

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Одеський державний екологічний університет

Ківганов А.Ф., Хоменко Г.В., Хохлов В.М., Бондаренко В.М.

ГІДРОДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ПРОГНОЗУ ПОГОДИ
І СІТКОВІ МЕТОДИ ЇХ РЕАЛІЗАЦІЇ

Одеса 2002

УДК 551.509.313

Гідродинамічні моделі прогнозу погоди і сіткові методи їх реалізації:
Навчальний посібник /Ківганов А.Ф., Хоменко Г.В., Хохлов В.М.,
Бондаренко В.М.. – Одеса: “ТЭС”, 2002. – 178 с.

Навчальний посібник висвітлює окремі розділи дисципліни “Гідродинамічні методи прогнозу погоди”. Він дозволяє вивчити як найпростіші (квазігеострофічні) моделі чисельного прогнозу, так й сучасні моделі, що базуються на використанні повних (в іноземній науковій літературі – примітивних) рівнянь гідротермодинаміки. В посібнику викладені також скінченнорізницеві методи розв’язання задач гідродинамічного прогнозу полів метеорологічних величин.

Навчальний посібник розрахований на студентів гідрометеорологічного профілю підготовки. Він буде корисним для слухачів факультету підвищення кваліфікації і аспірантів.

Рецензенти:

- Декан факультету інформаційних технологій Одеського національного університету ім. І.І. Мечнікова, доктор ф.-м. наук, професор

Шевчук В.В.

- Зав. кафедрою вищої математики Одеського національного політехнічного університету, доктор техн. наук, професор

Усов А.В.

ЗМІСТ

Передмова	5
1 Фільтровані моделі гідродинамічного прогнозу погоди	7
1.1 Теорія фільтрованих моделей	—
1.2 Баротропна прогностична модель	17
1.3 Квазігеострофічна модель прогнозу для бароклінної атмосфери	24
2 Реалізація фільтрованих прогностичних моделей чисельними методами	30
2.1 Алгоритм обчислення геострофічної адвекції відносного вихору	35
2.2 Методи визначення тенденції геопотенціалу	36
2.2.1 Метод Річардсона	40
2.2.2 Метод Лібмана	41
2.2.3 Релакційний метод Саутвелла	42
2.2.4 Екстраполяційний метод Лібмана	43
2.3 Чисельні методи розв'язання прогностичного рівняння для бароклінної атмосфери	44
3 Апроксимація похідних за допомогою методу сіток. Скінченнорізницеві схеми	54
3.1 Теоретичні основи методів обчислення похідних	55
3.2 Основи методу сіток	60
3.3 Скінченнорізницеві схеми. Точність чисельного розв'язку, апроксимація, узгодженість та збіжність	65
4 Використання сіткових методів для обчислення правих частин прогностичних рівнянь	76
5 Схеми інтегрування рівнянь гідротермодинаміки за часом	87
5.1 Теоретичні питання інтегрування рівнянь за часом	—
5.2 Дворівневі схеми	93
5.3 Трирівневі схеми	95
5.4 Схеми зі спрямованими (нецентральними) різницями	98
6 Обчислювальна стійкість скінченнорізницевих схем розв'язання рівнянь гідротермодинаміки	101

6.1	Загальні положення	101
6.2	Дослідження стійкості скінченнорізнице- вих схем (питання теорії)	104
6.2.1	Аналітичне розв'язання лінійного рівняння адвекції	105
6.2.2	Збіжність чисельного розв'язання	107
6.2.3	Дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізнице- вих схем	109
6.3	Нелінійна обчислювальна нестійкість	120
7	Сучасні оперативні моделі прогнозу полів метеорологіч- них величин	126
7.1	Розхитані сітки	129
7.2	Оперативна прогностична модель атмосфери Російського гідрометцентра	132
7.3	Модель Національного метеорологічного центру США	139
7.4	Модель метеорологічної служби Великобританії	150
7.5	Модель служби погоди Німеччини	155
7.6	Прогностична модель атмосфери Європейського центру середньострокових прогнозів погоди (ЄЦСПП)	159
	Додаток А. Запитання для самоконтролю	166
	Додаток Б. Практичні завдання	169
	Список використаних джерел	179

ПЕРЕДМОВА

Ініціатором підготовки цього навчального посібника, його редактором і одним з авторів є доктор географічних наук, професор Анатолій Федорович Ківганов, який очолював кафедру теоретичної метеорології та метеорологічних прогнозів протягом 26 років до своєї передчасної кончини (17 грудня 1999 року).

Неабияка людина, обдарований вчений, талановитий педагог А.Ф. Ківганов завжди приділяв велику увагу навчальній роботі і брав активну участь в підготовці методичних розробок з найбільш складних питань теоретичної метеорології і чисельних методів прогнозу погоди. Так, останні роки у співавторстві з викладачами кафедри ним були підготовлені методичні вказівки з таких важливих та складних теоретичних питань як фізичний аналіз рівняння завихреності і його застосування до задачі гідродинамічного прогнозу, адіабатичні інваріанти в атмосферних моделях, динамічне узгодження метеорологічних полів.

Надаючи велике значення самотійній роботі студентів як однієї з найактивніших форм навчання, А.Ф. Ківганов планував побудувати навчальний посібник таким чином, щоб студенти могли самотійно вивчити найпростіші гідродинамічні моделі прогнозу, які базуються на використанні геострофічного наближення, та ознайомитися зі скінченнорізницевиими методами їх чисельної реалізації. Тому два великі розділи навчального посібника присвячені питанням побудови фільтрованих моделей для баротропної і барокліної атмосфери, фізичному аналізу точних розв'язків прогностичних рівнянь і чисельним методам їх розв'язання; окремо розглядається питання про розрахунок правих частин прогностичних рівнянь для баротропної і барокліної атмосфери за допомогою сіткових методів. Таким чином, вивчення цієї частини посібника допомагає студентам, з одного боку, зрозуміти методологію побудови математичних моделей прогнозу метеорологічних полів, а з іншого боку - ознайомитися з найпростішими способами застосування сіткових методів для розв'язання прогностичних задач.

В розділах 3-6 викладаються основи сіткових методів і способи їх практичного використання при чисельній реалізації моделей за повними рівняннями. Тут викладені схеми інтегрування за часом, що використовуються найчастіше, і для цих схем наведені результати дослідження обчислювальної нестійкості.

Завершується навчальний посібник розділами, в яких наведені скін-

ченнорізницеві моделі, що використовуються в оперативній практиці закордонних країн. Головна мета цих розділів полягає в тому, щоб ознайомити студентів з вимогами, які ставляться до оперативних моделей, та методологією їх побудови на основі повної системи рівнянь гідротермодинаміки.

В додатках до кожної теми пропонуються контрольні запитання або практичні завдання, виконання яких буде сприяти більш глибокому розумінню студентами теоретичного матеріалу.

На закінчення автори висловлюють глибоку вдячність О.Д. Соколенко, яка взяла на себе нелегку працю технічного редагування рукопису українською мовою.

РОЗДІЛ 1

ФІЛЬТРОВАНІ МОДЕЛІ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ПРОГНОЗУ ПОГОДИ

До фільтрованих слід віднести такі моделі, в яких використовуються деякі обмеження, що дозволяють виключити із системи рівнянь гідротермодинаміки хвильові рішення, несуттєві для макромасштабних атмосферних процесів.

Одним із основних обмежень є квазігеострофічне наближення, засноване на гіпотезі близькості реального вітру до геострофічного в шарі атмосфери, який прийнято називати вільною атмосферою. Це обмеження дає змогу виключити із системи рівнянь розв'язок, що описує гравітаційні хвилі. Тому ми і називаємо такі моделі фільтрованими.

До фільтрованих належать і моделі, які називаються квазісоленоїдальними. В них частково описуються відхилення вітру від геострофічного і тому такі моделі краще відтворюють еволюцію метеорологічних полів [1].

Прогнози, складені з допомогою фільтрованих моделей, не такі успішні, як прогнози за повними рівняннями гідротермодинаміки. Однак фільтровані моделі набагато простіші і не такі вимогливі до швидкодії обчислювальних машин та вихідної інформації. Головна перевага таких моделей у тому, що вони дають змогу одержати аналітичний розв'язок, який у явному вигляді містить головні фізичні фактори, що описують еволюцію метеорологічних полів. Незважаючи на те, що в оперативній практиці використовуються моделі гідродинамічного прогнозу за повними рівняннями, вивчення фільтрованих моделей необхідне для розуміння фізики атмосферних процесів.

1.1 Теорія фільтрованих моделей

В дослідженнях щодо гідродинамічного прогнозу погоди атмосфера розглядається як середовище постійного газового складу, яке може стискатися, вважатися суцільним, яке знаходиться під дією сили земного тяжіння і обертається разом із Землею навколо її осі. Таке припущення задовільно описує головні закономірності руху повітря в нижніх шарах атмосфери: тропосфері (верхня межа якої знаходиться на висоті біля 10 км над рівнем

землі) і нижній стратосфері (з верхньою межею 35 км). Ці два шари містять у собі 99.4% всієї маси атмосфери. В гідродинамічних методах прогнозу погоди саме у цих двох шарах склад повітря можна вважати постійним, знехтувати дією електромагнітних сил, не брати до уваги особливості руху, пов'язані з динамікою розріджених газів.

Фізичною і математичною основою гідродинамічного прогнозу є закони збереження імпульсу, маси і енергії. Якщо їх застосувати до вказаних шарів атмосфери, то ми отримаємо рівняння Ньютона для суцільного середовища, рівняння нерозривності та рівняння першого початку термодинаміки. Перелічені рівняння універсальні у тому сенсі, що вони можуть застосовуватися до будь-яких рідин і газів у звичному діапазоні змінювання тиску, температури і швидкості незалежно від складу рідин чи газів, зовнішніх меж та стану руху.

Наведемо без виведення систему рівнянь гідротермодинаміки, яка описує процеси в більшій частині атмосфери. У пов'язаній із Землею, яка обертається, відносній системі координат ці рівняння матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\omega \times V + g + F, \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} V, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}, \\ p &= \rho RT, \end{aligned} \tag{1.1}$$

де V - тривимірний вектор швидкості,

ω - вектор кутової швидкості обертання Землі навколо своєї осі,

g - вектор сили тяжіння,

p, ρ, T - тиск, густина, абсолютна температура повітря,

R - питома газова стала для сухого повітря,

F - сила молекулярної в'язкості,

ε - теплообмін одиничного об'єму за одиницю часу,

c_p - питома теплоємність при постійному тиску,

$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ - оператор Гамільтона.

Перші три рівняння системи (1.1) зображують математичний опис законів збереження: імпульсу (або другого закону Ньютона), маси та внутрішньої енергії газу, а четверте - стану сухого повітря (або рівняння

Менделєєва-Клапейрона).

Для розв'язання задач гідродинамічного прогнозу векторне рівняння руху записується у скалярному вигляді або ж проектується на осі вибраної системи координат. В локальній декартовій системі координат, де вісь x направлена по дотичній до широтного кола з заходу на схід, вісь y – по дотичній до меридіана з півдня на північ, вісь z – по місцевій вертикалі догори, рівняння руху матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \cdot 2\omega \sin \varphi + F_x, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - u \cdot 2\omega \sin \varphi + F_y, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + u \cdot 2\omega \cos \varphi - g + F_z,\end{aligned}\tag{1.2}$$

де φ - широта місця,

F_x, F_y, F_z - проекції сили молекулярної в'язкості \mathbf{F} на осі вибраної системи координат,

ω - модуль вектора кутової швидкості обертання Землі, що дорівнює $7.29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.

З урахуванням (1.2) і виразу для дивергенції, який записується таким чином:

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

систему (1.1) приведемо до вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv - l_1 w + F_x, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + F_y, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}, \\ p &= \rho RT.\end{aligned}\tag{1.3}$$

В (1.3) $l = 2\omega \sin\varphi$, $l_1 = 2\omega \cos\varphi$ - параметри Коріоліса; u, v, w, p, ρ, T - невідомі миттєві значення метеорологічних величин.

Для урахування турбулентного характеру атмосферних рухів в системі (1.3) необхідно перейти від миттєвих значень метеовеличин до їх середніх або згладжених. При цьому в нових рівняннях з'являться складові сили турбулентної в'язкості, які набагато більші за відповідні складові сили молекулярної в'язкості. Рівняння для середніх значень \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{T} , можна представити у вигляді (1.1), (1.2), (1.3), якщо вважати F_x, F_y, F_z проекціями вектора сили турбулентної в'язкості F , а приплив тепла як суму :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\pi} + \varepsilon_{\tau},$$

де ε_{π} , ε_{τ} - променистий і турбулентний припливи тепла відповідно. Відзначимо, що в разі використання рівняння припливу тепла для насиченого повітря, сумарний приплив тепла повинен збільшитися на одну величину - припливу тепла за рахунок фазових переходів вологи в атмосфері.

Система рівнянь (1.3), як і система для середніх величин, яку ми не наводимо більш детально, використовується для вивчення широкого класу атмосферних рухів. Поряд з рухами синоптичного масштабу, пов'язаними з переміщеннями циклонів та антициклонів, які цікавлять нас найбільше при складанні короткострокових прогнозів погоди, цими ж рівняннями описуються просторові рухи інших масштабів, як більших, так і менших за синоптичні. Розглядаючи атмосферні рухи як суперпозицію хвиль з різними довжинами, амплітудами та фазовими швидкостями, очевидно, що система рівнянь (1.3) описує всі типи існуючих хвильових рухів. Це означає, що система спроможна дати розв'язки і для акустичних, і для гравітаційних, і для довгих хвиль Росбі, і для хвиль змішаного типу.

Для макромасштабних рухів система рівнянь гідротермодинаміки значно спрощується. Здійснивши оцінку членів скалярних рівнянь різноманітними методами [2,3], приходимо до висновку, що перші три рівняння системи (1.3) з достатньою мірою точності можна записати без в'язких членів

$$(F_x = F_y = F_z = 0);$$

третє рівняння руху можна представити не враховуючи відносного та коріолісового прискорень і, таким чином, розглядати його у вигляді рівняння квазістатисти. Крім цього у першому рівнянні руху можна не враховувати

член $l_1 w$, який описує частину коріолісової сили, пропорційну вертикальній складовій швидкості вітру. Це припущення не виконується лише в приєкваторіальній зоні. Відзначимо також і те, що у вільній атмосфері процеси, які тривають не більше трьох днів, можна вважати адіабатичними. Це означає, що у рівнянні припливу тепла можна не враховувати член $\varepsilon/c_p \rho$, що характеризує неадіабатичні припливи тепла.

З вказаними обмеженнями система рівнянь, яка описує закономірності руху синоптичного масштабу вище граничного шару, матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} &= 0, \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Наведена система (1.4) є сукупністю нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. В наш час не існує методів, які б дозволили дістати аналітичний розв'язок цієї системи. Вона може бути вирішена з допомогою чисельних методів.

З точки зору хвильових рухів в атмосфері система (1.4) описує такі ж періодичні коливання, як і система (1.3), не враховуються лише акустичні хвилі, що розповсюджуються по вертикалі. Вони фільтруються використанням третього рівняння руху у вигляді рівняння квазістатички.

В чисельних прогнозах звичайно використовуються системи рівнянь динаміки атмосфери, записані у так званій ізобаричній системі координат, в якій вертикальною координатою є тиск або відношення тиску до стандартної величини

$$\zeta = \frac{p}{p_0},$$

де $p_0 = 1000$ гПа.

Таким чином, відміна полягає у тому, що замість горизонтальних повер-

хонь $z = \mathbf{const}$, розглядаються ізобаричні поверхні $p = \mathbf{const}$. Відзначимо, що для основних ізобаричних поверхонь 1000, 850, 700, 500 і 300 гПа координата ζ набуває значення 1.0, 0.85, 0.7, 0.5, 0.3 відповідно.

Випишемо систему (1.4) в ζ -координатах, надаючи індивідуальні похідні у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \\ T &= -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \tilde{\tau} \frac{c^2}{R\zeta} &= 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

В системі (1.5) $\tilde{\tau} = \tau/1000$, де τ вертикальна складова швидкості в ізобаричній системі координат (ізобарична швидкість); $\Phi = gH$ - геопотенціал (H - висота ізобаричної поверхні $p = \mathbf{const}$ в геометричних одиницях виміру); інші позначення загально відомі.

Аналіз цієї системи показує, що прогностичні величини можуть бути визначені по просторовому розподілу складових швидкості вітру u , v , вертикальних токів $\tilde{\tau}$, геопотенціалу Φ , температури T . У найпростішому випадку будемо вважати, що початкові величини перших похідних залишаються постійними на протязі деякого невеликого проміжку часу t (припустимо, одна година).

Тоді з допомогою цих значень (наприклад, для швидкості вітру $\partial u/\partial t$ і $\partial v/\partial t$) можна обчислити складові швидкості вітру через час δt за формулами:

$$u_1 = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta t; \quad v_1 = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta t. \tag{1.6}$$

У цих формулах індекси "0", "1" вказують на приналежність до початкового і наступного значень часу. Далі обчислимо складові швидкості ще через один проміжок часу, при цьому зберігається припущення про

сталість перших похідних і використовуються однотипні формули (1.6). Застосувавши цей прийом необхідне число разів, отримуємо прогноз метеорологічної величини через проміжок часу, який нас цікавить.

Навіть не обговорюючи потрібний об'єм обчислень, очевидно, що на цьому шляху виникають труднощі як технічного, так і принципового характеру. Технічні труднощі полягають передусім у тому, що існують похибки виміру та локальність вихідних метеорологічних полів. Принципові труднощі полягають у тому, що прогностичні члени у рівняннях гідротермодинаміки (члени, які описуються похідними за часом) повинні мати такий же порядок, що і найбільші члени рівнянь. Тільки у такому випадку обчислення прогностичних значень не буде пов'язане із значною втратою точності.

Розглянемо більш детально рівняння руху в горизонтальній площині:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + lv, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - lv. \quad (1.8)$$

Вітер у вільній атмосфері для процесів синоптичного масштабу близький до геострофічного. Тому ліві частини наведених рівнянь (1.7), (1.8), а серед них і прогностичні члени, малі в порівнянні з кожним членом правої частини рівнянь. Це означає, що величини $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ можна обчислити лише як малу різницю великих значень складових сил Коріоліса і баричного градієнта, тому безпосереднє використання рівнянь руху в цілях прогнозу погоди призводить до значних похибок обчислення.

Для того, щоб позбавитися цього недоліку, можна спробувати скомбінувати рівняння руху і, таким чином, дістати нове рівняння, у якому прогностичні члени будуть не другорядними, а головними, тобто матимуть однакові порядки. У загальному вигляді таке рівняння можна отримати, застосувавши операцію вихору швидкості до рівнянь руху у векторній формі. Такий підхід у гідромеханіці використовується часто. Для випадку однорідної рідини з постійною густиною названий підхід приводить до виключення тиску. Дякуючи цьому, часові зміни поля швидкості можуть бути виражені по вихідному полю швидкості у початковий момент з допомогою векторного рівняння руху і рівняння нерозривності. Рух рідини, яку можна стиснути, набагато складніший. Вперше рівняння вихору швидкості було одержано видатним вченим Фрідманом О.О., який показав фундаментальне значення цього рівняння та дав його складовим глибоке фізичне

тлумачення [4].

При побудові фільтрованих моделей чисельного прогнозу погоди широко використовується рівняння для вертикальної складової вихору швидкості Ω_p або Ω_ζ [1,3]. Домовимося, що далі рівнянням вихору швидкості будемо називати скалярне рівняння вертикальної складової вихору вектора швидкості. Для того, щоб його отримати, необхідно перше рівняння руху (1.7) продиференціювати по y , друге рівняння (1.8) – по x і із другого рівняння відняти перше. У кінцевому вигляді одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial y} + \tilde{\tau} \frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial \zeta} + D_s \Omega_\zeta + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \\ = -l D_s - u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.9)$$

або

$$\frac{d\Omega_\zeta}{dt} = -(\Omega_\zeta + l) D_s - u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \zeta}. \quad (1.10)$$

В рівняннях (1.9), (1.10) $\Omega_\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ - вертикальна складова вихору

швидкості в ζ -системі координат.

Рівняння (1.10) можна переписати в більш стислій формі, якщо ввести поняття абсолютного вихору швидкості Ω_a , який є сумою відносного вихору Ω_ζ і переносного (планетарного) l :

$$\Omega_a = \Omega_\zeta + l. \quad (1.11)$$

З урахуванням того, що параметр Коріоліса l залежить тільки від широти місця

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial l}{\partial \zeta} = 0,$$

повна похідна матиме вигляд:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial l}{\partial t} + u \frac{\partial l}{\partial x} + v \frac{\partial l}{\partial y} + \tilde{\tau} \frac{\partial l}{\partial \zeta} = u \frac{\partial l}{\partial x} + v \frac{\partial l}{\partial y}. \quad (1.12)$$

Рівняння (1.10) можна переписати :

$$\frac{d\Omega_\zeta}{dt} = -\Omega_a D_s - v \frac{\partial l}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right). \quad (1.13)$$

Оцінка складових у рівнянні (1.9) показала, що по порядку всі величини у рівнянні вихору розподіляються на дві групи. Всі малі складові близькі по порядку між собою та на один порядок менші від головних членів [3]. Якщо знехтувати малими членами, то рівняння (1.9) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_\zeta}{\partial y} + \beta v = -l D_s. \quad (1.14)$$

Це рівняння називається фільтрованим рівнянням вихору. Якщо замінити в лівій частині (1.14) складові швидкості u , v та Ω_ζ на їх геострофічні аналоги u_g , v_g та Ω_g , стає очевидним, що точність, яку ми втрачаємо, не перебільшуватиме порядок малих членів у рівнянні (1.9). Це означає, що рівняння (1.14) та (1.15) тотожні:

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g = -l D_s. \quad (1.15)$$

Враховуючи те, що в геострофічному наближенні

$$u_g = -\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \Omega_g = \frac{g}{l} \nabla^2 H,$$

бачимо, що всі члени лівої частини (1.15) можна виразити через одну функцію - висоту ізобаричної поверхні H . В правій частині рівняння (1.15) залишилася ще одна невідома величина, яку не можна виразити з допомогою геострофічного наближення [3]. Рівняння (1.15) характеризується двома невідомими величинами H , D_s . Одна з них входить до рівняння нерозривності:

$$D_s = -\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta}. \quad (1.16)$$

Комбінуючи рівняння (1.15) і (1.16), одержимо таке:

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g = -l \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta}. \quad (1.17)$$

Це рівняння також називають квазігеострофічним рівнянням вихору, однак ми могли упевнитися, що це не зовсім так. Рівняння (1.17) містить дві невідомі функції: висоту ізобаричної поверхні H та ізобаричну вертикальну швидкість $\tilde{\tau}$. Тому потрібно застосувати інші рівняння для того, щоб позбавитися однієї невідомої величини. З цієї точки зору розглянемо рівняння припливу тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT(\gamma_a - \gamma)}{g\zeta} \tilde{\tau} = \frac{\varepsilon}{c_p}. \quad (1.18)$$

В правій частині цього рівняння знаходиться величина припливу тепла ε . Він суттєвий у граничному шарі атмосфери, у вільній атмосфері для нетривалих у часі процесів ним можна знехтувати. Це означає, що ми будемо користуватися рівнянням для квазіадіабатичного процесу. Крім цього з тією ж точністю, що і в рівнянні вихору швидкості, замінімо миттєві складові швидкості на аналогічні квазігеострофічні. Нове рівняння матиме вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT(\gamma_a - \gamma)}{g\zeta} \tilde{\tau} = 0 \quad (1.19)$$

і містить невідомі величини H , $\tilde{\tau}$, T . Залучимо до розгляду ще одне рівняння – статика:

$$T = -\frac{\zeta g}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta}. \quad (1.20)$$

Неважко упевнитися, що система трьох рівнянь (1.17), (1.19), (1.20) є замкнутою і містить три невідомі величини H , $\tilde{\tau}$, T . Введемо позначення та підставимо їх до вихідної системи:

$$A_\Omega = -\left(u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g \right), \quad (1.21)$$

$$A_T = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (1.22)$$

$$C^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g}, \quad (1.23)$$

де A_Ω – геострофічна адвекція абсолютного геострофічного вихору ($\Omega_g + l$),
 A_T – геострофічна адвекція температури,
 C^2 – параметр статичної стійкості.

Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g &= -l \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta}, \\ T &= -\frac{\zeta g}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{C^2}{R\zeta} \tilde{\tau} &= 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Система (1.24) називається квазігеострофічною та квазіадіабатичною системою рівнянь. Інтегрування її за відповідних початкових та граничних умов дозволяє дати чисельний прогноз полів H , $\tilde{\tau}$, T .

1.2 Баротропна прогностична модель

Розглянемо спрощений випадок прогностичної задачі, коли для прогнозу достатньо використати тільки одне рівняння із системи (1.24), а саме - рівняння вихору швидкості. Будемо вважати, що невідомими величинами є не вихор швидкості, а його перша похідна $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$, та ізобарична швидкість $\tilde{\tau}$.

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g = -l \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta}. \tag{1.25}$$

Розглянемо характер залежності $\tilde{\tau}$ від висоти. Допустимо, що атмосфера зберігає свою масу у тому випадку, коли не спостерігається відтік повітря через верхню межу атмосфери. Це означає, що рухаючись, частинки не зміщуються відносно поверхні $\zeta = 0$. Оскільки вертикальна швидкість зміщення часток повітря – це і є ізобарична швидкість dp/dt , то на верхній межі атмосфери виконується умова:

$$\tau = \frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{при } p = 0. \quad (1.26)$$

Ця умова еквівалентна ствердженню:

$$\tilde{\tau} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (1.27)$$

оскільки

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{1000} \frac{dp}{dt}.$$

Перейдемо до визначення ізобаричної вертикальної швидкості на нижній межі атмосфери. Якщо розглядати земну поверхню як горизонтальну гладку тверду стінку, то нижня умова в декартовій системі координат запишеться так:

$$w = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (1.28)$$

Це відповідає умові, коли повітря не перетікає через земну поверхню. Співвідношення, яке пов'язує вертикальну швидкість в декартовій та ізобаричній системах координат, матиме вигляд:

$$\tilde{\tau} = - \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + gw \right). \quad (1.29)$$

Згідно з (1.28) w стає рівним "0" біля поверхні землі, тобто при:

$$\zeta_1 = \frac{p_0}{1000} = 1 - \frac{(1000 - p_0)}{1000}.$$

Через те, що приземний тиск залежить від x , y , t , рівень ζ_1 не співпадає з ізобаричною поверхнею $p = 1000$ гПа. В рівнинних умовах відхилення приземного тиску від стандартного, як правило, не перевищує 40-50 гПа. В свою чергу це обумовлює відхилення ζ_1 від одиниці на величину декількох відсотків. Отже, є підстава вважати, що співвідношення (1.29) при $w = 0$ можна віднести до ізобаричної поверхні 1000 гПа або до рівня $\zeta_1 = 1$.

Будемо вважати, що виконуються геострофічні співвідношення, і для нижньої межевої умови можна записати для $\zeta = 1$:

$$\tilde{\tau} = - \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Використаємо наведене співвідношення та запишемо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = - \frac{RT}{\zeta}; \quad \tilde{\tau} = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (1.30)$$

Оцінки показали, що порядок величини $\frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ при $\zeta = 1$ для добових змін складає приблизно 10^{-3} , у той же час, в товщі середньої тропосфери характерним значенням для $\tilde{\tau}$ є такий діапазон: $10^{-2} \div 10^{-1}$ доба⁻¹, що на 1-2 порядки більше. В силу цього, приблизно, можна вважати, що на нижній межі атмосфери виконується умова перетворення до нуля ізобаричної вертикальної швидкості:

$$\tilde{\tau} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0.$$

Таким чином, при вказаних вище обмеженнях ізобарична вертикальна швидкість набуває нульових значень на верхній та нижній межах атмосфери. В математиці добре відомо, якщо функція на кінцях деякого інтервалу набуває нульових значень і відмінна від нуля взагалі, то повинен існувати хоча б один екстремум цієї функції на вказаному інтервалі. Застосувавши цей висновок до нашої задачі, умову екстремуму запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.31)$$

або відповідно до рівняння нерозривності

$$D_s = 0. \quad (1.32)$$

Рівняння вихору (1.25) для рівня, де виконується умова (1.31), має вигляд:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \beta v = 0. \quad (1.33)$$

Рівняння (1.33) можна отримати і іншим шляхом, а саме, коли атмосферу стилізувати у вигляді баротропного середовища. У такому середовищі можна виділити рівень ζ^* , на якому допустимо вважати рух бездивергентним [2,3]. Статистичний аналіз даних про вітер показав, що найбільш близьким до бездивергентного можна вважати рівень у середній тропосфері, розташований між ізобаричними поверхнями 400 та 700 гПа. Звичайно його відносять до рівня ізобаричної поверхні 500 гПа і називають середнім або бездивергентним. В зарубіжній літературі його називають еквівалентно-баротропним. Рівняння вихору, записане для еквівалентно-баротропного рівня, має вигляд рівняння (1.33). Для стислості його називають баротропним рівнянням вихору.

Таким чином, згідно з рівнянням (1.33), основною властивістю макромасштабних рухів для середньої атмосфери є збереження абсолютного вихору швидкості в частках повітря, що переміщуються горизонтально.

В квазігеострофічному наближенні рівняння (1.33) запишеться у вигляді:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = l A_{\Omega}, \quad (1.34)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа,

A_{Ω} – геострофічна адвекція абсолютного геострофічного вихору.

Рівняння (1.34) є лінійним відносно тенденції геопотенціалу для середнього рівня $q = \partial \Phi / \partial t$ і може бути представлено як:

$$\nabla^2 q = l A_{\Omega}. \quad (1.35)$$

Адвекція вихору у геострофічному наближенні містить одну невідому величину – геопотенціал Φ :

$$A_{\Omega} = \frac{1}{l} \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l \right)}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l \right)}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]. \quad (1.36)$$

Праву частину (1.35) можна вважати відомою функцією горизонтальних координат за умови, що відомо поле висот геопотенціалу H

ізобаричної поверхні, яка береться за середній рівень. Тому це рівняння було використане для визначення поля тенденції q для деякого моменту часу по відомому полю геопотенціалу. Далі необхідно застосувати метод кроків у часі та на кожному часовому кроку визначати поле тенденцій геопотенціалу з допомогою інтегрування лінійного диференціального рівняння (1.35). Воно належить до еліптичного типу і відомо в математиці під назвою рівняння Пуассона. Щоб отримати однозначний розв'язок (1.35), необхідно задати відповідні межові умови. Оскільки задача розглядається лише для одного рівня, то межові умови задаються лише по його горизонтальних координатах.

Існують різноманітні способи опису межових умов по горизонталі. Розглянемо деякі із них.

1. Рівняння обчислюється для всієї земної кулі, отже, визначаються висоти ізобаричної поверхні середнього рівня, які оточують всю земну кулю. Така поверхня не має меж і питання про межові умови відпадає.

2. Рівняння (1.35) обчислюється для півкулі. Межові умови задаються поблизу екватора у вигляді $q = 0$, тобто вважається, що поблизу екватора геопотенціал не змінюється з часом. Постановка такої умови базується на тому факті, що зміни Φ у цьому районі суттєво менші, чим у більш високих широтах.

3. Задача розв'язується для обмеженої області, задаються "нульові" межові умови, тобто на межах області прогнозу вважається $q|_{\Gamma} = 0$. Така умова не відповідає дійсності, тому називається фіктивною.

4. Локальні межові умови ставляться окремо для кожної точки, в якій обчислюється тенденція геопотенціалу q . Навколо кожної точки описується коло заданого радіуса R . Відповідно до локальних межових умов вважається, що осереднені значення тенденції на колі дорівнюють нулю:

$$\bar{q}|_{\Gamma} = 0. \quad (1.37)$$

Разом з цим зрозуміло, що із збільшенням радіуса R середнє значення буде зменшуватися, оскільки внесок додатних значень q в районах росту тиску і від'ємних в районах падіння значною мірою компенсує одне одного. Аналіз даних спостережень показав, що вже при $R = 1000$ км q в декілька разів менше від характерного значення q в точці прогнозу. Тому припущення про рівність нулю середнього значення q не повинно приводити до ще більших помилок.

Аналітичний розв'язок рівняння (1.35) в полярній системі координат має вигляд [2,3]:

$$q(0,0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \int_0^R LA_{\Omega}(r, \psi) \ln \frac{R}{r} r dr d\psi + \bar{q}_R \quad (1.38)$$

або

$$q(0,0) = -\int_0^{2\pi R} \int_0^R LA_{\Omega}(r, \psi) G(r) r dr d\psi + \bar{q}_R, \quad (1.39)$$

де через $G(r)$ визначена функція, яку називають функцією впливу:

$$G(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}. \quad (1.40)$$

Відповідно до розв'язків (1.38)-(1.39), зміна висоти ізобаричної поверхні з часом у точці прогнозу в баротропній атмосфері визначається лише геострофічною адвекцією абсолютного геострофічного вихору на тій же ізобаричній поверхні. Міра цього впливу визначається функцією Гріна, яка описує вплив адвекції вихору в різних частинах області (кола з радіусом R) на тенденцію геопотенціалу у точці прогнозу, що завжди співпадає з центром вказаного кола. З (1.40) витікає, що функція впливу від'ємна на всій області інтегрування. Це означає, що додатна адвекція вихору спричиняє зменшення геопотенціалу в точці прогнозу, а від'ємна – збільшення.

Розглянемо більш детально вплив адвекції вихору на зміну висоти ізобаричної поверхні, яку прийматимемо за середній рівень. Для простоти будемо розглядати геострофічну адвекцію відносного вихору, а не абсолютного. Одержані при аналізі висновки будуть справедливими і для адвекції абсолютного вихору. Напишемо вираз для адвекції геострофічного вихору:

$$A_{\Omega} = -\left(u_g \frac{\partial \Omega_{\zeta_g}}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_{\zeta_g}}{\partial y} \right). \quad (1.41)$$

Спрямуємо вісь x уздовж ізогіпс, тоді вектор геострофічного вітру буде майже повністю проектуватися на вісь x , а складова на вісь y буде малою ($v_g \ll u_g$). Формула (1.41) спроститься і матиме вигляд:

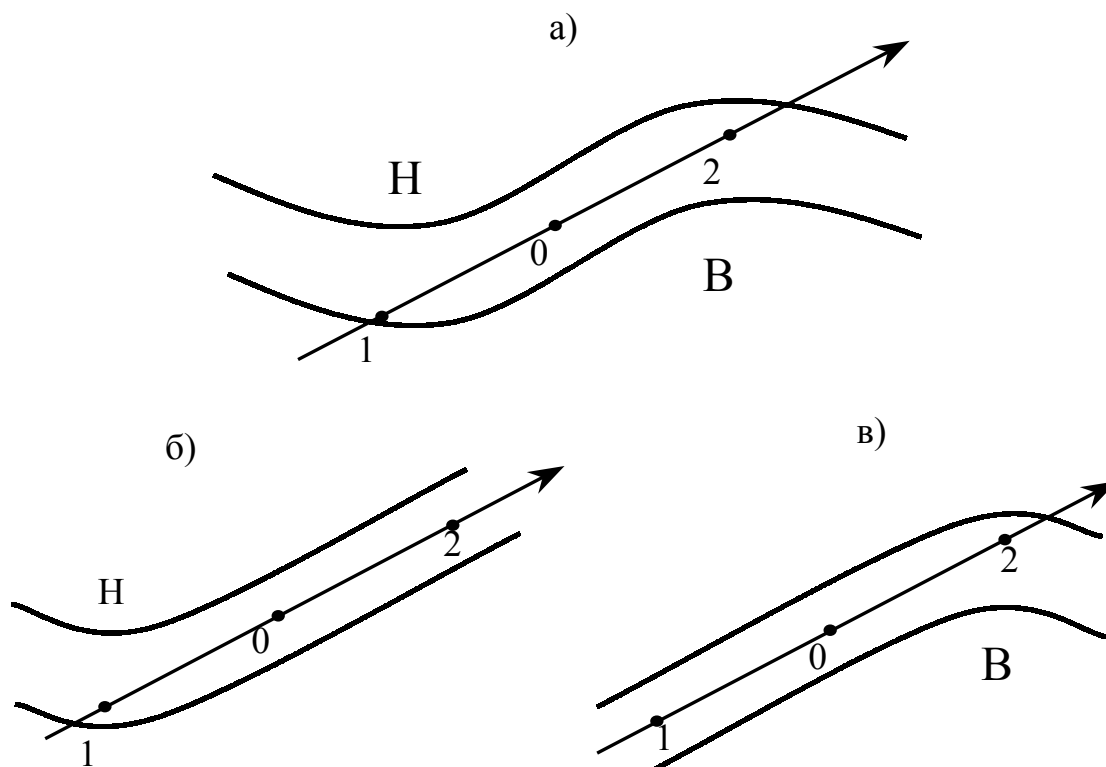
$$A_{\Omega} = -u_g \frac{\partial \Omega_{\zeta_g}}{\partial x}. \quad (1.42)$$

При такому виборі координатних осей складова u_g завжди буде додатна, тому знак A_Ω протилежний знаку похідної, яка описує зміни відносного вихору $\Omega_{\zeta g}$ в напрямку осі x . Нагадаємо, додатному напрямку осі відповідає зростання будь-якої функції, то похідна від цієї функції по відповідній координаті буде додатна. При зменшенні функції в напрямку осі похідна від'ємна.

Розглянемо спочатку випадки, при яких $A_\Omega > 0$, відносний вихор зменшується уздовж осі x ($\partial\Omega_{\zeta g} / \partial x < 0$). Таке спостерігається у трьох ситуаціях :

1. Навколо точки прогнозу "0" поле геопотенціалу описується ізогіпсами, які мають як циклональну, так і антициклональну кривизну. Для того, щоб виконувалось геострофічне наближення, будемо розглядати слабо виражені улоговину та гребінь. Як видно із рисунка 1.1а, точка 1 знаходиться в улоговині, а точка 2 - в зоні гребеня. Оскільки в антициклональному полі $\Omega_{\zeta g} < 0$, а в циклональному - більше нуля, похідна має від'ємний знак,

$$\left(\frac{\partial\Omega_{\zeta g}}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{(\Omega_{\zeta g})_2 - (\Omega_{\zeta g})_1}{\delta x},$$



а) улоговина та гребінь; б) улоговина; в) гребінь.

Рисунок 1.1 – Схема баричних полів.

а A_{Ω} - додатна. Тоді згідно з формулами (1.38, 1.39), $q(0,0) < 0$, висота ізобаричної поверхні у точці прогнозу "0" з часом зменшується, як і тиск поблизу середнього рівня. Таким чином, під дією динамічного фактора (адвекції вихору) тиск у точці прогнозу буде зменшуватися, якщо навкруги цієї точки спостерігається адвекція циклонічного вихору.

2. Поле ізогіпс геопотенціалу має циклональний характер ($\Omega_{\zeta g} > 0$). Оскільки точка 1 знаходиться на осі улоговини, а точка 2 - на її периферії, то $(\Omega_{\zeta g})_1 > (\Omega_{\zeta g})_2$. У цьому випадку навкруги точки "0" спостерігається адвекція більш інтенсивного циклонального вихору, що призводить до зменшення тиску в цій точці (див. рис.1.1б).

3. Поле ізогіпс висот геопотенціалу антициклонічне ($\Omega_{\zeta g} < 0$). Нехай точка 2 знаходиться на осі гребеня, а точка 1 - на периферії. Тоді модуль відносного вихору в точці 2 буде більшим, ніж в точці 1:

$$|\Omega_{\zeta g}|_2 > |\Omega_{\zeta g}|_1.$$

Як видно із рисунка 1.1в, у цьому випадку навколо точки прогнозу відмічається адвекція менш інтенсивного антициклонічного вихору, яка також приведе до зменшення тиску в точці "0". Звідси витікає, що додатному значенню A_{Ω} може відповідати адвекція циклонального вихору, адвекція більш інтенсивного циклонічного вихору та адвекція менш інтенсивного антициклонічного вихору. У всіх названих випадках адвекція вихору приведе до зменшення тиску в середній тропосфері.

Аналогічні правила можна навести для випадків, коли спостерігається збільшення тиску: тиск у точці прогнозу буде збільшуватися, якщо навкруги, в області впливу, спостерігається адвекція антициклонічного вихору або більш інтенсивного антициклонічного вихору, чи менш інтенсивного циклонального вихору.

Треба мати на увазі, що на точку прогнозу впливає сумарна адвекція вихору у вузлах сітки, які попадають в коло впливу радіусом $= 3d$. Міра впливу кожного вузла визначається функцією впливу.

1.3 Квазігеострофічна модель прогнозу для барокліної атмосфери

При побудові прогностичної моделі для барокліної моделі в квазігеострофічному, квазістатичному і квазіадіабатичному наближеннях використовується система рівнянь, що включає фільтроване рівняння вихору швидкості:

$$\frac{\partial \Omega_{\zeta g}}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\Omega_{\zeta g} + l)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\Omega_{\zeta g} + l)}{\partial y} = -l D_s, \quad (1.43)$$

рівняння статики:

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (1.44)$$

рівняння припливу тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{R\zeta} \tilde{\tau} = 0, \quad (1.45)$$

де $c^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma) R}{g}$ - квадрат швидкості звуку, і рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta} = 0. \quad (1.46)$$

В системі (1.43) – (1.46) позначення загально прийняті. Для отримання прогностичного рівняння відносно тенденції геопотенціалу $q = \partial \Phi / \partial t$ необхідно виконати такі перетворення :

1) ввести позначення для геострофічної адвекції абсолютного вихору

$$A_{\Omega} = - \left[u_g \frac{\partial(\Omega_{\zeta g} + l)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\Omega_{\zeta g} + l)}{\partial y} \right] = 0$$

і виключити із геострофічного рівняння вихору (1.43) дивергенцію за допомогою рівняння нерозривності (1.46);

2) ввести позначення для геострофічної адвекції температури A_T

$$A_T = - \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

і виключити температуру із рівняння припливу тепла (1.45), скориставшись рівнянням статики (1.44);

3) продиференціювати скомбіноване рівняння припливу тепла по ζ ;

4) підставити останнє в рівняння вихору.

В результаті проведених операцій одержимо прогностичне рівняння виду:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} + c^2 \nabla^2 = F, \quad (1.47)$$

у якому права частина дорівнює

$$F = c^2 l A_{\Omega} - R \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta A_T)$$

і вважається відомою, оскільки її можна обчислити по відомому полю геопотенціалу Φ . Параметр стійкості характеризує статичну стійкість і вважається постійним.

Аналітичний розв'язок рівняння (1.47) був вперше отриманий у 1951 році Булеєвим М. і Марчуком Г.І. В циліндричній системі координат за локальних межових умов розв'язок має вигляд:

$$\begin{aligned} q(0,0,\zeta) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R l A_{\Omega}(r,\psi,\zeta,\zeta') G_{\Omega}(r,\zeta,\zeta') r dr d\psi d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R A_T(r,\psi,\zeta,\zeta') G_T(r,\zeta,\zeta') r dr d\psi d\zeta, \end{aligned} \quad (1.48)$$

де A_{Ω} , A_T - геострофічна адвекція абсолютного вихору і температури відповідно,

G_{Ω} , G_T - функції впливу (Гріна) для термічного і динамічного факторів,

ζ , r , ψ - змінні інтегрування, що можуть набувати значення у діапазонах: $0 \leq \zeta \leq 1$; $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$,

ζ' - рівень прогнозу (для основних ізобаричних поверхонь ζ' - набуває значення 1.0, 0.85, 0.7, 0.5, 0.3).

Аналіз цього розв'язку (1.48) показує, що областю інтегрування є циліндр радіусом R ($R = 3d$), нижня основа якого знаходиться на ізобаричній поверхні 1000 гПа ($\zeta = 1$), а верхня - співпадає з гіпотетичною поверхнею, яку приймаємо за верхню межу атмосфери, де $p = 0$ ($\zeta = 0$). Таким чином, ця модель є тривимірною і зміна висоти ізобаричної поверхні у

точці прогнозу визначається геострофічною адвекцією вихору та температури у всій товщі атмосфери (вплив A_Ω враховується на основних ізобаричних поверхнях, а A_T – в шарах між цими поверхнями). Міра впливу вказаних факторів визначається функціям впливу – G_Ω , G_T , які мають такі властивості:

Для динамічного фактора

- G_Ω по всій області інтегрування додатна,
- максимальних значень G_Ω досягає у точці прогнозу та на рівні прогнозу,
- з віддаленням від точки прогнозу по вертикалі та горизонталі G_Ω зменшується.

На рис. 1.2 наведені функції Гріна G_Ω для ізобаричних поверхонь 1000 і 500 гПа [2, 5].

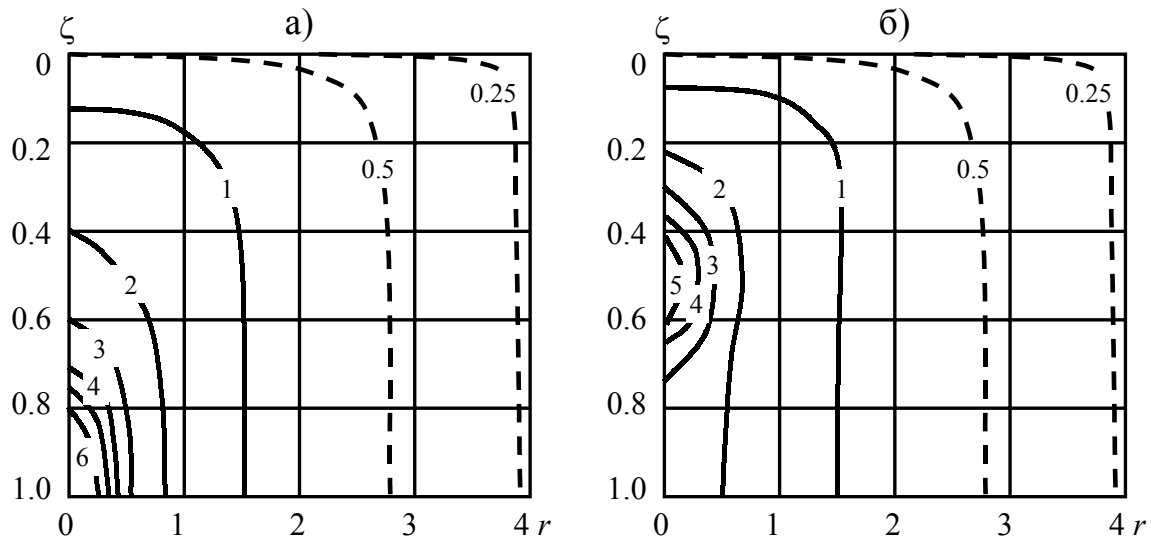


Рисунок 1.2 - Функція Гріна (G_Ω) для динамічного фактора [2] для $\zeta' = 1$ (а) і $\zeta' = 0.5$ (б).

Для термічного фактора

- G_T знакозмінна функція, вище рівня прогнозу вона від'ємна, нижче – додатна,
- максимальних значень вона досягає в точці прогнозу та в середині шарів, що прилягають до рівня прогнозу,
- з віддаленням від точки прогнозу по горизонталі функція зменшується і на відстанях, близьких до $R = 3d$, наближається до нуля (на рис.1.3 наведені функції впливу G_T для ізобаричних поверхонь 1000 та 500 гПа).

