

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з дисципліни „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ”

**(розділ „Аналітичні і чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними”)
для аспірантів I року денної та заочної форми навчання**

Спеціальність: „Науки про Землю”

Освітньо-наукова програма

«Гідрометеорологія»

Одеса 2021

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

**з дисципліни „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ”
(розділ „Аналітичні і чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними”)
для аспірантів I року денної та заочної форми навчання**

Спеціальність: „Науки про Землю”

Освітньо-наукова програма
«Гідрометеорологія»

Затверджено
на засіданні групи
забезпечення спеціальності
Протокол № 6
від «19» березня 2021 р.

Одеса 2021

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять


**з дисципліни „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ”
(розділ „Аналітичні і чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними”) для аспірантів I року денної та заочної форми навчання**

Спеціальність: „Науки про Землю”


Освітньо-наукова програма

«Гідрометеорологія»

Затверджено
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол № 6 від «19» березня 2021 р.

Голова групи забезпечення

_____ Степаненко С.М.

Затверджено
на засіданні кафедри метеорології та кліматології
Протокол № 7 від «5» лютого 2021 р.

Завідуючий кафедри _____ Прокоф'єв О.М.


Одеса 2021

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ” (розділ „Аналітичні і чисельні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними”) для аспірантів I року денної та заочної форми навчання зі спеціальності «Науки про Землю», освітньо-наукова програма «Гідрометеорологія»/ к. геогр. н., доц. Хоменко І.А. Одеса: ОДЕКУ, 2021. 66 с.

Зміст

1	Загальна частина.....	4
1.1	Мета та задачі дисципліни.....	4
1.2	Зміст практичної частини дисципліни „Математичне моделювання гідрометеорологічних процесів і явищ”.....	5
1.3	Перелік навчальної та методичної літератури.....	6
1.4	Перелік знань та вмінь та організація навчального процесу.....	6
2	Аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.....	8
2.1	Точні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними. Їх загальна характеристика.....	8
2.2	Диференціальні рівняння з частинними похідними: класифікація та приведення до канонічної форми.....	13
2.3	Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.....	16
2.4	Метод Фур'є.....	18
2.4.1	Рівняння вільних коливань струни та його розв'язання методом Фур'є.....	18
2.4.2	Узагальнення методу Фур'є на випадок задач, що описують процеси у трьох або чотирьох вимірах.....	25
2.4.3	Застосування методу Фур'є для рівнянь еліптичного типу.....	27
2.5	Задачі для самостійного розв'язання.....	34
3	Скінченнорізницеві методи розв'язання рівнянь гідротермодинаміки.....	35
3.1	Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних.....	35
3.2	Явні, неявні і напівнеявні скінченнорізницеві схеми.....	39
3.3	Побудова скінченнорізницевих схем.....	43
3.4	Розв'язання скінченнорізницевих рівнянь методом кроків за часом.....	48
3.5	Обчислювальна стійкість скінченнорізницевих схем.....	51
3.6	Задачі для самостійного розв'язання.....	54
4	Інтегрування рівнянь гідротермодинаміки.....	58
4.1	Схеми чисельного інтегрування за часом.....	58
4.2	Задачі для самостійного розв'язання.....	63

1 ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Мета та задачі дисципліни

Дисципліна „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ” є обов’язковою навчальною дисципліною для аспірантів I року навчання, що спрямована на підвищення наукової кваліфікації аспірантів, які проводять дисертаційні дослідження за спеціальністю „Науки про Землю”.

Засвоєння основних її положень базується на знаннях та вміннях, здобутих з дисциплін „Вища математика”, „Фізика”, „Гідродинамічні методи прогнозу погоди” та „Статистичні методи обробки гідрометеорологічної інформації”.

Основною метою дисципліни є систематичне викладення:

1) принципів побудови математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують у спрощеному або повному вигляді динаміку різноманітних природних систем,

а також,

2) точних, так званих, аналітичних, та різноманітних наближених методів розв’язання отриманих диференціальних рівнянь.

Курс заснований на об’єднанні фізичних міркувань з математичним аналізом.

Головним завданням дисципліни є формування у аспірантів загальної системи знань з фізичних механізмів, які відбуваються в атмо-, гідро-, літо-, кріо- і біосферах, а також придбання практичних навичок щодо застосування математичних методів для опису цих фізичних механізмів та реалізації отриманих моделей на ПК.

Здобуті знання повинні забезпечувати створення цілісної системи знань та вмінь, які дозволяють аспірантам застосовувати в своїх дослідженнях точні та різноманітні наближені методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

В результаті вивчення дисципліни аспірант має оволодіти **компетентністю** виконувати оригінальні агрометеорологічні, гідрологічні, кліматологічні, комплексно-географічні, метеорологічні та океанологічні дослідження при вирішенні актуальних проблем, використовувати сучасні наукові методи та досягати наукових результатів, які створюють нові знання.

Результатом навчання дисципліни „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ” є пояснювати наукові принципи моделювання природних процесів, аналізувати обмежуючі фактори їх використання і невизначеності, що пов’язані з результатами моделювання, та визначати методи перевірки достовірності моделювання і методики їх застосування.

Методичні вказівки поділено на чотири розділи. Перший розділ знайомить аспіранта зі змістом дисципліни, організацією навчального процесу та знаннями і вміннями, які він мусить придбати під час вивчення курсу.

Другий розділ містять теми, які охоплюють практичну частину, що присвячено одному з основних аналітичних методів розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними, – методу Фур'є. При засвоєнні цього методу аспірант навчається безпомилково визначати тип диференціального рівняння з частинними похідними, що у подальшому знадобиться при застосуванні будь-яких методів розв'язання, оскільки для кожного типу диференціального рівняння і в аналітичних, і в чисельних методах використовуються свої техніки розв'язання, окрім того, приведення диференціального рівняння з частинними похідними, допомагає не тільки отримати точний розв'язок, але і зробити більш глибокий фізичний аналіз поставленої задачі.

Третій розділ присвячено чисельним методам розв'язання диференціальних рівнянь, а четвертий розділ – схемам інтегрування за часом.

До кожної теми надаються рекомендації по вивченню теми, приклади розв'язання типових задач, контрольні питання для ліпшого засвоєння матеріалу аспірантом, а також завдання, виконання яких дозволить аспірантам проконтролювати ступінь засвоєння ними матеріалу.

1.2 Зміст практичної частини розділу „Аналітичні і чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними” в дисципліні „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ”

Тема 1. Основні аналітичні (точні) методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними. Канонічна форма. Метод характеристик. Спрощення групи молодших похідних для рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами. Ряди Фур'є. Метод Фур'є та його застосування до розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів. Застосування спеціальних функцій до розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Тема 2. Скінченнорізницеві методи розв'язання рівнянь гідро-термодинаміки

Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних. Побудова скінченнорізницевої схем. Явні, неявні та напівнеявні схеми. Аналіз обчислювальної стійкості: критерій Фрідріха-Куранта-Леві, прямий метод, метод Неймана.

Тема 3. Інтегрування рівнянь гідротермодинаміки.

Методи інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними за часом. Схеми чисельного інтегрування за часом.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

1. Прусов В.А., Сніжко С.І. Математичне моделювання атмосферних процесів. – Київ.: Ніка-Центр, 2005.– 496 с.
2. Прусов В.А., Сніжко С.І. Динамічна метеорологія. – Київ.: ВПЦ «Київський університет», 2009.– 383 с.
3. Хоменко Г.В., Хохлов В.М., Бондаренко В.М. Практикум з гідродинамічних методів прогнозу погоди - Навчальний посібник. ОДЕКУ, Одеса, 2012. – 240 с.
4. Хоменко Г.В., Хохлов В.М. Гідродинамічні методи прогнозу погоди. – Одеса: Екологія, 2008. – 340 с.

1.4 Перелік знань та вмінь та організація навчального процесу

В результаті вивчення дисципліни „Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ” аспірант повинен

знати:

- 1) основні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними (точні, асимптотичні, чисельні, наближені аналітичні) та межі їх застосовності;
- 2) основні типи чисельних схем та які саме типи застосовуються до різних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- 3) властивості чисельних схем (коректність, стійкість та збіжність);
- 4) методи обчислювальної математики, які використовуються при розв’язанні різних типів скінченнорізницевих рівнянь;

вміти:

- 1) використовуючи математичний апарат для опису фізичних процесів, сформулювати коректну математичну задачу;
- 2) використовуючи отримані знання з методів розв’язання рівнянь математичної фізики, підібрати метод розв’язання і довести доцільність свого вибору;
- 3) розписати рівняння математичної фізики у скінченнорізницевій формі та підібрати чисельну схему для його розв’язання таким чином, щоб вона була коректною, стійкою та збіжною.

При вивченні дисципліни аспірант знайомиться з відповідними розділами в навчальній літературі та власних конспектах лекцій, при необхідності та за вказівкою викладача доповнюють рукопис конспектуванням.

В процесі виконання практичних змістовних модулів аспіранти використовують знання, набуті при підготовці до лекцій.

Методичні вказівки присвячено двом великим розділам з чотирьох, які має опанувати аспірант, а саме «Аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними» і «Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними».

Перелік практичних завдань.

Розділ 1. Аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними методом характеристик. Оцінюється в 20 балів.

2. Розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними методом Фур'є. Оцінюється в 30 балів.

Розділ 2. Чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Реалізація чисельного розв'язку диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними. Оцінюється в 40 балів.

Розділ 3. Інтегрування рівнянь гідротермодинаміки.

1. Скінченнорізницевий запис рівнянь гідротермодинаміки з використанням різних схем інтегрування за часом (розв'язання задач). Оцінюється в 10 балів.

Якщо студент своєчасно не виконав практичний модуль, то максимальна сума балів зменшується на 10%.

2. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

2.1 Точні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними. Їх загальна характеристика

Диференціальні рівняння у частинних похідних другого і більш високого порядків часто зустрічаються в різних областях математики, фізики, механіки, хімії, біології та багатьох інших прикладних науках.

Розглядатимемо методи розв'язання задач, які дозволяють математичне формулювання у вигляді диференціальних рівнянь та деяких додаткових умов (початкових та граничних). Основні теоретичні методи умовно можна поділити на чотири класи:

1. точні методи;
2. асимптотичні методи (методи збурень);
3. чисельні методи;
4. наближені аналітичні методи.

Ця класифікація досить зручна, оскільки заснована на використанні ряду характерних рис та відзначальних ознак кожного класу. Важливо відзначити, що більшість фахівців зазвичай добре володіють тільки методами одного класу (ця обставина часто призводить до недооцінки можливостей інших методів).

Зауваження 1. При розв'язанні конкретних задач нерідко доводиться використовувати поєднання декількох методів різних класів.

Зауваження 2. Деякі методи залежно від їх конкретної реалізації при рішенні різних задач можна віднести як до чисельних, так і до наближених аналітичних методів (наприклад, різні модифікації методу Галеркіна).

1. Точні методи

Відмітні ознаки.

Дозволяють одержувати точні розв'язки.

В процесі розв'язання не допускаються спрощення.

Основні достоїнства точних розв'язків.

Формують фізичні уявлення про дані явища і процеси.

Наочно демонструють і дозволяють розібратися в механізмі складних нелінійних ефектів.

Широко використовуються як тестові задачі для всіх інших методів.

Дозволяють планувати експерименти для визначення емпіричних параметрів.

Точні розв'язки звичайно неважко перевірити шляхом підстановки їх в дані рівняння (при цьому немає необхідності знати метод отримання розв'язків).

Основні недоліки точних методів.

Мають обмежену область застосовності (часто не дозволяють отримати шуканий результат).

Іноді приводять до розв'язків складного вигляду, які незручно використовувати на практиці.

Більш докладна інформація.

Під точними методами розуміють математичні методи, при використанні яких в процесі розв'язання не допускаються які-небудь спрощення даних задач. Ці методи дозволяють одержувати точні рішення у вигляді аналітичних формул, інтегралів або рядів.

Точні розв'язки диференціальних рівнянь математичної фізики завжди відігравали і продовжують відігравати величезну роль у формуванні правильного розуміння якісних особливостей багатьох явищ і процесів в різних областях природознавства. Точні розв'язки нелінійних рівнянь наочно демонструють і дозволяють розібратися в механізмі таких складних нелінійних ефектів, як просторова локалізація процесів переносу, множинність або відсутність стаціонарних станів за певних умов, існування режимів із загостренням тощо.

Прості розв'язки широко використовуються для ілюстрації теоретичного матеріалу (по теорії тепло- і масопереносу, гідродинаміці, газовій динаміці, теорії хвиль, нелінійній оптиці і ін.).

Точні розв'язки типу хвилі, що біжить, і автотодельні розв'язки часто є асимптотиками істотно більш широких класів розв'язків, відповідних іншим початковим і граничним умовам. Вказана властивість дозволяє робити висновки загального характеру і прогнозувати динаміку різних явищ і процесів.

Навіть ті частинні точні розв'язки диференціальних рівнянь, які не мають ясного фізичного сенсу, можуть бути використані як «тестові задачі» при перевірці коректності і оцінці точності різних чисельних, асимптотичних і наближених аналітичних методів. Крім того, допускаючи точні розв'язання, модельні рівняння і задачі слугують основою для розробки нових чисельних, асимптотичних і наближених методів, які, у свою чергу, дозволяють досліджувати вже складніші задачі, що не мають точного аналітичного рішення.

