МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Теорія ймовірностей та математична статистика»)

для студентів II курсу денної форми навчання
Спеціальність: Комп'ютерні науки

Затверджено
На засіданні групи забезпеченості спеціальності
Протокол №____ від ______Голова групи Мещеряков В.І.

Затверджено
На засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №____________ від _______________
Завідуючий кафедрою Глущков О.В._________

Одеса-2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Розділ « Теорія ймовірностей та математична статистика»)
для студентів ІІ курсу денної форми навчання
Спеціальність: Комп'ютерні науки

Затверджено
На засіданні групи забезпеченості спеціальності
Протокол №____ від ______Голова групи Мещеряков В.І.

Затверджено
На засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №____________ від _______________
Завідуючий кафедрою Глущков О.В._________

Одеса-2021

Методичні вказівки для виконання практичних робіт для студентів II курсу денної форми навчання по вивченню дисципліни «Вища математика» розділ «Теорія ймовірностей та математична статистика». Спеціальність: комп'ютерні науки.

Укладачі: Свінаренко А.А.., д.ф.-м.н., проф., кафедри вищої та прикладної математики
Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц.,кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ЗМІСТ:

1. ПЕРЕДМОВА

«Вища математика» є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки. Розділ спрямован на вивчення основних положень інтегрального числення, узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні задач у науково-практичній діяльності. Курс взагалом та розділ окремо, відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Інтегрування вищих навчальних закладів України до міжнародного освітнього простору зумовлює необхідність розробки та втілення у практику навчального процесу заходів, спрямованих на підвищення якості вищої освіти.

Мета вивчення розділу дисципліни «Вища математика»- Теорія ймовірностей та математична статистика, відносяться до одного з основних розділів фундаментального циклу вищої математики. Мета вивчення- забезпечити фундаментально засвоєння теоретичного курсу теорії імовірності та математичної статистики, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Завдання розділу правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач; правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення розділу базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах. Обсяги вивчення окремих розділів і тем визначаються робочими програмами.

Мета методичних вказівок. «Теорія ймовірностей та математична статистика» - один з найважливіших розділів курсу «Вища математика». Мета - опанувати основними прийомами та методами теорії ймовірності, виробити статистичне мислення фахівця, сформувати навички побудови ймовірнісних моделей дослідження та розв'язування типових задач, сформувати комплекс повноцінних теоретичних знань та практичних навичок по застосуванню ймовірнісне -статистичних методів для оцінки стохастичних процесів.

В результаті студент повинен:

знати: поняття випадкової події і випадкової величини; основні формули комбінаторики; елементи алгебри подій; означення ймовірності та її властивості; теореми додавання і множення ймовірностей; форми представлення випадкових величин та їх основні характеристики; найбільш вживані закони розподілу; поняття вибірки та методи її формування; методологію отримання точкових та інтервальних оцінок числових характеристик сукупностей; правила побудови критеріїв для перевірки статистичних гіпотез; методологію кореляційного та регресійного аналізу;

в м і т и : обчислювати ймовірність випадкових подій з використанням основних означень та теорем; будувати закони розподілу та обчислювати характеристики випадкової величини; проводити первинну обробку статистичних даних, визначати точкові та інтервальні оцінки числових характеристик; вибирати слушні критерії для перевірки статистичних гіпотез та користуватися таблицями відповідних розподілів; обґрунтовано вибирати класи регресійних моделей при виявленні залежностей між величинами; обчислювати коефіцієнти рівнянь лінійних та нелінійних залежностей; правильно інтерпретувати одержані результати.

1. 1 Програма розділу «Теорія ймовірностей та математична статистика »

Тема 1. Випадкові події . Предмет теорії ймовірностей. Події та їх класифікація на достовірні, неможливі та випадкові. Сумісні та несумісні події. Протилежні події. Повна група подій. Означення ймовірності (класичне, геометричне, статистичне) та її властивості. Формули комбінаторики, їх застосування при обчисленні ймовірностей. Алгебра подій. Теореми додавання для несумісних та сумісних подій і їх наслідки. Залежні та незалежні події. Умовна ймовірність. Теореми множення для залежних та незалежних подій і їх наслідки. Гіпотези. Формула повної ймовірності та формула Бейеса. Схема повторних незалежних випробувань. Формула Бернуллі для обчислення ймовірності та найімовірнішого числа подій. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

Тема 2. Випадкові величини. Поняття випадкової величини, дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу та форми його подання: ряд розподілу, многокутник розподілу, формульне подання. Функція розподілу та її властивості. Функція щільності розподілу та її властивості. Ймовірність попадання випадкової величини на заданий інтервал. Числові характеристики розподілів. Характеристики положення випадкових величин: математичне сподівання, мода і медіана; їх властивості. Характеристики розсіяння: дисперсія, середнє квадратичне відхилення; їх властивості. Моменти випадкових величин.

