисленнях.

1.2.5 Теорія імовірності та математична статистика

Поняття випадкової події. Класифікація подій. Простір елементарних подій. Операції над подіями та відносини між ними. Алгебра подій. Класичне і геометричне визначення імовірності. Визначення умовної імовірності. Незалежність подій, імовірність добутку подій. Теорема про повну імовірність, формули Байеса. Послідовність незалежних іспитів, схема Бернуллі. Випадкові дискретні величини. Ряд розподілу. Функції розподілу випадкової величини та її властивості. Неперервні та дискретні розподіли. Приклади розподілів. Сумісний розподіл декількох випадкових величин. Коефіцієнт кореляції. Закон великих чисел. Основні відомості з математичної статистики. Головна сукупність і вибірка. Розподіли Стьюдента та хі-квадрат. Критерій Пірсона. Математичне очікування, дисперсія, моменти, мода, медіана випадкової величини. Метод найменших квадратів. Статистичне моделювання. Поняття про перевірку статистичних гіпотез. Поняття про критерії згоди. Перевірка гіпотез про рівність часток і середніх. Вибір критерію дляперевірки статистичної гіпотези.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв'язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт, що оцінюється згідно з силабусом дисципліни.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми. Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі, які наведені у конспекті лекцій з дисципліни. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв'язання типових задач.

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач та типові завдання модульного контролю

2.2.1 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу

Література: [1]] гл. I-III; [2] гл. XI, гл. XIII; [7] гл.2

Приклад 1. Дані точки: A(3;-1;2); B(2;3;2); C(5;0;-4); D(-1;2;1).
Знайти кут між векторами AB та AB-2CD

Розв'язання. Знайдемо координати векторів. Для цього від кінцевих координат віднімемо початкові:

$\overrightarrow{AB}(2-3;3-(-1);2-2)$; $\overrightarrow{AB}(-1;4;0)$;$\overrightarrow{CD}(-1-5;2-0);1-(-4))$; $\overrightarrow{CD}(-6;2;5)$) ;
$2\overrightarrow{CD}(-12;4;10)$; $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}(-1-(-12);4-4;0-10)$; $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}(11;0;-10)$

Тепер знайдемо скалярний добуток цих векторів, користуючись формулою: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b$.

$$(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AB}=11\cdot(-1)+0\cdot 4+(-10)\cdot 0=-11.$$

Обчислимо довжини векторів, що перемножуються:

$$|\ \overrightarrow{AB}\ |=\sqrt{(-1)^2+4^2+0^2}=\sqrt{17};\ |\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\ |=\sqrt{11^2+0^2+(-10)^2}=\sqrt{221}$$

Кут між векторами знайдемо за формулою: $\varphi=\arccos(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|})$

$$\varphi=\arccos(\frac{\overrightarrow{AB-2CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB-2CD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|})=\arccos(\frac{-11}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{221}})$$

Приклад 2. Знайти одиничний вектор, що колінеарний до вектору AC x BC

Розв'язання. Обчислимо координати векторів AC та BC:
$\overrightarrow{AC}(5-3;0-(-1);-4-2)$; $\overrightarrow{AC}(2;1;-6)$; $\overrightarrow{BC}(5-2;0-3;-4-2)$; $\overrightarrow{BC}(3;-3;-6)$
Знайдемо векторний добуток AC x BC за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix};\qquad \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -6\\ 3 & -3 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & -6\\ -3 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -6\\ 3 & -6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-24\vec{i}-6\vec{j}-9\vec{k}$$

Нормуємо цей вектор, для цього потрібно обчислити його довжину:

$$|\ \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\ | = \sqrt{(-24)^2+(-6)^2+(-9)^2} = \sqrt{693}$$

Координати орта обчислимо за формулою:

$$\vec{a}_o\left(\frac{x_a}{|\vec{a}|};\frac{y_a}{|\vec{a}|};\frac{z_a}{|\vec{a}|}\right); \qquad (\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC})_o\left(\frac{-24}{\sqrt{693}};\frac{-6}{\sqrt{693}};\frac{-9}{\sqrt{693}}\right)$$

Приклад 3. Знайти об'єм паралелепіпеду, що побудований на векторах BC, BD, BA

Розв'язання. Обчислимо координати векторів BC,BD та BA:

$\overrightarrow{BC}(3;-3;-6)$; $\overrightarrow{BD}(-1-2;2-3;1-2)$; $\overrightarrow{BD}(-3;-1;-1)$; $\overrightarrow{AB}(-1;4;0)$; $\overrightarrow{BA}(1;-4;0)$

Об''єм паралелепипеду, що побудований на цих векторах, чисельно дорівнює модулю їх мішаного добутку, який обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}; \qquad V_{пар} = |\ \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{BA}\ | = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -72 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} =$$

$$= |-69-18| = |-87| = 87$$

Приклад 4. Знайти значення матричного многочлена: $D = -2B^2+B+2E_3$.

