

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Г.В. ХОМЕНКО, В.М. БОНДАРЕНКО**

**ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В АТМОСФЕРІ**

(конспект лекцій)

Одеса  
2011

**ББК 26.23**

**УДК 551.509**

**X76**

*Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету  
(протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_ . \_\_\_\_ .20 \_\_\_\_ р.).*

**Хоменко Г.В., Бондаренко В.М.**

Хвильові процеси в атмосфері: Конспект лекцій. –Одеса: ОДЕКУ  
2011. – 141с.

В конспекті лекцій розглядаються лінійні моделі вільних коливань в атмосфері; наводяться відомості про метеорологічну значущість різних типів хвиль і способи їх фільтрації; пояснюються фізичні механізми їх виникнення та розповсюдження.

Найбільш детально розглядаються хвилі Россбі, які обумовлюють погодні умови над великими територіями.

Конспект лекцій розрахований на студентів бакалаврського та магістерського рівнів підготовки метеорологічного напрямку.

Одеський державний  
екологічний університет, 2011

## Зміст

Вступ.....	4
1 Хвильові рухи в атмосфері.....	6
1.1 Приклади виникнення хвильових рухів.....	6
1.2 Параметри хвильових рухів та їх зв'язок.....	11
2 Система рівнянь гідротермодинаміки.....	17
2.1 Сили, які діють в атмосфері.....	17
2.2 Рівняння руху.....	24
2.3 Рівняння припливу тепла і нерозривності.....	27
3 Класифікація хвильових рухів атмосфері.....	34
4 Приведення системи рівнянь гідротермодинаміки до лінійного вигляду.....	42
4.1 Метод малих збурень та його обґрунтування.....	42
4.2 Лінійна система рівнянь гідротермодинаміки.....	45
4.2.1 Лінеаризація рівнянь руху.....	45
4.2.2 Лінеаризація рівнянь нерозривності і припливу тепла.....	50
4.3 Обмеження методу малих збурень.....	52
5 Лінійна модель одновимірних акустичних хвиль.....	54
5.1 Постановка задачі і вихідна система рівнянь.....	54
5.2 Лінійна система рівнянь.....	57
5.3 Розв'язання хвильового рівняння.....	59
5.4 Фізичний механізм поширення акустичних хвиль.....	62
6 Лінійна модель одновимірних гравітаційних хвиль на поверхні розділу.....	65
6.1 Постановка задачі і вихідні рівняння.....	65
6.2 Лінійна система рівнянь та її розв'язання.....	70
6.3 Фізичний механізм розповсюдження гравітаційних хвиль.....	75
7 Лінійні моделі хвиль Россбі.....	78
7.1 Модель одновимірних хвиль Россбі.....	78
7.1.1 Основні обмеження і вихідна система рівнянь.....	78
7.1.2 Лінеаризація рівняння вихору.....	81
7.1.3 Розв'язання лінійного рівняння вихору.....	82
7.1.4 Фізичний механізм розповсюдження хвиль Россбі.....	86
7.2 Двовимірні хвилі Россбі.....	88
7.3 Двовимірні хвилі Россбі у в'язкому середовищі.....	92
8 Багатомасштабність атмосферних хвильових рухів та їх метеорологічна значущість.....	98

## Вступ

Проблема вивчення хвильових процесів в атмосфері є досить складною, тому що ці процеси описуються нелінійними рівняннями гідротермодинаміки, які можна розв'язувати тільки наближеними чисельними методами. Крім того хвильові рухи мають широкий спектр масштабів і тому існує багато математичних підходів до їх вивчення.

Відомо, що будь який складний атмосферний рух можна розглядати як суму накладених одна на одну хвиль різної довжини, амплітуди та швидкості. В реальній атмосфері всі хвилі існують одночасно, хоча мають різну природу виникнення і неоднаково впливають на атмосферні процеси. З точки зору прогнозу погоди в першу чергу заслуговують дослідження атмосферні хвилі, які впливають на погодні умови над великими територіями. Але поряд з цим потребують вивчення і інші типи хвиль, які мало або зовсім не впливають на формування погоди, проте дуже ускладнюють постановку задач про хвилі та їх розв'язання.

Для того, щоб мати уяву про властивості того чи іншого типу хвиль, доцільно кожний тип вивчати окремо від інших. Це потребує виключення якихось типів хвиль із системи рівнянь гідротермодинаміки шляхом прийняття певних умов або обмежень.

Відомо, що повна система рівнянь описує атмосферні рухи усіх масштабів, які існують в атмосфері Землі: від рухів планетарного масштабу до рухів, які пов'язані з диханням рослин, тобто мікромасштабних рухів. Крім того, як відмічалось вище, система ця складається із нелінійних рівнянь, які можна розв'язувати тільки наближеними чисельними методами. Проте вивчення властивостей хвиль зручніше виконувати за допомогою точних або аналітичних розв'язків, які мають тільки лінійні рівняння. Тому в даному конспекті лекцій, як і в підручнику А. Ф. Ківганова «Хвильові процеси в атмосфері» (2001 р.) викладається лінійна теорія хвиль, в основу якої покладено метод малих збурень. Досвід викладання цієї дисципліни протягом декількох років показав, що деякі питання (постановка задачі для окремих типів хвиль, вивід та розв'язання хвильових рівнянь) в підручнику розглядаються досить складно для самостійного вивчення, тому основна увага в конспекті приділяється саме цим питанням, хоча більш розвинуто викладаються також питання, щодо прикладів виникнення хвильових рухів, їх класифікації та метеорологічної значущості.

Отже, в конспекті розглядаються вільні коливання, які в атмосфері існують у вигляді акустичних, гравітаційних хвиль та довгих хвиль Россбі. При викладенні матеріалу приділяється значна увага питанням лінеаризації системи рівнянь гідротермодинаміки, розглядаються математичні та фізичні обмеження лінійної теорії хвиль. Для кожного типу хвиль в конспекті відведені окремі розділи (5, 7, 6), де з фізичної точки зору

аналізуються умови, які дозволяють виділити один якийсь тип хвиль і розглядати його в „чистому” вигляді; формулюється система рівнянь для розв’язання задачі про ці хвилі; з використанням методу малих збурень система рівнянь приводиться до лінійного вигляду і за допомогою послідовних викладок отримується хвильове рівняння та його аналітичний розв’язок.

Акустичні та гравітаційні хвилі досліджуються за допомогою лише одновимірних моделей. Досить детально розглядаються довгі хвилі Россбі, які в значній мірі обумовлюють погодуутворювальні процеси над великими територіями. Для цих хвиль розглядаються одновимірні, двовимірні моделі, а також модель, в якій урахуються сили тертя. Незважаючи на порівняльну простоту, ці моделі досить добре описують атмосферні процеси, що відбуваються в реальній атмосфері.

На закінчення кожного розділу пояснюється фізичний механізм виникнення та розповсюдження хвиль розглянутого типу і обговорюються питання, щодо їх метеорологічної значущості та способів фільтрації.

Детальне викладення найбільш важливих питань з даної дисципліни допоможе студентам глибше зрозуміти суть математичного опису хвильових рухів, причини їх виникнення і ступінь впливу на погодні умови. Тому даний конспект буде корисним для самостійної роботи студентів при підготовці до поточного та підсумкового контролю знань, а також при виконанні завдань з практичних занять.

## 1. Хвильові рухи в атмосфері.

Хвилі в атмосфері можуть виникати, з одного боку, внаслідок дії зовнішніх сил, які змінюються періодично, а з другого боку, вони можуть являти собою результат еволюції невеликих збурень, які накладаються на визначений вихідний стан.

Перший тип хвиль виникає, наприклад, в результаті сил притягання Місяця та інших планет, тому ці хвилі називаються припливними. Другий тип формується при порушенні рівноваги діючих сил (наприклад, сили баричного градієнта і сил тяжіння або Коріоліса), тобто хвильові збурення виникають в тих шарах атмосфери, де частинки повітря під дією миттєвої сили виводяться із стану спокою і починають спонтанно коливатися біля стану рівноваги або біля деякого стану атмосфери, який розглядається як основний. Хвильові рухи такого типу називаються власними або вільними на відміну від першого типу хвиль, які називаються вимушеними.

### 1.1 Приклади виникнення хвильових рухів.

Як сказано вище, вільні коливання можуть виникнути при порушенні рівноваги сил баричного градієнта і тяжіння. Такі коливання виникають часто в стійко стратифікованих шарах атмосфери, зокрема, в інверсійних шарах. Розглянемо фізичні механізми виникнення таких хвиль.

Будемо вважати, що деякий шар атмосфери стратифікований стійко, тобто вертикальний градієнт температури  $\gamma$  менший за сухоадіабатичний градієнт  $\gamma_a$ . Нехай частинка повітря, яка знаходиться в стані рівноваги на рівні  $z_0$ , виводиться із цього стану деякою миттєвою силою і набуває, наприклад, додатну вертикальну швидкість ( $w > 0$ ). Розглянемо зміни властивостей цієї частинки, тобто таких її характеристик, як густина  $\rho$ , вертикальна швидкість  $w$ , вертикальне прискорення  $\frac{dw}{dt}$ , а також вертикальна координата  $z(t)$ .

Будемо вважати, що в початковий момент часу густина частинки  $\rho_i$  дорівнює густині навколишнього середовища  $\rho_e$ , тобто на рівні  $z_0$   $\rho_i = \rho_e$ , а діючи на частинку сили (вертикальна складова сили баричного градієнта і сила тяжіння) знаходяться в стані рівноваги.

Вертикальне прискорення частинки описується третім рівнянням руху

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} - g, \quad (1.1)$$

де  $p_i$ ,  $\rho_i$  - тиск і густина частинки. Оскільки в атмосфері виконується умова квазістатичності, тиск в частинки  $p_i$  дорівнює тиску у навколишньому середовищі  $p_e$ , тобто

$$p_i = p_e \quad \text{або} \quad \frac{\partial p_i}{\partial z} = \frac{\partial p_e}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Нагадаємо, що умова квазістатичності в атмосфері виконується за рахунок розповсюдження акустичних хвиль по вертикалі. Оскільки швидкість атмосферних рухів (особливо у вертикальному напрямку) значно менша ніж швидкість акустичних хвиль, тиск в частинки і навколишньому середовищі устигає вирівнятися, поки частинка піднімається (опускається) з одного рівня на другий.

Підставимо рівність (1.2) в рівняння (1.1), одержимо

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_e}{\partial z} - g \quad \text{або з використанням рівняння}$$

статики  $\frac{\partial p_e}{\partial z} = -\rho_e g$  маємо

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho_i} (-\rho_e g) - g \quad \text{або} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\rho_e g - \rho_i g}{\rho_i} = \frac{g}{\rho_i} (\rho_e - \rho_i) = -\frac{g}{\rho_i} \Delta\rho, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де  $\Delta\rho = \rho_i - \rho_e$ .

Рівняння (1.3) показує, що вертикальне прискорення частинки визначається силою плавучості, яка являє собою різницю між силою Архімеда  $\rho_e g$  і власною вагою частинки  $\rho_i g$ .

Вираз  $\frac{\rho_e g - \rho_i g}{\rho_i}$  - це сила плавучості, яка віднесена до одиничної маси, і тому вона має розмірність прискорення -  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Різницю  $(\rho_e g - \rho_i g)$  також можна розглядати як силу плавучості, але ця сила віднесена до одиничного об'єму. Відношення  $\frac{g}{\rho_i}$  називається параметром плавучості.

Із рівняння (1.3) випливає, що при  $\Delta\rho > 0$  прискорення частинки  $\frac{dw}{dt}$  від'ємне, тобто спрямоване вниз, а якщо  $\Delta\rho < 0$ , прискорення є додатною величиною, тому рухи, які спрямовані уверх, будуть прискореними, а спрямовані вниз – сповільненими.

На рисунку 1.1 представлені графіки, які наочно показують зміни величин:  $\Delta\rho$ ,  $\frac{dw}{dt}$ ,  $w$  і  $z$ .

Поділимо процес вертикального руху частинки на чотири стадії:  
 АВ – рух частинки уверх з рівня  $z_0$  до рівня  $z + \Delta z$ ;  
 ВС – рух частинки вниз з рівня  $z + \Delta z$  до рівня  $z_0$ ;  
 CD – опускання частинки нижче рівня рівноваги  $z_0$  до рівня  $z - \Delta z$ ;  
 DE – підйом частинки з рівня  $z - \Delta z$  на початковий рівень  $z_0$ .

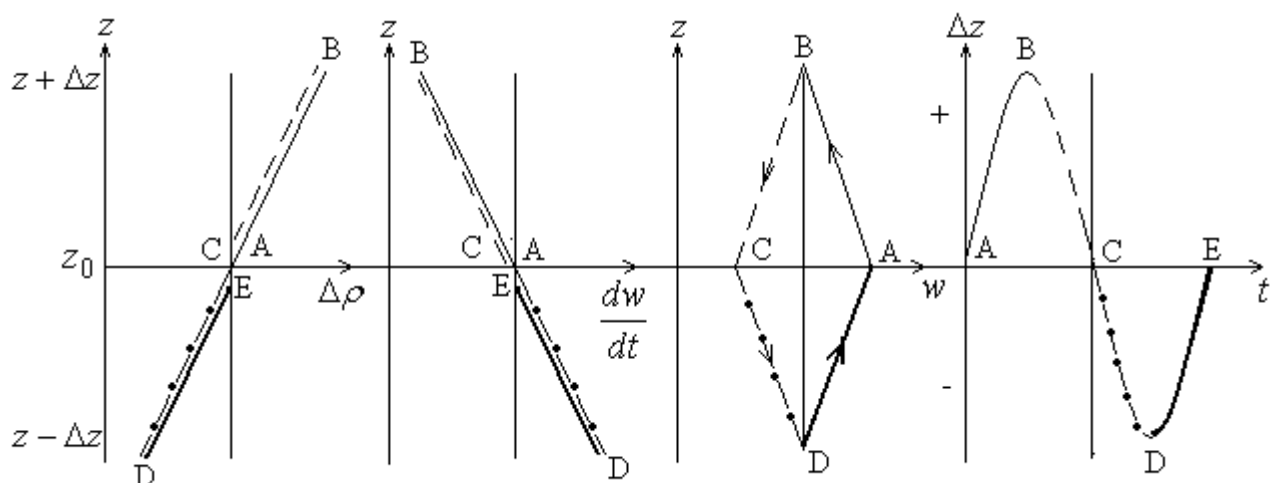


Рисунок 1.1 Зміни характеристик частинки на стадіях АВ (—); ВС (---); CD (-••-); DE (—).

Як відмічалось вище на рівні  $z_0$  густина  $\rho_i = \rho_e$ ,  $\Delta\rho = 0$  і відповідно до (1.3)  $\frac{dw}{dt} = 0$ . Проаналізуємо стан частинки на кожній з перелічених стадій.

На стадії АВ частинка рухається уверх ( $w > 0$ ), і оскільки стратифікація є стійкою ( $\gamma_a > \gamma$ ), температура частинки буде знижуватися швидше ніж навколишнього середовища, тому відповідно до рівняння стану ( $\rho = \frac{p}{RT}$ ), густина частинки буде більша за густину навколишнього повітря, тобто



$$\Delta\rho = \rho_i - \rho_e > 0 \quad (1.4)$$

Зі зростанням висоти  $\Delta\rho$  буде збільшуватися, що демонструє рисунок 1. Із рівняння (1.3) випливає, що при  $\Delta\rho > 0$   $\frac{dw}{dt}$  від'ємне і тому вертикальний рух частинки буде сповільненим: вертикальна швидкість  $w$  на стадії АВ зменшується і на деякому рівні  $z + \Delta z$  стає рівною нулю. Але тут частинка не зупиняється, тому що прискорення  $\left| \frac{dw}{dt} \right|$  на рівні  $z + \Delta z$  максимальне і оскільки воно від'ємне, під його дією частинка почне рухатися вниз і настає нова стадія.

На стадії ВС  $\Delta\rho$  змінюється в протилежному напрямку, тобто зменшується і на рівні  $z_0$  стає рівним нулю. Відповідно до рівняння (1.3)  $\frac{dw}{dt}$  також дорівнює нулю, а  $|w|$  досягає максимального значення, тому що рух частинки вниз (з рівня  $z + \Delta z$  до рівня  $z_0$ ) є прискореним. Отже, на рівні  $z_0$  частинка не зупиниться, а буде продовжувати опускатись.

На стадії CD частинка рухається вниз (з рівня  $z_0$  до рівня  $z - \Delta z$ ). Оскільки  $\gamma < \gamma_a$ , температура частинки буде збільшуватися швидше ніж температура навколишнього повітря, і тому відповідно до рівняння стану  $\rho_i < \rho_e$  або  $\Delta\rho < 0$ . Як видно із рівняння (1.3), прискорення  $\frac{dw}{dt}$  буде в цьому разі додатним, тобто спрямованим уверх. Отже виходить, що вертикальна швидкість руху частинки і її прискорення мають протилежні напрямки і тому рух частинки на цій стадії буде сповільненим. На рівні  $z - \Delta z$  швидкість  $w$  досягає нульового значення, а прискорення  $\frac{dw}{dt}$  - максимального, тому частинка почне рухатися уверх.

На стадії DE  $w$  і  $\frac{dw}{dt}$ , як і на стадії CD, є додатними величинами, тому при переміщенні частинки уверх вертикальна швидкість зростає і на рівні  $z_0$  досягає початкового значення. Далі весь процес повторюється, починаючи зі стадії АВ.

Щодо змін величин  $\Delta\rho$  і  $\frac{dw}{dt}$ , то на стадії DE вони змінюються в напрямку, протилежному стадії CD, тобто зменшуються і на рівні  $z_0$  досягають нульових значень.

Зміни вертикальної координати  $\Delta z$  частинки на розглянутих чотирьох стадіях також представлені на рисунку 1.1. Видно, що графік,

який описує ці зміни, має періодичний (синусоїдальний) характер. Отже ми бачимо, що коливання частинки в стійко стратифікованому шарі атмосфери носить хвильовий характер.

Ми описали механізм, завдяки якому невеликі збурення породжують коливання частинок повітря біля вихідного положення (в нашому випадку – положення рівноваги). В розглянутому випадку мова йшла про коливання фіксованої частинки повітря, яка виведена із стану рівноваги. Однак, між сусідніми частинками суцільного середовища завжди існує зв'язок і тому коливання однієї частинки поступово передаються навколишньому середовищу. Таким чином, збурення починають розповсюджуватись в усі сторони, виникають хвильові рухи, подібно тому як падіння каменю викликає хвильові рухи на усій водній поверхні.

В реальних умовах рухи завжди пов'язані з тертям, з дисипацією кінетичної енергії в тепло. Тому коливання поступово зменшуються і врешті-решт загасають.

Треба відмітити, що при хвильовому процесі коливання, тобто періодичні зміни, характерні не тільки для координат частинок середовища, а і для всіх термодинамічних характеристик. На рисунку 1.2 наведені приклади змін  $\Delta\rho$  і  $w$  уздовж осі  $t$ . Видно, що зміни  $\Delta\rho$  за часом можна описати синусоїдою, а зміни вертикальної складової  $w$  - косинусоїдою.

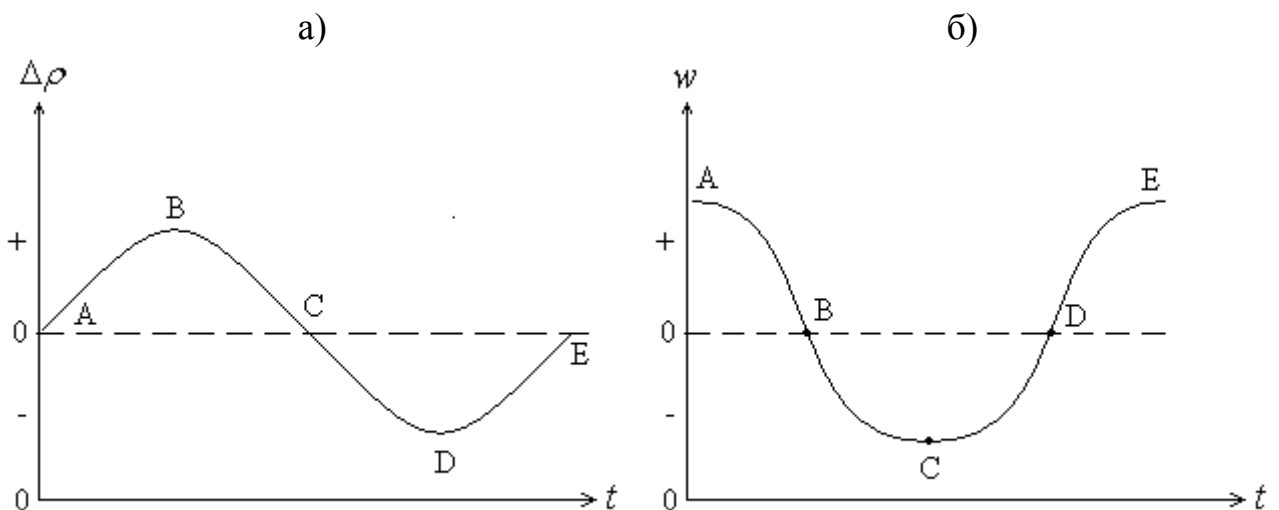


Рисунок 1.2 – Схематичне зображення змін величини  $\Delta\rho$  (а) і вертикальної швидкості  $w$  (б) з часом на стадіях АВ, ВС, CD, DE.

Аналогічні рисунки можна навести і для інших характеристик, зокрема для прискорення  $\frac{dw}{dt}$ .

Хвилі, які ми розглянули, відносяться до гравітаційних хвиль, тобто виникнення коливального процесу пов'язане з порушенням рівноваги сили тяжіння і вертикальної складової сили баричного градієнта.

Колівальні рухи виникають також при зміщенні маси повітря, стан якої визначається рівновагою будь-яких інших сил. Наприклад, подібний механізм діє при коливанні частинок в полі горизонтального градієнта тиску і сили Коріоліса. Ці коливання виникають під впливом миттєвого імпульсу (так звані інерційні хвилі).

## 1.2 Параметри хвильових рухів і зв'язок між ними.

Найбільш наочним прикладом хвильових рухів є хвилі на поверхні води. При такому хвильовому процесі частинки води здійснюють кругові рухи у вертикальній площині і їх вертикальна координата періодично змінюється. При цьому вільна поверхня води здійснює коливання біля рівня рівноваги, подібно тому, як здійснюється коливання на межі інверсійного шару атмосфери. Колівальні рухи, які мають властивість періодичності, називаються гармонічними. До цих рухів відноситься більшість коливань в реальній атмосфері.

Основними параметрами хвильового руху є довжина хвилі, її частота, період, хвильове число, амплітуда та швидкість розповсюдження. Надамо визначення перелічених характеристик хвильового руху.

Хвильовим профілем називають переріз хвилі вертикальною площиною в напрямку її поширення; в даному випадку ось  $x$  являє собою середній хвильовий рівень, що розділяє рівновеликі площі вище і нижче цього рівня (рис.1.3). Ордината (або вертикальне зміщення) хвилі  $\zeta$  - це відстань між будь-якою точкою хвильового профілю і середнім хвильовим рівнем.

Хвиля – це частина хвильового профілю, яка тричі послідовно перетинає середній хвильовий рівень. На рисунку 1.3. видно, що хвильовий профіль з точками перетину 1, 2, 3; 3, 4, 5; 5, 6, 7 має три хвилі. Гребінь хвилі – це частина хвилі, яка розташована вище середнього рівня. Найвища точка гребеня носить назву вершини хвилі. Улоговина хвилі – це частина хвилі, яка лежить нижче середнього рівня. Найнижча точка улоговини носить назву підосви хвилі (рис.1.3).

Найбільш коротка відстань  $A$  між вершиною (підосвою) і середнім рівнем називається амплітудою хвилі; горизонтальна відстань  $\lambda$  між вершинами двох сусідніх гребенів або між підосвами двох сусідніх улоговин являє собою довжину хвилі (рис. 1.3).

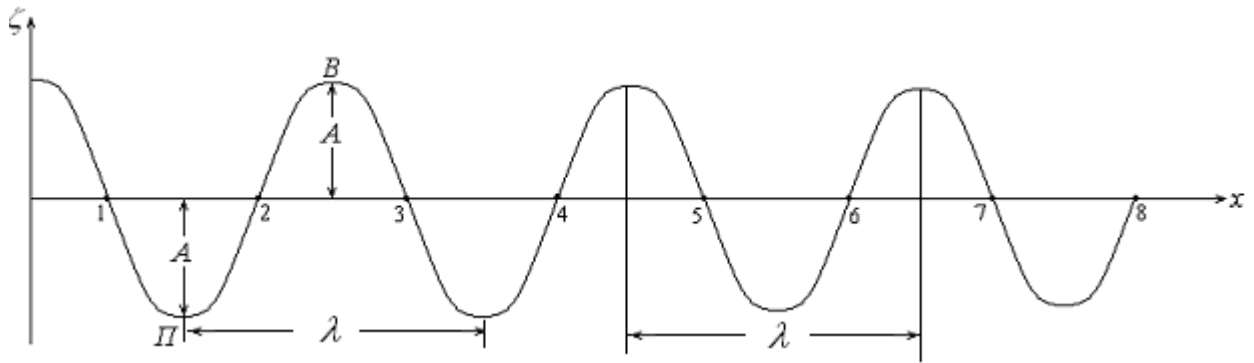


Рисунок 1.3 – Хвильовий профіль.  $B$ ,  $\Pi$ ,  $A$  - вершина, підшва, амплітуда хвилі відповідно.