Тема 3. Системи випадкових величин Поняття про багатовимірні випадкові величини і системи випадкових величин. Функція розподілу ймовірностей системи та її властивості. Функція щільності розподілу та її властивості. Числові характеристики системи випадкових величин. Умовні закони розподілу та їх характеристики. Регресія однієї випадкової величини на іншу. Властивості регресії. Коефіцієнт кореляції і його властивості. Приклади аналізу систем випадкових величин Поняття про функції випадкового аргументу, закон її розподілу.

Тема 4. Найбільш поширені закони розподілу випадкових величин

Закони розподілу дискретних випадкових величин: дискретний, рівномірний, біномний, геометричнийта гіпергеометричний; їх числові характеристики. Розподіл Пуасона як модель рідких подій. Рівномірнийта показниковий розподіли неперервних випадкових величин, їх числові характеристики та області застосування. Нормальний закон розподілу. Нормальна крива: вплив параметрів розподілу на її форму. Ймовірність попадання випадкової величини з нормальним законом розподілу у заданий інтервал. Ймовірність заданого відхилення. Правило трьох сигм.

Тема 5. Елементи математичної статистики .

Поняття про закон великих чисел як теоретичний фундамент математичної статистики. Завдання математичної статистики. Вибірковий метод і його основні поняття. Варіаційний ряд. Емпіричний закон розподілу, емпірична функція розподілу. Полігон та гістограма. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Оцінки характеристик положення та характеристик розсіяння. Оцінка коефіцієнта кореляції. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Точність і надійність оцінки, визначення довірчого інтервалу. Інтервальні оцінки математичного сподівання генеральної сукупності при відомій та невідомій генеральній дисперсії. Інтервальна оцінка середнього квадратичного відхилення.

2. Перелік навчальної та методичної літератури:

При вивченні цього розділу дисципліни використовується така навчальна та методична література:

1. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія імовірностей і математична статистика. Ч.1. – К.: Вища школа, 2001. – 320 с.
2. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія імовірностей і математична статистика. Ч.2. – К.: Вища школа, 2002. – 340 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1999. - 479с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов. – 6-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 2002. - 405 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.3. – М.: "Высшая школа", 1986.

3. Загальні рекомендації студенту по вивченню розділу.

Основною формою навчання студента є аудиторна та самостійна робота над навчальним матеріалом. За допомогою методичних вказівок, студент має можливість побачити та розв'язати приклади типових завдань модульної контрольної роботи ЗМ-П2. Також вказівки містять опорний конспект до теми "Теорія ймовірностей та математична статистика", та короткий довідник до модуля. Це все подано в доступній, розгорнутій формі і стане у нагоді студентам. Матеріал методичних вказівок дозволяє виробити практичні навички в обчисленнях прикладів та задач з Теорії Ймовірностей та Математичної статистики.

Модульна робота ЗМ-П2. Підсумок роботи студентів за досліджуваним розділом підводить виконана практична модульна робота. Робота повинна виконуватися самостійно, тобто бути гарантією того, що даний розділ є засвоєний студентом. Максимальна кількість балів, чку студент може отримати за ЗМ-П2 – 15 балів.

4. Основні поняття та розв'язання типових завдань
4.1 . Випадкові події

Подія. Якісною характеристикою результату експерименту є **подія**.

Кількісна характеристика результату експерименту, яка може набувати одне з можливих значень, заздалегідь невідомо яке саме, називається **випадковою величиною.** Отже, подією (або “випадковою подією”) називається всілякий факт, який в результаті експерименту може статися, а може й не статися. Події прийнято позначати великими літерами латинської абетки. Якщо при всіх експериментах подія, яка розглядається, настає завжди, вона називається **достовірною**. Якщо при всіх експериментах подія, що розглядається, не настає ніколи, вона називається **неможливою**.

Повною групою подій називається кілька таких подій, що в результаті експерименту неодмінно станеться хоча б одна з них. Наприклад, коли експеримент складається з двох пострілів по мішені, події A_1 – жодного влучання, A_2 – одне влучання та A_3 – два влучання складають повну групу подій.

Декілька подій у даному експерименті називаються **несумісними**, якщо ніякі два з них не можуть статися одночасно.

Статистичне означення імовірності

Нехай деякий експеримент здійснюється n разів і при цьому в результаті m випробувань відбувається подія A. Відношення m/n називається *відносною частотою* появи події A в серії з n випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, для яких має місце властивість *стійкості частот.* Вона полягає в тому, що частота появи події A при *великій кількості* випробувань мало відрізняється від деякого числа.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота випадання герба буде мало відрізнятися від $\frac{1}{2}$. Частота народження хлопчика для великої кількості проаналізованих даних буде мало відрізнятися від 0,515.

Позначаємо $P(A)$ - імовірність події A.