Розв'язання.

$$B^2 = B\cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -4 & -16 \\ -4 & 40 & 14 \\ -16 & 14 & 12 \end{pmatrix}; \ -2B^2 = \begin{pmatrix} -80 & 8 & 32 \\ 8 & -80 & -28 \\ 32 & -28 & -24 \end{pmatrix}; \ 2E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D = -2B^2+B+2E_3 = \begin{pmatrix} -80 & 8 & 32 \\ 8 & -80 & -28 \\ 32 & -28 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 & 8 & 30 \\ 8 & -72 & -26 \\ 30 & -26 & -20 \end{pmatrix}$$

Приклад 5. Знайти розв'язок даної СЛАР А)за правилом Крамера, Б) методом Гаусса та В)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 7. \\ x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Розв'язання. А)Обчислимо визначник системи та переконаємось, що він не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2+2+3+1+4-3 = 9 \neq 0$$

Згідно з правилом Крамера, складемо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$,замінюючи стовпці вихідного визначника на стовпець правих частин:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3+14+12+4+6-21=18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14-4+3+7-8-3=9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8-6+21-3+28-12=36;$$ За формулами Крамера,

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$. Тому $x = \frac{18}{9} = 2; y = \frac{9}{9} = 1; z = \frac{36}{9} = 4.$

Б) Для зручності поміняємо місцями 1 та 2 рівняння. Маємо:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Віднімемо від 2 рядка 1-й, помножений на 2, та від 3 рядка 1-й:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ y - 3z = -11 \\ -3y + \quad = -3 \end{cases}$$

Поміняємо місцями 2 та 3 стовпці та отримаємо систему трикутного вигляду, з якої дуже зручно визначати невідомі, ідучи по "сходинкам" знизу догори.

$$\begin{cases} x + z + y = 7 \\ -3z + y = -11 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

З 3-го рівняння маємо y=1; Підставимо це у 2-е рівняння та знайдемо z: -3z+1=-11; -3z=-12; z=4; Підставимо це у 1-е рівняння та знайдемо x: x+4+1=7; x=2.

В) З пункту А) пам'ятаємо, що визначник системи $\Delta = 9 \neq 0$, тому обернена матриця існує. Знайдемо її методом приєднаної матриці. Для цього впишемо алгебраїчні мінори елементів матриці системи:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3; \; A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7; \; A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

Приєднана матриця: $A_{пр} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; а обернена : $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A_{пр} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$;

Стовпець невідомих

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9-7+16 \\ 0+21-12 \\ -9+49-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Приклад 6. Написати рівняння прямої у відрізках на осях, якщо вона проходить через точку М (2;3) та паралельна до прямої 3х+2у-1=0.
Розв'язання. Оскільки паралельні прямі мають один і той же нормальний вектор, шукана пряма має рівняння 3х+2у+С=0, де С поки що невідомо, але може бути знайдено з умови, що координати точки М(2;3) задовольняють рівнянню прямої: 3*2+2*3+С=0; С=-12;
Отже, рівняння прямої 3х+2у-12=0. Перетворимо його до вигляду у відрізках на осях. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 12 та перенесемо вільний член праворуч: 3х+2у-12=0.|:12 ; х/4+у/6=1;

Приклад 7. Знайти кут між прямими у=х-8 та х/2-у/7=1.
Розв'язання. Кут між прямими на площині обчислюється за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|;$$

тут прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами. З першого рівняння бачимо, що $K_1 = 1$; Друге рівняння помножимо на 7 та виділимо у у ліву частину: $y = \frac{7}{2}x - 7$; Тому $K_2 = \frac{7}{2}$; $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{7}{2} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{2}}\right| = \frac{5}{9}$;

Приклад 8. Написати рівняння площини, що проходить через точці
А (2;-1;3); В (0;-2;5); С (1;1;1).

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Підставимо координати точок А,В,С:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 0-2 & -2+1 & 5-3 \\ 1-2 & 1+1 & 1-3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

Розкриємо визначник розкладом по першому рядку:

-2(х-2)-4(у+1)-3(z-3)=0; -2х-4у-3z+9=0.

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+3x-2}{3x^3-4x+5}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+3x-2}{3x^3-4x+5}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\dfrac{x^3}{x^3}-5\dfrac{x^2}{x^3}+3\dfrac{x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}}{3\dfrac{x^3}{x^3}-4\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{5}{x^3}}=\dfrac{4}{3}$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$

Розв'язання. Для розкриття невизначеності використовуємо першу чудову границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$.

Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\bullet\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{5}{2}$.

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+5}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+5}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\dfrac{-1-1}{-1-5}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}$.