Розглянемо тепер решті параметри коливального процесу на прикладі біжучої в напрямку осі  $x$  (прогресивної) гармонічної хвилі, яка має форму, наприклад, косинусоїди

$$\zeta = A \cdot \cos(kx - \sigma). \quad (1.5)$$

Форма цієї хвилі представлена на рисунку 1.4.

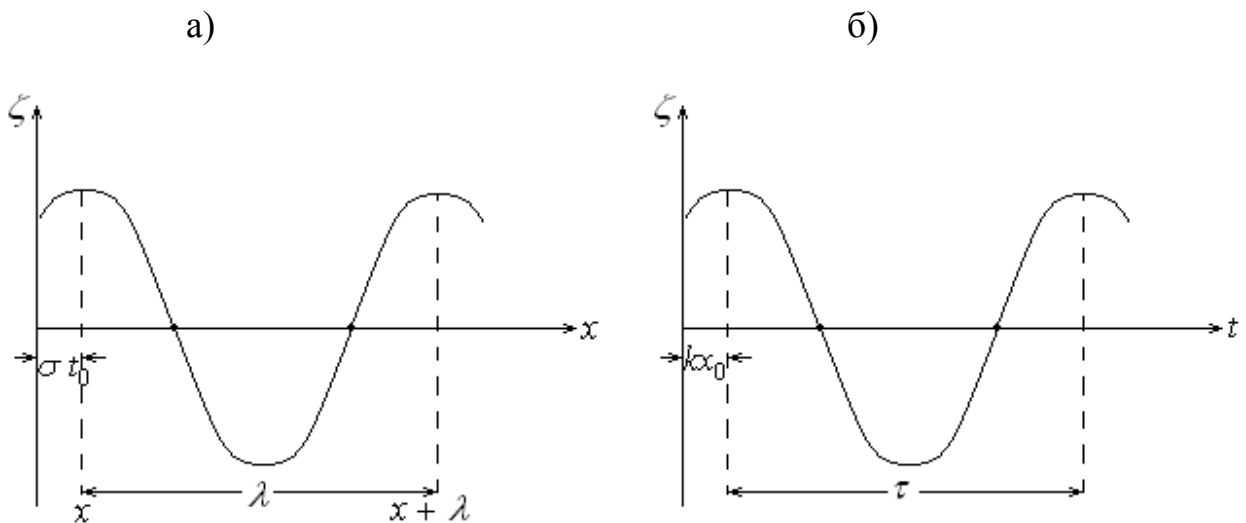


Рисунок 1.4 Одновимірна косинусоїдальна хвиля: а) в фіксований момент часу  $t = t_0$ ; б) в фіксованій точці простору  $x = x_0$ .

Розглянемо на початок хвилю в момент часу  $t = t_0$ . Графік на рисунку 1.4а показує зміни координати  $\zeta$  частинок середовища уздовж осі  $x$ . Це означає, що відстань між вершинами сусідніх гребенів відповідно з визначенням дорівнює довжині хвилі  $\lambda$ , а вершинам відповідають точки

на вісі  $x$  з координатами  $x$  та  $x + \lambda$ . Оскільки значення ординат  $\zeta$  в цих точках рівні, із (1.5) випливає, що аргументи косинуса відрізняються на  $2\pi$ , тобто

$$k(x + \lambda) - kx = 2\pi \quad \text{або} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.6)$$

В (1.6)  $k$  - хвильове число, яке означає кількість повних хвиль, що розташовуються на  $2\pi$  одиниць довжини. Наприклад, якщо за одиницю довжини вважати радіус широтного кола  $r$ , то довжина кола буде дорівнювати значенню  $2\pi r$ , тобто хвильове число  $k = \frac{2\pi r}{\lambda}$ . Кругістю хвилі

називають відношення  $\frac{A}{\lambda}$ . При однакових амплітудах кругість хвилі, тим менша, чим більша довжина хвилі.

Повернемося тепер до рисунку 1.4б, який на відміну від рисунку 1.4а показує зміцни ординати  $\zeta$  за часом. В цьому випадку відстань між вершинами сусідніх гребенів є інтервал часу, який дорівнює періоду колювання, а вершинам відповідають точки з координатами  $t$  і  $t + \tau$ . В цих точках ординати  $\zeta$  однакові і згідно з формулою (1.5) аргументи косинусу будуть відрізнятись на  $2\pi$ , тобто

$$\sigma(t + \tau) - \sigma(t) = 2\pi$$

$$\text{або} \quad \sigma t + \sigma\tau - \sigma t = 2\pi, \text{ відкіля} \quad \tau = \frac{2\pi}{\sigma}. \quad (1.7)$$

В (1.7)  $\tau$  - період хвилі, рівний проміжку часу між проходженням суміжних вершин через фіксовану точку ( $x = x_0$ );  $\sigma$  - кругова (або циклічна) частота, яка дорівнює числу повних колювань (хвиль), що проходять через фіксовану точку протягом  $2\pi$  одиниць часу.

Поряд з круговою частотою  $\sigma$  використовується пропорційна їй звичайна частота

$$f = \frac{1}{\tau}, \quad (1.8)$$

де  $f$  дорівнює числу колювань в одиницю часу. Параметри хвилі  $\sigma$ ,  $\tau$  і  $f$  пов'язані між собою співвідношеннями (1.7), (1.8), з яких випливає, що

$$\sigma = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f. \quad (1.9)$$

Аргумент косинуса в (1.5)

$$\varphi = kx - \sigma t \quad (1.10)$$

називається фазою хвилі.

Поки що ми розглядали одновимірне за простором гармонічне коливання, фазова швидкість якого дорівнює відношенню

$$c = \frac{\lambda}{\tau} \quad (1.11)$$

або з урахуванням виразів (1.6), (1.7)

$$c = \frac{2\pi\sigma}{k \cdot 2\pi} \quad \text{або} \quad c = \frac{\sigma}{k}, \quad \text{відкіля} \quad \sigma = k \cdot c. \quad (1.12)$$

У випадку тривимірної прогресивної гармонічної хвилі залежність ординати  $\zeta$  від просторових координат і часу запишеться у вигляді

$$\zeta(x, y, z, t) = A \cdot \cos(kx + my + nz - \sigma t), \quad (1.13)$$

де  $k, m, n$  - хвильові числа для тривимірної хвилі, що поширюється уздовж осей  $x, y, z$  відповідно.

Якщо ввести поняття вектора положення  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$  і хвильового вектора  $\vec{q} = \vec{i}k + \vec{j}m + \vec{k}n$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - одиничні вектори по координатних осях  $x, y, z$  відповідно), то (1.13) можна переписати у вигляді

$$\zeta(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \sigma t). \quad (1.14)$$

Складові вектора  $\vec{q}$  можна виразити через модуль цього вектора і направляючі косинуси таким чином

$$\begin{aligned} k &= |\vec{q}| \cdot \cos(\hat{\vec{q}}, x); \\ m &= |\vec{q}| \cdot \cos(\hat{\vec{q}}, y); \\ n &= |\vec{q}| \cdot \cos(\hat{\vec{q}}, z), \end{aligned} \quad (1.15)$$

де  $|\vec{q}| = \sqrt{k^2 + m^2 + n^2}$  - модуль хвильового числа, який пов'язаний з довжиною хвилі співвідношенням

$$\lambda = \frac{2\pi}{|q|} \quad (1.16)$$

У вигляді формул (1.5) або (1.13) можна представити одиничну хвилю. Однак в реальних умовах одиничні хвилі спостерігаються досить рідко; звичайно спостерігається система хвиль, які відрізняються одна від одної усіма своїми параметрами.

Хвилі більш складного виду, які переміщуються без зміни форми, можна побудувати шляхом підсумування індивідуальних гармонічних хвиль виду (1.5) або (1.13) при умові, що всі хвилі переміщуються з однаковою швидкістю  $c$ . Якщо швидкість хвиль різна, відбувається інтерференція і форма підсумкової хвилі з часом змінюється. В теорії хвиль залежності (1.5), (1.13) представляються звичайно в експоненціальній формі згідно з формулою Ейлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \quad (1.16)$$

де  $i = \sqrt{-1}$  - уявна одиниця;  $\varphi$  - фаза хвилі.

Тобто, форма одновимірної хвилі за допомогою формули (1.5) запишеться так:

$$\zeta(x, t) = A \cdot e^{i(kx - \sigma t)} \quad (1.17)$$

Ця форма є більш зручною, тому що при диференціюванні і інтегруванні експонента не змінюється на відміну від синуса чи косинуса.

Наведемо формули для двовимірної і тривимірної хвиль

$$\zeta(x, y, t) = A \cdot e^{i(kx + my - \sigma t)} \quad (1.18)$$

$$\zeta(x, y, z, t) = A \cdot e^{i(kx + my + nz - \sigma t)} \quad (1.19)$$

В формулах (1.18), (1.19)  $m, n$  - хвильові числа по координатах  $y, z$  відповідно, тобто  $m = \frac{2\pi}{L_y}$ ,  $n = \frac{2\pi}{L_z}$ , де  $L_y, L_z$  - довжини хвиль відповідно по осях  $y$  і  $z$ .

Атмосферні рухи і поля метеорологічних величин мають хвильовий характер, тому що в атмосфері існує багато причин для виникнення коливальних процесів. Будь-який атмосферний рух можна представити у вигляді суми накладених одна на одну хвиль, які мають різні амплітуди, довжини, швидкості розповсюдження, тому при дослідженні атмосферних процесів необхідно знати якого типу хвилі виникають в атмосфері, які фактори спричиняють їх виникнення, які умови їх розповсюдження і, нарешті, яку роль різні типи хвиль відіграють в тих чи інших процесах в атмосфері.

При розповсюдженні групи хвиль, коли кожна гармоніка поширюється зі своєю фазовою швидкістю, ця група хвиль буде поширюватися з іншою швидкістю, яка буде відрізнятися від швидкості окремих гармонік. В цьому випадку замість фазової швидкості слід користуватися поняттям групової швидкості.

Формулу для групової швидкості можна отримати, наприклад, близькі за своїми параметрами одновимірні хвилі однакової амплітуди з хвильовими числами  $k \pm \Delta k$  і частотами  $\sigma \pm \Delta \sigma$ . Сумма хвиль буде мати вигляд

$$\begin{aligned} & A e^{i[(k+\Delta k)x - (\sigma + \Delta \sigma)t]} + A e^{i[(k-\Delta k)x - (\sigma - \Delta \sigma)t]} = \\ & = A e^{i(kx - \sigma t)} \left[ e^{i(\Delta kx - \Delta \sigma t)} + e^{-i(\Delta kx + \Delta \sigma t)} \right] = 2A \cdot \cos(\Delta kx - \Delta \sigma t) e^{i(kx - \sigma t)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При отриманні цього виразу була використана формула (1.16). У виразі (1.20) множник  $e^{i(kx - \sigma t)}$  описує більш високочастотні коливання, ніж  $\cos(\Delta kx - \Delta \sigma t)$ , тому що  $\sigma \gg \Delta \sigma$ . Амплітуда спільної хвилі  $A_{\text{гр}}$ , що повільно змінюється з часом, описується рівнянням

$$A_{\text{гр}} = 2A \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \sigma \cdot t) \quad (1.21)$$

Групову швидкість знайдемо із умови  $A = \text{const}$ , тобто аргумент косинуса  $(\Delta kx - \Delta \sigma t) = \text{const}$ , відкіля

$$C_{\text{zp}} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta \sigma}{\Delta k} \approx \frac{\partial \sigma}{\partial k} \text{ або } C_{\text{zp}} = \frac{\partial}{\partial k} (C_{\phi} \cdot k) \quad (1.22)$$

Після диференціювання в (1.22) остаточно отримаємо

$$C_{\text{zp}} = C_{\phi} + k \frac{\partial C_{\phi}}{\partial k}. \quad (1.23)$$



## 2. Система рівнянь гідротермодинаміки.

Для теоретичного дослідження хвильових процесів використовується система рівнянь гідротермодинаміки, яка являє собою математичний запис основних законів збереження: кількості руху або імпульсу, маси і енергії. При цьому закон збереження імпульсу або другий закон Ньютона описується рівнянням руху, закон збереження маси описується рівнянням нерозривності і закон збереження енергії – рівнянням припливу тепла.

Перед тим, як записати перелічені рівняння, розглянемо основні сили, які породжують атмосферні рухи або впливають на них.

### 2.1 Сили, які діють в атмосфері.

Основною силою, яка спричиняє рух повітря, є сила баричного градієнта. Ця сила виникає через неоднорідний розподіл тиску в атмосфері, вона спрямована завжди в сторону низького тиску по нормалі до ізобаричної поверхні і дорівнює баричному градієнту, тобто

$$\vec{G} = -gradp. \quad (2.1)$$

де  $\vec{G}$  - сила баричного градієнта, а  $gradp$  - баричний градієнт – вектор, який спрямований по нормалі до ізобаричної поверхні в сторону високого тиску. Вектор  $gradp$  вказує напрямок найбільшого зростання тиску. Формула (2.1) показує, що сила баричного градієнта за величиною дорівнює баричному градієнту, але спрямована протилежно йому. Таким чином, за рахунок цієї сили частинки повітря завжди рухаються із області підвищеного тиску в область зниженого тиску, тобто дія сили баричного градієнта спрямована на те, щоб згладжувати неоднорідності в полі тиску.

Вектор градієнта тиску можна записати через його складові (проекції на вісі  $x, y, z$ )

$$gradp = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.2)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - одиничні вектори спрямовані уздовж осей  $x, y, z$  відповідно;  $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$  - складові  $gradp$ , які характеризують ступінь зміни тиску

уздовж відповідних координатних осей і кількісно дорівнюють значенню відповідної похідної.

З урахуванням (2.2) співвідношення (2.1) приймає вигляд

$$\vec{G} = -gradp = -\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.3)$$

В формулі (2.3) сила баричного градієнта  $\vec{G}$  віднесена до одиничного об'єму. Але в метеорологічних задачах усі сили відносять, як правило, до одиничної маси, тому (2.3) представимо у вигляді

$$\vec{G} = -\frac{1}{\rho} gradp = -\frac{\vec{i}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\vec{j}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\vec{k}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.4)$$

Зручно розглядати окремо горизонтальну складову сили баричного градієнта

$$\vec{G}_s = -\frac{\vec{i}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\vec{j}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.5)$$

яка викликає вітер (горизонтальний рух повітря). Ця сила спрямована по нормалі до ізобари в сторону низького тиску.

Вертикальна складова сили баричного градієнта  $\vec{G}_z$  має вигляд

$$\vec{G}_z = -\frac{\vec{k}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.6)$$

Ця сила спрямована завжди вверх, оскільки тиск з висотою зменшується, і впливає на вертикальні рухи в атмосфері.

Розглянемо ще одну важливу силу, яка відіграє суттєву роль в атмосферних рухах і існує завдяки тому, що атмосфера разом з Землею приймає участь в добовому обертанні. Запишемо вираз для цієї сили

$$\vec{k} = -2\vec{\omega} \times \vec{V}, \quad (2.7)$$

де  $\vec{\omega}$  - вектор кутової швидкості добового обертання Землі,  $\vec{V}$  - вектор швидкості. Якщо розкрити векторний добуток в (2.7), можна знайти проєкції сили Коріоліса  $\vec{k}$

$$\begin{aligned} k_x &= 2\omega_z v - 2\omega_y w; \\ k_y &= 2\omega_x w - 2\omega_z u; \\ k_z &= 2\omega_y u - 2\omega_x v; \end{aligned} \quad (2.8)$$

де  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  - проекції вектора кутової швидкості обертання Землі;  $u, v, w$  - проекції вектора швидкості  $\vec{V}$ . Якщо вибрати систему координат, в якій осі  $x$  та  $y$  лежать в горизонтальній площині, а вісь  $z$  спрямована по радіусу Землі від центру, то  $\omega_x=0$ ,  $\omega_y = \omega \cdot \cos \varphi$ ,  $\omega_z = \omega \sin \varphi$ , і формули (2.8) в цій системі координат будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} k_x &= 2\omega \sin \varphi \cdot v - 2\omega \cos \varphi \cdot w; \\ k_y &= -2\omega \sin \varphi \cdot u; \\ k_z &= 2\omega \cos \varphi \cdot u; \end{aligned} \quad (2.9)$$

де  $\omega$  модуль вектора кутової швидкості обертання Землі, який дорівнює  $7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ ;  $\varphi$  - широта, на якій знаходиться частинка, що досліджується.

Для більш компактного запису формули (2.9) введемо позначення

$$2\omega \sin \varphi \equiv \ell; \quad 2\omega \cos \varphi \equiv \ell_1. \quad (2.10)$$

В (2.10)  $\ell$  і  $\ell_1$  - це перший і другий параметри Коріоліса відповідно.

Замітимо, що великомасштабні вертикальні рухи  $w$ , які характерні для помірних широт, дуже малі в порівнянні зі швидкістю вітру  $(u, v)$ : вертикальна швидкість  $w$  в десятки, а то і в сотні разів менша за  $u$  або  $v$ . Тому при дослідженні атмосферних процесів в помірних широтах членом  $2\omega \cos \varphi \cdot w$  нехтують.

З урахуванням цього зауваження і позначень (2.10) формули (2.9) приймають вигляд

$$k_x = \ell v; \quad k_y = -\ell u; \quad k_z = \ell_1 u \quad (2.11)$$

Як і силу баричного градієнта, силу Коріоліса можна поділити на горизонтальну складову  $\vec{k}_s = \vec{i}k_x + \vec{j}k_y$  і вертикальну  $\vec{k}_z = \vec{k}k_z$ . Вектор  $\vec{k}_s$  завжди спрямований під кутом  $90^\circ$  до вектору швидкості вітру  $\vec{V}_s$ , при цьому в північній півкулі сила Коріоліса, яка діє в горизонтальній площині, відхиляє рухи управо, а в південній півкулі – уліво, від напрямку руху.

Докажемо це. Відомо, що скалярний добуток двох взаємоперпендикулярних векторів дорівнює нулю. Знайдемо добуток векторів  $\vec{k}_s$  і  $\vec{V}_s$ , тобто горизонтальної сили Коріоліса і вітру.

$$\vec{k}_s \cdot \vec{V}_s = |\vec{k}_s| \cdot |\vec{V}_s| \cdot \cos(\vec{k}_s, \vec{V}_s) \quad (2.12)$$

$$\text{або } \vec{k}_s \cdot \vec{V}_s = k_x u + k_y v = \ell v \cdot u - \ell u \cdot v = 0 \quad (2.13)$$

Із порівняння формул (2.12), (2.13) випливає, що  $\cos(\vec{k}_s, \vec{V}_s) = 0$ , тобто кут між векторами  $\vec{k}_s$  і  $\vec{V}_s$  дорівнює  $90^\circ$  або  $270^\circ$ .

Покажемо, що в північній кулі кут складає  $90^\circ$ , на прикладі такої задачі: нехай напрямок вітру  $\vec{V}_s$  відомий; треба доказати, що горизонтальна сила Коріоліса  $\vec{k}_s$  спрямована під кутом  $90^\circ$  управо від вектора  $\vec{V}_s$ .

Розв'язання: для спрощення направимо вісь  $x$  уздовж вектора  $\vec{V}_s$  (рис.2.1). В такому разі проекція цього вектора на вісь  $x$  буде додатною і дорівнюватиме абсолютній величині  $|\vec{V}_s|$ , а проекція на вісь  $y$   $v = 0$ , тому і  $k_x$  відповідно до формул (2.11) дорівнює нулю. Проаналізуємо складову сили Коріоліса  $k_y$ , тобто знайдемо знак цієї проекції.

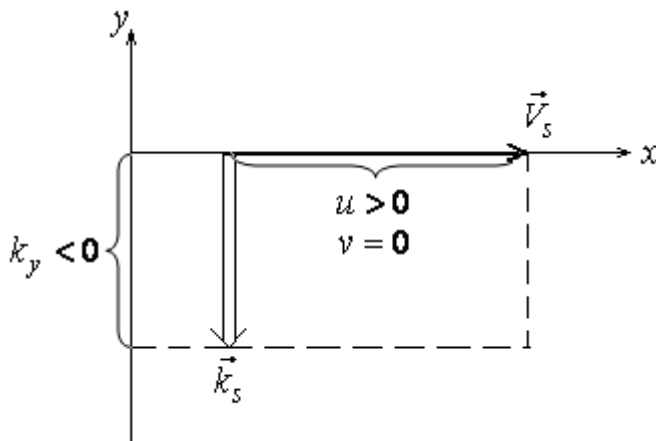


Рисунок 2.1 – Схема дії сили Коріоліса  $\vec{k}_s$  в північній півкулі.

$$k_y = -\ell u$$

В північній кулі  $\ell > 0$  (завжди); складова  $u$  при вказаному на рисунку 2.1 напрямку осі  $x$  також додатна, тоді в формулі для  $k_y$  від'ємний знак зберігається і вектор  $\vec{k}_s$  повинен бути направлений проти осі  $y$ , як показано подвійною стрілкою на рисунку 2.1. Видно, що сила Коріоліса спрямована під прямим кутом праворуч відносно напрямку руху.

Може складатися враження, що такий результат ми одержали завдяки тому, що напрямок осі  $x$  збігався з напрямком вітру  $\vec{V}_s$ . Але якщо поміняти напрямок осі  $x$  на протилежний, зміниться на протилежний і напрямок осі  $y$ , і знак складової  $u$ , тому результат отримуємо такий же.

Оскільки всі рухи в атмосфері відбуваються в полі сили тяжіння, важливо розглянути суть цієї сили та її властивості.

Сила тяжіння  $\vec{g}$  являє собою суму двох сил: сили земного притягання  $\vec{F}_m$  і відцентрової сили  $f_u$ . Відповідно до закону всесвітнього притягання

$$F_m = \alpha \frac{M \cdot m}{R_3^2}, \quad (2.14)$$

де  $\alpha$  - гравітаційна стала,  $M, m$  - маса Землі і частинки відповідно,  $R_3$  - радіус Землі.

Величина відцентрової сили визначається добутком

$$f_u = \omega^2 r \quad (2.15)$$

$$\text{або } f_u = \omega^2 R_3 \cos \varphi, \quad (2.16)$$

де  $\omega$  - кутова швидкість обертання Землі,  $\varphi$  - широта місця,  $r$  - радіус широтного круга (рис.2.2). Із рисунка видно, що радіус  $r$  можна виразити через радіус Землі із трикутника ОАВ. Тоді вираз (2.15) замінюється на вираз (2.16). Підставимо в формулу (2.16) значення  $\omega$ ,  $R_3$  і розрахуємо відцентрову силу для помірних широт, наприклад, для  $\varphi=45^\circ$ .

$$f_u \approx (7,29 \cdot 10^{-5})^2 \text{ с}^{-2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot \cos 45^\circ \approx 53 \cdot 10^{-10} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \cdot 0,7 = 238 \cdot 10^{-4} = 0,0238 \approx 0,02 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Розрахунки показують, що відцентрова сила на широті  $45^\circ$  складає всього 0,2% від сили земного притягання ( $F_m \approx 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ). Максимальних значень  $f_u$  досягає на екваторі (біля 0,03% від  $F_m$ ). Із рисунка 2.2 видно, що сила тяжіння  $g$  на екваторі мінімальна, а на полюсі максимальна, але зміни її з широтою, як показують розрахунки, малі і тому в метеорологічних задачах ця сила вважається сталою величиною, за яку приймається значення  $g$  на рівні моря і на широті  $\varphi=45^\circ$ , де  $g=9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ .

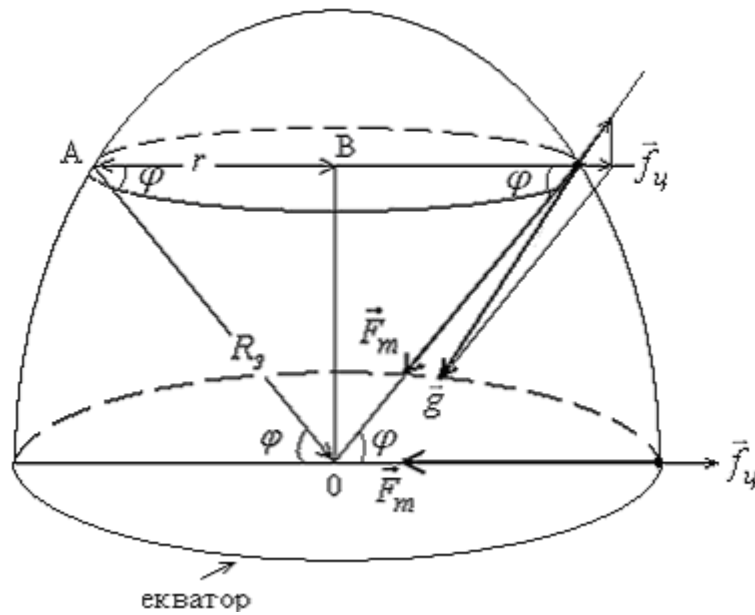


Рисунок 2.2 – Схема щодо визначення сили тяжіння

В системі координат, в якій осі  $x$  і  $y$  лежать в горизонтальній площині, а  $z$  спрямована по радіусу Землі від центру, сила тяжіння  $\vec{g}$  повністю проектується на вісь  $z$  з від'ємним знаком (рис.2.2) і тому її проекції мають вигляд

$$\vec{g} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 - \vec{k} \cdot g \quad (2.17)$$

Замітимо, що відхиленням сили  $\vec{g}$  від радіусу Землі за рахунок відцентрової сили нехтуємо через малість останньої.