Вплив динамічного фактора A_Ω детально розглянуто в попередньому розділі. Треба тільки мати на увазі, що в бароклінній моделі зміна висоти ізобаричної поверхні визначається сумарною адвекцією вихору у

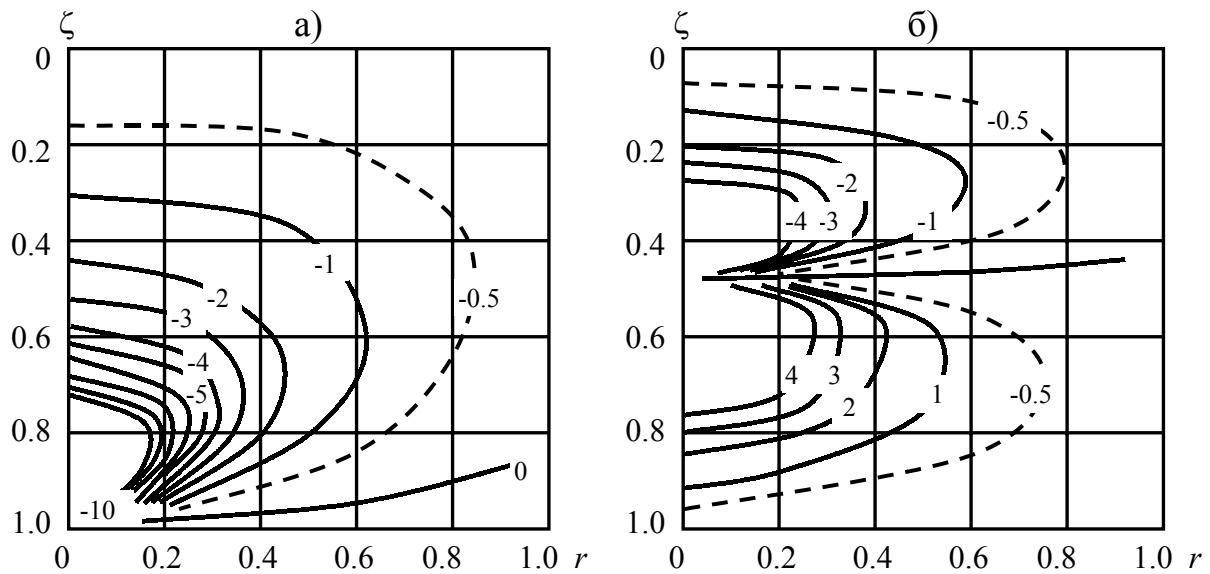


Рисунок 1.3 - Функція Гріна (G_T) для термічного фактора [2] для $\zeta' = 1$ (а) і $\zeta' = 0.5$ (б).

внутрішній області інтегрування (циліндр радіусом R). А якщо бути більш точними, величина q визначається середньоваговим значенням динамічного фактора – адвекцією вихору на всіх рівнях у всій області інтегрування по всіх вузлах сітки, що знаходяться всередині циліндра. Зауважимо, що всі вузли лежать на основних ізобаричних поверхнях, а прогностичні точки – на осі циліндра.

Розглянемо внесок термічного фактора в величину тенденції, яка описується іншим потрійним інтегралом у розв'язку (1.48).

$$q(0,0,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R A_T(r,\psi,\zeta,\zeta') G_T(r,\zeta,\zeta') r dr d\psi d\zeta. \quad (1.49)$$

Аналіз цієї формули показує, що знак тенденції геопотенціалу в точці прогнозу визначається знаком функцій G_T , A_T .

Відомо, що при адвекції тепла $A_T > 0$, адвекції холоду $A_T < 0$.

Наприклад, нехай у всій тропосфері спостерігається адвекція тепла, тобто $A_T > 0$. Як буде змінюватися тиск в нижній ($p = 1000$ гПа), середній ($p = 500$ гПа) і верхній ($p = 300$ гПа) тропосфері у цьому випадку? Оскільки вся область інтегрування розташована вище ізобаричної поверхні 1000 гПа, то функція впливу G_T буде від'ємною. Відповідно до (1.49) $q(0,0,1) < 0$, висота ізобаричної поверхні $p = 1000$ гПа буде знижуватися, а тиск у нижній тропосфері відповідно зменшуватиметься. Такий результат узгоджується з фізичним механізмом змін тиску в атмосфері за рахунок

горизонтального переносу повітряних мас. Нагадаємо, що при макропроцесах тиск на будь-якому рівні визначається тільки вагою стовпа повітря, який знаходиться над цим рівнем. При адвекції тепла холодне повітря відступає і замінюється на тепле, а оскільки тепле повітря легше за холодне, тиск зменшуватиметься.

Для верхньої атмосфери прогностичним рівнем є ізобарична поверхня 300 гПа. У цьому випадку область інтегрування знаходиться нижче рівня прогнозу і функція впливу G_T додатна. При адвекції тепла, відповідно до (1.49), тенденція геопотенціалу в точці прогнозу також буде додатна. Це означає, що тиск у верхній тропосфері під впливом термічного фактора буде зростати. Дійсно, при адвекції тепла збільшується товщина шару атмосфери між земною поверхнею і ізобаричним рівнем (в даному випадку $p = 300$ гПа). При цьому висота ізобаричної поверхні збільшиться і тиск також збільшиться.

Таким чином, адвекція тепла у всій товщі тропосфери приведе до пониження тиску в нижній тропосфері і збільшення в її верхній частині. Якщо спостерігається адвекція холоду у всій товщі тропосфери, характер зміни тиску буде протилежний. Очевидно, що адвекція температури одного знаку і однакової інтенсивності у всьому шарі атмосфери не призведе до суттєвих змін тиску в середині тропосфери (поблизу рівня $p = 500$ гПа) насамперед тому, що у цьому випадку зміни тиску за рахунок термічного фактора нижче і вище рівня прогнозу будуть мати протилежні знаки і, таким чином, компенсувати один одного. Вплив бароклічного фактора на зміну геопотенціалу середнього рівня у такому випадку буде незначним. Це певною мірою підтверджує концепцію наявності середнього рівня в атмосфері. Але слід пам'ятати, що у випадку, коли спостерігається адвекція температури, яка з висотою багаторазово змінює свій знак, вплив бароклічного фактора в середній тропосфері значно збільшуватиметься.

Для спрощення аналізу у цьому розділі було розглянуто окремо вплив динамічного і термічного факторів на зміну тиску в бароклічній атмосфері. Із розв'язків (1.48) випливає, що результуюча зміна тиску в будь-якій точці прогнозу визначається знаками і кількісними співвідношеннями обох факторів. Також нагадаємо, що модель прогнозу для баротропної атмосфери можна розглядати як спрощений випадок моделі для бароклічної атмосфери, коли нехтують адвекцією температури.

РОЗДІЛ 2

РЕАЛІЗАЦІЯ ФІЛЬТРОВАНИХ ПРОГНОСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Відомо, що система рівнянь гідротермодинаміки і одержані на її основі прогностичні рівняння для фільтрованих моделей належать до класу диференціальних рівнянь в частинних похідних. В наш час чисельне інтегрування рівнянь в частинних похідних реалізується в більшості випадків за допомогою методу сіток.

Згідно з цим методом в межах області розв'язання визначається система відліку і вводяться дискретні значення незалежних змінних і безрозмірні координати на основі таких співвідношень:

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad s = \frac{t}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

де Δx , Δy , Δz – кроки в просторі (відстань між сусідніми точками на координатних осях);

Δt - крок за часом (відстань між сусідніми точками на осі часу).

Множина точок, положення яких визначається безрозмірними координатами в просторі і часі, називається просторово-часовими сітками, а точки цих сіток називаються вузлами. Таким чином, в методі сіток нерозривний простір і час замінюються дискретною множиною точок у вузлах сітки, а поля функцій (метеовеличин) $f(x,y,z)$ задаються у вигляді множини дискретних сіткових значень функцій $f_{i,j,k}$.

При дискретному представленні полів похідні в диференціальних рівняннях можна обчислити тільки за допомогою скінченнорізницевих співвідношень. Заміна похідних скінченнорізницевиими співвідношеннями називається скінченнорізницевою апроксимацією похідних, а такий спосіб зображення похідних - скінченнорізницевим методом.

Опишемо основи цього методу для випадку функції двох змінних $f(x,y)$. Розкладемо в ряд Тейлора функцію $f(x,y)$ поблизу точки x, y (рис.2.1).

Частинні похідні визначимо як:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x,y} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x}, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}, \quad (2.3)$$

де Δx , Δy - малі прирости x і y відносно їх значень у точці (x, y) .

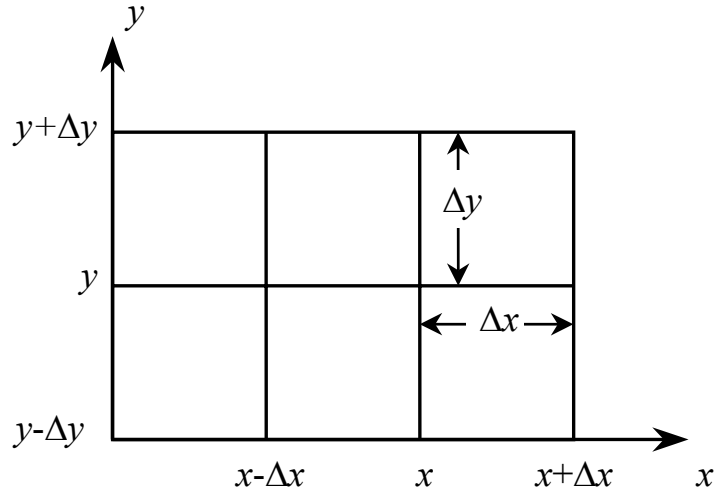


Рисунок 2.1 - Двовимірна чисельна сітка.

В наведених виразах відкинуті члени порядку x , y , а самі похідні називаються центральнорізницевиими, тому що вони симетричні відносно вихідної точки (x,y) . Таке скінченнорізницеве надання застосовується до будь-якого вузла сітки. Як правило, сітки, що використовуються в чисельних методах прогнозу, симетричні відносно координатних осей x і y (рис.2.1), тому кроки x і y однакові. Введемо позначення для кроку чисельної сітки:

$$d = \Delta x = \Delta y. \quad (2.4)$$

Користуючись цим позначенням та безрозмірними координатами по x і y , запишемо формули для перших похідних (2.2), (2.3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} &\approx \frac{f(i+1, j) - f(i-1, j)}{2d}; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} &\approx \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2d}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Послідовно застосовуючи апроксимації перших похідних, можемо

отримати скінченнорізницеві аналоги похідних більш високих порядків. Так для другої похідної маємо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{d^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{d^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для лапласіана функції f отримаємо такий скінченнорізницевий вираз:

$$(\Delta f)_{ij} \approx \frac{1}{d^2} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}). \quad (2.7)$$

Таким чином, замінюючи похідні в диференціальних рівняннях гідротермодинаміки і в межових умовах, ми одержуємо скінченнорізницеві рівняння, які називаються скінченнорізницеви́ми аналогами рівнянь і межових умов, або по-іншому, скінченнорізницеви́ми схемами. Системи скінченнорізницеви́х рівнянь називаються чисельними моделями.

Сукупність скінченнорізницеви́х рівнянь, які апроксимують систему диференціальних рівнянь гідротермодинаміки разом з межовими умовами на множині вузлів сітки в області розв'язання, являє собою замкнуту систему алгебраїчних рівнянь. За допомогою методу сіток вдається систему диференціальних рівнянь звести до системи алгебраїчних рівнянь, методи розв'язання яких відомі і добре розроблені.

Розглянемо в загальних рисах процедуру чисельного прогнозу з використанням методу сіток. Найбільш наглядно це зробити на прикладі простої моделі з одним рівнем, заснованої на розв'язанні баротропного рівняння вихору швидкості.

Відомо, що рівняння вихору швидкості для середнього рівня баротропної атмосфери в геострофічному наближенні має вигляд:

$$\Delta q = \frac{l}{g} A_{\Omega a} \equiv F, \quad (2.8)$$

а, отже, є рівнянням Пуассона відносно невідомої функції $q = \partial H / \partial t$ (тенденції геопотенціалу). В рівнянні (2.8) $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – двомірний оператор Лапласа; l – параметр Коріоліса,

$$A_{\Omega_a} = - \left(u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g \right) \quad (2.9)$$

- геострофічна адвекція абсолютного геострофічного вихору Ω_a . Величина A_{Ω_a} вважається відомою функцією горизонтальних координат, якщо відомо поле геопотенціалу Φ . Тому рівняння (2.8) належить до рівнянь з відомою правою частиною F і його можна використати для визначення поля тенденції геопотенціалу в конкретний момент часу по відомому полю геопотенціалу. Це дає змогу застосувати метод кроків за часом, суть якого полягає у наступному. Весь інтервал часу, на який складається прогноз, розбивається на невеликі проміжки Δt , такі, що

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t,$$

де $s = 0, 1, 2, \dots, S - 1$.

Тоді прогноз можна представити як такий чисельний процес, в якому прогностична модель реалізується кожен раз в межах інтервалу часу Δt . Кінцеві значення Φ повинні визначатись для моменту часу t_s (де $t_s = T$ – строк прогнозу). Блок-схема такого чисельного процесу зображена на рис.2.2.

Пояснення окремих етапів блок-схеми:

1 – в момент часу t_0 задано поле висот ізобаричної поверхні $H(x,y,t)$ для середнього рівня (як правило, за такий рівень приймається ізобарична поверхня $p = 500$ гПа);

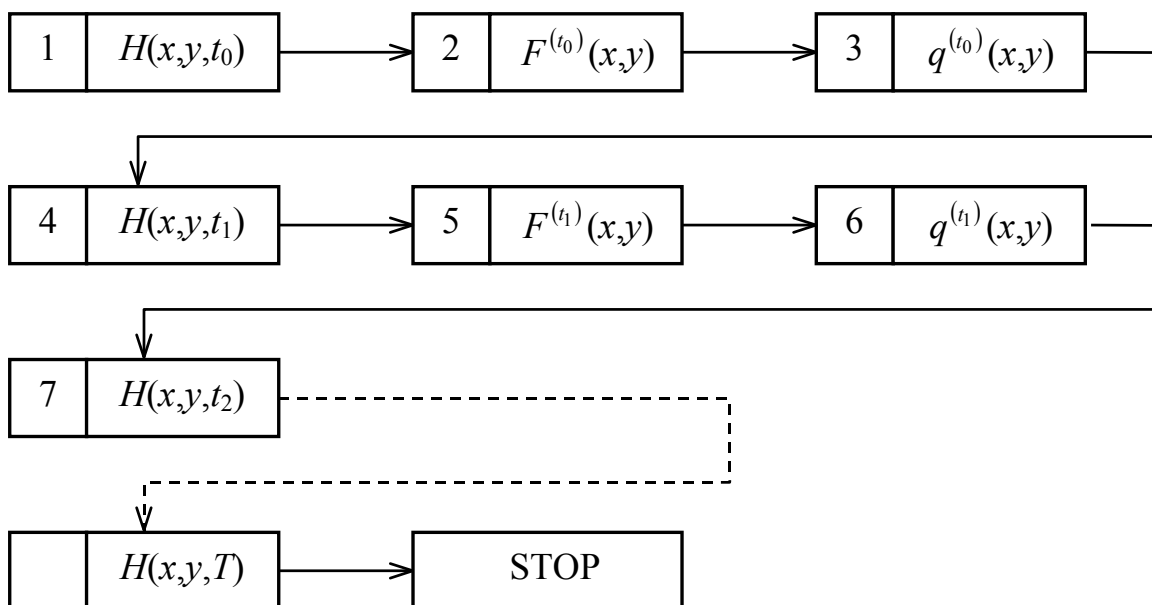


Рисунок 2.2 - Блок-схема прогнозу поля геопотенціалу.

2 - по полю $H(x,y,t_0)$ розраховується поле геострофічної адвекції абсолютного геострофічного вихору за допомогою формули (2.9), і далі права частина F рівняння (2.8);

3 - визначається тенденція геопотенціалу $q^{(t_0)}(x,y)$ в вузлах чисельної сітки за допомогою рівняння Пуассона (2.8);

4 - з допомогою лінійної екстраполяції обчислюються висоти середнього рівня в наступний момент часу t_1 за формулою:

$$H(t_0 + \Delta t) = H(t_0) + q\Delta t. \quad (2.10)$$

Далі обчислювальний процес повторюється - по знайденому (прогностичному) полю $H(x,y,t)$ знаходиться права частина рівняння (2.10) і його розв'язанням обчислюється значення $q(x,y)$ в момент часу t_1 , за формулою (2.10) відтворюється поле висот $H(x,y)$ в наступний момент часу t_2 .

Багаторазове повторювання описаної процедури дозволяє одержати прогностичні значення поля H для заданого моменту часу $t + N\Delta t = T$, де N – число кроків за часом; $N\Delta t$ – прогностичний інтервал часу, T – момент прогнозу.

Аналіз алгоритму задачі прогнозу показує, що для знаходження прогностичних величин в вузлах сітки точок обчислювальної області необхідно визначити праву частину прогностичного рівняння (2.8).

Вираз для геострофічної адвекції абсолютного вихору представлений рівнянням (2.9). Відомо, що в геострофічному наближенні відносний вихор можна виразити через лапласіан H :

$$\Omega_{pg} = \frac{g}{l} \Delta H, \quad (2.11)$$

з урахуванням (2.11) і геострофічних співвідношень ($u_g = -\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y}$,

$v_g = \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x}$) рівняння (2.9) матиме вигляд:

$$A_{\Omega a} = - \left[-\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)}{\partial x} + \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)}{\partial y} \right]. \quad (2.12)$$

Якщо вісь x спрямувати по дотичній до широтного кола ($\partial l/\partial x = 0$), рівняння (2.12) матиме більш простий вигляд:

$$A_{\Omega a} = \frac{g^2}{l^2} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} - \frac{g^2}{l^2} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Delta H}{\partial y} - \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial y}, \quad (2.13)$$

де сума перших двох членів - вираз для геострофічної адвекції відносного вихору $A_{\Omega g}$.

Для спрощення задачі розглянемо методику обчислення величини $A_{\Omega g}$ в будь-якому вузлі i, j чисельної сітки. Щоб отримати величину адвекції абсолютного вихору необхідно до величини адвекції відносного вихору $A_{\Omega g}$ додати член $-\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial y}$, який визначається по заданому полю $H(x, y)$.

2.1 Алгоритм обчислення геострофічної адвекції відносного вихору

Випишемо із (2.13) вираз для геострофічної адвекції відносного вихору у вигляді

$$A_{\Omega a} = \frac{g^2}{l^2} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \Delta H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (2.14)$$

Для скінченнорізницевого зображення похідних і лапласіанів використаємо формули (2.5), (2.7):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{i,j} &\approx \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2d}, \\ \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{i,j} &\approx \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2d}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$(\Delta H)_{i,j} \approx \frac{1}{d^2} (H_{i+1,j} + H_{i,j+1} + H_{i-1,j} + H_{i,j-1} - 4H_{i,j}). \quad (2.16)$$

Як випливає із (2.14)-(2.16), для обчислення адвекції в одній точці з координатами i, j необхідно мати значення висот ізобаричної поверхні H в 13 вузлах чисельної сітки. Якщо вихідне поле задане в $m \times n$ вузлах сітки,

то область обчислення адвекції відносного вихору буде визначена на $(m-4) \times (n-4)$ вузлах сітки.

Представимо в скінченнорізницевому вигляді величину геострофічної адвекції відносного вихору. Скінченнорізницеве значення адвекції позначимо $\tilde{A}_{\Omega g}$:

$$\left(\tilde{A}_{\Omega g}\right)_{i,j} \approx \frac{g^2}{l_j^2} \left[\frac{(\Delta H)_{i+1,j} - (\Delta H)_{i-1,j}}{2d} \frac{(H_{i,j+1} - H_{i,j-1})}{2d} - \frac{(\Delta H)_{i,j+1} - (\Delta H)_{i,j-1}}{2d} \frac{(H_{i+1,j} - H_{i-1,j})}{2d} \right]. \quad (2.17)$$

Як випливає із (2.17), лапласіани H повинні обчислюватися в 4 вузлах, які на рис.2.3 помічені трикутниками.

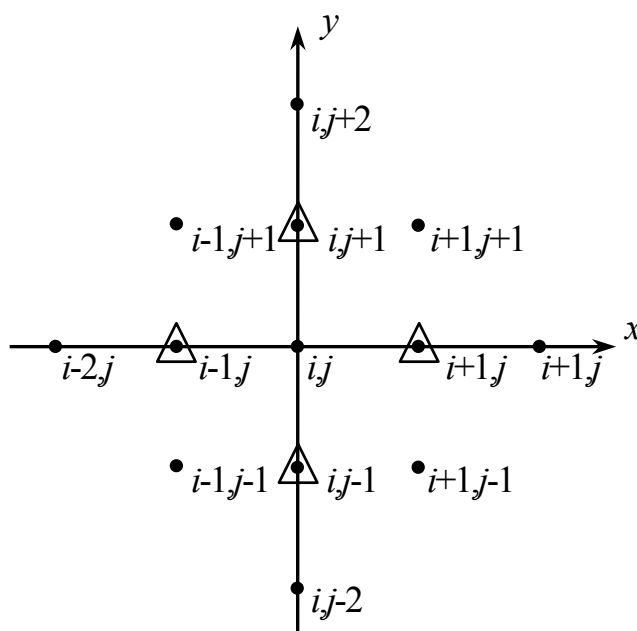


Рисунок 2.3 - Сіткова область для обчислення

2.2 Методи визначення тенденції геопотенціалу

Після того, як праві частини обчислені в області $(m-4) \times (n-4)$ вузлів сітки, можна визначити тенденцію геопотенціалу ($q = \partial H / \partial t$). Для цього використовують два шляхи - аналітичне розв'язання прогностичного

рівняння (2.8) або його чисельне розв'язання.

Розглянемо в загальних рисах перший спосіб. Аналітичний розв'язок рівняння (2.8) в полярних координатах при локальних межових умовах має вигляд [1,2]:

$$q(0,0) \equiv \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ln\left(\frac{R}{r}\right) \tilde{A}_{\Omega a} r dr d\psi, \quad (2.18)$$

де r, ψ - полярні координати; $0, 0$ - координати точки прогнозу, яка по-спідовно переміщується в кожний вузол сітки і при заданих межових умовах завжди співпадає з початком координат; R - радіус кола впливу.

Оскільки функція під знаком інтеграла в (2.18) може бути обчислена в дискретних точках (вузлах сітки), інтеграли беруться чисельно. Для цього область впливу (коло радіусом R), в центрі якого знаходиться точка прогнозу, розбивається на концентричні кільця. В зоні кільця вибирається певна кількість точок (вузлів сітки), в яких може бути знайдена геострофічна адвекція абсолютного вихору. Згідно з формулами чисельних квадратур, які приблизно описують інтеграли, розв'язок (2.17) для конкретного вузла сітки з номером "0" записується у вигляді:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 \approx \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \alpha_k \left(\tilde{A}_{\Omega a}\right)_{k,l}.$$

В цьому виразі k - число контурів, l - кількість точок на контурі. Область впливу вибирається таким чином: навколо точки прогнозу проводяться два кола, одне з яких має радіус d , а друге $2d$. Коло радіусом $3d$ не проводиться, оскільки вважається, що адвекція вихору на цьому контурі не впливає на точку прогнозу, отже, функція впливу (функція Гріна) для кола радіусом $3d$ дорівнює нулю. На рис.2.4 зображена схема вузлів сітки і контури. Із рисунка очевидно, що при $k = 0, l = 1$ (точка прогнозу), при $k = 1, l = 4$ (точки з номерами 1, 2, 3, 4 на першому контурі); при $k = 2, l = 12$ (точки другого контуру з номерами 9, 10, ..., 20). З урахуванням такої нумерації вузлів сітки, рівняння для $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0$ можна представити у вигляді:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_0 \approx a_0 \left(\tilde{A}_{\Omega a}\right)_0 + a_1 \sum_{l=1}^4 \left(\tilde{A}_{\Omega a}\right)_{1,l} + a_2 \sum_{l=9}^{20} \left(\tilde{A}_{\Omega a}\right)_{2,l}. \quad (2.19)$$

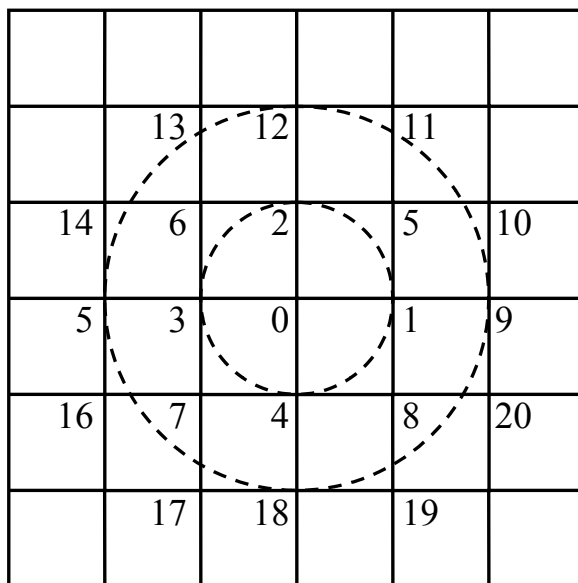


Рисунок 2.4 - Схема вузлів сітки в області інтегрування

У цьому виразі вагові коефіцієнти a , які містять в собі функцію Гріна і сталі, залежать тільки від відстані між точкою прогнозу і контуром (точками впливу), тому вони мають однакові індекси.

Формула (2.19) показує, що у точці прогнозу тенденція складається із сум добутків адвекції абсолютного вихору на деякі вагові коефіцієнти. Найбільші значення a належать точці прогнозу, при віддаленні від неї a зменшуються і на відстані $3d$ дорівнюють нулю.

Розрахувавши $\partial H/\partial t$ за допомогою формули (2.19) за початковими даними - полем $H(x,y,t_0)$ розміром $m \times n$ у всіх внутрішніх вузлах $(m-4) \times (n-4)$, задача вирішується кроками за часом так, як зображено на блок-схемі (рис.2.2, пункт 4).

Другий спосіб розв'язання прогностичної задачі відрізняється від першого тим, що у ньому чисельні методи використовуються з самого початку. Для кожного вузла сітки, в якому знайдена величина геострофічної адвекції абсолютного вихору, записується прогностичне рівняння (2.8). В ньому диференціальні оператори замінюються скінченнорізницевиими операторами. Таким чином формується система алгебраїчних рівнянь. Порядок цієї системи визначається числом вузлів сітки, для яких може бути обчислена права частина рівняння (2.8). Для розв'язання цієї системи використовують чисельні методи послідовних наближень, які називаються ітераційними.

Суть ітераційних методів у багаторазовому повторенні одного й того ж простого алгоритму, що дає результат, який послідовно наближається до точного розв'язку. Ітерації починаються із задання вихідного приблизного

розв'язку. Потім вихідні значення невідомих функцій у вузлах сітки послідовно змінюються доти, поки не досягається задана точність розв'язку. Швидкість збіжності ітераційного методу дуже залежить від ступеня точності початкової апроксимації [1,3].

Як було обумовлено вище, у випадку, коли в прогностичному рівнянні (2.8) невідому величину розглянути як тенденцію геопотенціалу, задача зведеться до розв'язання рівняння Пуассона.

Розглянемо квадратну сітку прямокутної області. Направимо осі координат x і y уздовж сторін цієї сітки. Нехай число вузлів цієї сітки, в яких розрахована права частина дорівнює $m \times n$, де m і n число вузлів уздовж осей x і y відповідно. Величину тенденції q в точці з координатами i, j будемо скорочено позначати через $q_{i,j}$. Таке ж позначення приймемо і для правої частини рівняння вихору $F_{i,j} = d^2(A_\Omega)_{ij}$ в вузлах квадратної сітки. Оператор Лапласа у цьому рівнянні представимо найпростішим скінченно-різницеvim еквівалентом з кроком d (рис.2.5):

$$(\Delta q)_{i,j} \approx \frac{1}{d^2} (q_{i+1,j} + q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} - 4q_{i,j}). \quad (2.20)$$

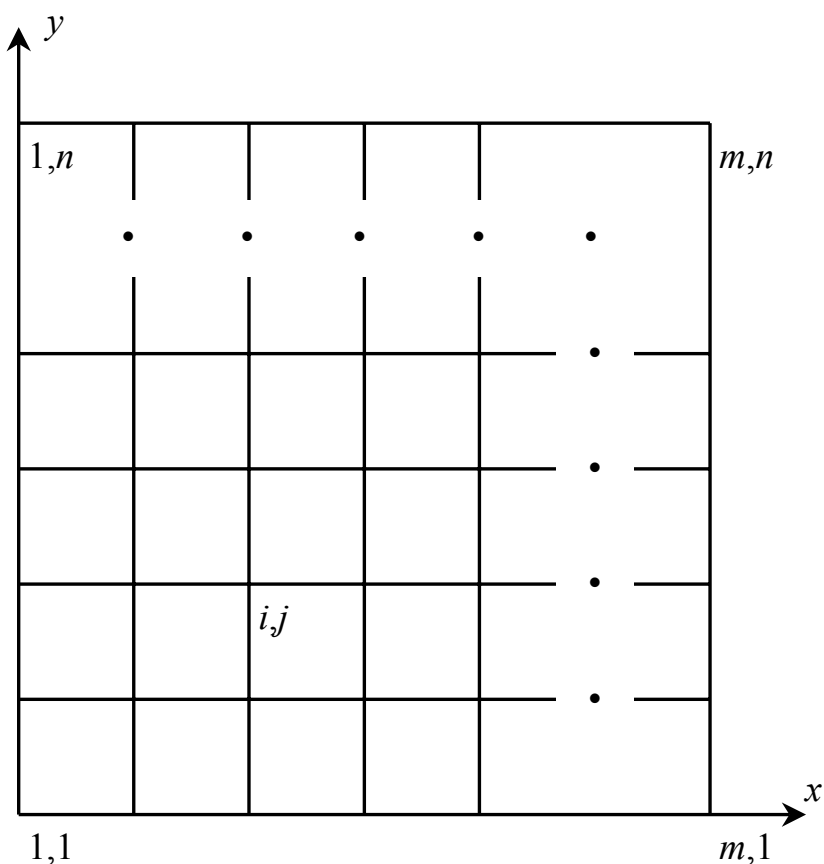


Рисунок 2.5 - Квадратна сітка вузлів прямокутної області.

В прийнятих позначеннях найпростіше скінченнорізницеве баротропне рівняння вихору (2.8) має вигляд:

$$(q_{i+1,j} + q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} - 4q_{i,j}) = F_{i,j} \quad (2.21)$$

і є найпростішим скінченнорізницеvim рівнянням Пуассона [1,3].

Рівняння (2.21) може бути застосовано до всіх вузлів сітки, крім вузлів, що належать до меж області. Кількість внутрішніх вузлів сітки або число рівнянь (2.21) дорівнює $(m-2) \times (n-2)$. Число невідомих $q_{i,j}$ дорівнює кількості всіх вузлів сітки з межевими включно і становить $m \times n$. Це означає, що система рівнянь (2.21) є не замкненою. Для того, щоб її замкнути, необхідно скористуватися межевими умовами. Досить часто використовують так звані фіктивні межеві умови: $q|_{\Gamma} = 0$.

Зупинимось на деяких ітераційних методах, які використовують при розв'язанні прогностичного рівняння (2.8).

2.2.1 Метод Річардсона

Запишемо рівняння (2.21) у вигляді:

$$q_{i,j} = \frac{1}{4}(q_{i+1,j} + q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} - F_{i,j}). \quad (2.22)$$

Добре відомо, що метод Річардсона для рівнянь вигляду (2.21) є процесом, який збігається, тому можна задавати будь-які початкові значення q . Задамо їх рівними нулю:

$$\{q^{(0)}\}_{i,j} = 0. \quad (2.23)$$

Номер ітерації позначається за допомогою верхнього індексу у дужках. На першій ітерації одержимо:

$$q_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4}(q_{i+1,j}^{(0)} + q_{i-1,j}^{(0)} + q_{i,j+1}^{(0)} + q_{i,j-1}^{(0)} - F_{i,j}).$$

Поле функції F обчислюється по полю геопотенціалу і від ітерацій не залежить:

$$\{q^{(1)}\}_{i,j} = -\frac{1}{4}F_{i,j}. \quad (2.24)$$

Поле q на другій ітерації матиме вигляд:

$$\{q^{(2)}\}_{i,j} = \frac{1}{4} (q_{i+1,j}^{(1)} + q_{i,j+1}^{(1)} + q_{i-1,j}^{(1)} + q_{i,j-1}^{(1)} - F_{i,j}). \quad (2.25)$$

В загальному вигляді розв'язок методом Річардсона можна записати таким чином:

$$\{q^{(v+1)}\}_{i,j} = \frac{1}{4} (q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v)} + q_{i-1,j}^{(v)} + q_{i,j-1}^{(v)} - F_{i,j}). \quad (2.26)$$

Тут $i = 3, 4, \dots, n - 2, j = 3, 4, \dots, m - 2; v = 0, 1, 2, \dots$.

Ітераційний процес продовжується до тих пір, доки у всіх чисельних вузлах не буде виконуватися умова:

$$\max |q_{i,j}^{(v+1)} - q_{i,j}^{(v)}| \leq \varepsilon, \quad (2.27)$$

де ε - задана точність розв'язку.

Одержане поле q є розв'язком (2.26) з точністю ε [1,3].

Підкреслимо, що з другого кроку за часом доцільно у вигляді нульового наближення використовувати значення q на попередньому кроці за часом. У цьому випадку процес зійдеться значно швидше:

$$\{q_{i,j}^{(0),t_{k+1}}\} = \{q_{i,j}^{(v+1),t_k}\}, \quad (2.28)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots, k$ (k - номер кроку за часом).

Алгоритм розв'язання рівняння Пуассона методом Річардсона зводиться до послідовності формул (2.26), (2.27), (2.28).

2.2.2 Метод Лібмана

Цей метод враховує послідовність і напрямок обчислення на сітці. Припустимо, що процедура обчислення передбачає переміщення зліва направо і зверху вниз. Тоді для вузлів $(i,j+1, i-1,j)$ величини тенденцій відомі на старших ітераціях $(v+1)$ (рис.2.6).

Обчислення q методом Лібмана проводиться за формулою:

$$q_{i,j}^{(v+1)} = \frac{1}{4} (q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v+1)} + q_{i-1,j}^{(v+1)} + q_{i,j-1}^{(v)} - F_{i,j}). \quad (2.29)$$

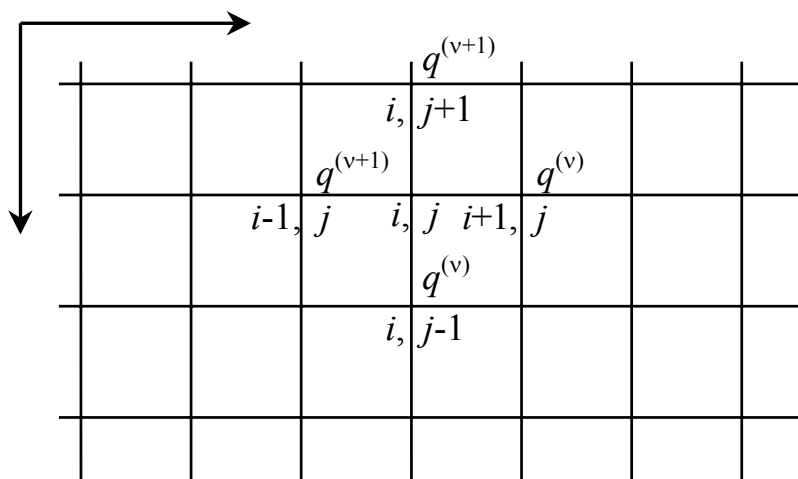


Рисунок 2.6 - Симетрична сітка точок (стрілками вказано напрямок обходу).

Використання q на старших ітераціях ($v+1$) приводить до того, що процес збіжності прискорюється. Алгоритм по Лібману описується рівняннями (2.29), (2.28) і умовою (2.27).

2.2.3 Релакційний метод Саутвелла

В основі цього методу лежить послідовне зменшення похибок (різниці між чисельним і фактичним значенням функції) у всіх вузлах сітки. Відповідно до розв'язку прогностичної задачі похибка буде визначатись як різниця між лівими і правими частинами системи рівнянь:

$$R_{i,j}^{(v)} = (q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v)} + q_{i-1,j}^{(v)} + q_{i,j-1}^{(v)} - F_{i,j}). \quad (2.30)$$

Поле q на старших ітераціях знаходиться як сума $q_{i,j}$ на попередньому кроці і похибки $R_{i,j}$:

$$q_{i,j}^{(v+1)} = q_{i,j}^{(v)} + \alpha R_{i,j}^{(v)}, \quad (2.31)$$

де α – коефіцієнт релаксації.

Він описує різницю між дійсним і чисельним значенням на конкретному кроці. Коефіцієнт релаксації залежить від розмірів сіткової області. Оптимальне число α пов'язане з числом вузлів сітки таким співвідношенням:

$$\alpha_{\text{опт}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \left(\cos \frac{\pi}{m-1} + \cos \frac{\pi}{n-1} \right)^2}}. \quad (2.32)$$

2.2.4 Екстраполяційний метод Лібмана

Значення q на старших ітераціях визначаються із системи рівнянь:

$$q_{i,j}^{(v+1)} = q_{i,j}^{(v)} + \alpha R_{i,j}^{(v,v+1)}, \quad (2.33)$$

де

$$R_{i,j}^{(v,v+1)} = (q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v+1)} + q_{i-1,j}^{(v+1)} + q_{i,j-1}^{(v)} - 4q_{i,j} - F_{i,j}). \quad (2.34)$$

При практичній реалізації значення α , обчислені за допомогою рівняння (2.32), можуть бути лише орієнтовними. Значення α розраховуються за допомогою чисельних експериментів. Для кожної контрольної схеми α будуть різними. Звичайно його вибирають значно більшим, ніж отримане за формулою (2.32). Таке значення називається коефіцієнтом перелаксації. В систему (2.33) входять саме такі α .

Застосування одного з ітераційних методів в сукупності з методом кроків за часом, у принципі, достатньо для того, щоб одержати чисельний прогноз висоти ізобаричної поверхні середнього рівня. Але при реалізації такої схеми виникає ряд перешкод. По-перше, вони пов'язані з проблемами чисельної стійкості різноманітних скінченнорізницевих схем. При розв'язанні прогностичної задачі диференціальне рівняння вихору замінюється скінченнорізницевим, таким чином, у цьому рівнянні здійснюється перехід від похідних до скінченних різниць. Це завжди пов'язано з виникненням помилок, які прийнято називати помилками скінченнорізницевого наближення або трункаційними помилками. Вони збільшуються при переміщенні кроками за часом. Необхідно застосувати спеціальні заходи, щоб запобігти швидкому зростанню цих помилок.

Одним із таких заходів є вибір кроку Δt . В математиці добре відомий критерій Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ), який справедливий для лінійного рівняння переносу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (2.35)$$

де f - невідома функція,

u, v - складові швидкості вітру, які є сталими.

Згідно з критерієм КФЛ, часовий крок повинен задовольняти умову:

$$\Delta t \leq \frac{d}{V_{\max} \sqrt{2}}, \quad (2.36)$$

де d - крок у просторі по координатах x і y ,

V_{\max} - найбільше для заданої області і інтервалу часу значення модуля швидкості.

Із (2.36) впливає залежність між кроками просторової сітки і кроками по осі часу. Чим меншим є вибраний крок у просторі, тим меншими інтервалами за часом необхідно користуватися для того, щоб уникнути зростання труктаційних помилок.

Однак квазігеострофічне рівняння вихору (2.37) на відміну від (2.35) не є лінійним і критерій КФЛ до нього застосувати не можливо:

$$\frac{\partial \Omega_a}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_a}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_a}{\partial y} = 0. \quad (2.37)$$

Із спостережень за вітром на середньому рівні відомо, що його величини не перевищують 150 км/год. Для оцінки Δt в першому наближенні і для нелінійного рівняння вихору також скористаємось критерієм (2.36). Тоді очевидно, що Δt для сітки з кроком за простором 300 км не повинен перевищувати 1,5 години.

2.3 Чисельні методи розв'язання прогностичного рівняння для бароклінної атмосфери

Чисельні методи розв'язання прогностичної задачі для бароклінної атмосфери, як і для баротропної, розроблювалися у двох напрямках. По-перше, це пошуки аналітичного розв'язку, у якому інтеграли будуть знаходитися чисельно, по-друге, складання системи алгебраїчних рівнянь, в якій прогностичне рівняння зображується в скінченнорізницевому вигляді. Стисло охарактеризуємо ці два напрямки.

Аналітичний розв'язок прогностичного рівняння зображається у вигляді просторових потрійних інтегралів:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{0,0,\zeta} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R \tilde{A}_{\Omega a}(r, \psi, \xi) G_{\Omega}(r, \zeta, \zeta') r dr d\psi d\zeta' + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R \tilde{A}_{Tg}(r, \psi, \zeta) G_T(r, \zeta, \zeta') r dr d\psi d\zeta'. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Запишемо його в квадратурах, тоді величина тенденції геопотенціалу у деякій точці тривимірної сітки буде обчислюватися за формулами:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{\zeta=0,85} &\approx \sum_{\ell=1}^5 \sum_{m=0}^3 a_k^\ell(\zeta=0,85)F_m^\ell; \\
 \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{\zeta=0,5} &\approx \sum_{\ell=1}^5 \sum_{m=0}^3 a_k^\ell(\zeta=0,5)F_m^\ell; \\
 \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{\zeta=0,3} &\approx \sum_{\ell=1}^5 \sum_{m=0}^3 a_k^\ell(\zeta=0,3)F_m^\ell.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

У рівняннях (2.39) F^ℓ – сума значень однієї із п'яти величин (якобіанів $(H, \Delta H)_{850}$, $(H, \Delta H)_{500}$, $(H, \Delta H)_{300}$, і (H_{500}, H_{850}) , (H_{500}, H_{300})), що описують адвекцію вихору і температури на конкретних ізобаричних поверхнях. Підсумовування проводиться по точках m -того контуру (m набуває значення 0,1,2,3). Верхній індекс при F вказує на тип фізичної величини; індекси $\ell = 1, 2, 3$ відповідно до величини $\frac{g}{l}(H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x}$, яка характеризує геострофічну адвекцію абсолютного вихору, вказують на приналежність до ізобаричної поверхні 850, 500, 300 гПа, а $\ell = 4, 5$ якобіани (H_{500}, H_{850}) і (H_{500}, H_{300}) , які характеризують температурну адвекцію в шарах 850-500 і 500-300 гПа.

Таким чином, зміна висоти ізобаричної поверхні за одиницю часу в точці прогнозу зображується як сума здобутків адвекцій абсолютного вихору та температури на відповідні вагові коефіцієнти. Підсумовування проводиться по всіх вузлах сітки, які знаходяться у межах області впливу. В тривимірній моделі для барокліної атмосфери область впливу – це циліндр радіусом R ($R = 3d$), його нижня основа лежить на ізобаричній поверхні $p = 1000$ гПа ($\zeta = 1$), а верхня - на поверхні 300 гПа ($\zeta = 0.3$). Точки впливу лежать на основних ізобаричних поверхнях і співпадають з вузлами сітки. Точки прогнозу розташовуються на осі циліндра.

Підсумовування по точках контуру на кожній ізобаричній поверхні для будь-якого впливового фактора може бути виконане за такими формулами:

$$F_0^\ell = A_0^\ell; F_1^\ell = \sum_{i=1}^8 A_1^\ell; F_2^\ell = \sum_{i=1}^{12} A_2^\ell; F_3^\ell = \sum_{i=1}^{16} A_3^\ell, \tag{2.40}$$

де A^ℓ - значення фізичного фактора в точках на контурах,
 A_0^ℓ - значення ℓ -того фактора в точці прогнозу.

Співставлення рис.2.3 і 2.7, а також формул (2.19) і (2.39), показує, що алгоритми інтегрування по горизонтальних координатах в баротропній і бароклінній атмосферах практично не відрізняються, відміна полягає лише у виборі контурів та у кількості вузлів сітки на контурах. Відмітимо також і те, що при інтегруванні (рис.2.7) область впливу буде мати форму не циліндра, а восьмикутника. Оптимальні алгоритми інтегрування, як прави-

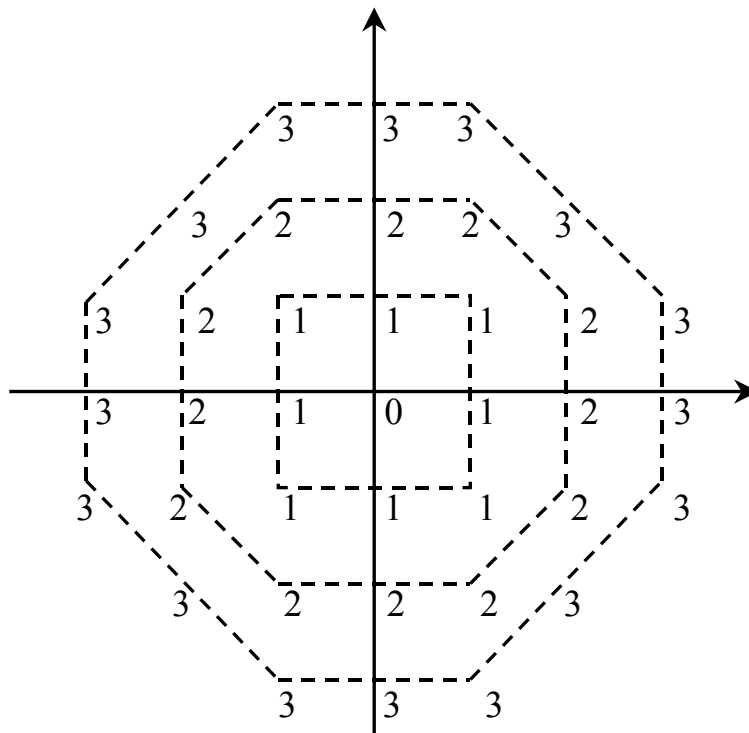


Рисунок 2.7 - Схема вузлів сітки в області впливу

ло, встановлюються в результаті чисельних експериментів.

Після обчислення за вихідними даними H згідно з формулами (2.39) можна отримати прогностичні поля H для основних ізобаричних поверхонь за допомогою методу кроків за часом.

Другий напрямок знаходження розв'язку прогностичної задачі - використання чисельних методів. Прогностичне рівняння в системі координат матиме вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} + C^2 \Delta q = F, \quad (2.41)$$

де $q = \partial H / \partial t$ - зміна висоти ізобаричної поверхні за одиницю часу, $C^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g l^2}$ - параметр статичної стійкості, який для спрощення задачі

вважається сталим.

Права частина в (2.41) має вигляд:

$$F = C^2 l^2 A_\Omega - R \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta A_T).$$

Величина F вважається також постійною, оскільки адвекцію вихору A_Ω і адвекцію температури A_T обчислюють у вузлах сітки за вихідними даними. Відносно невідомої величини q рівняння (2.41) є диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку. При його реалізації використовуються такі чисельні методи:

1. Якщо виразити через скінченні різниці похідні лише по горизонтальних координатах, не змінивши похідні по ζ , отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка виконується на множині дискретно розташованих прямих. Такий метод носить назву методу прямих.

2. При переході до скінченних різниць тільки по вертикальній координаті, одержимо систему диференціальних рівнянь, яка виконується на множині поверхонь $\zeta = \mathbf{const}$. Це так званий метод площин.

3. Якщо виразити через скінченні різниці похідні по всіх трьох координатах, розв'язок знайдеться на множині дискретно розташованих точок, які створюють просторову ґратку.