Розв'язання: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+2}{x-3}-1\right)^{2x+1}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x-3}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5}{x-3}\cdot(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{10x+5}{x-3}}==e^{10}$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №1

Варіант 1

1) Дані точки: A(1;2;1); B(3;0;-4); C(-2;3;5); D(2;1;-1). а) Знайти кут між векторами AB та CD; б) Обчислити площу трикутника BCD; в) Перевірити, чи належать точки A,B,C,D до однієї площини.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти $D = -2B^2+B+2E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а)за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

4) Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$

Варіант 2

1) Дані точки: A(2;5;-1);B(4;1;-2);C(3;3;1);D(4;-1;-2). а)Чи є серед векторів AB,CD,AD взаємно перпендикулярні? б)Чи є серед векторів AC,BD,BA колінеарні? в)Чи утворюють вектори BA,BC,BD праву трійку.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти D $= B^2+2B+3E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а) за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ x - y - z = -3 \\ 3x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

4) Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tgx}{1-\cos 4x}$ г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{5x^3+3x^2-2x}$

Варіант 3

1) Дані точки: A(3;-1;-2);B(2;3;4);C(5;0;-1);D(-1;2;1). а) Знайти $Пр_{AB}$ CD; б) Обчислити площу паралелограма, що побудований на векторах BC та BA; в) Перевірити компланарність векторів AC, BC,AD.

2) Дана матриця A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти D $= -B^2+3B-E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а)за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 13 \\ 2x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

4) Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$ в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+3}{3x^2+1}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Варіант 4

1) Дані точки: A(4;0;2); B(3;-1;1); C(2;5;-4); D(5;-3;-1). а) Знайти значення виразу: (3AB-2СД)(AC+2BD);
б) Знайти одиничний вектор, перпендикулярний до векторів AB та AD; в) Знайти об'єм паралелепіпеду, що побудований на векторах AB, AC, AD.

2) Дана матриця A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти D = $3B^{2-}B+E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а)за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

4) Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x^3+1}}{\arcsin(5x^3)}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$

Варіант 5

1) Дані точки: A(1;2;3); B(-1;3;2); C(7;-3;5); D(0;1;1). а) Знайти кут між векторами AB та CD;

б) Обчислити площу трикутника BCD ; в) Знайти об'єм тетраедра ABCD.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти

$D = 2B^{2-4}B-2E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а) за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

4) Обчислити границі.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{4x-3}\right)^{4x+1}$ в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{6x}$

2.2.2 Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Інтегральне числення функції однієї змінної.

Література. : [1] гл. XVI- XVII; [2] гл. IV; [3] гл.XV [2] гл. II; § 1—8, гл. III, § 2-24; [3] гл. III, § 1—4, гл. IV,§ 1-7;

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=(\sin x+4)^3$

Розв'язання. Для обчислення похідної скористаємося правилом обчислення похідної складної функції, а потім суми двох функцій sinx+4:

$$y' = 3(\sin x + 4)^2(\sin x + 4)' = 3(\sin x + 4)^2 \cos x$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = tg(\ln x^2)$ **.**

Розв'язання: За правилом обчислення похідної складної функції маємо:

$$y' = \left(tg(\ln x^2)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\left(\ln x^2\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\left(x^2\right)' =$$

$$\frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{\cos^2\left(\ln x^2\right)x}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції y'_x : $\begin{cases} x(t) = \ln ctgt \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

Розв’язання. Знайдемо $x'_t = \frac{1}{\text{ctgt}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t} \right) = -\frac{1}{\sin t \cos t}$;

$y'_t = -2\cos^{-3} t(-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}$. Тоді $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin t \sin t \cos t}{\cos^3 t} = -2\,\text{tg}^2 t$.

Приклад 4. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції $z = 3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3$

Розв’язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)'_x = 3y^2\left(x^2\right)' + 15y^3 \cdot (\sin x)' = 6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)'_x = 3x^2\left(y^2\right)' + 15\sin x \cdot \left(y^3\right)' = 6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)'_x = 6y^2 - 15y^3 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x\right)'_y = 6x^2 + 90y\sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)'_y = 12yx + 45y^2 \cdot \cos x$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx$.

Розв’язання. Приводимо інтеграл до табличного заміною:

$U = 4 + \ln x;\ dU = \frac{1}{x} dx.$ Тоді $I = \left| \begin{matrix} U = 4 + \ln x \\ dU = \frac{1}{4} dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt{U}\ dU = \frac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(4 + \ln x)^3} + C$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I = \int x^2 \sin x\ dx$.

Розв’язання. Застосовуємо формулу інтегрування вроздріб:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$ Тоді $I = \left| \begin{matrix} u = x^2;\ du = 2xdu \\ dv = \sin x dx;\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$

Для обчислення отриманого інтеграла формулу інтегрування вроздріб потрібно застосувати ще раз. Позначимо:

$$\int x \cos x dx \left| \begin{matrix} u = x;\ du = dx \\ dv = \sin x dx;\ v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin dx = x\sin x + \cos x + C$$

Підставляючи, маємо $I = -x^2 \cos x + x\sin x + \cos x + C$.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} \cdot \left(1 + \sqrt[3]{x+3}\right)}$.

Розв'язання. Враховуючи ірраціональність, позначимо $x+3=t^6;\ dx=6t^5dt$

; $I=\int\dfrac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\dfrac{t^2}{1+t^2}dt=6\int dt-6\int\dfrac{dt}{1+t^2}=6t-6arctgt+C=$

$=6\sqrt[6]{x+3}-6arctg\sqrt{x+3}+C.$

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої $x=3\cos^3 t;\ y=3\sin^3 t$.