На атмосферні рухи впливають також сили тертя, які завжди зменшують швидкість руху. В ламінарних течіях, тобто в таких течіях, де всі частинки середовища перемішуються по плавним паралельним траєкторіям, діє сила молекулярної в'язкості  $\vec{D}_m$ . В турбулентній течії, де рух хаотичний, тобто окремі об'єми повітря (турбулентні вихори) рухаються і уздовж потоку і проти, і поперек нього, з'являється сила турбулентної в'язкості  $\vec{D}_t$ .

Запишемо проекції вказаних сил:

$$\begin{aligned} (D_m)_x &= \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \vec{V} + \nu \nabla^2 u; \\ (D_m)_y &= \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \text{div} \vec{V} + \nu \nabla^2 v; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$(D_m)_z = \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \nu \nabla^2 w.$$

В (2.18)  $\nu$  - коефіцієнт молекулярної в'язкості;

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \quad \text{умовний}$$

диференціальний оператор набла, який називається ще й оператором Гамільтона.

Проекції сили турбулентної в'язкості запишемо з використанням півемпіричної теорії турбулентності

$$\begin{aligned} (D_t)_x &= \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ (D_t)_y &= \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial v}{\partial z}; \\ (D_t)_z &= \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В (2.19)  $k_s$  і  $k_z$  - відповідно горизонтальний і вертикальний коефіцієнти турбулентності, які характеризують інтенсивність переносу кількості руху турбулентними вихорами в горизонтальному і вертикальному напрямках.

Розглянемо механізм виникнення сил молекулярної в'язкості. Припустимо, що є два шари атмосфери, в яких швидкість вітру різна. Будемо вважати рух ламінарним, тобто в потоці всі частинки повітря

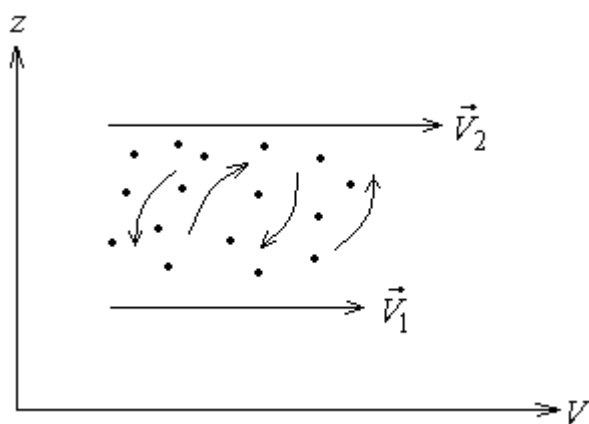


Рисунок 2.3 – Схема до пояснення механізму виникнення молекулярної в'язкості.

(молекули) рухаються зі швидкостями  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$ . Із фізики відомо, що молекули повітря крім поступального руху здійснюють ще й хаотичний рух, який сприяє переходу молекул із нижнього шару у верхній і навпаки із верхнього в нижній. Переходячи із одного шару у другий, молекули переносять свою кількість руху, тобто більшу кількість руху приносять молекули із верхнього шару (тому що там швидкість руху більша),

а меншу – з нижнього. Таким чином, відбуваються зміни кількості руху: у верхньому шарі кількість руху зменшується, а в нижньому – збільшується. Будь-які зміни кількості руху згідно з другим законом Ньютона можна розглядати як результат дії деякої сили. Ця сила і носить назву сили молекулярної в'язкості. Чим більше швидкість руху змінюється з висотою, тим більших значень досягають сили молекулярної в'язкості.

Як впливає із сказаного, сили в'язкості завжди приводять до зменшення контрастів, тобто до згладжування вертикального профілю вітру. В турбулентному потоці, на відміну від ламінарного, хаотичний рух здійснюють не тільки молекули, а і досить великі об'єми повітря, які виділяються із основного потоку під дією яких-небудь факторів і починають хаотично рухатися. Ці об'єми повітря називаються турбулентними вихорами. Вони, як і молекули, переносять кількість руху в шарах, де поле вітру неоднорідне, але в турбулентному потоці зміни кількості руху будуть значно більшими, тому що перенос здійснюється великими об'ємами повітря. Отже сили турбулентної в'язкості набагато (в десятки, сотні і навіть в тисячі разів) більші сил молекулярної в'язкості, тому останню при дослідженні турбулентних рухів можна не урахувати.

## 2.2 Рівняння руху.

Згідно з другим законом Ньютона сила, яка діє на тіло масою  $m$ , дорівнює добутку прискорення  $a$  на масу  $m$ , тобто

$$F = ma. \quad (2.20)$$

Якщо цей закон записати для одиничної маси, то (2.20) буде мати вигляд

$$F = a \quad \text{або} \quad a = F. \quad (2.21)$$

Це означає, що прискорення одиничної маси (наприклад, повітря) в точності дорівнює діючій силі. Але вказаний закон можна записати у вигляді (2.20) або (2.21), тобто в скалярній формі, якщо діє тільки одна сила. Якщо діє декілька сил, треба урахувати, що сила – векторна величина, тому рівняння (2.21) треба записати так

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.22)$$

або, урахувуючи, що прискорення це є похідна від швидкості за часом, перепишемо (2.22)



$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.23)$$

де  $\vec{F}_i$  - деяка сила,  $n$  - кількість сил,  $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$  - швидкість руху.

Згідно з рівнянням (2.23) другий закон Ньютона сформулюється таким чином: прискорення одиничної маси дорівнює рівнодіючій усіх діючих сил і спрямоване в напрямку рівнодіючої.

Для того, щоб записати рівняння (2.23) стосовно до атмосферних рухів, треба в правій його частині записати сили, які діють в атмосфері, тобто силу баричного градієнта, Коріоліса, тяжіння і силу в'язкості. В такому разі рівняння, (2.23) приймає вигляд

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{G} + \vec{k} + \vec{g} + \vec{D}_m + \vec{D}_T. \quad (2.24)$$

Це рівняння, яке являє собою математичний запис другого закону Ньютона, і є рівняння руху в векторній формі для атмосферного повітря, але воно має формальний вигляд. Справа в тому, що при розв'язанні рівняння (2.24) треба розрахувати праву його частину. Для цього усі сили повинні виражатися через величини, які можна виміряти. Тому скористуємося виразами (2.1), (2.7) і запишемо рівняння (2.24) так

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p - 2\vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{g} + \vec{D}_m + \vec{D}_T. \quad (2.25)$$

Із рівняння (2.25) видно, що сила баричного градієнта може бути розрахована за даними про тиск; сила тяжіння  $g$  є відома величина; для розрахунку сили Коріоліса необхідні дані спостережень за вітром; в'язкі члени  $(D_m)_x$ ,  $(D_m)_y$  і  $(D_m)_z$  за формулами (2.18) можна розрахувати, якщо відомі просторові поля вітру, але при розрахунку турбулентної в'язкості  $\vec{D}_T$  за формулами (2.19) виникають труднощі з визначенням коефіцієнтів турбулентності, які є невідомими величинами, тобто урахування в рівнянні (2.25) в'язких членів істотно ускладнюють задачу. Проте це все загальні міркування. Щодо розв'язання задач при дослідженні атмосферних процесів, то рівняння в таких задачах записуються не в векторній, а в скалярній формі, тобто в проекціях на осі вибраної системи координат. Тоді рівняння (2.25) запишеться у вигляді трьох рівнянь руху в проекціях на осі  $x, y, z$ .

В підрозділі 2.1 отримані проекції усіх сил, які входять в рівняння (2.25). Скористаємося виразами для цих проекцій ( 2.4 ), (2.11), (2.17), і запишемо рівняння (2.25) в проекціях на осі системи координат, в якій осі  $x, y$  лежать в горизонтальній площині, а ось  $z$  спрямована вертикально уверх, тобто протилежно напрямку сили тяжіння або по радіусу Землі від центру. Отже з урахуванням проекцій  $u, v, w$  для вектора швидкості  $\vec{V}$  рівняння (2.25) в проекціях на осі  $x, y, z$  запишеться у вигляді трьох рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v + (D_m)_x + (D_t)_x; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + (D_m)_y + (D_t)_y; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u + (D_m)_z + (D_t)_z.\end{aligned}\tag{2.26}$$

В лівих частинах цих рівнянь присутні прискорення одиничної маси повітря по осях  $x, y, z$ , а в правих частинах – відповідні проекції сил, які ці прискорення спричиняють. Проекції сил молекулярної в'язкості  $D_m$  і турбулентної -  $D_t$  представлені рівняннями (2.18) і (2.19).

Відомо, що повна або індивідуальна похідна від будь-якої функції  $f$  описує зміни цієї функції за одиницю часу в частинці, яка рухається. Але в метеорології, зокрема в теорії прогнозів погоди, потрібно знати зміни не в рухаючих частинках, а в фіксованих точках простору, тому повну похідну  $\frac{df}{dt}$  треба виразити через частинні похідні.

Запишемо в загальному вигляді залежність метеорологічної величини (функції)  $f$  від координат і часу. Оскільки частинка рухається, то вид цієї залежності буде таким

$$f = f[x(t), y(t), z(t), t]\tag{2.27}$$

Продиференціюємо (2.27) по аргументу  $t$  за правилами диференціювання складної функції

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\tag{2.28}$$

Відомо, що похідна від координати за часом є швидкість, тобто

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = w. \quad (2.29)$$

Підставмо (2.29) в (2.28) і одержимо

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (2.30)$$

де  $\frac{\partial f}{\partial t}$  - локальна або місцева похідна, яка описує зміни функції  $f$  за одиницю часу в фіксованій точці простору;

$\left( u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  - адвективні члени; вони описують зміни  $f$ , які пов'язані з горизонтальним переміщенням частинки;

$w \frac{\partial f}{\partial z}$  - конвективний член, який описує зміни величини  $f$  за одиницю часу, які обумовлюються рухом частинки по вертикалі

Дослідження показують, що в'язкі члени найбільших значень досягають в граничному шарі атмосфери (ГША), тобто в нижньому півторакілометровому шарі атмосфери. В вільній атмосфері (вище ГША) сили турбулентної в'язкості малі, і в рівняннях (2.26) можна не ураховувати члени  $D_m$  і  $D_t$ .

Запишемо рівняння руху для вільної атмосфери і при цьому для запису лівих частин цих рівнянь скористуємося формулою (2.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Відмітимо, що відкидання членів  $D_m$  і  $D_t$  приводить до спрощення рівнянь руху, тому що останні із диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку перетворюються на рівняння першого порядку.

### 2.3 Рівняння припливу тепла і нерозривності.

Рівняння припливу тепла широко використовується, як окремо, так і в складі системи рівнянь, для аналізу атмосферних процесів та їх моделювання. Це рівняння отримується із закону збереження енергії, який

записується стосовно до атмосфери. В загальному виді цей закон можна записати так

$$dQ = du + dw, \quad (2.32)$$

де  $dQ$  - кількість тепла, яке надходить до замкненої системи;  $du$  - збільшення внутрішньої енергії системи (це може бути будь-яка енергія: механічна, електрична, теплова, ядерна тощо);  $dw$  - робота проти зовнішніх сил також в самому загальному вигляді.

Якщо закон (2.32) треба записати для атмосфери, то  $du$  - це завжди приріст внутрішньої енергії газу, рівень якої визначається приростом абсолютної температури, тобто

$$du = C_v dT, \quad (2.33)$$

де  $C_v$  - питома теплоємність при сталому об'ємі,  $dT$  - збільшення абсолютної температури за рахунок припливу тепла  $dQ$ .

В атмосфері робота проти зовнішніх сил може складатися тільки із роботи розширення, тоді

$$dw = PdV, \quad (2.34)$$

де  $P$  - сила тиску, яка здійснює роботу розширення,  $dV$  - зміна об'єму повітря за рахунок нагріву ( $V = \frac{1}{\rho}$  - питомий об'єм).

З урахуванням (2.33), (2.34) закон (2.32) можна записати так

$$dQ = C_v dT + PdV \quad (2.35)$$

Оскільки величина  $V$  не вимірюється, виключимо її за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$PV = RT, \quad (2.36)$$

де  $R$  - питома газова стала.

Із (2.36) шляхом диференціювання отримаємо

$$PdV + VdP = RdT, \quad (2.37)$$

відкіля  $PdV = RdT - VdP$  або з урахуванням того, що із (2.36)  $V = \frac{RT}{P}$ , перепишемо рівняння (2.37)

$$PdV = RdT - \frac{RT}{P}dP. \quad (2.38)$$

Підставимо (2.38) в рівняння (2.35) і отримаємо

$$\begin{aligned} dQ &= C_v dT + RdT - \frac{RT}{P}dP && \text{або} \\ dQ &= (C_v + R)dT - \frac{RT}{P}dP. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для ізобаричного процесу, тобто такого процесу, який проходить при сталому тиску, закон збереження енергії має вигляд

$$dQ = C_p dT. \quad (2.40)$$

З другого боку, із (2.39) випливає, що при ізобаричному процесі ( $dP = 0$ )

$$dQ = (C_v + R)dT \quad (2.41)$$

Із порівняння співвідношень (2.40) і (2.41) отримаємо, що

$$C_p = (C_v + R)$$

З урахуванням цієї рівності рівняння (2.39) приймає вигляд

$$dQ = C_p dT - \frac{RT}{P}dP.$$

Це рівняння можна записати і в такій, більш зручній для моделювання формі

$$\frac{dQ}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P} \frac{dP}{dt}, \quad (2.42)$$

де  $\frac{dQ}{dt}$  - приплив тепла до одиничної маси повітря за одиницю часу.

Введемо величину  $\varepsilon = \rho \frac{dQ}{dt}$  - приплив тепла до одиничного об'єму і

запишемо останнє рівняння відносно похідної  $\frac{dT}{dt}$ , в результаті отримаємо рівняння припливу тепла в такому вигляді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{C_p P} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{C_p \rho} \quad (2.43)$$

Ця форма найчастіше використовується при моделюванні атмосферних процесів.

Рівняння (2.43) показує, що зміни температури в повітряних масах, які рухаються, відбуваються, з одного боку, за рахунок змін тиску (перший член правої частини) – це адіабатичні зміни; а з другого боку, за рахунок зовнішнього припливу тепла  $\varepsilon$ . Цей приплив тепла дорівнює

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_m + \varepsilon_\phi \quad (2.44)$$

де  $\varepsilon_l$  - променевий приплив тепла;

$\varepsilon_m$  - приплив тепла за рахунок турбулентного обміну, тобто турбулентний приплив тепла;

$\varepsilon_\phi$  - приплив тепла за рахунок фазових переходів води в атмосфері.

При математичному опису хвильових процесів досить часто рівняння (2.43) записується в термінах потенціальної температури  $\theta$ . Запишемо вираз для потенціальної температури

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}. \quad (2.45)$$

Після логарифмування (2.45) отримаємо

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} (\ln 1000 - \ln p).$$

Диференціювання цього виразу по часовій координаті  $t$  приведе до рівняння

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p p} \frac{dp}{dt} \quad \text{або}$$

якщо помножити обидві частини цього рівняння на  $T$  і  $c_p$ , отримаємо

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt}. \quad (2.46)$$

Порівняння виразів (2.46) і (2.42) показує, що їх праві частини однакові. Тоді і ліві частини також однакові, тобто можна записати

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.47)$$

Із (2.47) випливає, що зміни потенціальної температури в повітряній масі здійснюються тільки за рахунок зовнішнього припливу тепла  $\frac{dQ}{dt}$ .

Для адіабатичних процесів ( $\frac{dQ}{dt}=0$ ) рівняння (2.47) має вигляд

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (2.48)$$

Оскільки в (2.48)  $\theta$  і  $T$  - температури в абсолютній шкалі, їх відношення можна вважати близьким до одиниці, а на  $c_p$  можна розділити обидві частини рівняння і тоді отримаємо

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (2.49)$$

Це і є рівняння припливу тепла в термінах потенціальної температури для адіабатичного процесу.

Розглянемо тепер рівняння нерозривності. Це рівняння можна одержати, якщо зафіксувати якийсь об'єм повітря і визначити в ньому баланс маси, тобто знайти різницю між припливом маси повітря в об'єм і його відпливом. В результаті отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \rho \vec{V}, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \vec{V}$$

або 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{i} \rho u + \vec{j} \rho v + \vec{k} \rho w).$$

Відомо, що скалярний добуток дорівнює сумі добутків одноіменних проєкцій, тому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right). \quad (2.50)$$

Якщо взяти похідні в правій частині (2.50), то одержимо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}\right).$$

Перенесемо в ліву частину останнього рівняння члени, які містять похідні від  $\rho$ , а в правій частині об'єднаємо члени, які залишилися і винесемо  $\rho$  за дужки, отримаємо таке рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (2.51)$$

Оскільки ліва частина (2.51) являє собою повну або індивідуальну похідну від  $\rho$ , то останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad \text{або}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V}. \quad (2.52)$$

Це рівняння показує, що зміна густини в об'ємі повітря, який рухається, відбувається за рахунок дивергенції вектору швидкості, тобто поля густини і швидкості руху повітря пов'язані рівнянням нерозривності і тому не можна задавати поле  $\rho$  незалежно від поля  $\vec{V}$  і навпаки.

Запишемо тепер всю систему рівнянь гідротермодинаміки; при цьому рівняння руху візьмемо у вигляді (2.31), рівняння нерозривності у вигляді (2.51), а рівняння припливу тепла – у вигляді (2.43), де ліву частину представимо у частних похідних.



$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u; \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}; \\
p &= \rho RT.
\end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Останнє рівняння системи (рівняння стану) не містить нових невідомих і тому використовується для замкнення цієї системи. Як видно із (2.53), невідомими величинами є  $u, v, w, p, \rho, T$  і  $\varepsilon$ . Якщо  $\varepsilon=0$ , тобто розглядаються адіабатичні процеси, або  $\varepsilon$  є відомою величиною, то система (2.53) містить 6 рівнянь і 6 невідомих і, таким чином, являє собою замкнену систему, яка може бути розв'язана. Але ця система складається із нелінійних членів, тому для неї неможливо отримати аналітичний розв'язок, тобто розв'язок у вигляді функції (формули), через що система розв'язується приблизними чисельними методами.

Проте отримати аналітичний (точний) розв'язок дуже корисно, тому що завдяки його аналізу можна виявити основні фізичні властивості досліджуваного процесу. Для отримання аналітичного розв'язку система рівнянь або окремі рівняння приводяться до лінійного вигляду. З математики відомо, що лінійні рівняння завжди мають аналітичні розв'язання. Для приведення нелінійних рівнянь до лінійного вигляду використовується так званий метод малих збурень, який буде розглянуто нижче.

### 3. Класифікація хвильових рухів в атмосфері

Розглянемо дві класифікації, які найбільш широко використовуються в теорії хвильових рухів, а також в гідродинамічних методах прогнозу погоди: це кінематична класифікація та гідродинамічна.

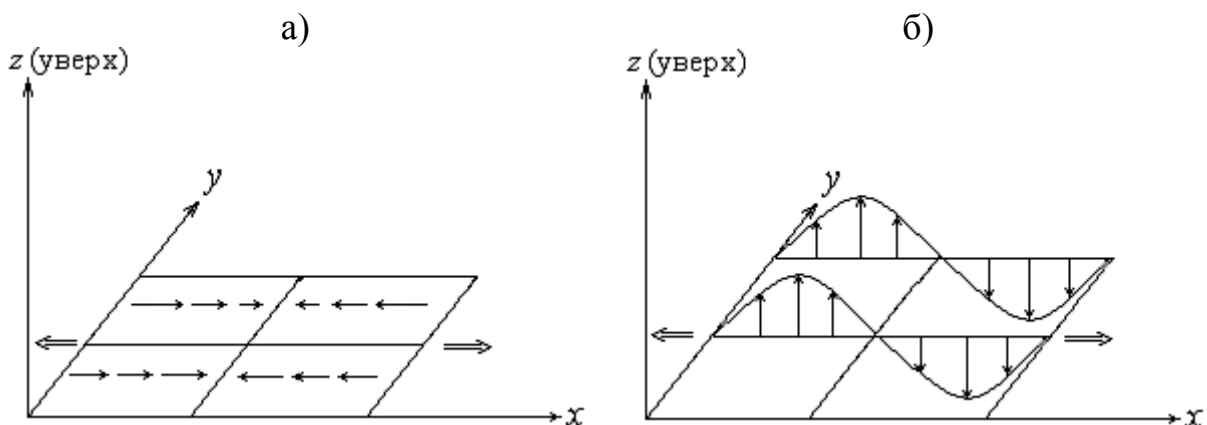
Перша класифікація ураховує лише кінематичні особливості рухів, зокрема, взаємне розташування напрямку розповсюдження хвилі і траєкторій частинок, які коливаються. В залежності від цього хвилі підрозділяються на три типи: повздовжені, вертикально-поперечні та горизонтально-поперечні.

Схематично взаємне положення траєкторії частинок (одинарні стрілки) і напрямку розповсюдження хвилі (подвійні стрілки) показано на рисунку 3.1.

Розглянемо ці типи хвиль більш детально.

Повздовжні хвилі або хвилі стиснення – це такі коливання, при яких траєкторії частинок паралельні напрямку розповсюдження хвилі (рис. 3.1а). Такі хвилі можуть виникати і поширюватися тільки в пружному середовищі (стиснення і розширення), які виникають в процесі деформації. Рисунок 3.1а наочно демонструє виникнення повздовжньої хвилі в результаті стиснення повітря уздовж лінії, яка розділяє протилежні течії.

Відповідно до рисунку 3.1а поширюватися праворуч і ліворуч буде лінія стиснення, але це у випадку одновимірної повздовжньої хвилі. Якщо маємо справу з тривимірною хвилею, то вона буде поширюватися у всіх напрямках і фронтом хвилі, тобто поверхнею перпендикулярною до напрямків поширення хвилі, будуть концентричні сферичні поверхні, що очолюють сферу, в центрі якої знаходиться джерело хвиль. До повздовжених відносяться акустичні або звукові хвилі.



в)

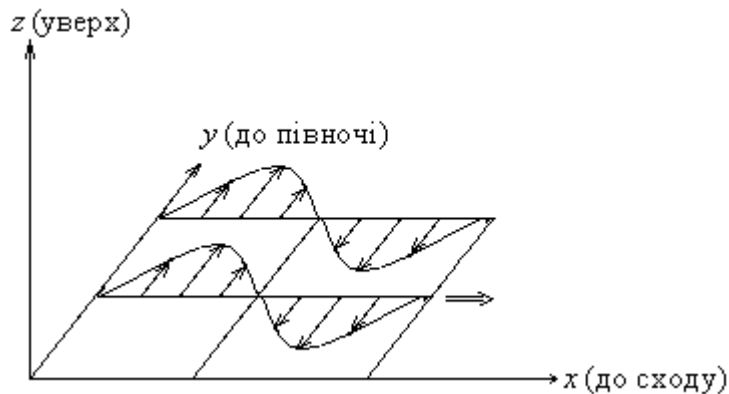


Рисунок 3.1 Схематичне зображення траєкторій частинок і напрямку поширення для повздовжних хвиль (а), вертикально-поперечних (б) і горизонтально-поперечних (в).

Вертикально-поперечні хвилі – це такі коливання, при яких частинки середовища рухаються уверх і униз, а сама хвиля розповсюджується в горизонтальному напрямку. На рисунку 3.1б зображена одновимірна вертикально-поперечно хвиля, яка поширюється уздовж осі  $x$  ліворуч і праворуч від місця її виникнення. Якщо хвиля двовимірна то хвильове збурення розповсюджується уздовж осей  $x$  та  $y$ , а у випадку тривимірної хвилі поширення відбувається ще й уздовж осі  $z$ .

В атмосфері вертикально-поперечні хвилі виникають під дією сили плавучості і формування їх можливе лише в стратифікованій по температурі атмосфері. До цього типу належать гравітаційні хвилі або хвилі плавучості. До гравітаційних відносяться також хвилі, які виникають завдяки порушенню геострофічної рівноваги в атмосфері. Ці хвилі на відміну від хвиль плавучості поширюються зі значно більшими швидкостями.

Горизонтально-поперечні хвилі – це коливання, в якому частинки середовища зміщуються з півночі на південь і з півдня на північ, а сама хвиля поширюється, як правило, на схід (рис. 3.1в). Ці хвилі можуть охоплювати потужний шар атмосфери і розповсюджуватися не тільки уздовж осі  $x$ , а і уздовж осі  $y$ , тобто ці хвилі можуть бути одновимірними і двовимірними.

Розглянемо тепер класифікацію, яка базується на урахуванні сил, які сприяють виникненню тих чи інших хвильових рухів. Ця класифікація називається гідродинамічною і для її побудови доцільно скористатися методом теорії подібності.

Суть цього методу полягає у тому, що вводяться деякі сталі величини, так звані характерні масштаби, які описують зміни функцій

(метеорологічних величин) і аргументів (часової та просторової координат).

Позначимо характерний масштаб будь-якої метеорологічної величини  $f$  через  $L_f$ , а будь-якого аргументу  $\eta$  - через  $L_\eta$  і сформулюємо основні постулати теорії подібності стосовно до атмосферних рухів.