На останньому методі зупинимось більш детально. Для полегшення викладення прийемо деякі спрощення. Будемо вважати, що параметр стійкості не залежить від координат, просторова ґратка є призматичною, утворена квадратними сітками із сторонами, паралельними осям x і y , ізобаричні поверхні однаково віддалені одна від одної.

Для утворення такої просторової ґратки розіб'ємо весь діапазон вертикальної координати ζ на ряд площин ζ_k , де $k = 0, 1, 2, \dots, n$ (n - число шарів, $h = 1/n$). На кожній площині проведемо лінії, паралельні осям x та y . Весь діапазон змінювання x поділимо на інтервали з кроком d ($x_0, x_1, x_2, \dots, x_\ell$). Позначимо координату x індексом i , тоді $x = id$ ($i = 0, 1, 2, \dots, \ell$). Аналогічно вчинимо з координатою y : $y = jd$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m$). Змінну величину q у точці з координатами x, y , будемо позначати $q_{i,j}$ або $q(x_i, y_j) = q_{i,j}$. Відповідно $q(x_i, y_j, \zeta_k) = q_{i,j,k}$.

Такі ж позначення прийемо для величин правої частини рівняння

(2.41) у відповідних вузлах ґратки та замінимо похідні скінченно-різницьовими співвідношеннями. Для того, щоб перейти до скінченних різниць по вертикальній координаті, введемо крім рівнів з цілими індексами рівні з дробовими індексами. Тоді:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{h}(q_{i,j,k+1} - q_{i,j,k}) = n(q_{i,j,k+1} - q_{i,j,k}). \quad (2.42)$$

Аналогічно:

$$\left(\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}{n^2} n(q_{i,j,k+1} - q_{i,j,k}), \quad (2.43)$$

$$\left(\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \approx \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2}{n^2} n(q_{i,j,k} - q_{i,j,k-1}). \quad (2.44)$$

На основі (2.43),(2.44) дістанемо:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)\right]_{i,j,k} \approx \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 (q_{i,j,k+1} - q_{i,j,k}) - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 (q_{i,j,k} - q_{i,j,k-1}). \quad (2.45)$$

Прийmemo таке позначення :

$$a_{k,k+1} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2; a_{k,k-1} = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2; a_{k,k} = 2k^2 + \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

З його врахуванням вираз (2.45) матиме вигляд

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)\right]_{i,j,k} \approx a_{k,k+1} q_{i,j,k+1} - a_{k,k} q_{i,j,k} + a_{k,k-1} q_{i,j,k-1}. \quad (2.47)$$

Перший індекс біля коефіцієнтів a показує рівень, для якого записується рівняння (2.41), другий індекс показує номер рівня, на якому береться відповідне значення тенденції геопотенціалу.

Розпишемо другий член лівої частини рівняння (2.41), враховуючи позначення і шаблони скінченнорізницевої апроксимації по горизонтальних координатах:

$$C^2 \Delta q_{i,j,k} = \frac{C^2}{d^2} (q_{i+1,j,k} + q_{i,j+1,k} + q_{i-1,j,k} + q_{i,j-1,k} - 4q_{i,j,k}). \quad (2.48)$$

Підставимо вирази (2.47) і (2.48) у рівняння (2.41). Одержимо:

$$\begin{aligned} a_{k,k+1} q_{i,j,k+1} + a_{k,k-1} q_{i,j,k-1} + \frac{C^2}{d^2} (q_{i+1,j,k} + q_{i,j+1,k} + q_{i-1,j,k} + q_{i,j-1,k}) - \\ - \left(a_{kk} + \frac{4C^2}{d^2} \right) q_{i,j,k} = F_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Рівняння (2.49) можуть бути записані для всіх вузлів ґратки окрім точок, які знаходяться на межових поверхнях, і, таким чином, утворюють систему рівнянь $(\ell - 1) \times (m - 1) \times (n - 1)$, що відповідає числу внутрішніх точок ґратки. Число невідомих у цій системі дорівнює числу точок ґратки, і, таким чином, становить $(\ell + 1) \times (m + 1) \times (n + 1)$. Рівняння, яких не вистачає для замкнення системи, потрібно знаходити за допомогою межових умов. Межові умови для цієї задачі мають вигляд:

$$q_{0,j,k} = q_{\ell,j,k} = q_{i,0,k} = q_{i,m,k} = 0. \quad (2.50)$$

Для того, щоб записати межові умови по вертикальній координаті, виконаємо деякі перетворення. Випишемо спочатку верхні та нижні умови в такому вигляді:

$$\text{при } \zeta = 0 \quad \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.51)$$

$$\text{при } \zeta = 1 \quad \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \alpha q = -RA_T. \quad (2.52)$$

На підставі рівняння (2.51) запишемо верхню межову умову для середини верхнього інтервалу, тобто для рівня

$$\frac{\zeta_0 + \zeta_1}{2} = \frac{\zeta_1}{2} = \frac{0 + h}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Тоді замість (2.51) отримаємо

$$\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)^2 \frac{(q_{i,j,1} - q_{i,j,0})}{h} = 0$$

або, оскільки $\zeta_1 \neq 0$ і $h \neq \infty$, верхня межова умова матиме вигляд:

$$q_{i,j,1} - q_{i,j,0} = 0. \quad (2.53)$$

Для нижнього рівня із (2.52) при переході до скінченних різниць одержимо:

$$\zeta_n \frac{q_{i,j,n} - q_{i,j,n-1}}{h} + \alpha q_{i,j,n} = -R(A_T)_{i,j,n}.$$

З урахуванням того, що $\zeta_n = 1$ і $1/h = n$, останнє рівняння матиме вигляд:

$$(n + \alpha)q_{i,j,n} - nq_{i,j,n-1} = -R(A_T)_{i,j,n}. \quad (2.54)$$

Загальна кількість рівнянь системи (2.49), (2.50), (2.53), (2.54) відповідає кількості невідомих величин і є замкненою. Скориставшись граничними умовами (2.53) і (2.54), замінимо q за допомогою (2.49), при цьому отримуємо замкнену систему, яка складається із $(\ell - 1) \times (m - 1) \times (n - 1)$ рівнянь. Використавши межові умови по вертикальній координаті, запишемо систему в розгорненому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} a_{1,2}q_{1,1,2} + a_{1,0}q_{1,1,0} + \frac{C^2}{d^2}(q_{1,2,1} + q_{1,0,1} + q_{2,1,1} + q_{0,1,1}) - \left(a_{1,1} + \frac{4C^2}{d^2}\right)q_{1,1,1} &= F_{1,1,1} \\ a_{1,2}q_{2,1,2} + a_{1,0}q_{2,1,0} + \frac{C^2}{d^2}(q_{3,1,1} + q_{1,1,1} + q_{2,2,1} + q_{2,0,1}) - \left(a_{1,1} + \frac{4C^2}{d^2}\right)q_{2,1,1} &= F_{2,1,1} \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1,n}q_{\ell-1,m-1,n} + a_{n-1,n-2}q_{\ell-1,m-1,n-2} + \frac{C^2}{d^2}(q_{\ell-1,m,n-1} + q_{\ell-1,m-2,n-1} + q_{\ell,m-1,n-1} + q_{\ell-2,m-1,n-1}) - \\ &\quad - \left(a_{n-1,n-1} + \frac{4C^2}{d^2}\right)q_{\ell-1,m-1,n-1} = F_{\ell-1,m-1,n-1} \end{aligned} \right\} (2.55)$$

Записуючи рівняння для першого обчислювального рівня ($k = 1$),

можна помітити, що з'явилися члени виду $a_{1,0}q_{ij,0}$ (при $i = j = 1$ він має вигляд $a_{1,0}q_{1,1,0}$), де $q_{1,1,0}$ - відповідає функції q на верхній межі області обчислення ($k = 0$).

При записі рівнянь для останнього рівня ($k = n-1$) з'являються члени, в які входять величини $q_{ij,n}$ на нижній межі області обчислення. У відповідності з верхньою межевою умовою виразимо $q_{ij,0}$ через тотожний йому значення $q_{ij,1}$ і запишемо рівняння:

$$q_{i,j,0} = q_{i,j,1}. \quad (2.56)$$

Підставимо (2.56) в перше рівняння системи (2.55):

$$a_{1,2}q_{1,1,2} + \frac{C^2}{d^2}(q_{1,2,1} + q_{1,0,1} + q_{2,1,1} + q_{0,1,1}) - \left(a_{1,1} - a_{1,0} + \frac{4C^2}{d^2} \right) q_{1,1,1} = F_{1,1,1}. \quad (2.57)$$

Використавши умову (2.54), одержимо:

$$q_{i,j,n} = \frac{n}{n + \alpha} q_{i,j,n-1} - \frac{R}{n + \alpha} (A_T)_{i,j,n} \quad (2.58)$$

Тоді останнє рівняння системи (2.55) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & a_{n-1,n} \frac{n}{n + \alpha} q_{\ell-1,m-1,n-1} - a_{n-1,n} \frac{R}{n + \alpha} (A_T)_{\ell-1,m-1,n} + a_{n-1,n-2} q_{\ell-1,m-1,n-2} + \\ & + \frac{C^2}{d^2} (q_{\ell-1,m,n-1} + q_{\ell-1,m-2,n-1} + q_{\ell,m-1,n-1} + q_{\ell-2,m-1,n-1}) - \left(a_{n-1,n-1} + \frac{4C^2}{d^2} \right) \times \\ & \times q_{\ell-1,m-1,n-1} = F_{\ell-1,m-1,n-1}. \end{aligned}$$

Згрупувавши члени, які вміщують величину A_T , останнє рівняння запишемо так:

$$\begin{aligned} & a_{n-1,n-2} q_{\ell-1,m-1,n-1} + \frac{C^2}{d^2} (q_{\ell-1,m,n-1} + q_{\ell-1,m-2,n-1} + q_{\ell,m-1,n-1} + q_{\ell-2,m-1,n-1}) - \\ & - \left(a_{n-1,n-1} - \frac{n}{n + \alpha} a_{n-1,n} + \frac{4C^2}{d^2} \right) q_{\ell-1,m-1,n-1} = \\ & = F_{\ell-1,m-1,n-1} + a_{n-1,n} \left(\frac{R}{n + \alpha} \right) (A_T)_{\ell-1,m-1,n-1}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Виключити нульові межові умови по горизонтальних координатах (2.50) із системи (2.49) можна, підставляючи замість

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.60)$$

Використовуючи (2.57), (2.59) і позначення (2.60), приведемо систему (2.49) до вигляду:

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_{k,n-1})a_{k,k+1}q_{i,j,k+1} + (1 - \delta_{k,1})a_{k,k-1}q_{i,j,k-1} + \frac{C^2}{d^2} [(1 - \delta_{i,1})q_{i-1,j,k} + \\ & + (1 - \delta_{i,\ell-1})q_{i+1,j,k} + (1 - \delta_{i,k})q_{i,j-1,k} + (1 - \delta_{j,m-1})q_{i,j+1,k}] - \\ & - \left(a_{k,k} - \delta_{k,1}a_{1,0} - \delta_{k,n-1} \frac{n}{n+\alpha} a_{n-1,n} + \frac{4C^2}{d^2} \right) q_{i,j,k} = \\ & = F_{i,j,k} + \delta_{k,n-1} \frac{R}{n+\alpha} a_{n-1,n} (A_T)_{i,j,n}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Ця система має $(\ell-1) \times (m-1) \times (n-1)$ рівнянь з $(\ell-1) \times (m-1) \times (n-1)$ невідомими значеннями тенденцій q у всіх внутрішніх вузлах сітки. Для стислого запису цієї системи введемо позначення:

$$\left. \begin{aligned} & (1 - \delta_{k,n-1})a_{k,k+1} = b_{k,k+1}; \\ & (1 - \delta_{k,1})a_{k,k-1} = b_{k,k-1}; \\ & \frac{C^2}{d^2} (1 - \delta_{i,1}) = c_{i-1,j}; \quad \frac{C^2}{d^2} (1 - \delta_{i,\ell-1}) = c_{i+1,j}; \\ & \frac{C^2}{d^2} (1 - \delta_{j,1}) = c_{i,j-1}; \quad \frac{C^2}{d^2} (1 - \delta_{j,m-1}) = c_{i,j+1}; \\ & a_{k,k} - \delta_{k,1}a_{1,0} - \delta_{k,n-1} \frac{n}{n+\alpha} a_{n-1,n} + \frac{4C^2}{d^2} = \beta k; \\ & F_{i,j,k} + \delta_{k,n-1} \frac{R}{n+\alpha} a_{n-1,n} (A_T)_{i,j,k} = f_{i,j,k}. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Перепишемо систему (2.61):

$$\begin{aligned} & b_{k,k+1}q_{i,j,k+1} + b_{k,k-1}q_{i,j,k-1} + c_{i-1,j}q_{i-1,j,k} + c_{i+1,j}q_{i+1,j,k} + c_{i,j-1}q_{i,j-1,k} \\ & + c_{i,j+1}q_{i,j+1,k} - \beta k q_{i,j,k} = f_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.63) може бути розв'язана за допомогою одного з точних методів (наприклад, методом послідовного виключення невідомих Гаусса). Але оскільки система має, як правило, високий порядок, доцільніше використовувати ітераційні методи.

Із застосуванням одного з ітераційних методів, систему (2.63) відносно $q_{i,j,k}$ запишемо у вигляді:

$$q_{i,j,k}^{(v+1)} = \frac{1}{\beta_k} \left[b_{k,k-1} q_{i,j,k-1}^{(v)} + b_{k,k+1} q_{i,j,k+1}^{(v)} + c_{i-1,j} q_{i-1,j,k}^{(v)} + c_{i+1,j} q_{i+1,j,k}^{(v)} + c_{i,j-1} q_{i,j-1,k}^{(v)} + c_{i,j+1} q_{i,j+1,k}^{(v)} - f_{i,j,k} \right].$$

Верхній індекс означає номер ітерації. На кожній ітерації проводиться обчислення всіх $(\ell-1) \times (m-1) \times (n-1)$ величин $q_{i,j,k}^{(v)}$ ($i = 1, 2, \dots, \ell-1; j = 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, n-1; v - \text{const}$).

За нульове наближення $q_{i,j,k}^{(0)}$ може бути прийняте поле q , яке визначили на попередньому кроці за часом. Обчислення припиняться, коли виконається умова:

$$\max |q_{i,j,k}^{(v)} - q_{i,j,k}^{(v-1)}| \leq \varepsilon,$$

де ε - задана мала величина.

Для прискорення збіжності можна використати метод Лібмана.

РОЗДІЛ 3

АПРОКСИМАЦІЯ ПОХІДНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ СІТОК. СКІНЧЕННОРІЗНИЦЕВІ СХЕМИ

Точність розв'язання метеорологічних задач значною мірою залежить від точності обчислення просторових і часових похідних. На сьогоднішній день ми не маємо можливості застосувати відповідні методи диференціювання функцій, заданих аналітично, тому вимушені приблизно замінювати похідні скінченнорізницевиими аналогами, або, як кажуть, скінченнорізницевиими наближеннями. Отримані результати представляють собою малу різницю (різницю значень метеорологічних величин в двох точках у просторі чи часі) великих змінних. Перші похідні обчислюються з помітними похибками, а перехід від перших до других похідних еквівалентний ще одному скінченнорізницевому наближенню і т.д. Таким чином, чим більший порядок похідної треба обчислити, використовуючи той чи інший обчислювальний метод, тим більший вплив на результат будуть мати похибки у вихідних даних, а отже, тим менша точність результатів.

Перша похідна від будь-якої функції f по аргументу η є границею відношення приросту функції Δf до зміни аргументу $\Delta\eta$, за умови, що $\Delta\eta$ наближується до нуля:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{f(\eta + \Delta\eta) - f(\eta)}{\Delta\eta}. \quad (3.1)$$

Обчислена за формулою (3.1) похідна належить до точки з координатою η . Ця формула дозволяє обчислити похідну у тому випадку, коли відомий вид залежності $f(\eta)$, а отже, функція $f(\eta)$ задана аналітично.

Відомо, що всі метеорологічні величини залежать від просторових координат x , y , z і часу t . Але вид цієї залежності дуже складний і є невідомою функцією. Однак можна навести багато прикладів аналітичного опису залежності метеорологічних величин від окремих координат в просторі чи часі. Наприклад, добре відомі задовільні результати опису за допомогою логарифмічної функції вертикального розподілу температури, вологи, швидкості вітру в приземному шарі повітря. В окремих шарах атмосфери добре виправдовується лінійне подання змін температури з висотою. Інколи добовий хід температури описують за допомогою періодичних функцій (наприклад, синусоїди); залежність метеорологічних величин від

горизонтальних координат і часу також можна приблизно задавати аналітично у вигляді поліномів, тригонометричних функцій, сферичних чи інших. Для всіх перелічених функцій похідні можуть бути знайдені за наведеною формулою (3.1).

При розв'язанні більшості метеорологічних задач мають справу не з аналітично заданими функціями, а з дискретними даними, із величинами метеорологічних параметрів в окремих точках (наприклад, у вузлах сітки, які співпадають з метеостанціями) і в окремі моменти часу (наприклад, в строки спостережень). Для розрахунку похідних по дискретних значеннях формула (3.1) береться у вигляді (3.2), в якій прирости функції та аргументу замінюються приблизним відношенням:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx \frac{f(\eta + \Delta\eta) - f(\eta)}{\Delta\eta}. \quad (3.2)$$

Розрахована за цією формулою похідна вже належить не до точки з координатою η , а є осередненим значенням на інтервалі $[\eta, \eta + \Delta\eta]$.

Теорія скінченнорізницевого визначення похідних по горизонтальних координатах була розроблена в [2].

3.1 Теоретичні основи методів обчислення похідних

Нехай відомі величини деякого метеорологічного параметра f в конкретних точках з номерами $n = 1, 2, 3, \dots, N$ на площині. Координати будь-якої n -ої точки позначимо x_n, y_n , величину метеорологічного параметра – через f_n . Для визначення похідних будемо вважати, що поле метеопараметра є лінійним :

$$f_n = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n, \quad (3.3)$$

де f_0 - величина метеорологічного параметра на початку координат, а $\frac{\partial f}{\partial x}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}$ вважаються сталими або осередненими по території, на якій розташовані вибрані точки. Якщо до вказаних точок застосувати опис (3.3), то отримуємо систему n умовних рівнянь:

$$f_n = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (3.4)$$

При $N < 3$ кількості рівнянь недостатньо для визначення трьох невідомих величин: f_0 , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, при $N = 3$ вказані величини визначаються однозначно (величин параметра f_0 у трьох точках, які не лежать на одній прямій, достатньо для однозначного визначення плоского вектора градієнта). Для того, щоб підвищити точність обчислення, доцільно брати $N > 3$.

Оскільки поле параметра f в дійсності нелінійне, рівняння системи (3.4) в точності не будуть виконуватися. Ліві частини кожного рівняння системи будуть відрізнятися на деяку величину δ_n :

$$\delta_n = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n - f_n. \quad (3.5)$$

Логічно тепер для визначення $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ вимагати, щоб величини δ_n , які в подальшому ми будемо називати нев'язками, були якнайменшими. При цьому важливо, щоб всі значення δ_n були невеликими. Не можна вимагати, щоб сума всіх δ_n була мінімальною, бо вона може бути малою і в тих випадках, коли окремі значення δ_n матимуть різні знаки. Тому в таких випадках треба вимагати, щоб мінімальною була сума квадратів нев'язок. Такий шлях уперше був випробуваний і обґрунтований Гауссом і називається способом найменших квадратів. Відповідно до цього введемо позначення:

$$E = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_N^2 = \sum_{n=1}^N \delta_n^2, \quad (3.6)$$

та знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ (а також f_0) із умови, що E при цих $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ менше ніж при будь-яких інших значеннях похідних. Для цього необхідно і, як можна показати, достатньо виконання такої умови мінімуму:

$$\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial f_0} = 0. \quad (3.7)$$

Використавши (3.5) замість (3.6), можна записати:

$$E = \sum_{n=1}^N \left(f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n - f_n \right)^2.$$

Тоді умова мінімізації (3.7) приведе до системи нормальних рівнянь

$$\begin{aligned} f_0 N + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{n=1}^N x_n + \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{n=1}^N y_n &= \sum_{n=1}^N f_n, \\ f_0 \sum_{n=1}^N x_n + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{n=1}^N x_n^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{n=1}^N x_n y_n &= \sum_{n=1}^N x_n f_n, \\ f_0 \sum_{n=1}^N y_n + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{n=1}^N x_n y_n + \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{n=1}^N y_n^2 &= \sum_{n=1}^N y_n f_n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Розв'язок системи (3.8) дозволяє знайти $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, f_0 по значеннях ме-

теорологічних параметрів f в точках, розташованих довільно на площині (наприклад, по інформації на метеостанціях). Коефіцієнти цієї системи і праві частини вважаються відомими, оскільки можуть бути розраховані по координатах станцій x_n і y_n відносно вибраного початку координат та по величинах параметрів f_n на станціях.

Однак система значно спрощується, якщо вибрані точки створюють симетричну сітку даних. Розташувавши початок системи координат в центрі симетрії та спрямувавши осі координат по осях її симетрії, маємо:

$$\sum_{n=1}^N x_n = 0; \quad \sum_{n=1}^N y_n = 0; \quad \sum_{n=1}^N x_n y_n = 0. \quad (3.9)$$

Дякуючи симетрії, кожному додатному значенню x_n знайдеться відповідне від'ємне значення і при складанні вони скорочуються. Так само станеться із сумами координат по y_n . Використавши (3.9), знайдемо із (3.8):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n f_n}{\sum_{n=1}^N x_n^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sum_{n=1}^N y_n f_n}{\sum_{n=1}^N y_n^2}; \quad f_0 = \frac{\sum_{n=1}^N f_n}{N}. \quad (3.10)$$

Це кінцевий вид формул, з допомогою яких по величинах метеопа-

раметрів у вузлах симетричної сітки можна знайти похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, осереднені по території, а також значення функції f_0 . Звичайно, ці значення похідних і f_0 доцільно приписати центру симетрії сітки. Давайте застосуємо отримані формули (3.10) до схем, які використовуються найчастіше. Доцільно використовувати безрозмірні координати, тоді наші формули матимуть універсальний вигляд:

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y},$$

де Δx , Δy - кроки по координатних осях.

Центр сітки позначимо i, j , позначення інших вузлів сітки наведені на схемі (рис.3.1).

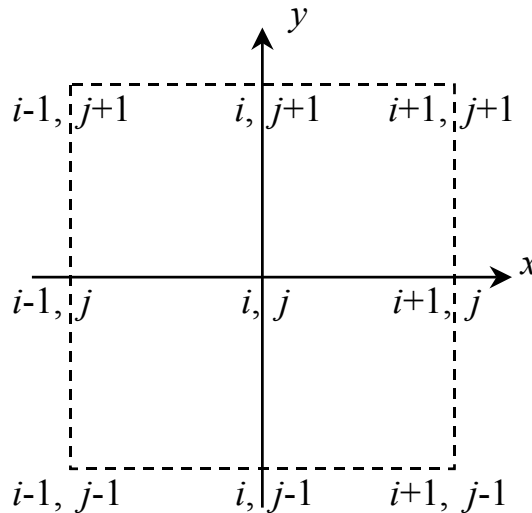


Рисунок - 3.1 Розташування вузлів сітки

Для чотириточкової схеми матимемо:

Координати вузлів сітки	x_n	y_n
$i+1, j$	d	0
$i, j+1$	0	d
$i-1, j$	$-d$	0
$i, j-1$	0	$-d$

Звідки одержимо:

$$\sum_{n=1}^4 x_n^2 = \sum_{n=1}^4 y_n^2 = 2d^2; \quad \sum_{n=1}^4 x_n f_n = d(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}); \quad \sum_{n=1}^4 y_n f_n = d(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}).$$

Підставимо до (3.10) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2d}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2d}. \quad (3.11)$$

Аналогічно без виведення наведемо формули для сіткового шаблону, який використовує вісім точок:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} &\approx \frac{1}{6d} (f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} &\approx \frac{1}{6d} (f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Отримаємо скінченнорізницевий аналог виразу для так званого лапласіана на площині: $\nabla_s^2 f$ або Δf , він представляє собою суму других похідних від функції по координатах x і y :

$$\nabla_s^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (3.13)$$

У подальшому індекс s не будемо вживати, пам'ятаючи про формулу (3.13). Візьмемо за основу чотириточкову схему та введемо проміжні точки, які позначимо a, c, b, e (рис.3.2) та які ділять відрізки пополам.

Запишемо другі похідні приблизно як відношення зміни перших до відповідного аргументу:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b}{d}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e}{d}. \quad (3.14)$$

Тепер розпишемо перші похідні і підставимо в (3.14):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{d}; & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b &\approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{d}; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{d}; & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e &\approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{d}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

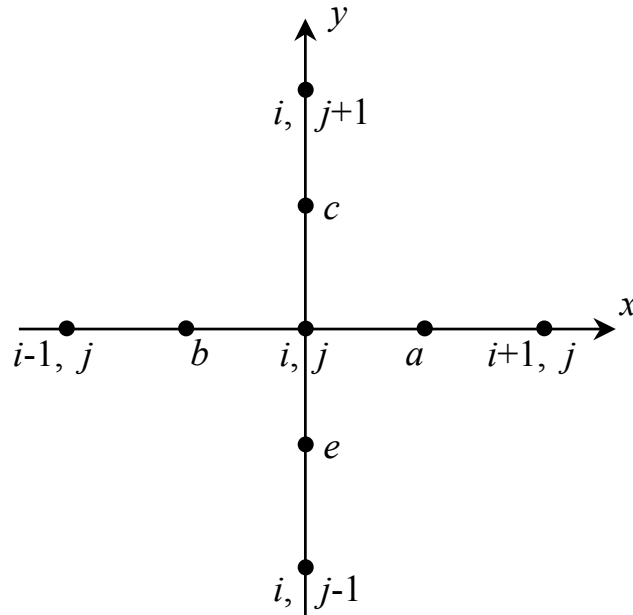


Рисунок 3.2 – Розташування вузлів сітки

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{d^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{d^2}. \quad (3.16)$$

Приблизна формула для лапласіана матиме вигляд :

$$(\nabla^2 f)_{i,j} \approx \frac{1}{d^2} (f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}). \quad (3.17)$$

Отримана формула широко використовується в синоптичній метеорології та гідродинамічних методах прогнозу погоди при аналізі полів тиску і геопотенціалу.

3.2 Основи методу сіток

Поля метеорологічних величин є неперервними і суть методу сіток полягає у тому, що неперервний простір і час замінюються множиною дискретних точок, а поля функції (метеовеличин) задаються у вигляді множини дискретно-сіткових значень функцій $f_{i,j,k}^s$. Нагадаємо ще раз позначення:

$$i = \frac{x}{\Delta x}; j = \frac{y}{\Delta y}; k = \frac{z}{\Delta z}; s = \frac{t}{\Delta t}, \quad (3.18)$$

де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – кроки у просторі,
 Δt – крок за часом,
 i, j, k – безрозмірні просторові координати по осях,
 s – безрозмірна координата за часом.

Така множина точок, положення яких визначається дискретними безрозмірними координатами в просторі і часі, називається просторово-часовими сітками, а точки цих сіток - вузлами.

Приблизні вирази для похідних одержані при використанні значень метеопараметрів у вузлах сітки та в дискретні моменти часу, інакше кажучи, похідні зображаються за допомогою різниць метеорологічних величин на кінцевих просторових та часових кроках. Тому такий підхід називається скінченнорізницевим методом.

Після підстановки скінченнорізницевих виразів для похідних в систему рівнянь гідротермодинаміки, яка є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь. Будемо вважати, що алгебраїчна система рівнянь виконується у кожному внутрішньому вузлі сітки області обчислення. В початковий момент для межових точок необхідно визначити додаткові умови або рівняння, які дозволять апроксимувати початкові та межові умови відповідно до фізичної постановки задачі. Таким чином, метод сіток дозволяє отримати розв'язок крайової задачі з початковими і межовими умовами для системи диференціальних рівнянь. Отримана система алгебраїчних рівнянь розв'язується за допомогою електронно-обчислювальних машин із застосуванням будь-якої багатокрокової процедури обчислення (наприклад, методу ітерацій).

Одним із шляхів апроксимації похідних є проста заміна похідних відповідними скінченнорізницеvими відношеннями. Наприклад, для першої похідної можна використати апроксимації такого виду:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\Delta r}(f_{q+1} - f_q), \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\Delta r}(f_q - f_{q-1}), \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{2\Delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (3.21)$$

де f - будь-яка функція,
 r, q - будь-яка координата:

$$r = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}; \quad q = \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \\ s \end{vmatrix},$$

де Δr - крок по відповідній координаті.

Функціональну залежність від координат і часу позначимо як f_q^s

Апроксимації (3.19) - (3.21) називаються скінченними різницями. Вони можуть бути представленими на одному чи декількох інтервалах Δr . В залежності від положення точки, для якої реалізується ця процедура, скінченні різниці можуть бути центровані або нецентровані. Центровані різниці представляють собою зміну значень функції в точках, симетричних відносно пункту обчислення. Відповідно до цього апроксимація (3.21) називається центральною, а (3.19) і (3.20) - нецентрованими різницями вперед або назад.

При апроксимації похідних скінченнорізницевиими відношеннями логічно вимагати узгодженості, тобто при зменшенні кроку сітки до "0" скінченнорізницевиий аналог повинен наближатися до похідної. Всі формули (3.19 - 3.21) мають таку властивість. Визначимо оцінку похибок похідних, апроксимованих скінченними різницями. Точний розв'язок необхідно підставити в приблизний вираз для похідних замість сіткових значень функцій f_q , а тоді розкласти в ряди Тейлора поблизу центральної точки. Для прикладу виконаємо таку підстановку для (3.19):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q) - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q = \\ &= \frac{1}{\Delta r} \left[f_q + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \Delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \frac{(\Delta r)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \dots - f_q \right] - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q. \end{aligned}$$

Після розкриття квадратних дужок і скорочення подібних членів, одержимо:

$$\varepsilon = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \Delta r + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right) (\Delta r)^2 + \dots \quad (3.22)$$

Для апроксимації (3.20), (3.21) аналогічна процедура підстановки дасть такі результати:

$$\varepsilon = \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \Delta r + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right) (\Delta r)^2 - \dots, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\Delta r} (f_q - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right) (\Delta r)^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right) (\Delta r)^3 + \dots \quad (3.24)$$

Величину ε називають помилкою апроксимації похідної. Вона представляє собою суму членів, які “відсікаються” при формуванні наближення. Помилка апроксимації дає уявлення про те, наскільки точно різницева співвідношення наближається до похідної при малому значенні Δr . Мірою цієї оцінки є порядок точності апроксимації, який визначається найнижчим степенем Δr у виразі для похибки апроксимації ε . Відповідно до рівнянь (3.22) - (3.24), апроксимації (3.19), (3.20) мають перший порядок точності (можна записати $\varepsilon = O(\Delta r)$), кінцева апроксимація (3.21) є апроксимацією другого порядку точності ($\varepsilon = O(\Delta r)^2$). Для того, щоб апроксимація похідної була узгодженою, вона повинна бути принаймні першого порядку точності.

Відомо, що атмосферні рухи і поля метеорологічних величин мають хвильовий характер. Вид виразу для ε показує, що точність зображення похідної з допомогою скінченних різниць залежить від характеру функції $f(r)$ та співвідношення між кроком сітки і довжиною хвилі в полі цієї функції. Представимо оцінку скінченнорізницевої апроксимації першої похідної в залежності від розмірів кроку сітки і довжини хвилі. Розглянемо таку функцію, яка представляє собою гармоніку виду:

$$f(x) = A \sin(kx), \quad (3.25)$$

де A – амплітуда,

$k = 2\pi/L$ - хвильове число,

L - довжина хвилі по осі x .

Для апроксимації похідної використаємо центральну різницю виду (3.21):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^a \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (3.26)$$

де Δx - крок сітки по осі x ,

$$i = \frac{x}{\Delta x}.$$

Запишемо першу похідну від функції (3.25):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = Ak \cos(ki\Delta x)$$

та апроксимуємо її центральною різницею відповідно до (3.26):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^a \approx \frac{A}{2\Delta x} [\sin k(i+1)\Delta x - \sin k(i-1)\Delta x] = \frac{A}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \cos(ki\Delta x).$$

Введемо величину ε , яка буде характеризувати відносну похибку апроксимації першої похідної:

$$\varepsilon \equiv 1 - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^a}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i} \equiv 1 - \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}. \quad (3.27)$$

Отримаємо величини для різних довжин хвиль, які виразимо через кроки сітки:

$$L = 6\Delta x; \quad \left(\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{6}\right); \quad \varepsilon = 0.1;$$

$$L = 4\Delta x; \quad \left(\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{4}\right); \quad \varepsilon = 0.36;$$

$$L = 2\Delta x; \quad \left(\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{2}\right); \quad \varepsilon = 1.0.$$

Результати показують, що відносна помилка апроксимації похідної зростає в міру того, як зменшується довжина хвилі, а для хвиль, що мають довжину подвійного кроку сітки ($L = 2\Delta x$), скінченнорізницеві наближення неможливі. Або іншими словами, з допомогою значень f_i в дискретних точ-

ках $x = i\Delta x$ неможливо представити хвильові рухи, довжина яких менша ніж $2\Delta x$. Звідси витікає, що для скінченнорізницевого зображення похідних і рівнянь гідротермодинаміки крок сітки необхідно вибирати з урахуванням довжин хвиль, які мають значимі амплітуди.

3.3 Скінченнорізницеві схеми. Точність чисельного розв'язку, апроксимація, узгодженість та збіжність

Заміна похідних у диференціальних рівняннях відповідними скінченнорізницевиими наближеннями називається скінченнорізницевою апроксимацією, а алгебраїчні рівняння, отримані в результаті такої заміни – скінченнорізницевиими схемами.

Розглянемо деякі визначення та питання, пов'язані з побудовою скінченнорізницевиих схем, на прикладі неоднорідного диференціального рівняння, яке запишемо у такому вигляді :

$$Lf = \varphi, \quad (3.28)$$

де L - диференціальний оператор,
 f - невідома функція (розв'язок),
 φ - задана функція.

У такій узагальненій формі можна записувати лінійні та нелінійні звичайні диференціальні рівняння, а також рівняння у частинних похідних. В системі рівнянь, яка використовується в задачах гідродинамічного прогнозу погоди, незалежними змінними є час та просторові координати.

Нехай оператор L містить похідні у просторі і за часом. Просторові незалежні змінні будемо визначати через r . З урахуванням цього будемо вважати, що в (3.28)

$$f = f(r,t), \quad \varphi = \varphi(r,t).$$

Розв'язання рівняння (3.28) будемо вивчати в області D – області змін просторових незалежних змінних, яка обмежена межею Γ і часом D_t . Область D може бути тривимірним об'ємом, поверхнею чи лінією. Відповідно до цього межами для вибраних об'єктів (тривимірних, двовимірних, одновимірних) будуть поверхні, лінії чи точки. Розв'язання рівняння (3.28) в області D буде однозначним, якщо його поставити у від-

повідність до умов у початковий момент часу (початкові умови) і на межі Γ (межові умови).

Задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння, яке підпорядковане початковим та межовим умовам, називають змішаною крайовою задачею або нестационарною крайовою задачею. До таких задач належить і розв'язання рівняння (3.28). Його початкові та межові умови залежатимуть від характеру задачі та конкретного виду рівняння. Не будемо зараз обговорювати способи задання початкових та межових умов, запишемо їх у такому загальному вигляді:

$$\psi(r) = f(r, t_0) \quad \text{в } D \quad \text{при } t = t_0, \quad (3.29)$$

$$g(r, t) = f(r, t) \quad \text{на } \Gamma \times D_t, \quad (3.30)$$

де t_0 - початковий момент часу.

Визначимось в таких позначеннях як точність чисельного розв'язку, апроксимація та узгодженість, коректність та збіжність.

Приблизний розв'язок диференціального рівняння, який дістається за допомогою скінченнорізницевого методу, прийнято називати чисельним, а різницю між чисельним та точним розв'язками - похибкою чисельного розв'язку. Оскільки точний розв'язок, як правило, невідомий, то невідомою є і похибка чисельного розв'язку. Можна спробувати оцінити точність скінченнорізницевої схеми, за допомогою якої було отримано чисельний розв'язок. Ця точність характеризується похибкою скінченнорізницевої апроксимації диференціального рівняння.

Для того, щоб скінченнорізницевий метод можна було застосувати до задачі (3.28), необхідно виконати дискретизацію незалежних змінних :

$$q = \frac{r}{\Delta r}, \quad s = \frac{t}{\Delta t}$$

(будемо вважати, що $\Delta r = h$, $\Delta t = \tau$), а неперервній області зміни незалежних змінних слід поставити у відповідність дискретну (сіткову) область - просторово-часову сітку $((D_h + \Gamma_h) \times D_\tau)$, вузлами якої є точки з індексами q і s . На цій сітці визначаються сіткові функції f_q^s , φ_q^s і сіткові оператори L_h , Ψ_q , \mathcal{G}_q^s .

Такий підхід приводить до того, що диференціальній задачі (3.28)-(3.30) ставиться у відповідність скінченнорізницева задача:

$$L_h f_q^s = \varphi_q^s, \quad (3.31)$$

$$\psi_q = f_q^0 \text{ в } D_h \text{ при } s = 0, \quad (3.32)$$

$$g_q^s = f_q^s \text{ на } \Gamma_h \times D_\tau. \quad (3.34)$$

Розглянутий підхід до побудови скінченнорізницевої задачі залишається формальним (не гарантує одержання чисельного розв'язку, близького до точного) доти, поки не буде доведено, що скінченнорізницеve рівняння (3.31) і сіткові оператори початкових (3.32) та межових (3.33) умов дійсно апроксимують вихідне диференціальне рівняння (3.28), початкові (3.29) та межові (3.30) умови.

Крім цього, скінченнорізницева схема (3.31), яка апроксимує диференціальне рівняння (3.28), повинна бути стійкою та збіжною. Тільки при виконанні цих вимог можна розраховувати на одержання чисельного розв'язку скінченнорізницевої задачі, близького до точного розв'язку диференціальної задачі.

Точність апроксимації диференціального рівняння скінченнорізницеvim оцінюється так, як і похибки заміни скінченними різницями похідних. Для цього в скінченнорізницеve рівняння замість сіткових функцій підставляються розкладені в ряд Тейлора функції (точний розв'язок $f(q\Delta r, s\Delta t)$) навколо точки з координатами $q\Delta r, s\Delta t$. Потім із результатів підстановки віднімається диференціальне рівняння. Отримана таким способом різниця представляє собою похибку апроксимації диференціального рівняння (3.28) скінченнорізницеvim рівнянням (3.31).

Похибка апроксимації оцінюється ступенем приросту незалежних змінних, або кроків $\Delta r, \Delta t$, в головних із відкинутих членів рядів Тейлора. Цю похибку називають також порядком точності апроксимації або просто порядком апроксимації. Якщо, наприклад, в головних із відкинутих членів рядів Тейлора $\Delta r, \Delta t$ входять у першому степені, то порядок апроксимації буде першим по Δr і Δt , а $\varepsilon = O(\Delta r, \Delta t)$. Якщо при зменшенні до нуля $\Delta r, \Delta t$ похибка ε також сягає до нуля, то скінченнорізницеve рівняння наближається до диференціального рівняння.

Вважається, що для скінченнорізницевого рівняння (3.31) з початковими та межовими умовами (3.32), (3.33) постановка задачі є коректною, якщо для невеликих кроків у просторі (h) і часі (τ) розв'язок рівняння (3.31) існує, є єдиним і залежить від початкових, межових умов та правої частини рівняння.

Розглянемо перелічені властивості скінченнорізницевих схем більш

детально. Для цього зручно використати лінійні рівняння, для яких відомі точні розв'язки (наприклад, рівняння адвекції, коливань). На основі аналізу скінченнорізницевих схем для лінійних рівнянь можна отримати ряд результатів, які будуть корисними при створенні скінченнорізницевих схем для нелінійних рівнянь.

Для спрощення скористуємось одновимірним рівнянням адвекції:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = f(x, t), \quad (3.34)$$

де c - додатна стала.

Наведене рівняння (3.34) описує адвекцію функції f зі сталою швидкістю c в додатному напрямку осі x . Одержимо аналітичний розв'язок рівняння (3.34) і виконаємо дослідження властивостей чисельних розв'язків, порівнюючи їх з відомими властивостями точного розв'язку.

Перейдемо до іншої системи координат, використавши позначення :

$$\xi = x - ct, \quad f(x, t) = F(\xi, t).$$

Тоді дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -c \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази до формули (3.34) :

$$\begin{aligned} -ct \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial \xi} &= 0, \\ \text{або } \frac{\partial}{\partial t} F(\xi, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Аналіз формули (3.35) показує, що F не може бути функцією часу, а може бути лише довільною функцією ξ , таким чином,

$$f(x, t) = F(x - ct) \quad (3.36)$$

є розв'язком рівняння адвекції (3.34), що задовольняє початкову умову:

$$f(x,0) = F(x). \quad (3.37)$$

При $(x - ct) = \text{const}$, $f(x,t) = \text{const}$. Якщо ми розглянемо розв'язки на координатній площині x, t то побачимо, що у цьому випадку розв'язки набувають постійних значень уздовж прямих ліній :

$$(x - ct) = \text{const}.$$

Нагадаємо, що інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних рівносильне інтегруванню так званих характеристичних систем. Для лінійного однорідного рівняння адвекції (3.34) ця система має вигляд:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c}. \quad (3.38)$$

Будь-який перший інтеграл характеристичної системи є розв'язком диференціального рівняння. Інтегральні криві, які описуються характеристичними системами, називаються характеристиками диференціального рівняння. Для рівняння (3.34), що розглядається, характеристиками є прямі, які описуються інтегралом характеристичної системи (3.38):

$$(x - ct) = \text{const}. \quad (3.39)$$

Значення f , яке відповідає $t = 0$, є відображенням початкових умов для рівняння, що досліджується. Початкові умови однозначно визначають сталу у правій частині рівняння характеристик (3.39). Як вже підкреслювалось, на характеристиках розв'язку це не відбивається.

Одна із характеристик рівняння адвекції (3.34) представлена на рис. 3.3. Аналіз цього графіка вказує на те, що розв'язок розповсюджується уздовж характеристик.

Побудуємо тепер схему з метою знаходження приблизного рівняння (3.34) за допомогою сіткового методу. Цей розв'язок буде знаходитися на полі дискретних точок в площині x, t , яке зображене на рис.3.4. Приблизний розв'язок у точці $(i\Delta x, s\Delta t)$ позначимо через f_i^s . Поведінка точного розв'язку, який розповсюджується уздовж характеристик в площині x, t , дозволяє побудувати приблизне рівняння, наприклад, шляхом заміни похідної за часом різницеvim відношенням, спрямованим уперед, а похідної за простором - різницеvim відношенням назад. З врахуванням цього отримана схема матиме вигляд:

$$\frac{f_i^{s+1} - f_i^s}{\Delta t} + c \frac{f_i^s - f_{i-1}^s}{\Delta x} = 0. \quad (3.40)$$

Цю схему можна також називати вперед спрямованою схемою вверх по потоку. Останні слова вказують на положення точки $i-1$ відносно швидкості адвекції. Схема (3.40) - тільки одна із багатьох можливих узгоджених скінченнорізницевих схем для даного диференціального рівняння. Існує багато інших схем, які дають наближення до досліджуваного дифе-

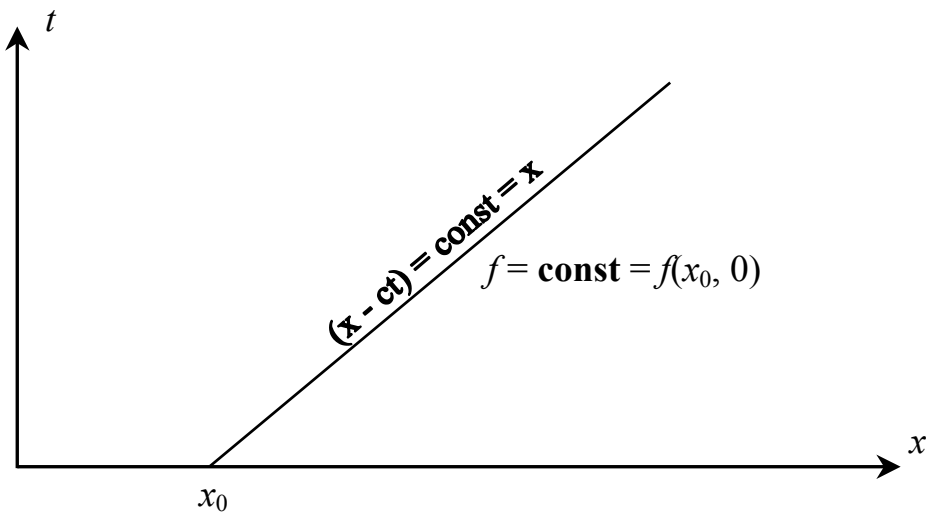


Рисунок 3.3 - Одна з характеристик лінійного рівняння (3.34).

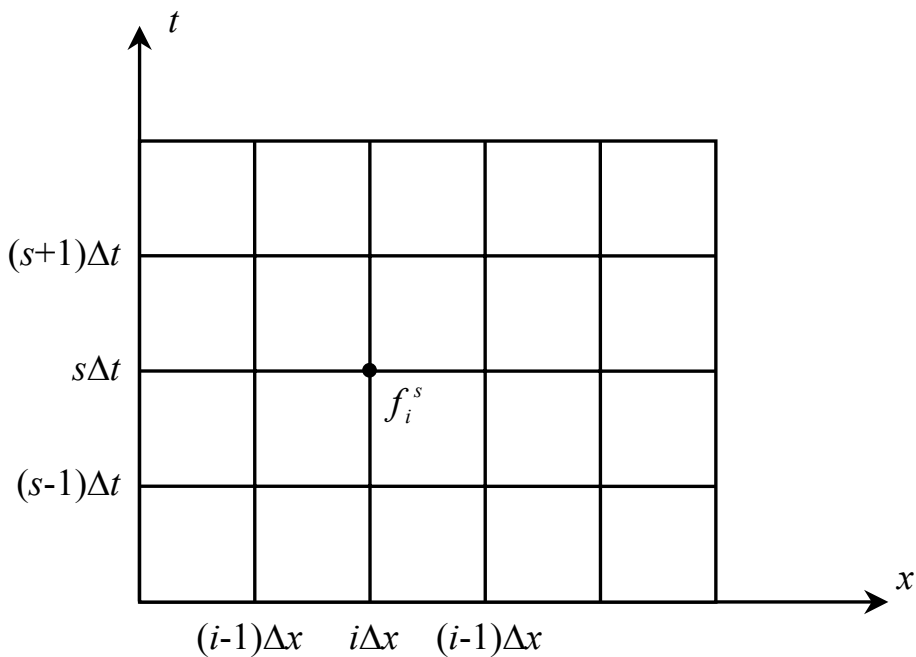


Рисунок 3.4 - Скінченнорізницева сітка для визначення наближеного розв'язку рівняння (3.34).

ренціального рівняння при зменшенні приростів Δx , Δt до нуля, але тут вони розглядатися не будуть.

Оскільки для малих значень Δx , Δt скінченнорізницеве рівняння апроксимує відповідне диференціальне рівняння, можна очікувати, що його розв'язок буде також апроксимацією розв'язку цього рівняння. Розв'язок, який ми одержуємо за допомогою скінченнорізницевого схем, будемо в подальшому називати чисельним.

Зручно вивчати властивості чисельних розв'язків у порівнянні з відомими розв'язками вихідних диференціальних рівнянь. В подальшому будемо їх називати точними розв'язками.