Точні методи і розв'язки необхідні також для розробки і вдосконалення відповідних розділів комп'ютерних програм, призначених для аналітичних обчислень (системи MATHEMATICA, MAPLE, MATLAB і ін.)

Важливо відзначити, що багато рівнянь прикладної і теоретичної фізики, хімії і біології містять емпіричні параметри або емпіричні функції. Точні рішення дозволяють планувати експеримент для визначення цих параметрів або функцій шляхом штучного створення відповідних (граничних і початкових) умов.

Точні методи найчастіше застосовують:

1. для розв'язання лінійних задач, що описуються рівняннями з частинними похідними в областях з простою геометрією (найбільшу користь вони приносять при дослідженні лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами);
2. для розв'язання задач, описуваних лійними і нелійними рівняннями з частинними похідними першого порядку.

Найпоширенішими методами, що використовуються для вирішення лінійних задач математичної фізики, є метод розділення змінних, метод інтегральних перетворень (Лапласа, Фур'є, Мелліна тощо), метод, заснований на функціях Гріна, і метод характеристик. Для розв'язання задач, описуваних рівняннями з частинними похідними першого порядку, звичайно використовуються метод характеристик і метод розділення змінних.

Найпростішим методом розв'язку нелінійних задач математичної фізики і механіки є метод подібності, що дозволяє ввести автотомельні змінні, які дають можливість перейти від складних рівнянь з приватними похідними до звичайних диференціальних рівнянь.

Для переважної більшості задач, описуваних рівняннями з частинними похідними, не вдається знайти точний аналітичний розв'язок (сказане справедливо і для істотно більш простих трансцендентних рівнянь). Основні причини, що утрудняють отримання точних розв'язків, зумовлені, як правило, нелінійністю рівнянь або граничних умов, залежністю коефіцієнтів рівнянь від координат, складною формою меж тощо. Тому для отримання необхідної інформації про досліджуване явище або процес доводиться вдаватися до різного роду спрощенням в математичному формулюванні відповідної задачі, до різних наближень і апроксимацій, чисельних методів або до тих і інших одночасно.

Диференціальні рівняння, як правило, мають нескінченну множину розв'язків. Це пов'язано з появою в процесі інтегрування сталих, при будь-яких значеннях яких розв'язок задовольняє вихідному рівнянню.

Розв'язання задач математичної фізики пов'язано з знаходженням залежностей від координат та часу певних фізичних величин, які безумовно

повинні задовольняти вимогам однозначності, скінченності та неперервності. Іншими словами, будь-яка задача математичної фізики передбачає пошук єдиного розв'язку (якщо воно взагалі існує). Тому математичне формулювання фізичної задачі окрім основних диференціальних рівнянь, що описують шукані функції всередині розглядуваної області, має містити додаткові рівняння (диференціальні або алгебраїчні), які описують шукані функції на межах розглядуваної області в будь-якій момент часу (межові або крайові умови) та в усіх внутрішніх точках області в початковий момент часу (початкові умови). Диференціальне рівняння разом з відповідними крайовими (і початковими) умовами називається крайовою задачею математичної фізики.

Приклад 2.1.

Хвильове рівняння, яке описує коливальні процеси у суцільному середовищі, з нульовими початковими умовами $U(0,t)=0$ та межовими умовами $U(l,t)=B$, де U – шукана функція, t – час, a, b, A та B – сталі, є прикладом крайової задачі.

Припустимо, що необхідно розв'язати певну задачу, що описується рівняннями математичної фізики, для деякої області D . Прикладом такої задачі може бути рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, яке описує різноманітні стаціонарні процеси. Тоді для знаходження єдиного розв'язку маємо задати межові умови, тобто виразити шукані змінні на межі S області Ω через деякі рівняння.

Якщо область Ω являє собою деякий об'єм в тривимірному просторі, то межа S є замкненою поверхнею в цьому просторі, що обмежує цей об'єм. Якщо область Ω являє собою деяку поверхню в двовимірному просторі, то межа S є замкненим контуром в цьому просторі, що обмежує цю поверхню. І, в решті решт, якщо область Ω являє собою деякий відрізок в одновимірному просторі, то межа S є двома точками на межах цього відрізка.

По вигляду рівнянь, що задають межові умови, розрізняють межові умови першого роду (умови Діріхле), другого роду (умови Неймана) та третього роду.

Якщо функція має задовольняти крайовій умові $U|_S = f_1(\vec{x})$, де \vec{x} – координати певної точки межі S , а f_1 – задана функція, то кажуть, що необхідно розв'язати відповідно внутрішню або зовнішню задачу Діріхле.

Якщо крайові умови мають вигляд $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = f_2(\vec{x})$, де $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S$ є похідна по зовнішній нормалі до межі S області Ω , де f_2 – задана функція, то кажуть, що вимагається розв’язати задачу Неймана (внутрішню або зовнішню).

Якщо крайові умови записують у формі

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha(\vec{x}, t)U \right) \Big|_S = f_3(\vec{x}), \text{ де } \alpha(\vec{x}, t), f_3 \text{ – задані функції,}$$

то це є третя крайова задача для рівняння Лапласа, яка є більш загальним випадком задач Діріхле та Неймана.

Якщо будь-яка з функцій – f_1 , f_2 або f_3 – тотожно дорівнює нулю, то відповідна умова є однорідною.

Слід зазначити, що кількість межових умов для кожної змінної визначається максимальним порядком похідної по координатах в диференціальних рівняннях: для рівнянь першого порядку – одна межева умова, для рівнянь другого порядку – дві, для рівнянь третього порядку – три тощо.

Для знаходження єдиного розв’язку в задачах, що описують нестационарні процеси, тобто фізичні процеси, що змінюються з часом, окрім межових умов необхідно задавати ще і початкові умови, які визначають значення змінних або їх градієнтів в усіх внутрішніх точках області Ω , включаючи межу S ($\Omega \setminus S$), в початковий момент часу. Це так звана змішана задача. Якщо при цьому на межі просторової (плоскої) області було задано значення шуканої функції $U(\vec{x}, 0) = F_1(\vec{x})$, де $\vec{x} \in \Omega \setminus S$, то кажуть, що була поставлена перша змішана задача.

Якщо як крайова умова було задано значення похідної від шуканої функції у напрямку зовнішньої нормалі до межі $\frac{\partial U(\vec{x}, 0)}{\partial t} = F_2(\vec{x})$, де $\vec{x} \in D \setminus S$, то кажуть, що розв’язується друга змішана задача.

Якщо було задано лінійну залежність між значеннями функції на межі і її похідної по нормалі $\beta(\vec{x}) \frac{\partial U(\vec{x}, 0)}{\partial t} + \delta(\vec{x})U(\vec{x}, t) = F_3(\vec{x})$, де $\vec{x} \in \Omega \setminus S$, то це – третя змішана задача.

Якщо, як додаткові, задані тільки початкові умови, то кажуть, що вимагається розв'язати задачу Коші. Як правило, в цьому випадку область зміни просторових змінних нескінченна. Така задача може бути поставлена для хвильового рівняння і рівняння теплопровідності.

Приклад 2.2.

Диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку $\frac{\partial U}{\partial x} + x \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, що задовольняє граничним умовам $U = \sin y$, $-\infty < y < \infty$ при $x = 0$, є прикладом задачі Коші.

Приклад 2.3.

Задача про поширення тепла на нескінченній прямій (рівняння теплопровідності) $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з межовими – $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ – та початковими – $U(x, 0) = \varphi(x)$ – умовами, є прикладом задачі Коші.

Приклад 2.4.

Задача про поширення тепла (рівняння теплопровідності) $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з межовими – $0 < x < 1$, $t > 0$, $U|_{x=0} = 0$, $U|_{x=1} = 0$ – та початковими – $U|_{t=0} = \sin 2\pi x$ – умовами, є прикладом першої змішаної задачі.

2.2 Диференціальні рівняння з частинними похідними: класифікація та приведення до канонічної форми

При викладенні цього підрозділу ми скористаємось відомим курсом лекцій Р.Джонсона [6].

Диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку з однією шуканою функцією u від двох незалежних змінних x, y має вигляд:

$$\Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad \text{є} \quad \text{є} \quad (2.1)$$

де x, y – незалежні змінні, а u – функція цих змінних.

Аналогічно записують рівняння для більшого числа незалежних змінних.

Зазвичай частинні похідні позначають $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv u_{xy}$

та $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u_{yy}$. Таким чином, рівняння (3.1) набуває вигляд:

$$\Phi(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (2.2)$$

або

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \quad (2.3)^1$$

де A, B, C, D, E, F та G – коефіцієнти, що у загальному випадку можуть бути функціями $x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$.

Порядок диференціального рівняння у частинних похідних визначається порядком похідної, яка має найвищий порядок у рівнянні.

Приклад 2.5.

Диференціальне рівняння $u_t = au_{xxy}$, де a є визначена постійна величина, є рівнянням третього порядку. А рівняння (3.3) є рівнянням другого порядку.

Покажемо, що рівняння вищого порядку можна привести до рівняння більш низького порядку

Приклад 2.6.

Диференціальне рівняння $w_{xx} + w_{yy} = w_{zz}$ можна записати як $u_x + v_y = u_z$, де $u = w_x$, $v = w_y$.

Приклад 2.7.

Рівняння мілкої води

$$\left. \begin{aligned} u_t &= -gh_x \\ h_t &= -Hu_x \end{aligned} \right\}$$

можна переписати у вигляді:

¹ Далі буде зрозумілим, чому у рівнянні (2.3) коефіцієнт B є подвоєним.

$$u_{tt} = -c^2 u_{xx}, \quad \text{де } c = \sqrt{gH}$$

Порядок диференціального рівняння має важливе значення через кількість граничних умов, що мають доповнювати рівняння для коректної постановки задачі, та класифікацію рівнянь в канонічній або стандартній формі.

Диференціальне рівняння з частинними похідними є лінійним, якщо для оператора $L(\)$ виконується твердження:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

де α та β є константи. Це правило є універсальним.

За допомогою нелінійності в рівнянні враховуються зворотні зв'язки. Оскільки лінійні рівняння завжди мають аналітичні розв'язки, то складні системи зазвичай намагаються лінеаризувати для кращого розуміння їх фізичного змісту, принаймні в околі тієї точки або області, де лінеаризація має місце.

Приклад 2.8.

Оператор $L(u) = u_{xx} + u_{yy}$ є лінійним, оскільки

$$L(\alpha u) = \frac{\partial^2 \alpha u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha u}{\partial y^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \alpha L(u).$$

Приклад 2.9.

Оператор $L(u) = uu_{xx}$ є нелінійним, оскільки

$$L(\alpha u) = \alpha u \frac{\partial^2 \alpha u}{\partial x^2} = \alpha^2 \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \alpha^2 L(u) \neq \alpha L(u).$$

Приклад 2.10.

Рівняння $u_t + cu_x = 0$, де $c > 0$ & $const$ є лінійним, оскільки

$$L(\alpha u) = \frac{\partial \alpha u}{\partial t} + c \frac{\partial \alpha u}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \alpha L(u).$$

Приклад 2.11.

Рівняння $u_t + uu_x = 0$ є нелінійним, оскільки

$$L(\alpha u) = \frac{\partial \alpha u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial \alpha u}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \neq \alpha L(u).$$

Тобто з наведених прикладів можна бачити, що лінійними є рівняння, в яких коефіцієнти при старших похідних є функціями тільки x, y .

Приклад 2.12.

Рівняння (2.3) є лінійним відносно старших похідних, або просто лінійним, якщо коефіцієнти A, B, C є функціями тільки x, y .

Якщо коефіцієнти A, B, C рівняння (3.3) не залежать від x, y , то таке рівняння являє собою лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами.

Якщо функція u входить будь-яким чином в коефіцієнти при старших похідних, то такі рівняння називають квазілінійними рівняннями на відміну від тих, які не містять добутки функції u та її похідних.

Сума частинних розв'язків лінійного рівняння також задовольняє цьому рівнянню, що є несправедливим по відношенню до нелінійного рівняння.

Диференціальне рівняння у частинних похідних є однорідним, якщо вільний член, що являє собою функцію від x, y , дорівнює нулю.

Приклад 2.13.

Рівняння (2.3) є однорідним, якщо коефіцієнт G дорівнює нулю.

2.3 Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку

Розглянемо метод характеристик для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \quad (2.14)$$

або

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \Phi(u_x, u_y, u, x, y) = 0, \quad (2.15)$$

де

$$\Phi(u_x, u_y, u, x, y) = Du_x + Eu_y + Fu + G.$$

Існує три стандартних типи диференціальних рівнянь у частинних похідних:

1. гіперболічний;
2. параболічний;
3. еліптичний.

Для диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку тип рівняння визначається знаком виразу $B^2 - AC$:

$B^2 - AC > 0$, то таке рівняння є рівнянням гіперболічного типу,

$B^2 - AC = 0$, то рівняння є рівнянням параболічного типу,

$B^2 - AC < 0$, то рівняння є рівнянням еліптичного типу.

Зазначимо, що тільки похідні найвищого порядку визначають тип рівняння.

Приклад 2.17.

Розглянемо хвильове рівняння $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, в якому $A=1$, $B=0$ і $C=-c^2$. Вираз $B^2 - AC = 0 - (-c^2) \cdot 1 = c^2 > 0$, отже рівняння є гіперболічного типу.

Приклад 2.18.