1. Масштаб метеорологічної величини  $f$  підбирається таким чином, щоб він дорівнював порядку цієї величини, тобто

$$L_f = O(f).$$

Відповідно до цієї рівності характерні масштаби для складових вектора швидкості  $\vec{V}$  записується у вигляді:

$$\begin{aligned} L_u &= O(u); \\ L_v &= O(v); \\ L_w &= O(w). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Нагадаємо, що складові швидкості вітру  $u$  і  $v$  мають однаковий порядок, тому для них можна ввести один масштаб  $L_V$ , тобто

$$L_u = L_v = L_V.$$

Відмітимо також, що під порядком метеорологічної величини чи похідної розуміють середньоквадратичне її значення (згідно з таблицею Юдіна) або значення її в діапазоні, який включає до себе 99% усіх можливих значень (за оцінками Фрідмана і Гессельберга).

2. Цей постулат демонструє, що порядок похідної будь-якої функції  $f$  по будь-якому аргументу  $\eta$  дорівнює відношенню масштабів  $L_f$  та  $L_\eta$ , тобто

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \frac{L_f}{L_\eta}, \tag{3.2}$$

Для другої похідної має місце рівність

$$O\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) = \frac{L_f}{L_\eta^2}, \tag{3.3}$$

$$\text{де } L_f = \begin{Bmatrix} L_u \\ L_v \\ L_w \\ L_{\delta T} \\ L_{\delta P} \end{Bmatrix}, \quad L_\eta = \begin{Bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \\ L_t \end{Bmatrix}.$$

3. Локальні зміни метеорологічних величин визначаються в основному переносом різних властивостей атмосфери по горизонталі, тобто адвекцією, тому порядки локальних і адвективних членів однакові

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = O\left(V \frac{\partial f}{\partial s}\right), \quad (3.4)$$

де  $V$  - швидкість вітру,  $s$  - горизонтальна координата ( $x$  або  $y$ ). Рівність (3.4) можна переписати за допомогою масштабів таким чином

$$\frac{L_f}{L_t} = L_V \frac{L_f}{L_s}, \quad \text{відкіля} \quad L_s = L_V L_t. \quad (3.5)$$

Із (3.5) випливає, що горизонтальний масштаб атмосферних рухів дорівнює добутку масштабу швидкості вітру на часовий масштаб. Відмітимо, що застосування постулатів (3.2), (3.3) можливо лише в тому випадку, коли з урахуванням знаку середнє значення похідної дорівнює нулю.

Як правило, для більшості метеорологічних величин похідні по координатах  $x$  та  $y$  мають однаковий порядок, тому відповідні масштаби горизонтального руху приблизно рівні, і можна ввести один горизонтальний масштаб  $L_s$ , тобто  $L_x \approx L_y \approx L_s$ . Вертикальний масштаб руху істотно відрізняється від горизонтального, оскільки атмосфера анізотропна (розшарована по вертикалі), тому для рухів по вертикалі вводиться окремий масштаб  $L_z$ .

Застосуємо тепер основні положення теорії подібності для побудови гідродинамічної класифікації атмосферних процесів. Для цього оцінимо напочаток співвідношення членів рівнянь горизонтального руху: відносного прискорення і прискорення, яке виникає під дією тільки сили Кориоліса, тобто

$$\frac{du}{dt} = 2\omega_z \cdot v; \quad \frac{dv}{dt} = -2\omega_z \cdot u, \quad (3.6)$$

З урахуванням характерних масштабів для складових швидкості вітру  $L_u, L_v$  і постулата (3.2) рівняння (3.6) запишуться у вигляді

$$\frac{L_u}{L_t} = 2\omega_z L_v; \quad \frac{L_v}{L_t} = -2\omega_z L_u;$$

Оскільки  $L_u = L_v$ , із цих рівнянь випливає, що  $\frac{L_v}{L_t L_v} = 2\omega_z$  або з

урахуванням постулата (3.5), маємо  $\frac{1}{L_s} = \frac{2\omega_z}{L_v}$  або

$$L_s = \frac{L_v}{2\omega_z} \quad (3.7)$$

Отже, ми отримали горизонтальний масштаб коливань, які виникають під дією тільки сили Кориоліса, тобто під дією інерційної сили; тому ці коливання називаються інерційними. Оцінимо їх горизонтальний масштаб, наприклад, для  $\varphi = 45^\circ$ , де  $2\omega_z \approx 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ; якщо в якості масштабу швидкості вітру  $L_v$  взяти  $10 \text{ м} \cdot \text{c}^{-1}$ , то із формули (3.8) отримаємо горизонтальний масштаб інерційних коливань  $L_s \approx 10^5 \text{ м}$ , тобто порядку сотні кілометрів. Можна доказати математично, що при інерційних коливаннях частинки середовища зазнають обертання за годинниковою стрілкою по так званому інерційному колу, радіус якого  $r_\omega \approx L_s$  і на широті  $45^\circ$  дорівнює приблизно 100 км (рис. 3.2)

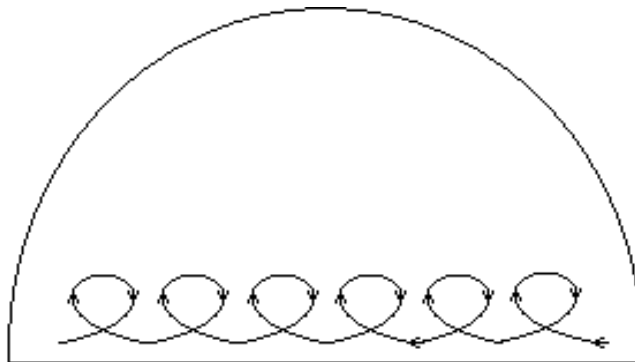


Рисунок 3.2. Інерційні коливання у північній півкулі.

Зауважимо, що антициклонічний рух по інерційних колах в обох півкулях (тобто за годинниковою стрілкою в північній півкулі і проти годинникової стрілки в південній) досить чітко простежується лише в океанах, тому що чисто інерційні коливання можливі лише при горизонтальному положенні

ізобаричних поверхонь, коли горизонтальний градієнт тиску дорівнює нулю, але в атмосфері такий стан відбувається досить рідко і лише на короткі часові інтервали. Таким чином, інерційні хвилі не відіграють великої ролі в атмосферних процесах.

Якщо в (3.7) горизонтальний масштаб  $L_s$  значно перевищує відношення  $\frac{L_v}{2\omega_z}$ , тобто

$$L_s \gg \frac{L_v}{2\omega_z},$$

то для такого класу рухів відносне прискорення повітряних частинок значно менша за прискорення сили Кориоліса. Пояснимо це таким чином. Повернемося до такого запису

$$L_v L_t \gg \frac{L_v}{2\omega_z} \quad \text{або} \quad L_v \cdot 2\omega_z \gg \frac{L_v}{L_t}; \quad (3.8)$$

Але в (3.8) вираз  $L_v \cdot 2\omega_z$  - це сила Кориоліса або прискорення цієї сили, а  $\frac{L_v}{L_t}$  - відносне прискорення. Згідно з рівняннями горизонтального руху відносне прискорення у вільній атмосфері визначається двома силами: силою баричного градієнта і Кориоліса. Якщо діють дві сили, а прискорення мале, то це означає, що сили компенсують одна одну, тобто вони приблизно рівні і протилежно спрямовані. Із динамічної метеорології відомо, що при рівновазі сил горизонтального баричного градієнту і Кориоліса формується геострофічний вітер, який належить до великомасштабних рухів вільної атмосфери, тому рухи, які задовольняють умовам (3.8), тобто  $L_s \gg 10^5$  м, будемо відносити до великомасштабних (макромасштабних) рухів.

Рухи з горизонтальними масштабами  $L_s \approx 10^5$  м, тобто коли сили інерції, баричного градієнту і Кориоліса мають однаковий порядок, будемо відносити до середньомасштабних (мезомасштабних) рухів.

І нарешті рухи, для яких  $L_s \leq 10^4$  м, будемо називати дрібномасштабними (мікромасштабними) рухами. Для такого класу рухів сила Кориоліса не відіграє суттєвої ролі і її впливом можна знехтувати при моделюванні цих рухів.

Таким чином, в залежності від горизонтальних масштабів, тобто розмірів територій, над якими формуються атмосферні рухи, останні умовно поділяються на макромасштабні, мезомасштабні і мікромасштабні.

Ця класифікація досить груба, але вона широко використовується при вивченні атмосферних процесів.

Оскільки практично на всі рухи в середовищах, які обертаються і до яких належить атмосфера, сила Кориоліса взагалі впливає досить істотно, то хвильові рухи в атмосфері можна розділити в залежності від ступеню впливу цієї інерційної сили. Основним принципом такої класифікації є співвідношення між періодом коливань  $\tau$  і так званим інерційним періодом  $\tau_{\text{ін.}}$ , який дорівнює половині маятникової доби. Нагадаємо, що маятникова доба дорівнює часу одного повного обертання маятника Фуко на широті  $\varphi$ .

$$\tau_{\text{ін.}} = \frac{2\pi}{2\omega_z} = \frac{2\pi}{2\omega \sin \varphi} = \frac{\tau_c}{2 \sin \varphi} = \frac{\tau_M}{2} \quad (3.9)$$

де  $\tau_c = \frac{2\pi}{\omega}$  - доба (період добового обертання Землі);  $\frac{\tau_c}{\sin \varphi} \equiv \tau_M$  - період математичного маятника.

$$\text{Для } \varphi = 45 \quad \tau_{\text{ін.}} = \frac{2 \cdot 3,14}{2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1} \sin 45^\circ} \approx 17 \text{ год.}$$

Отже, в залежності від співвідношення періоду розглядаємих коливань і інерційного періоду всі хвильові рухи можна розділити на 4 класи:

1. До першого відносяться ті хвильові процеси, періоди яких  $\tau$  значно менші інерційного періоду  $\tau_{\text{ін.}}$ , тобто  $\tau \ll \tau_{\text{ін.}}$ .

Головну роль у виникненні цих коливань відіграє сила тяжіння, яка визначає гравітаційне поле Землі, тому ці коливання називають гравітаційними.

2. До другого класу відносяться інерційно-гравітаційні хвилі, в формуванні яких істотний вклад вносить сила тяжіння і відхільна (інерційна) сила Кориоліса. Період цих хвиль не перевищує періоду інерційних коливань ( $\tau \leq \tau_{\text{ін.}}$ ).

Хвилі двох описаних класів зустрічаються в атмосфері дуже часто. Вони обумовлені, перш за все, стратифікацією атмосфери по температурі, вітру та вологості. Такі ж хвилі виникають за рахунок орографічних і температурних неоднорідностей (так звані горні хвилі) та хвилі, що пов'язані з термічною конвекцією.

3. До цього класу належать інерційні або гіроскопічні хвилі. Періоди цих коливань дорівнюють інерційному періоду ( $\tau \approx \tau_{\text{ін.}}$ ). Як відмічалось вище, такі коливання виникають, як правило, в океанах. Визначальною силою цих коливань є сила Кориоліса.



4. Четвертий клас складають планетарні хвилі або хвилі Россбі, періоди яких значно перевищують інерційний період ( $\tau > \tau_{\text{ін.}}$ ). Роль цих хвиль в атмосферних процесах виключно велика. Їх урахування необхідне при моделюванні погодоутворюючих процесів над великими територіями і клімату. У формуванні хвиль цього типу визначальний вклад вносять ефекти, які пов'язані з добовим обертанням Землі, її сферичністю, тобто зі змінами параметра Кориоліса з широтою.

На закінчення відзначимо, що відповідно до гідродинамічної класифікації всі атмосферні рухи достатньо грубо можна поділити на макромасштабні, мезомасштабні і мікромасштабні. Більш придатною для хвиль є класифікація, яка базується на порівнянні періодів  $\tau$  і  $\tau_{\text{ін.}}$ , відповідно до якої в атмосфері виділяють гравітаційні хвилі, інерційно-гравітаційні та планетарні хвилі Россбі.

Але атмосферні рухи багатомасштабні, тому існують і інші класифікації, в яких ураховуються параметри хвиль, їх спектральні характеристики, або процеси та явища, що супроводжують хвилі. Деякі з цих класифікацій досить детально викладені в підручнику з хвильових процесів в атмосфері (автор А.Ф. Ківганов).

#### 4. Приведення системи рівнянь гідротермодинаміки до лінійного вигляду

Система рівнянь гідротермодинаміки, яка є основою для моделювання усіх процесів, що відбуваються в атмосфері, в тому числі і хвильових, складається з нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Інакше кажучи, ця система є дуже складною і її можна розв'язувати тільки приблизними чисельними методами. В такому разі рішення має вигляд набору чисел, якщо задача розв'язується для багатьох точок простору або для багатьох моментів часу. Такі рішення досить важко аналізувати, тому для системи або окремих її рівнянь доцільно одержувати аналітичні, тобто точні рішення, які є досить прозорі для аналізу. Але аналітичні рішення допускають тільки лінійні рівняння, тому в даному курсі лекцій розглядаються лише лінійні моделі, а саме викладається лінійна теорія вільних або власних коливань, які існують в атмосфері Землі.

##### 4.1 Метод малих збурень та його обґрунтування.

Для приведення рівнянь гідротермодинаміки до лінійного вигляду використовується так званий метод малих збурень. Процедура приведення рівнянь до лінійного вигляду називається лінеаризацією.

Розглянемо суть методу малих збурень (ММЗ). Відповідно до цього методу будь-яка метеорологічна величина  $f$  представляється у вигляді:

$$f(x, y, z, t) = \bar{f} + f'(x, y, z, t), \quad (4.1)$$

де  $\bar{f}$  - характеристика основного стану, в якості якого може бути будь-який рух (наприклад, зональний потік) або стан спокою, тобто основний стан можна розглядати як фон, на якому виникають і розповсюджуються хвилі;  $f'(x, y, z, t)$  - характеристика хвильового збурення, яка вважається малою величиною в порівнянні з характеристикою основного стану, тобто задовольняється нерівність

$$f' < \bar{f} \quad \text{або} \quad \frac{f'}{\bar{f}} < 1. \quad (4.2)$$

Із нерівностей (4.2) випливає, що можна нехтувати добутками нескінченно малих величин, тобто членами типу

$$f' \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \approx 0. \quad (4.3)$$

де  $f' = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \rho' \end{Bmatrix}$  - мале збурення будь-якої метеорологічної величини,  $\eta = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Bmatrix}$  -

будь-яка величина.

Відповідно до методу малих збурень вважається також, що характеристики основного стану не залежать від просторових координат і часу і, таким чином, являють собою сталі величини, у зв'язку з чим

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

Вважається також, що характеристики основного стану є відомими, тобто являють собою числа.

Слід зауважити, що у випадках, коли хвильові рухи досліджуються в достатньо товстому шарі атмосфери, нехтувати залежністю метеорологічних величин від вертикальної координати  $z$  не можна, і тоді враховується така залежність  $\bar{f} = \bar{f}(z)$ , для якої умова (4.4) приймає вигляд

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \neq 0. \quad (4.5)$$

Але на початковій стадії розвитку хвилі виникають на окремих рівнях атмосфери і не охоплюють потужні її шари, тому при лінеаризації системи рівнянь гідротермодинаміки можна користуватись умовами (4.4). Крім того, на початок розвитку хвилі завжди є такий інтервал часу, коли амплітуду хвилі можна вважати нескінченно малою, тому метод малих збурень цілком може бути використаний на початкових стадіях розвитку хвильових рухів.

Отже приведемо за допомогою цього методу до лінійного вигляду індивідуальну похідну  $\frac{df}{dt}$ . Для цього розпишемо цю похідну через частинні похідні

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (4.6)$$

Згідно з ММЗ представимо усі функції в (4.6) у вигляді (4.1), тобто як суму характеристик основного руху  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{f})$  і характеристик малих збурень  $(u', v', w', f')$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= \bar{f} + f'(x, y, z, t); \\ u(x, y, z, t) &= \bar{u} + u'(x, y, z, t); \\ v(x, y, z, t) &= \bar{v} + v'(x, y, z, t); \\ w(x, y, z, t) &= \bar{w} + w'(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Підставимо (4.7) в (4.6), при цьому для скорочення запису не будемо вказувати залежність характеристик збурень від аргументів, тобто запишемо вираз для  $\frac{df}{dt}$  таким чином

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial(\bar{f} + f')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{f} + f')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial(\bar{f} + f')}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial(\bar{f} + f')}{\partial z}.$$

Розпишемо усі похідні і добутки в цьому виразі, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial f'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + u' \frac{\partial f'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial f'}{\partial y} + \\ &+ v' \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} + v' \frac{\partial f'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial f'}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} + w' \frac{\partial f'}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ураховуючи, що характеристики основного стану є сталі величини, у виразі (4.8) можна не враховувати члени  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$ ,  $\bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ ,  $u' \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ ,  $\bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}$ ,  $v' \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}$ ,  $\bar{w} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$ ,

$w' \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$ , тому що вони дорівнюють нулю. Також можна знехтувати членами

$u' \frac{\partial f'}{\partial x}$ ,  $v' \frac{\partial f'}{\partial y}$ ,  $w' \frac{\partial f'}{\partial z}$ , оскільки вони являють собою нескінченно малі

величини більш високого порядку ніж величини  $f', u', v', w'$ . Наприклад, якщо  $f' = u' = 0,1$ , їх добуток  $f' \cdot u'$  буде дорівнювати 0,01, а якщо врахувати, що похідна має більш низький порядок в порівнянні з самою

функцією, то добуток  $u' \frac{\partial f'}{\partial x}$  буде ще меншим. Це ж стосується і добутоків  $v' \frac{\partial f'}{\partial y}$ ,  $w' \frac{\partial f'}{\partial z}$ . З урахуванням сказаного вираз (4.8) приймає вигляд:

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{лін.}} = \frac{\partial f'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial f'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial f'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial f'}{\partial z}. \quad (4.9)$$

Це і є лінійний вигляд індивідуальної або повної похідної від будь-якої метеорологічної величини  $f$ . Відмітимо, що в формулі (4.6) адвективні члени  $u \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $v \frac{\partial f}{\partial y}$  і конвективний  $w \frac{\partial f}{\partial z}$  є нелінійними, тому що  $u, v, w$  і  $f$  - невідомі величини, а в формулі (4.9) аналогічні члени мають лінійний вигляд, оскільки  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  - відомі величини, тобто числа, а невідома  $f'$  в усіх членах має першу ступінь. Нагадаємо, що лінійні це такі члени, в яких немає добутоків невідомих і невідома має ступінь не вище першої.

Відмітимо, також що в нелінійному виразі для  $\frac{df}{dt}$  (4.6) невідомими величинами являються характеристики стану атмосфери  $u, v, w, f$ , де  $f$  - будь-яка метеорологічна величина, а в лінійному виразі (4.9) невідомі величини  $u', v', w', f'$  - це характеристики хвильових рухів, які ми будемо досліджувати за допомогою лінійних рівнянь.

## 4.2 Лінійна система рівнянь гідротермодинаміки

### 4.2.1 Лінеаризація рівнянь руху.

Випишемо рівняння руху з урахуванням основних сил, які діють у вільній атмосфері.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \quad (4.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \quad (4.11)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (4.12)$$

Ліві частини цих рівнянь, які являють собою індивідуальні похідні, можна записати в лінійному вигляді за допомогою виразу (4.9). Достатньо в цьому виразі замінити  $f'$  на  $u'$ , щоб отримати ліву частину рівняння (4.10) в лінійному вигляді. В другому рівнянні руху (4.11) роль  $f'$  відіграє  $v'$ , а в третьому рівнянні (4.12) -  $w'$ .

Таким чином, для отримання рівнянь руху в лінійному вигляді достатньо скористатися виразом (4.9) і лінеаризувати в правих частинах нелінійні члени, які описують силу баричного градієнта. Нагадаємо, що операція ділення, як і операція множення, є нелінійною, тому якщо в будь-якому члені рівняння є множення або ділення невідомих, то такий член належить до нелінійних.

Сила Кориоліса описується лінійними членами, тому що параметр Кориоліса  $\ell$  може бути розрахований для будь-якої заданої точки і тому вважається відомою величиною, тобто числом.

Відмітимо, що в рівняннях горизонтального руху проекції сили баричного градієнта тотожні, тому достатньо привести до лінійного вигляду один з цих членів, а другий розписати за аналогією.

Отже, відповідно до методу малих збурень представимо метеорологічні величини в такому вигляді

$$\begin{aligned}
 \rho(x, y, z, t) &= \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t); \\
 p(x, y, z, t) &= \bar{p}(z) + p'(x, y, z, t); \\
 T(x, y, z, t) &= \bar{T}(z) + T'(x, y, z, t); \\
 u(x, y, z, t) &= \bar{u} + u'(x, y, z, t); \\
 v(x, y, z, t) &= \bar{v} + v'(x, y, z, t); \\
 w(x, y, z, t) &= \bar{w} + w'(x, y, z, t).
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Рівності (4.13) показують, що в якості основного стану розглядається потік повітря, який стратифікований по вертикалі відносно тиску, густини і температури, тому ці характеристики залежать від вертикальної координати  $z$ , а складові швидкості потоку  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  - сталі величини.

Ще раз підкреслимо, що нехтувати залежністю  $\bar{\rho}, \bar{p}$  і  $\bar{T}$  від вертикальної координати  $z$  допустимо в тому разі, коли розглядаються потоки в досить тонких шарах атмосфери, де зміни вказаних характеристик несуттєві.

Для скорочення запису, як і раніше будемо опускати аргументи функцій, тобто представимо (4.13) так:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v'
 \tag{4.14}$$

де  $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{u}, \bar{v}$  і  $\rho', p', u', v'$  - характеристики основного стану і хвильових рухів відповідно.

Представимо силу баричного градієнта в рівнянні (4.10) з урахуванням (4.14)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right). \quad (4.15)$$

Оскільки характеристика основного стану  $\bar{p}$  залежать тільки від  $z$  і не залежить від координати  $x$ , похідна  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$  дорівнює нулю. З урахуванням цього перепишемо (4.15) в такому вигляді

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho} \left( 1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad \text{або} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left( 1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1} \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (4.16)$$

У виразі (4.16) є біном  $\left( 1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1}$ , в якому доданок  $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} < 1$  (згідно з (4.2)). Із математики відомо, що біном, який має вигляд  $(1+x)^{-1}$  де  $x < 1$ , можна представити у вигляді ряду.

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad (4.17)$$

Представимо біном  $\left( 1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1}$  у вигляді (4.17), в якому роль функції  $x$  відіграє відношення  $\frac{\rho'}{\bar{\rho}}$ . Отже

$$\left( 1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1} = 1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \left( \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^2 - \left( \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^3 + \dots \quad (4.18)$$

Підставимо (4.18) в (4.16), отримаємо

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left[ 1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \left( \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^2 - \left( \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^3 + \dots \right] \cdot \frac{\partial p'}{\partial x} \quad \text{або,}$$

якщо розкрити дужки будемо мати

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{(\rho')^2}{\bar{\rho}^3} \frac{\partial p'}{\partial x} + \dots \quad (4.19)$$

В правій частині (4.19) другий і третій члени мають добутки нескінченно малих  $\rho' \frac{\partial p'}{\partial x}$  і  $(\rho')^2 \frac{\partial p'}{\partial x}$ , якими відповідно до умови (4.3) можна знехтувати; тоді із (4.19) отримаємо лінійний вигляд для сили баричного градієнта

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (4.20)$$

Аналогічно

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y}. \quad (4.21)$$

Члени, які описують силу Кориоліса відповідно до (4.14) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \ell v &= \ell(\bar{v} + v') = \ell\bar{v} + \ell v'; \\ \ell u &= \ell(\bar{u} + u') = \ell\bar{u} + \ell u'. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отримаємо тепер лінійний вигляд для вертикальної складової сили баричного градієнта, з урахуванням того, що  $\bar{\rho}$  залежить від координати  $z$ .

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z}.$$

Помножимо праву частину цього виразу на  $(\bar{\rho} + \rho')$ , отримаємо

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{(\bar{\rho} + \rho')}{(\bar{\rho})^2 - (\rho')^2} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} = -\frac{(\bar{\rho} + \rho')}{(\bar{\rho})^2 - (\rho')^2} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} \right).$$

Оскільки  $(\rho')^2 = 0$ , а відповідно до рівняння статички  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g$ , останній вираз приймає вигляд



$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^2} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\right) \left(-\bar{\rho}g + \frac{\partial p'}{\partial z}\right) = g - \frac{\rho'g}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial z}.$$

Останнім членом в цьому виразі можна знехтувати, оскільки він містить у собі добуток нескінченно малих, тому остаточно маємо

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + g - \frac{\rho'g}{\bar{\rho}}. \quad (4.23)$$

З використанням виразів (4.9), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) запишемо рівняння руху у лінійному вигляді

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \ell \bar{v} + \ell v'; \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - \ell \bar{u} - \ell u'; \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}}. \quad (4.26)$$

Ці рівняння отримані для випадку, коли основний стан представляє собою рух, який характеризується швидкостями  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ , тобто хвильові рухи існують в деякому потоці зі швидкістю  $\vec{V}$ , складові якої  $\bar{u}, \bar{v}$  і  $\bar{w}$  не змінюються з часом і у просторі. Що до тиску та щільності, то ураховуються їх зміни з висотою, але по координатах  $x, y$  та з часом вони також не змінюються.