Різниця між чисельним і точним розв'язками є похибкою чисельного розв'язання:

$$f_i^s - f(i\Delta x, s\Delta t). \quad (3.41)$$

Вона, як правило, невідома, але можна спробувати знайти міру точності схеми підстановкою точного розв'язку $f(\Delta x, \Delta t)$ рівняння до чисельної схеми. Оскільки цей розв'язок не буде задовольняти чисельному рівнянню точно, то необхідно додати додатковий член для того, щоб рівняння задовольнялось. Позначимо цей член через ε . Використавши ці позначення стосовно до схеми (3.40), запишемо таке рівняння:

$$\varepsilon = \frac{f(i\Delta x, (s+1)\Delta t) - f(i\Delta x, s\Delta t)}{\Delta t} + c \frac{f(i\Delta x, s\Delta t) - f((i-1)\Delta x, s\Delta t)}{\Delta x}. \quad (3.42)$$

Член ε називається похибкою апроксимації скінченнорізницевої схеми. Вона визначає, наскільки добре точний розв'язок задовольняє рівняння чисельної схеми, і, таким чином, визначає міру точності схеми.

Можна одержати більш зручну форму для опису похибки апроксимації. Для цього необхідно використати розклад точного розв'язку в ряд Тейлора навколо центральної просторово-часової точки. Скориставшись вихідним диференціальним рівнянням для виключення головного члена, дістанемо вираз для похибки апроксимації такого вигляду:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Delta t + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} (\Delta t)^2 + \dots - c \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x \right) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + \dots \quad (3.43)$$

Очевидно, що залишилися допоміжні члени, які були "відсічені" раніше для того, щоб привести диференціальні рівняння у відповідність до

скінченнорізницевих схем. Таким чином, схема (3.40) є схемою першого порядку точності. Можна записати :

$$\varepsilon = O(\Delta t) + O(\Delta x) \quad \text{або} \quad \varepsilon = O(\Delta t, \Delta x).$$

Важливо розрізняти порядки точності у просторі і часі, особливо, коли найменші степені Δt та Δx не однакові. Як відзначалось раніше, необхідною умовою для узгодженості будь-якої схеми є перший порядок точності апроксимації.

Розглянемо ще одну властивість скінченнорізницевих схем - збіжність. Похибки апроксимації узгодженої схеми можуть бути зведені до найменших значень, якщо зменшувати приріст по координатах. Однак це не означає, що зменшується і похибка чисельного розв'язку. Тому необхідно повернутися до аналізу похибки (3.41).

Спробуємо відповісти на два запитання:

1. Як буде поводитися похибка (3.41), якщо для фіксованого сумарного часу прирости наближаються до нуля ($\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$).

2. Як буде поводитися похибка (3.41), коли для фіксованих значень число часових кроків буде зростати.

Відповідь на перше запитання залежить від збіжності чисельного розв'язання. Якщо похибка (3.41) направлена до нуля в міру зменшення розмірів сітки (при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$), то такі розв'язки називаються збіжними. Аналогічно, якщо схема дає збіжний розв'язок для будь-яких початкових умов, то вона теж називається збіжною.

Узгодженість схеми не гарантує її збіжність. Продемонструємо це на простому прикладі.

Розглянемо схему (3.40). Її похибка апроксимації (3.43) наближається до нуля при зменшенні кроків $\Delta x, \Delta t$ і можна зробити висновок, що це узгоджена схема. На рис.3.5 наведена характеристика $x - ct = x_0$, яка відповідає початковій умові при $x_0 = t = 0$.

Для чисельного розв'язку рівняння (3.34) будемо використовувати явну скінченнорізницеву схему (3.40), яку зобразимо у вигляді :

$$f_i^{s+1} = f_i^s - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^s - f_{i-1}^s).$$

Для цієї схеми будемо вважати, що $\Delta x = 100$ м, $\Delta t = 20$ с. Припустимо, що в точці з координатами $x = 400$ м і $\Delta t = 40$ с чисельний розв'язок знахо-

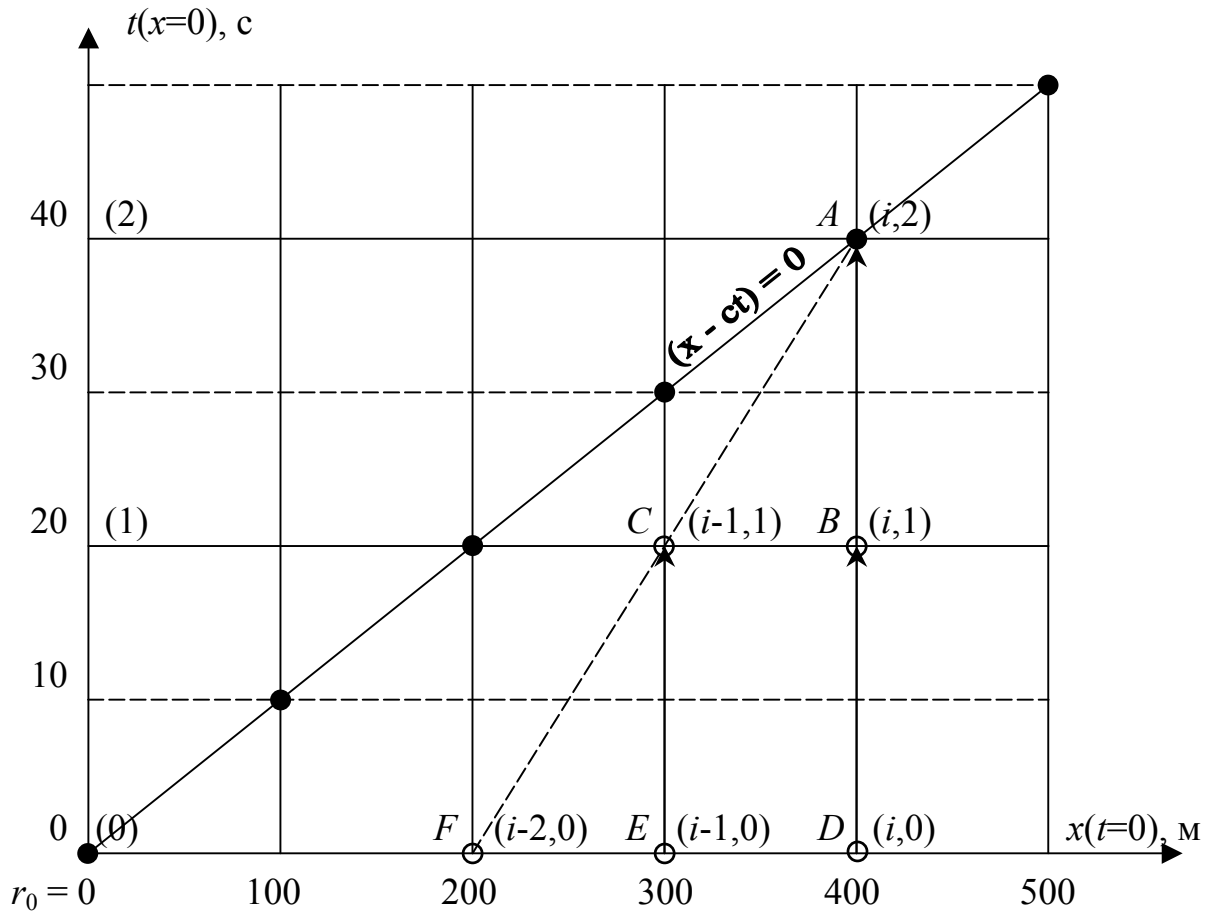


Рисунок 3.5 - Характеристика $x - ct = x_0$ ($x_0 = 0$). Залежність розв'язку в точці A від початкових умов ($c = 10 \text{ м с}^{-1}$).

диться на характеристиці $x - ct = 0$. Ця точка на рисунку позначена буквою A . Розглянемо, як формується чисельний розв'язок у цій точці.

Оскільки $\Delta t = 20 \text{ с}$, то розв'язок у цій точці визначатиметься величинами функції у точках B і C . В свою чергу, розв'язок у зазначених точках буде визначатися початковими величинами функції f в точках D , E і F відповідно до рис.3.5. На ньому в дужках наведені безрозмірні координати для точок, обведених колами. Перша координата відповідає x , а друга - t . Вигляд формул для обчислення функції у зазначених точках A , B буде таким:

$$f_i^1 = f_i^0 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1}^0 - f_i^0), \quad (3.44)$$

$$f_{i-1}^1 = f_{i-1}^0 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-2}^0 - f_{i-1}^0), \quad (3.45)$$

де f_i^0 , f_{i-1}^0 , f_{i-2}^0 - значення функцій в початковий момент часу в точках D , E , F .

Розв'язок в точці A представимо так:

$$f_i^2 = f_i^1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^1 - f_{i-1}^1). \quad (3.46)$$

Аналіз рисунка показує, що характеристика $x - ct = \text{const}$ проходить через початок координат, а отже, точний розв'язок у точці A дорівнює величині f , яку ми отримуємо в точці з координатами $(0,0)$. Чисельний розв'язок у відповідності до (3.40) обраховується з допомогою значень функцій f у точках, які відмічені колами. Область, помічена штриховою лінією, яка охоплює всі точки обліку, називається областю залежності чисельної схеми. Точка початку координат не належить до цієї області і тому не може впливати на чисельний розв'язок у точці A . Іншими словами, чисельний розв'язок у точці A не залежить від початкових умов у точці $x = 0$, а точний розв'язок - залежить. Тому не дивлячись на узгодженість схеми (3.46), чисельний розв'язок може як завгодно відрізнитися від точного і не буде до нього спрямовуватися при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Дійсно, якщо просторові та часові кроки зменшити пропорційно (наприклад, в два рази), то область залежності залишиться без змін. Таким чином, доки співвідношення між кроками залишається без змін, зменшення кроків сітки не може викликати зменшення похибки чисельного розв'язку. Його спричиняє порушення критерію стійкості Куранта-Фрідріха-Леві (КФЛ), який у нашому випадку дорівнює

$$\alpha = \frac{\Delta t \cdot c}{\Delta x} = \frac{20 \text{с} \cdot 10 \text{мс}^{-1}}{100 \text{м}} = 2 > 1.$$

Очевидно, необхідна умова збіжності будь-якої схеми полягає у тому, щоб характеристика, яка визначає точний розв'язок у точках сітки знаходилася б у середині області залежності чисельного розв'язку для цієї точки. Як впливає із рисунка, ця умова буде виконуватися, коли нахил штрихової лінії, що обмежує область залежності :

$$c\Delta t \leq \Delta x.$$

Чисельний розв'язок в точці A буде залежати від початкових умов у точці $x_0 = 0$ і при $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ він буде наближатися до точного.

Таким чином, збіжність чисельного розв'язку визначається не

розміром кроків у просторі та часі, а їх співвідношенням, від якого залежить нахил прямих, що обмежують область залежності чисельного розв'язку. На рис.3.5 при $\alpha = 2$ ця пряма проходить через точки A, C, F , а при $\alpha = 1$ - співпадає з характеристикою. Неважко впевнитися у тому, що при $\alpha \leq 1$ умова збіжності буде виконуватися при будь-яких початкових умовах (необов'язково при $x_0 = 0$) і будь-яких нахилах характеристик.

РОЗДІЛ 4
ВИКОРИСТАННЯ СІТКОВИХ МЕТОДІВ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ
ПРАВИХ ЧАСТИН ПРОГНОСТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Припустимо, що вітер у вільній атмосфері для процесів синоптичного масштабу близький до геострофічного. Це означає, що така диференціальна характеристика поля геострофічного вітру як вихор швидкості дуже близька до свого реального значення. Обчислення показують, що вплив геострофічного наближення на результуюче значення вихору швидкості значно менше, чим вплив похибок виміру вітру при обчисленні тієї ж величини по полю реального вітру. Тому розрахунок такої важливої диференціальної характеристики як відносний вихор швидкості у вільній атмосфері базується на геострофічному наближенні.

Вираз для геострофічного вихору швидкості має вигляд:

$$\Omega_{zg} = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}. \quad (4.1)$$

Використаємо формули для складових геострофічного вітру і підставимо їх у формулу (4.1):

$$u_g = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (4.2)$$

одержимо:

$$\Omega_{pg} = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \quad (4.3)$$

Аналогічний вираз дістанемо, якщо візьмемо формули для обчислення геострофічного вітру через градієнти тиску:

$$u_g = -\frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_g = \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (4.4)$$

$$\Omega_{zg} = \frac{1}{l\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (4.5)$$

При виведенні формул (4.3), (4.5) вважаємо, що параметр Коріоліса l

і густина атмосферного повітря ρ не залежать від горизонтальних координат. Аналіз виразів для геострофічного вихору вказує на залежність його від других похідних геопотенціалу чи тиску по горизонтальних координатах. Таким чином, геострофічний вихор пропорційний оператору Лапласа або “лапласіану” геопотенціалу чи тиску, який позначимо символом ∇^2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \nabla^2 f, \quad (4.6)$$

де f – будь-яка функція.

Використавши позначення (4.6), формули (4.3) і (4.5) можна переписати так:

$$\Omega_{pg} = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi, \quad (4.7)$$

$$\Omega_{zg} = \frac{1}{l\rho} \nabla^2 p. \quad (4.8)$$

Для практичного використання формул (4.7) і (4.8) необхідно перейти від похідних до скінченнорізницевого наближення [1,3], що відповідає переходу від “точкових” значень вихору до осереднених по деякій території. Застосувавши це твердження до геострофічного вихору швидкості, необхідно розписати скінченнорізницевий аналог лапласіана тиску чи геопотенціалу.

Для скінченнорізницевого представлення лапласіанів тиску (або геопотенціалу) необхідно скористатися схемою, зразок якої показаний на рис.4.1.

Вісь x є дотичною до широтного кола, направлена із заходу на схід, вісь y – дотична до меридіана, направлена з півдня на північ; i, j – безрозмірні координати по осях x і y відповідно.

Точки з координатами $i+1, j$; $i, j+1$; $i-1, j$; $i, j-1$ розташовані від центральної на відстані d (крок обчислювальної сітки), яка у нашому випадку дорівнює 300 км. З урахуванням масштабу сітки, як правило, $1:1.5 \cdot 10^7$, ця відстань складатиме 2 см карти. Точка за номером i, j є точкою обчислення.

Обчислювальна формула матиме вигляд:

$$(\nabla^2 \Phi)_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i-1,j} - 4\Phi_{i,j}}{d^2}, \quad (4.9)$$

де Φ – значення геопотенціалу в пункті обчислення за номером i, j та в оточуючих точках з номерами $i+1, j; i, j+1; i-1, j; i, j-1$.

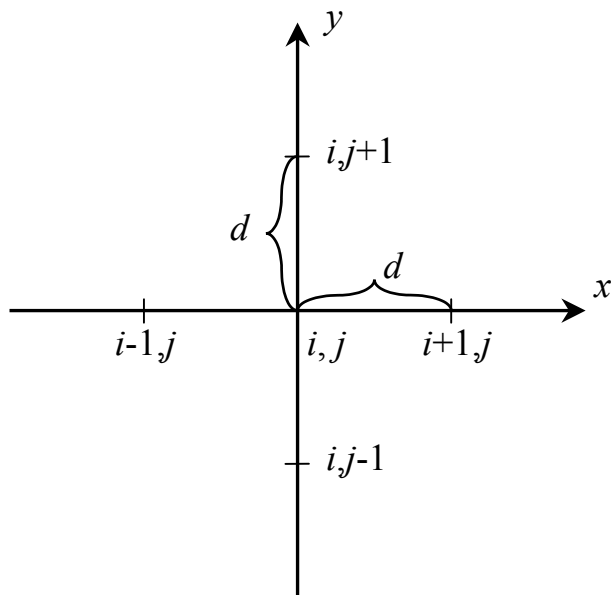


Рисунок 4.1 - Схема точок для представлення лапласіанів

Запишемо формулу (4.9) у такому вигляді:

$$(\nabla^2 \Phi)_{i,j} = \frac{4}{d^2} (\bar{\Phi} - \Phi_{i,j}), \quad (4.10)$$

де $\bar{\Phi} = \frac{1}{4} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j-1})$.

Підставивши (4.10) в (4.7), одержимо:

$$(\Omega_{pg})_{i,j} = \frac{4}{ld^2} (\bar{\Phi} - \Phi_{i,j}), \quad (4.11)$$

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = \frac{4}{l\rho d^2} (\bar{p} - p_{i,j}). \quad (4.12)$$

Таким чином, геострофічний вихор пропорційний різниці середнього тиску на колі, що описує конкретну точку, і тиску в самій точці. Очевидно, що в центрі циклону $p_{i,j} < \bar{p}$ і тому $\Omega_{zg} > 0$; а в центрі антициклону $p_{i,j} > \bar{p}$ та $\Omega_{zg} < 0$. Звідси випливає, що між тиском (геопотенціалом) і геострофічним вихором існує залежність: для антициклоніальних областей вихор швидкості – від’ємний, а для циклонічних – додатний.

Для спрощення обчислення відносного вихору за формулами (4.11) і

(4.12) визначимо робочі формули. Це означає, що необхідно звести всі сталі величини, які входять до формули, до одного коефіцієнта. При урахуванні цього коефіцієнта необхідно врахувати розмірності всіх фізичних величин. Наприклад, сталими величинами у формулі (4.12) є кутова швидкість обертання Землі $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, крок сітки та густина атмосферного повітря. Задамо такі значення: стандартна величина густини ρ при $p = 1000 \text{ гПа}$, $T = 273 \text{ }^\circ\text{К}$ дорівнює 1.27 кг м^{-3} , крок сітки $d = 3 \cdot 10^5 \text{ м}$. Підставимо ці значення в формулу (4.12) і врахуємо, що тиск вимірюється в гПа ($1 \text{ гПа} = 10^2 \text{ Н м}^{-2} = 10^2 \text{ кг с}^{-2} \text{ м}^{-1}$).

Тоді робочу формулу запишемо у вигляді :

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = \frac{4 \cdot 10^2 \text{ кг с}^{-2} \times (\bar{p} - p_{i,j})}{2 \times 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \sin \varphi \times 1.27 \text{ кг с}^{-3} \times 9 \cdot 10^{10} \text{ м}^2}.$$

Виконавши обчислення, дістанемо:

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = \frac{2.4 \cdot 10^{-5} \times (\bar{p} - p_{i,j})}{\sin \varphi_{i,j}} \text{ с}^{-1}. \quad (4.13)$$

Аналогічну підстановку зробимо для геопотенціалу $\Phi = gH$. Робоча формула матиме вигляд

$$(\Omega_{pg})_{i,j} = \frac{3.2 \cdot 10^{-5} \times (\bar{H} - H_{i,j})}{\sin \varphi_{i,j}} \text{ с}^{-1}, \quad (4.14)$$

де H – висота ізобаричної поверхні, що виражається в дам.

Таким чином, при використанні робочих формул (4.13) і (4.14) величину тиску необхідно підставляти в гПа, а висоту геопотенціалу - в дам. Якщо вихор визначати у степені 10^{-5} с^{-1} , робочі формули матимуть ще простіший вигляд:

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = \frac{2.4 \times (\bar{p} - p_{i,j})}{\sin(\varphi_{i,j})}$$

- для обчислення за допомогою приземних карт,

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = \frac{3.2 \times (\bar{H} - H_{i,j})}{\sin(\varphi_{i,j})}$$

- за допомогою карт баричної топографії.

Розглянемо приклад.

Нехай у вузлах сітки відомі величини H_{700} (рис.4.2). Вісь x проходить уздовж широти 60° .

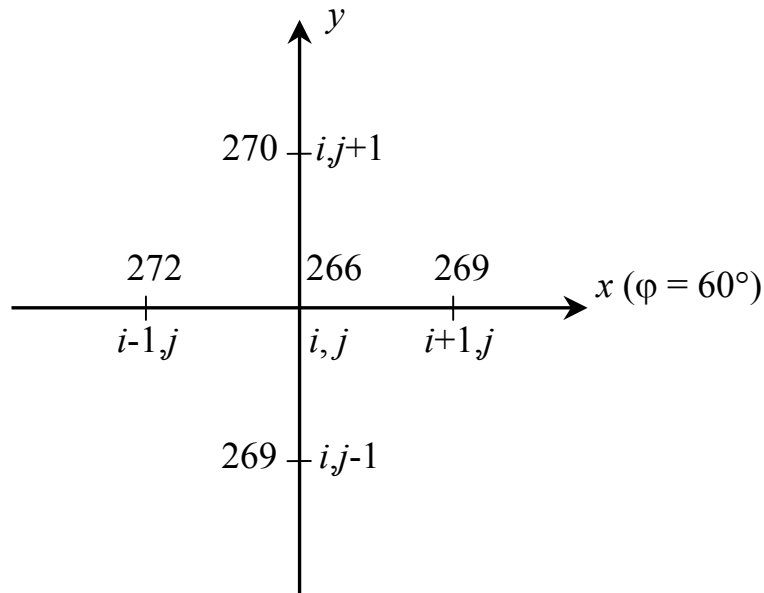


Рисунок 4.2 – Сітка вузлів

Визначимо середнє значення геопотенціалу \bar{H} за формулою:

$$\bar{H} = \frac{H_{i+1,j} + H_{i,j+1} + H_{i-1,j} + H_{i,j-1}}{4} = \frac{270 + 270 + 272 + 269}{4} = 270$$

Підставимо \bar{H} і H у робочу формулу. Тоді одержимо:

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = \frac{3.2(270 - 266)}{\sin 60^\circ}.$$

З урахуванням того, що вихор визначається у 10^{-5} c^{-1} , маємо:

$$(\Omega_{zg})_{i,j} = 14.8 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}.$$

Додатне значення Ω_{zg} вказує на те, що пункт обчислення знаходиться у циклональному полі.

Перейдемо до викладення методики обчислення адвекції вихору.

Випишемо початкову формулу для геострофічної адвекції геострофічного вихору:

$$A_{\Omega_g} = -\left(u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} \right). \quad (4.15)$$

Підставимо геострофічні позначення для швидкості вітру :

$$u_g = -\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y}; \quad v_g = \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \Omega_g = \frac{g}{l} \nabla^2 H. \quad (4.16)$$

Отримаємо вираз для A_{Ω_g} :

$$\begin{aligned} A_{\Omega_g} &= -\left[-\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{l} \nabla^2 H \right) + \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g}{l} \nabla^2 H \right) \right] = \\ &= \frac{g^2}{l^2} \left(\frac{\partial \nabla^2 H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

де $\nabla^2 H = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)$ – лапласіан функції H .

Скінченнорізницевий аналог функції \tilde{A}_{Ω} у точці i, j для сітки точок, яка зображена на рис.4.3, запишеться таким чином:

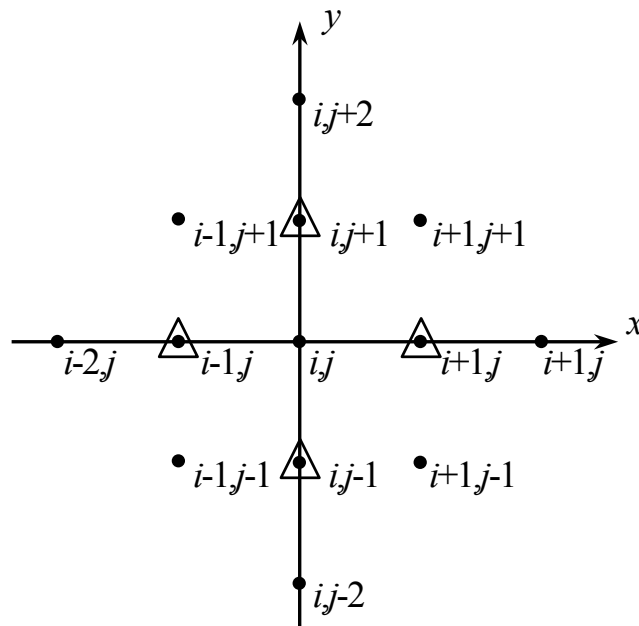


Рисунок 4.3 - Сітковий шаблон для розрахунку A_{Ω_g} у вузлі з координатами i, j .

$$\left(\tilde{A}_{\Omega g}\right)_{i,j} = \frac{g^2}{l_{i,j}^2} \left\{ \left[\frac{(\tilde{\nabla}^2 H)_{i+1,j} - (\tilde{\nabla}^2 H)_{i-1,j}}{2d} \right] \frac{(H_{i,j+1} - H_{i,j-1})}{2d} - \left[\frac{(\tilde{\nabla}^2 H)_{i,j+1} - (\tilde{\nabla}^2 H)_{i,j-1}}{2d} \right] \frac{(H_{i+1,j} - H_{i-1,j})}{2d} \right\}$$

або у перетвореному вигляді після винесення за дужки величини $(2d)^2$:

$$\left(\tilde{A}_{\Omega g}\right)_{i,j} = \frac{g^2}{4l_{i,j}^2 d^2} \left\{ \left[\tilde{\nabla}^2 H_{i+1,j} - \tilde{\nabla}^2 H_{i-1,j} \right] (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) - \left[\tilde{\nabla}^2 H_{i,j+1} - \tilde{\nabla}^2 H_{i,j-1} \right] (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \right\}, \quad (4.18)$$

де d – крок сітки, під яким ми розуміємо відстань між сусідніми вузлами по осях x та y ,

$\tilde{A}_{\Omega g}$ - скінченнорізнцеве представлення адвекції.

З формули (4.18) випливає, що для обчислення \tilde{A}_{Ω} у центральній точці i, j необхідно мати лапласіан H в оточуючих точках (на рис.4.3 ці вузли зображені трикутниками). Обчислення лапласіана H в деякій точці сітки можемо виконати, якщо відомі величини геопотенціалу в чотирьох вузлах, які оточують її та знаходяться від неї на відстані d – кроку сітки.

Таким чином, для визначення \tilde{A}_{Ω} в одній точці необхідно мати значення H в 13 вузлах симетричної сітки. В скінченнорізнцевому вигляді

$$\left(\nabla^2 H\right)_{i,j} = \frac{1}{d^2} (H_{i+1,j} + H_{i,j+1} + H_{i-1,j} + H_{i,j-1} - 4H_{i,j})$$

вираз для лапласіанів містить в знаменнику величину d^2 , тому її можна винести за дужки в формулі для геострофічної адвекції (4.18) і тоді вона матиме вигляд:

$$\left(\tilde{A}_{\Omega g}\right)_{i,j} = \frac{g^2}{4l_{i,j}^2 d^4} \left\{ \left[\ddot{\nabla}^2 H_{i+1,j} - \ddot{\nabla}^2 H_{i-1,j} \right] (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) - \left[\ddot{\nabla}^2 H_{i,j+1} - \ddot{\nabla}^2 H_{i,j-1} \right] (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \right\}. \quad (4.19)$$

де $\ddot{\nabla}^2 H$ - величина пропорційна лапласіану $\tilde{\nabla}^2 H$, тобто

$$\ddot{\nabla}^2 H_{i,j} = (H_{i+1,j} + H_{i,j+1} + H_{i-1,j} + H_{i,j-1} - 4H_{i,j}) \quad (4.20)$$

Підставимо в формулу (4.19) значення всіх сталих величин ($g = 9.81$ м с⁻², $l_{i,j} = 2 \times 7.29 \cdot 10^{-5} \sin \varphi$ с⁻¹; крок сітки $d = 300$ км = $3 \cdot 10^5$ м) та врахуємо, що розмірності виразу в фігурних дужках (дам) = 10^2 м²:

$$\frac{(9.8 \text{ мс}^{-2})^2 \times 10^2 \text{ м}^2}{4 \times (2 \times 7.29 \cdot 10^{-5} \sin \varphi \text{ с}^{-1})^2 \times (3 \cdot 10^5)^4 \text{ м}^4} = \frac{1.394 \cdot 10^{-11}}{\sin^2 \varphi_j}. \quad (4.21)$$

Нагадаємо, що розмірність $[A_{\Omega_g}] = \text{с}^{-2}$.

З урахуванням отриманого коефіцієнта формула (4.19) матиме вигляд, зручний для обчислення геострофічної адвекції вихору у будь-якому вузлі сітки, який знаходиться не в приєкваторіальній зоні, оскільки там геострофічне наближення не виконується.

$$\begin{aligned} (A_{\Omega_g})_{i,j} = \frac{1.394 \times 10^{-11}}{\sin^2 \varphi_j} \{ & [\ddot{\nabla}^2 H_{i+1,j} - \ddot{\nabla}^2 H_{i-1,j}] (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) - \\ & - [\ddot{\nabla}^2 H_{i,j+1} - \ddot{\nabla}^2 H_{i,j-1}] (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Таким чином, алгоритм обчислення геострофічної адвекції відносного вихору може бути побудований таким чином:

1) У вузлах, помічених трикутниками, розраховуються лапласіани H за формулою (4.20).

2) У вузлі i, j обчислюються різниці геопотенціалу в широтному та меридіональному напрямках.

3) За допомогою (4.22) визначається геострофічна адвекція $(A_{\Omega_g})_{i,j}$ з урахуванням широти місця вузла з координатами i, j , для якого проводиться обчислення.

Треба зауважити, що вихідні поля геопотенціалу для кожної ізобаричної поверхні треба задати в вузлах сітки (рис. 4.3, 4.4). Значення геопотенціалу H у відповідних вузлах записуються в дам, в тих одиницях, які використовуються на картах баричної топографії. Аналіз результатів обчислення необхідно проводити з урахуванням синоптичної ситуації в заданій області.

Розглянемо методику обчислення геострофічної адвекції температури. Випишемо формулу:

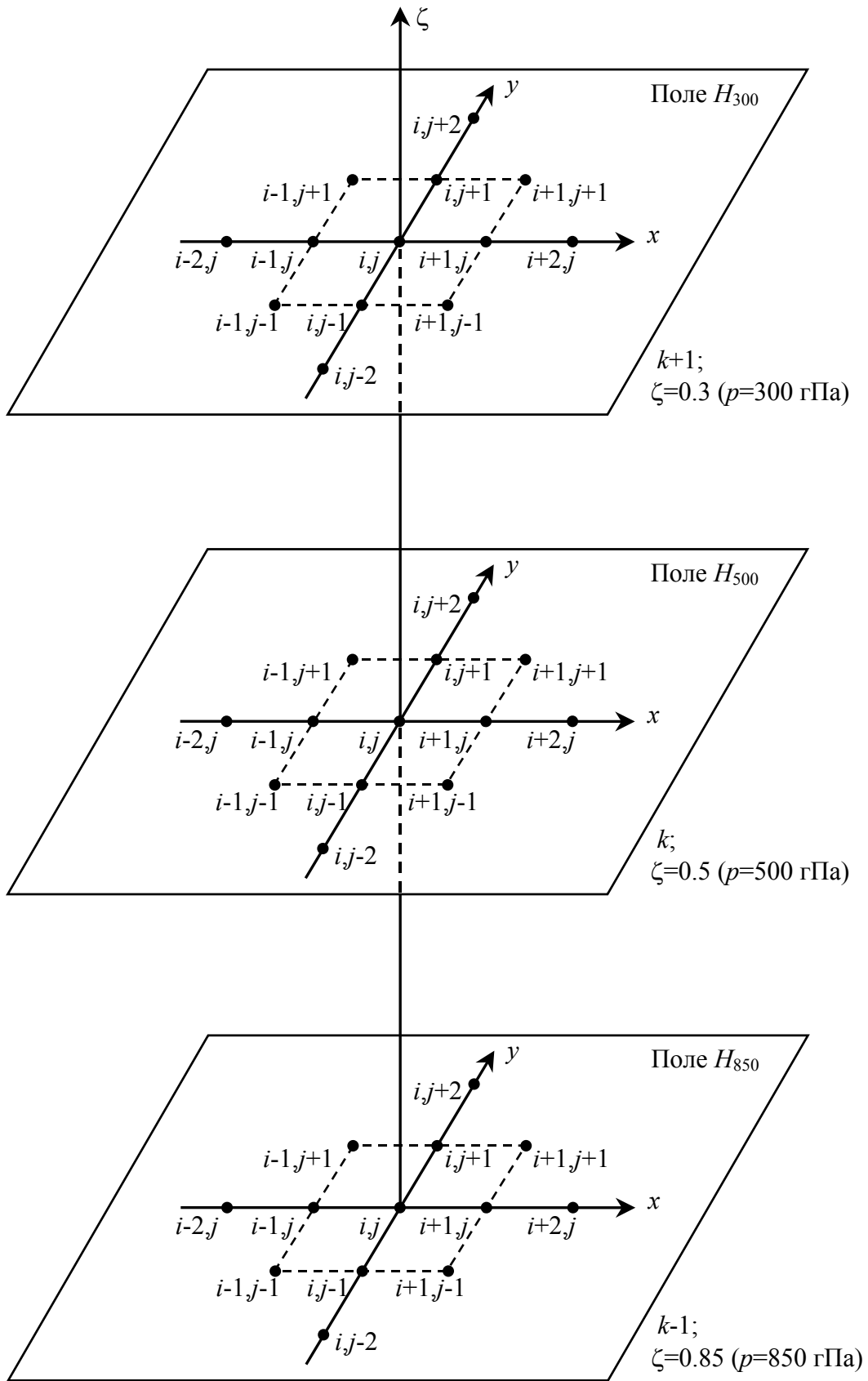


Рисунок 4.4 – Схема вузлів симетричної сітки на ізобаричних поверхнях 850, 500, 300 гПа.

$$A_{Tg} = - \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (4.23)$$

Підставимо в (4.23) вираз для складових геострофічного вітру (4.16) і виключимо з нього температуру за допомогою рівняння статки: $T = - \frac{g\zeta}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta}$. Після підстановки отримаємо:

$$\begin{aligned} A_{Tg} &= - \left[- \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{g\zeta}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) + \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{g\zeta}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) \right] = \\ &= \frac{g^2 \zeta}{lR} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В формулу (4.24) входять похідні від висоти ізобаричної поверхні по вертикальній координаті ζ . Для їх обчислення необхідно мати значення H щонайменше на двох ізобаричних поверхнях. Введемо безрозмірну координату по вертикалі $k = \frac{p}{\Delta p}$. В скінченнорізницевому вигляді формула для обрахування A_{Tg} у точці з координатами i, j на ізобаричній поверхні k запишеться таким чином:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{Tg})_{i,j,k} &= \frac{g^2 \zeta_k}{Rl_{i,j}} \left\{ \left(\frac{H_{i+1,j,k} - H_{i-1,j,k}}{2d} \right) \left[\frac{(\partial H / \partial \zeta)_{i,j+1,k} - (\partial H / \partial \zeta)_{i,j-1,k}}{2d} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{H_{i,j+1,k} - H_{i,j-1,k}}{2d} \right) \left[\frac{(\partial H / \partial \zeta)_{i+1,j,k} - (\partial H / \partial \zeta)_{i-1,j,k}}{2d} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

де ζ_k – вертикальна координата обчислювального рівня.

Як видно з рис.4.4, $\zeta_k = 0.5$, $\zeta_{k-1} = 0.85$, $\zeta_{k+1} = 0.3$. Відповідно до прийнятих позначень формула (4.25) записана для адвекції температури на ізобаричній поверхні 500 гПа. Представимо для цієї поверхні похідні по ζ в скінченнорізницевому вигляді, при цьому будемо користуватися формулами для центральних різниць:

$$\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta} \right)_{i,j+1,k} = \frac{H_{i,j+1,k+1} - H_{i,j+1,k-1}}{\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}} \equiv \frac{\delta H_{i,j+1,k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}};$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \zeta}\right)_{i,j-1,k} = \frac{H_{i,j-1,k+1} - H_{i,j-1,k-1}}{\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}} \equiv \frac{\delta H_{i,j+1,k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}}. \quad (4.26)$$

Аналогічним чином можна розписати похідні в точках $i+1,j,k$ та $i-1,j,k$.

Якщо формули виду (4.26) підставити в (4.25) і знаменник винести за дужки, то формула (4.25) запишеться так:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{Tg})_{i,j,k} = & \frac{g^2 \zeta_k}{Rl_{i,j} 4d^2 (\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1})} \left\{ (H_{i+1,j,k} - H_{i-1,j,k}) [(\delta H)_{i,j+1,k} - \right. \\ & \left. - (\delta H)_{i,j-1,k}] - (H_{i,j+1,k} - H_{i,j-1,k}) [(\delta H)_{i+1,j,k} - (\delta H)_{i-1,j,k}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В (4.27) δH – різниця висот двох ізобаричних поверхонь (у нашому випадку H_{300} та H_{850}) у вузлах, які розташовані на осях x і y та знаходяться від обчислювальної точки i, j на відстані кроку сітки d . Підставимо у (4.27) значення всіх сталих ($g = 9.8 \text{ мс}^{-2}$, $R = 287 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2} \text{ К}^{-1}$, $d = 300 \text{ км}$, $(\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}) = -0.55$, $\zeta_k = 0.5$). Тоді одержимо робочу формулу для геострофічної адвекції температури, в якій враховано, що 1 дам = 10 м:

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{Tg})_{i,j,k} = & \frac{0.058}{\sin \varphi_{i,j}} 10^{-5} \left\{ [(\delta H)_{i+1,j,k} - (\delta H)_{i-1,j,k}] (H_{i,j+1,k} - \right. \\ & \left. - H_{i,j-1,k}) - [(\delta H)_{i,j+1,k} - (\delta H)_{i,j-1,k}] (H_{i+1,j,k} - H_{i-1,j,k}) \right\} \text{Кс}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Розрахунки за формулою (4.28) треба виконувати у такій послідовності:

1. По значеннях висот ізобаричних поверхонь 850 і 300 гПа обчислюються величини δH у вузлах: $i+1,j$, $i-1,j$, $i,j+1$, $i,j-1$.

2. По значеннях висот ізобаричної поверхні 500 гПа знаходяться різниці H , пропорційні першим похідним по x , y у вузлі з координатами i,j .

3. Отримані величини підставляються у формулу (4.28) і обчислюються $(A_{Tg})_{i,j}$ на k -рівні. Додатним значенням відповідає адвекція тепла, а від'ємним – адвекція холоду. Нагадаємо, що для обчислення геострофічної адвекції температури використовуються ті ж самі поля H , що й для обчислення геострофічної адвекції вихору.

РОЗДІЛ 5

СХЕМИ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ГІДРОТЕРМОДИНАМІКИ ЗА ЧАСОМ

5.1 Теоретичні питання інтегрування рівнянь за часом

Точність чисельного інтегрування рівнянь гідротермодинаміки методом сіток залежить від точності скінченнорізницевої апроксимації похідних і за простором, і за часом. Проте, як показали оцінки, вплив помилки скінченнорізницевого представлення просторових похідних більш істотний, ніж помилки апроксимації похідних за часом. За деякими оцінками [6] помилки чисельного інтегрування рівнянь гідротермодинаміки на 40% обумовлені скінченнорізницевою апроксимацією похідних за простором і тільки на 1% - за часом. Ураховуючи ці обставини, при побудові скінченнорізницевих схем для рівнянь гідротермодинаміки необхідно передусім приділяти увагу точності розрахунків похідних у просторі. Проте це не означає, що питанням побудови схем інтегрування за часом не слід приділяти увагу. Навпаки, як буде виявлено нижче, від характеру цих схем значно залежать властивості чисельних розв'язків рівнянь гідротермодинаміки.

Схеми, які використовуються для апроксимації часових похідних у системі повних рівнянь, відносно прості. Як правило, ці схеми мають другий або перший порядок точності. Це пов'язано з такими обставинами. По-перше, практика показала, що схеми з високим порядком точності часових похідних найчастіше недостатньо ефективні при розв'язанні рівнянь з частинними похідними, але дуже ефективні при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь. Така різниця цілком може бути обґрунтована. Для одержання точного розв'язку звичайного диференціального рівняння потрібно знайти лише одну початкову умову. Отже, помилка чисельного розв'язання повністю визначається неадекватністю схеми. Що ж стосується рівнянь з частинними похідними, то зазначена помилка спричиняється як неадекватністю математичної моделі реальної атмосфери, так і недостатньою інформацією про початкові умови, оскільки останні відомі тільки у дискретних точках простору. Таким чином, підвищення точності схеми покращує тільки один з цих двох компонентів й ефект виявляється не таким істотним.

Другу причину, з якої не вимагається використання схеми високої

точності для апроксимації похідних за часом, можна пояснити так. Для того, щоб задовольнити умови стійкості, однієї з найважливіших властивостей різницевих схем, необхідно вибрати крок за часом істотно менший, ніж це потрібно заради відповідної точності. Через обраний таким чином крок за часом інші помилки, наприклад, пов'язані з диференціюванням за простором, виявляються значно більшими за помилки, обумовлені диференціюванням за часом. Отже, обчислювальні засоби має сенс спрямувати найбільшою мірою на зменшення помилок диференціювання за простором, ніж на збільшення точності диференціювання за часом. Проте, доцільно розглянути ці можливі схеми диференціювання за часом, оскільки, як зазначалося вище, вигляд цих схем значною мірою визначає властивості чисельних розв'язків диференціальних рівнянь.

Раніш ніж ми перейдемо до конкретних схем, наведемо ряд визначень, які будуть використані при подальшому викладенні матеріалу.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \varphi, \quad (c > 0) \quad (5.1)$$

де $f = f(r, t)$ - розв'язок,

$\varphi = \varphi(r, t)$ - відома функція,

c - постійна додатна величина,

r - будь-яка просторова координата (x, y, t),

t - час.

Нехай розв'язок (5.1) потрібно знайти в області зміни незалежних змінних $(D + \Gamma) \times D_t$ (рис.5.1). У цьому випадку область $(D + \Gamma)$ представ-

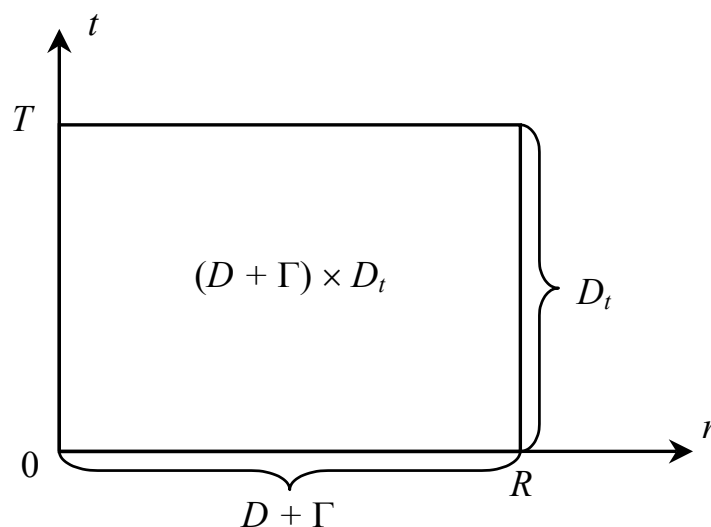


Рисунок 5.1 - Область зміни незалежних змінних r, t .

ляє собою відрізок прямої на осі r ($0 \leq r \leq R$), межами якого є точки $r = 0$, $r = R$. Областю змін часу D_t будемо вважати інтервал $0 < t \leq T$. У результаті задача формується таким чином. Розв'язок рівняння (5.1) в області $D \times D_t$ має задовольняти межові та початкові умови, які можна задати у вигляді:

$$\psi(r) = f(r, 0) \text{ в області } D \text{ при } t = 0, \quad (5.2)$$

$$g(r, t) = \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \text{ на } \Gamma \times D_t. \quad (5.3)$$

Диференціальній задачі (5.1-5.3) відповідає скінченнорізницева задача. Для цього в області $(D + \Gamma) \times D_t$ будується дискретна просторово-часова сітка, вузлами якої є точки з індексами $q = 0, 1, \dots, Q$ ($q = r/\Delta r$), $s = 0, 1, \dots, S$ ($s = t/\Delta t$) (рис.5.2). Тоді області D відповідає дискретна область D_q , тобто відрі-

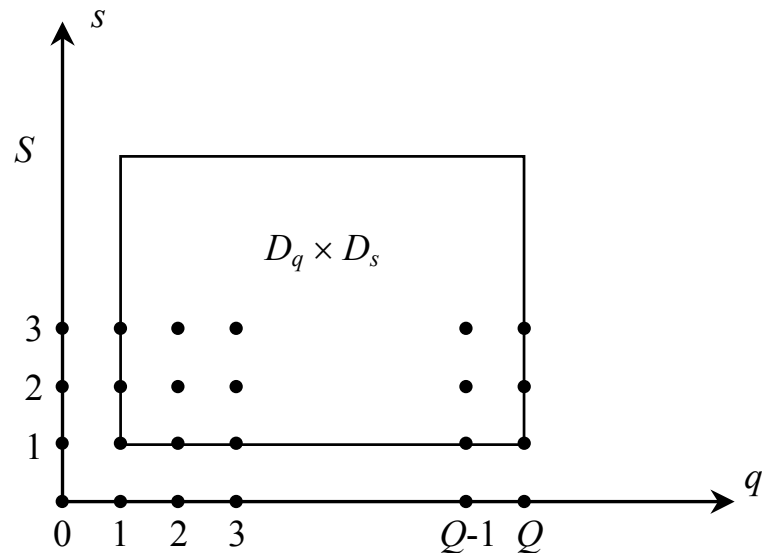


Рисунок 5.2 - Дискретна просторово-часова сітка, яка відповідає області $D_q \times D_s$.

зок прямої r з вузлами $q = 1, 2, \dots, Q-1$, вузли на межі Γ_q мають координати 0 і Q . Неперервному часовому інтервалу D_t відповідає дискретний проміжок D_s з вузлами $s = 1, 2, \dots, S$. Функціям, диференціальним операторам, межовим та початковим умовам (5.1-5.3) відповідають сіткові функції, оператори, початкові та межові умови. В результаті ми маємо скінченнорізницеву задачу:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} = \varphi_q^s \text{ в області } D_q \times D_s, \quad (5.4)$$

($q = 1, 2, \dots, Q-1$; $s = 1, 2, \dots, S$).

$$\varphi_q = f_q^0 \text{ в області } D_q, \quad (5.5)$$

($q = 1, \dots, Q-1; s = 0$).

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = 0, \quad (5.6)$$

у вузлах на межі $\Gamma_q \times D_s$ ($q = 0; Q$ та $s = 1, 2, \dots, S$).

Зазначимо, що скінченнорізницеву задачу, відповідну диференціальній задачі (5.1-5.3), можна сформулювати в інших варіантах. Наприклад, можна представити диференціальне рівняння (5.1) за допомогою скінченнорізницевої схеми, в якій похідні апроксимуються центральними різницями, а не однобічними, як у (5.4).

Сукупність вузлів просторово-часової сітки, розміщених на площині чи на прямій та відповідних фіксованому часу, має назву часового шару чи рівня.

Для області визначення розв'язку задачі (5.4-5.6) шарами (рівнями) будуть називатися сукупності точок з індексами $q = 0, 1, 2, \dots, Q$ при фіксованих значеннях індексу s . За допомогою скінченнорізницевого рівняння (5.4), початкових та межових умов можна послідовно знайти розв'язки на рівнях $s = 0, 1, 2, \dots, S$:

$$\begin{aligned} f_q^1 &= f_q^0 - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^0 - f_{q-1}^0) + \Delta t \varphi_q^0; \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \Delta t \varphi_q^s; \\ f_q^S &= f_q^{S-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^{S-1} - f_{q-1}^{S-1}) + \Delta t \varphi_q^{S-1}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

($q = 1, 2, \dots, Q - 1$)

З виразу (5.7) видно, що чисельний розв'язок f_q^s задачі (5.4-5.6), який визначається на двовимірній сітці, подається набором розв'язків на одновимірних сітках з індексами $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, здобутих при фіксованих індексах s .