Приклад. Знайти імовірність того, що кількість очок, яка випаде при одноразовому киданні кубика, буде а) парною (подія A)*;* б) кратною трьом (подія B).

Розв’язання.

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,....,\omega_6\}$, $N(\Omega)=6$, $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, $B=\{\omega_3,\omega_6\}$, $N(A)=3$, $N(B)=2$,

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \qquad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

4.2 Умовні імовірності. Теорема множення ймовірностей.

Незалежність подій

Нехай двічі кидають гральний кубик. Простір елементарних подій складається з 36 елементів: $\Omega = \{(m,n): m,n = \overline{1,6}\}$. Розглянемо подію A - „сума очок після двох кидань рівна 5”, тоді $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

В загальному випадку (в умовах класичної схеми) міркуємо так. Якщо відбулась подія *B,* то здійснився один з *N(B)* елементарних результатів. Серед них подія *A* з’являється *N(AB)* разів. Тому

$$P(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{N(AB)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

У випадку загальної імовірнісної моделі рівність

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B)>0$$

приймається за *означення* ***умовної імовірності***.

З цього означення випливають такі властивості умовної імовірності:

1) $P(A/B)>0;$

2) $P(\Omega/B) = 1;$

3) $P(B/B) = 1;$

4) $A_1A_2 = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A_1 + A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B).$

З рівності (1) безпосередньо випливає ***теорема множення ймовірностей:*** *якщо* $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, *то*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Приклад. Обчислити імовірність *P(AB)* у прикладі про кидання кубика, розглянутому на початку параграфа.

Розв’язання. $P(A/B) = 1/6$, $P(B) = 6/36 = 1/6 \ \Rightarrow\ P(AB) = 1/36.$

Справді, $AB = \{3, 2\}$, і за класичним означенням $P(AB) = 1/36$.

Введемо поняття ***незалежності*** випадкових подій, яке в теорії ймовірностей відіграє дуже важливу роль. Нехай Ω - простір елементарних подій, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ - випадкові події.

Події A і B називаються ***незалежними,*** *якщо* $P(AB) = P(A)P(B)$.

Приклад. Монету кидають двічі. Нехай A - подія, яка полягає в тому, що за першим разом випав герб, B- подія, яка полягає в тому, що за другим разом випав герб. З’ясувати, чи будуть незалежними події A і B.

Розв'язання. Простором елементарних подій даного експерименту є множина $\Omega=\{ГГ, ЦЦ, ГЦ\ ЦГ\}$. Тоді

$A=\{ГГ, ГЦ\},\ B=\{ГГ, ЦГ\},\ AB=\{ГГ\}$

і $P(A) = P(B) = \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(AB) =\frac{1}{4}$. Отже, $P(AB) = P(A)P(B)$, тому випадкові події A і B - незалежні.

Розглянемо найважливіші ***властивості*** ймовірностей для незалежних подій.

1. Якщо події A і B незалежні, то $P(A/B)=P(A)$ $(P(B)>0)$, $P(B/A)=P(B)$ $(P(A)>0)$. Доведення випливає безпосередньо з теореми множення.

2. Якщо події A і B незалежні, то незалежні також A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Випадкові події $A_1,A_2,\ldots,A_n$ називаються **незалежними в сукупності,** якщо

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k})$$

для будь-яких $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n\quad(2\le k\le n)$.

Приклад На площину кидають тетраедр, три грані якого пофарбовані відповідно в червоний, синій, жовтий кольори, а на четверту грань нанесено всі три кольори. Розглянемо випадкові події: A_1 - випаде грань із червоним кольором; A_2 - випаде грань із синім кольором; A_3 - випаде грань із жовтим кольором. З'ясувати, чи будуть ці події незалежними в сукупності.

Розв'язання. Очевидно, що $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2);\ P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A)P(A);\ P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(4).$$

Отже, події A_1, A_2, A_3 - попарно незалежні. Проте ці події не є незалежними в сукупності, бо

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

4.3 Формула повної імовірності. Формули Байєса

Припустимо, що подія A може відбуватися в різних умовах, яким відповідають попарно несумісні події $H_1,H_2,\ldots,H_n$, які утворюють повну групу і які назвемо *гіпотезами.* Нехай відомі імовірності

P(H₁),P(H₂),...,P(Hₙ) та умовні імовірності *P(A/H₁),P(A/H₂),...,P(A/Hₙ).* Як знайти *P(A)* в даній ситуації?