Для випадку, коли основний стан є стан спокою, тобто рух відсутній і  $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ , рівняння (4.24) – (4.26) приймають такий вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \ell v'; \\ \frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - \ell u'; \\ \frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Відмітимо, що у вільній атмосфері помірних широт переважають вітри, які спрямовані з заходу на схід, так звані зональні потоки. В таких потоках постійно формуються і переміщуються хвильові збурення, тому доцільно розглянути випадок, коли основним станом є зональний потік ( $\bar{u} = const$ , а  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ ). В такому разі мають місце такі рівності

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = v'; \quad w = w'.$$

З урахуванням цих рівностей рівняння руху (4.24) – (4.26) запишуться таким чином

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \ell v'; \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - \ell \bar{u} - \ell u'; \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Порівняння систем (4.28) і (4.27) показує, що у випадку, коли основний стан, тобто фон, на якому виникають і розповсюджуються хвилі, це є зональний потік, в системі лінеаризованих рівнянь руху зберігаються всі члени, в яких присутня зональна складова вітру  $\bar{u}$ .

#### 4.2.2 Лінеаризація рівнянь нерозривності і припливу тепла.

Лінійний вигляд рівняння нерозривності відносно стану спокою одержати досить просто. Випишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V} = -\left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right).\tag{4.29}$$

Якщо це рівняння розписати згідно з ММЗ, тобто представленням метеорологічних величин у формі (4.13), то з урахуванням того, що для стану спокою  $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$ , отримаємо такий лінійний його вигляд

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = -\bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right).\tag{4.30}$$

Відносно зонального потоку  $\bar{u}$  лінійний вигляд рівняння (4.29) буде таким

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = -\bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right).\tag{4.31}$$

Якщо у якості основного стану розглядати потік повітря, швидкість якого характеризується складовими  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  і  $\bar{w}$ , то лінійний вигляд рівняння нерозривності буде значно складнішим, а саме

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \rho'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = -\bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right). \quad (4.32)$$

Для рівняння припливу тепла найбільш простий лінійний варіант можна отримати, якщо це рівняння записати в термінах потенціальної температури в адіабатичному наближенні, тобто

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (4.33)$$

Для стратифікованого відносно  $\bar{\theta}$  потоку, швидкість якого описується складовими  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ , рівняння (4.33) буде мати таку лінійну форму

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0. \quad (4.34)$$

Порівняння (4.34) і (4.32) показує, що ліві частини цих рівнянь мають однаковий вигляд, відрізняються лише метеорологічні величини, для яких вони записані.

Лінійний вигляд рівняння припливу тепла відносно стану спокою має зовсім простий вигляд

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0. \quad (4.35)$$

На закінчення випишемо всю систему рівнянь гідротермодинаміки для випадку, коли основний стан – стратифікований за вертикаллю відносно  $\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{T}$  потік повітря зі сталою швидкістю  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + l\bar{v} + lv'; \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial v'}{\partial z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y} - l\bar{u} - lv'; \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}}; \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \rho'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \rho'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} &= -\bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Ця система містить в собі невідомі  $u', v', w', \rho', p', \theta'$ , тобто характеристики хвильових рухів, і тому використовується для їх вивчення.

#### 4.3 Обмеження методу малих збурень.

При використанні методу малих збурень не ураховується багато членів, які описують важливі атмосферні процеси, тому цей метод має досить жорсткі фізичні обмеження.

Визначимо ці обмеження на прикладі лінеаризації індивідуальної похідної для будь-якої метеорологічної величини  $f$ . Як показано в підрозділі 4.1, при лінеаризації похідної  $\frac{df}{dt}$  не ураховується дев'ять членів.

Розглянемо фізичну суть цих членів, але спочатку представимо їх у вигляді трьох груп. В першу групу ввійдуть члени, які містять тільки характеристики основного руху або стану, тобто

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}. \quad (4.37)$$

Друга група членів має вигляд

$$u' \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad (4.38)$$

тобто включає характеристики як основного стану, так і хвильових збурень.

І нарешті третя група членів включає до себе тільки характеристики хвильових збурень

$$u' \frac{\partial f'}{\partial x} + v' \frac{\partial f'}{\partial y} + w' \frac{\partial f'}{\partial z}. \quad (4.39)$$

Всі ці групи описують нелінійні взаємодії між різними метеорологічними полями.

Так, перша група (4.37) описує взаємодії між полями вітру і метеорологічної величини  $\bar{f}$  в основному потоці, тобто в потоці, в якому виникають і розповсюджуються хвилі. Ці взаємодії приводять до обміну

різними видами енергії у фоновому потоці. Наприклад, в рівнянні припливу тепла ці члени мають вигляд  $\left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)$  і описують перенос внутрішньої енергії повітря у фоновому потоці, стан якого описується температурою  $\bar{T}$  і складовими швидкості  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ . Цей перенос призводить до обміну кінетичною та тепловою енергіями в потоці, який розглядається як основний рух або стан.

Друга група членів (4.38) характеризує взаємодії між фоновим потоком і хвилями, при цьому хвилі віддають енергію основному потоку, завдяки чому змінюється поле характеристики потоку  $\bar{f}$ . Так, в рівнянні припливу тепла члени  $\left( u' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)$ , описують механізм передачі внутрішньої енергії газу від хвильових рухів до основного потоку, що приводить до змін температури в потоці, де розповсюджуються хвилі

Третя група членів (4.38) описує взаємодію, а значить і обмін енергією тільки між хвильовими рухами, які розповсюджуються на фоні основного стану.

Таким чином, розглянуті групи членів відіграють суттєву роль в хвильових процесах і їх неврахування приводить до фізичного збідніння лінійних моделей, в яких ураховується тільки обмін енергією між хвилями та основним рухом, при цьому хвильові рухи лише отримують енергію від фонового потоку. Тобто у відповідності до лінійної теорії хвилі можуть зростати тільки за рахунок енергії основного потоку, але вони не можуть віддавати свою енергію цьому потокові, а також обмінюватися енергією між собою. Отже, будь-яка лінійна модель з фізичної точки зору бідніша за нелінійну, проте лінійні моделі дозволяють одержати аналітичні (тобто точні) розв'язки, в результаті аналізу яких можна вивчити основні властивості процесів, що досліджуються.

## 5 Лінійна модель одновимірних акустичних хвиль.

Хвильові рухи, які виникають без участі факторів, зовнішніх відносно до атмосфери Землі, називаються вільними або власними коливаннями. Як відмічалось раніше, такі коливання можна розділити на три типи: акустичні хвилі, гравітаційні та інерційні великомасштабні хвилі. В даному розділі викладаються найбільш прості лінійні моделі одновимірних хвиль вказаних типів.

Звернемося спочатку до лінійної моделі одновимірних акустичних хвиль, які за кінематичною класифікацією відносяться до поздовжних.

### 5.1 Постановка задачі і вихідна система рівнянь

Будемо розглядати поздовжні хвилі в „чистому вигляді”, тобто виключимо із системи рівнянь хвилі інших типів (гравітаційні та інерційні хвилі Россбі). Нагадаємо, що вихідна система рівнянь описує всі типи хвиль. Отже для виключення гравітаційних коливань, які належать до вертикально-поперечних, будемо вважати, що вертикальна складова вектору швидкості відсутня, тобто  $w=0$ . Відомо, що при гравітаційних коливаннях частинки середовища здійснюють рухи у вертикальній площині зі швидкістю  $w$ , тому в середовищі, де вертикальна швидкість відсутня, гравітаційні коливання неможливі.

Для виключення довгих хвиль Россбі слід виключити вплив обертання Землі, оскільки ці хвилі виникають завдяки добовому обертанню Землі і її сферичності. Якщо вважати, що параметр Кориоліса дорівнює нулю, то тим самим буде виключено вплив обертання Землі.

Запишемо у математичному вигляді основні обмеження задачі про одновимірні акустичні хвилі:

- вважаємо, що  $w=0$ , (5.1)

тобто виключаємо гравітаційні хвилі.

- друге припущення  $\ell=0$  (5.2)

дозволяє виключити інерційні хвилі Россбі

- третя умова  $v=0$ , (5.3)

тобто меридіональна складова швидкості вітру відсутня, і рухи частинок середовища при розглядаємих хвильових коливаннях обмежуються тільки віссю  $x$ . Цим визначається їх одновимірність.

Вихідна система рівнянь. Для побудови лінійної моделі для акустичних хвиль використаємо систему рівнянь ГТД, але перш ніж записати її, замітимо, що завдяки умовам (5.1) і (5.3) всі члени рівнянь, які містять в собі меридіональну складову швидкості вітру  $v$ , або вертикальну складову -  $w$ , будуть дорівнювати нулю; нульовими будуть також члени з параметром Кориоліса  $\ell$  (згідно з умовою (5.2)).

Спочатку запишемо систему рівнянь в такій формі, яку зручно використовувати для виключення невідомих з метою зменшення кількості рівнянь.

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= -\text{div} \vec{V}; \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt}; \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Система (5.4) містить в собі шість невідомих  $u, v, w, p, \rho, T$ , складається з шести рівнянь, тобто є замкненою і тому може бути розв'язана.

З урахуванням обмежень (5.1) – (5.3) ця система рівнянь значно спрощується. Так, перше рівняння руху приймає вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (5.5)$$

З другого рівняння системи (5.4) випливає, що  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , тобто сила баричного градієнта уздовж осі  $y$  відсутня. Третє рівняння руху вироджується в рівняння статички  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ .

Останні рівняння (нерозривності, припливу тепла і стану) шляхом перетворень можна звести до одного рівняння. Виконаємо ці перетворення. На початок виключимо температуру з рівняння припливу тепла. Для цього знайдемо її з рівняння стану

$$T = \frac{p}{R\rho}$$

і продиференціюємо одержаний вираз за часом, тобто знайдемо повну похідну  $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{R\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{R\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$ . Підставимо отриманий вираз в рівняння припливу тепла системи (5.4)

$$\frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{R\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{R\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.6)$$

З рівняння (5.6) знайдемо  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ , для цього помножимо обидві його частини на  $\frac{R\rho}{p}$  з урахуванням того, що  $\rho = \frac{p}{RT}$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{R}{pc_p} \frac{dp}{dt} \text{ або} \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \left( 1 - \frac{R}{c_p} \right) \text{ або} \end{aligned}$$

ураховуючи, що  $R = c_p - c_v$  останній вираз можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \left( \frac{c_p - c_p + c_v}{c_p} \right) \text{ або} \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \cdot \frac{c_v}{c_p} \text{ або} \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{\chi p} \frac{dp}{dt}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де  $\chi = \frac{c_p}{c_v} \approx 1,4$ .

Підставимо тепер (5.7) в рівняння нерозривності

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi p} \frac{dp}{dt} &= -\text{div} \vec{V} = -\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \text{ відкіля} \\ \frac{dp}{dt} &= -\chi p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$



Таким чином, ми виключили  $\rho$  із рівняння нерозривності. Розпишемо ліву частину останнього рівняння через частинні похідні

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = -\chi p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Це рівняння з урахуванням обмежень (5.1) – (5.3) приймає вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \chi p \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.8)$$

Отже із системи рівнянь (5.4) ми одержали два рівняння (5.5) і (5.8), на основі яких можна побудувати лінійну модель одновимірних акустичних хвиль. Випишемо ці рівняння у вигляді системи

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \chi p \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

## 5.2 Лінійна система рівнянь.

Рівняння системи (5.9) є нелінійні і для приведення їх до лінійного вигляду використаємо метод малих збурень, тобто представимо невідомі функції у вигляді

$$u = \bar{u} + u'; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'. \quad (5.10)$$

Підставимо (5.10) в (5.9), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{1}{(\bar{\rho} + \rho')} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \chi(\bar{p} + p') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Після виконання в (5.11) необхідних операцій і урахування обмежень методу малих збурень (4.2) – (4.4) отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих  $u'$ ,  $p'$ , а саме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + \chi \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Таким чином, одержана система двох рівнянь з двома невідомими, яка є замкненою і може бути розв'язана. За суттю ця система і представляє собою лінійну модель одновимірних акустичних хвиль, але систему можна звести до одного рівняння відносно однієї невідомої  $u'$  або  $p'$ . Виключимо з (5.12) невідому  $u'$ . Оскільки система складається з диференціальних рівнянь, зручно спочатку виділити загальні диференціальні оператори, тому запишемо рівняння системи (5.12) таким чином

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0; \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' + \chi \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

З системи (5.13) видно, що в першому рівнянні до функції  $u'$  застосовується оператор  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , а у другому рівнянні  $u'$  диференціюється по  $x$  і помножується на множник  $\chi \bar{p}$ . Таким чином, щоб одержати однакові члени з  $u'$  в першому і другому рівняннях системи, треба перше рівняння продиференціювати по  $x$  і помножити на  $\chi \bar{p}$ , а до другого рівняння застосувати оператор  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , а потім відняти, наприклад, із другого рівняння перше. Виконаємо цю процедуру

$$\left. \begin{aligned} \chi \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \right] &= 0; \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' + \chi \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Перепишемо систему, починаючи з другого рівняння, і виконаємо операцію віднімання

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x}\right) + \chi \bar{p} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u'}{\partial x} - \chi \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}\right) - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0.$$

або

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x}\right) + \chi \bar{p} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) - \chi \bar{p} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} + \bar{u} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (5.15)$$

В (5.15) підкреслені члени однакові з протилежними знаками, тому вони скорочуються. В результаті отримаємо рівняння відносно невідомої  $p'$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0, \quad \text{або}$$

після розкриття оператора  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)$  останнє рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + \bar{u}^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad \text{або,}$$

якщо згрупувати члени з  $\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$ , отримаємо

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + \left(\bar{u}^2 - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}}\right) \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0. \quad (5.16)$$

### 5.3 Розв'язання хвильового рівняння.

Рівняння виду (5.16) називаються хвильовими. Таким чином, ми отримали хвильове рівняння для одновимірних акустичних хвиль.

Відомо, що рішенням такого рівняння являється будь-яка періодична функція, зокрема, така

$$p'(x, t) = A \cdot \ell^{i(kx - \sigma t)}. \quad (5.17)$$

Підставимо (5.17) в хвильове рівняння (5.16). Для цього знайдемо всі похідні від  $p'$ , які є в рівнянні (5.16).

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = A \cdot \ell^{i(kx - \sigma t)} \cdot (-i\sigma);$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} \cdot (-i\sigma)^2 = -\sigma^2 A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)}; \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} \cdot (ik);$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} \cdot (ik)^2 = -k^2 A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)}; \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} = (ik)(-i\sigma)A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} = k \cdot \sigma \cdot A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)}. \quad (5.20)$$

Підставимо тепер (5.18) – (5.20) в (5.16)

$$-\sigma^2 A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} + 2\bar{u} \cdot k \cdot \sigma \cdot A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} - k^2 \left( \bar{u}^2 - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \right) A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)} = 0,$$

або після скорочення на  $A \cdot \ell^{i(kx-\sigma)}$  отримаємо

$$-\sigma^2 + 2\bar{u} \cdot k \cdot \sigma - k^2 \left( \bar{u}^2 - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \right) = 0. \quad (5.21)$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на (-1) і урахуємо, що циклічна частота  $\sigma = c \cdot k$ , де  $c$  - фазова швидкість хвилі, а  $k$  - хвильове число уздовж осі  $x$ . В результаті отримаємо

$$k^2 c^2 - 2\bar{u} \cdot k^2 c + k^2 \left( \bar{u}^2 - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \right) = 0$$

або, якщо скоротити на  $k^2$ , будемо мати

$$c^2 - 2\bar{u}c + \left( \bar{u}^2 - \frac{\chi \bar{p}}{\bar{\rho}} \right) = 0 \quad (5.22)$$

Рівняння (5.21), (5.22) – це так звані дисперсійні співвідношення, які пов'язують характеристики середовища, де виникають і розповсюджуються хвилі, з параметрами саміх хвиль. Так, рівняння (5.21) пов'язує характеристики основного потоку  $\bar{u}, \bar{p}, \bar{\rho}$  з циклічною частотою, а рівняння (5.22) – ті ж характеристики з хвильовим числом.

Неважко бачити, що (5.22) представляє собою квадратне рівняння відносно невідомої  $c$  типу

$$ax^2 + bx + d = 0, \quad (5.23)$$

де  $d$  - вільний член. В нашому випадку роль  $x$  відіграє фазова швидкість хвилі  $c$ , коефіцієнту  $a$  відповідає одиниця,  $b = -2\bar{u}$ , а вільному члену – вираз  $\left(\bar{u}^2 - \frac{\chi\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)$ . Для отримання невідомої величини  $x$  з рівняння (5.23)

можна скористатися спрощеною формулою, а саме

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - d} \quad (5.24)$$

З урахуванням сказаного запишемо рішення рівняння (5.22) згідно з (5.24), а саме

$$c = \frac{2\bar{u}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\bar{u}}{2}\right)^2 - \left(\bar{u}^2 - \frac{\chi\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)} \quad \text{або після скорочення}$$

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2 + \frac{\chi\bar{p}}{\bar{\rho}}}.$$

Під коренем  $\bar{u}^2$  скорочується і вираз для фазової швидкості одномірних акустичних хвиль набуває вигляду

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\frac{\chi\bar{p}}{\bar{\rho}}} \quad \text{або}$$

з використанням рівняння стану  $\bar{p} = \bar{\rho}RT$ , маємо

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\chi R\bar{T}}. \quad (5.25)$$

Отже, завдяки розв'язанню хвильового рівняння (5.16), ми одержали одну з важливих характеристик хвильових рухів – їх фазову швидкість, тобто швидкість, з якою переміщується будь-яка фаза хвилі (гребінь, чи улоговина або якась інша частина профілю хвилі).

Розв'язок (5.25) показує, що фазова швидкість повздовжних хвиль, до яких належать акустичні хвилі, залежить лише від характеристик середовища, в якому хвилі розповсюджуються, і не залежить від параметрів хвиль (амплітуди, довжини, частоти).

Відомо, що швидкість звуку  $c_s = \sqrt{\chi R\bar{T}}$ , і таким чином, швидкість повздовжних хвиль відрізняється від швидкості звуку на величину  $\bar{u}$ . Оскільки швидкість атмосферних рухів набагато менша за швидкість звуку ( $\bar{u} \approx 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $c_s \approx 330 - 340 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ ), тому (5.25) можна записати у вигляді

$$c \approx \pm \sqrt{\chi R\bar{T}}. \quad (5.26)$$

Ураховуючи, що  $\chi = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ ,  $R \approx 287 \text{ м}^2\text{с}^{-2}\text{К}^{-1}$ , для  $\bar{T} = 273\text{К}$

отримаємо

$$c = \sqrt{1,4 \cdot 287 \text{ м}^2\text{с}^{-2}\text{К}^{-1} \cdot 273\text{К}} \approx 330 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Оскільки фазова швидкість повздовжних хвиль пов'язана зі швидкістю звуку, ці хвилі називаються акустичними або звуковими. В середовищі, яке знаходиться в стані спокою ( $\bar{u} = 0$ ), відповідно до формули (5.25) швидкість повздовжних хвиль в точності дорівнює швидкості звуку.

Зауважимо, що знаки +, - перед коренем свідчать про те, що акустична хвиля (одновимірна) розповсюджується з однаковою фазовою швидкістю в обох напрямках від місця виникнення хвильового збурення.

#### 5.4. Фізичний механізм поширення акустичних хвиль.

Для наочного уявлення про механізм виникнення і поширення акустичних хвиль опишемо якісно процес, який ми за допомогою рівнянь описали кількісно.

Уявимо собі довгу горизонтальну трубу, яка наповнена повітрям. Повітря знаходиться в стані спокою, тобто  $\bar{u} = 0$ ; тиск і густина є сталі величини ( $\bar{P} = \bar{\rho} = \text{const}$ ). Припустимо, що в цю трубу впаяна друга (вертикальна) труба, в яку вставлено поршень. Для того, щоб експеримент відповідав розглянутій задачі, направимо вісь  $x$  уздовж горизонтальної труби.

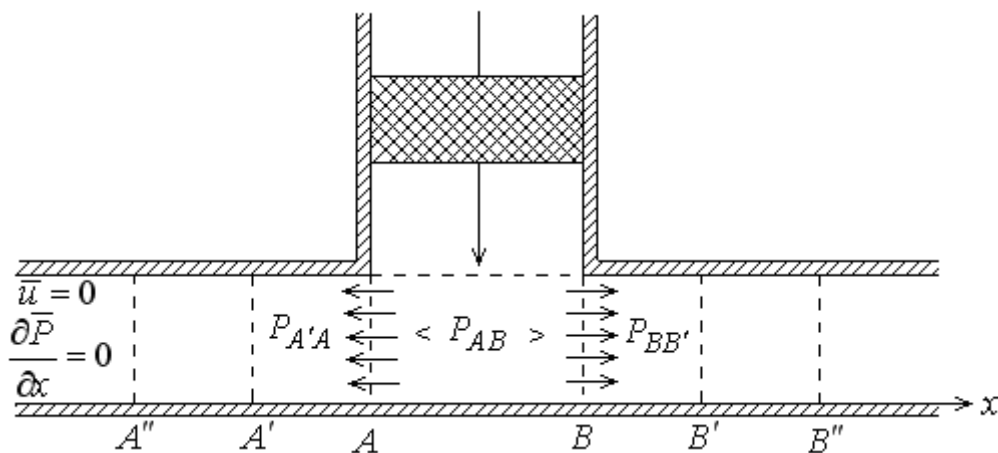


Рисунок 5.1 Схема ілюстрації виникнення та розповсюдження повздовжних хвиль.

Тепер припустимо, що поршень дуже швидко перемістився до положення, яке на рисунку відмічено пунктиром, - настільки швидко, що повітря, яке знаходиться за межами інтервалу  $AB$  ще не починає рухатися до того моменту, коли поршень досягає кінцевого положення. В такому разі на ділянці труби  $AB$  відбудеться стиснення повітря. До чого ж це приведе?

З фізики атмосфери відомо, що адіабатичне стиснення приводить до зростання температури і згідно з рівнянням припливу тепла – до зростання тиску. В нашому випадку зростання тиску на ділянці  $AB$  приведе до того, що тиск на цій ділянці  $P_{AB}$  буде більшим, ніж на сусідніх ділянках  $BB'$  і  $A'A$ . Завдяки перепаду тиску виникає сила баричного градієнту, яка у відповідності до рівняння руху надає частинкам повітря прискорення. Під дією цього прискорення частинки повітря будуть рухатися праворуч і ліворуч від ділянки  $AB$ . Цей рух, який показано стрілками на рисунку 5.1, приведе до адіабатичного стиснення повітря на ділянках  $BB'$  і  $A'A$ , що в свою чергу приведе до виникнення сили баричного градієнту і під її дією – до руху ліворуч і праворуч від ділянок  $A'A$  і  $BB'$  відповідно. В наступний момент часу адіабатичне стиснення станеться на сусідніх ділянках  $A''A'$  і  $B'B''$  і, таким чином, хвильове збурення у вигляді стиснення буде розповсюджуватися праворуч і ліворуч від місця його виникнення (ділянки  $AB$ ).

Відповідно до нашого математичного результату, це хвильове збурення буде одночасно рухатися в напрямку осі  $x$  і в протилежному напрямку зі швидкістю звуку, згідно з формулою (5.26)

Зі сказаного випливає, що необхідною частиною механізму, за допомогою якого виникають і поширюються акустичні хвилі, є адіабатичне зростання (або зменшення тиску), яке відбувається завдяки стисненню (або розрідженню) середовища. Характерна особливість чисто акустичних хвиль полягає у тому, що сила баричного градієнта, яка породжує прискорення частинок середовища, обумовлена одним тільки адіабатичним стисненням. При відсутності такої особливості існування акустичних хвиль неможливе.

При побудові моделей гідродинамічного прогнозу погоди важливо мати чітке уявлення про параметри хвиль, особливо про їх амплітуди в полях різних метеорологічних величин. Отже, обговоримо це питання для акустичних хвиль.

Довжина поздовжних хвиль невелика, від декількох сантиметрів до десятків та сотен метрів, тому ці хвилі іноді називаються короткими. Проте існують і такі типи акустичних хвиль, які мають значно більші довжини.

Щодо амплітуд акустичних хвиль, то найбільш важливо знати амплітуди їх в полі тиску, тобто важливо знати, які зміни тиску відбуваються при розповсюдженні акустичних хвиль. Дослідження

показали, що амплітуди цих хвиль складають десятки частки гектопаскалю, тобто вони викликають дуже малі зміни в полі тиску і тому не впливають на погодоутворювальні процеси. Однак їх урахування не тільки ускладнює розв'язання системи рівнянь гідротермодинаміки, а й може призвести до перекручення рішення системи. У зв'язку з цим, акустичні хвилі з точки зору гідродинамічного прогнозу погоди називаються метеорологічними шумами і відфільтровуються із системи рівнянь.

Оскільки акустичні хвилі виникають в стисливому середовищі за рахунок його стиснення і розрідження, то для того, щоб виключити ці хвилі з системи рівнянь гідротермодинаміки, достатньо вважати атмосферу нестисливим середовищем, тобто рівняння нерозривності в цьому випадку треба записувати для нестислової атмосфери

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0, \text{ тобто } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

На закінчення слід зазначити, що менш жорсткою умовою фільтрації акустичних хвиль, які розповсюджуються у вертикальному напрямку, є квазістатичне наближення, відповідно до якого третє рівняння руху записується у формі рівняння статички

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Розповсюдження акустичних хвиль спричиняє ефект розсіювання енергії і приводить до зменшення їх амплітуди, тобто до їх зникнення. Так, акустичні хвилі пробігають шар атмосфери товщиною 10 км (шар тропосфери), який містить 75% всієї маси повітря, приблизно за 30 секунд.