Таким чином, чисельний розв'язок, визначений на двовимірній сітці, розшарувався і замінився послідовністю розв'язків f^1, f^2, \dots, f^S , визначених на одновимірних сітках.

Процедури послідовного отримання розв'язків від шару до шару мають назву крокових чи методів кроків за часом. Кроковими є також скінченнорізницеві схеми, за допомогою яких реалізуються крокові процедури.

У задачі, яка розглядається, шукана сіткова функція f_q^{s+1} (на наступному рівні $s + 1$ у точці q) однозначно визначається її значенням на рівні s у двох точках $q - 1$ і q та відомою сітковою функцією φ (правою частиною) на рівні s у точці q .

За кількістю використаних у схемі шарів (рівнів) за часом і точок у просторі схеми можна поділити на двошарові, тришарові тощо. Схема (5.4) є двошаровою чи дворівневою за часом та двоточковою у просторі.

Коли у диференціальному рівнянні (5.1) замінити похідні центральними різницями, то вийде тришарова (трирівнева) схема за часом і триточкова у просторі:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = \varphi_q^s. \quad (5.8)$$

Розв'язок за допомогою цієї схеми на рівні $s + 1$ у точці q однозначно визначається значенням сіткової функції f_q^s на двох попередніх рівнях s та $s - 1$ у трьох точках $q - 1$, q , $q + 1$, правою частиною φ_q^s і межовими умовами у двох точках $q = 0$ і $q = Q$:

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) + 2\Delta t \varphi_q^s. \quad (5.9)$$

Розрізняють три форми скінченнорізницевоїх схем часових похідних: явні, неявні, півнеявні.

а) Схема має назву явної, якщо значення шуканої функції у майбутній момент часу (на рівні $s + 1$) виражаються через відомі функції.

Розглянуті дві схеми (5.7-5.8) належать до явних, тому що шукані величини f_q^{s+1} визначаються безпосередньо (явно) за допомогою формул (5.7) і (5.8) відповідно (за початковими і межовими умовами та обчисленими на попередніх рівнях значеннями f_q^{s-1} , f_q^s , f_{q-1}^s , f_{q+1}^s , φ_q^s).

б) Якщо просторову похідну у диференціальному рівнянні віднести до майбутнього моменту часу (до рівня $s + 1$), то шукану функцію неможливо виразити через відомі величини. Така схема має назву неявної.

Наприклад, коли в схемі (5.4) сіткові функції у просторовій похідній віднести до рівня $s + 1$, то одержимо:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + \Delta t \varphi_q^s. \quad (5.10)$$

Ця схема є неявною, тому що містить дві невідомі величини (у точках q і $q - 1$) і за її допомогою не можна безпосередньо з (5.10) обчислити невідоме значення сіткової функції в одній точці q у момент часу $s + 1$. Для цього необхідно різницеве рівняння (5.4) записати для усіх точок ($q = 1, 2, \dots, Q - 1$) та межові умови у точці $q = 0$, а потім розв'язувати систему цих рівнянь. У результаті визначаються значення шуканої функції на рівні $s + 1$ (у майбутній момент часу) в цих точках ($q = 1, 2, \dots, Q - 1$).

в) Півнеявні – це схеми, в яких лінійні члени (не прогностичні) осереднюються за часом; при цьому використовуються значення сіткових функцій на двох рівнях за часом ($s + 1$ та s чи $s + 1$ та $s - 1$), тобто одне зі значень сіткової функції є невідомим. Наприклад, півнеявна схема рівняння (5.1) буде мати вигляд:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} \frac{1}{2} [(f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + (f_q^s - f_{q-1}^s)] + \Delta t \varphi_q^s. \quad (5.11)$$

У метеорологічній практиці використовуються частково неявні схеми. Пояснимо суть таких схем на прикладі першого рівняння руху, наведеного у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = lv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5.12)$$

чи $\frac{\partial u}{\partial t} = f_{\text{нл}} + f_{\text{л}}$, де $f_{\text{нл}}$ - нелінійний член ($u \frac{\partial u}{\partial x}$); $f_{\text{л}}$ - лінійні члени ($lv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$).

У скінченнорізницевій формі (5.12) запишеться таким чином:

$$u_q^{s+1} = u_q^s - \Delta t \frac{1}{2} (f_{\text{нл}}^s + f_{\text{л}}^{s+1}).$$

Це дворівнева схема першого порядку точності по Δt . Тут нелінійні члени апроксимуються явно, а лінійні - неявно. Порівняння цієї схеми з (5.11) показує, що півнеявні та частково неявні схеми по своїй суті близькі.

Розглянемо більш детально основні схеми інтегрування за часом на прикладі рівняння вигляду:

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} = F \left[f(r,t), \frac{\partial f(r,t)}{\partial t}, t \right], \quad (5.13)$$

де f - шукана функція (розв'язок); через F позначені усі члени, які не міс-

тять похідних за часом.

У вигляді (5.13) можна подати будь-яке прогностичне рівняння з системи рівнянь гідротермодинаміки. Наприклад, якщо перше рівняння руху

$$(5.12) \text{ записати стосовно локальної похідної } \frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} + lv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \text{ то}$$

відповідно до (5.13) роль функції f виконує зональна складова швидкості вітру u , а F - права частина рівняння.

Зауважимо, що усі схеми, які розглядаються далі, реалізуються методом кроків за часом. Через те, що розв'язок на часовому рівні $t + \Delta t$ чи $s + 1$ (у безрозмірних координатах) однозначно визначається межовими умовами та розв'язками на попередніх рівнях (у попередні моменти часу), застосування цих схем будемо обговорювати на якомусь одному часовому кроці.

5.2 Дворівневі схеми

Існують схеми, у яких використовують значення залежних змінних на двох часових рівнях s і $s + 1$. Для того, щоб здійснити інтегрування на першому кроці за часом, можна використовувати тільки дворівневу схему. У цьому випадку знаходження функції на рівні $t + \Delta t$ зводиться до інтегрування рівняння (5.13) у межах від t до $t + \Delta t$.

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t) + \int_t^{t+\Delta t} F \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right] dt. \quad (5.14)$$

Спочатку перелічимо кілька схем, у яких не використовуються ітераційні процедури.

1) Схема Ейлера (чи схема з різницями, спрямованими уперед) має вигляд:

$$f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^s \Delta t. \quad (5.15)$$

Ця схема здобута з розв'язання (5.14), у якому неперервна функція F замінюється сітковою функцією F_q , віднесеною до моменту часу t (рівня s). Інакше кажучи, підінтегральний вираз у (5.14) є незмінним та дорівнює його значенню на нижній межі часового інтервалу. Отже, f у (5.15) не

центрована відносно часового інтервалу й тому, кажуть, що така схема нецентрована. Схема є явною (експліцитною), бо шукане значення F_q^{s+1} визначається через відоме сіткове значення F_q^s та початкову умову f_q^s .

Помилка апроксимації схеми (5.15) - $O(\Delta t)$, тобто ця схема першого порядку точності по Δt .

2) Неявна схема. Якщо у (5.14) значення підінтегрального виразу F взяти сталим та рівним значенню F_q на верхній межі часового інтервалу $s + 1$, то схема буде мати вигляд:

$$f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^{s+1} \Delta t. \quad (5.16)$$

Оскільки у схемі (5.16) F_q^{s+1} залежить від шуканої (невідомої) функції f_q^{s+1} , то ця схема є неявною (імпліцитною).

На відміну від явної схеми (5.15) неявна схема (5.16) не дозволяє одержати розв'язок рівняння у частинних похідних (5.13) в одній точці, тобто не можна безпосередньо обчислити f_q^{s+1} . У цьому випадку необхідно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь, які апроксимують диференціальні рівняння на усій множині внутрішніх вузлів просторової сітки з використанням межових умов. Це легко показати на прикладі лінійного рівняння (5.1), неявна схема якого має вигляд (5.10).

Помилка апроксимації у (5.16) дорівнює $O(\Delta t)$.

3) Схема трапецій. Якщо у виразі (5.14) підінтегральну функцію замінити сітковою та прийняти її сталою й рівною півсумі її значень на нижній та верхній межах часового інтервалу, то одержимо неявну дворівневу схему, яка здобула назву схеми трапецій:

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{1}{2} (F_q^s + F_q^{s+1}) \Delta t. \quad (5.17)$$

Це неявна схема; її помилка апроксимації дорівнює $O[(\Delta t)^2]$.

Для того, щоб збільшити точність, можна побудувати ітераційні схеми. Дві схеми, які представлені нижче, побудовані таким самим чином, як (5.16) і (5.17), але для того, щоб зробити ці схеми явними, використана ітераційна процедура.

4) Схема Мацуно (чи схема Ейлера з перерахунком). У цій схемі перший крок робиться за звичайною схемою Ейлера. Величина f , яка знайдена для часового рівня $s + 1$, потім використовується для визначення наближеного значення $f_q^{(s+1)*}$. Це значення використовується для перерахунку f_q^{s+1} за схемою (5.16). Таким чином,

$$\begin{aligned} f_q^{(s+1)*} &= f_q^s + F_q^s \Delta t; \\ f_q^{(s+1)} &= f_q^s + F_q^{(s+1)*} \Delta t, \end{aligned} \quad (5.18)$$

де $F_q^{(s+1)*} \equiv F[f^{(s+1)*}, (s+1)\Delta t]$.

Це явна схема першого порядку точності по Δt .

5) Схема Хойну. Тут апроксимація будується з використанням схеми трапецій:

$$\begin{aligned} f_q^{(s+1)*} &= f_q^s + F_q^s \Delta t; \\ f_q^{(s+1)} &= f_q^s + \frac{1}{2}(F_q^s + F_q^{(s+1)*})\Delta t, \end{aligned} \quad (5.19)$$

де $F_q^{(s+1)*}$ обчислюється з використанням $f_q^{(s+1)*}$.

Двокрокові схеми (5.18) і (5.19) складаються зі схем предиктора (перші формули) та схем коректора (другі формули). За допомогою схем предиктора обчислюються попередні значення $f_q^{(s+1)*}$, які потім уточнюються за допомогою схем коректора. Разом ці схеми мають назву схем “предиктор-коректор”.

Схема (5.18) має перший порядок точності по Δt , а схема (5.19) - другий порядок.

Існують також схеми з кількома коректорами, наприклад трикрокова схема з двома коректорами:

$$\begin{aligned} f_q^{(s+1)*} &= f_q^s + F_q^s \Delta t; \\ f_q^{(s+1)**} &= f_q^s + F_q^{(s+1)*} \Delta t; \\ f_q^{(s+1)} &= f_q^s + F_q^{(s+1)**} \Delta t. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Помилка апроксимації схеми (5.20) - $O(\Delta t)$.

5.3 Трирівневі схеми

Знаходження функції f в момент часу $t + \Delta t$ можна звести до інтегрування рівняння (5.13) у межах від $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$:

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} F \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right] dt. \quad (5.21)$$

В цьому випадку, використовуючи значення $f(r, t - \Delta t)$, можна будувати трирівневі схеми, які мають переваги через використання цієї додаткової інформації. Як впливає з викладеного вище, при побудові цих схем використовуються значення сіткової функції f_q на трьох часових рівнях: $s - 1$, s , $s + 1$.

1) Схема центральних різниць (ЦР). Найпростіший спосіб дістати центровану оцінку інтеграла в (5.21) полягає у тому, що за F приймається стала величина, яка рівна його значенню у середній точці інтервалу $2\Delta t$. Це дає схему центральних різниць:

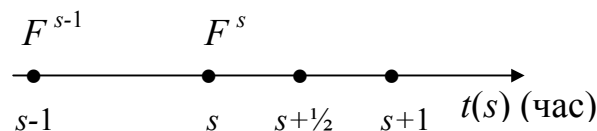
$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} + 2\Delta t F_q^s. \quad (5.22)$$

Помилка апроксимації цієї схеми $O[(\Delta t)^2]$. У наш час схема (5.22) найбільш широко використовується в атмосферних моделях [2]. В іноземній літературі ця схема має назву схема “чехарди”.

2) Схема Адамса-Бешфорта. Ця схема є спрощеним варіантом первісної схеми Адамса-Бешфорта четвертого порядку точності. Спрощений варіант виходить, коли в (5.21) функція апроксимується значенням, одержаним у центральній точці інтервалу Δt лінійною екстраполяцією при використанні значень F_q^{s-1} й F_q^s :

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \Delta t F_q^{s+1/2}. \quad (5.23)$$

Екстраполяцію функції F на часовий рівень $s + 1/2$ пояснимо за допомогою рисунка.



$$F^{s+1/2} = F^s + \frac{(F^s - F^{s-1}) \Delta t}{2}.$$

Після скорочення Δt та зведення до спільного знаменника дістанемо:

$$F^{s+1/2} = \frac{3}{2}F^s - \frac{1}{2}F^{s-1}. \quad (5.24)$$

Підставляючи (5.24) у (5.23), одержимо схему Адамса-Бешфорта:

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \Delta t \left(\frac{3}{2}F_q^s - \frac{1}{2}F_q^{s-1} \right). \quad (5.25)$$

Ця схема явна, однокрокова, другого порядку точності по Δt .

3) Схема Лакса-Вендрофа. Ця схема належить до явних трирівневих двокрокових схем. Розглянемо застосування її на прикладі одновимірного лінійного рівняння адвекції такого вигляду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad c = \mathbf{const}. \quad (5.26)$$

Схемою Лакса-Вендрофа передбачається два цикли (кроки) розрахунків. Спочатку будують рішення у проміжних точках у просторі і часі $q \pm 1/2, s + 1/2$, використовуючи початкові умови у момент часу s в точках $q, q + 1, q - 1$ за допомогою таких скінченнорізницевих схем:

$$\begin{aligned} f_{q+1/2}^{s+1/2} &= \frac{1}{2} (f_{q+1}^s + f_q^s) - c \left(\frac{f_{q+1}^s - f_q^s}{\Delta r} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}, \\ f_{q-1/2}^{s+1/2} &= \frac{1}{2} (f_q^s + f_{q-1}^s) - c \left(\frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

У цих схемах використовуються спрямовані різниці за часом і центральні - у просторі. Нагадаємо, що спрямовані - це односторонні різниці, які розраховуються за значеннями функції лише в двох точках у просторі чи у часі.

Використовуючи одержані значення $f_{q+1/2}^{s+1/2}$, $f_{q-1/2}^{s+1/2}$ і початкову умову f_q^s , за допомогою схеми центральних різниць знаходимо розв'язок в точці q у момент часу $s + 1$ (рис.5.3):

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \left(\frac{f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2}}{\Delta r} \right) \Delta t. \quad (5.28)$$

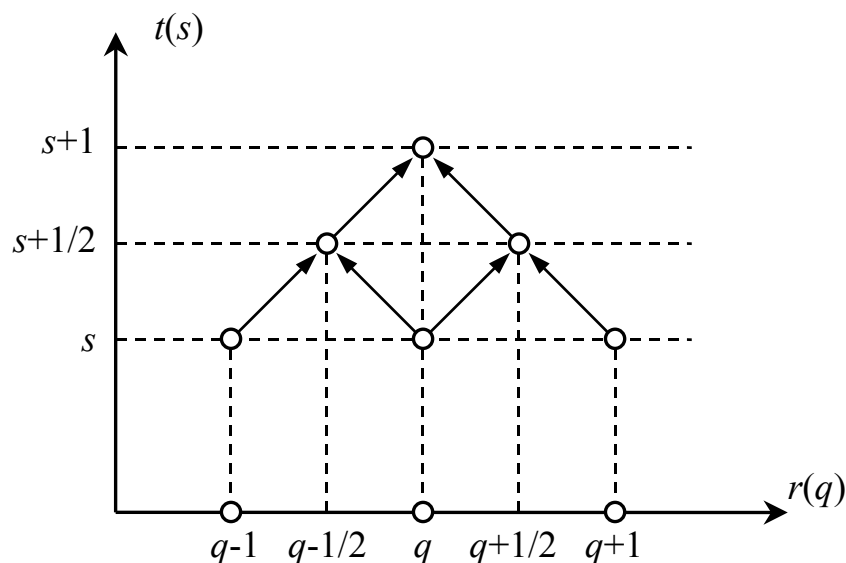


Рисунок 5.3 - Розміщення залежних змінних при використанні схеми Лакса-Вендрофа.

Схеми (5.27) є дворівневими за часом, мають перший порядок точності по Δt і другий порядок по Δr , а схема (5.28) - триврівнева за часом, другого порядку точності по Δt і Δr .

5.4 Схеми зі спрямованими (нецентральними) різницями

При чисельному інтегруванні рівнянь, що описують процеси адвекції, доцільно використовувати такі схеми, в яких похідні за простором апроксимуються нецентральними різницями з урахуванням напрямку переносу. Наприклад, для рівняння (5.26) у залежності від знаку c похідну по r можна апроксимувати такими спрямованими різницями:

$$\begin{aligned}
 f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s), \quad \text{при } c > 0; \\
 f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s), \quad \text{при } c < 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.29}$$

Перше з рівнянь (5.29) містить різниці назад, а друге - вперед для апроксимації просторової похідної. Проте, в обох випадках різниці спрямовані у той бік, звідки здійснюється перенос (адвекція) до центральної точки q (рис.5.4). Тому схеми для рівнянь, що описують адвекцію, зветься

схемами “проти потоку”.

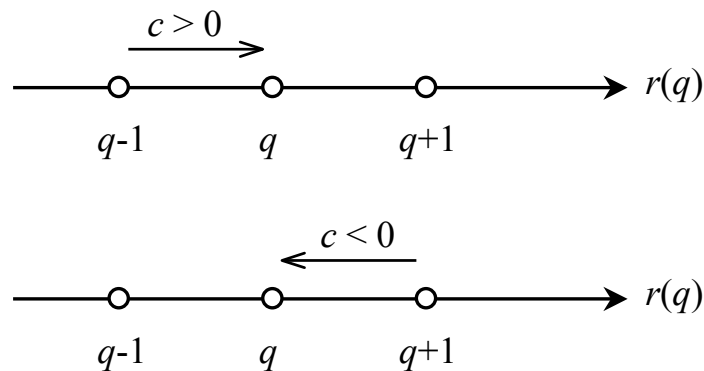


Рисунок 5.4 - Напрямок переносу у схемах “проти потоку”.

Схеми, в яких різниці за координатою r спрямовані у бік, куди відбувається перенос від точки q , звуться схемами “за потоком” (рис.5.5) і записуються таким чином:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s), \text{ при } c > 0; \quad (5.30)$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s), \text{ при } c < 0.$$

Схеми (5.29) і (5.30) явні і мають перший порядок апроксимації по Δt і Δr .

У роботі [6] показано, що відповідно до рівняння адвекції схеми “проти потоку” (5.29) мають перевагу у порівнянні з центрованими просторовими схемами. Ця перевага полягає в тому, що коли використовується схема з різницями “проти потоку”, збурення не може поширюватися у напрямку, протилежному фізичній адвекції. Таким чином, жодні паразитарні хвилі не будуть переключувати чисельний розв’язок.

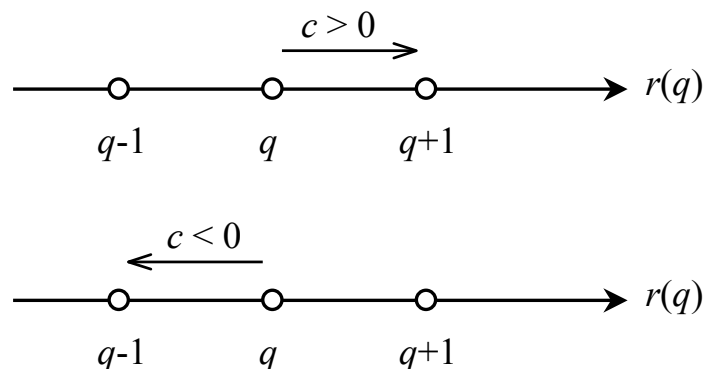


Рисунок 5.5 - Напрямок переносу у схемах “за потоком”.

На закінчення розглянемо ще одну схему чисельного розв'язку одновимірного рівняння адвекції (5.26), яке зветься схемою “біжучого обчислення”. Ця схема (неявна, першого порядку по Δr і другого по Δt) записується у вигляді:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left[\frac{f_q^{s+1} + f_q^s}{2} - \frac{f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s}{2} \right], \text{ при } c > 0. \quad (5.31)$$

Ця неявна схема може бути переписана у вигляді рекурентного співвідношення, яке дозволяє послідовно будувати розв'язок для точок у порядку зростання q , не вдаючись до розв'язання систем рівнянь вигляду (5.31):

$$f_{q+1}^{s+1} = \frac{1 - c \frac{\Delta t}{\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} f_q^s + \frac{c \frac{\Delta t}{2\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} (f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s). \quad (5.32)$$

Схеми “біжучого обчислення” можуть бути використані для багатовимірних рівнянь.

Потрібно відзначити, що розглянуті в цьому розділі схеми не охоплюють усі можливі види схем інтегрування. Більш того, при розв'язанні більш складних рівнянь в частинних похідних або систем таких рівнянь можуть бути побудовані інші часові чи просторово-часові різницеві схеми, чим ті, що визначені для простих рівнянь (5.1), (5.13), (5.26). Такі схеми широко використовуються в атмосферних моделях і з деякими з них можна ознайомитися у роботі [7].

РОЗДІЛ 6
ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СТІЙКІСТЬ СКІНЧЕННОРІЗНИЦЕВИХ СХЕМ
РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ГІДРОТЕРМОДИНАМІКИ

6.1 Загальні положення

Як відомо [2], вихідна система рівнянь гідротермодинаміки, що використовується для цілей гідродинамічного прогнозу, є системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Така система “рівнянь погоди” не піддається аналітичному розв’язанню, тому доводиться звертатися до наближених (чисельних) методів, суть яких зводиться до заміни (апроксимації) диференціальних операторів деякими скінченнорізницеви-ми співвідношеннями (див. перший розділ). При такому підході спочатку коректно сформульована диференціальна змішана крайова задача замінюється різницевою, яка являє собою систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій Φ, u, v, τ, T .

Пояснимо це на прикладі неоднорідного диференціального рівняння вигляду:

$$Lf = \varphi, \tag{6.1}$$

де L – диференціальний оператор будь-якого типу (лінійний чи нелінійний),

f – шукана функція,

φ – права частина, яка вважається відомою.

В формі (6.1) може бути наданим будь-яке з п’яти повних рівнянь погоди, які розрізняються між собою виглядом диференціального оператора L , що містить похідні за простором і за часом, і структурою правих частин.

Нагадаємо, що в задачі гідродинамічного прогнозу незалежними змінними є час (t) і просторові координати (x і y – горизонтальні; p, ζ або σ – вертикальні), які позначимо в загальному випадку через r . Тоді $f = (r, t)$, $\varphi = \varphi(r, t)$.

Розв’язок диференціальної задачі (6.1) шукається в області D змін просторових незалежних змінних r і t (див. рис.5.1). Область D в залежності від виду розв’язуваної задачі може бути об’ємом (тривимірна область), поверхнею (двовимірна) чи лінією (одновимірна), а межами Γ - відповідно:

поверхня, лінія або точка.

Розв'язок задачі (6.1) (в області D), як відомо з курсу вищої математики, буде однозначним, якщо він задовольняє початкові (у момент часу t_0) і межові умови (на контурі Γ).

У такій постановці задачу (6.1) називають змішаною крайовою чи нестационарною крайовою задачею [8].

Постановка початкових і межових умов визначається характером розв'язуваної задачі та конкретним виглядом рівняння. У загальному випадку їх можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} f(r, t_0) &= \tilde{f}(r) \quad \text{у } D \text{ при } t = t_0, \\ f(r, t) &= g(r, t) \quad \text{на } \Gamma \times D_\tau. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Будемо тепер розв'язувати задачу (6.1-6.2) різницевиими методами на просторово-часовій сітці $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$, вузлами якої є точки з індексами q (просторові координати) і s (час). При цьому $q = r/\Delta r$, $s = t/\Delta t$ (Δr - просторовий крок; Δt - крок за часом).

На такій сітці визначаються сіткові функції f_q^s і φ_q^s та сіткові оператори L_h , \tilde{f}_q , g_q^s .

Таким чином, крайовій диференціальній задачі (6.1-6.2) ставиться у відповідність різницева крайова задача:

$$\begin{aligned} L_h \cdot f_q^s &= \varphi_q^s, \\ f_q^0 &= \tilde{f}_q \quad \text{в } D_h \text{ при } s = 0, \\ f_q^0 &= g_q^s \quad \text{на } \Gamma_h \times D_\tau. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Перехід від диференціальної задачі (6.1-6.2) до різницевої (6.3) здійснюється за допомогою розглянутої раніше (див. попередні розділи) процедури апроксимації просторових і часових похідних, що входять у оператори L , φ , \tilde{f} і g для сукупності вузлів просторово-часової сітки $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$.

Від вибору тих чи інших схем апроксимації просторово-часових похідних, а також від методу розв'язання самої різницевої задачі в остаточному підсумку залежить принципово важливе питання - чи адекватна остання вихідній диференціальній задачі? Іншими словами, чи зберігається фізична суть задачі (6.1-6.2) при її заміні різницевою задачею (6.3)?

Це в ряді випадків далеко не очевидно, тому різницева задача повинна задовольняти умови узгодженості, коректності, стійкості і збіжності.

Тільки при виконанні цих вимог можна розраховувати на одержання чисельного розв'язку f_q^s , близького до точного $f(r, t)$, коли помилка чисельного розв'язання $f_q^s - f(r, t)$ буде мінімальною.

Дамо коротку характеристику введених вище понять. Різницева схема вважається поставленою коректно, якщо при малих Δt і Δr розв'язок існує, він єдиний і безперервно залежить від початкових, межових умов і правої частини рівняння. В цьому випадку кажуть про узгодженість диференціальної і різницевої задач.

Чисельний розв'язок і скінченнорізницева схема, за допомогою якої він отриманий, зветься збіжними, якщо при зменшенні прирощення незалежних змінних, тобто при кроках сітки $\Delta t, \Delta r \rightarrow 0$, помилка апроксимації узгоджених скінченнорізницевоїх схем може бути скільки завгодно малою для фіксованого числа кроків за часом. Таким чином, якщо має місце оцінка за нормою помилки чисельного розв'язку

$$\|f_q^s - f(q\Delta r, s\Delta t)\| \rightarrow 0, \text{ при } \Delta t \rightarrow 0, \Delta r \rightarrow 0, \quad (6.4)$$

то скінченнорізницева схема вважається збіжною.

Отже, поняття збіжності чисельного розв'язання найтіснішим чином пов'язано зі збіжними скінченнорізницевоїми схемами. Останнє означає, що не кожна скінченнорізницева схема може бути збіжною, це буде показано нижче при різницевому розв'язанні лінійного рівняння адвекції, коли точний розв'язок $f(r, t)$ є відомим.

В обчислювальній математиці (за Рихтмайером [9]) стійкість скінченнорізницевоїх схем для диференціальних рівнянь визначається безперервною залежністю чисельних розв'язків від початкових, межових умов і від правих частин рівнянь, тобто існують межі, які не можуть перевищити компоненти початкової функції, що перетворюються у процесі розрахунків.

Така обмежуюча вимога до скінченнорізницевоїх схем зводиться до виконання нерівності [6,7,10]:

$$\|f_q^s\|_{F_h} \leq c_1 \|\tilde{f}_q^0\|_{\tilde{F}_h} + c_2 \|g_q^s\|_{G_h} + c_3 \|\varphi_q^s\|_{\Phi_h}, \quad (6.5)$$

де c_1, c_2, c_3 - сталі величини, що не залежать від величини сіткових кроків ($\Delta t, \Delta r$) і значень правої частини, початкових і граничних умов (відповідно \tilde{f} і g); $F_h, \tilde{F}_h, G_h, \Phi_h$ - скінченновимірні простори сіткових функцій $f_q^s, \tilde{f}_q^0, g_q^s, \varphi_q^s$; $\|\cdot\|$ - норми або максимуми модулів.

З (6.5) випливає, що для фіксованих кроків за часом і простором чисельний розв'язок зі збільшенням кроків за часом залишається обмеженим при будь-яких початкових, межових умовах і правих частинах різницевої задачі (6.3).

Умова стійкості скінченнорізницевої схем суттєво спрощується, якщо відомо, що такий розв'язок диференціальної задачі існує і він обмежений. Тоді замість (6.5) може бути сформульована умова для помилки чисельного розв'язку $f_q^s - f(q \cdot \Delta r, s \cdot \Delta t)$, яка в цьому випадку буде обмеженою.

На жаль, одержати такий розв'язок для нелінійних диференціальних рівнянь, крім деяких окремих випадків, практично не вдається, тому довести стійкість і збіжність чисельних розв'язків вельми складно. В цьому випадку нелінійні рівняння лінеаризуються, а потім доводиться стійкість і збіжність лінійних рівнянь. Отримані при цьому висновки є відправною базою для оцінки шляхом чисельних експериментів умов збіжності і стійкості вихідних нелінійних рівнянь.

При аналізі умов стійкості лінійних рівнянь П.Лакс [7] довів важливу теорему, згідно з якою, якщо лінійна різницева задача поставлена коректно і скінченнорізницева схема задовольняє умови погодженості, то її стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності чисельного розв'язання.

Саме тому нижче докладно викладаються питання стійкості скінченнорізницевої схем, які найбільш широко використовуються в атмосферних моделях [6] і розглянуті в попередніх розділах.

6.2 Дослідження стійкості скінченнорізницевої схем (питання теорії)

Як було відзначено вище, дослідження стійкості скінченнорізницевої схем найбільш коректно проводити для лінійних диференціальних рівнянь, для яких можуть бути знайдені аналітичні (точні) розв'язки. Це дозволить порівняти точні та різницеві розв'язки і відібрати з набору скінченнорізницевої схем ті з них, які відповідають умові стійкості.

За вихідне диференціальне рівняння візьмемо однорідне лінійне рівняння одновимірної адвекції:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (6.6)$$

де c - швидкість переносу (адвекції) будь-якої субстанції вздовж координа-

ти r . В (6.6) c вважається величиною сталою. Вибір рівняння (6.6) не випадковий, оскільки в рівняннях гідродинаміки адвективні члени є одними з головних.

6.2.1 Аналітичне розв'язання лінійного рівняння адвекції

За початкову умову візьмемо:

$$\text{при } t = 0 \quad f(r, 0) = A(0)e^{imr}, \quad (6.7)$$

де $A(0)$ - амплітуда хвилі,

$m = 2\pi/L$ - хвильове число,

L - довжина хвилі,

$i = \sqrt{-1}$.

Таким чином, у момент часу $t = 0$ розв'язок є одновимірною хвилею з параметрами $A(0)$, m , L .

Отже крайова задача (6.6)-(6.7) сформульована коректно. Розв'язок рівняння (6.6) шукається методом поділу змінних шляхом подавання [11]:

$$f(r, t) = \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(t). \quad (6.8)$$

Підставляючи (6.8) у (6.6) і ділячи на $\varphi_1(r) \cdot \varphi_2(t)$, дістанемо:

$$\frac{1}{\varphi_2(t)} \frac{d\varphi_2(t)}{dt} = -c \cdot \frac{1}{\varphi_1(r)} \cdot \frac{d\varphi_1(r)}{dr} = -k = \mathbf{const}. \quad (6.9)$$

Виконаємо інтегрування за відповідною координатою кожного з двох рівнянь в (6.9).

$$\int \frac{1}{\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} dt = -\int k dt; \quad \int \frac{1}{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dr} dr = \int \frac{k}{c} dr$$

або

$$\int \frac{d(\ln \varphi_2)}{dt} dt = -\int k dt; \quad \int \frac{d(\ln \varphi_1)}{dr} dr = \frac{k}{c} \int dr. \quad (6.10)$$

Інтеграли в (6.10) табличні, тому легко бачити, що

$$\ln \varphi_2(t) = \ln A_2 - kt; \quad \ln \varphi_1(r) = \ln A_1 + \frac{k}{c} \cdot r; \quad (6.11)$$

де A_1 і A_2 - сталі інтегрування.

Розв'язок (6.11), отже, можна записати у вигляді:

$$\varphi_1(r) = A_1 e^{\frac{kr}{c}}; \varphi_2(t) = A_2 e^{-kt}. \quad (6.12)$$

З урахуванням (6.12) розв'язок (6.8) набере вигляду:

$$f(r, t) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{k\left(\frac{r-t}{c}\right)}. \quad (6.13)$$

Задовольняючи початкову умову (6.7), не складно переконатися, що $k = imc$; $A_1 \cdot A_2 = A(0)$. З урахуванням отриманих виразів для констант k , A_1 , A_2 перепишемо остаточно аналітичний розв'язок (6.13):

$$f(r, t) = A(0) \cdot e^{im(r-ct)}. \quad (6.14)$$

З (6.14) видно, що розв'язок крайової задачі (6.6)-(6.7) являє собою прогресивну хвилю сталої амплітуди $A(0)$, що переміщується вздовж координати r зі сталою швидкістю c .

У подальшому буде використаний інший запис точного розв'язку (6.14), а саме:

$$f(r, t) = A(t) \cdot e^{imr}, \quad (6.15)$$

де $A(t) = A(0) \cdot e^{imct}$.

В цьому випадку розв'язок є хвилею з амплітудою $A(t)$, яка змінюється за часом. Якщо в (6.14) перейти від лінійної швидкості c до колової частоти $\sigma = 2\pi / T \equiv -ct$ (тут T - період коливань), то його (розв'язок) можна подати у вигляді:

$$f(r, t) = A(0) \cdot e^{i(mr+\sigma t)}. \quad (6.16)$$

Тепер визначемо додатково деякі важливі висновки, які знадобляться у подальшому. Так, якщо від незалежних змінних r, t перейти до нових змінних $\eta \equiv r - ct, t$, то, маючи на увазі, що $f(r, t) \equiv F(\eta, t)$, з рівняння (6.6) випливає, що:

$$\frac{\partial F(\eta, t)}{\partial t} = 0, \quad (6.17)$$

тобто F не залежить від часу, а залежить тільки від η і, отже, $F = F(\eta)$. Та-

ким чином, можна записати:

$$f(r, t) = F(\eta) \equiv F(r - ct). \quad (6.18)$$

З (6.18) випливає, що при $r - ct = \mathbf{const}$, $f(r, t) = \mathbf{const}$, тобто якщо розглядати розв'язок на координатній площині $r; t$, то на прямих лініях $r - ct = \mathbf{const}$ розв'язок залишається незмінним. Ці прямі в математиці називаються характеристиками, константа правих частин яких однозначно визначається початковими умовами [11].

Отже, головний висновок зводиться до того, що на конкретних характеристиках, що виділяються з їх сім'ї виглядом початкових умов, розв'язок крайової задачі не змінюється, тобто при $r - ct = \mathbf{const}$ $f(r, t) = \mathbf{const}$.

Використовуючи отримані вище результати, зручно розглянути питання про збіжність чисельного розв'язання.

6.2.2 Збіжність чисельного розв'язання

Нагадаємо (п.2.1), що помилка апроксимації узгоджених скінченнорізницевих схем при належному їх виборі може бути скільки завгодно малою при зменшенні просторово-часових сіткових кроків. Однак це зовсім не означає, що при цьому буде зменшуватися й помилка чисельного розв'язку $f_q^s - f(q \cdot \Delta r, s \cdot \Delta t)$, якщо $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Ця помилка буде зменшуватися лише в тому випадку, якщо скінченнорізницева схема, яка використовується для чисельного розв'язання, буде збігатися при будь-яких гладких початкових умовах. Це принципове доповнення до згаданого вище (п.2.1) поняття збіжності.

Покажемо на прикладі розв'язання лінійного рівняння одновимірної адвекції (6.6), що не всяка узгоджена скінченнорізницева схема може забезпечити збіжність чисельного розв'язання.

Отже, як було показано вище, точне розв'язання задачі (6.6) сходять до його сталості на конкретній характеристиці, яка залежить від вигляду початкових умов. Тепер запишемо чисельний розв'язок цієї ж задачі з використанням явної скінченнорізницевої схеми зі спрямованою вперед різницею за координатами r і t “проти потоку” (див. розділ 5).

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c \Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad \text{при } c > 0. \quad (6.19)$$

Ця схема узгоджена, через те що при $\Delta t \rightarrow 0$ і $\Delta r \rightarrow 0$ помилка апроксимації просторово-часових похідних наближається до нуля.

Для різницевої схеми (6.19) візьмемо $\Delta r = 100$ м, $\Delta t = 20$ с, $c = 10$ мс⁻¹. На рис.6.1 представлена характеристика (точний розв'язок) $r - ct = r_0$, що відповідає початковій умові при $r_0 = 0$, $t = 0$. Припустимо, що в т.1 ($r = 400$ м, $t = 40$ с) чисельний розв'язок збігається з точним, тобто знаходиться на характеристиці $r - ct = 0$. Простежимо технологію (вона подана на рис.6.1 тонкими штриховими лініями) одержання чисельного розв'язку в цій точці. Згідно з різницевою схемою (6.19) розв'язок у т.1 відповідно до прийнятих вище значень Δr , Δt і c буде визначатися значеннями функції f_q^s (т.2) і f_{q-1}^s (т.3). У свою чергу розв'язок в цих точках буде визначатися значеннями функції відповідно у точках 4, 5 і 5, 6.

Таким чином, чисельний розв'язок на рис.6.1 зображено прямою, що проходить через точки 1, 3 і 6 (жирна штрихова лінія) і не збігається з характеристикою. Отже, чисельний розв'язок не залежить від початкової умови при $r = 0$, $t = 0$ і тому не є збіжним. Це обумовлено тим, що при прийнятих параметрах узгоджена різницева схема “проти потоку” не є збіжною.

Зменшимо тепер крок за часом вдвічі, тобто $\Delta t = 10$ с, при зберіганні двох інших: $c = 10$ мс⁻¹, $\Delta r = 100$ м. Технологія побудови чисельного розв'язку за схемою (6.19) в цьому випадку показана також тонкими штриховими лініями, а вузли сітки, що при цьому використовуються, представлені відкритими колами. Точки, що відповідають чисельному розв'язку, зображені закритими колами.

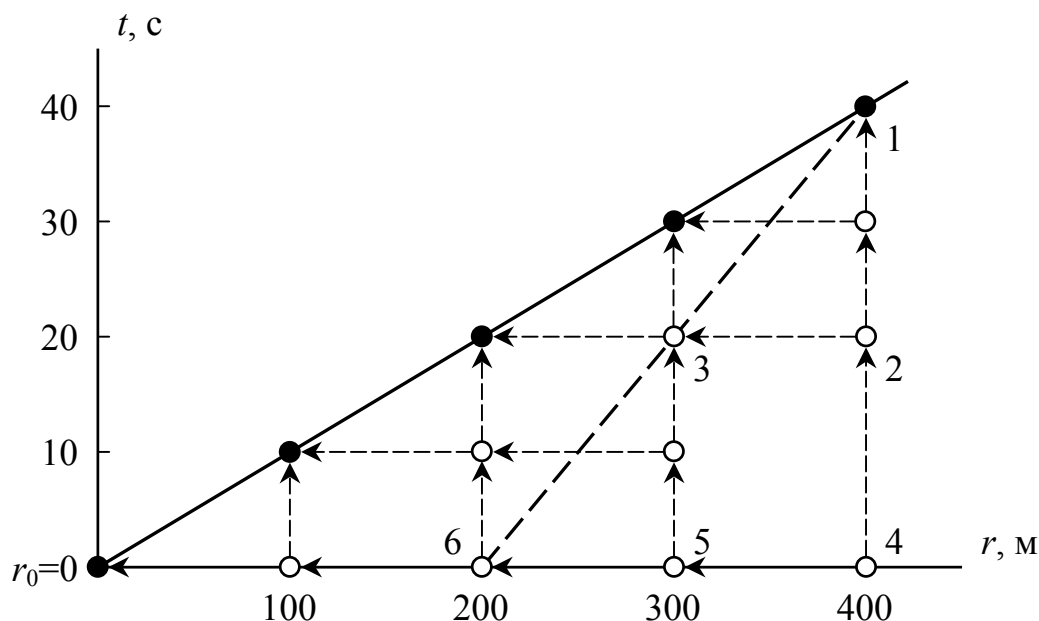


Рисунок 6.1 – Залежність чисельного розв'язку від параметрів різницевої схеми “проти потоку”.

Як бачимо, при таких параметрах чисельний розв'язок збігається з характеристикою, тобто з точним розв'язком. Отже, чисельний розв'язок є збіжним, так само як і сама скінченнорізницева схема. Виникає природне питання - чому при використанні однієї й тієї ж різницевої схеми можна одержати збіжний і розбіжний чисельний розв'язок?

Все полягає у виконанні вимоги стійкості різницевих схем. Математиками Курантом, Фрідріхсом і Леві у 1928 р. на прикладі лінійних диференціальних рівнянь було показано [9], що різницеві схеми будуть стійкими, якщо співвідношення між кроками за часом і за простором задовольняють таку нерівність:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (6.20)$$

У літературі з чисельних методів цей вираз дістав назву критерію КФЛ (аббревіатура з початкових букв прізвищ авторів).

У прикладі різницевої схеми, що розглядається, як неважко переконатися за допомогою прямої підстановки параметрів c , Δt і Δr у (6.20), у першому випадку КФЛ = 2 > 1, а у другому - КФЛ = 1. Отже, збіжність чисельного розв'язку цілковито забезпечується узгодженістю й стійкістю різницевих схем, тобто коли виконується теорема Лакса, про яку йшла мова у попередніх розділах.

Отже, дослідження умов стійкості різницевих схем є першорядною задачею практики одержання чисельних розв'язків. Ці питання докладно викладаються нижче.

6.2.3 Дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем

У розділі 5 подані різні схеми апроксимації часових похідних стосовно до лінійного рівняння одновимірної адвекції. В цьому розділі проведемо аналіз стійкості цих різницевих схем, і, отож, стійкості і збіжності чисельних розв'язків. Вище (п.6.2.1) було показано, що точний розв'язок є збіжним, оскільки не допускає зростання амплітуди за часом (6.14). Метою цього розділу є відбір з великої кількості різницевих схем тільки тих, які забезпечують збіжність чисельного розв'язання.

При дослідженні стійкості лінійних різницевих схем використовуються, як правило, чотири методи: прямий, енергетичний, матричний і метод Неймана. Перші три методи, маючи свої переваги і недоліки, більш складні й тому менше розповсюджені (з ними можна додатково ознайоми-

тися, наприклад, в [2,6]), чим метод Неймана. Останній, не поступаючись за ефективністю першим трьом методам, має у порівнянні з ними очевидну перевагу - він простий і наочний у практичному використанні. Тому в цьому розділі йому віддається перевага.

Цей метод використовується у тому випадку, коли відомий (як в нашому випадку) точний розв'язок лінійної задачі, який підставляється в різницеву схему. При цьому аналіз стійкості різницевої схеми зводиться до оцінки модуля множника переходу λ , що пов'язує амплітуди A на суміжних часових рівнях ($s, s+1$).

Спочатку повернемося до точного розв'язку, який поданий у вигляді (6.16):

$$f(r, t) = A(0) \cdot e^{imr} \cdot e^{i\sigma t}$$

або

$$f(r, t) = A(t) \cdot e^{imr},$$

звідки

$$A(t) = A(0) \cdot e^{i\sigma t}. \quad (6.21)$$

В термінах різницевої схеми, вважаючи, що

$$A(0) \equiv A^s; A(t) \equiv A^{s+1}; e^{i\sigma t} \equiv e^{i\sigma \cdot s \Delta t},$$

це співвідношення переписеться у вигляді:

$$A^{s+1} = A^s \cdot e^{i\sigma \cdot s \Delta t}. \quad (6.22)$$

Множник переходу $\lambda = e^{i\sigma \cdot s \Delta t}$.

Використовуючи відому формулу Ейлера $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$, дістанмо вираз для модуля λ :

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2(\sigma s \Delta t) + \sin^2(\sigma s \Delta t)} \equiv 1. \quad (6.23)$$

Тут використана формула для модуля комплексного числа: $c = a + ib$; $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отже, для точного розв'язку, який додержується сталості амплітуди за часом, $|\lambda| = 1$.

Згідно з методом Неймана береться таке: якщо для якоїсь різницевої схеми $|\lambda| \leq 1$, то вона вважається стійкою, тобто в таких схемах у процесі

чисельного розв'язання кроками за часом ($s \cdot \Delta t$; $s = 0, 1, 2, \dots$) амплітуда пер-
вісного колювання не зростає. Якщо для скінченнорізницевої схеми $|\lambda| > 1$,
тобто за часом відбувається зростання амплітуди, то така схема вважається
нестійкою. Стійкі різницеві схеми ($|\lambda| \leq 1$) додатково підрозділяють на
нейтральні ($|\lambda| = 1$) та дисипативні ($|\lambda| < 1$).

Тепер розпочнемо аналіз стійкості скінченнорізницевиx схем, пред-
ставлених у розділі 5, на прикладі рівняння одновимірної адвекції (6.6).

Явні скінченнорізницеві схеми.

1) Схема Ейлера.

За цією схемою рівняння (6.6) запишеться у вигляді:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s). \quad (6.24)$$

Тут і далі $\mu = c \Delta t / \Delta r$.

Тут однобічна різниця використовується при апроксимації часової похід-
ної і центральна - для просторової.

Використаємо очевидні співвідношення:

$$\begin{aligned} f_q^s &= A^s \mathbf{e}^{imq \cdot \Delta r}; & f_{q+1}^s &= A^s \mathbf{e}^{im(q+1) \Delta r} \equiv A^s \mathbf{e}^{imq \cdot \Delta r} \cdot \mathbf{e}^{im \Delta r}; \\ f_{q-1}^s &= A^s \mathbf{e}^{im(q-1) \Delta r} \equiv A^s \mathbf{e}^{imq \cdot \Delta r} \cdot \mathbf{e}^{-im \Delta r}; & f_q^{s+1} &= A^{s+1} \mathbf{e}^{imq \cdot \Delta r}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

які підставимо в (6.24). Після скорочення на спільний множник $\mathbf{e}^{imq \cdot \Delta r}$ діс-
танемо:

$$A^{s+1} = A^s \left[1 - \frac{\mu}{2} (\mathbf{e}^{im \Delta r} - \mathbf{e}^{-im \Delta r}) \right]$$

або з використанням формули Ейлера $(\mathbf{e}^{im \Delta r} - \mathbf{e}^{-im \Delta r}) = 2i \sin m \Delta r$:

$$A^{s+1} = A^s (1 - i \mu \sin m \Delta r) \equiv A^s \cdot \lambda. \quad (6.26)$$

Переходячи до модулів, співвідношення (6.26) запишемо у вигляді:

$$|A^{s+1}| = |A^s| \cdot |\lambda|,$$

де

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \mu^2 \sin^2(m \Delta r)}. \quad (6.27)$$

З (6.27) видно, що при будь-яких μ значення $|\lambda| > 1$. Отже, схема Ейлера абсолютно нестійка.

2) Схема центральних різниць.