Теорема. *Якщо $H_1, H_2, \dots, H_n$ - повна група попарно несумісних подій і $P(H_i) > 0, i = \overline{1,n}$, то для будь-якої події A справедлива рівність:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

Рівність називають ***формулою повної імовірності***

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

формула Байєса *(формула ймовірностей гіпотез).* Їм можна дати таке тлумачення. Нехай подія *A* може відбуватись в різних умовах, щодо характеру яких можна зробити *n* припущень *(гіпотез)* $H_1, H_2, \dots, H_n$. Імовірності цих гіпотез $P(H_k)$ нам відомі, як і умовні імовірності $P(A/H_k)$ події *A* за умови здійснення кожної гіпотези. Якщо в результаті експерименту подія *A* відбулась, то за формулами Байєса ми можемо *переоцінити* імовірності кожної з гіпотез, знайшовши $P(H_k/A)$.

Приклад. Зі скриньки, яка містить 5 білих і 3 чорних кулі, одна куля невідомого кольору загублена. Яка імовірність витягнути навмання зі скриньки білу кулю (подія *A*)? Яка імовірність того, що загублено чорну кулю, якщо витягнута навмання куля виявилась білою?

Розв'язання. Тут можливі дві події-гіпотези: H_k - загублено k білих куль ($k=0$; 1). Очевидно, події H_0, H_1- несумісні й утворюють повну групу, а їхні імовірності становлять: $P(H_0)=\frac{3}{8}$, $P(H_1)=\frac{5}{8}$. Відповідні умовні імовірності події $A = AH_0+AH_1$ становлять: $P(A/H_0)= \frac{5}{7}$, $P(A/H_1)=\frac{4}{7}$.За формулою повної імовірності

$$P(A) = \sum_{i=0}^{1} P(H_i) P(A/H_i) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{8}.$$

Імовірність $P(H_0/A)$ обчислимо за формулою Байєса:

$$P(H_0 / A) = \frac{P(H_0) P(A/H_0)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{7}.$$

4.4 Послідовність незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Біномна формула. Біномний розподіл

Припустимо, що проводиться певна кількість однакових випробувань, у кожному з яких можливі лише два несумісні результати: деяка подія A може відбутися або не відбутися. Наприклад, коли підкидаємо 10 разів монету, то за кожного підкидання монети випаде або герб (подія A), або цифра (подія $\overline{A}$).

Означення. Випробування називаються **незалежними** стосовно деякої події А, якщо імовірність цієї події в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань.

Означення. Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів А або $\overline{A}$, у кожному з яких подія А має одну і ту саму імовірність Р(А) = р, називається **схемою Бернуллі.**

Отже, якщо випробування проводяться за схемою Бернуллі, то в кожному з них можливий тільки один з двох результатів: A (успіх) або A (невдача), до того ж імовірності $P(A)=p$ і $P(\overline{A})=1-p=q$ є однаковими в кожному випробуванні.

Беручи до уваги незалежність випробувань, маємо, що імовірність кожної з подій-доданків у правій частині рівна $p^k q^{n-k}$. Всі ці доданки – попарно несумісні події, а їхня кількість рівна кількості перестановок з повтореннями множини з n елементів, серед яких $к$ елементів першого типу і n-k елементів другого типу, тобто

$$P_n(k,n-k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k .$$

Застосовуючи аксіому адитивності, одержимо:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Формула називається ***біномною формулою*** або *формулою Бернуллі.* Вона виражає імовірність того, що кількість успіхів в серії з n послідовних незалежних випробувань за схемою Бернуллі дорівнює k.

Набір чисел $P_n\ (k)\ (k=\ 0,1,\ldots,\ n)$ називають ***біномним розподілом.***

Події $\{\mu_n=0\},\{\mu_n=1\},\ldots,\{\mu_n=n\}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, отже, $\{\mu_n=0\},+\{\mu_n=1\}+\ldots+\{\mu_n=n\}=\Omega$,

тому $$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=P(\Omega)=1.$$

Цю формулу можна також отримати й безпосереднім обчисленням

$$\sum_{k=0}^{n}P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1.$$

Приклад. Кубик кидають 5 разів. Обчислити імовірність випадання чотирьох шісток.

Розв'язання. Тут $n=5$, $k=4$, $p=1/6$, $q=5/6$. За допомогою біномної формули отримуємо: $P_5(4)=C_5^4\cdot\frac{1}{6^4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5^2}{6^5}=\frac{25}{7776}$.

4.5 Гранична теорема Пуассона

Якщо імовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі рівна p і якщо для $n\to\infty$ $p\to\infty$ *так, що* $np\to\lambda\,(0<\lambda<\infty)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, *для будь-якого* $k=0,1,2,\ldots$, *де* $P_n(k)$ *– імовірність появи* k *успіхів в n випробуваннях.*

Отже, при великих n ($n>100$) і малих p ($np<30$) ми можемо користуватися наближеними формулами:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad P_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda=np.$$

Формули називаються ***асимптотичними формулами Пуассона.***

Приклад. У фірмі працює 500 співробітників. Знайти імовірність того, що у двох співробітників день народження припаде на новий рік, вважаючи, що імовірність народитися у фіксований день становить 1/365.