Розсіювання збурень за рахунок розповсюдження хвиль в похилих напрямках відбувається повільніше, але навіть з урахуванням цієї обставини характерний час відновлення квазістатичного режиму має порядок хвилини. За такий малий проміжок часу і з такими малими амплітудами акустичні хвилі не можуть впливати на атмосферні процеси.



6 Лінійна модель одновимірних гравітаційних хвиль на поверхні розділу.

Розглянемо тепер вертикально-поперечні хвилі, до яких належать і хвилі плавучості, що виникають в стійко стратифікованих шарах атмосфери, і гравітаційні хвилі на атмосферних фронтах, і хвилі, які пов'язані з порушеннями геострофічного балансу в атмосфері, тобто хвильові збурення, що виникають в процесі адаптації полів вітру і тиску.

### 6.1 Постановка задачі і вихідні рівняння

Ми розглянемо тут хвилі, які виникають на поверхнях розділу двох атмосферних шарів. Задача про такі хвилі в загальній постановці є досить складною, тому введемо цілий ряд спрощень.

По-перше, будемо розглядати гравітаційні хвилі, як і акустичні, в „чистому вигляді”. Для цього вважаємо наступне:

- атмосфера – нестисливе середовище, тобто  $\rho = const$  і рівняння нерозривності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (6.1)$$

ця умова виключає із системи рівнянь акустичні хвилі;

- параметр Коріоліса дорівнює нулю

$$l = 0; \quad (6.2)$$

відфільтровуються інерційні коливання (хвилі Россбі);

- меридіональна складова швидкості вітру відсутня

$$v = 0; \quad (6.3)$$

завдяки цій умові рухи частинок середовища обмежуються площиною  $XOZ$ , тобто розглядаються одновимірні хвилі.

Далі будемо вважати, що атмосфера складається з двох однорідних шарів з густиною  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , які розділені поверхнею розриву густини (рис 6.1).

На рисунку 6.1 висота поверхні розділу позначена через  $h$ . Вона є функція координати  $x$  і часу  $t$ , тобто  $h = f(x, t)$ . Нехай в точці 1 висота цієї поверхні  $h_1$ , а в точці 2 -  $h_2$ . Тоді товщину шару  $\delta z$  можна виразити через приріст висоти поверхні розділу

$$\delta z = h_2 - h_1 = \frac{\partial h}{\partial x} \delta x. \quad (6.4)$$

Для подальшого спрощення задачі будемо вважати, що існує деякий рівень у верхньому шарі (з густиною  $\rho_2$ ), де  $p = P = const$ , тобто горизонтальний градієнт тиску дорівнює нулю. Тоді з рівняння статки випливає, що горизонтальний градієнт тиску дорівнює нулю в усьому верхньому шарі, тобто у шарі, який знаходиться вище рівня  $z + \delta z$  (рис. 6.1). Отже, знайдемо зміни горизонтального градієнта тиску  $\frac{\partial p}{\partial x}$  з висотою

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad \text{або}$$

з урахуванням рівняння статки  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$  і того, що у верхньому шарі  $\rho = \rho_2$ , маємо

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 g) = 0. \quad (6.5)$$

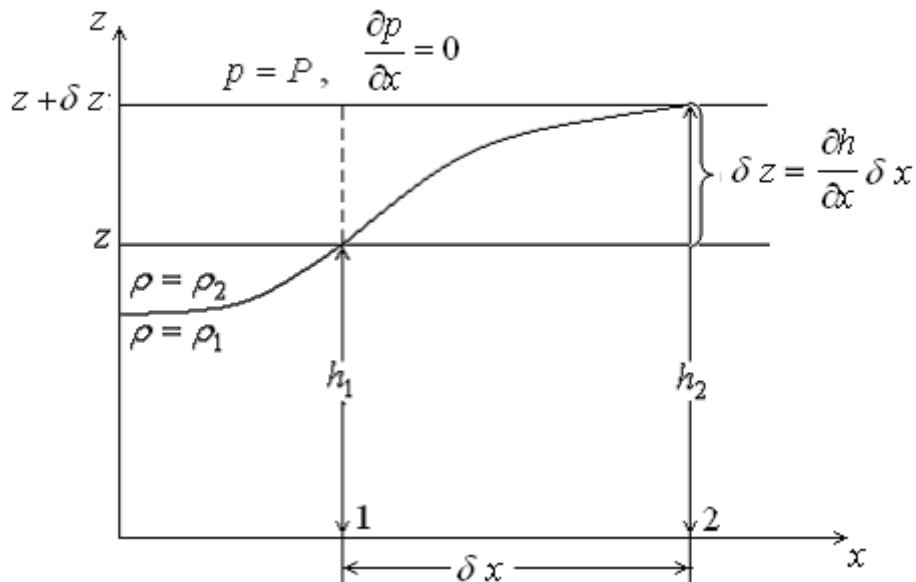


Рисунок 6.1 Схема хвильового збурення на поверхні розділу

Із (6.5) випливає, що  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$ , тобто горизонтальний градієнт тиску вище рівня  $z + \delta z$  не змінюється з висотою, а оскільки на самому рівні  $z + \delta z$  він дорівнює нулю, то у всьому шарі атмосфери, який розташовується вище цього рівня,  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  і, таким чином, атмосферні рухи тут відсутні.

В нижньому шарі атмосфери (нижче рівня  $z + \delta z$ ) градієнт тиску  $\frac{\partial p}{\partial x}$  також не змінюється з висотою, але він не дорівнює нулю, тому в цьому шарі є сила баричного градієнта, завдяки якій виникає рух.

Знайдемо цей баричний градієнт. Відомо, що його можна приблизно виразити через відношення різниці тиску у двох точках на горизонтальній площині до відстані між цими точками. На рисунку 6.1 – це, наприклад, точки 1 і 2. Якщо позначити тиск в точці 1 через  $p_1$ , в точці 2 – через  $p_2$ , а відстань між точками через  $\delta x$ , то вираз для горизонтального градієнта тиску буде такий

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_2 - p_1}{\delta x} \quad (6.6)$$

Відомо, що атмосферний тиск на деякому рівні визначається вагою стовпа повітря, який знаходиться над цим рівнем і має одиничний переріз. Тоді відповідно до рівняння статички тиск в точці 2 дорівнює

$$p_2 = P + \rho_1 g \cdot h_2, \quad (6.7)$$

в точці 1 для тиску отримаємо інший вираз, тому що частина стовпа нижче поверхні розділу має густину  $\rho_1$ , а вище -  $\rho_2$ , тому

$$p_1 = P + \rho_1 g \cdot h_1 + \rho_2 g \delta z. \quad (6.8)$$

Підставимо тепер (6.7), (6.8) в рівність (6.6)

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{P + \rho_1 g \cdot h_2 - P - \rho_1 g \cdot h_1 - \rho_2 g \delta z}{\delta x} \quad \text{або}$$

після скорочення  $P$  маємо

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\rho_1 g (h_2 - h_1) - \rho_2 g \delta z}{\delta x} \quad \text{або}$$

з урахуванням (6.4) отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\rho_1 g - \rho_2 g}{\delta x} \delta z = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\delta x} \frac{\partial h}{\partial x} \delta x.$$

Якщо скоротити  $\delta x$  і винести  $\rho_1$  за дужки, вираз для горизонтального градієнта тиску набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{g}{\rho_1} \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6.9)$$

Із виразу (6.9) видно, що  $\frac{\partial p}{\partial x}$  не залежить від  $z$ , тому що  $h = f(x, t)$ , а  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $g$  - сталі величини. Тоді, якщо в початковий момент часу швидкість  $u$  не залежить від висоти, то як впливає із рівняння руху, прискорення також не залежить від висоти. Це означає, що швидкість повинна залишатись незалежною від  $z$  для усіх наступних моментів часу, тобто можна записати, що

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{або} \quad u(z) = \text{const}. \quad (6.10)$$

Таким чином, одним із рівнянь моделі хвиль на поверхні розділу буде рівняння руху, яке з урахуванням припущень (6.2), (6.3), (6.10) і виразу для градієнта тиску (6.9) буде мати вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{g \rho_1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{або}$$

після скорочення  $\rho_1$  можна записати

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (6.11)$$

Рівняння (6.11) містить в собі дві невідомі величини  $u$  і  $h$ . Для розв'язання задачі треба мати ще одне рівняння з тими ж невідомими. Таке рівняння отримаємо із рівняння нерозривності (6.1), яке відповідно до умови (6.3) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.12)$$

Проінтегруємо це рівняння по  $z$  в шарі від поверхні землі до поверхні розділу, тобто від 0 до  $h$

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0. \quad (6.13)$$

Оскільки відповідно до умови (6.10) швидкість  $u$  не залежить від висоти  $z$ , то і  $\frac{\partial u}{\partial x}$  також не залежить від  $z$ , тоді  $\frac{\partial u}{\partial x}$  можна винести за знак інтегралу; вираз  $\frac{\partial w}{\partial z} dz$  є повний диференціал  $dw$ . З урахуванням цього (6.13) можна записати так

$$\frac{\partial u}{\partial x} \int_0^h dz + \int_{w_0}^{w_h} dw = 0, \quad (6.14)$$

де  $w_0$  - вертикальна швидкість у поверхні землі, яку можна вважати рівною нулю, якщо поверхня землі горизонтальна і дзеркально гладка, тобто відсутні орографічні та фрикційні вертикальні рухи;  $w_h$  - вертикальна швидкість на поверхні розділу.

Після інтегрування (6.14) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} z \Big|_0^h + w \Big|_{w_0}^{w_h} = 0 \quad \text{або}$$

з урахуванням того, що  $w_0 = 0$  отримаємо

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + w_h = 0. \quad (6.15)$$

Цей вираз містить в собі три невідомі величини  $u$ ,  $h$  і  $w_h$ , але рівняння (6.11) треба доповнити таким рівнянням, яке має невідомі  $u$  і  $h$ , інакше неможливо отримати замкнену систему рівнянь. Для того, щоб позбутись невідомої  $w_h$  припустимо, що поверхня розділу має властивість субстанціональності (від слова «субстанція»). Ця властивість означає, що частинки повітря, які знаходяться на поверхні розділу, на залишають цю поверхню, а здійснюють коливання разом з нею. Тоді вертикальну швидкість  $w_h$  можна виразити через  $h$  таким чином

$$w_h = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6.16)$$

Підставимо тепер (6.16) в (6.15) і отримаємо друге рівняння моделі хвиль, які розглядаються

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (6.17)$$

Це рівняння має дві невідомі  $u$  і  $h$  і разом з рівнянням (6.11) складає замкнену систему, яка може бути розв'язана. Випишемо цю систему у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial h}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (6.18)$$

Система (6.18) – нелінійна, тому що містить в собі члени, в яких є добутки невідомих. Для одержання точного (аналітичного) рішення системи треба привести її до лінійного вигляду.

## 6.2 Лінійна система рівнянь та її розв'язання.

Оскільки система (6.18) нелінійна, для неї неможливо одержати точне рішення, яке піддається прозорому аналізу. Як відмічалось раніше, нелінійну систему можна розв'язати лише наближеними чисельними методами.

Для отримання точного (аналітичного) рішення приведемо систему до лінійного вигляду. Відповідно до методу малих збурень представимо функції  $u$  і  $h$  у вигляді суми характеристик основного стану і хвильових збурень

$$u(x,t) = \bar{u} + u'(x,t); \quad h(x,t) = H + h'(x,t), \quad (6.19)$$

де  $\bar{u}$  - швидкість основного руху, тобто фону, на якому розповсюджуються хвилі, а  $H$  - висота поверхні розділу в рівноважному стані (рис. 6.2)

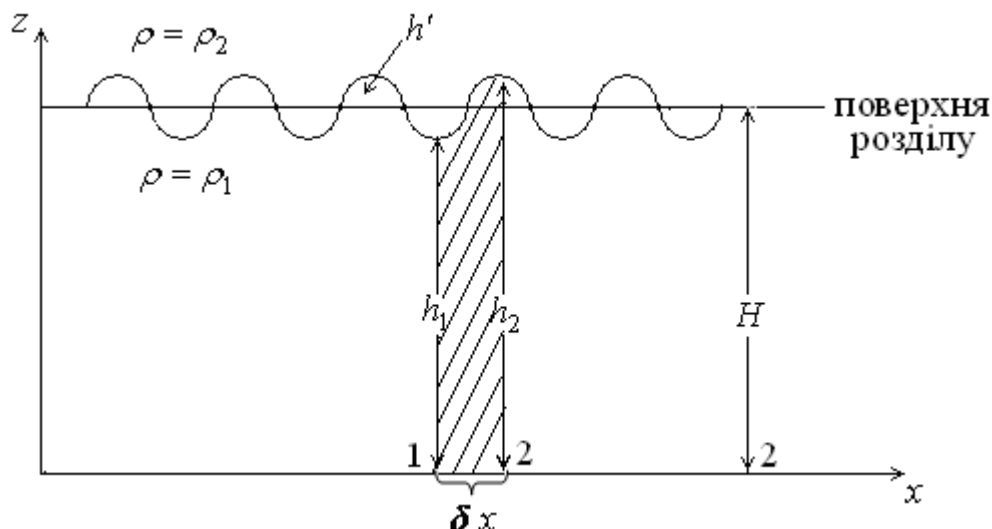


Рисунок 6.2 Схема розташування поверхні розділу в рівноважному стані і збуреному. Заштрихована частина - це фрагмент, який на рисунку 6.1 представлений у збільшеному вигляді.

Із рисунка 6.2 видно, що в рівноважному стані поверхня розділу є горизонтальною і має однакову висоту  $H$ . Якщо на поверхні з'являються коливання, поверхня відхиляється від первісного положення і ці відхилення, тобто хвильові збурення, характеризуються величиною  $h'$ , яка в нашому випадку є функцією координати  $x$  і часу  $t$  ( $h' = f(x, t)$ ).

Отже, використаємо рівності (6.19) і приведемо рівняння системи (6.18) до лінійного вигляду.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + g \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial(H + h')}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial(H + h')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(H + h')}{\partial x} + (H + h') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Після диференціювання і урахування основних положень ММЗ система (6.20) перетворюється в систему лінійних рівнянь відносно невідомих  $u'$  і  $h'$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + g \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ця система дозволяє вивчати хвильові рухи та їх властивості. Для цього треба отримати її рішення. Як і у випадку з акустичними хвилями,

зручно систему (6.21) звести до одного рівняння з однією невідомою величиною. Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' + g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial h'}{\partial x} &= 0; \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) h' + H \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

і виключимо з неї невідому  $u'$ .

Процедура виключення така, як і в задачі про акустичні хвилі. Ми бачимо, що в першому рівнянні системи (6.22) до функції  $u'$  застосовується оператор  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , а в другому рівнянні ця функція диференціюється по  $x$  і помножується на  $H$ . Значить, щоб виключити  $u'$ , треба перше рівняння продиференціювати по  $x$  і помножити на  $H$ , а до другого рівняння треба застосувати оператор  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , потім із другого рівняння відняти перше. Виконаємо ці дії і для зручності в системі (6.22) поміняємо рівняння місцями; в результаті будемо мати

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) h' + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \right]; \\ H \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' + g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial h'}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned}$$

Виконаємо диференціювання в цих рівняннях і із першого рівняння віднімемо друге, отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x}\right) + H \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u'}{\partial x} - \\ H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}\right) - gH \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Підкреслені члени в рівнянні (6.23) подібні і мають протилежні знаки, тому вони скорочуються. Нагадаємо, що оскільки змінні  $x$  і  $t$  незалежні, можна змінювати порядок диференціювання. Тобто спочатку функцію  $u'$  можна продиференціювати по  $x$ , а потім застосувати оператор



$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , а можна спочатку застосувати до функції  $u'$  оператор  $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ , а потім продиференціювати результат по  $x$ , отримаємо однакові члени. Після скорочення і диференціювання рівняння (6.23) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + \bar{u} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \bar{u} \frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial x} + \bar{u}^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - gH \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0 \quad \text{або}$$

після приведення подібних членів отримаємо

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + \left[\bar{u}^2 - gH \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right] \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0. \quad (6.24)$$

Рівняння (6.24) називається хвильовим рівнянням для одновимірних хвиль на поверхні розділу. Це рівняння розв'язується відносно невідомої функції  $h'$ , яку зручно представити у вигляді

$$h'(x, t) = A \cdot e^{ik(x-ct)}. \quad (6.25)$$

Підставимо (6.25) в рівняння (6.24). Для цього знайдемо відповідні похідні від  $h'$ , а саме

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = A(-ikc)^2 \cdot e^{ik(x-ct)} = -k^2 c^2 A \cdot e^{ik(x-ct)}; \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} = A(-ikc)(ik) \cdot e^{ik(x-ct)} = k^2 c A \cdot e^{ik(x-ct)}; \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = A(ik)^2 \cdot e^{ik(x-ct)} = -k^2 A \cdot e^{ik(x-ct)}. \quad (6.28)$$

Підставимо (6.26) – (6.28) в хвильове рівняння (6.24)

$$-k^2 c^2 \cdot h'(x, t) + 2\bar{u} k^2 c \cdot h'(x, t) - k^2 \left[\bar{u}^2 - gH \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right] h'(x, t) = 0. \quad (6.29)$$

Після скорочення на  $h'(x, t)$ , тобто на  $A \cdot e^{ik(x-ct)}$ , рівняння (6.29) перетворюється на таке

$$-k^2 c^2 + 2\bar{u}k^2 c - k^2 \left[ \bar{u}^2 - gH \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] = 0 \quad \text{або}$$

після помноження обох частин цього рівняння на (-1) і скорочення на  $k^2$  отримаємо

$$c^2 - 2\bar{u}c + \left[ \bar{u}^2 - gH \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] = 0. \quad (6.30)$$

Рівняння (6.30) – це дисперсійне співвідношення для одновимірних хвиль на поверхні розділу. Воно пов'язує фазову швидкість цих хвиль з такими характеристиками середовища, як швидкість  $\bar{u}$  потоку, в якому поширюються хвилі, вертикальна протяжність цього потоку  $H$  і співвідношення густини  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ .

Як і в задачі для акустичних хвиль, дисперсійне співвідношення (6.30) являє собою квадратне рівняння відносно фазової швидкості хвиль. У відповідності до спрощеної формули (5.24) знаходимо із (6.30) фазову швидкість гравітаційних хвиль на поверхні розділу

$$c = \frac{2\bar{u}}{2} \pm \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2 + gH \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)} \quad \text{або}$$

після скорочення маємо

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}. \quad (6.31)$$

Із (6.31) випливає, що фазова швидкість хвиль на поверхні розділу, як і швидкість акустичних хвиль, залежить лише від характеристик середовища і не залежить від параметрів хвиль, тобто амплітуди, довжини, періоду, тощо. Аналітичний розв'язок (6.31) показує, що ще один тип розв'язання загальних гідродинамічних рівнянь відповідає хвильовому руху, в якому траєкторії частинок лежать у вертикальних площинах. Оскільки швидкість хвиль виявилась безпосередньо пов'язаною з прискоренням сили тяжіння, а значить з гравітаційним полем Землі, ці хвилі називаються гравітаційними.

Розрахунки показують, що фазова швидкість хвиль, які розглядаються, коливається в досить широких границях, в залежності від висоти поверхні розділу  $H$ , відношення густини в шарах, які

розділяються, і швидкості руху. Для значень  $H$  у межах від 1 до 10 км і для значень  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  у межах від 0,9 до 0,99 швидкість гравітаційних хвиль відносно середовища змінюється від 8 до 80 м·с<sup>-1</sup>. При дуже сильному вітрі швидкість цих хвиль може досягати 100 м·с<sup>-1</sup> і більше.

До цих пір єдиною умовою, яка приймалась для рідини з двома однорідними шарами, було те, що один шар має густину  $\rho_1$ , а другий -  $\rho_2$ . Якщо тепер в якості  $\rho_1$  взяти густину води, а в якості  $\rho_2$  - густину повітря, то відношенням  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  можна знехтувати, оскільки  $\rho_2$  у тисячу разів менша за  $\rho_1$  ( $\rho_2 \approx 1,27 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ,  $\rho_1 \approx 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ ). В цьому разі ми будемо мати справу з хвилями на поверхні води, тобто на поверхні розділу двох середовищ (води і повітря); швидкість цих хвиль досить точно буде описуватися формулою

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}. \quad (6.32)$$

Це є вираз для швидкості гравітаційних хвиль в „мілкій воді”.

Як видно із (6.31), (6.32), гравітаційні хвилі можуть розповсюджуватись в обох напрямках одночасно.

### 6.3 Фізичний механізм розповсюдження гравітаційних хвиль.

Для спрощення ми розглянемо експеримент, який демонструє механізм розповсюдження хвиль на поверхні води.

Представимо собі довгий, глибокий канал, в якому є шар води, густина якої дорівнює  $\rho_1$ ; над цим шаром води розташовується повітря, густину якого можна вважати близькою до нуля ( $\rho_2 \approx 0$ ). Вода спочатку нерухома, але вільна її поверхня деформована, як показано на рисунку 6.3 (на ділянці  $AB$  виникло хвильове збурення у вигляді гребеня).

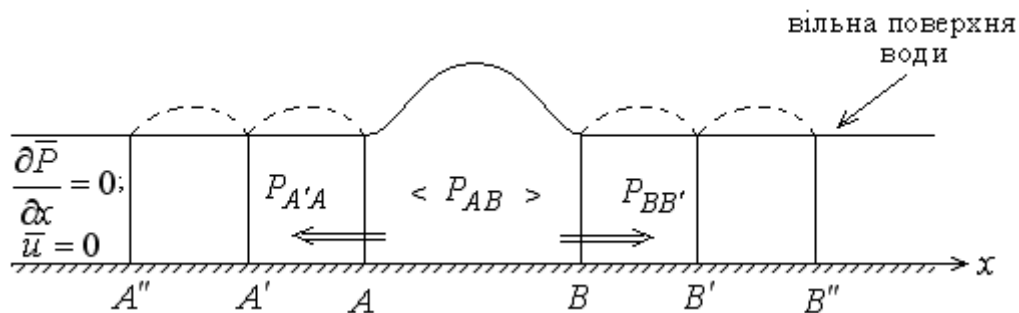


Рисунок 6.3 Схема розповсюдження гравітаційних хвиль на поверхні води.

Нагадаємо, що тиск на будь-якому рівні у воді визначається тільки вагою води над цим рівнем. Оскільки на ділянці  $AB$  стовп води більший ніж на сусідніх ділянках, то тиск на ділянці  $AB$  на всіх рівнях буде вище за тиск на ділянках  $A'A$  і  $BB'$ . За рахунок перепаду тиску виникає сила баричного градієнта, яка на вертикалях  $A$  і  $B$  буде спрямована ліворуч і праворуч ділянки  $AB$ . Згідно з рівнянням руху ця сила надасть прискорення частинкам води і вони почнуть рухатися через вертикалі  $A$  і  $B$ , у той час як на вертикалях  $A'$  і  $B'$  рух буде відсутній (як і раніше, ми розглядаємо швидкі процеси, що відбуваються протягом дуже короткого відрізка часу). Це приведе до того, що на ділянках  $BB'$  і  $A'A$  буде накопичуватися вода, але оскільки вода нестислива рідина, на ділянках  $BB'$  і  $A'A$  вільна поверхня води мусить буде піднятися (як показано пунктиром на рисунку 6.3). Тепер на ділянках  $BB'$  і  $A'A$  тиск буде вище ніж на ділянках  $B'B''$  і  $A''A'$ , що також приведе до виникнення сили баричного градієнта, руху частинок води через вертикалі  $B'$  і  $A'$  і підйому її рівня тепер вже на ділянках  $B'B''$  і  $A''A'$  і так далі.

Експеримент, який ми розглянули, наочно показує як первісне хвильове збурення у вигляді гребеня, яке виникло на ділянці  $AB$ , розповсюджується праворуч і ліворуч цієї ділянки зі швидкістю  $c = \sqrt{gH}$ , де  $H$  - глибина каналу. Математично цей процес описується рівняннями системи (6.21).

Із наведених міркувань видно, що суттєвою частиною механізму, завдяки якому розповсюджуються гравітаційні хвилі, є зміни тиску, що відбуваються за рахунок зміни ваги води (в атмосфері – ваги повітря) над даною горизонтальною поверхнею. На відміну від чисто акустичних хвиль, існування яких залежить від змін тиску, пов'язаних з адіабатичним стисненням (розрідженням) середовища, при чисто гравітаційних хвилях градієнт тиску обумовлений тільки змінами гідростатичного тиску, тобто тиску, що визначається тільки вагою рідини.

Щодо метеорологічної значущості гравітаційних хвиль, то амплітуди їх в полі тиску порядку одного гектопаскаля, хоча при розповсюдженні групи хвиль виникають значні збурення (до декількох гектопаскалів).