Розв'язання. Формула обчислення площі плоскої фігури, обмеженої кривою в параметричній формі $S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$, де $y=\psi(t),\ \ x=\varphi'(t)$.

У нашому випадку $\varphi'(t)=3\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-9\cos^2 t\sin t$.

$$\frac{1}{4}S=-\int\limits_0^{\pi/2}3\sin^3 t\cdot(-9)\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\ dt=27\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\ dt=$$

$$=27\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{27}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-2\cos 2t+\cos^2 2t\right)\cdot\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{27}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos 2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt=$$

$$=\frac{27}{8}t\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\frac{t}{2}\sin 2t\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}dt+\frac{27}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 2t\right)\cdot\cos 2t\ dt=$$

$$=\frac{27}{8}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{2}t\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{27}{32}\pi.$$

Приклад 9. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$; x=0, y=0.

Розв'язання. Використовуємо формули:

$$X_c=\frac{M_y}{M};\quad Y_c=\frac{M_x}{M};$$

$$M=\int_a^b\gamma(y_b-y_n)dx;\qquad M_y=\int_a^b\gamma(y_b-y_n)dx;$$

У нашому випадку $y_b=(2-\sqrt{2})^2;\ Y_m=0$ границі інтегрування a=0, b=4, $\gamma=1$ (однорідна фігура). $M=\int\limits_0^4(2-\sqrt{\delta})^2dx=\int\limits_0^4(4-4\sqrt{\delta}+x)dx=(4x-4\dfrac{x^{3/2}}{3/2}+\dfrac{x^2}{2})|_0^4=8/3$

Обчислимо статистичний момент щодо осі OY.

$$M_y = \int_0^4 x(2-\sqrt{2})^2 = \int_0^4 (4x - 2x^{2/3} + x^2)dx =$$

$$(4\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^3}{3})|_0^4 = 32/15$$

$x_c = \frac{32}{15} : 8/3 = 4/5;\ y_c = x_c = 4/5$ – координати центра ваги розглянутої фігури.

Приклади завдань модульної контрольної роботи №2

Варіант № 1

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x^2}{1-\cos 4x}$:

Знайти похідну:2) $y = (\ln x + 7x^2)\cdot\sqrt{x}$ 3) $y = \ln\left(tg\frac{4}{x}\right)$ 4) $y = e^{\arcsin 2x}$ 5) $y = arctg\,\frac{1}{\sin x}$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z = 4x^3+3x^2y+5xy^2-y^3$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = x^4 - 2x^2 + 3;$

Обчислити : 1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-4}}dx$; 2) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3}dx$; 3) $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;

Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями: $y^2 = 4x;\ x^2 = 4y$

Варіант № 2

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ell^{x^2}-1}{\cos x - 1}$

Знайти похідну:2) $y = \frac{4x+2}{5x-3}$ 3) $y = \cos^3(2x+5)$ 4) $y = arctg\sqrt{2x+1}$ 5) $y = x\cdot\arccos x^2$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z = x\cdot\sin(x+y)$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z = 5x^4 - 6x^2y + 10xy^2 - 3$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = \ln(x^2+1).$

Обчислити: 1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}dx$; 2) $\int x3^x dx$; 3) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями: $4y = x^2;\ y = 2$

Варіант № 3

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot ctg7x$

Знайти похідну: 2) $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ 3) $y = \ln^3(2x+1)$ 4) $y = x^3 \cdot \ell^{\cos 5x}$ **5)** $y = arctg\sqrt{2x+1}$

Знайти частинні похідні І порядку: 6) $z = y^{\ln x}$

Знайти частинні похідні ІІ порядку: 7) $z = 6x^3y^2 - 4x\sin y + 4$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = x + e^{-x}$.

Обчислити : 1) $\int \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}}dx$; 2) $\int \dfrac{5x^2}{5-2x^3}dx$; 3) $\int x\cos 5x dx$; 4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями: $x^2 - 4y - 16 = 0;\ y = 0$

Варіант № 4

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Знайти похідну:2) $y = \left(e^{\sin x} - 1\right)^2$ 3) $y = x^3 \cdot \arccos x$ 4) $y = \dfrac{\cos 4x - 1}{3 - \sin 4x}$ 5) $y = \frac{1}{3} tg^3(2x)$

Знайти частинні похідні І порядку: 6) $z = \arcsin(xy)$

Знайти частинні похідні ІІ порядку: 7) $z = 4x^2y^3 - 3xy + 10$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$;

Обчислити : 1) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; 2) $\int \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\int \dfrac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$;

4) $\int \dfrac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями: $y = \sqrt{4 - x^2};\ y = 0;\ y \le 0$

Варіант № 5

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$

Знайти похідну: 2) $y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$ 3) $y=arcctg\, e^{2x}$ 4) $y=\ln^4(\sin 2x)$ 5) $y=x\cdot\arcsin 2^x$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z=tg(3x+5y)$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z=5x^2y-6xy+10x^5y^2+4$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y=\frac{x^2}{x\ \ +1}$;

Обчислити: 1) $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 2) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$; 3) $\int\frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$; 4) $\int\frac{\sqrt[4]{x+1}}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями:

$y=\ln x;\ y=0;\ x=e$

2.2.3 Диференціальні рівняння

Література: [1] гл. VIII ; [2] гл. XV, [2] гл.I, [3] гл. XIV

Приклад 1. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $x\cdot(y^2-4)dx+ydy=0.$

Розв'язання.