Розв'язання. Маємо: $n=500$, $p=1/365$, $\lambda=np=\frac{500}{365}=\frac{10}{73}$, $k=2$;

Обчислення ж за біномною формулою дають $P_{500}(2)=0{,}2388347$. Бачимо, що

$\backslash P_{500}(2)$ - 0,2384517\= 0,000383 < 0,003753 = np^2.

4.6. Локальна формула Муавра-Лапласа

Нехай імовірність успіху в кожному з п незалежних випробувань за схемою Бернуллі рівна р, 0<р<1. Тоді для великих значень п імовірність $P_п(k)$ появи к успіхів в п випробуваннях обчислюється за наближеною формулою:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}, \quad \textit{якщо} \quad x_0 \approx \frac{k-np}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, - функція Гаусса.

При цьому встановлено, що відносна похибка формули наближається до нуля, коли $n \to \infty$.

5. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

5.1. Поняття дискретних та неперервних випадкових величин. Закони розподілу їх імовірностей

Означення. Випадковою величиною називається така змінна величина, яка внаслідок випробування набуває з деякою ймовірністю певного значення із множини можливих значень.

Випадкові величини можна розподілити на дві групи в залежності від множини їх можливих значень.

Перша група – це *дискретні* випадкові величини. Їх значення утворюють злічену множину, тобто можуть бути перераховані.

Друга група – це *неперервні* випадкові величини. Їх значення утворюють суцільний інтервал числової осі.

Співвідношення, що встановляє зв’язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	……	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	…..	p_k

Оскільки випадкові події ($X = x_j$) і ($X = x_m$) є між собою несумісними (($X = x_i$) ∩ ($X = x_m$) = ∅, $i \neq m$; $i, m = 1, 2, \ldots, k$) і утворюють повну групу $\left(\bigcup_{j=1}^{k}\left(X = x_j\right) = {}'\Omega\right)$, то необхідною є така умова:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1.$$

Рівність називають *умовою нормування* для дискретної випадкової величини X. Наведену таблицю називають *рядом розподілу*.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = xi$	–4	1	2	5	9
$P(X = x_i) = pi$	0,1	0,1	0,5	p_4	0,2

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

Розв'язання. Згідно з умовою нормування маємо:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \to 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + p_4 + 0{,}2 =$$

$$= 1 \to p_4 = 0{,}1.$$

5.2 Функція розподілу ймовірностей та її властивості

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$F(x) = P(X < x)$ Властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	– 4	– 1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;
2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1$;
3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;
4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) =$
$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$;
5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) +$
$+ P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;
6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) +$
$+P(X = 9) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) +$
$+ P(X = 9) + P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1.$

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

5.3 Щільність імовірностей та її властивості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{звідки } dF(x) = f(x)dx.$$

Властивості f(x)

1. $f(x) \ge 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1.$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha;\beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Приклад. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0 < X < 2)$

Розв'язання.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1<x\le 3;\\ 0, & x<3.\end{cases}$$

Графіки функцій $F(x)$, $f(x)$ зображено відповідно на рис.1 та рис.2

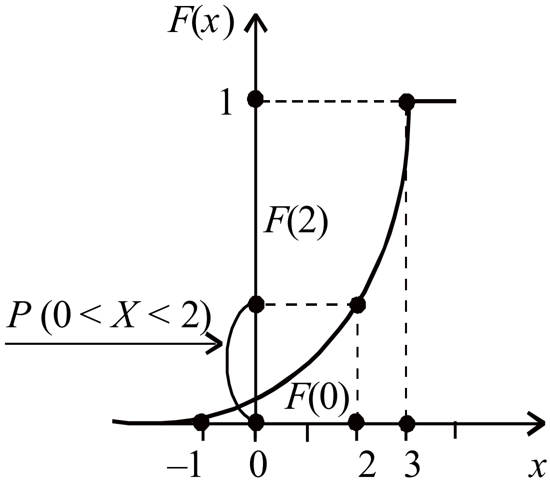

Рис. 1

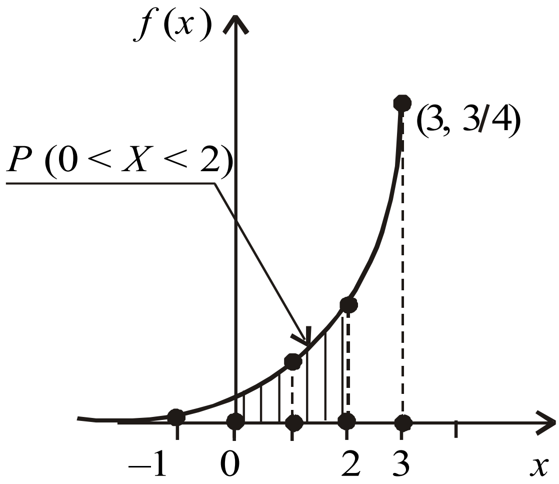

Рис. 2

Імовірність події $0 < X < 2$ обчислимо за формулою

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32};$$

далі маємо

$$P(0<X<2)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{3}{64}(x+1)^2dx=$$

$$=\frac{3}{64}\int_0^2(x+1)^2dx=\frac{3}{64}\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_0^2=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}.$$

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

звідки $dF(x) = f(x)dx.$

Математичне сподівання та його властивості

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом термін «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Якщо Ω — обмежена множина, то $M(X) = \sum_{s=1}^{n} x_i p_i$.