Розглянемо рівняння дифузії $u_t = cu_{xx}$, в якому $A=c$, $B=0$ і $C=0$. Вираз $B^2 - AC = 0 - c \cdot 0 = 0$, отже рівняння є параболічного типу.

Приклад 2.19.

Розглянемо рівняння Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, в якому $A=1$, $B=0$ і $C=1$. Вираз $B^2 - AC = 0 - 1 = -1 < 0$, отже рівняння є еліптичного типу.

Приклад 2.20.

Класифікація деяких рівнянь може залежати від значення коефіцієнта. Розглянемо рівняння $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, в якому $A=y$, $B=0$ і $C=1$. Якщо $y > 0$, то $B^2 - AC = 0 - 1 \cdot y = -y < 0$, отже рівняння буде рівнянням еліптичного типу; якщо $y < 0$, то $B^2 - AC = 0 - 1 \cdot y = -y > 0$, отже рівняння перетворюється на рівняння гіперболічного типу.

2.4 Метод Фур'є

Окрім метода характеристик в задачах математичної фізики існує ще багато методів для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними. Одним з найпоширеніших та найбільш уживаних методів є **метод Фур'є** (або, як його ще називають, **метод розділення змінних**)

Найбільш часто цей метод застосовують при розв'язанні крайових задач математичної фізики для рівнянь параболічного та гіперболічного типів.

Сутність цього методу розберемо на конкретному прикладі диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку, в якому шукана функція є функцією тільки двох змінних, а зроблені висновки узагальнимо на всі типи рівнянь.

2.4.1 Рівняння вільних коливань струни та його розв'язання методом Фур'є

Розглянемо задачу про вільні коливання струни, що закріплена на обох кінцях. Коливання такої струни описуються рівнянням

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2.15)$$

що задовольняє однорідним крайовим умовам

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \quad (2.16)$$

та початковим умовам

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ і } u_t(x,0) = \psi(x). \quad (2.17)$$

Перша частина методу Фур'є полягає в тому, що ми шукаємо частинні розв'язки рівняння (3.46), що задовольняють крайовим умовам (2.16), у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \quad (2.18)$$

Кожне з шуканих частинних розв'язків, таким чином, набуває вигляду добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x , а інша – тільки від t .

Рівняння (2.15) є лінійним, тому сума частинних розв'язків також є розв'язком цього рівняння. Маючи достатню кількість частинних розв'язків, можна за допомогою підсумовування їх з деякими коефіцієнтами знайти шуканий розв'язок.

Підставляючи запропоновану форму розв'язку (2.18) в рівняння (2.15), отримаємо:

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)T''(t), \quad (2.19)$$

або після ділення на $X(x)T(t)$,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (2.20)$$

Для того щоб функція (2.18) була розв'язком рівняння (2.15), рівності (2.19) та (2.20) мають задовольнятися тотожно, тобто для всіх значень незалежних змінних $0 < x < l$, $t > 0$. Права частина рівності (2.20) є функцією тільки змінного t , а ліва – тільки функції x . Фіксуємо, наприклад, деяке значення x та змінюючи t (або навпаки), отримуємо, що права та ліва частини рівності (2.20) при зміні своїх аргументів зберігають постійне значення

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (2.21)$$

де λ – стала, яку задля зручності подальшого доведення візьмемо зі знаком мінус, не передбачаючи при цьому нічого про її знак.

Зі співвідношення (2.21) отримаємо звичайні диференціальні рівняння для визначення функцій $X(x)$ та $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.22)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (2.23)$$

Крайові умови (3.47) мають передумовою:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Звідки випливає, що функція $X(x)$ має задовольняти додатковим умовам

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{2.24}$$

інакше ми мали би

$$T(t) \equiv 0 \text{ та } u(x,t) \equiv 0,$$

тобто рівняння має тільки тривіальні розв'язки², проте наша задача полягає у знаходженні саме нетривіальних розв'язків. Для функції $T(t)$ в задачі жодних додаткових умов немає.

Таким чином, у зв'язку з відшукуванням функції $X(x)$ постає необхідність в розв'язанні задачі на власні значення:

необхідно знайти значення λ , які мають назву власних значень, при яких існують нетривіальні розв'язки задачі

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{2.24}$$

які називають власними функціями, а також знайти ці розв'язки. Сформульовану таким чином задачу часто називають задачею Штурма-Ліувілля³.

Задача зводиться до розв'язання звичайного диференціального рівняння $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, для якого можна скласти характеристичне рівняння $k^2 + \lambda = 0$.

Розглянемо окремо випадок, коли параметр λ є від'ємним, додатним або дорівнює нулю.

² Тривіальним розв'язком системи рівнянь або рівняння є, так званий, нульовий розв'язок.

³ Ця задача являє собою частинний випадок загальної задачі Штурма-Ліувілля, яка полягає в відшукуванні розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку виду $[a(x)y']' + b(x)y - cy = 0$, що задовольняє деяким крайовим умовам, тобто умовам, які накладаються на шукану функцію та її похідну в точках $x = a$ та $x = b$ (кінці інтервалу).

1. При $\lambda < 0$ задача не має нетривіальних розв'язків. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Крайові умови дають:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0,$$

тобто

$$C_1 = -C_2 \text{ та } C_1 (e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}}) = 0.$$

Проте в цьому випадку $l\sqrt{-\lambda}$ є дійсним та додатним, тому $e^{l\sqrt{-\lambda}} - e^{-l\sqrt{-\lambda}} \neq 0$. Тому $C_1 = 0$ та $C_2 = 0$, а значить і $X(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda = 0$ також існують лише тривіальні розв'язки. Дійсно, в цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Крайові умови дають $C_1 = 0$ та $C_1 + C_2 l = 0$, тобто знову ж $C_1 = 0$ та $C_2 = 0$, а значить і $X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ корні характеристичного рівняння є комплексними, $k = \pm i\lambda$, і розв'язок буде містити тригонометричні функції.

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

При $x = 0$ має бути

$$X(0) = C_1 = 0,$$

а при $x = l$

$$X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0.$$

Остання рівність стає можливою, якщо $C_2 \neq 0$, а саме така умова буде задовольнятися при

$$\sin \sqrt{\lambda} x = 0.$$

тобто при $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$, де $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ (n не дорівнює нулю, оскільки за умовою задачі $\lambda \neq 0$). Отже, нетривіальні розв'язки задачі є можливими лише при значеннях $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$.

Цим **власним значенням** відповідають **власні функції** рівняння (2.15) з крайовими умовами (5.2)

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.25)$$

де C_n – довільна стала. В подальшому n має приймати тільки додатні значення: $n = 1, 2, \dots$, оскільки при від'ємних n будуть отримуватись розв'язки того самого вигляду (адже C_n – довільні сталі, які можуть мати будь-який знак).

Як можна бачити, кожному значенню $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ відповідає безкінечна кількість розв'язків (3.56), що відрізняються одне від одного постійним множником.

Наступним етапом розв'язання задачі є відшукування функції $T(t)$. Кожному власному числу λ_n буде відповідати своя функція $T_n(t)$, яка визначається рівнянням (3.54):

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t, \quad (2.26)$$

де A_n та B_n – довільні сталі.

Підставляючи вирази (2.25) та (2.26) в формулу (2.18) знайдемо частинні розв'язки рівняння (2.15), що задовольняють крайовим умовам (2.16). При цьому кожному значенню $n = 1, 2, \dots$ буде відповідати розв'язок

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) C_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Якщо внести множник C_n в дужки та ввести позначення $A_n C_n = a_n$, а $B_n C_n = b_n$, то отримаємо функцію $u_n(x, t)$ у вигляді

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.27)$$

Розв'язки $u_n(x, t)$ називають власними функціями задачі, а коливання, що їм відповідають, класними коливаннями.

Фізичний зміст розв'язку (2.27) розглянемо трохи пізніше, а зараз перейдемо до **другої частини метода Фур'є** та за допомогою власних функцій побудуємо розв'язок, що задовольняє початковим умовам (2.17). Через лінійність та однорідність рівняння (2.15) сума розв'язків (2.27) також буде його розв'язком:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.28)$$

Оскільки ми склали безкінечний ряд, то, зрозуміло, потрібно, щоб він збігався. Ми припустимо також, що його можна двічі почленно диференціювати⁴. Функція $u(x, t)$ задовольняє крайовим умовам (2.16), оскільки їм задовольняє кожна з функцій $u_n(x, t)$.

Підберемо довільні сталі a_n та b_n таким чином, щоб функція (2.28) задовольняла і початковим умовам. Підставляючи значення $t = 0$, отримаємо

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x). \quad (2.29)$$

⁴ Нагадаємо, що для правильно збіжних рядів мають місце такі теореми:

1. Сума правильно збіжного ряду з неперервних функцій є функція неперервна.
2. Правильно збіжний ряд можна почленно інтегрувати.
3. Якщо ряди, що складаються з похідних збіжного ряду, збігаються правильно, то ряд можна почленно диференціювати.

Диференціюючи ряд (3.59) по t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + b_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

та підставляючи $t = 0$, задовольнимо другій початковій умові:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x). \quad (2.30)$$

Формули (2.29) та (2.30) показують, що величини a_n та $\frac{n\pi a}{l} b_n$ є коефіцієнтами розвинення функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ в ряд Фур'є по синусам в інтервалі $(0, l)$. Отже, використовуючи формули для коефіцієнтів цього розвинення, знайдемо:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.31)$$

Оскільки для коефіцієнтом розвинення в ряд Фур'є функції $\psi(x)$ є $\frac{n\pi a}{l} b_n$, то сам коефіцієнт b_n знайдемо за формулою:

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (2.32)$$

Порівнюючи ряди (2.31) та (2.32) з формулами (2.29) та (2.30), можна бачити, що для виконання початкових умов необхідно покласти $a_n = \varphi_n$ та $b_n = \frac{l}{n\pi a} \psi_n$. Підставляючи вирази для коефіцієнтів a_n та b_n в ряд (2.28), ми остаточно знайдемо розв'язок поставленої задачі:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.33)$$

Формула (3.64) показує, що в моменти часу $t = \frac{2l}{a}$, $t = \frac{4l}{a}$,..... струна вертається в свій початковий стан; це означає, що коливання струни є незгасні та ті, що періодично повторюються, з періодом $T = \frac{2l}{a}$. Так відбувається тому, що в цій задачі знехтувано силами тертя.

2.4.2 Узагальнення методу Фур'є на випадок задач, що описують процеси у трьох або чотирьох вимірах

Якщо ми маємо справу з рівняннями гіперболічного та параболічного типу, тобто рівняннями, що описують нестационарні процеси, а отже, як слідство, містять часові похідні, то при застосуванні методу Фур'є ми маємо відокремити просторові похідні від часової похідної.

Приклад 2.24

Нехай розшукується розв'язок рівняння

$$\Delta u = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.34)$$

в області Ω простору x, y, z , що обмежується поверхнею S і для t , яке задовольняє нерівності $0 \leq t \leq T$, за умови: $u|_S = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$.

Розв'язок такої задачі зручно шукати у вигляді

$$u = U(x, y, z)T(t). \quad (2.35)$$

Підставляючи (3.66) в (3.65) та ділячи обидві частини на U , маємо

$$\frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = \frac{1}{a} \frac{T'(t)}{T(t)}. \quad (2.36)$$

Змінні x, y, z та t розділено в рівнянні (3.67), ліва частина не залежить від t , а права від x, y, z . Рівність (3.67) можлива за умови, якщо і права і ліва частини дорівнюють одній і тій самій сталій $-\lambda$, звідки

$$\frac{\Delta U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = -\lambda, \quad \frac{1}{a} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (2.37)$$

або

$$\Delta U + \lambda U = 0, \quad (2.38)$$

$$T(t) = C e^{-\lambda a t}. \quad (2.39)$$

Для того щоб наш розв'язок задовольняв крайовій умові, необхідно, щоб цій умові задовольняла функція $U(x, y, z)$. Якщо для часової похідної в будь-якому випадку отримуватимемо звичайні диференціальні рівняння, методи розв'язання яких нам вже відомі, то для просторових похідних у випадку дво- або тривимірного простору матимемо справу вже з рівнянням з частинними похідними еліптичного типу, тобто або з рівнянням Лапласа або Пуассона. Аналітичних методів розв'язання рівнянь еліптичного типу існує досить багато, також шукати їх розв'язання можна за допомогою методу Фур'є. В нашу задачу не входить розглядати всі ці методи, ми зупинимось тільки на методі Фур'є, застосування якого до рівнянь еліптичного типу розглянемо нижче. Найбільш універсальним для розв'язання еліптичних рівнянь є метод функції Гріна, з яким можна ознайомитись в [4,5].

В цьому випадку за заданих крайових умов розв'язок рівняння (2.38) можна знайти лише за допомогою методом функції Гріна (див. [5]):

$$U(P_0) = \frac{\lambda}{4\pi} \iiint_{\Omega} G(P, P_0) U(P) dP, \quad (2.40)$$

де $G(P, P_0)$ – це функція Гріна для оператора Лапласа в області Ω , P, P_0 – дві змінні точки.