Приведемо рівняння до рівняння з розділеними змінними:

$$x\,dx+\frac{ydy}{y^2-4}=0.$$

Беремо інтеграли :

$$\int x\,dx+\int\frac{ydy}{y^2-4}=C.$$

$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$ та

$$\int\frac{ydy}{y^2-4}=\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2-4}=\begin{bmatrix}y^2-4=t\\ 2ydy=dt\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}ln|t|\ =\frac{1}{2}ln|y^2-4|$$

Отримаємо загальний розв'язок:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ln|y^2-4|=\frac{C_1}{2}$$

або

$$x^2+ln|y^2-4|=C_1$$

Приклад 2. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $(x-y)dy=(x+y)dx$.

Розв'язання. Напишемо це рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на x: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

Покладемо $t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=xt\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=t+x\dfrac{dt}{dx}$.

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t+x\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+t^2}{1-t}$.

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Звідки

$arctgt-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln x+C$ або $arctg\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+C$.

Приклад 3. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'-2xy=2x^3$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Розв'язання. Робимо заміну: $y=u\cdot v,\quad y'=\dfrac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}-2xuv=2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dx}-2xv=0\\ \dfrac{du}{dx}=2x^3.\end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v}=2xdx\Rightarrow \ln v=x^2\Rightarrow v=e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dx}\cdot e^{x^2} = 2x^3 \Rightarrow du = 2x^3 dx \Rightarrow$$

$$u = \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = -\int te^t dt = \begin{bmatrix} u = t; dv = e^t dt \\ du = dt; v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C.$$

Шуканий розв'язок

$$y = u\cdot v = \left(x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C\right)e^{x^2} = x^2 + 1 + C\,e^{x^2}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$\left(1 + x^2\right)y'' + \left(y'\right)^2 + 1 = 0.$$

Розв'язання.

Покладемо $y' = p.$ Тоді $y'' = \dfrac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$$\frac{dp}{1+p^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow arctg\ p = arctgC_1 - arctgx.$$

Звідси (у відповідністю із формулою $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$),

$p = \dfrac{C_1 - x}{1 + C_1 x}$ або $y' = \dfrac{C_1 - x}{1 + C_1 x}$. Остаточно маємо:

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}dx = -\frac{1}{C_1}\int dx + \left(C_1 + \frac{1}{C_1}\right)\int \frac{dx}{1 + C_1 x} = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1 + \frac{1}{C_1}}{C_1}\ln\left|1 + C_1 x\right| + C_2.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 8k + 16 = 0, k_1 = k_2 = 4.$$

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2$, то розв'язок рівняння записується за формулою $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\cdot x$

Звідки відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} x.$

Приклад 6. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0,$ $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i.$

Якщо корені характеристичного рівняння коплексні: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то розв'язок рівняння записується за формулою

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$$

Звідки відповідь: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)\right).$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №3

Варіант № 1

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $yy'' + (y')^2 = 1$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задоволь-няє початковим умовам: $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x;\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Варіант № 2

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $(y')^2 + 2yy'' = 0$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3;\ y(0) = 4/3,\ y'(0) = 1/27$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Варіант № 3

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $xy'' = y'$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' + 4y = e^{-2x};\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

Варіант № 4

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $y'' - 2ctg\, x \cdot y^1 = \sin^3 x$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x};\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Варіант № 5

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $y'' = y' + x$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y''+5y'+6y = 12\cos 2x;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

2.2.4 Ряди

Література: [1] гл. XVI- XVII; [4] гл.XVII; [2] гл. IV, [3] гл.XV

Приклад 1.Дослідити збіжність числового ряду: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+...+\frac{2n-1}{2n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбігається за наслідком з необхідної ознаки.

Приклад 2. Дослідити збіжність числового ряду:

$$1+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{1+10n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+10n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+10n.}$$

Розв'язання. Порівнюючи даний ряд с гармонійним $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, за ознакою порівняння одержимо $\lim\limits_{n->\infty}\frac{u_n}{\tau_n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{1+10n}=\frac{1}{10}\neq 0.$ Отже, ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити збіжність числового ряду:

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Розв'язання. Запишемо $u_n=\frac{1}{n!}$ і $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, застосуємо ознаку Даламбера: $\lim\limits_{n->\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$ => ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити збіжність числового ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n.$

Розв'язання . $u_n=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. Застосуємо радикальну ознаку Коші.