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X) = \int_{\Omega} x\, f(x)dx.$$

Якщо $\Omega = (-\infty; \infty)$, то $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$.

Якщо $\Omega = [a; b]$, то $M(X) = \int_{a}^{в} x\, f(x)dx.$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій: $M(C) = C.$

2. $M(CX) = CM(X)$

Для дискретної випадкової величини маємо

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{k} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{k} x_i p_i = CM(X) \cdot$$

Для неперервної:

$$M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = CM(X).$$

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(AX+B) = AM(X) + B.$$

Для дискретної випадкової величини:

$$M(AX+B) = \sum_{i=1}^{n} (Ax_i + B)p_i = A\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + B\sum_{i=1}^{n} p_i = AM(X) + B \cdot$$

Для неперервної випадкової величини:

$M(AX+B)=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(Ax+B)f(x)dx=A\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx+B\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=AM(X)+B.$$

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

x_i	– 6	– 4	2	4	6	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Скориставшись (2., дістанемо

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=$$

$$=-6\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2=$$

$$=-0{,}6-0{,}4+0{,}4+1{,}2+0{,}6+1{,}6=2{,}8.$$

Приклад 2. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{\sqrt{x+4}}{3}, & -4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Для обчислення $M(X)$ необхідно знайти щільність імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-4;\\ \dfrac{1}{6\sqrt{x+4}}, & -4<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Тоді:

$$M(X)=\int_{-4}^{6}x\;f(x)dx=\int_{-4}^{6}x\frac{1}{6\sqrt{x+3}}dx=\frac{1}{6}\int_{-4}^{6}\frac{x}{\sqrt{x+3}}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}x+3=z^2\\ x=z^2-3\\ dx=2zdz\end{matrix}\quad\rightarrow\quad\begin{matrix}-3\le x\le 6\\ 0\le z\le 3\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\int_{0}^{3}\frac{z^2-3}{z}2zdz=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(z^2-3)dz=\frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3}z^2dz-3\int_{0}^{3}dz\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left.\frac{z^3}{3}\right|_{0}^{3}-3z\Big|_{0}^{3}\right)=\frac{1}{3}(9-9)=0;$$

$M(X)=0.$

Якщо випадкова величина $X \in [a; b]$, то $M(X) \in [a; b]$, а саме: математичне сподівання випадкової величини має обов'язково міститься всередині інтервалу $[a; b]$, являючи собою центр розподілу цієї величини.

5.4. Мода та медіана випадкової величини

Модою (Мо) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності: $f(\text{Mo}) = \max$.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:

$$P(-\infty < X < \text{Me}) = P(\text{Me} < X < \infty) \to F(\text{Me}) - F(-\infty) =$$
$$= F(\infty) - F(\text{Me}) \to$$
$$\to F(\text{Me}) = 1 - F(\text{Me}) \to 2F(\text{Me}) = 1 \to \to F(\text{Me}) = 0{,}5.$$

Приклад. Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Імовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8.

Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти Мо.

Розв'язання.

Можливі значення випадкової величини:

$X = 0, 1, 2, 3.$

Імовірності цих можливих значень такі:

$p_1 = (0{,}2)^3 = 0{,}008;$

$p_2 = 3p\,q^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 = 0{,}096;$

$p_3 = 3p^2q = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384;$

$p_4 = p^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512.$

Запишемо закон таблицею:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Із таблиці визначаємо Мо = 3.

Отже, дістаємо одномодальний розподіл.

5.5 Дисперсія та її властивості

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Приклад 1. Закони розподілу випадкових величин X і Y задані таблицями:

x_i	– 0,5	– 0,1	0,1	0,5
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	– 100	– 80	– 10	10	10	80
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$ і $M(Y)$.