Рівняння (2.40) відповідно до теорії інтегральних рівнянь (див. [4]) може мати розв'язки, що відрізняються від нуля, лише для деяких дискретних значень λ . Якщо ці значення λ будуть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, та нехай $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ – відповідні розв'язки рівняння (3.71), які називаються власними функціями. Тоді ми отримаємо цілий набір частинних розв'язків рівняння (3.65):

$$u_n = U_n e^{-\lambda_n a t}.$$

Вкажемо п'ять важливих загальних властивостей системи функцій $U_n(x, y, z)$ та чисел λ_n :

1. Чисел λ_n безкінечно багато, всі вони дійсні та додатні. (В деяких задачах, що відрізняються від задачі, наведеної в прикладі 1, ця умова замінюється тим, що серед них лише скінченна кількість від'ємних.)

2. Всі функції U_n можна вважати ортогональними та нормованими, тобто

$$\iiint_{\Omega} U_n(x, y, z) U_m(x, y, z) dx dy dz = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

3. Функції U_n утворюють так звану повну систему, тобто будь-яку неперервну функцію $\varphi(x, y, z)$ можна представити у вигляді ряду

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x, y, z), \quad (2.41)$$

що збігаються в середньому, де a_n – це так звані коефіцієнти Фур'є функції φ . Якщо, окрім того, φ задовольняє умові $\varphi|_S = 0$ та має неперервні, включаючи межі, похідні другого порядку, то ряд (2.41) збігається рівномірно.

4. Окрім умови ортонормальності, що зазначена вище, має місце ще система рівностей

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{\partial U_m}{\partial x} + \frac{\partial U_n}{\partial y} \frac{\partial U_m}{\partial y} + \frac{\partial U_n}{\partial z} \frac{\partial U_m}{\partial z} \right) dx dy dz = \begin{cases} \lambda_n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}. \quad (2.42)$$

Якщо двічі неперервно диференціюєма функція φ задовольняє крайовим умовам $u|_S = 0$, то ряд (3.72) не тільки збігається до φ рівномірно, але і ряд, отриманий з нього почленним диференціюванням, збігається в середньому до відповідної похідної функції φ .

2.4.3 Застосування методу Фур'є для рівнянь еліптичного типу

Для рівнянь еліптичного типу метод Фур'є може бути застосований, якщо можна вибрати таку систему координат, щоб виконувались такі умови:

1. Область (Ω) в цих координатах являє собою координатний чотирикутник в двовимірному випадку або координатний циліндр в тривимірному випадку.⁵

2. Рівняння, що записане в цих координатах, може бути представлено у вигляді суми двох доданків, з яких – в двовимірному випадку – кожне містить тільки оператор диференціювання по одній змінній та коефіцієнти, що залежать тільки від цієї змінної. В тривимірному випадку один доданок має містити оператори диференціювання по двом змінним і коефіцієнти, що залежать тільки від цих двох змінних, а друге – тільки третю змінну.

3. Крайові умови в цих координатах мають містити оператори, коефіцієнти яких є постійними уздовж кожної сторони координатного чотирикутника в двовимірному випадку або в тривимірному випадку – на основах координатного циліндру та уздовж кожної його утворюючої.

Приклад 2.25.

Розв'яжемо першу крайову задачу для кола:
знайти функцію u , що задовольняє рівнянню:

$$\Delta u = 0 \text{ в середині кола} \quad (2.43)$$

та крайовій умові

$$u = f \text{ на межі кола,} \quad (2.44)$$

де f – задана функція.

Ми припускаємо, що функція f є неперервною та диференційованою. в подальшому ми звільнимися від умови диференційованості та неперервності. Разом з внутрішньою крайовою задачею будемо розглядати також зовнішню крайову задачу.

Введемо полярну систему координат (r, φ) з початком в центрі кола. Рівняння (2.43) в полярних координатах має вигляд

⁵ Під координатним чотирикутником будемо розуміти область, що обмежена чотирма дугами координатних ліній, тобто ту, що визначається нерівностями $a < x < b$, $c < y < d$. Під координатним циліндром розумітимемо область, що обмежена двома частинами координатних площин $u = const$ (основи циліндру) і поверхнею, що складається з дуг координатних u -ліній, які поміщені між ними (утворюючі циліндру), тобто область, що визначається нерівностями $a < x < b$, $F(y, z) < c$.

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2.45)$$

Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (2.45) у вигляді

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Підставляючи форму розв'язку, що пропонується, в рівняння (2.45), отримаємо

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{\frac{R}{r}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

де $\lambda = \text{const}$. Звідки отримуємо два рівняння:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad (2.46)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0. \quad (2.47)$$

Перше з цих рівнянь має розв'язок:

$$\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Зауважимо, що при зміні кута φ на величину 2π однозначна функція $u(r, \varphi)$ має повернутись до вихідного значення

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi).$$

Звідки випливає, що

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

тобто $\Phi(\varphi)$ є періодичною функцією кута φ з періодом 2π . Це можливо тільки, якщо $\sqrt{\lambda} = n$, де n – ціле число, і

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B_n \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Функцію $R(r)$ будемо шукати у вигляді

$$R(r) = r^\mu.$$

Підставляючи в рівняння (3.78) та скорочуючи на r^μ , знайдемо:

$$n^2 = \mu^2 \text{ або } \mu = \pm n, (n > 0).$$

Отже,

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n},$$

де C та D – сталі.

Для розв'язання внутрішньої задачі необхідно покласти $R = Cr^n$ ($\mu = +n$), оскільки, якщо $D \neq 0$, то функція $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ обертається на безкінечність при $r=0$ та не є гармонічною в середині кола. Для розв'язання зовнішньої задачі, навпаки, слід брати $R = Dr^{-n}$ ($\mu = -n$), оскільки розв'язок зовнішньої задачі має бути обмеженим в безкінечності.

Отже, частинні розв'язки задачі знайдено:

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для } r \leq a,$$

$$u_n(r, \varphi) = \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для } r \geq a.$$

Суми цих розв'язків

$$u_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для внутрішньої задачі,}$$

$$u_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для зовнішньої задачі}$$

при достатньо хорошій збіжності також будуть гармонічними функціями.

Для визначення коефіцієнтів A_n та B_n використаємо крайову умову

$$u_n(0, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \quad (2.48)$$

Вважаючи, що f задана як функція кута φ , візьмемо її розвинення в ряд Фур'є

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (2.49)$$

де

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi.$$

Порівнюючи ряди (3.79) і (3.80), отримаємо:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{2}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{2} \quad \text{для внутрішньої задачі,}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \quad \text{для внутрішньої задачі.}$$

Таким чином, ми отримали формальний розв'язок першої внутрішньої задачі для кола у вигляді ряду

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (2.50)$$

а розв'язання зовнішньої задачі у вигляді

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \quad (2.51)$$

Щоб переконатись в тому, що отримані функції дійсно є шуканими розв'язками, необхідно переконатись в застосовності принципу суперпозиції, для чого необхідно довести збіжність рядів, спроможність їх почленного диференціювання, а також довести неперервність цих функцій на межі кола. Обидва ряди можна представити однією формулою

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

де

$$t = \begin{cases} \frac{r}{a} \leq 1 & \text{при } r \leq a \text{ (внутрішня задача)} \\ \frac{a}{r} \geq 1 & \text{при } r \geq a \text{ (зовнішня задача)} \end{cases}$$

α_n, β_n – коефіцієнти ряду Фур'є функції $f(\varphi)$.

Доведемо, що ряди (2.50) та (2.51) можна диференціювати при $t < 1$ будь-яку кількість разів. Нехай

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Обчислимо похідну k -ого порядку функції u_n по φ

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left(\alpha_n \cos \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) + \beta_n \sin \left(n\varphi + k \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Звідси отримуємо оцінку

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} \right| \leq t^n n^k a M,$$

через M позначено максимум модуля коефіцієнтів ряду Фур'є α_n та β_n

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha_n| < M \\ |\beta_n| < M \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

Фіксуємо деякі значення $r_0 < a$ (для внутрішньої задачі) та $r_1 = \frac{a^2}{r_0} > a$

(для зовнішньої задачі), при цьому $t_0 = \frac{r_0}{a} < 1$. Розглядаючи ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k, \quad t \leq t_0,$$

бачимо, що він збігається рівномірно при $t \leq t_0 < 1$

k

φ в будь-якій точці

всередині (зовні) кола будь-яку кількість разів. Аналогічно доводиться, що по

змінній r також можна диференціювати ряди (2.50) та (2.51) всередині (зовні) кола радіуса r_0 скільки завгодно разів.

Через довільність r_0 можна зробити висновок, що ряди (2.50) та (2.51) почленно диференційовані в будь-якій внутрішній (зовнішній) точці кола. З можливості почленного диференціювання випливає застосовність принципу суперпозиції. Таким чином доведено, що функції (2.50) та (2.51) задовольняють рівнянню $\Delta u = 0$.

При цьому доведенні ми користувались тільки тією властивістю функції $f(\varphi)$, що її коефіцієнти Фур'є обмежені (формула 2.52). це має місце для будь-якої обмеженої функції (і навіть для будь-якої абсолютно інтегрованої функції). Таким чином, ряди (2.50) та (2.51), що відповідають будь-якій обмеженій функції, визначають функції, що задовольняють рівнянню

$$\Delta u = 0 \text{ для } t < 1.$$

Доведемо тепер неперервність функції в замкненій області ($t \leq 1$). Очевидно, що без більш детальних відомостей відносно властивостей функції $f(\varphi)$ цього зробити неможливо.

З припущення неперервності та диференційованості функції $f(\varphi)$ випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \quad (2.53)$$

З іншого боку, маємо

$$|t^n \alpha_n \cos n\varphi| \leq |\alpha_n|, \quad |t^n \beta_n \cos n\varphi| \leq |\beta_n|.$$

Тому ряди (2.50) та (2.51) збігаються рівномірно при $t \leq 1$, отже, функції, що представляються ними, неперервні на межі кола. З формули (3.84) можна бачити, що функція (2.51), отримана для зовнішньої задачі, обмежена на безкінечності.

Таким чином, встановлено, що функції (2.50) та (2.51) задовольняють всім умовам поставлених задач.

2.5 Задачі для самостійного розв'язання

Визначити тип рівняння з постійними коефіцієнтами і знайти його розв'язок методом Фур'є:

1. $3U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} + 3U_x + U_y - 2U = 0$
2. $3U_{xx} - 8U_{xy} + 7U_{yy} + 3U_x - U_y + 2U = 0$
3. $2U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} + U_x + 5U_y - 2U = 0$
4. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 4U_x - 9U_y - 3U = 0$
5. $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 4U_x - 3U_y - 7U = 0$
6. $2U_{xx} + 8U_{xy} + 8U_{yy} - U_x - 2U_y - 5U = 0$
7. $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} - 3U_x + 2U_y - 5U = 0$
8. $8U_{xx} - 6U_{xy} - U_{yy} - U_x - 3U_y - U = 0$
9. $4U_{xx} - 8U_{xy} + U_{yy} - 2U_x + 2U_y - 3U = 0$
10. $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 7U_y - 3U = 0$

3 Скінченнорізницеві методи розв'язання рівнянь гідротермодинаміки.

3.1 Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних

Рівняння гідротермодинаміки, які використовуються для побудови прогностичних моделей атмосфери, належать до нелінійних диференціальних рівнянь. Методів точного розв'язання таких рівнянь не існує (за винятком окремих випадків), тому для їх розв'язання використовуються наближені чисельні методи, одним із яких є метод сіток.

Суть методу сіток полягає у тому, що замість неперервного простору, яким є атмосфера, вводиться дискретний простір, складений із множини точок; неперервний час також замінюється дискретним, тобто множиною точок на осі часу. Сукупності точок просторових і часових мають назву просторово – часових сіток. Положення цих точок, які називаються вузлами сітки, визначається безрозмірними координатами

$$i = \frac{x}{\delta x}, \quad j = \frac{y}{\delta y}, \quad k = \frac{z}{\delta z} \text{ (або } k = \frac{p}{\delta p}, \text{ або } k = \frac{\zeta}{\delta \zeta}), \quad s = \frac{t}{\delta t},$$

де $\delta x, \delta y, \delta z$ ($\delta p, \delta \zeta$) – кроки за простором (відстань між сусідніми точками на координатних осях); δt – крок за часом, тобто відстань між сусідніми вузлами на осі часу. В методі сіток поля метеорологічних величин замінюються множиною дискретних сіткових значень функцій $f_{i,j,k}^s$.

Сітки можуть розрізнятися за кількістю вузлів, розміром кроків, структурою чарунок, а також за способом розташування метеовеличин у вузлах сітки. Оскільки, відповідно до методу сіток, значення метеорологічних величин відомі в дискретних точках, похідні в диференціальних рівняннях можна розрахувати тільки за допомогою скінченних різниць.

Похідна, яка представлена як відношення скінченних різниць, називається скінченнорізницевим аналогом цієї похідної, а процедура заміни 2охідної скінченною різницею – скінченнорізницевою апроксимацією.

Диференціальні рівняння і межові умови, в яких похідні замінено на скінченні різниці, називають скінченнорізницевими схемами. Системи скінченнорізницевих рівнянь називають також чисельними моделями.

Сукупність диференціальних рівнянь гідротермодинаміки і межових умов, які представлені в скінченнорізницевому вигляді на множині вузлів сітки в області визначення розв'язків, являє собою замкнену систему алгебраїчних рівнянь.

Таким чином, метод сіток дозволяє крайову задачу з початковими умовами для диференціальних рівнянь звести до системи алгебраїчних рівнянь, методи розв'язання яких добре розроблені.