$\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n+1}{2n-1}=1/2<1$, => ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити збіжність числового ряду: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_0^{\infty} f(n)dn=\int_0^{\infty}\frac{dn}{\sqrt{4n+1}}=1/4\lim_{N->\infty}\int_0^{N}(4n+1)^{-1/2}d(4n+1)=$$

$$=1/4\lim_{N->\infty}2\sqrt{4n+1}\Big|_0^N=1/2\lim_{N->\infty}\left(\sqrt{4N+1}-1\right)=\infty,=>$$

Невласний інтеграл розбігається, і тому вихідний ряд теж розбігається.

Приклад 6. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$

Розв'язання. Напишемо $a_n=1/n$, $a_{n+1}=1/(n+1)$, тоді $R=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n+1}{n}=1$, отже, $-1<x-2<1$, або $1<x<3$ – інтервал збіжності. Збіжність ряду на кінцях інтервалу: при $x=1$ одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, що збігається умовно (ознака Лейбниця); при $x=3$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається. Таким чином, область збіжності досліджуваного степеневого ряду є $1\leq x<3$ або $x\in[1;3[$.

Приклади завдань модульної контрольної роботи №4

Варіант № 1

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$;

Варіант № 2

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3\sqrt{n}}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n}x^n$;

Варіант № 3

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$, $\alpha = const$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$;

Варіант № 4

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}x^n$;

Варіант № 5

Дослідити збіжність числового ряду: 1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\frac{\pi}{5n}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$;

2.2.5 Теорія імовірності та математична статистика

Література:[4],п.1-4;[7],гл.1-3;[4],п.5-7;[7],гл.4-7;[4],п.8,9;[7],гл.8;[4],п.10-15;[3],гл.9-13.

Приклад 1. Прилад містить 7 елементів, з яких три зношені. При включенні приладу випадковим чином включаються три елементи. Знайти ймовірність того, що виявляться включеними два незношені елементи.

Розв'язання. Нехай подія А-{серед вімкнених елементів 2 незношені}. p(A)=$\frac{m}{n}$. n=C_7^3=$\frac{7!}{3!\times 4!} = \frac{5\times 6\times 7}{1\times 2\times 3} = 35$. m=$C_4^2 \times C_3^1 = \frac{4!}{2!\times 2!} \times \frac{3!}{1!\times 2!} = \frac{2\times 3\times 1\times 2\times 3}{2} = 18$. p(A)=$\frac{18}{35} \approx 0{,}51$.

Приклад 2. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,95, ця ймовірність для другого сигналізатора дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює: а) хоча б один сигналізатор; б) тільки один сигналізатор.

Розв'язання. A_1 - {подія, що полягає в тому, що при аварії спрацює перший сигналізатор}. $P(A_1)= 0{,}95$. $A_г$ - {подія, що полягає в тому, що при аварії спрацює другий сигналізатор}. $p(A_2) = 0{,}9$.

а) B - {при аварії спрацює хоча б один сигналізатор}. $B = A_1 + A_2$. Події A_1 і та A_2 сумісні. Тоді $p(B) = p\{A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \times A_2)$. Події $A1$та A_2 незалежні, тому $p(A_1A_2)=p(A_1) \times p(A_2)$. Отже, $p(B) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_x) \times p(A_2) = 0{,}95 + 0{,}9 - 0{,}95 \times 0{,}9 = 1{,}85 - 0.855 = 0{,}995$.

б) С - {при аварії спрацює тільки один сигналізатор}. $\overline{A}_i$- {при аварії не спрацює i-ий сигналізатор}. $(i = 1, 2)$. $C=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$. Доданки цієї суми є подіями несумісними, а множники є подіями незалежними. Тоді

$$p(C)=p(A_1\overline{A_2}) + p(\overline{A_1}A_2)=p(A_1)\times p(\overline{A_2})+p(\overline{A_1}) \times p(A_2).\ p(A_1)=0{,}95,$$

$$p(\overline{A_1})=1 - p(A_1) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.\ p(A_2)=0{,}9, p(\overline{A_2})=1 - p(A_2)=1 - 0{,}9=0{,}1.$$

$$P(C)=0{,}95 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14.$$

Приклад 3. Два верстати-автомати виготовляють однакові вироби, які попадають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата в два раза біль ніж продуктивність другого. Перший верстат-автомат виготовляє 60 % виробів вищого гатунку, а другий - 84 %. Знайти ймовірність того, що А) навмання взятий з конвеєра виріб вищого ґатунку, та того, що Б) він виготовлений на першому верстаті.

Розв'язання. A - {навмання взятий з конвеєра виріб має вищий гатунок}.