Розв'язання.

$$M(X) = \sum_{s=1}^{4} x_i p_i = -0{,}5 \cdot 0{,}4 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 =$$

$$= -0{,}2 - 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}2 = 0;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{6} y_j p_j = -100 \cdot 0{,}1 - 80 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}2 + 80 \cdot 0{,}2$$

$$= +100 \cdot 0{,}1 = -10 - 16 - 2 + 2 + 16 + 10 = 0.$$

Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин X і Y істотно різні. Із наведеного прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань *(M (X) = M (Y) = 0)* випадкові величини X і Y мають тенденцію до коливань відносно $M(X)$ та $M(Y)$, причому Y має більший розмах розсіювання відносно $M(Y)$, ніж випадкова величина X відносно $M(X)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання*. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання $(X - M(X))$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини X завжди дорівнює нулю. Справді,

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$$

для неперервної $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \cdot$

Якщо $X \in [a; b]$, то $D(X) = \int_{a}^{\text{ъ}} (x - M(X))^2 f(x) dx \cdot$

Властивості дисперсії

1. Якщо C — стала величина, то
$D(C) = 0$.

2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Якщо A і B — сталі величини, то
$D(AX + B) = A^2 D(X)$.

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Для дискретної випадкової величини X; $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X)$;

для неперервної $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X) \cdot$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x) dx - M^2(X).$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною $(D(X \geq 0))$.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

6. Приклади завдань для виконання модульної контрольної роботи ЗМ-П2:

ВАРІАНТ 1

1. Розрив електричного ланцюга відбувається, коли принаймні один з трьох, послідовно з'єднаних елементів вийшов з ладу. Визначте ймовірність того, що розриву ланцюга небуде, якщо елементи зазнають невдачі відповідно з ймовірностями: 0,3; 0,4; 0,6.
2 У шухляди 10 деталей, 3 з них дефектні. Вилучено чотири деталі. Знайдіть ймовірність того, що серед витягнутих деталей не більше 2 дефектних.
3. З партії, що містить 10 продуктів, серед яких 3 дефектних, випадково відібрано 3 продукти для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілу випадкової кількості дефектних продуктів X, що містяться у вибірці. Знайти M(X), D(X).
4.Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей M(X), D(X).

$$F(X)=\left\{\begin{matrix} 0, x\le 0 \\ x^2, 0<x\le 1 \\ 1, x>1 \end{matrix}\right\}$$

ВАРІАНТ 2

1. З повного набору кісток (28) навмання забирають дві кістки. Визначте ймовірність того, що друга кістка може бути прикріплена до першої.
2. З 10 квитків 2 є виграшем. Визначте ймовірність того, що серед взятих п'яти квитків в кращому випадку, не більше одного виграшу.
3. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкової кількості влучення м'яча в кошик за трьома кидками, якщо ймовірність потрапляння м'яча в кошик одним кидком p=0,3. Знайти D(X) и M(X).
4. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей M(X), D(X).

$$F(X)=\left\{\begin{matrix} 0, x\le 1 \\ (x^2-x), 1<x\le 2 \\ 1, x>2 \end{matrix}\right\}$$

.ВАРІАНТ 3

1. Яка ймовірність витягти з колоди 52 карт, парну карту масті бубна .
2. У тире 5 гармат, ймовірність потрапляння яких становить 0,5 відповідно; 0,6; 0,7; 0,8; 0.9. Визначити ймовірність удару одним пострілом, якщо стрілок бере одну з гармат за раз.
3.Чому дорівнює середня кількість влучень м ячем у кошик при чотирьох кидках, якщо ймовірність влучення при одному броску дорівнює 0,4?
4. Щільність ймрвірності випадкової величини X задана виразом f(x). Знайти M(X), D(X).

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} ax^2 \text{ при } 0<x\le 2 \\ 0 \quad \text{при } x<0 \text{ или } x>2 \end{matrix}\right\}$$

ВАРІАНТ 4.

1.Імовірність потрапляння кожен постріл для трьох стрільців становить 4/5, 3/4, 2/3 відповідно. Всі троє стрільців одночасно зробили по одному пострілу. Визначте ймовірність того, що саме третій стрілець влучив у ціль .

2. У двох урнах є кульки, які відрізняються тільки кольором, з в першій урні 5 білих кульок, 11 чорних і 8 червоних, а в других відповідно 10,8 і 6. З обох урн видаляється одна куля. Яка ймовірність того, що обидві кульки одного кольору?

3. Проводяться послідовні незалежні випробування 5 пристроїв на надійність. Кожен наступний пристрій тестується тільки в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу випадкової кількості протестованих пристроїв, якщо ймовірність виявитися якісним після тесту для кожного з них становить 0,9. Знайти M(X), D(X).

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей, M(X) ,D(X).

$$F(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & x\le 0 \\ x^2/9, & 0<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{array}\right\}$$

ВАРІАНТ 5

1. З 18 стрільців 5 влучили в ціль з імовірністю 0,9; 4 - з імовірністю 0,8; 3 - з імовірністю 0,7; 4 - з імовірністю 0,6 і 2 - з імовірністю 0,5. Обраний стрілок здійснив постріл, але не влучив у ціль. До якої групи, найімовірніше, належить стрілець?