Для подальшого викладення питань з методу сіток зручно ввести замість *неперервних* просторових координат x, y, z (або P) загальну розмірну координату r , якій відповідає безрозмірна координата

$$q = \frac{r}{\delta r},$$

де $\delta r = \left\{ \begin{array}{l} \delta x \\ \delta y \\ \delta z, \delta p \end{array} \right\}$ - просторовий крок сітки по відповідних координатних

осях;

$q = \left\{ \begin{array}{l} i, \\ j, \\ k \end{array} \right\}$ - дискретні безрозмірні координати по осях x, y, z (або P).

Загальні координати r або q в принципі можна використовувати для скінченнорізницевого представлення і часових похідних, але ми будемо їх застосовувати в основному для апроксимації просторових похідних.

Відзначимо, що безрозмірні координати сусідніх вузлів сітки, які знаходяться на відстані одного кроку, відрізняються на одиницю, тому що

$$\frac{r + \delta r}{\delta r} = \frac{r}{\delta r} + \frac{\delta r}{\delta r} = q + 1 \quad \text{або}$$

$$\frac{r - \delta r}{\delta r} = \frac{r}{\delta r} - \frac{\delta r}{\delta r} = q - 1.$$

В чисельних методах найбільш часто використовуються такі формули для заміни похідних:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_q - f_{q-1}), \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (3.2)$$

де f - будь-яка метеорологічна величина.

В формулі (3.1), (3.2) використано однобічні різниці, а в (3.3) – центральні. Похідні, отримані за формулами (3.1) - (3.3), можна віднести до будь-якої точки на інтервалах $(q-1) \div q$, $q \div (q+1)$ і $(q-1) \div (q+1)$ відповідно, але найбільш точним буде представлення похідної методом центральних різниць для точки q (рис. 3.1).

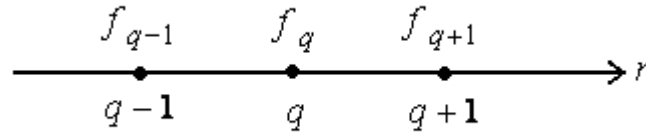


Рисунок 3.1 – Розташування вузлів сітки на осі r

Оцінка точності заміни похідних скінченними різницями виконується за допомогою розкладення функції f в ряд Тейлора навколо точки q , тобто функція f розкладається в ряд Тейлора в точці $r \pm \delta r$ для однобічної різниці і в точках $r + \delta r$, $r - \delta r$ - для центральної різниці.

Продемонструємо процедуру оцінювання точності скінченнорізницевої апроксимації (3.1). Для цього представимо функцію f у вигляді ряду Тейлора в точці $r - \delta r$ або $q-1$

$$f_{q-1} = f_q - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{3!} + \dots \quad (3.4)$$

Точність або похибка скінченнорізницевої апроксимації ε являє собою різницю між похідною, яка представлена в скінченних різницях $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^a$, і точним її значенням $\frac{\partial f}{\partial r}$, тобто

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \quad \text{або} \quad \varepsilon = \frac{f_q - f_{q-1}}{\delta r} - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \quad (3.5)$$

Підставимо ряд (3.4) в вираз для ε (3.5)

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta r} \left[f_q - f_q + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \delta r - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{3!} - \dots \right] - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q$$

або,

якщо розкрити квадратні дужки і скоротити подібні члени, отримаємо

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{6} - \dots - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q.$$

В цьому виразі похідні $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q$ скорочуються і залишаються члени, які містять другу, третю і так далі похідні. Оскільки порядок кожного наступного члена зменшується, найбільшим членом є перший, тобто $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \cdot \frac{\delta r}{2}$. Саме цей член і визначає точність або похибку апроксимації одnobічної (спрямованої назад) різниці (3.1). Таким же членом визначається точність і спрямованої вперед одnobічної різниці (3.2).

Оцінку точності прийнято давати у вигляді порядку (степеня) просторового кроку для просторових похідних або часового кроку – для похідних за часом. Так, для одnobічних різниць (3.1), (3.2) точність або похибка апроксимації $\varepsilon = O(\delta r)$ або $\varepsilon = O(\delta t)$, тобто точність дорівнює

першому порядку по δr і δt . Апроксимація центральними різницями (3.3) має другий порядок точності $\varepsilon = O((\delta r)^2)$, $\varepsilon = O((\delta t)^2)$.

При обчисленні похідних за допомогою скінченнорізницевого виразу за будь-якими даними може виникати ще одна помилка, яка обумовлена похибками вимірювань метеорологічних величин або помилками розрахунків, за допомогою яких отримані вихідні данні.

Якщо похибки в значеннях функції f в точках, які використовуються при обчисленні похідних, відомі, тоді можна оцінити похибку в визначенні похідної. Так, якщо $(\delta f)_{q+1}$ і $(\delta f)_{q-1}$ - абсолютні величини похибок в значеннях f в точках $q+1$ і $q-1$, і якщо ці величини незалежні і дорівнюють δf , то для похибки у визначенні різниці отримаємо

$$\delta(f_{q+1} - f_{q-1}) = \sqrt{(\delta f^2)_{q+1} + (\delta f^2)_{q-1}} = \delta f \sqrt{2}$$

Тоді для помилки обчислення похідної за допомогою центральної різниці отримаємо

$$\delta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\delta r} \delta f,$$

де δf - похибка в даних.

Таким чином, похідні, одержані за допомогою наближених виразів і обчислені за конкретними даними, вмістять похибки двох типів: апроксимації і неточності самих даних.

3.2 Явні, неявні і напівнеявні скінченнорізницеві схеми

При заміні диференціальних рівнянь, в яких є похідні за часом, скінченнорізницеви аналогами розрізняють явні, неявні і напівнеявні схеми.

Явні – це такі схеми, в яких невідома (шукана) метеорологічна величина (функція) виражається через відомі величини в явному вигляді. Розглянемо цю схему на прикладі лінійного однорідного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (3.4)$$

де f - будь-яка метеорологічна величина; c - швидкість (стала додатна величина). Віднесемо це рівняння до точки q, s , тобто до точки з координатою q за простором і до моменту часу s :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s + c \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^s = 0 \quad (3.5)$$

Якщо до просторової похідної застосовувати центральну різницю, а до похідної за часом – одnobічну різницю або центральну, то отримаємо такі скінченнорізницеві рівняння:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0; \quad \frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0$$

або

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c\delta t \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r}$$

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - c\delta t \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{\delta r}; \quad (3.6)$$

Оскільки значення функції f в даний момент часу s і минулий $s-1$ відомі, то за допомогою формул (3.5), (3.6) можна обчислити функцію f в майбутній момент часу $s+1$:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\alpha}{2}(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s); \quad (3.7)$$

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \alpha(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s), \quad \text{де} \quad \alpha = \frac{c\delta t}{\delta r} \quad (3.8)$$

Неявні – це такі схеми, в яких шукана функція не може бути виражена через відомі величини явно. В таких схемах похідні за часом і

решта членів диференціального рівняння відносяться до різних моментів часу. При цьому можливі різні варіанти апроксимації:

1. Похідна за часом відноситься до моменту s , а решта членів рівняння – до моменту $s + 1$, тобто

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s + c \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s+1} = 0 \quad (3.9)$$

Якщо застосувати для апроксимації (3.9) формулу (3.7), то отримаємо таке скінченнорізницеve рівняння:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\alpha}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}); \quad (3.10)$$

Із (3.10) видно, що невідомі величини f_q^{s+1} , f_{q+1}^{s+1} , f_{q-1}^{s+1} мають місце і в правій, і в лівій частинах рівняння, тобто шукана функція f_q^{s+1} не визначається тільки через відомі величини, як в формулах (3.7), (3.8), тому схема носить назву неявної.

2. Другий варіант апроксимації отримаємо у випадку, коли похідну за часом віднести до моменту часу s , а решту членів рівняння виразити через значення функцій в різні моменти часу, включаючи момент $s + 1$. Тоді рівняння (3.3) можна записати так

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s-1} \right], \quad (3.11)$$

Якщо тепер в рівнянні (3.11) до похідних застосувати спосіб апроксимації (3.8), отримаємо таку скінченнорізницеvu схему

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \frac{\alpha}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1} + f_{q+1}^{s-1} - f_{q-1}^{s-1}). \quad (3.12)$$

Явні схеми (3.7), (3.8) дозволяють сіткову функцію f_q^{s+1} визначити в один захід, тобто шляхом одноразового використання скінченнорізницевого рівняння.

За допомогою неявних схем (3.10), (3.12) не можна обчислити невідому функцію f_q^{s+1} в одній точці q , тому що невідомими в цих схемах є також функції f_{q+1}^{s+1} , f_{q-1}^{s+1} . Однак, якщо застосувати ці схеми для усіх внутрішніх вузлів сітки з індексами $q = 1, 2, \dots, n-1$ і скористатися межовими умовами у вузлах $q = 0$ і $q = n$ (наприклад, у вигляді $f_0^s = f_0^0$; $f_n^s = f_n^0$), то отримаємо замкнену систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими сітковими функціями f_q^{s+1} в усіх внутрішніх вузлах $q = 1, 2, \dots, n-1$ (n - число вузлів сітки на осі r). Розв'язання цієї системи дозволяє обчислити шукані значення сіткової функції f_q^{s+1} в усіх внутрішніх вузлах сітки.

Напівнеявні – це такі схеми, в яких частина членів рівняння апроксимується явно, а інша частина членів – неявно. Як правило, неявно представляються лінійні члени рівнянь. Наприклад, рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F \quad (3.13)$$

можна представити так: $\frac{\partial f}{\partial t} = F_l + F_{нл}$, де F_l - лінійні члени, а $F_{нл}$ - нелінійні члени рівняння (3.13). За допомогою напівнеявної схеми інтегрування за часом рівняння (3.13) запишемо у загальному вигляді

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{\delta t}{2} [(F_q^s)_l + (F_q^{s+1})_l] + (F_q^s)_{нл} \delta t;$$

Тобто в останньому рівнянні лінійні члени відносяться до двох моментів часу: S - теперішнього часу і $S + 1$ - майбутнього.

Наведемо приклад напівнеявної схеми для першого рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v. \quad (3.14)$$

Представимо (3.14) у вигляді (3.13), при цьому лінійний член ℓv перенесемо в ліву частину:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = F, \quad (3.15)$$

$$\text{де } F = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right).$$

Напівнеявна схема для рівняння (3.15) буде мати вигляд

$$\frac{u_{i,j,k}^{s+1} - u_{i,j,k}^s}{\delta t} + \frac{\ell_j}{2} (v_{i,j,k}^s + v_{i,j,k}^{s+1}) = F_{i,j,k}^s. \quad (3.16)$$

Із рівняння (3.16) видно, що до двох моментів часу s та $s+1$ віднесено тільки один лінійний член, який описує силу Коріоліса; решта членів віднесена до даного моменту s . Якщо в правій частині (3.15) для скінченнорізницевого представлення похідних використати центральні різниці, то функція F набуває вигляду:

$$F_{i,j,k}^s = - \left[u_{i,j,k}^s \frac{(u_{i+1,j,k}^s - u_{i-1,j,k}^s)}{2\delta x} + v_{i,j,k}^s \frac{(u_{i,j+1,k}^s - u_{i,j-1,k}^s)}{2\delta y} + \tau_{i,j,k}^s \frac{(u_{i,j,k+1}^s - u_{i,j,k-1}^s)}{(p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1})} + \frac{\Phi_{i+1,j,k}^s - \Phi_{i-1,j,k}^s}{2\delta x} \right].$$

3.3 Побудова скінченнорізницевих схем

Будь-яке неоднорідне диференціальне рівняння можна представити таким чином

$$Lf = \varphi, \quad (3.17)$$

де L – диференціальний оператор (наприклад, такий $\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$); f – невідома функція (розв’язок); φ – задана (відома) функція, або функція, яка можна обчислити за відомими даними. Так, в першому рівнянні руху, яке відповідно до (3.17) можна записати як

$$Lu = F_u, \quad (3.18)$$

оператору L в ізобаричній системі координат відповідає оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial p}$; функції f відповідає зональна складова (u) швидкості вітру, а правій частині – решта членів першого рівняння руху, тобто

$$\varphi \equiv F_u = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \tau\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell v\right). \quad (3.19)$$

Функцію F_u можна обчислити за початковими даними, тому її можна вважати відомою величиною. В формі (3.17) можна записати не тільки диференціальні рівняння в частинних похідних, але й звичайні диференціальні рівняння як лінійні, так і нелінійні. В рівняннях гідротермодинаміки незалежні величини – це часова і просторова координати. Розглянемо основні питання щодо побудови скінченнорізницевої схем на прикладі рівняння (3.17).

Будемо вважати, що оператор L включає в себе похідні за простором і часом. Просторові незалежні змінні, як і раніше, визначимо через r . З урахуванням цього функції f і φ запишуться у вигляді

$$f = f(r, t); \quad \varphi = \varphi\left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t\right].$$

Розв’язок рівняння (3.17) будемо вивчати в області змін просторових незалежних змінних D , яка окреслена межею Γ і часом Dt . Область D може бути об’ємом (тобто тривимірною областю), поверхнею (у випадку двовимірної задачі) або лінією, якщо задача одновимірною. Відповідно межі Γ для обмежених областей D (тривимірних, двовимірних, одновимірних) являють собою поверхні, лінії, точки. Розв’язок рівняння (3.17) в області D

буде однозначним, якщо підпорядкувати його початковим умовам (при $t = t_0$) і умовам на межі Γ , тобто межовим умовам.