H_1- {навмання взятий з конвеєра виріб виготовлено на першому верстаті}.
H_2 - {навмання взятий з конвеєра виріб виготовлено на другому верстаті}.
А) Застосуємо формулу повної ймовірності:

$$p(A) = p(H_1) \times p(A/H_1) + p(H_2) \times p(A/H_2)$$

$p(H_1) = \frac{2}{3},\ p(H_2) = \frac{1}{3}.\ p(A/H_1) = \frac{60}{100} = 0{,}6,\ p(A/H_2) = \frac{84}{100} = 0{,}84.$

$p(A)=\frac{2}{3} \times 0{,}6 + \frac{1}{3} \times 0{,}84 = \frac{1}{3} \times (1{,}2 + 0{,}84) \approx 0{,}68.$

Б) Застосуємо формулу Байєса

$p((H_1/A) = \frac{p(H_1)\times p(A/H_1)}{p(H_1)\times p(A/H_1)+p(H_2)\times p(A/H_2)} = \frac{\frac{2}{3}\times 0{,}6}{0{,}68} = \frac{0{,}4}{0{,}68} \approx 0{,}59.$

Приклад 5. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному досліді.M[x],D[x],σ[x]-?

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину X - число елементів, що відмовили в одному досліді. X- дискретна випадкова величина. Вона може приймати такі значення: $X_1=0, x_2=1, x_3=2,\ x_4=3$. Ймовірності, з якими ці значення можуть прийматись випадковою величиною X можна знайти за формулою Бернуллі.

$p_1=p_3(0)=C_3^0 \times p^0 \times q^3, q = 1 - p,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9. p_1=0{,}9^3=0{,}729.$

$p_2=p_3(1)=C_3^1 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2 = \frac{3!}{1!\times 2!} \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2 = 3 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2 = 0{,}243.$

$p_3=p_3(2)=C_3^2 \times (0{,}1)^2 \times 0{,}9 = \frac{3!}{2!\times 1!} \times (0{,}1)^2 \times 0{,}9 = 3 \times (0{,}1)^2 \times 0{,}9 = 0{,}027.$

$p_4=p_4(3)=C_3^3 \times (0{,}1)^3 \times (0{,}9)^0 = (0{,}1)^3 = 0{,}001.$

Випадкова величина X має біноміальний закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Математичне сподівання x знаходиться за формулою:$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

M[x]=$0 \times 0{,}729 + 1 \times 0{,}243 + 2 \times 0{,}027 + 3 \times 0{,}001 = 0{,}3.$

Дисперсію дискретної випадкової величини x знайдемо за формулою:

D[x]=M[x^2] - M^2[x]; M[x^2]=$0^2 \times 0{,}729 + 1^2 \times 0{,}243 + 2^2 \times 0{,}027 + 3^2 \times 0{,}001 = 0{,}36$; M^2[x]=$0{,}3^2 = 0{,}09$; D[x]=0,36 – 0,09=0,27.

Середнє квадратичне відхилення:$\sigma[x] = \sqrt{D[x]}=\sqrt{0{,}27} \approx 0{,}52.$

Приклад 6. Безперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0;\ x < 0 \\ \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\,; 0 \le x \le 2 \\ 1\ ; x > 2 \end{cases}$$

Знайти: a , щільність розподілу f (x) , M[x], D[x], σ[x] , P(0< x < 1)

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0; \mathrm{x} < 0 \\ \mathrm{ax} + \frac{1}{3}; 0 \le x \le 2 \\ 0; \mathrm{x} > 2 \end{cases}$$

а знайдемо з властивостей щільності розподілу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{x})\, dx = 1$;

$\int_0^2 (a\mathrm{x} + \frac{1}{3})\,\mathrm{dx} = 1$; $\left(\frac{\mathrm{ax}^2}{2} + \frac{1}{3}x\right) = 1 \Rightarrow 2\mathrm{a} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow \mathrm{a} = \frac{1}{6}$, т.ч.

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0; \mathrm{x} < 0 \\ \frac{1}{6}\mathrm{x} + \frac{1}{3}; 0 \le \mathrm{x} \le 2 \\ 0; \mathrm{x} > 2 \end{cases}$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини знайдем за формулою $\mathrm{M[x]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x} f(\mathrm{x})\, dx$;

$$\mathrm{M[x]} = \int_0^2 \mathrm{x}(\frac{1}{6}\mathrm{x} + \frac{1}{3})\,\mathrm{dx} = \int_0^2 (\frac{1}{6}\mathrm{x}^2 + \frac{1}{3}\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \left(\frac{1}{18}\mathrm{x}^3 + \frac{1}{6}\mathrm{x}^2\right) = \frac{8}{18} + \frac{4}{6} = \frac{10}{9}$$

Дисперсію неперервної випадкової величини знайдемо за формулою

$\mathrm{D[x]} = \mathrm{M[x^2]} - \mathrm{M^2[x]}$; $\mathrm{M[x^2]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}^2 f(\mathrm{x})\, dx$;

$$\mathrm{M[x^2]} = \int_0^2 \mathrm{x}^2 \left(\frac{1}{6}\mathrm{x} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{dx} = \int_0^2 \left(\frac{\mathrm{x}^3}{6} + \frac{\mathrm{x}^2}{3}\right)\mathrm{dx} = \left(\frac{\mathrm{x}^4}{24} + \frac{\mathrm{x}^3}{9}\right) = \frac{2^4}{24} + \frac{2^4}{9} = \frac{14}{9}$$

$$\mathrm{D[x]} = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{14}{9} - \frac{100}{81} = \frac{26}{81};\ \ \delta[\mathrm{x}] = \sqrt{\frac{26}{81}} = \frac{\sqrt{26}}{9}$$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $\mathrm{P}(0 < x < 1)$ знайдемо за формулою: $(\mathrm{a} < x < \mathrm{b}) = \int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$;

$$\mathrm{P}(0 < x < 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}\mathrm{x} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{dx} = \left(\frac{1}{6} \times \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{x}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №5

Варіант № 1

1. Складальник отримав 2 коробки заводу № 2 та 3 коробки заводу №1. Імовірність того, що деталь заводу №1 стандартна – 0,8, а заводу №2 стандартна – 0,9. Складальник витягає з на вдачу взятої коробки стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена заводом №1.