2. Три карти навмання витягують з колоди карт (52 карти). Знайдіть ймовірність того, що це буде три, сім і туз.

3.Навмання обирається натуральне число, не більше за 10. X – кількість натуральних дільників обраного числа. Знайти закон розподілу X та ймовірність події $x\le 2$.

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей, M(X) ,D(X).*0,*

$$F(x)=\left\{\begin{array}{ll} (x-2)^2, & 2<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{array}\right\}$$

ВАРІАНТ 6

1. У класі 30 учнів, з них 10 дівчат. Навмання обрані 5 учнів. Знайти ймовірність того, що серед них не більш 2-х дівчат.

2.Троє мисливців одночасно стріляли по вірі, яка була вбита однією кулею. Визначте ймовірність того, що вепр був убитий другим мисливцем, якщо ймовірність потрапляння в них відповідно становить 0,2; 0,4; 0,6.

3. Найти закон распределения вероятностей числа гербов при двух бросаниях правильной монеты. Найти M(X), D(X).

4. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей, M(X) ,D(X).

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \dfrac{x-1}{2}, 1<x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$

ВАРІАНТ 7

1. 15 білетів для іспиту містять 3 питання, які не повторюються. Студент може відповісти лише на 25 запитань. Визначте ймовірність того, що іспит буде сдан , якщо достатньо відповісти на два питання з квитка.
2. У лотереї 50 квитків, з яких 8 виграшних квитків. Яка ймовірність того, що серед перших 6 випадково відібраних квитків, буде не більше двох виграшних?
3. У партії 6 виробів є 3 стандартні вироби Навмання обрали три вироби. Запишить закон розподілу дискретного випадкового значення X - кількість стандартних виробів серед обраних. Найти D(X) и M(X).
4. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей, M(X) ,D(X).

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 2\sin x, 0<x\le \dfrac{\pi}{6}\\ 1, x>\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

ВАРІАНТ 8

1. Два стрільці, для яких ймовірність влучання в ціль становить 0,7 і 0,8 відповідно, випускають один постріл. Визначте ймовірність принаймні однієї цілі удару.
2. На складі знаходяться пристрої, виготовлені двома заводами. З них 60% виробляє завод No1 і 40% заводу No2. Імовірність того, що пристрій виробництва заводу No 1 є стандартним, становить 0,8. Для приладу, що випускається заводом No 2, така ймовірність становить 0,9. Визначте ймовірність того, що з 3-х пристроїв, прийнятих навмання, два виявляться стандартними та випущеними заводом No2.
3.Гральну кістку кидають до першої появи шестірки. Запишить закон розподілу випадкової величини X – «кількість кидань кістки» та ймовірність події $X\le3$.
4.При якому значенні **a** функція f(x) будє щільністю ймовірності ? Визначити **a**, знайти ймовірність події при $0<X<1/4$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^3 & \text{при } 0\le x\le 1\\ 0 & \textit{при } x<0 \textit{ или } x>1\end{cases}$$

ВАРІАНТ 9

1.У коробці 5 виробів, 4 з яких пофарбовані. Було вилучено два вироби. Знайдіть ймовірність того, що принаймні один виріб буде пофарбовано.

2. З 16 стрільців : 3 влучають у ціль з імовірністю 0,6; 4 стрильці - з імовірністю 0,7; 3 стрильці - з імовірністю 0,9; 4 стрильці- з імовірністю 0,8 і 2стрильці - з імовірністю 0,5. Обраний стрілок здійснив постріл і влучив у ціль. Визначити ймовірність того, що стрілок належав групі з 2 осіб.

3.Пристрій містить три незалежних робочих елементи. Ймовірність відмови кожного елемента в одном іспиті дорівнює 0,2. Записати закон розподілу числа відмовних элементів в одному іспиті. Знайти M(X), D(X).

4.Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу ймовірностей, M(X) ,D(X). $F(x) = \begin{cases} 0, x \le -2 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}, -2 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$

ВАРІАНТ 10

1. Учасники розіграшу витягують з коробки жетони з цифрами від 1 до 50. Знайти ймовірність того, що число першого взятого навмання жетона містить число 5.

2.У двох ящиках є лампи. У першій коробці міститься 12 ламп, 2 з яких нестандартні, в другому ящику 10 ламп, з яких 3 нестандартні. З першого ящика навмання взяли лампу і перенесли на другу. Знайдіть ймовірність того, що навмання взята лампа з другого ящика нестандартна.

3.В партії з 10 виробів- 8 стандартних. Навмання взято 2 вироби. Записати закон ррзподілу випадкової величини. Який дорівнює кількості стандартних виробів серед взятих. Знайти M(X), D(x).

4.Надано щільність ймовірності . Знайти a, M(X), D(X).

$$f(x)= \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ a \sin x, \text{ если } 0 < x < \pi \\ 0, \text{ если } x > \pi \end{cases}$$