За цією схемою рівняння (6.6) запишеться у вигляді:

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \mu(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s). \quad (6.28)$$

З урахуванням (6.26) і додаткового співвідношення

$$f_q^{s+1} = A^{s-1} \cdot e^{imq\Delta r} \quad (6.29)$$

після підстановки в (6.28) одержимо:

$$A^{s+1} = A^{s-1} - \mu \cdot A^s (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) \equiv A^{s-1} - 2i\mu \cdot A^s \sin m\Delta r. \quad (6.30)$$

Тут фігурують амплітуди на трьох часових рівнях ($s, s-1, s+1$), тому необхідно скористатися додатковими очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A^s &= A^0 e^{i\sigma s \Delta t}; & A^{s+1} &= A^0 e^{i\sigma(s+1)\Delta t} \equiv A^0 e^{i\sigma s \Delta t} \cdot e^{i\sigma \Delta t}; \\ A^{s-1} &= A^0 e^{i\sigma(s-1)\Delta t} \equiv A^0 e^{i\sigma s \Delta t} \cdot e^{-i\sigma \Delta t}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Після підстановки (6.31) в (6.30) нескладно одержати:

$$2i \sin \sigma \Delta t = -2i \mu \sin m \Delta r$$

або

$$\sin \sigma \Delta t = -\mu \sin m \Delta r,$$

звідки

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \arcsin(-\mu \sin m \Delta r). \quad (6.32)$$

Амплітуда коливань за часом не буде зростати тільки тоді, коли σ буде набувати реальних значень, тобто $\sigma = \sigma_r$. Дійсно, оскільки $A(t) = A_0 \exp(i\sigma t)$, то при $\sigma = \sigma_r$ ($\sigma = -c m$) $A(t) = A_0 \exp(-ic m t)$, тобто амплітуда не зростає за часом. Якщо σ є уявним числом, тобто $\sigma = \sigma_i \equiv i\sigma$, то $A(t) = A_0 \exp(c m t)$, що відповідає умові зростання амплітуди коливання.

Таким чином, схема з центральними різницями буде стійкою (відсутність умов зростання амплітуди), якщо в (6.32) частота набуває реальних

значень ($\sigma = \sigma_r$). Але тоді це означає, що

$$|-\mu \sin m \Delta r| \leq 1. \quad (6.33)$$

В свою чергу, через те, що свідомо $|\sin m \Delta r| \leq 1$, нерівність (6.33) можна замінити на рівнозначну:

$$|\mu| = \left| \frac{c \Delta t}{\Delta r} \right| \leq 1. \quad (6.34)$$

Остання умова, яка збігається з критерієм КФЛ, означає, що схеми центральних різниць умовно стійкі.

3) Схеми “проти потоку”.

Скінченнорізницевий аналог рівняння одновимірної адвекції (6.6) за цією схемою має такий вигляд:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - \mu (f_q^s - f_{q-1}^s) && \text{при } c > 0, \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - \mu (f_{q+1}^s - f_q^s) && \text{при } c < 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

або

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= (1 - \mu) f_q^s + \mu f_{q-1}^s && \text{при } c > 0, \\ f_q^{s+1} &= (1 + \mu) f_q^s - \mu f_{q+1}^s && \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Переходячи до амплітуд, з урахуванням співвідношень (6.25), дістанемо:

$$\begin{aligned} A^{s+1} &= A^s \left[(1 - \mu) + \mu e^{-im \Delta r} \right] && \text{при } c > 0, \\ A^{s+1} &= A^s \left[(1 + \mu) - \mu e^{im \Delta r} \right] && \text{при } c < 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

звідки

$$\begin{aligned} \lambda &= (1 - \mu) + \mu e^{-im \Delta r} && \text{при } c > 0, \\ \lambda &= (1 + \mu) - \mu e^{im \Delta r} && \text{при } c < 0, \end{aligned} \quad (6.35)$$

чи з використанням формули Ейлера:

$$\begin{aligned} \lambda &= (1 - \mu) + \mu (\cos m \Delta r - i \sin m \Delta r) && \text{при } c > 0, \\ \lambda &= (1 + \mu) - \mu (\cos m \Delta r + i \sin m \Delta r) && \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Переходячи до модулів λ в (6.36), одержимо:

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= \sqrt{[(1-\mu) + \mu \cos m\Delta r]^2 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r} \quad \text{при } c > 0, \\
|\lambda| &= \sqrt{[(1+\mu) - \mu \cos m\Delta r]^2 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r} \quad \text{при } c < 0.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Після простих арифметичних викладок легко дістати:

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 2\mu(1-\mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad \text{при } c > 0, \tag{6.38a}$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + 2\mu(1+\mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad \text{при } c < 0. \tag{6.38б}$$

В (6.38) $|1 - \cos m\Delta r| \leq 1$ (через те, що $\cos m\Delta r > 0$), тому величина $|\lambda|$ залежить від знака μ . У випадку $c > 0$ $\mu > 0$ з аналізу (6.38a) випливає, що при

$$\begin{aligned}
\mu \rightarrow 1 \quad |\lambda| \rightarrow 1; \quad \mu \rightarrow 0 \quad |\lambda| \rightarrow 1, \quad \text{тобто при } 0 \leq \mu \leq 1 \quad |\lambda| \leq 1; \\
\text{якщо } \mu > 1, \\
\text{то } (1 - \mu) < 0; \quad [1 - 2\mu(1 - \mu)] > 1, \quad \text{тому } |\lambda| > 1.
\end{aligned}$$

Отже, при $c > 0$ схема “проти потоку” умовно стійка, коли

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \tag{6.39}$$

Ця умова відповідає критерію КФЛ.

У випадку $c < 0$ $\mu < 0$ з аналізу (6.38б) випливає:

$$\begin{aligned}
\text{при } |\mu| \rightarrow 0 \quad |\lambda| \rightarrow 1, \\
\text{при } 0 \leq |\mu| \leq 1 \quad |\lambda| \leq 1, \\
\text{при } |\mu| > 0 \quad |\lambda| > 1.
\end{aligned}$$

Таким чином, при $c < 0$ умова стійкості (6.39) замінюється на таку:

$$|\mu| = |c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \tag{6.40}$$

Остання умова буде загальною для двох випадків схеми “проти потоку”.

Як було показано раніше (розділ 5) з цією схемою пов’язаний ефект обчислювальної (розрахункової) “в’язкості”, що і обумовлює її умовності-кість.

4) Схеми “за потоком”.

Різницевий аналог цих схем в залежності від знака швидкості пере-

носу c обернений схемам “проти потоку”, тобто:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= (1 + \mu)f_q^s - \mu f_{q+1}^s & \text{при } c > 0, \\ f_q^{s+1} &= (1 - \mu)f_q^s + \mu f_{q-1}^s & \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Виконавши арифметичні перетворення, аналогічні попереднім, легко переконатися, що вирази для $|\lambda|$ будуть оберненими (6.38), тобто:

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)} & \text{при } c > 0, \\ |\lambda| &= \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)} & \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Оскільки $(1 - \cos m\Delta r) > 0$, то, як легко бачити з (6.42), в обох випадках ($\mu > 0$ чи $\mu < 0$) підкореневий вираз додатний, і тому $|\lambda| > 1$, тобто схеми за потоком абсолютно нестійкі.

5) Схема Лакса-Вендрофа.

Скінченнорізницевий аналог цієї схеми записується у вигляді:

$$\begin{aligned} f_{q+1/2}^{s+1/2} &= \frac{1}{2}(f_{q+1}^s + f_q^s) - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^s - f_q^s), \\ f_{q-1/2}^{s+1/2} &= \frac{1}{2}(f_q^s + f_{q-1}^s) - \frac{\mu}{2}(f_q^s - f_{q-1}^s), \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - \mu(f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2}). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Виключаючи за допомогою перших двох різницевих рівнянь вираз $(f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2})$ у третьому рівнянні, одержимо:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) + \frac{\mu^2}{2}(f_{q+1}^s + f_{q-1}^s - 2f_q^s). \quad (6.44)$$

Останній член в (6.44) є різницевим аналогом похідної $\partial^2 f / \partial^2 r$ і, якщо $\mu^2/2$ ототожнювати з коефіцієнтом в'язкості, то тоді стає зрозумілим, що розглядувана схема пов'язана з ефектом обчислювальної “в'язкості”. Після підстановки в (6.44) відповідних співвідношень з (6.25) не важко отримати вираз для модуля переходу:

$$\lambda = 1 + \mu^2(\cos m\Delta r - 1) - i\mu \sin m\Delta r. \quad (6.45)$$

Використовуючи відомі формули для тригонометричних функцій $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, після очевидних перетворень одержимо:

$$\lambda = 1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{m\Delta r}{2} - 2i\mu \sin \frac{m\Delta r}{2} \cos \frac{m\Delta r}{2}. \quad (6.46)$$

Звідси легко дістати вираз для $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 4\mu^2(1 - \mu^2)\sin^4 \frac{m\Delta r}{2}}. \quad (6.47)$$

З (6.47) випливає, що при $(1 - \mu^2) \geq 0$ $|\lambda| \leq 1$, тобто стійкість схеми Лакса-Вендрофа забезпечується при виконанні критерію КФЛ:

$$|\mu| = |c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (6.48)$$

б) Схема Ейлера з перерахунком (схема Мацуно).
Ця різницева схема визначається двома тактами:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1(*)} &= f_q^s - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s), \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^{s+1(*)} - f_{q-1}^{s+1(*)}). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Підставляючи відповідні співвідношення з (6.25) в (6.49), одержимо після нескладних перетворень для амплітуд коливань:

$$\begin{aligned} A^{s+1(*)} &= A^s(1 - i\mu \sin m\Delta r), \\ A^{s+1} &= A^s - i\mu A^{s+1(*)} \sin m\Delta r. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Виключаючи у другому рівнянні $A^{s+1(*)}$ через перше, одержимо:

$$A^{s+1} = A^s(1 - i\mu \sin m\Delta r - \mu^2 \sin^2 m\Delta r) \equiv \lambda A^s,$$

де $\lambda = (1 - i\mu \sin m\Delta r - \mu^2 \sin^2 m\Delta r)$.

Отримаємо тепер значення $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \sqrt{(1 - \mu^2 \sin^2 m\Delta r)^2 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r} = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 m\Delta r + \mu^4 \sin^4 m\Delta r}. \quad (6.51)$$

З (6.51) випливає, що оскільки $|\sin m\Delta r| \leq 1$, то стійкість цієї схеми забезпечується умовою виконання критерію КФЛ, тобто

$$|\mu| = |c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (6.52)$$

Неявні скінченнорізницеві схеми.

Для демонстрування відмітних властивостей неявних схем від явних зупинимося, як на прикладі, на трьох схемах Ейлера і схемах “проти потоку” та “за потоком”.

1) Схема Ейлера.

На відміну від (6.24) у правій частині буде фігурувати момент часу $s+1$:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}). \quad (6.53)$$

Підставляючи в (6.53) відповідне співвідношення з (6.25), отримаємо:

$$A^{s+1} = A^s - i\mu \sin m\Delta r A^{s+1}$$

або

$$A^{s+1} (1 + i\mu \sin m\Delta r) = A^s.$$

Тоді модуль множника переходу визначається виразом:

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r}}. \quad (6.54)$$

З (6.54) випливає, що при будь-яких значеннях μ , а, відповідно, Δt і Δr , $|\lambda| < 1$, тобто ця схема абсолютно стійка і дисипативна на відміну від тієї ж явної схеми (6.24), яка була абсолютно нестійкою.

2) Схема “проти потоку”.

Нагадаємо, що явні схеми “проти потоку” незалежно від знаку швидкості переносу були умовно стійкими (6.40), тому тут обмежимося, наприклад, випадком з $c > 0$.

Тоді замість (6.32) слід записати:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu(f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}). \quad (6.55)$$

Підставляючи в (6.55) співвідношення (6.25) і використовуючи формули Ейлера, отримаємо:

$$A^{s+1} = A^s - A^{s+1}\mu(1 - e^{im\Delta r})$$

або

$$A^{s+1}[(1 + \mu) - \mu(\cos m\Delta r - i \sin m\Delta r)] = A^s,$$

звідки

$$\lambda = \frac{1}{[(1 + \mu) - \mu \cos m\Delta r] + i\mu \sin m\Delta r}.$$

Модуль множника переходу $|\lambda|$ в цьому випадку запишеться у вигляді:

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)}}. \quad (6.56)$$

Неважко показати, що у випадку $c < 0$

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)}}. \quad (6.57)$$

Як випливає з (6.56) і (6.57), тепер в обох випадках (відповідно $|\mu| > 1$ та $|\mu| < 1$) $|\lambda| < 1$, тобто неявні схеми “проти потоку” абсолютно стійкі й дисипативні на відміну від умовно стійких явних схем (6.39) і (6.40).

3) Схеми “за потоком”.

Як було показано вище, схеми “за потоком” і “проти потоку” відносно напрямку переносу прямо протилежні, тому відразу можна записати остаточні результати для $|\lambda|$, спираючись на (6.56) та (6.57):

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)}} \quad \text{при } c > 0, \quad (6.58)$$

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)}} \quad \text{при } c < 0. \quad (6.59)$$

З аналізу (6.58) і (6.59) нескладно переконатися, що неявні схеми “за потоком” стійкими, вірніше нейтральними ($|\lambda| = 1$), можуть бути тільки за однієї єдиної умови, якщо $|\mu| = 1$. Нагадаємо, що явні схеми “за потоком” (6.42) були абсолютно нестійкими.

На цих прикладах було показано, що завжди краще використовувати неявні схеми у відношенні їх стійкості, ніж явні схеми. Аналогічні результати можна отримати і для інших розглянутих вище скінченнорізницеви́х схем. Здавалося б, у практиці гідродинамічних прогнозів в першу чергу слід би орієнтуватися саме на неявні скінченнорізницеві схеми, оскільки їх позитивна якість у порівнянні з явними схемами очевидна - відсутність обмежень на μ дозволяє збільшити крок за часом (Δt) і, внаслідок цього, зменшити нагромадження помилок обчислювального характеру, зекономити машинний час і таке інше. Але при цьому не слід забувати, що при практичній реалізації моделей прогнозу, які використовують неявні різницеві схеми, буде потрібно додаткове підключення ітераційного програмного модуля, що призведе автоматично до нагромадження помилок обчислювань та зростання витрат машинного часу, тобто до нівелювання переваг неявних схем у порівнянні з явними. У цьому зв'язку однозначних рекомендацій щодо використання явних чи неявних схем бути не може, тому все повинно визначатися характером задачі, що розв'язується, у рамках конкретної гідродинамічної моделі.

Півнеявні скінченнорізницеві схеми.

У практиці гідродинамічного прогнозу використовуються також так звані півнеявні схеми, у яких при різницевому поданні правих частин рівнянь використовуються як явні, так і неявні схеми. Однією з таких, найбільш розповсюджених схем, є схема Кранка-Ніколсона чи дворівнева схема трапецій. Для лінійного рівняння одновимірної адвекції (6.6) ця схема записується таким чином:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -\frac{c}{2} \left(\frac{f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}}{2\Delta r} + \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} \right)$$

або

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{4} \left[(f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) \right]. \quad (6.60)$$

Для подальших перетворень додатково до (6.25) будемо використовувати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} f_{q+1}^{s+1} &= A^{s+1} e^{im(q+1)\Delta r} = A^{s+1} e^{imq\Delta r} e^{im\Delta r}, \\ f_{q-1}^{s+1} &= A^{s+1} e^{im(q-1)\Delta r} = A^{s+1} e^{imq\Delta r} e^{-im\Delta r}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Звідки з використанням формули Ейлера:

$$f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1} = A^{s+1} \cdot e^{imq\Delta r} \cdot 2i \sin m\Delta r. \quad (6.62)$$

У свою чергу, використовуючи (6.25),

$$f_{q+1}^s - f_{q-1}^s = A^s \cdot e^{imq\Delta r} \cdot 2i \sin m\Delta r. \quad (6.63)$$

Підставляючи (6.62) і (6.63) в (6.60), одержимо:

$$A^{s+1} = A^s - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r A^{s+1} - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r A^s$$

або

$$A^{s+1} \left(1 + \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r \right) = A^s \left(1 - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r \right).$$

Звідки

$$\lambda = \frac{1 - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r}{1 + \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r}$$

чи, переходячи до модуля λ ,

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{2} \sin m\Delta r \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{2} \sin m\Delta r \right)^2}} \equiv 1. \quad (6.64)$$

Отже, півнеявна схема Кранка-Ніколсона нейтральна і абсолютно стійка при будь-яких значеннях μ чи Δt і Δr .

6.3 Нелінійна обчислювальна нестійкість

Вище вже згадувалось (п.6.1), що для нелінійних рівнянь дослідження обчислювальної нестійкості надто утруднене через неможливість, як правило, отримати аналітичний розв'язок. Саме з цієї причини питання стійкості досліджуються спочатку на лінійних моделях, а отримані при цьому результати потім розповсюджуються на розв'язки скінченнорізницевої задачі для нелінійних рівнянь. При цьому тільки слід мати на увазі,

що стійкість різницевої схеми для лінійних моделей є необхідною, але недостатньою умовою стійкості для нелінійних рівнянь, через те, що не завжди стійка схема для лінійного рівняння буде стійкою для відповідного нелінійного рівняння. Нестійка ж схема для лінійного рівняння свідомо буде нестійкою й для нелінійного.

Вперше явище, яке дістало назву нелінійної обчислювальної нестійкості, відкрив Н.Філіпс при моделюванні процесів загальної циркуляції атмосфери. Ця нестійкість виявлялася у вигляді невиправдано різкого збільшення енергії у короткохвильовій ділянці атмосферного спектра, що при тривалому (до 30 діб) інтегруванні за часом нелінійних рівнянь гідродинаміки приводило до “вибуху” розв’язання. Серією чисельних експериментів Н.Філіпс виявив, що причиною тому є ефект нелінійності рівнянь, які інтегруються.

Пояснимо природу нелінійної нестійкості на прикладі нелінійного рівняння одновимірної адвекції типу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.65)$$

Тут на відміну від лінійного рівняння одновимірної адвекції (6.6) $u = u(x, t)$, а не **const**.

При апроксимації просторових похідних завжди виникають труднощі з визначенням на сітці коротких хвиль. Так, хвилі, довжини яких менше двох сіткових кроків ($L \leq 2\Delta x$), або хвильові числа $m = 2\pi/L \geq \pi/\Delta x$, неможливо представити на сітці.

Дійсно, нехай, наприклад, вихідна функція $u(x, t)$ являє собою синусоїду з амплітудою A :

$$u(x, t) = A(t) \sin mx. \quad (6.66)$$

Для апроксимації похідної $\partial u/\partial x$ візьмемо, наприклад, центральну різницю, що має другий порядок точності $(\Delta x)^2$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (6.67)$$

де i - номер сіткового вузла вздовж осі x ; Δx - сітковий крок.

В той же час точний розв’язок цієї похідної згідно з (6.66) має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(t)m \cos mx \cong A(t)m \cos mi\Delta x. \quad (6.68)$$

Різницевий аналог (6.67) з урахуванням (6.66) можна подати у вигляді:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{A}{2\Delta x} [\sin m(i+1)\Delta x - \sin m(i-1)\Delta x] = \frac{A}{\Delta x} \sin m\Delta x \cos mi\Delta x. \quad (6.69)$$

При перетворенні (6.69) використана тригонометрична формула для $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

Отже, з одного боку, є різницеве подання похідної $\partial u/\partial x$ (6.69), а з другого – точне (6.68).

Знайдемо відносну помилку апроксимації:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 1 - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 1 - \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}. \quad (6.70)$$

При безпосередній підстановці в (6.70) легко переконатися, що при $L = 6\Delta x - \varepsilon \approx 0.1$; $L = 4\Delta x - \varepsilon \approx 0.36$; $L = 2\Delta x - \varepsilon \approx 1$.

Таким чином, відносна помилка збільшується зі зменшенням довжини хвилі, а хвилі, довжина яких дорівнює чи менша від двох кроків сітки ($L \leq 2\Delta x$; $m \geq 2\pi/\Delta x$), взагалі не можна подати на сітці. Отже, за допомогою такої сітки можна описати хвилі з довжинами $L > 2\Delta x$ або $m = m_{\max} \sim 2\pi/L$. Які ж хвилі у такому разі описуються нелінійним членом $u \cdot \partial u/\partial x$? Для цього, використовуючи (6.66) та (6.68), одержимо:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = A^2(t) \cdot m \cdot \sin mx \cdot \cos mx = A^2(t) \cdot \frac{m}{2} \cdot \sin m'x, \quad (6.71)$$

де $m' = 2m$.

Таким чином, нелінійний член (вірніше, ефект нелінійної взаємодії різних гармонік) відтворює хвилі з хвильовим числом $m' = \frac{2 \cdot 2\pi}{L} \equiv \frac{2\pi}{L/2}$ або довжиною $L/2$, тобто вдвічі коротші хвилі, ніж можна розв'язати на сітці.

Так, якщо у початковий момент часу хвильове число m задовольняло нерівність $\frac{m_{\max}}{2} < m \leq m_{\max}$, то за рахунок нелінійної взаємодії у процесі

інтегрування за часом може виникнути хвиля з хвильовим числом $m > m_{\max}$, яка не може бути відтвореною на сітці. З точки зору чисельного розв'язання - це хибні хвилі, які сіткою можуть бути ідентифіковані як більш довгі.

Дійсно, будемо виходити з тотожності:

$$\sin m'x \equiv \sin[2m_{\max} - (2m_{\max} - m')]x, \quad (6.72)$$

де, нагадаємо, $m_{\max} = \frac{2\pi}{L_{\max}} = \frac{2\pi}{2\Delta x} \equiv \frac{\pi}{\Delta x}$.

Ураховуючи, що $x = i \cdot \Delta x$ і використовуючи тригонометричну формулу для синуса різниці двох кутів, перепишемо (6.72):

$$\sin m' i \Delta x \equiv \sin \frac{2\pi}{\Delta x} i \Delta x \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m' \right) i \Delta x - \cos \frac{2\pi}{\Delta x} i \Delta x \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m' \right) i \Delta x.$$

Але, оскільки $\sin \frac{2\pi}{\Delta x} i \Delta x \equiv \sin i 2\pi = 0$; $\cos \frac{2\pi}{\Delta x} i \Delta x = 1$, то

$$\sin m' i \Delta x = -\sin \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m' \right) i \Delta x \equiv -\sin(2m_{\max} - m') i \Delta x. \quad (6.73)$$

Як впливає з (6.73), якщо відомі значення шуканої функції тільки у вузлах сітки, то хвилі з хвильовими числами m' і $(2m_{\max} - m')$ не відрізняються. Таким чином, якщо за рахунок нелінійності генерується хвиля з хвильовим числом m' , то на сітці вона буде інтерпретована як хвиля з хвильовим числом $m^* = 2m_{\max} - m'$, тобто як більш довга хвиля. Рис.6.2 дає наочне уявлення про одержані вище висновки.

Як видно з рис.6.2, хвильове число m^* можна подати як дзеркальне відображення хвильового числа m' відносно точки m_{\max} , тобто коротка хвиля, що генерується нелінійним членом ($L' < 2\Delta x$), на сітці буде відтворюватися як більш довга хвиля $L^* > 2\Delta x$, яка сітковим розв'язком буде відображатися як "реальна" фізична хвиля. Описаний ефект носить назву помилки хибного уявлення.

На закінчення для наочності демонстрації помилок хибного уявлення наведемо конкретний приклад. Нехай нелінійний член генерує хвилю з хвильовим числом $m' = \frac{2\pi}{4/3 \Delta x} \left(L' = \frac{4}{3} \Delta x \right)$, тобто ця хвиля коротша, ніж

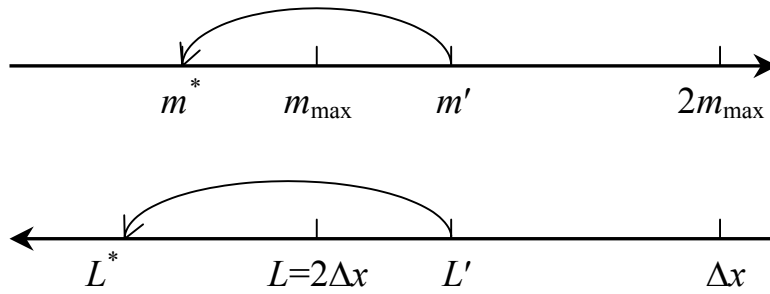


Рисунок 6.2 – Хибне уявлення хвилі з хвильовим числом $m' > m_{\max}$ хвилею з хвильовим числом $m^* = 2m_{\max} - m'$.

може відобразити сітка ($m_{\max} = \pi/\Delta x$; $L = 2\Delta x$). Тоді за рахунок уявного зображення виникне хвиля з хвильовим числом $m^* = 2m_{\max} - m' = \frac{2\pi}{\Delta x} - \frac{6\pi}{4\Delta x} = \frac{2\pi}{4\Delta x}$ ($L^* = 4\Delta x$). Така “уявна” хвиля ($L^* > L$) у сітковому розв’язанні буде моделюватися як хвиля “реальна”. Результати цих висновків подані на рис.6.3.

Які ж наслідки помилок хибного уявлення у процесі інтегрування нелінійних рівнянь за часом?

Н.Філіпсом та іншими авторами був проведений ряд чисельних експериментів по виявленню викривлення енергетичного спектра за рахунок помилок хибного уявлення. Виявилось, що у процесі чисельного інтегрування відбувається швидке зростання амплітуди хвиль у інтервалі $2\Delta x < L < 4\Delta x$, тобто у тій ділянці атмосферного спектра, де найбільшою

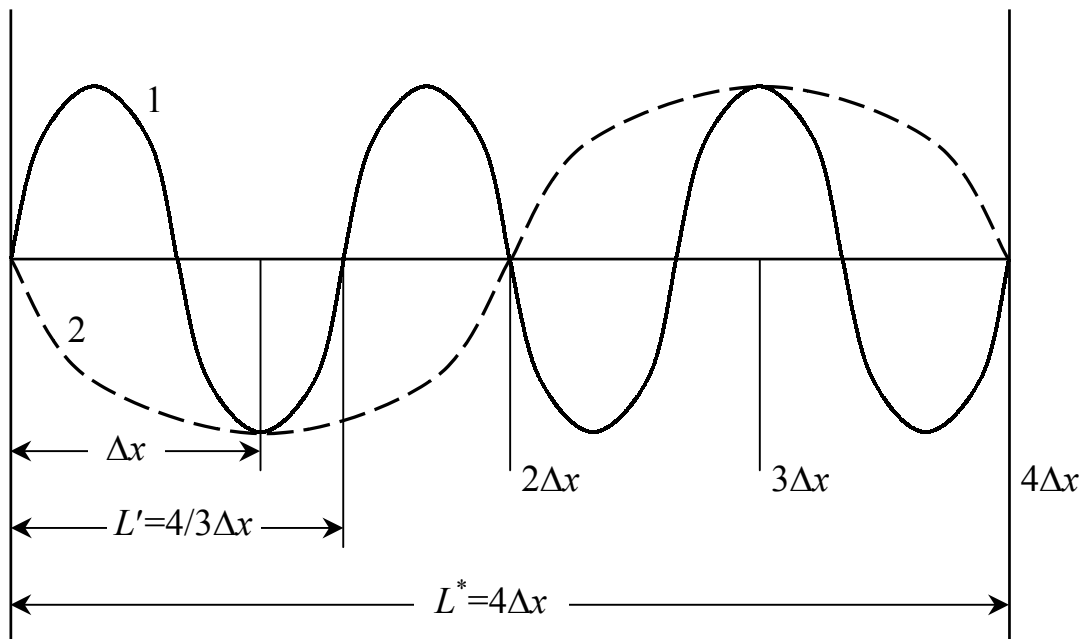


Рисунок 6.2 – Хибне уявлення хвилі $L' = 4/3\Delta x$ хвилею $L^* = 4\Delta x$.

мірою позначається ефект хибного уявлення. При цьому відбувається невиправдано велике зростання енергії на цій ділянці спектра, тоді як у реальній атмосфері тут зосереджена відносно невелика енергія. Таким чином, внаслідок помилок хибного уявлення відбувається хибний приплив енергії до хвильових чисел не набагато менших, ніж m_{\max} , у результаті чого створюються штучні умови для їх еволюції. В остаточному підсумку це може привести до “вибуху” розв’язання. Це, власне, й називається нелінійною нестійкістю.

З деякими практичними способами заглушення (або, вірніше, зменшення) ефекту нелінійної нестійкості можна додатково ознайомитися у монографії Ф.Мезингера і А.Аракави [6].

РОЗДІЛ 7

СУЧАСНІ ОПЕРАТИВНІ МОДЕЛІ ПРОГНОЗУ ПОЛІВ МЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ВЕЛИЧИН

В наш час в оперативній практиці служби погоди широко застосовуються гідродинамічні прогностичні моделі, що базуються на повних рівняннях. З метою короткострокового прогнозу погоди застосовуються як різницеві чисельні моделі, так і моделі, що ґрунтуються на зображенні розв'язків у вигляді рядів по системах базисних функцій, які звичайно називають спектральними.

В цьому розділі будуть розглянуті лише різницеві чисельні моделі, що використовуються нині в службі погоди Росії, Великобританії, Німеччини і США.

Перш ніж перейти до розгляду конкретних моделей, відзначимо деякі особливості практичного застосування оперативних схем короткострокового чисельного прогнозу.

Відомо, що для розрахунків по прогностичних моделях атмосфери необхідно мати значення метеорологічних величин у вузлах регулярної сітки точок в один (початковий, вихідний) момент часу. Такі значення одержують шляхом виконання спеціальної обчислювальної процедури просторово-часової інтерполяції даних спостережень в нерегулярній сітці точок (на метеорологічних станціях, з метеорологічних супутників і т.п.) до вузлів регулярної сітки точок. Ця обчислювальна процедура має назву чисельного або об'єктивного аналізу.

Основну частину метеорологічної інформації складають результати спостережень на метеорологічних станціях, які здійснюються у строки 0, 6, 12, 18 год. СГЧ, і на аерологічних станціях (радіозондування атмосфери) в 0 і 12 год. СГЧ. Значну за об'ємом частину результатів спостережень складають дані несинхронних спостережень з літаків, супутників, буїв, зрівноважених куль. Загальний об'єм даних, які використовуються з метою чисельного прогнозу, досягає десятків мільйонів десяткових цифр.

Вся інформація, яка надходить до прогностичного центру, проходить стадію первинної обробки. До цієї стадії входять впізнання даних і їх первинний контроль. Впізнання даних ґрунтується на порівнянні заголовної частини метеорологічних зведень зі стандартними величинами (час спостережень і координати точки спостережень; індекси станцій і т.д.). Первинний контроль даних базується на порівнянні результатів поточних спостережень з кліматичними величинами, перевірки виконання деяких

співвідношень, наприклад, рівняння статистики.

Після впізнання і первинного контролю проводиться відбір даних, необхідних для об'єктивного аналізу, а потім - властиво об'єктивний аналіз.

Слід відзначити, що при контролі даних спостережень, а також в процесі об'єктивного аналізу враховуються відомі похибки вимірювань.

З метою об'єктивного аналізу метеорологічних полів використовуються методи: поліноміальної апроксимації, оптимальної інтерполяції, послідовних наближень (корекція).

В останнє десятиріччя система підготовки даних для чисельного прогнозу була суттєво удосконалена. Це стосується і включення в чисельний (об'єктивний) аналіз несинхронних даних; такий аналіз дістав назву чотиривимірного чисельного аналізу. Несинхронні дані одержують за допомогою нових нестандартних спостережних систем (супутники, літаки та ін.). Спеціальні методи чотиривимірного аналізу з включенням нестандартних спостережень називають також системою засвоєння даних.

Розрахунки за прогностичними моделями, що ґрунтуються на повних рівняннях, потребують певного узгодження між собою даних про різні метеорологічні величини в вузлах регулярної сітки, а також даних на різних рівнях. Відповідна частина процедури підготовки даних для чисельного прогнозу дістала назву узгодження даних.

Зі сказаного вище випливає, що між строком спостережень і початком розрахунку прогностичних полів за гідродинамічною моделлю повинен бути виконаний великий обсяг робіт:

- кодування і передача даних спостережень по лініях зв'язку (передача повинна мати швидкість не менше 1200 бод, тобто бінарних знаків в одну секунду);

- прийом даних в метеорологічних центрах, їх первинна обробка і контроль;

- чисельний об'єктивний аналіз даних спостережень і видача результатів у вигляді карт, таблиць, а також їх запис на запам'ятовуючі пристрої.

Відзначимо, що час, необхідний для виконання перших двох пунктів, тобто період між строком спостережень і закінченням прийому метеорологічної інформації, має назву періоду "відсікання" даних спостережень.

Після об'єктивного аналізу, тобто після виконання третього пункту вказаного вище комплексу робіт, проводиться розрахунок прогнозів баричного поля, температури, вологості, швидкості вітру, кількості опадів та інших величин і видача їх у вигляді карт, таблиць, графіків та ін. Останнім етапом є розповсюдження прогнозів для населення, організацій, підприємств і зацікавлених відомств.

З метою короткострокового прогнозу (від 1 до 3 діб) необхідне здійснення розрахунків і видача результатів протягом 3-6 годин після строку гідрометеорологічних спостережень. Якщо ж інтервал часу прогностичних розрахунків порівняний з інтервалом часу, на який розраховується прогноз, застосування прогностичних моделей не має сенсу. Ця обставина накладає жорсткі обмеження на час обчислювання на ЕОМ прогнозу за оперативними моделями.

На початку 80-х років використання чисельних методів прогнозу погоди в тому чи іншому вигляді (хоч би в формі прогностичних карт, що передаються по лініях зв'язку) проводилось практично в усіх країнах світу. Чисельне прогнозування здійснюється більш ніж в 30 країнах. Прогностичні моделі, що використовуються, можуть розроблятися в центрі або за-позичатися.

Використання прогностичних моделей того чи іншого плану визначається метеорологічними інтересами конкретної країни, потужністю наявних в метеорологічному центрі ЕОМ або за двосторонніми угодами з іншими країнами.

Глобальні і півсферні чисельні моделі розробляються і використовуються в світових метеорологічних центрах (СМЦ), в найбільш крупних територіальних (ТМЦ) і національних (НМЦ) метеорологічних центрах. Прогнози за цими моделями на 1-5 діб складаються один чи два рази на добу за даними спостережень в 0 і 12 год. СГЧ. Час відсікання даних спостережень для чисельного аналізу і прогнозу за глобальними і півсферними моделями складає 3-5 годин. Для реалізації цих моделей використовуються ЕОМ, які виконують від 10 до 100 млн. і більше операцій за секунду.

Прогноз за регіональними моделями розраховується 2-4 рази на добу. Час відсікання складає 1-3 години. Для реалізації регіональних моделей достатньо мати ЕОМ, що виконує від 1 до 10 млн. операцій за секунду.

Практично в усіх прогностичних моделях атмосфери застосовуються повні рівняння гідродинаміки. Моделі розрізняються числом рівнів по вертикалі, областю прогнозування, способами параметризації процесів підсіткового масштабу і іншими особливостями, які будуть вказані при описанні конкретних прогностичних моделей.

Загальним для сучасних моделей за повними рівняннями є застосування для побудови скінченнорізницевого схем так званих розхитаних сіток. Тому, перш ніж перейти до розгляду прогностичних моделей, викладемо основні принципи скінченнорізницевого зображення похідних на розхитаних сітках.

7.1 Розхитані сітки

При апроксимації похідних в скінченнорізницевих схемах окрім узгодження і точності повинні враховуватися ще й такі вимоги як економічність обчислювань, збіжність і стійкість розв'язків скінченнорізницевих рівнянь, зберігання інтегральних властивостей прогностичних моделей, точність відтворення процесів адаптації метеорологічних полів. Для побудови скінченнорізницевих схем, що задовольняють ці умови, застосовуються просторово-часові сітки, на яких різні метеорологічні величини можуть розміщуватися в різних (незбіжних) точках сітки.

Такі сітки вперше були запропоновані Еліасеном і дістали назву розхитаних (шахових) сіток або сіток спуску. Існує декілька варіантів сіток, розхитаних за простором і за часом.

На сітках, розхитаних тільки за простором (рис.7.1), різні метеорологічні величини (залежні змінні) розміщуються в різних незбіжних точках, але в кожний наступний момент часу обчислюються в тих же точках, де вони розміщувались в попередній момент часу. Сітки, розхитані за часом, передбачають обчислення всіх залежних змінних в одних і тих самих точках в один момент часу, але в незбіжних точках – в різні моменти часу.

Прикладом сітки, розхитаної за часом, є сітка, що складається з двох квадратних сіток з кроком $\Delta x = \Delta y = \Delta r$, зсунутих відносно одна одної на півкроку ($1/2 \Delta r$). У вузлах однієї з цих сіток розміщуються всі залежні змінні (в одних і тих же збіжних точках), а у вузлах іншої сітки обчислюються центровані кінцеві різниці. Відзначимо, що на звичайних сітках (не-

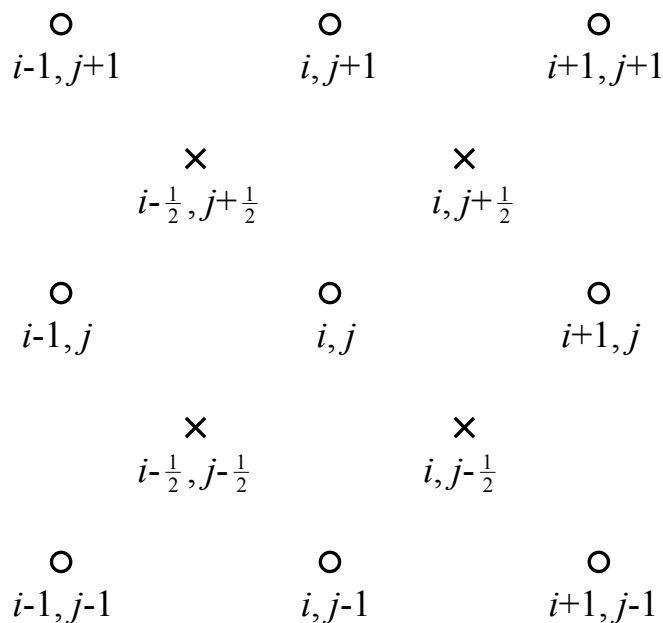


Рисунок 7.1 – Схема розміщення вузлів розхитаної сітки

розхитаних) всі залежні змінні і похідні розміщуються і обчислюються в усіх точках (вузлах) сітки.

На розхитаних сітках залежні змінні звичайно розміщуються в тих вузлах, в яких вони потрібні для розрахунку похідних за допомогою центральних різниць. Але в деяких випадках використовуються такі розхитані сітки, на яких потрібні для розрахунку кінцевих різниць величини необхідно визначати за допомогою інтерполяції. За рахунок цього досягається зменшення кількості змінних і об'єму обчислювань.

При побудові скінченнорізницевого схем на розхитаних сітках для розрахунку похідних використовуються оператори центральних різниць:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \equiv (f_r)_q \approx (\delta_r f)_q = \frac{1}{\Delta r} \left(f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}} \right) \quad (7.1)$$

і інтерполяції (згладжування)

$$\bar{f}_q^r = \frac{1}{2} \left(f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}} \right), \quad (7.2)$$

$$\text{де } r = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z(p, \zeta) \\ t \end{array} \right\}; \quad q = \frac{r}{\Delta r}.$$

Застосування операторів (7.1), (7.2) двічі по одній і тій же незалежній змінній приводить до таких формул:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q &\equiv (f_{rr})_q \approx (\delta_{rr} f)_q = \frac{1}{\Delta r} \delta_r \left(f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta r} \left(\frac{f_{q+1} - f_q}{\Delta r} - \frac{f_q - f_{q-1}}{\Delta r} \right) = \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{q+1} + f_{q-1} - 2f_q); \\ \bar{f}_q^{rr} &= \frac{1}{2} \overline{\left(f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}} \right)^r} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{q+1} + f_q}{2} + \frac{f_q + f_{q-1}}{2} \right) = \frac{1}{4} (f_{q+1} + f_{q-1} + 2f_q); \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx (\delta_{xx} f)_{i,j} + (\delta_{yy} f)_{i,j} = \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

де $\Delta x = \Delta y = \Delta r$.

Якщо оператори (7.1), (7.2) застосувати двічі, але по різних незалежних змінних, одержимо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} &\equiv (f_{x,y})_{i,j} \approx \delta_y \left(\frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} - \right. \\ &\left. - \frac{f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right) = \frac{1}{(\Delta r)^2} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right); \\ \left(\frac{\overline{\partial f^y}}{\partial x} \right)_{i,j} &\equiv \left(\overline{f^y_x} \right)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta x} \left(\overline{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}} \right)^y = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2} - \right. \\ &\left. - \frac{f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2} \right) = \frac{1}{2\Delta r} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

За аналогією

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{\partial f^x}}{\partial y} \right)_{i,j} &= \left(\overline{f^x_y} \right)_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta y} \left(\overline{f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}}} \right)^x = \\ &= \frac{1}{2\Delta y} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Оператори центральних різниць і інтерполяції лінійні і переставні. Використовуючи ці властивості, можна записати результати багатократно-го застосування цих операторів в різних комбінаціях.

З наведених формул видно, що застосування цих операторів парну кількість разів по одній і тій же змінній приводить до формул, в яких фігурують сіткові функції з цілими індексами, тобто функції в точках, відступаючих одна від одної на крок сітки. Якщо оператори використовуються непарну кількість разів по одній і тій же змінній, то одержимо формули з функціями з дробовими індексами, тобто функції в точках, відступаючих на півкроку сітки від точки, де обчислюється кінцева різниця.

Скінченнорізницеві схеми і методи інтегрування повних рівнянь можуть бути побудовані на сітках, розхитаних і у просторі, і в часі. Застосування таких сіток доцільно перш за все через економічність розрахунків,

яка зумовлена тим, що обчислення метеовеличин, які прогножуються, на кожному часовому рівні передбачається не в усіх точках просторово-часової сітки. Крім того, якщо при цьому використовуються центральні різниці в часі, то розв'язок в одних і тих же вузлах визначиться через крок за часом. За рахунок цього виключається обчислювальна мода, тобто розв'язок в цьому випадку не осцилює [2].

Недолік розхитаних за простором і за часом сіток (як і сіток, розхитаних тільки за простором) полягає у тому, що для точок, в яких значення залежних змінних не визначаються, ці значення треба обчислювати шляхом інтерполяції.

7.2 Оперативна прогностична модель атмосфери Російського ГМЦ

Модель, яка розглядається в цьому розділі, створювалась, починаючи з 1973 року, шляхом використання найбільш ефективних елементів оперативних моделей, розроблених авторами [12-15]. До цих елементів відносяться системи рівнянь, крайові умови, способи різницевої апроксимації, врахування процесів підсіткового масштабу [16], горизонтальний і вертикальний поділ та ін.

Оснoву прогностичної моделі складає система повних рівнянь гідротермодинаміки в ізобаричній системі координат, яка записується в такому вигляді :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial x} - lv + m \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= F_x, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial y} + lu + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= F_y, \\
 m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\
 T &= -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{Rp} \tau &= \frac{RT}{C_p p} \varepsilon, \\
 \frac{\partial q}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial q}{\partial p} &= \frac{RT}{p} \varepsilon_n,
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

де x, y, t - горизонтальні координати і час,
 p - тиск,
 u, v , - складові швидкості вітру,
 τ - аналог вертикальної швидкості,
 l - параметр Коріоліса,
 T - температура в градусах Кельвіна,
 Φ - геопотенціал,
 F_x, F_y - складові турбулентної в'язкості по осях x і y ,
 m - масштабний множник, який враховує сферичність Землі,
 q - масова частка водяної пари,
 ε - приплив тепла до одиниці об'єму повітря за одиницю часу, зумовлений радіаційним і турбулентним теплообміном, а також фазовими переходами води в атмосфері,
 ε_{II} - приплив (відтік) водяної пари, зумовлений процесами конденсації і турбулентністю (до одиниці об'єму за одиницю часу),
 $c^2 = \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma)$ - параметр статичної стійкості.

Система (7.7) доповнюється рівняннями і співвідношеннями, які дозволяють розраховувати припливи тепла і водяної пари, турбулентну в'язкість, а також врахувати опади і конвективні процеси.

При заданих $F_x, F_y, \varepsilon, \varepsilon_{II}$ система має 6 невідомих (u, v, τ, Φ, T, q) є замкненою і може бути розв'язана.

Для розв'язання необхідно задати початкові і межові умови.

Початкові умови ставляться для тих функцій, часові похідні яких входять в рівняння. В системі (7.7) - це функції u, v, T і q . Тому початкові умови представляються у вигляді:

$$f(x, y, p, t) = f(x, y, p, t_0), \quad (7.8)$$

$$\text{де } f = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ T \\ q \end{array} \right\}, \text{ а } t_0 - \text{строки радіозондування } 00^h (03 \text{ год.}) \text{ і } 12^h (15 \text{ год.}).$$

За межові умови на верхній ($p = 0$) і нижній ($p = p_0$) межах атмосфери береться, що

$$\text{при } p \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0, \quad (7.9)$$

$$\text{при } p = p_0 = 1000 \text{ гПа} \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\tau_0}{\rho_0} = 0, \quad (7.10)$$

де індекс “0” є позначкою того, що відповідні функції належать до рівня $p = p_0 = 1000$ гПа. Зауважимо, що умова (7.10) є наслідком межової умови: при $z = 0$ $w = 0$, тобто $dz/dt = 0$, або з врахуванням того, що $gz = \Phi$, $w = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt}$. Якщо обидві частини останньої рівності помножити на g і розписати повну похідну Φ через частинні, отримаємо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \quad (7.11)$$

але $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{g \partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$. Таким чином, умова (7.11) переписеться у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\tau}{\rho} = 0.$$

З врахуванням масштабного множника m^2 для адвективних членів остання рівність для $p = p_0$ набуває вигляду (7.10).

На бокових межах області інтегрування береться

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0, \quad D \Big|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (7.12)$$

де індекс “Г” є позначкою того, що функція належить до бічної межі.

Таким чином, відповідно до умов (7.12) вважається, що в кожному вузлі сітки, розташованому на межах області інтегрування, висота будь-якої ізобаричної поверхні не змінюється за часом, а ізобарична вертикальна швидкість не змінюється з висотою.

Система рівнянь (7.7) з початковими (7.8) і межовими (7.9), (7.10), (7.12) умовами інтегрується чисельно методом кроків за часом.

Для цього вводяться дискретні безрозмірні координати i, j, k, s і такі оператори осереднення \bar{f}^n і кінцевих різниць f_n :

$$\begin{aligned} \bar{f}^n &= \frac{1}{2}(f_{n+1} + f_{n-1}), \\ f_n &= \frac{1}{2\Delta r}(f_{n+1} - f_{n-1}), \end{aligned} \quad (7.13)$$

де $r = \{x, y, p, t\}$,

n - значення відповідної безрозмірної координати (i, j, k, s),

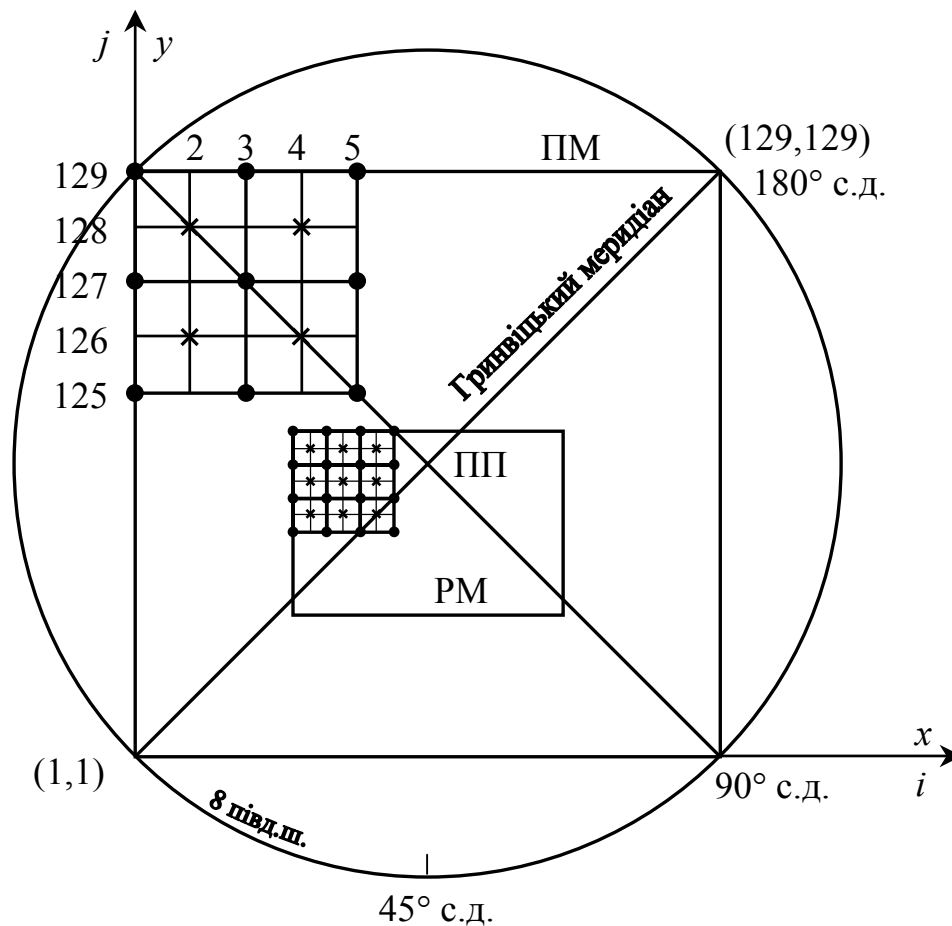
f - значення функцій u, v, τ, T, q .