2. Студент знає 45 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний квиток містить три питання. Знайти імовірність того, що студент знає: а) усі три питання; б) тільки 2 питання; в) тільки 1 питання екзаменаційного квитка.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання і дисперсію.

$$F(X) = \begin{Bmatrix} 0, x \le 0 \\ x^3, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{Bmatrix}$$

4. Дана система двох випадкових величин. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}, умовне математичне сподівання M[y/x=3].

y \ x	-2	1	3
-2	0,15	0,10	0,30
0	0,05	0,25	0,15

Варіант № 2

1. З чисел 11, 12, 13, 14, 15 беруться одне за одним два числа. Знайти ймовірність того, що обидва рази взяти непарні числа.

2. У кожній із двох урн знаходяться 5 білих та 10 чорних куль. З першої урни переклали в другу навмання 1 кулю, а потім із другої урни вийняли навмання 1 кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться чорною.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання і дисперсію.

$$F(X) = \begin{Bmatrix} 0, x \le 1 \\ (x^2 - x), 1 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{Bmatrix}$$

4. Дана система двох випадкових величин. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}, умовне математичне сподівання M[x/y =0].

y \ x	-2	1
-1	0,10	0,30
0	0,20	0,10
3	0,15	0,15

Варіант № 3

1. Стрілець має 70 патронів, з яких 5 – зі осічкою. Яка ймовірність , що взяті навмання 2 патрона є зі осічкою.

2. Три стрільці в однакових і незалежних умовах зробили по одному пострілу по одній і тій же цілі. Імовірність поразки цілі першим стрільцем дорівнює 0,9, другим – 0,8, третім – 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один зі стрільців потрапив у ціль; б) тільки два стрільці потрапили в ціль; в) усі три стрільці потрапили в ціль.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання і дисперсію.

$$F(X) = \begin{Bmatrix} 0, \ x \le 1 \\ 5x + x^2, \ \ 1 < x \le 3 \\ 1, \ \ x > 3 \end{Bmatrix}$$

4. Дана система двох випадкових величин. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}, умовне математичне сподівання M[x/y=-2].

y \ x	-3	1	2
-2	0,20	0,15	0,25
0	0,05	0,20	0,15

Варіант № 4

1. 4 квитка в театр розігруються між 5-ма хлопчиками та 7-ма дівчинками. Знайти ймовірність того, що в театр підуть 2 хлопчика та 2 дівчинки.
2. Імовірність настання події в кожнім з однакових і незалежних іспитів дорівнює 0,8. Знайти імовірність, що в 1600 іспитах подія наступить 1200 разів.
3. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання і дисперсію.

$$F(X)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ \dfrac{x^2}{9}, & 1<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

4. Дана система двох випадкових величин. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}, умовне математичне сподівання M[x/y=2].

y \ x	0	2
-2	0,25	0,05
0	0,15	0,25
2	0,15	0,15

Варіант № 5

1. Знайти ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде число очок кратне 2-м.
2. Для сигналізації про аварію встановлені три незалежно працюючі пристрої. Імовірність того, що при аварії спрацює перший пристрій дорівнює 0,9, другий – 0,95, третій – 0,85. Знайти імовірність того, що при аварії спрацює: а) тільки один пристрій; б) тільки два пристрої; в) усі три пристрої.
3. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання і дисперсію.

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \dfrac{x-1}{2}, 1<x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}.$$

4. Дана система двох випадкових величин. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}, умовне математичне сподівання M[x/y=2].

y \ x	-1	2	4
0	0,05	0,10	0,30
2	0,20	0,15	0,20

III Перелік навчальної літератури

Основна:

1. О.В.Глушков, Ю.О.Кругляк, Ю.Г. Чернякова. Лінійна алгебра. Конспект лекцій.- Одесса, ОДЕКУ, «ТЭС»-2004.
2. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В.,Лобода А.В., Середенко С.С. Вища математика:Конспект лекцій. Ч.1. –Одеса, 2011.
3. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вищаматематика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2014.
4. Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я. «Вища математика» –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с.
5. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Вища шк., 1987.
6. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М. «Высшая школа», 1986.
8. Кудрявцев В.А., ДемидовичБ.П. Краткий курс высшей математики.М., «Наука», 1986. М.I.
9. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 720 с
10. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.
11. Сборник задач по математике для ВТУЗов: Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- М.: Наука, 1986.