В загальному вигляді початкові та межові умови для рівняння (3.17) можна записати так:

- початкові умови: $f(r,t) = f(r,t_0)$ в області D , (3.20)

де t_0 - початковий момент часу, $0 < r < R$;

- межові умови: $f(r,t) = F(r,t)$ на $\Gamma_r \times D_t$, (3.21)

де $F(r,t)$ - значення функції $f(r,t)$ на межах, тобто при $r = 0$ та $r = R$ і $0 < t \leq T$ (рис.3.2).

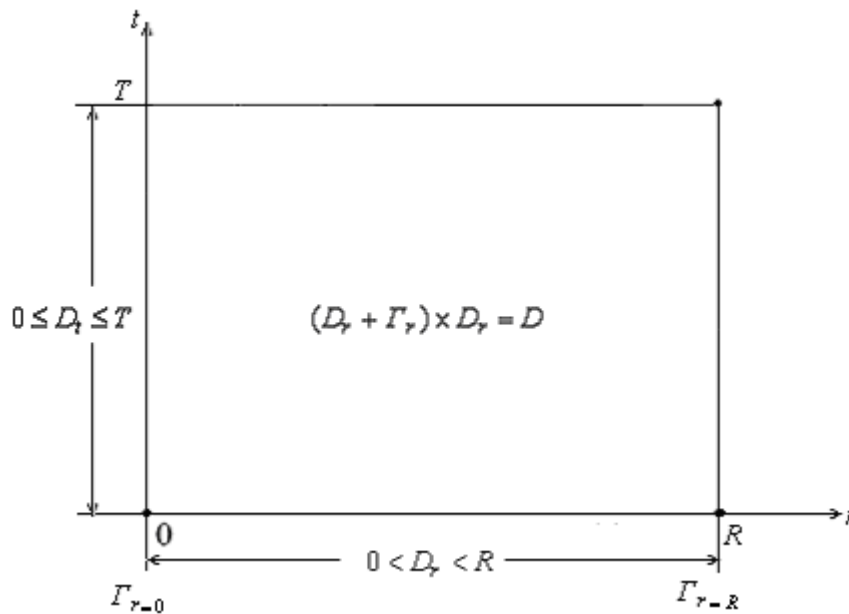


Рисунок 3.2 – Неперервна область визначення функції f в площині r,t

Важливо підкреслити, що область визначення шуканої функції $f(r,t)$ є неперервною, тобто координати r,t неперервні і можуть набирати будь-яких значень в області визначення функції $f(r,t)$, яка також є неперервною.

Задачу отримання розв'язку диференціального рівняння, яке підпорядковується початковим і межовим умовам, називають змішаною крайовою задачею або нестационарною крайовою задачею.

Наближений розв'язок диференціального рівняння, який визначається за допомогою скінченнорізницевого методу, називається чисельним, а різниця між чисельним f_q^s і точним $f(r,t)$ рішеннями – похибкою чисельного розв'язання ε

$$\varepsilon = f_q^s - f(r, t). \quad (3.22)$$

Оскільки точний розв'язок в загальному випадку невідомий, то невідома і похибка чисельного розв'язання. Однак можна оцінити точність скінченнорізницевої схеми, за допомогою якої одержаний чисельний розв'язок. Ця точність характеризується похибкою скінченнорізницевої апроксимації диференціального рівняння.

Пояснимо поняття похибки апроксимації диференціального рівняння скінченнорізницевою схемою на прикладі задачі (3.17), (3.20), (3.21). Для того, щоб скінченнорізницевий метод застосувати до цієї задачі, необхідно неперервні координати r, t замінити дискретними, тобто ввести координати

$$q = \frac{r}{\delta r}, \quad s = \frac{t}{\delta t}.$$

Крім цього, неперервну область $(D_r + \Gamma_r) \times D_t$ зміни аргументів r і t слід замінити дискретною (сітковою) областю, тобто просторово-часовою сіткою $(D_q + \Gamma_q) \times D_s$, вузли якої є точками з координатами q і s . На цій сітці визначаються сіткові функції f_q^s і сітковий оператор L_q .

Таким чином, після скінченнорізницевої апроксимації похідних, диференціальній задачі (3.17), (3.20), (3.21) буде відповідати скінченнорізницева задача

$$L_q f_q^s = \varphi_q^s, \quad \text{де } q = 0, 1, 2, \dots, Q; \quad (3.23)$$

$$\text{початкові умови: } f_q^s = f_q^0 \text{ в області } D_q \text{ при } s = 0, q = 1, 2, \dots, Q - 1; \quad (3.24)$$

$$\text{межові умови: } f_q^s = f_{\Gamma_q}^s \text{ на межі } \Gamma_q \times D_s, \text{ де } q \text{ приймає набирає значення } 0 \text{ і } Q, \text{ а } s = 1, 2, \dots, S. \quad (3.25)$$

На рисунку 3.3 зображена сіткова область $S \times Q$, яка відповідає неперервній області на рисунку 3.2.

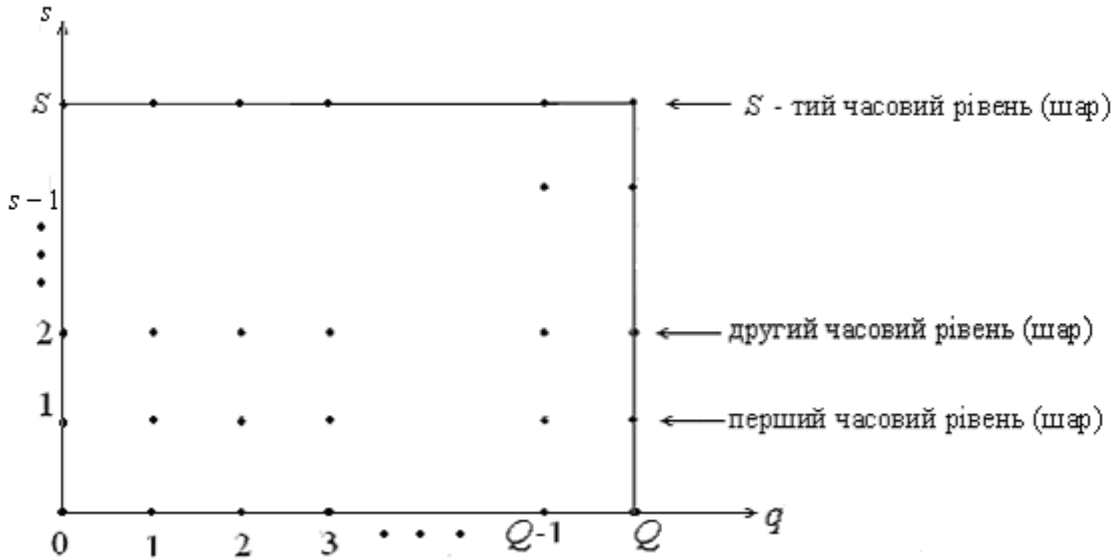


Рисунок 3.3 – Дискретна (сіткова) область визначення сіткової функції f_q^s

Розв’язок задачі (3.23) – (3.25) буде близький до точного, якщо схема (3.23) задовольняє умовам обчислювальної стійкості і збіжності.

Апроксимація диференціального рівняння скінченними різницями оцінюється так само, як і апроксимація скінченними різницями похідних, тобто за допомогою розкладання в ряд Тейлора функції $f(q\delta r, s\delta t)$ біля точки з координатами $(q+1)\delta r$ і $(s+1)\delta t$. Потім із результатів підстановки віднімається диференціальне рівняння. Отримана таким способом різниця і є помилкою апроксимації ε диференціального рівняння (3.17) скінченнорізницевою рівнянням (3.23).

Нагадаємо, що помилка апроксимації оцінюється степенем кроків δr і δt в головних із відкинутих членів ряду Тейлора; її називають також порядком точності апроксимації або просто порядком апроксимації. Якщо, наприклад, в головних із відкинутих членів ряду Тейлора δr і δt мають перший степінь, то порядок апроксимації буде першим по δr і δt , тобто $\varepsilon = O(\delta r, \delta t)$.

Якщо скінченнорізницева схема диференціального рівняння має по крайній мірі перший порядок точності апроксимації, то така схема називається узгодженою.

3.4 Розв'язання скінченнорізницевого рівняння методом кроків за часом

Перед тим, як пояснити суть методу кроків за часом, надамо деякі визначення, необхідні для подальшого викладення матеріалу.

Сукупність вузлів просторово-часової сітки, які лежать на площині або на прямій і відповідають фіксованому моменту часу, називаються часовим шаром або рівнем.

За кількістю часових рівнів (шарів) і точок у просторі, які використовуються в скінченнорізницево-схемах, схеми можуть бути двошаровими, тришаровими і т.ін., двоточковими, триточковими тощо.

Для області визначення розв'язку задачі (3.23)...(3.25) часові рівні являють собою сукупність точок на осі r з індексами $q=0,1,2,\dots,Q$ при фіксованому часі t , тобто індексі s . Розташування часових рівнів в двовимірній сітковій області представлено на рисунку 3.3. Видно, що нульовому часовому рівню ($s=0$) відповідають початкові умови (у вузлах $q=1,2,3,\dots,Q-1$), а вузлам $q=0$ і $q=Q$ - межові умови; часовому рівню S відповідає момент часу, на який розраховується прогноз.

Розглянемо реалізацію методу кроків за часом на прикладі лінійного неоднорідного диференціального рівняння адвекції.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = F \quad (c > 0), \quad (3.26)$$

де $f = f(r, t)$ - шукана функція (розв'язок); $F = F(r, t)$ - відома функція; c - швидкість вітру (стала додатна величина).

Початкові і межові умови запишемо у вигляді

$$f(r, t) = f(r, 0) \quad \text{при } t = 0, \quad 0 < r < R; \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при } r = 0 \text{ і } r = R, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.28)$$

Скінченнорізницева схема задачі (3.26) – (3.28) має вигляд

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\delta r} = F_q^s, \quad (3.29)$$

де $q = 0, 1, 2, \dots, Q$; $s = 0, 1, 2, \dots, S$;

$$f_q^s = f_q^0 \text{ при } s = 0; \quad q = 1, 2, \dots, Q - 1. \quad (3.30)$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} = 0 \text{ при } q = 0 \text{ і } q = Q; \quad s = 0, 1, 2, \dots, S \quad (3.31)$$

За допомогою рівняння (3.29), початкових (3.30) і межових (3.31) умов можна послідовно визначити розв'язок на часових рівнях (шарах) $s = 1, 2, \dots, S$ (рис. 3.3).

$$f_q^2 = f_q^1 - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^1 - f_{q-1}^1) + \delta t F_q^1$$

$$f_q^2 = f_q^1 - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^1 - f_{q-1}^1) + \delta t F_q^1,$$

на деякому часовому рівні (3.32)

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \delta t F_q^s, \text{ і т.д.}$$

і, нарешті, на рівні S $f_q^S = f_q^{S-1} - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^{S-1} - f_{q-1}^{S-1}) + \delta t F_q^{S-1}$

де $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, S - час, на який розраховується прогноз.

Із виразів (3.32) видно, що чисельний розв'язок f_q^s задачі (3.29) – (3.31), який визначається на двовимірній сітці, надається набором розв'язків на одновимірних сітках з індексами точок $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, одержаних при фіксованих індексах s . Тобто чисельний розв'язок, визначений на двовимірній сітці в площині rot , розшарувався і змінився послідовністю розв'язань f^1, f^2, \dots, f^S , які визначаються на одновимірних сітках.

В розглянутій задачі шукана сіткова функція на наступному часовому рівні $s + 1$ в точці q , тобто f_q^{s+1} , однозначно виражається через значення цієї функції на попередньому часовому рівні s у двох точках $q - 1$ і q і відому сіткову функцію F_q .

Зазначимо, що при заміні в рівнянні (3.29) просторової похідної $\frac{\partial f}{\partial r}$ однобічною різницею, спрямованою назад, в розв'язанні (3.32) використовується права межа умова (при $q = 0$), а ліва взагалі не використовується. А якщо скінченнорізницеве представлення похідної виражається через різницю, спрямовану вперед, то в (3.32), використовується лише ліва межа умова (при $q = Q$). Обидві межові умови в розв'язанні задачі (3.29) – (3.31) будуть задіяні в тому разі, коли похідна $\frac{\partial f}{\partial r}$ виражається через центральні різниці.

Процедури послідовного одержання розв'язань від одного часового рівня до іншого називають кроковим методом або методом кроків за часом.

Усі гідродинамічні моделі реалізуються методом кроків за часом. При цьому часові кроки не можна задавати довільно, тому що вони пов'язані з просторовими кроками співвідношенням, яке має назву критерію Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ)

$$K\Phi L = \frac{c_{\max} \delta t}{\delta r} \leq 1, \quad (3.33)$$

δt - часовий крок; δr - просторовий крок; c_{\max} - максимальна швидкість розповсюдження хвиль, які ураховуються моделлю.