Область розрахунку прогнозу покривається прямокутною сіткою вузлів з однаковими кроками по осях x і y . Індекси вузлів i, j по осях x і y змінюються в таких межах:

$i = 1, 2, \dots, I,$

$j = 1, 2, \dots, J.$

Сіткова область, де здійснюється чисельне інтегрування рівнянь моделі, являє собою квадрат, вписаний в широтне коло на карті стереографічної проекції з головним масштабом $1:3 \cdot 10^7$. Вершини квадрата розташовані на перетині широтного кола 8° півд.ш. з меридіанами: гринвіцьким (0°), 180° , 90° з.д. і 90° с.д. (рис.7.2). В межах цього квадрата будується шахова сітка точок, утворена з двох звичайних сіток, що зсунуті



ПМ – півкульова модель, РМ – регіональна модель, ПП – північний полюс.

Рисунок 7.2 – Область аналізу та прогнозу прогностичної моделі Гідрометецентру Росії. У верхній лівій частині області прогнозу ПМ та РМ кружками та хрестиками наведені фрагменти сітки точок

відносно одна одної на $\frac{1}{2} \Delta s$. При кроці $\Delta s = \Delta x = \Delta y = 150$ км координати I, J дорівнюють 129.

Індекси вузлів першої сітки (кружки) визначаються формулою

$$i, j = 2\left(\eta + \frac{1}{2}\right), \eta = 0, 1, \dots, 64.$$

Індекси вузлів другої сітки (хрестики) визначаються за формулою:

$$i, j = 2(\eta + 1), \eta = 0, 1, \dots, 63.$$

Прогностичні поля визначаються поперемінно в вузлах то однієї, то другої сітки.

Пояснимо апроксимацію функцій f за формулою (7.13) з використанням шахової сітки:

$$\begin{aligned} \overline{f}_{i,j}^{xy} &= \frac{1}{4} (f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1}), \\ \left(\overline{f}^y\right)_{i,j} &= \frac{1}{4\Delta x} (f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1} + f_{i+1,j-1}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Система рівнянь (7.7) при вказаних крайових умовах може бути реалізована в двох варіантах: без врахування неадіабатичних і турбулентних факторів, коли приймається, що $F_x = F_y = \varepsilon = \varepsilon_{II} = 0$, і з їх врахуванням.

Рівняння системи записуються стосовно чисельного інтегрування на шаховій сітці за допомогою формул (7.13). Скінченнорізницевий аналог системи в адіабатичному варіанті має вигляд:

$$u_t - l\overline{v}^t = -\left[m^2 \left(\overline{u}^{xy} \overline{u}_x + \overline{v}^{xy} \overline{u}_y \right) + \frac{1}{2} \left(\overline{u}^{2xy} + \overline{v}^{2xy} \right) \overline{m}_x^2 + \tau \overline{u}_p^{xy} + \overline{\Phi}_x^y \right] = -F_u, \quad (7.15)$$

$$v_t + l\overline{u}^t = -\left[m^2 \left(\overline{u}^{xy} \overline{v}_x + \overline{v}^{xy} \overline{v}_y \right) + \frac{1}{2} \left(\overline{u}^{2xy} + \overline{v}^{2xy} \right) \overline{m}_y^2 + \tau \overline{v}_p^{xy} + \overline{\Phi}_y^x \right] = -F_v, \quad (7.16)$$

$$\tau(p) = -m^2 \int_0^p \left(\overline{u}_x^{xy} + \overline{v}_y^{xy} \right) dp', \quad (7.17)$$

$$T = -\frac{p}{R} \Phi_p, \quad (7.18)$$

$$T_t = -m^2 \left(\overline{u}^{xy} \overline{T}_x + \overline{v}^{xy} \overline{T}_y \right) + \frac{c^2}{Rp} \tau, \quad (7.19)$$

$$q_t = -m^2 \left(u \overset{-xy}{q}_x + v \overset{-xy}{q}_y \right) + \tau \overset{-xy}{q}_p. \quad (7.20)$$

Як бачимо з рівнянь (7.15), (7.16), члени lv і lu записані за схемою трапеції (за часом). Така форма запису рівнянь руху дозволяє перетворити рівняння до вигляду, зручного для визначення величини u і v в наступний момент часу $s+1$.

Запишемо похідні і осереднені за часом u і v відповідно до формул (7.13):

$$\begin{aligned} \frac{u^{s+1} - u^{s-1}}{2\Delta t} - \frac{l}{2} (v^{s+1} + v^{s-1}) &= -F_u, \\ \frac{v^{s+1} - v^{s-1}}{2\Delta t} + \frac{l}{2} (u^{s+1} + u^{s-1}) &= -F_v. \end{aligned}$$

Ці рівняння можна переписати таким чином

$$\begin{aligned} u^{s+1} - u^{s-1} - l\Delta t (v^{s+1} + v^{s-1}) &= -2\Delta t F_u, \\ v^{s+1} - v^{s-1} + l\Delta t (u^{s+1} + u^{s-1}) &= -2\Delta t F_v. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему двох рівнянь відносно невідомих u^{s+1} , v^{s+1} , одержимо:

$$\begin{aligned} u^{s+1} &= \frac{1}{1 + (l\Delta t)^2} \left\{ \left[1 - (l\Delta t)^2 \right] u^{s-1} + 2l\Delta t v^{s-1} - 2l(\Delta t)^2 F_v^s - 2\Delta t F_u^s \right\}, \\ v^{s+1} &= \frac{1}{1 + (l\Delta t)^2} \left\{ \left[1 - (l\Delta t)^2 \right] v^{s-1} - 2l\Delta t u^{s-1} + 2l(\Delta t)^2 F_u^s - 2\Delta t F_v^s \right\}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

де індекси $s+1$, $s-1$, s є ознакою належності змінних до відповідних моментів часу.

По вертикалі модель має 10 обчислювальних рівнів, які відповідають ізобаричним поверхням 1000, 850, 700, 500, 400, 300, 250, 200, 150 і 100 гПа. Внаслідок нерівномірності розташування рівнів по вертикалі при розрахунку похідних, а також осереднених величин за тиском і сум по індексах k , k' , вводяться поправки, які враховують цю нерівномірність.

На рис.7.3 представлені фрагменти шахових сіток, де вказано, в яких вузлах розраховуються ті чи інші функції в різні моменти часу. Так, якщо безрозмірній координаті s відповідає парне значення ($s=0,2,4\dots$), то функції u , v , T , Φ , q визначаються на сітці кружків; в момент часу $s = 1,3,5\dots$ - на

сітці хрестиків. Оскільки аналог вертикальної швидкості визначається з рівняння нерозривності шляхом інтегрування по p функції $D_s = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$, величина τ розраховується при парних s у вузлах-хрестиках, а при непарних – у вузлах-кружках (рис.7.3).

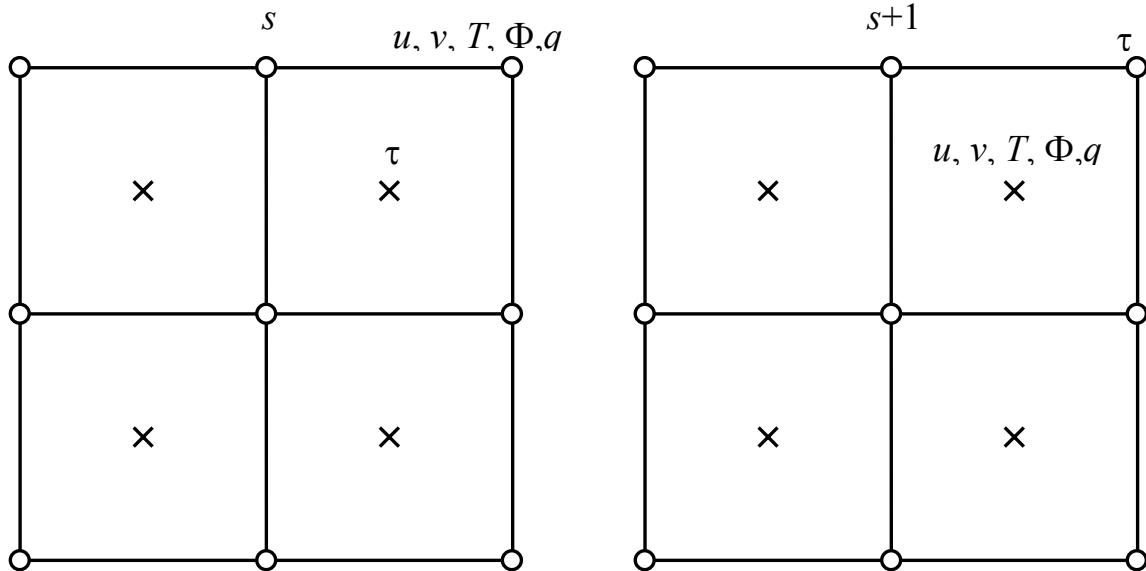


Рисунок 7.3 – Розміщення прогностичних величин у вузлах шахової сітки у парні моменти часу s і непарні $s+1$.

Для розрахунку додатків $\tau \cdot \partial u/\partial p$ і $\tau \cdot \partial v/\partial p$ величини u і v необхідно мати в тих же вузлах, що і τ . Тому до u і v застосовують операцію осереднення по навколишніх вузлах, використовуючи першу з формул (7.14).

При чисельному розв'язанні прогностичної задачі інтегралі, що входять в рівняння системи (7.15)-(7.20), з врахуванням вертикальної структури моделі замінюються сумами. Так, наприклад, з рівняння (7.17) дістанемо

$$\tau_k = \tau_{k-1} - m^2 \bar{D}_k \Delta p_k, \quad (7.22)$$

де $\bar{D}_k = 0.5(D_k + D_{k-1})$; $D_k = \left(\begin{matrix} -y & -x \\ u_x & v_y \end{matrix} \right)_k$; $\Delta p_k = p_k - p_{k-1}$.

На верхньому обчислювальному рівні $k=1$ задається додаткова умова: $D_k = D_{k-1}$, тобто $D_{k=1} = D_{k=0}$. З врахуванням крайової умови $\tau_{k=0} = 0$ точно одержимо:

$$\tau_k = - \sum_{k'=1}^k d_{k,k'} D_{k'},$$

де $d_{k,k'}$ - коефіцієнти, які залежать від товщини шарів Δp_k на інтервалі від

$k = 0$ до k' .

Алгоритм моделі побудований таким чином, що в кожній точці спочатку обчислюються похідні, середні і суми на всіх рівнях k , а потім, базуючись на них, розраховуються додатки прогностичних рівнянь. Такий алгоритм визначається структурою діагностичних рівнянь (нерозривності і статички) і забезпечує економічність розрахунків.

Інтегрування за часом всіх прогностичних рівнянь проводиться за допомогою центральних різниць з кроком за часом $\Delta t = 12$ хв. На першому кроці за часом використовуються спрямовані вперед різниці.

Послідовність розрахунків прогнозу в адіабатичному наближенні на кожному кроці за часом зводиться до такого:

- за значеннями u^s, v^s у вузлах однієї з сіток на всіх рівнях за формулою (7.22) обчислюються значення τ^s у вузлах другої сітки на тих самих рівнях;

- за значеннями u^s, v^s, τ^s, Φ^s обчислюються функції F_u і F_v у співвідношеннях (7.15), (7.16), а потім за формулами (7.21) розраховуються величини u^{s+1}, v^{s+1} у вузлах другої сітки;

- за допомогою рівнянь (7.19), (7.20) за значеннями u^s, v^s і τ^s знаходяться значення T^{s+1} і q^{s+1} , а на основі межової умови (7.10) і рівняння статички (7.18) - Φ^{s+1} у вузлах другої сітки точок.

На цьому розрахунки в межах одного кроку за часом закінчуються. При переході до наступного часового кроку розрахунки ведуться за такою ж схемою, але з початковими даними, здобутими на попередньому кроці в вузлах другої сітки (рис.7.3).

В неадіабатичному варіанті моделі враховується турбулентний тепло- і вологообмін, радіаційні припливи тепла і обумовлені конденсацією зміни температури і вологості. Як вихідна використовується система (7.7), в якій враховуються члени, що описують припливи тепла, вологи та імпульсу. Ці припливи розраховуються на основі методів параметризації.

Оперативні прогнози за допомогою розглянутої моделі розраховуються двічі на добу за даними спостережень в 0 і 12 год. СГЧ. При цьому за результатами спостережень в 0 год. СГЧ розраховуються прогнози на 24, 48 і 72 год., а за вихідними даними за 12 год. - на 36, 60 і 84 год.

7.3 Модель Національного метеорологічного центру США

В півсферному варіанті моделі вихідною є система повних рівнянь у квазістатичному наближенні в σ -системі координат. Рівняння руху запи-

суються у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x} + lv + F_x, \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial y} - lv + F_y. \quad (7.24)$$

В рівняннях (7.23), (7.24) θ – потенціальна температура

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \quad (7.25)$$

де $\varkappa = c_p/c_v$; Π – нова змінна, так звана функція Екснера

$$\Pi = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}; \quad (7.26)$$

F_x, F_y - складові сили в'язкості; $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$; інші позначення загальноприйняті.

Покажемо, як у рівняннях (7.23) і (7.24) визначаються члени вигляду

$$c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad \text{і} \quad c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

Перетворимо, наприклад, член $\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$. Для цього прологарифмуємо рівняння для функції Екснера

$$\ln \Pi = \frac{\varkappa-1}{\varkappa} (\ln p - \ln p_0).$$

Отримане рівняння продиференціюємо по x

$$\frac{1}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x};$$

з рівняння статки $p = \rho RT$, тоді з урахуванням цього

$$\frac{1}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{1}{RT\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

звідки

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{RT}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial x}. \quad (7.27)$$

З формули для потенціальної температури знайдемо T

$$T = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

або з урахуванням (7.26)

$$T = \theta \Pi.$$

Підставимо останню рівність в (7.27), одержимо

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = R \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Можна показати, що $R \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = c_p$; тоді останнє рівняння набере вигляду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x}. \quad (7.28)$$

Аналогічно - $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial y}$.

Рівняння статки з урахуванням функції Екснера буде мати вигляд

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}. \quad (7.29)$$

Рівняння припливу тепла, нерозривності і припливу водяної пари записуються таким чином:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\varepsilon}{\rho c_p} \frac{\theta}{T}, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{1}{\rho} \varepsilon_{\Pi}, \quad (7.32)$$

де q - масова частка водяної пари.

Система (7.23), (7.24), (7.29)-(7.32) і рівняння (7.26) мають 8 невідомих функцій $u, v, \dot{\sigma}, p, \Pi, \Phi, \theta, q$. Восьме замикальне рівняння системи представляє собою співвідношення, за допомогою якого задається вертикальна координата у вигляді розривної функції.

У одному з варіантів моделі атмосфера по вертикалі розділена на чотири шари: граничний, тропосфера, стратосфера і ізентропичний шар. Для кожного з цих шарів задається власна вертикальна координата

$$\sigma = \frac{p - p_h}{p_l - p_h}, \quad (7.33)$$

де p_h, p_l - тиск на верхній і нижній межах основного шару.

На площині стереографічної картографічної проекції указана система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - lv &= F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + lu &= F_y, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + c_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\rho c_p T} \varepsilon, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\rho} \varepsilon_{\Pi}, \\ \frac{\partial p_s}{\partial t} &= -m \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma, \\ \dot{\sigma} &= -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t} - \frac{m}{p_s} \int_0^{\sigma} \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma'. \end{aligned} \quad (7.34)$$

В (7.34) m - параметр збільшення або масштабний множник.

Зауважимо, що при виведенні двох останніх рівнянь системи використані такі межові умови

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0 \quad \text{і} \quad \sigma = 1.$$

Вертикальна структура атмосфери у процесі вдосконалення моделі задавалась різними способами. Вище відзначалось, що в одному з перших варіантів моделі атмосфера поділялась на чотири основних шари, усередині яких вводились доповняльні шари, а координати σ задавались для кожного основного шару у відповідності з формулою (7.33). У наступних варіантах моделі НМЦ число рівнів зростало і на цей час доведено до 16. При цьому використовується єдина координата σ . Вертикальна структура такої моделі схематично представлена на рис.7.4.

В площині XOY використовується квадратна сітка на карті полярної стереографічної проекції з головним масштабом на широті 60° . Різні варіанти скінченнорізницевої моделі призначені для прогнозів по півкулі або по окремих регіонах. Залежно від цього обирається крок сітки. У першому півкульовому варіанті моделі крок брався рівним 381 км. Поступово

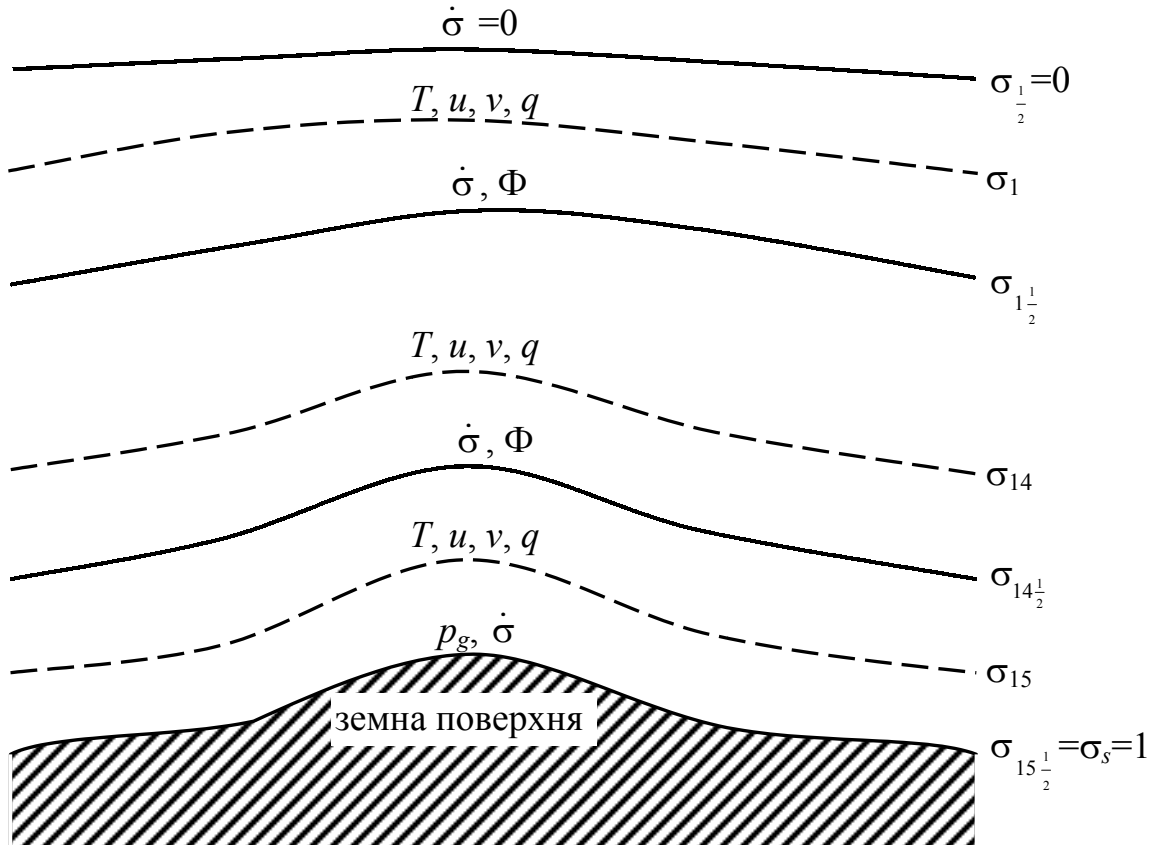


Рисунок 7.4 - Вертикальна структура прогностичної моделі атмосфери.

крок було зменшено до 190.5 км. У варіанті моделі, призначеному для більш детального прогнозу по північноамериканському регіону, число вузлів складає 5293 (79×67). Для порівняння укажемо, що при кроці 381 км розрахункова область містить у собі 3026 вузлів (57×53). Схема просторової сітки із зазначенням розташування величин, які розраховуються, зображена на рис.7.5.

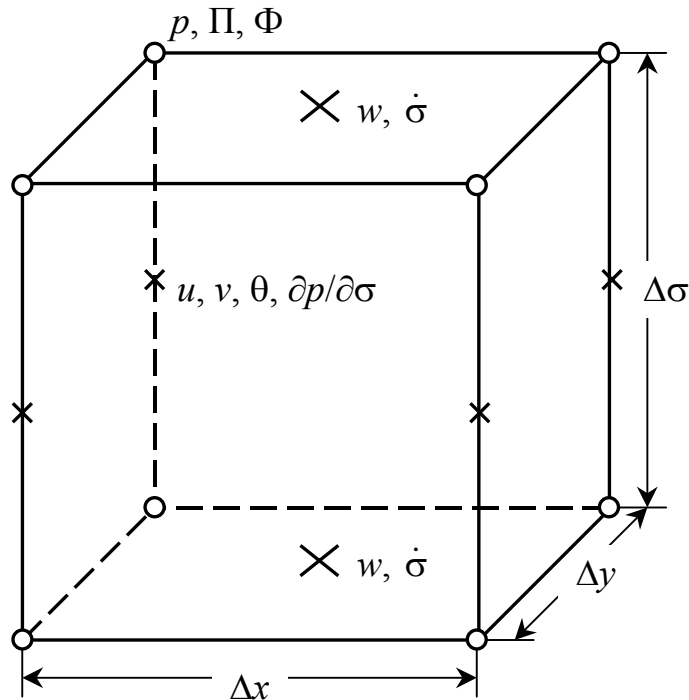


Рисунок 7.5 - Розміщення прогностичних величин у вузлах просторової сітки.

На бічних межах задаються умови

$$V_n = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (7.35)$$

де n - зовнішня нормаль до межі.

Відповідно до умов (7.35) повітря рухається уздовж обох боків межі з однаковою швидкістю, але через саму межу не проникає.

Для скінченнорізницевої апроксимації рівнянь системи (7.34) використовуються оператори диференціювання та осереднення вигляду:

$$f_n = \frac{1}{\Delta r} \left(f_{n+\frac{1}{2}} - f_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (7.36)$$

$$\bar{f}^n = \frac{1}{2} \left(f_{n+\frac{1}{2}} + f_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (7.37)$$

$$\overline{f}_n^{\sigma} = \frac{1}{2\Delta r} (f_{n+1} - f_{n-1}), \quad (7.38)$$

$$\overline{f}^{m\sigma} = \frac{1}{4} (f_{n+1} + f_{n-1} + 2f_n), \quad (7.39)$$

У (7.36) r - будь-яка координата, а n - відповідна їй безрозмірна координата; Δr - крок сітки за змінними x , y , σ , t . Оператори диференціювання та згладжування можуть бути застосовані неодноразово.

Використовуючи ці оператори та їх комбінації, скінченнорізницеві аналоги диференційних рівнянь (7.23), (7.24), (7.29)-(7.32) можна записати таким чином:

$$\overline{u}_t^{\sigma} + \left(\overline{\dot{\sigma}}^{\sigma} \overline{u}_\sigma^{\sigma} - \overline{\ell}^{\sigma} \overline{v}^{\sigma} - \overline{F}_x^{\sigma} \right) + \overline{u}^{\sigma} \overline{u}_x^{\sigma} + \overline{v}^{\sigma} \overline{u}_y^{\sigma} + \left(\overline{\Phi}_x^{\sigma} + c_p \overline{\theta}^{\sigma} \overline{\Pi}_x^{\sigma} \right) = 0, \quad (7.40)$$

$$\overline{v}_t^{\sigma} + \left(\overline{\dot{\sigma}}^{\sigma} \overline{v}_\sigma^{\sigma} + \overline{\ell}^{\sigma} \overline{u}^{\sigma} - \overline{F}_y^{\sigma} \right) + \overline{u}^{\sigma} \overline{v}_x^{\sigma} + \overline{v}^{\sigma} \overline{v}_y^{\sigma} + \left(\overline{\Phi}_y^{\sigma} + c_p \overline{\theta}^{\sigma} \overline{\Pi}_y^{\sigma} \right) = 0, \quad (7.41)$$

$$\overline{\Phi}_\sigma^{\sigma} + c_p \overline{\theta}^{\sigma} \overline{\Pi}_\sigma^{\sigma} = 0, \quad (7.42)$$

$$\overline{p}_{\sigma t}^{\sigma} + \overline{u}^{\sigma} \overline{p}_{\sigma x}^{\sigma} + \overline{v}^{\sigma} \overline{p}_{\sigma y}^{\sigma} + \overline{p}_\sigma^{\sigma} \overline{\dot{\sigma}}^{\sigma} + \overline{p}_\sigma^{\sigma} \left(\overline{u}_x^{\sigma} + \overline{v}_y^{\sigma} \right) = 0, \quad (7.43)$$

$$\overline{\theta}_t^{\sigma} + \overline{u}^{\sigma} \overline{\theta}_x^{\sigma} + \overline{v}^{\sigma} \overline{\theta}_y^{\sigma} + \overline{\theta}_\sigma^{\sigma} \overline{\dot{\sigma}}^{\sigma} - \frac{\varepsilon}{c_p} = 0, \quad (7.44)$$

$$\overline{q}_t^{\sigma} + \overline{u}^{\sigma} \overline{q}_x^{\sigma} + \overline{v}^{\sigma} \overline{q}_y^{\sigma} + \overline{q}_\sigma^{\sigma} \overline{\dot{\sigma}}^{\sigma} - \frac{\varepsilon_{\Pi}}{\rho} = 0. \quad (7.45)$$

Для прикладу розглянемо конвективний член рівняння (7.40) для точки з координатами i, j, k та для моменту часу s .

$$\left(\overline{\dot{\sigma}}^{\sigma} \overline{u}_\sigma^{\sigma} \right)_{i,j,k,s} = \frac{\overline{\dot{\sigma}}_{i,j,k+1,s}^{\sigma} + \overline{\dot{\sigma}}_{i,j,k,s}^{\sigma}}{2} \cdot \frac{1}{4(\sigma_{k+1} - \sigma_k)} \times \\ \times \left(\overline{u}_{i+1,j,k+1,s} + \overline{u}_{i,j+1,k+1,s} + \overline{u}_{i-1,j,k+1,s} + \overline{u}_{i,j-1,k+1,s} - \overline{u}_{i+1,j,k,s} - \overline{u}_{i,j+1,k,s} - \overline{u}_{i-1,j,k,s} - \overline{u}_{i,j-1,k,s} \right);$$

тут для осереднення по x та y використана перша з формул (7.14), а для диференціювання по σ - однобічна різниця.

Похідна за часом $\partial u / \partial t$ апроксимується на всіх кроках за часом, окрім першого, таким чином:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j,k,s} = \left(u_t^{-\sigma t}\right)_{i,j,k,s} = \frac{1}{4\delta t} (u_{i,j,k+1,s+1} - u_{i,j,k+1,s-1} + u_{i,j,k,s+1} - u_{i,j,k,s-1});$$

на першому кроці застосовується однобічна різниця

$$\left(u_t^{-\sigma t}\right)_{i,j,k,s=1} = \frac{1}{2\delta t} (u_{i,j,k+1,1} - u_{i,j,k+1,0} + u_{i,j,k,1} - u_{i,j,k,0}),$$

де індекс “1” належить до моменту часу $t_0 + \delta t$, а індекс “0” - до початкового моменту часу t_0 , де t_0 - строк спостережень, а δt - крок за часом.

Аналогічні співвідношення застосовуються і для інших змінних та рівнянь системи (7.40)-(7.45).

Для прогнозу опадів, зумовлених великомасштабними процесами, одержується рівняння для прогнозу вологовмісту W у шарі $\delta\sigma_k(\sigma_k, \sigma_{k+1})$; виведення цього рівняння потребує використання рівнянь нерозривності та припливу водяної пари

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{m}{g} \left[\frac{\partial}{\partial x} (uqp_s) + \frac{\partial}{\partial y} (vqp_s) \right]_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} + \frac{1}{g} (\dot{\sigma}qp_s)_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} = \frac{1}{g\rho} \varepsilon_{\Pi}^k,$$

де $W = \frac{1}{g} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} qp_s d\sigma$.

Вологовміст W може бути перерахованим у кількість випавшої води через її густину. Введемо величину $W_H = \frac{1}{g} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} q_H p_s d\sigma$. Тоді кількість опадів, які випадуть у шарі при $W > W_H$, визначається різницею $\delta W = W - W_H$.

Нехай q_H - масова частка насиченої водяної пари - відома функція температури і тиску (формула Магнуса). Тепло, яке виділилось при конденсації, також як і витрачене при випаруванні, враховується у рівнянні припливу тепла; це тепло обумовлює зміну температури повітря відповідного шару. Волога, яка сконденсувалась, випадає у вигляді опадів, при цьому опади з вищерозташованих шарів можуть випаруватися у нижчерозташованих шарах, якщо в останніх відсутні умови конденсації.

Для найбільш простого варіанта моделі НМЦ, в якій атмосфера по вертикалі представляється у вигляді чотирьох шарів, алгоритм прогнозу кроками за часом включає такі процедури.

1. Інтерполяція початкових даних з карт абсолютної топографії

($p = \text{const}$) на поверхні $\sigma = \text{const}$. Початкові поля задаються для метеорологічних величин u , v , θ , $\partial p/\partial\sigma$. Спочатку розраховуються значення $\partial p/\partial\sigma = (p_h - p_l)/(\sigma_h - \sigma_l)$ для кожного шару і на кожному рівні.

2. Розраховується вертикальна швидкість $\dot{\sigma}$ у σ -координатах.

Для граничного шару $\partial p/\partial\sigma = \text{const}$, тому у рівнянні нерозривності $\partial p/\partial\sigma$ можна винести за знак похідних і скоротити. Тоді має бути одержане співвідношення

$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Якщо його проінтегрувати по вертикальній координаті σ від $\sigma = 1$ до $\sigma = 0$ з використанням умови $\dot{\sigma} = 0$ при $\sigma = 1$, то дістанемо $\dot{\sigma}$ на верхній межі граничного шару атмосфери

$$\dot{\sigma} = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) d\sigma.$$

На останніх рівнях $\partial p/\partial\sigma \neq \text{const}$. Внаслідок диференціювання рівняння нерозривності по σ одержимо рівняння у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} \left(u \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial \sigma} \left(v \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\dot{\sigma}) \frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0.$$

Після інтегрування цього рівняння по σ визначається $\dot{\sigma}$ на проміжних рівнях у тропосфері.

3. Розраховується функція $p_{t,\sigma}$, а потім $(\partial p/\partial\sigma)^{t+\delta t}$. За відомим значенням $(\partial p/\partial\sigma)^{t+\delta t}$ однократним інтегруванням по σ за граничної умови $p_0 = 0$ (інтегрування виконується зверху вниз) визначається p на лічильних рівнях σ у майбутній момент часу $t+\delta t$.

4. За значеннями $p_{t+\delta t,\sigma}$ розраховується Π за формулою (7.26), а потім $\partial \Pi/\partial\sigma$ у момент часу $t+\delta t$.

5. З рівняння (7.29) відшукується $\partial \Phi/\partial\sigma$ з використанням θ і знайдених значень $\partial \Pi/\partial\sigma$; функція Φ розраховується шляхом інтегрування рівняння статики

$$\Phi_{\sigma} = gh + c_p \int_0^1 \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Треба відзначити, що дуже складною є проблема визначення взаємно погоджених початкових полів. Вихідні дані представляють собою результати чисельного аналізу геопотенціалу Φ і температури T на десяти головних ізобаричних поверхнях. При цьому поля T є допоміжними, тому що використовуються вони для розрахунку вертикальних градієнтів T з метою інтерполяції на модельні рівні. Поле температури в моделі описується відносним геопотенціалом. Після скінчення розрахунку прогнозу виконується обернена інтерполяція на стандартні поверхні і результати інтерполяції видаються споживачу.

У прогностичній моделі НМЦ процеси підсіткового масштабу враховуються методами параметризації достатньо детально. Нагадаємо, що методи параметризації дозволяють знайти зв'язок між шуканими параметрами моделі і деякими величинами, відбиваючими сумарний ефект процесів підсіткового масштабу. Цей ефект і враховується в прогностичних моделях. Наприклад, урахування конвективних процесів в моделі здійснюється шляхом параметризації конвективного перемішування з використанням методу сухо- і вологоадіабатичного пристосування, а радіаційний обмін враховується за допомогою розрахунку короткохвильового (сонячного) нагрівання і довгохвильового охолодження атмосфери і земної поверхні.

Основні принципи параметризації конвекції методом конвективного пристосування зводяться до такої схеми. Якщо в деяких шарах атмосфери виникла статична нестійкість, то конвекція мусить приводити до перерозподілу по вертикалі тепла і вологи таким чином, щоб внаслідок конвективних рухів у цих і суміжних шарах стан атмосфери перетворився на стійкий. Якщо в цих шарах має місце стан насичення, то при вологоадіабатичному процесі виділяється тепло конденсації і утворюються опади.

Параметризація променистого теплообміну в моделі у загальних рисах може бути представлена таким чином.

Весь спектр короткохвильової радіації розподіляється на два діапазони, довгохвильової - на три. Розрахунок потоків радіації у кожному з цих діапазонів виконується для рівнів моделі з урахуванням розподілу таких характеристик атмосфери:

- відношення суміші водяної пари;
- масової частки насиченої водяної пари;
- вмісту вуглекислого газу, озону, аерозолі;
- температури повітря;
- хмарності у шарах моделі атмосфери;
- альbedo і випромінювальної здатності підстильної поверхні;
- zenітного кута Сонця у фіксований момент доби при інтегруванні

рівнянь за часом;

- сонячної сталої.

При розрахунках потоків використовуються наперед затабульовані функції пропускання для кожного із зазначених діапазонів спектра випромінювання як для безхмарної атмосфери, так і для конкретного розподілу хмарних шарів.

Схема параметризації при інтегруванні рівнянь моделі за часом реалізується не на кожному кроці, а через кожні 3-4 години; цього досить для урахування і розрахунку добового ходу метеорологічних величин.

Температура поверхні морів та океанів задається з початкових даних і залишається незмінною на протязі усього часу прогнозу. При розрахунку власного випромінювання атмосфери і підстильної поверхні ураховується його залежність від температури і вологості повітря, а також від кількості хмар. Для верхніх шарів моделі вважається, що вологість завжди дорівнює нулю, а охолодження складає приблизно $-1.7 \cdot 10^{-5} \text{ K} \cdot \text{c}^{-1}$. Аналогічно, якщо у всіх шарах моделі відносна вологість не перевищує 60%, поверхня землі покрита снігом або льодом і, нарешті, висота сонця над горизонтом менше 10° , задається стале охолодження граничного шару в моделі $-4.4 \cdot 10^{-5} \text{ K} \cdot \text{c}^{-1}$.

Турбулентні члени у рівняннях руху розраховуються за формулами

$$F_x = \frac{g\rho_1}{\Delta p_1} c_F |\vec{V}| \cdot u, \quad F_y = \frac{g\rho_1}{\Delta p_1} c_F |\vec{V}| \cdot v,$$

де ρ_1 - стандартна густина повітря на рівні моря,

$$\Delta p_1 = 50 \text{ гПа},$$

c_F - коефіцієнт тертя, який підбирається емпірично.

Турбулентні потоки тепла (H_s) і вологості (Q_s) від земної поверхні обчислюються за співвідношеннями

$$H_s = \frac{g\rho_1}{\Delta p_1} c_F |\vec{V}| \cdot \Delta T, \quad Q_s = \frac{g\rho_1}{\Delta p_1} c_F |\vec{V}| \cdot (q_s - q_h),$$

де $\Delta T = T_s - T_h$; індекс s відноситься до земної поверхні, а індекс h - до лічильного рівня у граничному шарі моделі. Для поверхні океанів величини T_s і $q_s = q_h(T_s)$ відомі із початкових даних, а для поверхні суші їх треба знайти із рівнянь теплового та гідрологічного балансу земної поверхні.

Різні варіанти скінченнорізницевої моделі призначені для прогнозів по півкулі і регіону, який має масштаб континенту, або відносно не-

великого району (в останньому випадку модель буде мезометеорологічною). При розрахунках по регіональних моделях бічні межові умови задаються за результатами прогнозу по півкульовій моделі.

Прогноз повного комплексу метеорологічних величин (тобто прогноз погоди) створюється за результатами прогнозів по моделі НМЦ статистичними методами.

Оперативні прогнози розраховуються два рази на добу.

7.4 Модель метеорологічної служби Великобританії

За теперішнього часу в оперативній практиці використовується 11-рівнева модель. Рівняння моделі за горизонтальними координатами записуються у сферичних координатах.

Горизонтальна сітка складається з вузлів на колах широти з кроком 2° , при цьому кількість вузлів зменшується в напрямку полюса. Використовується σ -система координат. Значення рівнів $\sigma = \text{const}$ і меж шарів представлені у таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 - Значення рівнів і меж шарів

Номер рівня k	Межа шару $\sigma_{k-\frac{1}{2}}$	$\sigma_{k+\frac{1}{2}}$	Значення координати відповідного рівня σ_k
1	0,000	0,060	0,02207
2	0,060	0,125	0,08856
3	0,125	0,195	0,15741
4	0,195	0,270	0,23047
5	0,270	0,370	0,31738
6	0,370	0,510	0,43626
7	0,510	0,650	0,57717
8	0,650	0,790	0,71772
9	0,790	0,900	0,84320
10	0,900	0,975	0,93701
11	0,975	1,000	0,98744

Основні рівняння представлені у моментній і дивергентній формі і мають такий вигляд:

Рівняння руху

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Vu \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} u) - V \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[p_* \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + RT \frac{\partial p_*}{\partial \lambda} \right] = D_u + g \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}, \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Vv \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} v) + U \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[p_* \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + RT \frac{\partial p_*}{\partial \theta} \right] = D_v + g \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \sigma}. \quad (7.47)$$

Рівняння статки

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma} = 0. \quad (7.48)$$

Рівняння нерозривності

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U) + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma}) = 0. \quad (7.49)$$

Рівняння припливу тепла

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (p_* T) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (UT) + \frac{\partial}{\partial \theta} (VT \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} T) - \frac{\alpha T}{\sigma} \omega = \\ = D_T + \frac{g}{c_p} \frac{\partial H}{\partial \sigma} + \frac{p_*}{c_p} (\dot{Q}_R + L\dot{P}). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Рівняння перенесення водяної пари

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_* q) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Uq) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Vq \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} q) = D_q + g \frac{\partial M}{\partial \sigma} - p_* \dot{P}. \quad (7.51)$$

Тут a – радіус Землі,

θ, λ – широта і довгота,

p – тиск,

p_* – тиск на підстильній поверхні,

$\sigma = p / p_*$ – вертикальна координата,

$\dot{\sigma} = d\sigma/dt$

$\omega = dp/dt$,

u, v – зональна і меридіональна компоненти швидкості вітру,

$$U = p_* u,$$

$$V = p_* v,$$

q – відношення суміші водяної пари,

f – параметр Коріоліса,

$\tau_\lambda, \tau_\theta$ – турбулентні потоки зональної і меридіональної кількості руху,

H, M – турбулентні потоки тепла і вологості,

\dot{Q}_R – швидкість нагрівання одиниці маси за рахунок радіації,

$\dot{P} = \dot{P}_c + \dot{P}_i$ – швидкість конденсації в одиниці маси при конвекції (\dot{P}_c) і великомасштабних процесах (\dot{P}_i),

$$\alpha = R/c_p,$$

D_u, D_v, D_T, D_q – швидкість дисипації $U, V, p_* T, p_* q$ внаслідок турбулентного перемішування підсіткових масштабів.

Скінченнорізницева апроксимація рівнянь здійснюється за допомогою різницевих операторів згладжування і чисельного диференціювання, які мають вигляд:

$$\bar{A}_r = \frac{1}{2} \left[A \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) + A \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \right], \quad (7.52)$$

$$\delta_r A = \frac{1}{\Delta r} \left[A \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) - A \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \right], \quad (7.53)$$

$$\overline{AB}^r = \frac{1}{2} \left[A \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) B \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) + B \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) A \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \right]. \quad (7.54)$$

Скінченнорізницевий аналог системи (7.46)-(7.51) записується таким чином:

$$\begin{aligned} \delta_t \bar{u} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\delta_\lambda \left(\overline{U^\lambda u^\lambda} \right) + \delta_\theta \left(\overline{v^\theta u^\theta \cos \theta} \right) \right] + \delta_\sigma \left(\dot{\bar{\sigma}} u^\sigma \right) - V \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \\ + \frac{p_*}{a \cos \theta} \left[\delta_\lambda \overline{\Phi^\lambda} + R T \overline{\delta_\lambda \log p_*^\lambda} \right] = D_u + g \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} \delta_t \bar{v} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\delta_\lambda \left(\overline{U^\lambda v^\lambda} \right) + \delta_\theta \left(\overline{v^\theta v^\theta \cos \theta} \right) \right] + \delta_\sigma \left(\dot{\bar{\sigma}} v^\sigma \right) + U \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \\ + \frac{p_*}{a \cos \theta} \left[\overline{\cos \theta \delta_\theta \Phi^\theta} + R \cdot \overline{\cos \theta T^\theta \delta_\theta \log p_*^\theta} \right] = D_v + g \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

$$\delta_{\log \theta}(\Phi) + R\bar{T}^{-\sigma} = 0, \quad (7.57)$$

$$\delta_i \bar{p}_*^{-t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\delta_\lambda \bar{U}^{-\lambda} + \delta_\theta \left(\bar{V}^{-\theta} \cos \theta \right) \right] + \delta_\sigma (p_* \dot{\sigma}) = 0, \quad (7.58)$$

$$\delta_i \bar{p}_* T^t + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\delta_\lambda \left(u \bar{T}^\lambda \right) + \delta_\theta \left(v \bar{T}^\theta \cos \theta \right) \right] + \delta_\sigma \left(p_* \dot{\sigma} \bar{T}^\sigma \right) - \frac{\alpha T}{\sigma} \omega =$$

$$= D_T + \frac{g}{c_p} \frac{\partial H}{\partial \sigma} + \frac{p_*}{c_p} \left(\dot{Q}_R + L \dot{P} \right), \quad (7.59)$$

$$\delta_i \bar{p}_* q^t + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\delta_\lambda \left(u \bar{q}^{-\lambda} \right) + \delta_\theta \left(v \bar{q}^{-\theta} \cos \theta \right) \right] + \delta_\sigma \left(p_* \dot{\sigma} \bar{q}^{-\sigma} \right) =$$

$$= D_q + g \frac{\partial M}{\partial \sigma} - p_* \dot{P}. \quad (7.60)$$

Інтегрування за часом виконується з кроком 7.5 хвилини. Використовується схема центральних різниць. Межові умови по вертикалі мають вигляд: при $\sigma = 0$ і $\sigma = 1$ $\dot{\sigma} = 0$.

При інтегруванні по всій земній кулі горизонтальні межові умови не потрібні. Припускається відсутність адвективних потоків через екватор.

Щоб уникнути чисельної нестійкості, після кожного кроку за часом використовуються часові фільтри.

Розглянемо, як розраховуються у цій моделі великомасштабні опади і прихована теплота пароутворення. На початковій стадії припускається, що адвекція температури здійснюється при сухоадіабатичному процесі, а адвекція відношення суміші здійснюється як консервативний процес. Якщо спостерігається стан насичення, то вводяться відповідні поправки. Так, якщо після чергового кроку за часом у даному вузлі моделі відшукані значення T і q і якщо q перевищує значення q_s , яке відповідає стану насичення при температурі T , то температура збільшиться на величину ΔT , де

$$\Delta T = \frac{L}{c_p} (q - q'_s), \quad (7.61)$$

де q'_s – насичувальне відношення суміші при $T + \Delta T$.

Приблизно можна записати

$$q'_s = q_s + \frac{\partial q}{\partial T} \Delta T = q_s + \frac{L q_s \Delta T}{R_{\Pi} T^2}, \quad (7.62)$$

де R_{Π} – газова стала для водяної пари.

Швидкість конденсації водяної пари в одиниці маси $\dot{P}_L = \frac{q - q'_s}{\Delta t}$ буде

$$\dot{P}_L = \frac{q - q'_s}{\Delta t} \left/ \left(1 + \frac{Lq_s}{c_p R_{\Pi} T^2} \right) \right. \quad (7.63)$$

Якщо помножити цей вираз на L/c_p , то дістанемо вираз для швидкості змінювання прихованої теплоти пароутворення. Для визначення насичувального значення відношення суміші використовується формула

$$q_s = 0.622 \frac{L_s}{p}, \quad (7.64)$$

де L_s – пружність насичення.

Припускається, що конденсація починається при значенні відносної вологості 100%, і сконденсована волога негайно випадає у вигляді опадів без випарування у шарах, нижчих від рівня конденсації.

Опади формуються у вигляді дощу або снігу в залежності від того, більше чи менше нуля градусів Цельсія температура повітря. Вигляд опадів, що досягають земної поверхні, залежить тільки від температури нижнього рівня моделі.

Для розрахунку турбулентних потоків тепла, вологи та кількості руху у приземному шарі використовується вираз вигляду

$$F_X = - c_X V_{11} \Delta x, \quad (7.65)$$

де V_{11} – швидкість вітру на рівні σ_{11} – нижньому рівні моделі,

$\Delta x = x_{11} - x^*$,

x^* – висота підстильної поверхні,

z_{11} – висота рівня σ_{11} ,

$c_X = c_X(z_{11}, z_0, \mathbf{Ri})$ – коефіцієнт перенесення,

z_0 – параметр шорсткості,

\mathbf{Ri} – число Річардсона.

Якщо вертикальний турбулентний перенос водяної пари і тепла малий в порівнянні з конвективним переносом, то використовується вираз, що описує вільну конвекцію.

$$F_{\theta} = \alpha \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} z_{11} |\Delta \theta|^{3/2}, \quad (7.66)$$

де

$$\alpha = \left\{ 3c \left[\left(\frac{z}{z_0} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\}^{-3/2}, \quad (7.67)$$

c – емпірична стала, яка дорівнює 0.84,

$\Delta\theta$ – градієнт потенціальної температури, який розраховується за значеннями θ_{11} і θ_* .