Відомо, що еволюція баричних утворень, тобто зміна їх інтенсивності, часто пов'язана з невеликими змінами в полях метеорологічних величин. Так, баричні тенденції порядку декількох гектопаскалів вважаються суттєвими і ураховуються при аналізі атмосферних процесів, тому і внеском гравітаційних хвиль не можна нехтувати. Але при побудові деяких гідродинамічних моделей для спрощення розв'язання практичних задач гравітаційні хвилі відфільтровуються, тобто виключаються із системи рівнянь шляхом прийняття геострофічного наближення. Це наближення виключає гравітаційні хвилі, тому що в геострофічному потоці частинки повітря рухаються в напрямку, перпендикулярному до сили баричного градієнта, а

при гравітаційних коливаннях частинки рухаються в напрямку сили баричного градієнта, тобто існування гравітаційних хвиль в геострофічному потоці неможливе.

Моделі, в яких використовується геострофічне наближення, називаються квазігеострофічними. Із сказаного вище випливає, що ніяка квазігеострофічна модель не може задовільно прогнозувати зміни інтенсивності існуючих баричних утворень і появу нових, тобто виключення гравітаційних хвиль істотно збіднює відповідні моделі.

Отже незважаючи на те, що ми розглянули найбільш просту модель гравітаційних хвиль на поверхні розділу шарів з постійною густиною, нам удалося виявити основні властивості, які притаманні цим хвилям.

По-перше, їх фазова швидкість може змінюватися від декількох  $мс^{-1}$  до  $300мс^{-1}$  в залежності від стратифікації по густині та висоти рівня, на якому вони виникають і розповсюджуються. Так, якщо відношення  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  наближується до нуля, на рівнях атмосфери Н в діапазоні

від 1 до 10км швидкість гравітаційних хвиль може перевищувати  $100мс^{-1}$  і досягти  $300мс^{-1}$ . Тобто при сильних розривах густини швидкість гравітаційних хвиль наближається до акустичних. Такі хвилі можуть виникати на атмосферних фронтах при грозах та шквалах.

По-друге гравітаційні хвилі можуть поширюватися в обох напрямках одночасно відносно місця виникнення і швидкість цих хвиль не залежить від їх параметрів. Проте цей висновок відноситься лише до хвиль, довжини яких  $L \gg H$ .

В атмосфері найбільш наочним виявленням поверхневих гравітаційних хвиль є так звані хвилясто подібні хмари у вигляді довгих паралельних валів, що лежать уздовж гребнів хвиль.

## 7 Лінійні моделі хвиль Россбі

Хвилі Россбі за кінематичною класифікацією належать до горизонтально-поперечних хвиль, в яких повітряні маси рухаються з півдня на північ і з півночі на південь, а самі хвилі розповсюджуються з заходу на схід або зі сходу на захід. Оскільки ці хвилі займають великий простір, ми говоримо тут про повітряні маси, а не дрібні об'єми повітря.

Як відзначалося вище (розділ 3.2), хвилі Россбі виникають завдяки добовому обертанню Землі і її сферичній формі, із-за якої параметр Кориоліса змінюється з широтою. На необертальній Землі такі хвилі були б неможливі.

Розглянемо спочатку найбільш просту лінійну модель для одновимірних хвиль Россбі, тобто хвиль, які розповсюджуються уздовж лише однієї осі, наприклад, паралельно осі  $x$ .

### 7.1 Модель одновимірних хвиль Россбі

#### 7.1.1 Основні обмеження і вихідна система рівнянь

Будемо розглядати горизонтально-поперечні хвилі у „чистому вигляді”, тобто поставимо такі умови, при яких існування інших типів хвиль неможливе. Перелічимо ці умови.

1. Для виключення вертикально-поперечних хвиль будемо вважати, що вертикальна складова вектора швидкості дорівнює нулю, тобто

$$w = 0. \quad (7.1)$$

2. Для виключення із системи рівнянь поздовжних хвиль, які розповсюджуються завдяки адіабатичному стисненню (розрідженню) середовища, будемо вважати атмосферу нестисливим середовищем. В цьому випадку рівняння нерозривності матиме вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{або}$$

з урахуванням умови (7.1) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \equiv D_s = 0. \quad (7.2)$$

Вихідні рівняння: оскільки у хвилях Россбі повітряні маси здійснюють рухи в горизонтальній площині, для побудови моделі будемо використовувати рівняння горизонтального руху для великомасштабних рухів вільної атмосфери

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u.$$

Якщо урахувати умову (7.1) і перенести всі члени в ліву частину, то ці рівняння набувають вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \ell v = 0; \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \ell u = 0. \quad (7.4)$$

Зручно рішення (7.3), (7.4) для розв'язання нашої задачі записати у вигляді рівняння вихору швидкості вектора вітру. Для одержання такого рівняння застосуємо до рівнянь (7.3), (7.4) так звану „операцію вихору”, яка полягає в тому, що всі члени рівняння (7.3) диференціюються по  $y$ , а члени рівняння (7.4) – по  $x$  і із рівняння (7.4) віднімається рівняння (7.3). В результаті такої процедури у новому рівнянні практично кожний член містить у собі вертикальну складову вихору вектора швидкості вітру, тобто

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.5)$$

тому нове рівняння називається рівнянням вихору швидкості вітру або рівнянням переносу вихору. Отримаємо це рівняння, тобто диференціюємо рівняння (7.3) по  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\ell v) = 0.$$

Якщо урахувати, що  $x$ ,  $y$ ,  $t$  - незалежні змінні, то можна міняти місцями оператори диференціювання, і тоді останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \ell \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Після диференціювання рівняння (7.4) по  $x$  отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \ell \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \ell}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Відніmemo тепер із рівняння (7.7) рівняння (7.6), згрупуємо підкреслені члени і винесемо загальні оператори диференціювання за дужки, тоді після скорочення подібних членів отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \ell \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Використаємо тепер позначення (7.5) і урахуємо умову (7.2), відповідно до якої  $\rho = const$ , і члени, які містять в собі похідні  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  і  $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ , будуть дорівнювати нулю, в результаті останнє рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \Omega_z + \frac{\partial v}{\partial y} \Omega_z + \ell D_s + u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0 \quad \text{або,}$$

якщо згрупувати підкреслені члени і спрямувати вісь  $x$  по дотичній до широти кола  $\left( \frac{\partial \ell}{\partial x} = 0 \right)$ , то рівняння вихору можна записати так

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + \Omega_z D_s + \ell D_s + u \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0. \tag{7.8}$$



Нарешті, виконаємо умову (7.2) ще раз і отримаємо рівняння (7.8) у скінченному вигляді

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0. \quad (7.9)$$

Це нелінійне рівняння і описує довгі хвилі Россбі і для того, щоб отримати його точний розв'язок треба привести його до лінійного вигляду.

### 7.1.2 Лінеаризація рівняння вихору

Для лінеаризації рівняння (7.9) згідно з методом малих збурень представимо величини  $u$ ,  $v$  і  $\Omega_z$  як суми характеристик основного стану  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\Omega}$  і характеристик хвильових збурень  $u'$ ,  $v'$  і  $\Omega'$ . Оскільки ми будемо мати справу тільки з вертикальною складовою вектора  $\bar{\Omega}$ , то у подальшому індекс  $z$  будемо опускати. В якості основного стану будемо розглядати зональну течію, швидкість якої дорівнює  $\bar{u}$ , а меридіональна складова швидкості в такому випадку дорівнює нулю. Таке припущення достатньо коректне, тому що у вільній атмосфері помірних широт переважає західно-східне перенесення повітряних мас, тому хвилі Россбі найчастіше формуються і розповсюджуються в зональних течіях. Отже, відповідно до сказаного представимо величини  $u$ ,  $v$  і  $\Omega$  таким чином

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = v'; \quad \Omega = \bar{\Omega} + \Omega', \quad (7.10)$$

$$\text{де } \bar{\Omega} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \Omega' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}. \quad (7.11)$$

Підставимо (7.10) в (7.9)

$$\frac{\partial(\bar{\Omega} + \Omega')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{\Omega} + \Omega')}{\partial x} + v' \frac{\partial(\bar{\Omega} + \Omega')}{\partial y} + \beta v' = 0, \quad (7.12)$$

де  $\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2\omega \sin \varphi)$  - параметр Россбі.

Розкриємо в (7.12) диференціальні оператори

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} + u' \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} + v' \frac{\partial \Omega'}{\partial y} + \beta v' = 0. \quad (7.13)$$

У відповідності до методу малих збурень характеристики основного стану, тобто  $\bar{u}$  і  $\bar{\Omega}$  сталі величини і тому похідні від них дорівнюють нулю, тобто  $\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial y} = 0$ . Нагадаємо також, що добутки нескінченно малих  $u' \frac{\partial \Omega'}{\partial x}$  і  $v' \frac{\partial \Omega'}{\partial y}$  є величинами більш високого порядку малості, тому ними можна знехтувати. З урахуванням сказаного рівняння (7.13) набуває вигляду

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + \beta v' = 0. \quad (7.14)$$

Якщо тепер використати рівність (7.11), рівняння (7.14) запишеться так

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \beta v' = 0. \quad (7.15)$$

Для спрощення задачі припустимо, що  $\frac{\partial u'}{\partial y} = 0$ , тобто вважається, що в зональному потоці виникають тільки такі відхилення, які змушують повітря рухатися в меридіональному напрямку. Таким чином, з урахуванням вказаного припущення рівняння (7.15) матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v'}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial x} + \beta v' = 0 \quad \text{або}$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t \partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \beta v' = 0. \quad (7.16)$$

Це рівняння називається хвильовим рівнянням для одновимірних хвиль Россбі. Невідомою величиною в (7.16) є відхилення  $v'$  повітряного потоку від зонального, які пов'язані з виникненням та розповсюдженням хвиль Россбі в зональному потоці зі швидкістю  $\bar{u}$ .

### 7.1.3 Розв'язання лінійного рівняння вихору.

Для отримання точного, тобто аналітичного розв'язання рівняння (7.16) представимо  $v'(x, t)$  у вигляді експоненти

$$v'(x, t) = A \cdot e^{ik(x-ct)}. \quad (7.17)$$

Підставимо (7.17) в (7.16), для цього знайдемо відповідні похідні від  $v'$ , а саме

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t \partial x} = (ik)(-ikc)A \cdot e^{ik(x-ct)} = k^2 \cdot c \cdot A \cdot e^{ik(x-ct)}; \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = (ik)^2 A \cdot e^{ik(x-ct)} = -k^2 A \cdot e^{ik(x-ct)}. \quad (7.19)$$

Підставимо тепер (7.17) – (7.19) в хвильове рівняння (7.16), отримаємо

$$k^2 \cdot c \cdot A \cdot e^{ik(x-ct)} - \bar{u}k^2 \cdot A \cdot e^{ik(x-ct)} + \beta A \cdot e^{ik(x-ct)} = 0. \quad (7.20)$$

Після скорочення цієї рівності на амплітуду і експоненту отримаємо дисперсійне співвідношення для одновимірних хвиль Россбі

$$k^2 c - \bar{u}k^2 + \beta = 0, \quad (7.21)$$

відкіля можна одержати вираз для фазової швидкості цих хвиль

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \quad \text{або}$$

з урахуванням того, що хвильове число  $k$  виражається через довжину хвилі  $L$  як  $k = \frac{2\pi}{L}$ ,

$$c = \bar{u} - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}. \quad (7.22)$$

Одержані рівняння для  $c$  показують, що на відміну від акустичних та гравітаційних хвиль, фазова швидкість хвиль Россбі залежить не тільки від характеристик основного стану, а і від параметрів самих хвиль. Так, із рівняння (7.22) випливає, що  $c$  залежить від швидкості зонального потоку  $\bar{u}$  і зміни параметра Кориоліса з широтою  $\beta$ , а також від довжини хвилі  $L$ .

Треба відзначити, що незважаючи на численні спрощення, які були прийняті при постановці задачі і її розв'язанні, побудована лінійна модель досить добре описує процеси, які відбуваються в реальній атмосфері. Про це свідчать результати аналізу розв'язку (7.22). Зробимо цей аналіз.

1. Розглянемо спочатку випадок, коли хвиля нерухома, тобто  $c = 0$ . Із формули (7.22) маємо

$$0 = \bar{u} - \frac{\beta L_0^2}{4\pi^2}, \quad (7.23)$$

де  $L_0$  - довжина стоячої хвилі. Знайдемо цю довжину

$$L_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 \bar{u}}{\beta}}. \quad (7.24)$$

Оцінимо порядок параметра Россбі

$$\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y} = \frac{\partial(2\omega \sin \varphi)}{\partial y} = 2\omega \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2\omega \cos \varphi}{R_3},$$

де  $R_3$  - радіус Землі. Отже, для  $\varphi = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2 \cdot 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cos 45^\circ}{6400 \text{ км}} \approx \frac{14,58 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot 0,7}{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}} \approx \\ &\approx \frac{10,2}{6,4} \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1} \approx 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Якщо для швидкості зонального потоку  $\bar{u}$  взяти її порядок  $10 \text{ мс}^{-1}$ , а для  $\beta$  -  $10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ , то із (7.24) отримаємо

$$L_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{u}}{\beta}} = 6,28 \sqrt{\frac{10 \text{ мс}^{-1}}{10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}}} = 6,28 \sqrt{10^{-12} \text{ м}^2} = 6,28 \cdot 10^6 \text{ м} = 6280 \text{ км}.$$

Розрахунки показують, що хвилі Россбі дійсно мають великі довжини, які вимірюються тисячами кілометрів, тому і називаються довгими. Згідно з формулою (7.24) довжина стоячих хвиль залежить від швидкості фонового потоку і широти уздовж якої розповсюджуються хвилі.

2. В якості другого прикладу розглянемо випадок, коли хвилі рухаються з заходу на схід. Оскільки вісь  $x$  також спрямована на схід, фазова швидкість хвиль Россбі буде додатною, тобто  $c > 0$ .

Із формули (7.22) в цьому випадку маємо

$$\bar{u} - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} > 0 \quad \text{або} \quad \bar{u} > \frac{\beta L^2}{4\pi^2}. \quad (7.25)$$

Із нерівності (7.25) випливає, що

$$L < \sqrt{\frac{4\pi^2 \bar{u}}{\beta}}, \quad \text{але}$$

оскільки  $\sqrt{\frac{4\pi^2 \bar{u}}{\beta}} = L_0$ , можна записати

$$L < L_0.$$

Хвилі Россбі, які розповсюджуються з заходу на схід, мають довжини менші, ніж стоячі хвилі, і тому називаються короткими.

3. В цьому випадку хвилі розповсюджуються зі сходу на захід, тобто  $c < 0$ .

Із (7.22) випливає, що це можливо при

$$\bar{u} - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} < 0 \quad \text{або} \quad \bar{u} < \frac{\beta L^2}{4\pi^2}, \quad \text{відкіля}$$

$$L > \sqrt{\frac{4\pi^2 \bar{u}}{\beta}} - \text{це все одно, що } L > L_0$$

Як показує цей аналіз, зі сходу на захід розповсюджуються дуже довгі хвилі, довжини яких перевищують розміри стоячих хвиль на відповідних широтах.

Хвилі Россбі добре виявляються на картах погоди. Гребені цих хвиль збігаються з осями баричних гребенів або центрами антициклонів, а улоговини – з осями баричних улоговин або центрами циклонів. Довжини хвиль можна визначити як відстань між центрами сусідніх циклонів (антициклонів) або між осями сусідніх баричних улоговин (гребенів).

Із синоптичної практики відомо, що більшість баричних утворень переміщується з заходу на схід і горизонтальні розміри баричних систем, які утворюють хвилі Россбі, менші за довжини стоячих хвиль на відповідних широтах. Прикладом хвилі, яка переміщується у зворотному напрямку, тобто зі сходу на захід, є сибірський антициклон (півхвиля). Відомо, що гребінь цього антициклону має тенденцію розповсюджуватися на райони європейського континенту і може досягати атлантичного узбережжя. Таким чином, висновки, які були зроблені, з теоретичного

дослідження хвиль Россбі, підтверджуються процесами, що неперервно відбуваються в реальній атмосфері.

При розповсюдженні хвиль Россбі відбуваються значні зміни в полях метеорологічних величин. Наприклад, амплітуди цих хвиль в полі тиску складають 20 – 100 гПа, а іноді досягають і 120 гПа. Такі зміни тиску сприяють суттєвому збільшенню амплітуд в полі вітру, а значить і в полях інших метеорологічних величин, тобто довгі хвилі відповідні за різкі зміни погоди над великими територіями, і з точки зору задачі прогнозу погоди саме ці хвилі представляють найбільший інтерес. Отже, це метеорологічно значущі хвилі і в будь – якій прогностичній моделі вони повинні враховуватися в першу чергу.

#### 7.1.4 Фізичний механізм розповсюдження хвиль Россбі.

Запишемо рівняння (7.9) в такому вигляді

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \ell}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} = 0, \quad (7.26)$$

де  $\Omega \equiv \Omega_z$  - вертикальна складова вектора  $\vec{\Omega}$ .

В рівнянні (7.26)  $\frac{\partial \ell}{\partial t} = 0$ , тому що  $\ell = 2\omega \sin \varphi$  в фіксованій точці не

змінюється; якщо вісь  $x$  спрямована уздовж широтного кола, то  $\frac{\partial \ell}{\partial x}$  також

дорівнює нулю, тобто в рівняння (7.9) включені нульові члени і це дозволяє рівняння (7.26) записати відносно абсолютного вихору  $\Omega_a = (\Omega + \ell)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial y} + v \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial x} &= 0. \quad \text{або} \\ \frac{d_s(\Omega + \ell)}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (7.27)$$

де  $\frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$  - диференціальний оператор, в якому відсутня

конвективна складова  $w \frac{\partial}{\partial z}$ .

Рівняння (7.27) показує, що при таких умовах, які ми прийняли при постановці задачі, абсолютний вихор не змінюється з часом в повітряних

масах, які рухаються горизонтально. Для баротропної бездивергентної атмосфери рівняння переносу абсолютного вихору також має вигляд (7.27), тому воно називається ще й баротропним рівнянням вихору. Отже, за допомогою цього рівняння з'ясуємо механізм розповсюдження хвиль Россбі. Нагадаємо, що в циклонах, де обертальний рух здійснюється проти годинникової стрілки відносний вихор  $\Omega > 0$ , а в антициклонах, де частинки рухаються за годинниковою стрілкою  $\Omega$  має від'ємні значення.

Розглянемо зональний потік, швидкість якого  $u = \bar{u} > 0$ . Нехай під впливом якихось факторів (наприклад, термічного або механічного походження) траєкторія повітряної маси змінилась; наприклад, вона відхилилась до півночі і набула таким чином циклонічну кривизну (рис. 7.1)

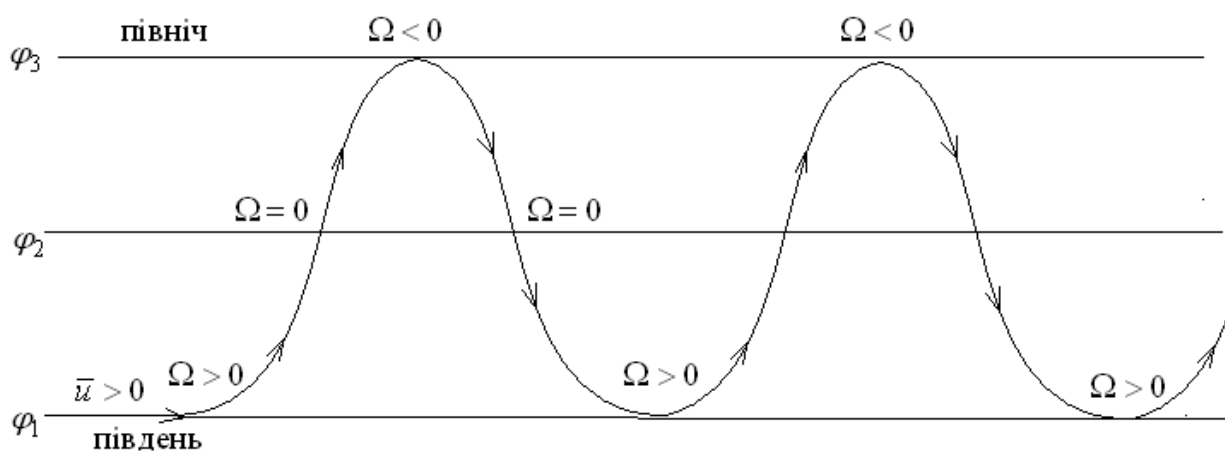


Рисунок 7.1 Схематичне зображення розповсюдження хвилі Россбі у зональному потоці.

При подальшому переміщенні повітряної маси до півночі параметр Кориоліса  $\ell$  (планетарний вихор) буде збільшуватися, тому що зростає широтний кут  $\varphi$ , а значить і  $\sin \varphi$ , і для збереження абсолютного вихору  $(\Omega + \ell)$  у відповідності до закону (7.27) треба, щоб відносний вихор  $\Omega$  зменшувався. Тоді на деякій широті  $\varphi_2$  цей вихор стає рівним нулю, але повітряна маса за інерцією буде рухатися далі до півночі і подальше зменшення  $\Omega$  приводить до того, що відносний вихор на деякій широті  $\varphi_3$  стає від'ємним. В цьому разі траєкторія набуває антициклонічної кривизни, і повітряна маса починає рухатися на південь. При такому русі  $\ell$  буде зменшуватися, а відносний вихор  $\Omega$  збільшуватися, тобто за модулем – зменшуватися, і тому на широті  $\varphi_2$  стане рівним нулю, а на широті  $\varphi_1$  набуде додатного значення; відповідно траєкторія повітряної маси набуде циклонічної кривизни і весь описаний процес почнеться знову. Як видно із рисунка 7.1, хвильові коливання відбуваються в горизонтальній площині біля зонального потоку.

Для більш наочного уявлення про зберігання абсолютного вихору при розвитку хвиль Россбі наведемо числові значення для  $\Omega$  і  $\ell$  у відповідності до рисунку 7.1. Відомо, що планетарний вихор  $\ell$  для помірних широт має порядок  $10^{-4}$ , а  $\Omega$  -  $10^{-5} \text{с}^{-1}$ . Тому припустимо, що на широті  $\varphi_1$   $\ell = 10 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ ,  $\Omega = 2 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ , абсолютний вихор  $\Omega_a = (\Omega + \ell) = 12 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ . Нижче наведемо схематично зміни  $\ell$  і  $\Omega$  при меридіональному русі повітряної маси, при цьому вказані величини будемо виражати в одиницях  $10^{-5} \text{с}^{-1}$ .

Повітряна маса	↑	$\varphi_3$	$\ell = 14$ ;	$\Omega = -2$ ;	$\Omega_a = 12$ .		Повітряна маса
рухається до		$\varphi_2$	$\ell = 12$ ;	$\Omega = 0$ ;	$\Omega_a = 12$ .		рухається до
півночі ( $v > 0$ )		$\varphi_1$	$\ell = 10$ ;	$\Omega = 2$ ;	$\Omega_a = 12$ .		півдня ( $v < 0$ )
						↓	

Ця схема показує, що коли повітряна маса рухається з півночі на південь, зміни планетарного вихору  $\ell$  і відносного вихору  $\Omega$  відбуваються протилежним чином:  $\ell$  зменшується від 14 до 10, а  $\Omega$  зростає від -2 до +2, завдяки чому абсолютний вихор  $\Omega_a$  залишається незмінним.

Ми розглянули випадок, коли траєкторія повітряної маси, яка первісно рухається в західному потоці, відхилялась до півночі і набувала таким чином циклонічну кривизну, але хвильовий характер буде мати рух і в тому випадку, коли початкове збурення буде антициклонічним, тобто траєкторія повітряної маси первісно відхилятиметься до півдня.

## 7.2 Двовимірні хвилі Россбі.

Оскільки довгі інерційні хвилі найбільш суттєво впливають на погодоутворюючі процеси, розглянемо більш складну модель цих хвиль, а саме двовимірну модель, у відповідності до якої двовимірні хвилі розповсюджуються також в зональному потоці зі швидкістю  $\bar{u}$  (складова  $\bar{v}$ , як і в моделі одновимірних хвиль, дорівнює нулю).

В якості вихідного використаємо лінійне рівняння вихору (7.15)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \beta v' = 0, \quad (7.28)$$

Це означає, що задача для двовимірних хвиль буде розв'язуватися при тих же обмеженнях, що і для одновимірних (виключаються акустичні хвилі і гравітаційні і основний стан – це західний потік).

Рівняння (7.28) містить в собі дві невідомі величини -  $u'$  і  $v'$  - характеристики хвильових збурень в полі вітру. Відомо, що одне рівняння



з двома невідомими розв'язати неможливо. Треба, або доповнити це рівняння ще одним з такими ж невідомими, або замінити ці невідомі іншою невідомою величиною. Виразимо складові швидкості вітру через функцію течії  $\psi$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Потенціальна частина руху в виразах (7.29) відсутня, тому що відповідно до умови (7.2) дивергенція  $D_s = 0$ .

За допомогою метода малих збурень запишемо (7.29) у вигляді

$$\bar{u} + u' = -\frac{\partial(\bar{\psi} + \psi')}{\partial y}; \quad \bar{v} + v' = \frac{\partial(\bar{\psi} + \psi')}{\partial x}. \quad (7.29)$$

Ці рівності можна розділити на дві: частину, яка описує основний стан, і частину, яка описує хвильові збурення, а саме

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}; \quad \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}. \quad (7.30)$$

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}; \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}. \quad (7.31)$$

За допомогою рівностей (7.31) рівняння (7.28) переписеться таким чином

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (7.32)$$

Вирази в дужках можна записати як

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \Delta \psi'. \quad (7.33)$$

З урахуванням (7.33) рівняння (7.32) набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (7.34)$$

Це рівняння на відміну від рівняння (7.28) містить в собі одну невідому функцію  $\psi'(x, y, t)$ , тому може бути розв'язане. Нагадаємо, що (7.34) – це хвильове рівняння для двовимірних хвиль Россбі у зональному потоці.