Критерій (3.33) можна записати інакше

$$\delta t \leq \frac{\delta r}{c_{\max}}. \quad (3.34)$$

Наприклад, якщо $\delta r = 300 \text{ км}$, а $c_{\max} \approx 150 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ (з такою швидкістю можуть розповсюджуватися хвилі Россбі), то відповідний цим умовам часовий крок буде дорівнювати

$$\delta t \leq \frac{300 \text{ км}}{150 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}} = 2 \text{ год}.$$

З фізичної точки зору часовий крок, який входить до КФЛ, мусить бути таким, щоб хвилі, враховані моделлю, не встигали впродовж цього кроку виходити за межі області АВ навколо точки прогнозу (рис.3.4)

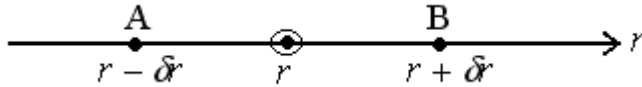


Рисунок 3.4 – Околиця АВ точки прогнозу

r - точка прогнозу; $r + \delta r$, $r - \delta r$ - сусідні вузли сітки.

Якщо за час δt (тобто за досить великий час) хвиля виходить із області АВ, то її вплив на точку прогнозу модель не ураховує. Отже, якщо модель враховує тільки повільні хвилі, наприклад, Россбі (в геострофічних моделях), то часовий крок може бути досить великим (порядку години або двох). Якщо ж модель враховує швидкі хвилі (наприклад, гравітаційні), то крок може складати всього декілька хвилин.

3.5 Обчислювальна стійкість скінченнорізницевої схеми

Скінченнорізницева схема називається стійкою, якщо її чисельний розв'язок з кожним часовим кроком наближається до точного, тобто чисельний розв'язок обмежений.

Треба відзначити, що розробка стійких скінченнорізницевої схеми для нелінійних рівнянь пов'язана зі значними труднощами. Аналіз стійкості можна виконати лише для лінійних або лінеаризованих нелінійних рівнянь, або для деяких простих нелінійних рівнянь. При цьому стійкість скінченнорізницевої схеми для лінеаризованого рівняння не означає, що ця схема буде стійкою для відповідного нелінійного рівняння.

Існує декілька методів дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізницевої схеми. Наприклад, використовується прямий метод, в якому умова стійкості збігається з критерієм стійкості КФЛ. При аналізі стійкості деяких нелінійних скінченнорізницевої схеми використовується енергетичний метод.

В даному розділі ми розглянемо метод Неймана, який використовується при аналізі обчислювальної стійкості скінченнорізницевої схеми для лінійних диференціальних рівнянь, точні розв'язки яких відомі (наприклад, для лінійних рівнянь адвекції).

Метод Неймана передбачає підстановку точних розв'язків в скінченнорізнцеву схему, а аналіз стійкості зводиться до оцінки множника переходу, який зв'язує амплітуди збурень на сусідніх часових рівнях.

Точні розв'язки лінійних рівнянь виражаються сумою частинних розв'язків, які представлені хвильовими гармоніками. Це дозволяє аналізувати стійкість для кожної гармоніки. Стійкість скінченнорізнцевої схеми для кожної гармоніки означає стійкість скінченнорізнцевої схеми в цілому.

Застосуємо метод Неймана для оцінки обчислювальної стійкості явної схеми лінійного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (c = \text{const}). \quad (3.35)$$

Явну схему інтегрування представимо у вигляді

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\delta r} = 0 \quad (c > 0) \quad \text{або}$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s). \quad (3.36)$$

Введемо позначення $\mu = c \frac{\delta t}{\delta r}$ і перепишемо рівняння (3.36)

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu f_q^s + \mu f_{q-1}^s. \quad (3.37)$$

Точний розв'язок рівняння (3.35) представимо у вигляді хвильової гармоніки, тобто

$$f(r, t) = A(t) e^{ikr}. \quad (3.38)$$

Для дискретних аргументів розв'язок (3.38) має вигляд

$$f_q^s = A^s e^{ikq\delta r} \quad (3.39)$$

Підставимо (3.39) в схему (3.37), скоротимо одержаний результат на множник $e^{ikq\delta r}$, отримаємо

$$A^{s+1} = (1 - \mu + \mu e^{-ik\delta r}) A^s \quad (3.40)$$

Відповідно до формули Ейлера

$$e^{-ik\delta r} = \cos(k\delta r) - i \sin(k\delta r).$$

З урахуванням цього виразу співвідношення (3.40) набере вигляду

$$A^{s+1} = (1 - \mu + \mu \cos k\delta r - k\delta r) \cdot A^s. \quad (3.41)$$

Введемо позначення: $(1 - \mu + \mu \cos k\delta r - i\mu \sin k\delta r) = \lambda$, тоді вираз (3.41) можна записати так

$$A^{s+1} = \lambda A^s \quad \text{або} \quad |A^{s+1}| = |\lambda| \cdot |A^s|, \quad (3.42)$$

λ - множник переходу (являє собою комплексне число), $|\lambda|$ - модуль λ .

Відомо, що модуль комплексного числа $a = a_r + ia_i$ дорівнює

$$|a| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2},$$

де a_r - дійсна частина, а a_i - уявна частина величини a .

В нашому випадку $\lambda_r = (1 - \mu + \mu \cos k\delta r)$, а $\lambda_i = \mu \sin k\delta r$, тому

$$|\lambda| = \sqrt{(1 - \mu + \mu \cos k\delta r)^2 + \mu^2 \sin^2 k\delta r} = \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\delta r)} \quad (3.43)$$

43)

Аналіз (3.43) показує, що

$$\text{при } \mu \rightarrow 0 \quad (\delta t \rightarrow 0) \quad |\lambda| \rightarrow 1,$$

$$\text{при } \mu > 1 \quad |\lambda| > 1, \quad \text{а} \quad (3.44)$$

$$\text{при } 0 < \mu \leq 1 \quad |\lambda| \leq 1 \quad (3.45)$$

Із (3.42) видно, що чисельний розв'язок буде обмеженим або стійким, якщо амплітуда з часом не буде зростати, тобто множник переходу буде задовольняти умову

$$|\lambda| \leq 1$$

В точному розв'язку (3.38) амплітуда не змінюється, тому що

$$A(t) = A(0)e^{ikct}, \quad \lambda = e^{ikct} \equiv \cos(kct) + i \sin(kct), \text{ а модуль}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2(kct) + \sin^2(kct)} = 1 \quad (3.46)$$

Якщо $|\lambda| > 1$, то амплітуда чисельного розв'язку необмежено зростає в процесі інтегрування методом кроків за часом.

Таким чином, умова (3.44) означає нестійкість чисельного розв'язання. При виконанні умови (3.45) амплітуда обмежена або не змінюється; ця умова забезпечує обмеженість, тобто стійкість чисельного розв'язання.

В залежності від значення модуля множника переходу $|\lambda|$ схеми поділяються на нестійкі ($|\lambda| > 1$), нейтральні ($|\lambda| = 1$), дисипативні ($|\lambda| < 1$). Умови (3.44), (3.45) збігаються з критерієм лінійної стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві, тому що

$$\mu = c \frac{\delta t}{\delta r}.$$

Схеми, стійкість яких залежить від величини μ (співвідношення $c \frac{\delta t}{\delta r}$), називають умовно стійкими. Схеми, стійкість яких не пов'язана з виконанням яких-небудь умов, називаються абсолютно стійкими.

Оскільки дисипативні і нейтральні схеми забезпечують обмежені розв'язання, то відповідно до визначення обчислювальної стійкості ці схеми слід віднести до стійких.

3.6 Задачі для самостійного розв'язання

3.1 Оцінити точність скінченнорізницевої апроксимації другої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ з використанням центральної різниці для першої похідної, тобто формули (3.3)

3.2 З використанням центральних різниць записати в скінченнорізницевому вигляді рівняння вихору

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial y} = -\ell \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

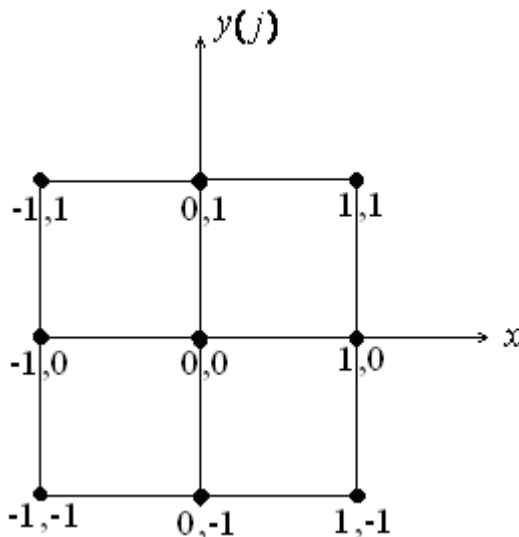
Вказівки: позначити крок за просторовими координатами через d , а часовий крок через δt . Просторові похідні представити у вигляді центральних різниць, часову похідну – через однобічну. Вважати, що ось x спрямована уздовж широтного кола.

3.3 Висота ізобаричної поверхні H виражається у вигляді такої функції горизонтальних координат і часу:

$$H(x, y, t) = a_0 - a_1 \cos(kx - \sigma t) + a_2 \cos m(y + y_0).$$

Отримати робочу формулу для розрахунку значень H (м) у вузлах просторово-часової сітки i, j, s при $d=300$ км, $\delta t=1$ год., $a_0=5300$ м, $a_1=60$ м, $a_2=60$ м, $y_0=1200$ км, $L_x=3600$ км, $L_y=4800$ км, $T=5$ діб
 $\left(L_x = \frac{2\pi}{k}, L_y = \frac{2\pi}{m} \right)$.

3.4 За даними задачі 3.3 розрахувати значення швидкості переміщення великомасштабної хвилі уздовж осі x .



3.5 За допомогою робочої формули, яка одержана при розв'язанні задачі 3.3, розрахувати значення H (м) у вузлах сітки, координати i, j яких вказані на рисунку.

Розрахунки в цих вузлах виконати для трьох моментів часу $s = 0, 1, 24$. Результати розрахунків нанести у вузли трьох квадратних сіток з масштабом в 1 см 200 км.

Провести ізолінії через 4 дам. Прстежити характер зміни поля H з часом.

3.6 За даними задачі 3.3 отримати вираз для похідних $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$, ΔH , $\frac{\partial H}{\partial t}$, $\Delta \frac{\partial H}{\partial t}$. Розрахувати значення цих похідних за вихідними параметрами задачі 3.3 для точки з координатами $x = y = t = 0$.

3.7 За результатами задачі 3.5 розрахувати для вузла просторово-часової сітки $i = j = s = 0$ приблизні значення похідних $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$, ΔH , $\frac{\partial H}{\partial t}$, $\Delta \frac{\partial H}{\partial t}$ (похідні за просторовими координатами розраховувати з використанням центральних різниць, а за часом – одновимірних). Результати розрахунків наближених значень похідних порівняти з їх точними значеннями, які одержані в задачі 3.6.

3.8 Оцінити величини абсолютної (δ) і відносної (ε) похибок обчислення першої і другої похідних температури по горизонталі, які зумовлені похибками вимірювань біля земної поверхні при $d=300$ км (3.8а) і $d=600$ км (3.8б) і на висоті 5 км при $d=300$ км (3.8в) і $d=600$ км (3.8г). Похибки вимірювань температури складають: біля земної поверхні $0,4$ °С, на висоті 5 км $0,7$ °С. Під відносною похибкою ε слід розуміти відношення отриманої величини δ до характерних значень величини горизонтальних похідних, які складають

$$O\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 7 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{M}^{-1} \text{ и}$$

$$O\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = O\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 2 \cdot 10^{-11} \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{M}^{-2}$$

3.9 Записати явну схему для рівнянь горизонтального руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u.$$

Вказівки: у кожному рівнянні суму всіх членів, окрім часових похідних, позначити через F_u і F_v і одержані вирази записати в явному вигляді.

3.10 Записати неявну схему для рівнянь з вправи 3.9; використати тіж вказівки.

3.11 Записати напівнеявну схему для рівнянь з вправи 3.9.

Вказівки: лінійні члени $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ включити до функцій F_u , F_v , а лінійні члени ℓ_v і ℓ_u розглядати окремо; одержаний вираз записати в скінченнорізницевого вигляді. Тобто напівнеявну схему треба записати для рівнянь $\frac{\partial u}{\partial t} - \ell_v = F_u$ і $\frac{\partial v}{\partial t} + \ell_u = F_v$. Записати вирази для функцій F_u і F_v .

3.12 Рівняння, які одержані у вправі 3.9, розв'язати відносно u^{s+1} і v^{s+1} .

Вказівки: із системи двох рівнянь спочатку виключити v^{s+1} і отримати вираз для u^{s+1} , а потім виключити із системи невідому u^{s+1} і отримати вираз для v^{s+1} , тобто процедури використовуються так, як і для звичайних алгебраїчних рівнянь.

4 Інтегрування рівнянь гідротермодинаміки

4.1 Схеми чисельного інтегрування за часом

Для інтегрування рівнянь прогностичних моделей атмосфери застосовуються різні схеми. Розглянемо найбільш розповсюджені з цих схем на прикладі рівняння, яке представимо в такому вигляді

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} = F\left[f(r,t), \frac{\partial f(r,t)}{\partial r}, r\right]$$

і яке для скорочення запису у подальшому будемо використовувати у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F. \quad (4.1)$$

1. Явна схема Ейлера.

Якщо похідну за часом $\frac{\partial f}{\partial t}$ замінити спрямованою вперед різницею, а функцію F замінити сітковою функцією F_q і віднести її до часового рівня s , тобто до поточного моменту часу, а не до минулого $s-1$, то отримаємо дворівневу схему інтегрування за часом

$$\begin{aligned} \frac{f_q^{S+1} - f_q^S}{\delta t} &= F_q^S && \text{або} \\ f_q^{S+1} &= f_q^S + \delta t F_q^S. \end{aligned} \quad (4.2)$$

2. Неявна схема Ейлера.