Розрахунок градієнта питомої вологості складніший, тому що q_* – відношення суміші біля поверхні землі не є змінною величиною, яка відшукується в моделі. Градієнт Δq залежить від вмісту води у ґрунті μ і від q_* насичувального ($q_{*11} = q_s(T_*)$) і визначається формулою

$$\Delta q = \alpha(q_{11} - q_{*H}), \quad (7.68)$$

де $\alpha = \alpha(\mu)$ і $\alpha = 1$ для водяної поверхні.

На підстильній поверхні використовуються такі рівняння:

$$c \frac{\partial T_*}{\partial t} + R_* + H_* + LM_* + L_f S_M + H_j = 0, \quad (7.69)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = P_r - E + S_M - U, \quad (7.70)$$

$$\frac{\partial S_N}{\partial t} = P_s - E_l - S_M, \quad (7.71)$$

де T_* – температура підстильної поверхні,

c – теплоємність ґрунту,

μ – вологовміст ґрунту,

S_N – товщина снігового покриву,

R_* , H_* , LM_* – підсумкові потоки радіації, тепла і води біля земної поверхні,

S_M – швидкість танення снігу,

L_s – прихована теплота танення,

H_j – потік тепла від поверхні океану, покритої льодом,

P_r , P_s – опади у вигляді дощу і снігу,

E , E_l – швидкості випарування і сублімації,

U – стік.

7.5 Модель служби погоди Німеччини

Півсферна 9-рівнева модель призначена для короткострокового прогнозу у високих і середніх широтах. Модель включає і прогноз вологості. Інтегрування виконується двічі на добу на строк 96 годин і двічі на тиждень на строк до 144 годин. Прогноз на 96 годин потребує машинного часу дещо більше двох годин. Область інтегрування являє собою симетричний восьмикутник на карті полярної стереографічної проекції, який покриває більшу частину північної півкулі. Крок сітки на сфері на широті 60° дорівнює 254 км; сітка містить 5137 вузлів.

Межові умови по горизонталі мають вигляд (“тверда” стінка при відсутності сил в'язкості)

$$v_n = 0; \quad \frac{\partial v_t}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} = 0, \quad (7.72)$$

де n і t означають нормальну і тангенціальну складову.

У моделі використовується так звана сітка Еліасена, розхитана за часом і за просторовими координатами. Вертикальною координатою є тиск p . Компоненти швидкості u , v , потенціальна температура θ , геопотенціал Φ і масова частка водяної пари q визначаються на дев'яти рівнях моделі, а вертикальна швидкість ω - для середини шарів. Для трьох верхніх рівнів вологість не визначається. За нижню межу моделі береться ізобарична поверхня 1000 гПа. Підстильна поверхня розглядається як водяна із заданою температурою або як дуже спрощена модель ґрунту, яка складається з тонкого верхнього шару (температура і вологовміст задані) і більш товстого нижнього шару (також з фіксованими температурою і вологовмістом). Береться до уваги наявність снігу або льоду на поверхні.

Верхні межові умови мають вигляд

$$\omega = 0 \text{ при } p = 0, \quad (7.73)$$

$$(\omega q) = 0 \text{ при } p = 250 \text{ гПа}. \quad (7.74)$$

На нижній межі для членів, що характеризують вертикальний перенос, використовуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} V_{1000} &= V_{950}, \\ \theta_{1000} &= \theta_{950}, \\ q_{1000} &= q_{950}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Використовується явна схема інтегрування (схема центральних різниць) з кроком за часом 3.5 хвилини.

Основні рівняння системи у скінченнорізницевому наближенні записуються таким чином.

Рівняння руху в адвективній формі

$$\begin{aligned} \bar{U}_t^t = -m^2 \left[\bar{U}^{xy} \bar{U}_x^y + \bar{V}^{yx} \bar{U}_y^x + \mathbf{Vert}(\bar{\Omega}^y, \bar{U}^{xy}) \right] - \frac{1}{2} \left[(\bar{U}^{xy})^2 + (\bar{V}^{yx})^2 \right] m_x^2 + \\ + fV - \Phi_x + m^2 AL_4(U) + F_x, \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_t^t = -m^2 \left[\bar{U}^{xx} \bar{V}_x^y + \bar{V}^{xy} \bar{V}_y^x + \mathbf{Vert}(\bar{\Omega}^x, \bar{V}^{xy}) \right] - \frac{1}{2} \left[(\bar{U}^{xx})^2 + (\bar{V}^{xy})^2 \right] m_y^2 - \\ - fU - \Phi_y + m^2 AL_4(V) + F_y. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Тут прийнято

$$U = \frac{u}{m}, \quad V = \frac{v}{m}, \quad \Omega = \frac{\omega}{m}, \quad (7.78)$$

F_x, F_y – члени, які враховують тертя; m – масштабний множник для карти стереографічної проекції.

Оператори осереднення і чисельного диференціювання мають вигляд

$$\bar{\psi}^{-\alpha} = \frac{\psi\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) + \psi\left(\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{2}, \quad \psi_{\alpha} = \frac{\psi\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \psi\left(\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\Delta\alpha}. \quad (7.79)$$

Члени, що описують вертикальний перенос, забезпечують узгодженість між адвективною та моментною формою диференціальних рівнянь. Ці члени записуються у вигляді

$$\mathbf{Vert}(\Omega, \psi) = \frac{\Omega_{k+\frac{1}{2}}(\psi_{k+1} - \psi_k) + \Omega_{k-\frac{1}{2}}(\psi_k - \psi_{k-1})}{2\left(p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k-\frac{1}{2}}\right)}. \quad (7.80)$$

В рівняннях (7.76) і (7.77) через $L_4(\psi)$ позначено лінійний оператор Лапласа четвертого порядку. Введення цього оператора пояснюється необхідністю виключення нелінійної нестійкості при інтегруванні за часом. Звичайна скінченнорізницева форма оператора Лапласа у цьому випадку

не дозволяє виключити небажані ефекти.

Рівняння нерозривності

$$U_x + V_y + \Omega_p = 0. \quad (7.81)$$

Рівняння припливу тепла

$$\bar{\theta}_t = -m^2 \left[\bar{U}^x \bar{\theta}_x + \bar{V}^y \bar{\theta}_y + \mathbf{Vert} \left(\Omega, \bar{\theta}^{xy} \right) \right] + m^2 AL_4(\theta) + \frac{1}{p^k} \frac{\dot{Q}}{c_p}, \quad (7.82)$$

де \dot{Q} - джерело тепла.

Рівняння переносу водяної пари

$$\bar{q}_t = -m^2 \left[\bar{U}^x \bar{q}_x + \bar{V}^y \bar{q}_y + \mathbf{Vert} \left(\Omega, \bar{q}^{xy} \right) \right] + m^2 AL_4(q) + \dot{W}, \quad (7.83)$$

де \dot{W} - джерело вологи.

Рівняння статки

$$\Phi_k = \Phi_{k+1} + \alpha_k \theta_{vk+1} + \beta_k \theta_{vk+1}. \quad (7.84)$$

Передбачається, що віртуальна температура T_v між двома рівнями моделі k і $k+1$ є лінійною функцією p^k .

В рівнянні (7.84)

$$\theta_v = \theta(1 + 0.604q), \quad (7.85)$$

$$\alpha_k = \frac{R}{k} p_{k+1}^k \left(1 - \frac{\ln \Pi}{\Pi - 1} \right), \quad (7.86)$$

$$\beta_k = \frac{R}{k} p_k^k \left(-1 + \frac{\Pi \ln \Pi}{\Pi - 1} \right), \quad (7.87)$$

$$\Pi = \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \right)^n, \quad n = 0.286; \quad R - \text{газова стала.}$$

На нижній межі моделі ставиться така кінематична умова

$$\omega_s = m^2 V_s \nabla Z_s, \quad (7.88)$$

яка дозволяє грубо врахувати орографію $Z_s(x,y)$. Ця умова перетворюється

до вигляду

$$\omega_{1000} = m^2 V_{1000} \nabla Z_s. \quad (7.89)$$

Вертикальна турбулентна дифузія у моделі зараз не розглядається.

Багато уваги в моделі приділяється процесам у граничному шарі, параметризації конвекції, хмарності, радіації, процесам у ґрунті.

Граничний шар розподіляється на два – шар Прандтля і шар Екмана.

Потоки кількості руху, тепла, вологи у шарі Прандтля визначаються такими виразами

$$\begin{aligned} (F_m)_n &= -\rho c_D |V_\alpha| (V_\alpha - V_s), \text{ де } V_s = 0, \\ (F_T)_n &= -c_p \rho c_D |V_\alpha| (\theta_\alpha - \theta_s), \\ (F_q)_n &= -L \rho c_D |V_\alpha| (q_\alpha - q_s). \end{aligned} \quad (7.90)$$

Коефіцієнт опору c_D різний для океану і поверхні суші.

Для потоків кількості руху, тепла і вологи, що надходять у шар Екмана знизу, використовуються вирази

$$\begin{aligned} (F_m)_E &= -\rho k_v \frac{\partial v}{\partial z}, \\ (F_T)_E &= -c_p \rho k_v \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ (F_q)_E &= -L \rho k_v \frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned} \quad (7.91)$$

де $k_v = \ell^2 \frac{\partial v}{\partial z}$, ℓ - довжина шляху змішування.

7.6 Прогностична модель атмосфери Європейського центру середньострокових прогнозів погоди (ЄЦСПП)

Метеорологічні служби і наукові заклади крупних західноєвропейських країн (Великобританії, Франції, Німеччини та ін.) за допомогою урядів цих країн організували науково-оперативний центр для розв'язання однієї з

найбільш складних проблем сучасної метеорології - прогнозу погоди на середні (3-10 діб) строки.

На протязі більше 20 років наукові співробітники центру, розташованого у Великобританії, розробляли модель для прогнозу усіх основних метеорологічних величин по всій земній кулі або її частині на строки 3-10 діб. У такій моделі необхідно враховувати усі діючі фізичні фактори, у тому числі неадіабатичні процеси і процеси у граничному шарі. При цьому прогностична модель забезпечує розрахунок прогнозу на багатьох рівнях (які розташовані не тільки у тропосфері, але і у стратосфері) на досить густій сітці точок.

Для півсферної моделі була обрана сферична система по горизонтальних координатах і σ -система - по вертикалі.

Вертикальна структура моделі атмосфери зображена в таблиці 7.2, а чарунки сітки при аналізі та прогнозі - на рис.7.6.

Таблиця 7.2 - Розподіл метеорологічних величин по вертикалі у прогностичній моделі атмосфери ЄЦСПП на етапах аналізу та прогнозу.

Аналіз (u, v, q, Φ)		Прогноз (u, v, q, T)	
k	p , гПа	k	σ
1	10	1	0,025 (σ_1)
2	20	2	0,077
3	30	3	0,132
4	50	4	0,193
5	70	5	0,260
6	100	6	0,334
7	150	7	0,415
8	200	8	0,500
9	250	9	0,589
10	300	10	0,678
11	400	11	0,765
12	500	12	0,845
13	700	13	0,914
14	850	14	0,967
15	1000	15	0,996 (σ_{15})
		$15\frac{1}{2}$	1,000 ($\sigma_{s=1}$)

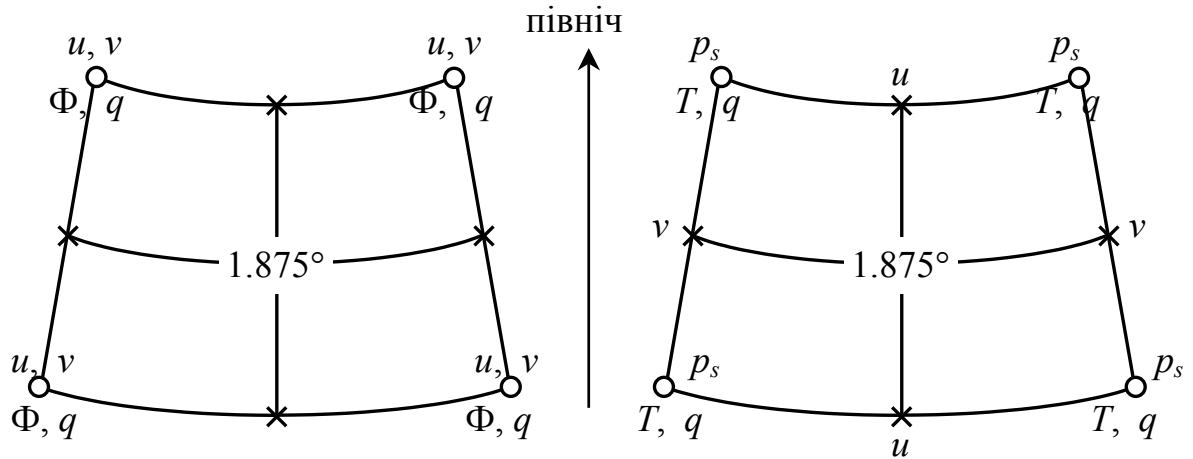


Рисунок 7.6 - Розташування величин у чарунці горизонтальної сітки при аналізі (а) і при прогнозі (б).

Прогностична модель ЄЦСПП включає чотиривимірне засвоєння даних через кожний 6-годинний період.

Час відтинання вихідних даних дорівнює 7 год. 15 хвил. Відповідно до процедури аналізу прогноз по моделі ЄЦСПП на 6 годин уперед використовується як перше наближення, так що черговий сеанс прогнозу на середні строки має базуватися на достатньо повних початкових даних, здобутих в результаті попередніх сеансів засвоєння.

Інтерполяція даних про швидкість вітру, про геопотенціал та вологість у вузлах сітки здійснюється за методом багатоелементного тривимірного чисельного аналізу для рівнів, зазначених у таблиці 7.2.

Окрім аналізу зазначених у таблиці величин, здійснюється чисельний аналіз температури поверхні океанів.

Для засвоєння даних використовуються такі види інформації: синоптична, повідомлення з буїв, аерологічна, повідомлення з літаків, супутникові температурні та вітрові вимірювання.

Рівняння моделі записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= A_u + B_u; & \frac{\partial v}{\partial t} &= A_v + B_v; & \frac{\partial T}{\partial t} &= A_T + B_T; \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= A_q + B_q; & \frac{\partial p_s}{\partial t} &= A_{ps}; & \frac{\partial \Phi}{\partial (\ln \sigma)} &= -RT. \end{aligned} \quad (7.92)$$

В (7.92) A_u, A_v, A_T, A_q - адвективні (з урахуванням вертикального переносу) члени у рівняннях для u, v, t, q ; A_{ps} - права частина передостаннього рівняння системи (7.92); B_u, B_v, B_T, B_q - відповідні неадіабатичні члени та члени, які враховують турбулентну в'язкість.

Інтегрування рівнянь за часом здійснюється методом центральних різниць. Запишемо будь-яке прогностичне рівняння для u , v , t або q таким чином:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_f + B_f, \quad (7.93)$$

де f - будь-яка функція.

Чисельний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$f_{s+1} = \bar{f}_{s-1} + 2\Delta t(A_f)_s + 2\Delta t(B_f)_{s-1}. \quad (7.94)$$

Для забезпечення стійкості розв'язання у виразі (7.94) неадіабатичні члени беруться на кроці $s-1$. З тією ж метою частина цих членів, які описують вертикальну турбулентність, обчислюється за допомогою неявної схеми.

У формулі (7.94) \bar{f} зображає величину f , модифіковану за допомогою часового фільтра:

$$\bar{f}_{s-1} = f_{s-1} + \alpha(f_{s-2} - 2f_{s-1} + f_s),$$

де $\alpha = 0.05$.

Для фільтрації з чисельного розв'язку у помірних областях дрібномасштабних збурень, які виникають внаслідок збіжності меридіанів і швидкого зменшення кроку сітки уздовж широти з наближенням до полюсів, використовується просторовий фільтр. Він забезпечує виключення короткохвильової частини спектра у прогностичних полях метеорологічних величин шляхом розкладання у ряд Фур'є за широтою, зрізання членів ряду та їх згортки.

У моделі достатньо повно враховуються неадіабатичні процеси.

Параметризація фізичних процесів.

В моделі враховується вертикальна турбулентність і горизонтальна турбулентна дифузія, суха і волога конвекція, радіація і хмарність, великомасштабна конденсація, процеси тепло- і вологообміну на земній поверхні (у тому числі тепловий і водний баланси на поверхні суші) і в атмосфері.

Параметризація турбулентних потоків у приземному шарі побудована на теорії подібності Моніна-Обухова, відповідно до якої профілі температури і швидкості вітру залежать лише від параметра $\beta = g/\theta$, висоти z і

масштабів зміни швидкості u^* і температури θ^* . Приземні потоки імпульсу τ і тепла H пов'язані з u^* і θ^* співвідношеннями

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}; \quad \theta^* = -\frac{H}{c_p \rho u^*}.$$

З величин u^* , θ^* і β можна скласти безрозмірний параметр $\zeta = z\theta^*/(u^*)^2$, так що вертикальні профілі вітру і температури мають бути представлені як функції тільки ζ . Для визначення цих функцій застосовуються емпіричні дані. У результаті одержуються такі розрахункові формули:

$$\begin{aligned} (u^*)^2 &= u_h^2 f_1\left(\frac{h}{z_0}, \mathbf{Ri}\right), \\ u^* \theta^* &= u_h (\theta_h - \theta_0) f_2\left(\frac{h}{z_0}, \mathbf{Ri}\right), \end{aligned} \tag{7.95}$$

де z_0 - параметр шорсткості; h - висота приземного шару, яка дорівнює висоті найнижчого рівня моделі, \mathbf{Ri} - число Річардсона:

$$\mathbf{Ri} = \beta \frac{h(\theta_h - \theta_0)}{u_h^2};$$

індекси h і 0 означають величини, які відносяться до рівнів h і z_0 . Функції f_1, f_2 при нейтральній стратифікації мають вигляд $f_1 = 1 - 10\mathbf{Ri}$, $f_2 = 1 - 15\mathbf{Ri}$; а для умов стійкої та нестійкої стратифікації описуються більш складними виразами.

Визначення потоку вологи q^* здійснюється аналогічно визначенню потоку тепла за співвідношенням

$$u^* q^* = u_h (q_h - q_0) f_2\left(\frac{h}{z_0}, \mathbf{Ri}\right). \tag{7.96}$$

Турбулентні потоки у граничному шарі обчислюються за допомогою коефіцієнтів турбулентності, які залежать від масштабу турбулентності (або шляху змішання). Відповідно до теорії коефіцієнт турбулентності k залежить від вертикальних градієнтів вітру та температури:

$$k = \tilde{\ell}^2 f \left(\left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right|, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (7.97)$$

де $\tilde{\ell}$ - довжина шляху змішання Прандтля; f - задана функція (f_1 або f_2);
 $\tilde{\ell} = \alpha z / (1 + \alpha z / \lambda)$; $\lambda = 160$ м; $\alpha = 0.4$.

Турбулентні потоки імпульсу τ , тепла H і вологи Q виражаються у такому вигляді:

$$\tau = \rho k \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}, \quad H = -\rho k \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad Q = -\rho k \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (7.98)$$

Вигляд функції f у формулі для k різний для стійкої і нестійкої стратифікації, а $\tilde{\ell}$ залежить тільки від висоти z і підбирається шляхом чисельних експериментів з параметром λ .

Горизонтальна турбулентна в'язкість забезпечує згладжування полів метеорологічних величин і виключення обчислювальних шумів із чисельного розв'язку. Відповідні члени у рівняннях (7.92), які описують горизонтальну в'язкість, виражаються у формі $\alpha \Delta f$, де α - константа, Δ - оператор Лапласа на площині, f - будь-яка змінна u , v , θ або q .

Суха та волога конвекція враховується шляхом розрахунку потоків тепла, вологи та імпульсу. Волога конвекція параметризується за схемою, в якій вона враховується всюди, де має місце конвергенція вологи (не тільки у приземних шарах атмосфери).

Великомасштабна конденсація вологи враховується через такі співвідношення:

$$\Delta T = \frac{L}{c_p} \Delta q, \quad \Delta q = q_H(T + \Delta T) - q(T), \quad (7.99)$$

де T і q - прогностичні значення температури і масової частки водяної пари без урахування конденсації, q_H - масова частка насиченої водяної пари.

Кількість вологи Δq , яка сконденсувалась, розраховується за формулою

$$\Delta q = \frac{L}{c_p} \frac{q - q_H(T)}{1 + \frac{L^2 q_H(T)}{c_p R_{\Pi} T^2}}, \quad (7.100)$$

де L - прихована теплота конденсації (сублімації), $R_{\text{п}}$ - газова стала водяної пари.

Кількість опадів визначається таким чином:

$$W = \frac{1}{g_0} \int_0^{\sigma} (\Delta q - \Delta \ell) p_s d\sigma'. \quad (7.101)$$

Тут $\Delta \ell$ - випарювання опадів, яке визначається за допомогою формули

$$\Delta \ell = k_1 [q_{\text{н}}(T) - q] (b_1 \sqrt{\sigma})^{c_1},$$

де k_1 , b_1 і c_1 - константи.

Радіаційні припливи тепла параметризуються шляхом розрахунку потоків короткохвильової і довгохвильової радіації. Радіаційні процеси параметризуються у моделі з виділенням тих ефектів, що найбільш сильно впливають на прогноз погоди на малі строки. Хмарно-аерозольні ефекти вважаються більш значними в порівнянні з поглинанням радіації газами. З метою врахування добового ходу радіаційні потоки розраховуються у моделі кожні три або чотири години.

Потоки короткохвильової (сонячної) радіації обчислюються для двох спектральних інтервалів, а потоки довгохвильової (земної) радіації - для трьох інтервалів. У кожному з інтервалів спектра виділяються додаткові підінтервали, у яких здійснюється розрахунок потоків з використанням відповідної функції пропускання.

При розрахунку радіаційних потоків у моделі ЄЦСПП потрібні не тільки астрономічні параметри, але необхідна інформація щодо розподілу температури, вологості, кількості хмар, аерозолу, озону, вуглекислого газу і альbedo земної поверхні. Температура і вологість безпосередньо прогноуються у моделі, а решта перелічених параметрів задається за кліматичними даними.

Відзначимо, що скінченнорізницева апроксимація диференціальних рівнянь у розглянутій моделі близька до тієї, яка використовується у моделі НМЦ США. Кроки сітки у сферичній системі координат дорівнюють $\Delta \varphi = \Delta \lambda = 1.875^\circ$. Розташування обчислюваних величин у чарунках сітки зображено на рис.7.6.

У скінченнорізницевому варіанті модель реалізується для прогнозу на короткі строки (до 3 діб) на обмеженій території, а в деяких випадках - по півкулі. На більш довгі строки прогностична задача розв'язується спектральними методами, які в цьому навчальному посібнику не розглядаються.

ДОДАТОК А ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Розділ 1:

1. Поясніть фізичне значення складових рівняння вихору швидкості вітру.
2. Чим відрізняється нефільтроване рівняння вихору швидкості від фільтрованого?
3. Якій величині пропорційний геострофічний вихор швидкості вітру?
4. Що означають терміни “геострофічне” та “адіабатичне” наближення?
5. Наведіть випадки синоптичних ситуацій, для яких $A_{\Omega} < 0$.
6. Перелічіть основні властивості функції впливу для динамічного та термічного факторів в розв’язку Булеєва-Марчука?
7. Який вигляд має точний розв’язок прогностичного рівняння для баротропної моделі?

Розділ 2:

1. Чим відрізняється апроксимація частинних похідних центральними та спрямованими різницями? Яка з них точніша?
2. Як залежить похибка скінченнорізницевої апроксимації від довжини хвилі і кроку сітки?
3. В чому сенс ітераційних методів розв’язання прогностичних рівнянь?
4. Чим відрізняються методи Річардсона і Лібмана?
5. Що визначає критерій КФЛ?
6. Запишіть у скінченнорізницевому вигляді другі похідні $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, а також Δf .

Розділ 3:

1. Як оцінити точність скінченнорізницевої апроксимації похідних? Наведіть приклади.
2. Що представляє собою скінченнорізницева схема диференціального рівняння?
3. Дайте визначення точності чисельного розв’язку.
4. Як визначити точність апроксимації диференціального рівняння скінченнорізницевим аналогом?
5. Яка скінченнорізницева схема називається узгодженою?

6. Яку постановку задачі можна назвати коректною?
7. Що розуміється під збіжністю чисельного розв'язку?

Розділ 4:

1. Яку розмірність має адвекція відносного вихору A_{Ω} ?
2. Чи можна розрахувати геострофічну адвекцію температури тільки за даними H ?
3. Який порядок мають адвекції вихору і температури?
4. Що означають терміни “динамічний фактор”, “термічний фактор”?
5. Який знак має лапласіан тиску в циклоні, улоговині, антициклоні та гребені?
6. Які дані необхідні для розрахунку геострофічної адвекції вихору швидкості вітру?

Розділ 5:

1. Чим відрізняються явні, неявні і півнеявні скінченнорізницеві схеми похідних за часом?
2. Наведіть приклади дворівневих та тривірневих схем першого і другого порядку точності по Δt .
3. В чому є сенс методу кроків за часом?
4. Поясніть схему Лакса-Вендрофа.
5. Поясніть роботу циклу Мацуно.
6. Запишіть рівняння горизонтального руху у півнеявному вигляді.
7. Що розуміється під терміном “часовий шар” або “часовий рівень”?

Розділ 6:

1. Дайте визначення стійкості скінченнорізницевих схем.
2. Поясніть суть методу Неймана.
3. Наведіть приклади стійких і нестійких скінченнорізницевих схем.
4. Доведіть, що явна схема Ейлера є нестійкою на прикладі рівняння адвекції.
5. Що таке нелінійна обчислювальна нестійкість і що є її причиною?
6. Яким чином можна позбутися нелінійної обчислювальної нестійкості?

Розділ 7:

1. Що таке розхитані сітки і яка мета їх використання при апроксимації похідних?
2. Наведіть послідовність розрахунків на кожному кроці за часом в адіабатичному наближенні моделі Російського Гідрометцентру.

3. Яка система координат використовується в моделі НМЦ США?
4. Як розраховуються турбулентні члени в рівняннях моделі НМЦ США?
5. Наведіть різницеві оператори згладження і диференціювання, які використовуються для апроксимації рівнянь в моделі метеорологічної служби Великобританії.
6. Як враховується великомасштабна конденсація вологи в моделі ЄЦСПП?

ДОДАТОК Б ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1.

Побудувати чисельний розв'язок рівняння адвекції з використанням схеми (3.40) для точки з координатами: $\Delta x = 500$ м, $\Delta t = 40$ с. Точний розв'язок рівняння адвекції має вигляд: $x - ct = x_0$, де $x_0 = 100$ м. Вважаємо $c = 10$ м с⁻¹. Оцінити збіжність чисельного розв'язку, якщо $\Delta x = 100$ м, $\Delta t = 10$ с.

Завдання 2.

Для рівнянь руху

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - lv &= F_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= F_v\end{aligned}$$

а) розписати скінченнорізницеві аналоги за допомогою схем: Ейлера, центральних різниць і Адамса-Бешфорта; вказати точність подавання часових та просторових похідних;

б) знайти u^{s+1} , v^{s+1} , використовуючи схему трапецій.

Враховувати як відомі задані функції F_u і F_v .

Завдання 3.

Для рівняння вихору

$$\frac{\partial(\Omega_p + l)}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega_p + l)}{\partial x} = 0 \quad (\bar{u} = \text{const} > 0)$$

отримати розв'язок за схемою Лакса-Вендрофа та схемою зі спрямованими різницями “проти потоку”.

Доказати переваги схеми “проти потоку”.

Завдання 4.

Дати зразок явної та неявної схем для лінійного одновимірного рівняння адвекції відносного вихору

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + c \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

де $c = \text{const}$.

Вивести умову стійкості розв'язків скінченнорізницевих рівнянь для різних співвідношень кроків за часом і горизонтальної координати для випадків однобічних і центральних різниць за часом.

Для цього подати функцію Ω у вигляді

$$\Omega_{js} = A \cdot e^{i(nj\delta y - \sigma s \delta t)},$$

де $j = \frac{y}{\delta y}$, $s = \frac{t}{\delta t}$ - безрозмірні координати,

n - проекція хвильового вектора на вісь y ,

$\sigma = nc$ - циклічна частота.

Завдання 5.

Розглянемо розв'язання баротропного рівняння вихору (2.8), яке в скінченнорізницевому вигляді можна записати таким чином:

$$\frac{1}{d^2} (q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} + q_{i+1,j} - 4q_{i,j}) = (A_\Omega)_{ij}$$

або

$$q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} + q_{i+1,j} - 4q_{i,j} = F_{ij}, \quad (\text{Б.1})$$

де

$$q \equiv \frac{\partial H}{\partial t}, \quad F_{i,j} \equiv d^2 (A_\Omega)_{i,j}$$

Із рівняння (Б.1)

$$q_{i,j} = \frac{1}{2} (q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} + q_{i+1,j} - 4q_{i,j} - F_{i,j}). \quad (\text{Б.2})$$

Для спрощення задачі будемо вважати, що права частина $F_{i,j}$ відома. Нагадаємо, що її можна обчислити з відомого поля геопотенціалу у вузлах сіткової області. Також припустимо, що на межах області розрахунку тенденція $q|_M$ геопотенціалу – відома функція.

Сформулюємо задачу.

1. Використовуючи метод Річардсона (тобто ітераційний метод) роз-

рахувати у внутрішніх вузлах сітки ($i, j = 2, 3, 4, 5$) тенденцію геопотенціалу q_{ij} за значеннями її на межах (табл.Б.1) і величинами правої частини рівняння (Б.1) відповідно до табл.Б.3. Розрахунки виконати на трьох ітераціях (наближеннях). На нульовому наближенні вважати, що q_{ij} дорівнює нулю, тоді на першому наближенні:

$$q_{i,j}^{(1)} = -\frac{1}{4} F_{i,j}. \quad (\text{Б.3})$$

На кожному наближенні значення $q_{i,j}^{(v)}$, де $v = 1,2,3$, порівняти з точними величинами $q_{i,j}$, які надані в табл.Б.2.

2. Обчислити поле тенденції q методом Лібмана, використовуючи ті ж самі значення F_{ij} та q_{ij} . Оцінити швидкість збіжності, порівнюючи результати двох методів.

Вказівки до виконання.

Для того, щоб одержати значення q_{ij} на першому наближенні необхідно скористуватися даними табл.Б.3. Відповідно до формули (Б.3)

$$\begin{aligned} q_{2,2}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(-0.036) = 0.009; \\ q_{3,2}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(0.201) = -0.050; \\ &\dots\dots\dots \\ q_{5,2}^{(1)} &= -\frac{1}{4}(-0.596) = 0.149. \end{aligned}$$

Для розрахунку q_{ij} на другій ітерації використовуються межові умови (табл.Б.1) і значення $q_{i,j}^{(1)}$ ($i, j = 2, 3, 4, 5$).

$$\begin{aligned} q_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{4} [q_{2,3}^{(1)} + q_{3,2}^{(1)} + (-0.304) + (-0.225) - (-0.036)]; \\ q_{3,2}^{(2)} &= \frac{1}{4} [q_{4,2}^{(1)} + q_{3,3}^{(1)} + q_{2,2}^{(1)} + (-0.302) - 0.201]; \\ &\dots\dots\dots \\ q_{5,5}^{(2)} &= \frac{1}{4} [0.422 + (-0.290) + q_{4,5}^{(1)} + q_{5,4}^{(1)} - (-0.596)]. \end{aligned}$$

Аналогічно, розрахунок на третій ітерації виконується за відомими значеннями $q_{i,j}^{(2)}$ у внутрішніх вузлах та $q|_M$.

Таблиця Б.1 – Значення тенденцій геопотенціалу $q|_M$, гп.дам год⁻¹, на межах обчислювальної області.

j	i					
	1	2	3	4	5	6
1	-0.220	-0.225	-0.302	-0.210	-0.012	-0.014
2	-0.304					-0.017
3	-0.203					-0.092
4	-0.142					0.133
5	-0.031					0.422
6	-0.401	-0.051	-0.012	-0.020	-0.290	0.402

Таблиця Б.2 – Точні значення тенденцій геопотенціалу q , гп.дам год⁻¹.

j	i					
	1	2	3	4	5	6
1						
2		-0.282	-0.369	-0.270	-0.017	
3		-0.271	-0.426	-0.392	-0.128	
4		-0.182	-0.270	-0.269	0.047	
5		-0.049	-0.030	-0.025	0.188	
6						

Таблиця Б.3 – Значення правої частини прогностичного рівняння F , гп.дам год⁻¹.

j	i					
	1	2	3	4	5	6
1						
2		-0.036	0.201	0.099	-0.355	
3		-0.001	0.409	0.485	0.061	
4		0.002	0.183	0.444	-0.275	
5		-0.094	-0.233	-0.022	-0.596	
6						

Завдання 6.

Розрахувати майбутні значення метеорологічних величин на одному часовому кроці в одній точці-хресту (див. рис.7.3).

Розрахунки виконати відповідно до алгоритму, розробленому в моделі Російського Гідрометцентру.

При розв'язанні задачі прийняти $d = 300$ км; $\delta t = 10$ хвилин; $\varphi_{ij} = 60^\circ$.

Вказівки до виконання.

Запишемо рівняння руху у вигляді

$$\begin{aligned}u_t - l\bar{v} &= -F_u, \\v_t + l\bar{u} &= -F_v\end{aligned}\tag{Б.4}$$

або в скінченнорізницевій формі

$$\begin{aligned}\frac{u_{s+1} - u_s}{\delta t} - l \frac{v_{s+1} + v_s}{2} &= -F_{us}, \\ \frac{v_{s+1} - v_s}{\delta t} + l \frac{u_{s+1} + u_s}{2} &= -F_{vs}.\end{aligned}\tag{Б.5}$$

З рівнянь (Б.5) знайдемо

$$\begin{aligned}u_{s+1} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{l\delta t}{2}\right)^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{l\delta t}{2}\right)^2 \right] u_s + l\delta t v_s - \delta t F_{us} - \frac{l(\delta t)^2}{2} F_{vs} \right\}, \\ v_{s+1} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{l\delta t}{2}\right)^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{l\delta t}{2}\right)^2 \right] v_s - l\delta t u_s + \delta t F_{us} - \frac{l(\delta t)^2}{2} F_{vs} \right\}.\end{aligned}\tag{Б.6}$$

Будемо виконувати розрахунки в одній точці другої сітки за даними у вузлах першої (кружки). Візьмемо область розрахунків розміром 3×3 і 2×2 вузлів (рис.7.3).

Отже, у вузлах другої сітки (хресту) необхідно знайти майбутні значення метеорологічних величин (на одному часовому кроці, тобто треба здобути u_{s+1} , v_{s+1} , Φ_{s+1} , T_{s+1}). Для розв'язання рівнянь відносно u_{s+1} і v_{s+1} тре-

ба знайти функції F_{us} і F_{vs} . Випишемо для них вирази:

$$F_u = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right),$$

$$F_v = \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right).$$

Запишемо рівняння для F_u і F_v в більш компактній формі:

$$F_u = \left(u \ u_x + v \ u_y + \tau u_p + \Phi_x \right),$$

$$F_v = \left(u \ v_x + v \ v_y + \tau v_p + \Phi_y \right).$$

З врахуванням картографічної проекції, тобто масштабного множника “ m ”, рівняння набудуть вигляду:

$$F_{us} = \left[m \left(u_s \ u_{xs} + v_s \ u_{ys} \right) + \frac{1}{2} \left(u_s^2 + v_s^2 \right) m_x^2 + \tau_s u_{ps} + \Phi_{xs} \right],$$

$$F_{vs} = \left[m \left(u_s \ v_{xs} + v_s \ v_{ys} \right) + \frac{1}{2} \left(u_s^2 + v_s^2 \right) m_y^2 + \tau_s v_{ps} + \Phi_{ys} \right].$$
(Б.7)

З виписаних рівнянь (Б.7) і рис.7.3 видно, що початкові умови треба задати у вигляді полів для u , v , T і Φ у вузлах-кружках. Для розрахунку F_{us} і F_{vs} необхідно обчислити τ - ізобаричну вертикальну швидкість. Ця величина може бути розрахована у вузлах другої сітки за значеннями u_s і v_s .

Таким чином, для розрахунку майбутніх значень метеорологічних величин необхідно виконати такі операції:

1. За значеннями u_s і v_s на основних ізобаричних поверхнях у вузлах сітки (хрестики) знаходимо значення τ_s з рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} = -D_s.$$
(Б.8)

Після інтегрування рівняння (Б.8) маємо

$$\tau_{p'} = \tau_p - \int_p^{p'} D_s dp.$$

Інтегрування виконується зверху вниз, оскільки на верхній межі атмосфери можна поставити більш коректну крайову умову відносно τ_p .

З використанням безрозмірних координат можна записати

$$\tau_k = \tau_{k-1} - m^2 \bar{D}^k \delta p_k,$$

де $\bar{D}^k = 0.5(D_k + D_{k-1})$,

$$D_k = \left(\begin{matrix} \bar{u}_x & \bar{v}_y \\ \bar{u}_y & \bar{v}_x \end{matrix} \right)_k,$$

$$\delta p_k = p_k - p_{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (n - \text{кількість прогностичних рівнів}).$$

Верхні межові умови задаються на рівні $k = 0$.

Значення $D_{k=0}$ невідомо, тому на верхньому обчислювальному рівні ставиться додаткова умова:

$$D_{k=0} = D_{k=1}.$$

З врахуванням того, що при $p = 0$ $\tau_{k=0} = 0$, одержимо

$$\tau_k = - \sum_{k'=1}^{k'} d_{k,k'} D_{k'}, \quad (\text{Б.9})$$

де $d_{k,k'}$ - коефіцієнти, що залежать від товщини шарів δp_k на інтервалі від $k = 0$ до k' .

Відповідно до рівняння (Б.9) формули для розрахунку τ на основних ізобаричних поверхнях набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \tau_{k=1} &\equiv \tau_{300} = -m^2 D_{300} \cdot 300; \\ \tau_{k=2} &\equiv \tau_{500} = \tau_{300} - m^2 \frac{D_{300} + D_{500}}{2} \cdot 200; \\ \tau_{k=3} &\equiv \tau_{850} = \tau_{500} - m^2 \frac{D_{500} + D_{850}}{2} \cdot 350; \\ \tau_{k=4} &\equiv \tau_{1000} = \tau_{850} - m^2 \frac{D_{850} + D_{1000}}{2} \cdot 150. \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

З врахуванням просторових безрозмірних координат та координати за часом рівняння (Б.10) набирають вигляду:

$$\begin{aligned}
\tau_{i,j,1,s} &= -m_j^2 D_{i,j,1,s} \cdot 300; \\
\tau_{i,j,2,s} &= \tau_{i,j,1,s} - m_j^2 \frac{D_{i,j,1,s} + D_{i,j,2,s}}{2} \cdot 200; \\
\tau_{i,j,3,s} &= \tau_{i,j,2,s} - m_j^2 \frac{D_{i,j,2,s} + D_{i,j,3,s}}{2} \cdot 350; \\
\tau_{i,j,4,s} &= \tau_{i,j,3,s} - m_j^2 \frac{D_{i,j,3,s} + D_{i,j,4,s}}{2} \cdot 150.
\end{aligned} \tag{Б.11}$$

Розмірність $[\tau] = \text{гПа с}^{-1}$; $m_j = 1.8659/(1 + \sin\varphi_j)$.

В рівняннях (Б.11) дивергенція на деякій поверхні розраховується за формулою

$$\begin{aligned}
D_{i,j,s} &= \left(\overset{-y}{u}_x + \overset{-x}{v}_y \right) = \frac{1}{4\delta x} \left(u_{i+1,j+1,s} - u_{i-1,j+1,s} + u_{i+1,j-1,s} - u_{i-1,j-1,s} \right) + \\
&+ \frac{1}{4\delta y} \left(v_{i+1,j+1,s} - v_{i+1,j-1,s} + v_{i-1,j+1,s} - v_{i-1,j-1,s} \right).
\end{aligned}$$

2. За значеннями u_s і v_s і здобутими значеннями аналога вертикальної швидкості τ_s обчислюються функції F_u і F_v відповідно до формул (Б.7). Для цього зручно обчислити у точці i, j окремо похідні, середні і суми на усіх рівнях k , а потім за цими значеннями розрахувати додатки прогностичних рівнянь. Вирази для середніх u і u^2 мають вигляд:

$$\overset{-xy}{u}_{i,j,s} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j+1,s} + u_{i-1,j+1,s} + u_{i-1,j-1,s} + u_{i+1,j-1,s} \right).$$

Аналогічно розраховується $\overset{-xy}{v}_{i,j,s}$.

$$\overline{\overset{-xy}{u^2}}_{i,j,s} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j+1,s}^2 + u_{i-1,j+1,s}^2 + u_{i-1,j-1,s}^2 + u_{i+1,j-1,s}^2 \right).$$

Формули для розрахунку похідних по x, y з осередненням виписані вище. Член вигляду $\overset{-xy}{\tau u}_p$ розраховується за формулою:

$$\begin{aligned}
\left(\overset{-xy}{\tau u}_p \right)_{i,j,k,s} &= \tau_{i,j,k,s} \frac{1}{4\delta p} \left[\left(u_{i+1,j+1,k+1}^s + u_{i-1,j+1,k+1}^s + u_{i-1,j-1,k+1}^s + u_{i+1,j-1,k+1}^s \right) - \right. \\
&\left. - \left(u_{i+1,j+1,k}^s + u_{i-1,j+1,k}^s + u_{i-1,j-1,k}^s + u_{i+1,j-1,k}^s \right) \right].
\end{aligned}$$

Можливо, є сенс розрахувати u_p^{-xy} на всіх рівнях, а потім знаходити добутки. В останньому виразі $\delta p = p_{k+1} - p_{k-1}$ (центральні різниці) або $\delta p = p_{k+1} - p_k$ - для методу однобічних різниць.

3. За допомогою рівняння припливу тепла за значеннями u_s, v_s, τ_s і T_s визначаємо майбутнє значення T_{s+1} .

4. Ґрунтуючись на рівнянні статички і нижній межовій умові, розраховуються майбутні значення Φ_{s+1} у вузлах другої сітки точок. Для апроксимації похідних за часом використовується явна схема центральних різниць (на першому кроці застосовується однобічна різниця).

Запишемо рівняння статички відносно похідної $\partial\Phi/\partial p$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{R}{p}T. \quad (\text{Б.12})$$

Проінтегруємо (Б.12) по вертикальній координаті від ізобаричної поверхні $p_0 = 1000$ гПа до рівня з тиском P .

$$\int_{p_0}^P \frac{\partial\Phi}{\partial p} dp = -\int_{p_0}^P \frac{R}{p} T dp.$$

Внаслідок інтегрування маємо

$$\Phi_P - \Phi_{p_0} = R \int_{p_0}^P \frac{T}{p} dp.$$

Оскільки функція T/p не задана аналітично, інтеграл береться чисельно (наприклад, методом трапецій). У такому разі

$$\Phi_P = \Phi_{p_0} + \frac{R}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{T_k}{p_k} + \frac{T_{k-1}}{p_{k-1}} \right) (p_k - p_{k-1}). \quad (\text{Б.13})$$

Розпишемо формули для розрахунку значень геопотенціалу у майбутній момент часу для основних ізобаричних поверхонь (850, 500 і 300 гПа).

Геопотенціал ізобаричної поверхні 1000 гПа визначається з рівняння для нижньої межової умови

$$\text{при } p = 1000 \text{ гПа} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) = 0. \quad (\text{Б.14})$$

У скінченнорізницевому вигляді рівняння (Б.14) запишеться таким чином

$$\frac{\Phi_{i,j,0,s+1} - \Phi_{i,j,0,s}}{\delta t} = m_j^2 \left[u^{-xy} \left(\frac{\Phi_{i+1,j,0,s} - \Phi_{i-1,j,0,s}}{2d} \right) + v^{-xy} \left(\frac{\Phi_{i,j+1,0,s} - \Phi_{i,j-1,0,s}}{2d} \right) \right],$$

звідки

$$\Phi_{i,j,0,s+1} = \Phi_{i,j,0,s} + \frac{m_j^2 \delta t}{2d} \left[u^{-xy} (\Phi_{i+1,j,0,s} - \Phi_{i-1,j,0,s}) + v^{-xy} (\Phi_{i,j+1,0,s} - \Phi_{i,j-1,0,s}) \right]. \quad (\text{Б.15})$$

В рівнянні (Б.15) d - крок сітки, а $\Phi_{i,j,0,s+1}$ - геопотенціал ізобаричної поверхні $p_0 = 1000$ гПа у вузлі з координатами i, j в майбутній момент часу.

Якщо тепер підставити $\Phi_{i,j,0,s+1}$ у формулу (Б.13), можна одержати майбутнє значення Φ для інших ізобаричних поверхонь.

Запишемо розрахункові формули по аналогії з (Б.10) у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi_{850}^{s+1} &= \Phi_{1000}^{s+1} + \frac{R}{2} \left(\frac{T_{1000}^{s+1}}{1000} + \frac{T_{850}^{s+1}}{850} \right) \cdot 150; \\ \Phi_{500}^{s+1} &= \Phi_{850}^{s+1} + \frac{R}{2} \left(\frac{T_{500}^{s+1}}{500} + \frac{T_{850}^{s+1}}{850} \right) \cdot 350; \\ \Phi_{300}^{s+1} &= \Phi_{500}^{s+1} + \frac{R}{2} \left(\frac{T_{500}^{s+1}}{500} + \frac{T_{300}^{s+1}}{300} \right) \cdot 200. \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Значення геопотенціалу і температури у формулах (Б.16) належать до розрахункового вузла (у нашому випадку - до точки i, j).

Таким чином, внаслідок реалізації розписаного алгоритму одержимо майбутні значення u^{s+1} , v^{s+1} , T^{s+1} , Φ^{s+1} у точці-хрестикі на основних ізобаричних поверхнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Белов П.Н. и др. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 392 с.
2. Белов П.Н., Борисенко Е.Г., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 376 с.
3. Гандин Л.С., Дубов А.С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 427 с.
4. Лутфулин И.З. Новые методы предвычисления метеорологических полей. – Л.: Гидрометеиздат, 1966. – 196 с.
5. Белоусов С.Л. Многоуровневые квазигеострофические модели бароклинной атмосферы: Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1969. с. 294-307.
6. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях: Пер. с англ. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 134 с.
7. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1977. – 435 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
9. Рихтмайер Р.Д., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
10. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Физматгиздат, 1962. – 340 с.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматиздат, 1958. – 465 с.
12. Беркович Л.В. Глобальная прогностическая модель атмосферы // Метеорология и гидрология. – 1985. – №3. – С. 18-25.
13. Беркович Л.В., Ткачева Ю.В. Неадиабатическая полушарная модель атмосферы для прогноза метеорологических элементов на несколько суток // Труды Гидрометцентра СССР. – 1982. – Вып. 242. – С. 3-20
14. Беркович Л.В., Ткачева Ю.В. Развитие неадиабатической полушарной прогностической модели атмосферы // Труды Гидрометцентра СССР. – 1985. – Вып. 277. – С. 3-30.
15. Беркович Л.В., Белоусов С.Л., Ткачева Ю.В. Краткосрочный гидродинамический прогноз метеорологических величин в пунктах на территории России и прилегающих стран // Метеорология и гидрология. – 1998. – №4. – С. 18-34.
16. Беркович Л.В., Тарнопольский А.Г., Шнайдман В.А., Гидродинамическая модель атмосферного и океанического пограничных слоев // Метеорология и гидрология. – 1997. – №7. – С. 40-52.