Розв'язок рівняння (7.34) будемо шукати у вигляді періодичної функції, яка описує двовимірну прогресивну хвилю, тобто

$$\psi'(x, y, t) = A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)} \quad (7.35)$$

де  $A_{\psi}$  - амплітуда хвилі в полі функції течії  $\psi$ ;  $k, m$  - хвильові числа по координатах  $x$  і  $y$  відповідно;  $\sigma$  - циклічна або кругова частота.

Нагадаємо, що  $k = \frac{2\pi}{L_x}$ ,  $m = \frac{2\pi}{L_y}$ , де  $L_x, L_y$  - довжини хвиль по осях  $x$  та  $y$ .

Підставимо (7.35) в (7.34). Для цього, як і в задачі для одновимірних хвиль, знайдемо відповідні похідні

$$\begin{aligned} \Delta \psi' &= \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = (ik)^2 A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)} + (im)^2 A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)} = \\ &= -(k^2 + m^2) A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)}; \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi' = -(k^2 + m^2)(-i\sigma) A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)}; \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi' = -(k^2 + m^2)(ik) A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)}; \quad (7.38)$$

і нарешті 
$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = ik \cdot A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)}. \quad (7.39)$$

Підставимо тепер (7.37) – (7.39) в рівняння (7.34), отримаємо

$$\begin{aligned} i(k^2 + m^2)\sigma \cdot A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)} - ik\bar{u}(k^2 + m^2)A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)} + \\ + ik\beta \cdot A_{\psi} e^{i(kx + my - \sigma t)} = 0. \end{aligned}$$

Після скорочення на  $i, A_{\psi}$  та експоненту останнє рівняння набуває вигляду

$$(k^2 + m^2)\sigma - k\bar{u}(k^2 + m^2) + k\beta = 0. \quad (7.40)$$

Таким чином, ми одержали дисперсійне рівняння для двовимірних хвиль Россбі. Із цього рівняння

$$\sigma = k\bar{u} - \frac{k\beta}{(k^2 + m^2)},$$

або, якщо перейти до фазової швидкості  $c$  ( $\sigma = c \cdot k$ ), отримаємо

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + m^2} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 \left(1 + \frac{m^2}{k^2}\right)}. \quad (7.41)$$

Цей вираз показує, що як і у випадку з одновимірними хвилями, фазова швидкість двовимірних хвиль залежить не тільки від характеристик основного стану ( $\bar{u}$  і  $\beta$ ), а і від параметрів хвиль ( $k$  і  $m$ ). Використаємо вирази для  $k$  і  $m$  через довжини хвилі і отримаємо

$$c = \bar{u} - \frac{\beta L_x^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L_x^2}{L_y^2}}. \quad (7.42)$$

Остання формула показує, що залежність фазової швидкості хвилі від її довжини уздовж вісей  $x$  та  $y$  досить складна. Якщо  $m=0$ , тобто  $L_y = \infty$ , із (7.42) отримаємо окремий випадок одновимірної хвилі для якої

$$c = \bar{u} - \frac{\beta L_x}{4\pi^2}.$$

Порівнюючи цю рівність з рівністю (7.42), можна бачити, що швидкість плоскої (двовимірної) хвилі завжди більша ніж швидкість одновимірної, тому що завжди величина  $\left(1 + \frac{L_x^2}{L_y^2}\right) > 1$ .

Довжина стаціонарної двовимірної хвилі уздовж осі  $x$   $(L_x)_0$  отримується при  $c = 0$  із співвідношення

$$\bar{u} = \frac{\beta(L_x)_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(L_x)_0^2}{L_y^2}}, \quad \text{звідки} \quad (L_x)_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\bar{u}}{\beta \left(1 - \frac{4\pi^2 \bar{u}}{\beta L_y^2}\right)}}. \quad (7.43)$$

Порівняння довжин стоячих хвиль для двовимірної хвилі  $(L_x)_0$  із (7.43) і одновимірної  $L_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{u}}{\beta}}$  із (7.24) показує, що  $(L_x)_0 > L_0$  при інших рівних умовах. Із (7.43) випливає також, що двовимірна стаціонарна хвиля може існувати лише за умови

$$\frac{4\pi^2\bar{u}}{\beta L_y^2} < 1, \text{ тобто } L_y > 2\pi\sqrt{\frac{\bar{u}}{\beta}}. \quad (7.44)$$

Але в правій частині (7.44) – довжина одновимірної стоячої хвилі  $L_0$ ; тоді виходить, що поперечна довжина двовимірної стоячої хвилі Россбі більша за довжину одновимірної стоячої хвилі.

Загальний висновок, який можна зробити з попередніх міркувань, полягає в тому, що і повздовжні, і поперечні розміри двовимірних стоячих хвиль більші за довжини одновимірних хвиль при однакових інших умовах.

В підтвердження цього висновку наведемо дані про довжини стоячих двовимірних хвиль  $(L_x)_0$  і одновимірних  $L_0$  для швидкості західного потоку  $\bar{u} = 20 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  і двох географічних широт:

На широті  $\varphi = 45^\circ$   $L_0 = 6980 \text{ км}$ ;  $(L_x)_0 = 9750 \text{ км}$ ;

на  $\varphi = 60^\circ$   $L_0 = 8300 \text{ км}$ ;  $(L_x)_0 = 14980 \text{ км}$ .

Таким чином бачимо, що хвилі Россбі охоплюють великі простори і визначають погодні умови над великими територіями.

На закінчення відмітимо, що всі хвильові рухи, що існують в атмосфері є загасаючими коливаннями. Однією з сил, які можуть сприяти загасанню хвиль є сила тертя. Тому розглянемо вплив цієї сили на існування хвиль Россбі.

### 7.3 Двовимірні хвилі Россбі у в'язкому середовищі.

Для постановки цієї задачі використаємо рівняння горизонтального руху з урахуванням членів, які описують сили тертя

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \ell v + k_T u &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \ell u + k_T v &= 0. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Відмітимо, що проекції сили тертя  $F_x = -k_T u$ ,  $F_y = -k_T v$  представлені в рівняннях (7.45) у грубому наближенні, тобто вважається, що сила тертя пропорційна швидкості вітру, і коефіцієнтом пропорційності є коефіцієнт тертя  $k_T$  - додатна величина. Більш тонке урахування цієї сили дуже ускладнює розв'язання задачі. Відмітимо також, що рівняння (7.45) записані з використанням обмеження (7.1), тому в рівняннях відсутні конвективні члени. Якщо тепер до цих рівнянь застосувати операцію вихору, то одержимо рівняння вихору з членом, який урахує силу тертя

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \beta v + k_T \Omega = 0. \quad (7.46)$$

За допомогою метода малих збурень це рівняння можна привести до лінійного вигляду

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Omega'}{\partial x} + \beta v' + k_T \Omega' = 0. \quad (7.47)$$

Рівняння (7.47), як і рівняння (7.28), описує двовимірні хвилі Россбі в зональному потоці, тому  $\bar{v} = 0$ , і члени  $\bar{v} \frac{\partial \Omega'}{\partial y}$  і  $\beta \bar{v}$  відсутні. Оскільки

$\Omega' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$ , рівняння (7.45) можна записати таким чином

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \beta v' + k_T \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 0. \quad (7.48)$$

Як і в попередній задачі, замість двох невідомих  $u'$  і  $v'$  введемо невідому  $\psi'$ , тобто

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}; \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}. \quad (7.49)$$

За допомогою рівностей (7.49) із рівняння (7.48) отримаємо хвильове рівняння для хвиль Россбі у в'язкому середовищі

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} + k_T \Delta \psi' = 0. \quad (7.50)$$

Використовуючи розв'язок (7.35) і вирази для похідних (7.36) – (7.39), можна отримати дисперсійне співвідношення

$$(k^2 + m^2)\sigma - \bar{u}k(k^2 + m^2) + k\beta = \frac{k_T}{i}(k^2 + m^2) \quad (7.51)$$

або відносно фазової швидкості

$$(k^2 + m^2)c - \bar{u}(k^2 + m^2) + \beta = \frac{k_T}{ik}(k^2 + m^2). \quad (7.52)$$

Із (7.52) випливає, що

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + m^2} + \frac{k_T}{ik} = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + m^2} - \frac{ik_T}{k}, \quad (7.53)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ . Ми бачимо, що фазова швидкість у даному випадку є комплексною величиною, тобто  $c = c_r + ic_i$ , де  $c_r$  - дійсна частина, а  $c_i$  - уявна. У відповідності до виразу (7.53)

$$c_r = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + m^2}; \quad c_i = -\frac{k_T}{k}. \quad (7.54)$$

В такому разі розв'язок хвильового рівняння (7.50) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \psi'(x, y, t) &= A_{\psi'} e^{i(kx+my-\sigma)} = A_{\psi'} e^{i[kx+my-k(c_r+ic_i)t]} && \text{або} \\ \psi'(x, y, t) &= A_{\psi'} e^{i(kx+my-\sigma)+kc_it} \end{aligned} \quad (7.55)$$

Останній вираз можна записати інакше, якщо згадати, що  $e^{i(F_1+F_2)}$  дорівнює доданку експонент  $e^{i(F_1+F_2)} = e^{iF_1} \cdot e^{iF_2}$ . В нашому випадку роль функції  $F_1$  виконує вираз  $(kx+my-\sigma)$ , а роль функції  $F_2$  -  $kc_it$ . З урахуванням цього вираз (7.55) для  $\psi'$  можна записати так

$$\psi'(x, y, t) = A_{\psi'} e^{i(kx+my-\sigma)} \cdot e^{kc_it}.$$

Підставимо в цю формулу вираз для  $c_i$  із (7.54) і отримаємо

$$\psi'(x, y, t) = A_{\psi'} e^{-k_T t} \cdot e^{i(kx+my-\sigma)}. \quad (7.56)$$

В (7.56) експонента  $e^{i(kx+my-\sigma)}$  являє собою періодичну частину хвилі, тому що виражається у вигляді комбінації синуса і косинуса згідно з

формулою Ейлера, а множник  $A_{\psi} e^{-k_T t}$  можна розглядати як амплітуду, яка залежить від часу на відміну від  $A_{\psi}$ , яка є константою. Тобто розв'язок (7.56) можна записати інакше

$$\psi'(x, y, t) = \tilde{A}_{\psi} \cdot e^{i(kx+my-\sigma)}, \quad (7.57)$$

де  $\tilde{A}_{\psi} = \tilde{A}_{\psi}(t) = A_{\psi} e^{-k_T t}$  - амплітуда хвилі, яка з часом зменшується, оскільки показник степеня експоненти від'ємний. Таким чином, розв'язок (7.57), який ми отримали для хвиль Россбі у в'язкому середовищі, свідчить про те, що сили тертя приводять до зменшення амплітуди хвиль завдяки витратам енергії на роботу проти цих сил.

Нижче наведена таблиця відношення початкових амплітуд  $A_{\psi}$  до амплітуд  $\tilde{A}_{\psi}$ , які зменшуються протягом деяких інтервалів часу.

Таблиця 7. – Відношення амплітуд двовимірних хвиль Россбі  $\frac{\tilde{A}_{\psi}}{A_{\psi}}$  при різних значеннях коефіцієнта тертя ( $k_T$ ).

$k_T, \text{c}^{-1}$	$t, \text{діб}$			
	2	4	6	8
$10^{-6}$	0,84	0,71	0,60	0,50
$5 \cdot 10^{-5}$	0,42	0,18	0,075	0,031
$10^{-5}$	0,28	0,032	0,0056	0,0009

Як видно із таблиці, відношення  $\frac{\tilde{A}_{\psi}}{A_{\psi}}$ , яке в початковий момент часу дорівнює одиниці, зменшується з часом і зі збільшенням коефіцієнта тертя. Так, при  $k_T=10^{-6}\text{c}^{-1}$  амплітуда хвилі у порівнянні з початковим значенням зменшується вдвічі через 8 діб; при  $k_T=5 \cdot 10^{-6}\text{c}^{-1}$  – менше ніж через 2 доби, а при  $k_T=10^{-5}\text{c}^{-1}$  вже через 4 доби хвилі за рахунок сил тертя практично повністю згасають.

Ці оцінки досить грубі, проте вони відображають життєвий цикл процесів синоптичного масштабу, який існує в реальній атмосфері і визначається періодом біля одного тижня. Оскільки хвилі Россбі складаються із баричних гребенів та улоговин або циклонів та антициклонів, то зроблені оцінки щодо дисипації цих хвиль при найбільш

імовірних для тропосфери значеннях коефіцієнта тертя  $k_T \sim 5 \cdot 10^{-6} - 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ , досить добре узгоджуються із повсякденною синоптичною практикою.

Таким чином, ми розглянули лінійні моделі трьох типів атмосферних хвиль і показали, що гідродинамічні рівняння для адіабатичних рухів атмосфери мають залежні від часу розв'язки, які відповідають трьом різним типам хвильових рухів, що існують в чистій формі тільки при спеціальних умовах. В реальній атмосфері всі три типи хвильових рухів існують одночасно, хоча кожний тип декілька змінюється завдяки умовам, що дозволяють існувати іншим типам хвиль. Ці типи хвильових рухів помітно відрізняються один від одного не тільки механізмами їх розповсюдження, але також їх характерними швидкостями і амплітудами. Наприклад, акустичні та гравітаційні хвилі переміщуються з порівняно великими швидкостями відносно до середовища; так, акустичні хвилі переміщуються зі швидкістю приблизно  $1000 - 1100 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}$ , швидкості гравітаційних хвиль змінюються в широких границях (в середньому-від  $30 - 300 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}$ ). З другого боку, хвилі Россбі переміщуються порівняно повільно; хвилі з максимальною амплітудою мають довжини, які відповідають швидкості переміщення порядку  $15 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}$ . І навпаки, амплітуди тиску цих хвиль дуже великі, часто перевищують  $20 \text{ гПа}$ , у той час як характерні амплітуди акустичних хвиль складають невелику частку гектопаскаля. Отже, якщо розглядати акустичні та гравітаційні хвилі, як компоненти поля атмосферного тиску, то ними можна нехтувати.

Окрім перелічених типів хвиль в атмосфері існують також змішані типи. Це відноситься перш за все до гравітаційних хвиль, довжини яких можуть змінюватися в досить широких межах, і тому спектр гравітаційних хвиль включає до себе коливання, які межують у високочастотній частині з акустичними хвилями, а в низькочастотній – з хвилями Россбі (змішані Россбі-гравітаційні хвилі). Існують також змішані інерційно-гравітаційні хвилі, які відносяться до класу так званих поверхневих хвиль, але вони представляють інтерес перш за все при дослідженні вітрових хвиль в океанології та гідрології.

Акустичні та гравітаційні хвилі, які виникають в реальній атмосфері в загальному випадку є тривимірними і на відміну від двовимірних поверхневих називаються внутрішніми. При дослідженні процесів в реальній атмосфері мова повинна іти про внутрішні акустичні і внутрішні гравітаційні хвилі.

Хвилі Россбі в принципі є також тривимірними, але на відміну від акустичних і гравітаційних хвиль вони належать до низькочастотної частини спектра атмосферних рухів, для якої характерним є те, що  $(u, v) > w$ , тобто швидкість вітру більше, ніж швидкість вертикальних рухів, (принаймні на порядок), тоді як для мезо- і мікро масштабних процесів (гравітаційні та акустичні хвилі) справедлива умова: вертикальна швидкість і складові вектора вітру мають однаковий порядок, тобто



$(u, v) \approx w$  Як показують оцінки, значення вертикальної амплітуди хвиль Россбі ( $\alpha_z$ ) набагато менші, ніж горизонтальні ( $\alpha_x, \alpha_y$ ), тому можна зтверджувати, що хвилі Россбі – це повільні, квазідвовимірні хвилі на відміну від швидких тривимірних акустичних і гравітаційних хвиль. Більш детально питання про параметри розглянутих типів хвиль будуть викладені у розділі, присвяченому метеорологічній значущості атмосферних хвиль.

В залежності від середовища, в якому виникають коливання, хвилі можуть бути баротропними і бароклініними. Баротропні хвилі формуються в шарах атмосфери, де горизонтальна неоднорідність поля температури відсутня і тому вітер не змінюється з висотою. Баротропні хвилі часто називають поверхневими, оскільки їх амплітуди максимальні поблизу поверхні, на якій знаходиться джерело хвильових збурень. Зі збільшенням відстані від джерела коливань амплітуда хвиль зменшується приблизно за експоненціальним законом.

Бароклініні хвилі – це такі коливання, які утворюються в середовищі, де горизонтальні градієнти температури не дорівнюють нулю і тому мають місце вертикальні зсуви вітру. Параметри таких хвиль залежать не тільки від барокліності, а і від температурної стратифікації атмосфери, тобто частоти Брента – Вайсяля. Бароклініні хвилі називають також внутрішніми хвилями, тому що вони поширюються, як правило, на потужні шари атмосфери (наприклад, на всю тропосферу або стратосферу).

## 8 Багатомасштабність атмосферних хвильових рухів та їх метеорологічна значущість

Атмосферні рухи являють собою суперпозицію системи вимушених і власних коливань атмосфери, які мають різні амплітуди, довжини і швидкості. Вимушені коливання виникають під дією зовнішніх факторів: притягання Місяця, рельєфу підстильної поверхні, припливу сонячної радіації та інших. Прикладом власних або вільних коливань атмосфери є інерційні (довгі), гравітаційні та акустичні (звукові) хвилі.

Всі власні коливання, які впливають із розв'язання системи рівнянь гідротермодинаміки, розділяють на поздовжні, вертикально-поперечні і горизонтально-поперечні.

Поздовжні (акустичні) хвилі обумовлені стисненням або розрідженням повітря, тому траєкторії частинок лежать на лініях, які паралельні напрямку розповсюдження хвилі.

Вертикально-поперечні (гравітаційні) хвилі пов'язані з впливом гравітаційного поля Землі і виникають при змінах з висотою густини повітря, коли частинка, яка вийшла із стану рівноваги, відчуває дію сил Архімеда і власної ваги. Коливання і зміщення частинок відбувається у вертикальній площині, яка перпендикулярна до напрямку розповсюдження хвилі. Таким чином, рівність нулю вертикальної складової швидкості свідчить про відсутність гравітаційних хвиль.

Горизонтально-поперечні (інерційні) хвилі виникають під дією інерційних сил, які обумовлені обертанням Землі біля своєї вісі. При розповсюдженні цих хвиль частинки рухаються в горизонтальній площині перпендикулярно напрямку розповсюдження хвиль. В атмосфері спостерігаються також змішані інерційно-гравітаційні хвилі. Інерційні коливання можуть існувати в атмосфері тривалий час, змінюватися і переходити із однієї форми в другу. В цьому сенсі атмосфера являє собою автоколивальну систему.

Обговоримо тепер питання щодо метеорологічної значущості вільних коливань. Почнемо з інерційних довгих хвиль, які в науковій літературі називаються хвилями Россбі. Хвилі цього класу мають довжини від декількох сотень до декількох тисяч кілометрів, переміщуються найчастіше з заходу на схід зі швидкістю, яка звичайно не перевищує  $50 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ . Періоди цих хвиль досягають декількох діб. Такі хвилі добре простежуються на будь-якій карті погоди: їх гребені в полі тиску збігаються з центрами антициклонів або осями баричних гребенів, а улоговини з центрами циклонів або осями баричних улоговин. Хвилі Россбі мають великі амплітуди, які в полі тиску коливаються в широких межах – від 20 до 100 гПа, що сприяє великим змінам в полях інших метеорологічних величин і викликає різкі зміни погоди над великими територіями.

Таким чином, хвилі Россбі з точки зору гідродинамічного прогнозу є метеорологічно значущими, і при побудові гідродинамічних моделей прогнозу великомасштабних атмосферних процесів вони повинні враховуватися в першу чергу.

Гравітаційні хвилі найчастіше виникають на поверхні розділу під дією сили тяжіння при порушенні рівноваги. Швидкість цих хвиль змінюється від десятків до сотень метрів в секунду, а в окремих випадках досягають 500 м/с; періоди коливань змінюються від декількох хвилин до декількох годин, тобто спектр внутрішній гравітаційних коливань досить широкий: від коливань у великочастотній частині спектру, які межують з акустичними хвилями, до коливань у низькочастотній частині спектру поряд з хвилями Россбі (Россбі-гравітаційні хвилі). Амплітуди цих хвиль – невеликі, але при їх суперпозиції амплітуда в полі тиску може досягати декількох гектопаскалів, хоча в середньому вона не перевищує одного гектопаскаля. З гравітаційними хвилями пов'язані такі процеси як утворення хвилястих хмар, коливання поверхонь розділу, адаптація полів вітру та тиску. Завдяки взаємодії цих хвиль з інерційними коливаннями відбувається еволюція баричних утворень. Тобто гравітаційні хвилі в певних синоптичних ситуаціях можуть значно впливати на атмосферні процеси. Але оскільки їх амплітуди в середньому невеликі, то при побудові гідродинамічних моделей прогнозу макромасштабних процесів ефектом цих хвиль в першому наближенні можна знехтувати. Однак для подальшого удосконалення чисельних моделей ці хвилі слід враховувати поряд з хвилями Россбі, і вагомим аргументом на підтвердження такого висновку є той факт, що найчастіше циклонічні ихори починаються зі стадії хвилі на холодному фронті.

Відфільтрувати гравітаційні хвилі можна шляхом використання геострофічного наближення, тому що в геострофічному потоці гравітаційні хвилі існувати не можуть.

Акустичні хвилі – це короткомасштабні швидкі хвилі з малою амплітудою (до декількох десятків часток гектопаскаля) за винятком вибухових хвиль. Довжина таких хвиль має порядок сантиметрів і метрів, період коливань не перевищує п'яти хвилин, швидкість розповсюдження коливається біля  $300 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ . Акустичні хвилі цілком належать до мікромасштабної ділянки спектра атмосферних коливань. Ці хвилі не впливають на погодуутворювальні атмосферні процеси, але їх урахування в моделях може повністю перевертати результати чисельного прогнозу, тому акустичні хвилі називають „метеорологічними шумами” і завжди виключають із системи рівнянь гідротермодинаміки.

Для фільтрації акустичних хвиль приймають умову квазістатичності, при якій третє рівняння руху записується при  $\frac{dw}{dt} = 0$  і вироджується в рівняння статики. Використання цього рівняння в системі рівнянь

гідротермодинаміки є необхідною і достатньою умовою для фільтрації акустичних хвиль.

Таким чином, найбільшу метеорологічну значущість мають хвилі Россбі, з якими пов'язані основні погодоутворювальні процеси макромасштабу. Оскільки гравітаційні хвилі суттєво впливають на еволюцію баричних утворень, тобто на зміни їх інтенсивності, зародження і зруйнування, вони також відносяться до метеорологічно значущих хвиль і їм належить неабияка роль в моделюванні атмосферних процесів. Акустичні хвилі, які не впливають на погодоутворюючі процеси, виключаються із системи рівнянь гідротермодинаміки.

Ми розглянули в цьому розділі лише три типи хвиль, які відрізняються параметрами, фізичними механізмами виникнення та ступенем впливу їх на погодоутворювальні процеси. Всі ці хвилі ми розглядали з теоретичної точки зору. Проте багато масштабність атмосферних процесів підтверджується і результатами аналізу даних спостережень, під якими розуміється широкий клас натурних даних – від спостережень на стандартній мережі спостережень до непрямих даних археологічних і палеонтологічних досліджень. За результатами такого аналізу і узагальнення вчені запропонували весь спектр атмосферних коливань поділити на дев'ять відносно незалежних (принаймні, по фізиці їх формування) інтервалів.

До першого інтервалу відносяться мікрометеорологічні коливання з періодами від часток секунди до хвилини. Основний фізичний механізм їх утворення – це дрібномасштабна турбулентність. До цього короткоперіодного спектру належать також високочастотні гравітаційні хвилі.

Мезометеорологічні коливання з періодами від хвилин до годин відносяться до досить широкої ділянки спектра, яка включає в себе як високочастотні гравітаційні хвилі, так і низькочастотні, які межують з макромасштабними коливаннями.

До процесів синоптичного масштабу відносяться коливання з періодами від багатьох годин до декількох днів з енергетичним максимумом при  $\tau \approx 4$  діб.

Четвертий інтервал спектра атмосферних коливань складають глобальні хвилі з періодами від тижнів до місяця. Ці довгоперіодні коливання представляють інтерес перш за все для довгострокового прогнозу погоди.

Останні п'ять інтервалів спектра атмосферних процесів відіграють велику роль в формуванні короткоперіодних змін клімату і його довгоперіодних коливань. Ці п'ять інтервалів складають кліматичну ділянку спектра атмосферних коливань.

Навчальне видання

**Хоменко Галина Василівна**  
**Бондаренко Валентина Миколаївна**

## **ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ В АТМОСФЕРІ**

Конспект лекцій

Підп. до друку  
Умовн. друк. арк.

Формат  
Тираж

Папір  
Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

---

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

---