Якщо похідну в (4.1) апроксимувати спрямованою вперед, а функцію F замінити сітковою функцією і віднести її до майбутнього моменту часу, то одержимо неявну схему

$$f_q^{S+1} = f_q^S + \delta t F_q^{S+1} \quad (4.3)$$

Наприклад, неявна схема для лінійного одновимірного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \text{ де } c = \text{const} > 0,$$

буде мати вигляд

$$f_q^{S+1} = f_q^S - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^{S+1} - f_{q-1}^{S+1})$$

Оскільки в правій частині цієї схеми є невідомі сіткові функції f_q^{S+1} і f_{q-1}^{S+1} , то безпосередньо обчислити шукану функцію f^{S+1} в одній точці неможливо. Тому схему треба розписати для усіх внутрішніх вузлів сітки і межових точок, що дозволяє одержати замкнену систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими сітковими функціями f_q^{S+1} . Розв'язання цієї системи дозволяє отримати шукані значення сіткової функції f^{S+1} в усіх внутрішніх вузлах сітки.

3. Схема трапецій.

Ця схема отримується, коли в рівнянні (4.1) часову похідну замінити спрямованою вперед різницею, а функцію F замінити півсумою сіткових її значень, які відносяться до моменту часу s і $s+1$. В такому разі отримаємо неявну дворівневу схему

$$f_q^{S+1} = f_q^S + \frac{1}{2} (F_q^S + F_q^{S+1}) \delta t. \quad (4.4)$$

4. Двокрокова схема Мацуно (або схема Ейлера з перерахунком)

Ця схема складається з двох тактів

$$\begin{aligned} f_q^{(S+1)*} &= f_q^S + F_q^S \delta t, \\ f_q^{S+1} &= f_q^S + F_q^{(S+1)*} \delta t, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $F_q^{(S+1)*}$ розраховується з використанням прогностичної функції $f_q^{(S+1)*}$.

Двотактні або двокрокові схеми складаються із схеми „предиктора” (перша формула) і схеми „коректора” (друга формула). За допомогою схеми

„предиктора” розраховуються попередні значення $f_q^{(S+1)*}$, які потім уточнюються за допомогою схеми „коректора”.

5. Двокрокова схема Хойна.

Як і схема (4.5), вона складається з двох тактів „предиктора” і „коректора”

$$\begin{aligned} f_q^{(S+1)*} &= f_q^S + F_q^S \delta t, \\ f_q^{S+1} &= f_q^S + \frac{1}{2}(F_q^S + F_q^{(S+1)*})\delta t, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $f_q^{(S+1)*}$ - попередній прогноз, а f_q^{S+1} - остаточний прогноз.

Рівняння (4.6) показують, що в схемі „предиктор” використовується явна схема Ейлера, а в схемі „коректор” – явна схема трапецій (явна, тому що $F_q^{(S+1)*}$ обчислюється на першому такті).

Схеми (4.5), (4.6) називаються схемами „предиктор” – „коректор”.

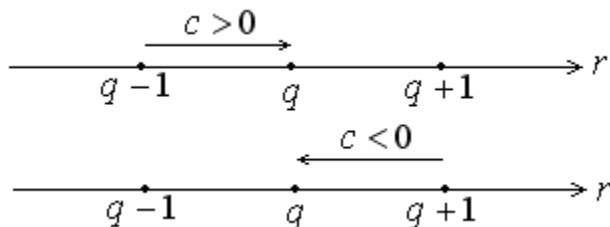
6. Явна трирівнева схема центральних різниць.

Ця схема отримується, якщо в формулі (4.1) похідну за часом замінити центральною різницею, функцію F замінити сітковою функцією F_q і віднести її до поточного моменту часу, тобто

$$f_q^{S+1} = f_q^{S-1} + 2F_q^S \delta t. \quad (4.7)$$

В чисельних методах достатньо часто використовуються схеми, які мають назву „за потоком” і „проти потоку”. Це такі схеми, в яких похідні за простором апроксимуються з урахуванням напрямку перенесення. Представимо такі схеми на прикладі одновимірного лінійного рівняння адвекції.

7. Схеми „проти потоку”.



В залежності від напрямку потоку \vec{c} схеми будуть мати різний вигляд:

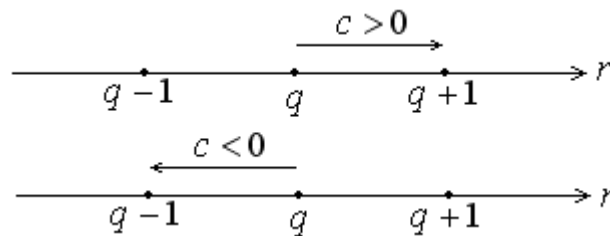
$$\text{при } c > 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^S - f_{q-1}^S);$$

(4.8)

$$\text{при } c < 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_{q+1}^S - f_q^S).$$

Як видно із рисунку, в цих схемах різниці по осі r спрямовані у той бік, звідки відбувається перенос, тому такі схеми для рівнянь адвекції носять назву схем „проти потоку”.

8. Схеми за потоком.



Схеми, в яких просторова похідна береться на тій ділянці, куди спрямована швидкість вітру \vec{c} , мають вигляд

$$\text{при } c > 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_{q+1}^S - f_q^S);$$

(4.9)

$$\text{при } c < 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^S - f_{q-1}^S).$$

Зауважимо, що відповідно до фізичної суті процесів, які відбуваються при горизонтальному перенесенні повітряних мас, слід віддати перевагу схемам „проти потоку”, тому що саме значення метеорологічних величин в тому напрямку, відкілья відбувається перенос, визначають адвективні зміни.

Як видно із формул (4.8), (4.9) розглянуті схеми відносяться до явних схем.

9. Неявні схеми „проти потоку”.

Якщо в схемах (4.8) функції f в дужках віднести до майбутнього часу $S + 1$, отримаємо неявні схеми, які мають такий вигляд

$$\text{при } c > 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^{S+1} - f_{q-1}^{S+1});$$

(4.10)

$$\text{при } c < 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_{q+1}^{S+1} - f_q^{S+1}).$$

Як показав аналіз розглянутих схем інтегрування за часом, ці схеми відрізняються одна від одної кількістю часових рівнів (шарів), кількістю точок, які використовуються для скінченнорізницевого представлення просторових похідних, а також кількістю кроків (або тактів), які треба виконати для отримання значень шуканої функції. Наприклад, схеми „за потоком” (4.9) і „проти потоку” (4.8) є дворівневими (або двошаровими) двоточковими схемами. Прикладом трирівневої триточнової схеми є скінченнорізницева схема для одновимірного рівняння адвекції, яка представлена у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} &= 0 \quad \text{або} \\ f_q^{s+1} &= f_q^{s-1} - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Як видно із (4.11) в цьому рівнянні присутні значення f в три моменти часу: $(s-1)$ - минулий, s - поточний і $(s+1)$ – майбутній і в трьох точках (вузлах сітки): $q, q+1, q-1$. Схема (4.11) є явною, оскільки шукана функція (майбутнє її значення f_q^{s+1}) визначається через відомі величини в минулий і поточний моменти часу, тобто через функції f^s і f^{s-1} , тому f_q^{s+1} можна обчислити із (4.11) разом однією дією.

Схеми, які складаються із схем „предиктора” – „коректора” є явними, але шукана функція (f^{s+1}) обчислюється у два такти: на першому такті обчислюється попереднє значення шуканої функції $f^{(s+1)*}$, яке потім уточнюється за допомогою схеми „коректора” (другий такт). Ці схеми називаються двотактними або двошаговими. До таких схем належать схеми Мацуно, Хойна тощо. Існують також схеми з декількома коректорами; наприклад, тритактна схема має два коректора, а чотиритактна (або чотиришагова) має один предиктор і три коректори і т.д.

На закінчення наведемо точність перелічених вище схем:

- схеми Ейлера (4.2), (4.3) мають перший порядок точності по δt , тобто $\varepsilon = O(\delta t)$;

- схема трапецій (4.4) – другий порядок точності по δt ($\varepsilon = O(\delta t^2)$);
- для схеми Мацуно (4.5) $\varepsilon = O(\delta t)$;
- для схеми Хойна (4.6) $\varepsilon = O(\delta t^2)$;
- схема центральних різниць (4.7) має другий порядок точності по δt ;
- схеми (4.8), (4.9), (4.10) мають перший порядок точності по δt і δr , тобто $\varepsilon = O(\delta t, \delta r)$.

Точність схем (4.2) – (4.7) по кроку δr залежить від того, якими різницями апроксимуються просторові похідні: якщо центральними різницями, то $\varepsilon = O(\delta r^2)$, а якщо однобічними, то точність схем дорівнює першому порядку по δr , тобто $\varepsilon = O(\delta r)$.

4.2 Задачі для самостійного розв’язання

4.1 Застосувати явну схему «за потоком» для двовимірного рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell v = 0.$$

Вважати, що $u > 0$, $v < 0$; похідну $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ виразити через центральну різницю.

4.2 Для рівняння з вправи 4.1 записати напівнеявну схему «за потоком». Вказівки: вважати u і v додатними величинами; безрозмірні координати по осях x, y, t позначити через i, j і s ; для скінченнорізницевої апроксимації похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ використати однобічну різницю, яка спрямована вперед.

4.3 Записати фільтроване рівняння вихору $\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \beta v = 0$ за допомогою неявної схеми «проти потоку», якщо $u > 0, v < 0$.

Використати вказівки до попередньої вправи за винятком вказівки щодо $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

4.4 Для одновимірного рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \text{ де } u = \text{const} > 0$$

записати явну схему Ейлера.

Вказівки: похідну за часом представити через однобічну різницю; похідні за координатою x - через спрямовані назад однобічні різниці.

4.5 Рівняння з вправи 4.4 записати за допомогою неявної схеми трапецій.

Використати вказівки з попередньої вправи.

4.6 Застосувати до одновимірного рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

двотактну схему Мацуно.

4.7 Записати одновимірне рівняння адіабатичності

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

за допомогою двотактної схеми Хойна.

Використати вказівки до вправи 4.4.

4.8 Записати неявну схему Ейлера для одновимірного рівняння адвекції з вправи 4.7.

Вказівки: похідну за координатою x представити через центральну різницю.

4.9 Оцінити обчислювальну стійкість явної схеми «проти потоку» для лінійного одновимірного рівняння адвекції

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

за методом Неймана.

q - масова частка водяної пари; швидкість $u = \text{const} < 0$.

4.10 Зробити теж саме для явної схеми «за потоком» для лінійного одновимірного рівняння адвекції температури

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ де } u = \text{const} > 0.$$

4.11 Зробити теж саме для явної схеми Ейлера для рівняння $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

Вказівки: використати спрямовану різницю за часом і центральну різницю за простором.

4.12 Оцінити обчислювальну стійкість неявної дворівневої схеми трапецій для рівняння з вправи 4.9.

Вказівки: використати центральну різницю для похідної за простором.

4.13 Побудувати скінченнорізницеву схему для рівняння з вправи 4.10 і розрахувати майбутні значення температури на 6 годин вперед в шести вузлах на осі x , які відстоять один від одного на 200 км.

Початкові дані: При $s = 0$ значення температури у вузлах сітки такі:

Номери вузлів	0	1	2	3	4	5	6	7
Значення $T, ^\circ\text{C}$	9,3	10,7	12,8	14,0	15,1	16,3	17,5	19,0

Межові умови (МУ):

ліва МУ: при $i = 0$ $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, тобто $T = \text{const} = 9,3^\circ\text{C}$;

права МУ: при $i = 7$ $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, тобто $T = \text{const} = 19,7^\circ\text{C}$ на всіх часових

рівнях.

Вважати, що швидкість вітру $u = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Вказівки: для розрахунку часового кроку прийняти, що максимальна швидкість хвиль $C_{\text{max}} = 100 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}$; в скінченнорізницевій явній схемі рівняння часову і просторову похідні представити у вигляді спрямованих вперед однобічних різниць.

4.14 Виконати вправу 4.13 при умові, що в рівнянні адвекції температури часова похідна представлена однобічною різницею, спрямованою вперед, а похідна за координатою x - різницею, яка спрямована назад.

4.15 Виконати вправу 4.13 при умові, що в рівнянні адвекції температури похідна за часом представлена однобічною різницею, спрямованою вперед, а похідну за координатою x - центральною різницею.

4.16 Побудувати в загальному вигляді скінченнорізницеву схему для двовимірного рівняння адвекції температури

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Вказівки: вважати, що $u = \text{const} > 0$; $v = \text{const} > 0$. Просторові похідні представити у вигляді центральних різниць, а часову похідну – однобічною різницею; вважати, що на межах області визначення розв'язку рівняння температура повітря T не змінюється з часом.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з дисципліни
„Моделювання гідрометеорологічних процесів та явищ”
(розділ „Аналітичні і чисельні методи розв’язання
диференціальних рівнянь з частинними похідними”)
для аспірантів I року денної та заочної форми навчання

Спеціальність: „Науки про Землю”

Укладач: Хоменко Інна Анатоліївна, к. геогр. н., доц.

Підп. до друку
Умовн. друк. арк.

Формат Папір
Тираж Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул. Львівська, 15
