

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
з дисципліни
«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У
ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»
(Ч. 2)**

Одеса 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з дисципліни

**«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У
ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»
(Ч. 2)**

для студентів III курсу рівня підготовки «бакалавр»,
спеціальність 101 «Екологія», РПД «Гідроекологія»

"Затверджено"
на засіданні методичної ради
природоохоронного факультету
Протокол № ____ від _____ 2019 р.

Одеса 2019

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» за спеціальністю «Гідроекологія» / проф., д.геогр.н. Лобода Н.С., ст.викл., к.геогр.н. Куза А.М. – Одеса, ОДЕКУ, 2019. – 52 с.

Методичні вказівки призначені для студентів III курсу денної форми навчання за спеціальністю 101 «Екологія», РПД «Гідроекологія»

.

ЗМІСТ

Загальні положення.....	5
1 Встановлення значущості зростаючого або убутного рангового тренду за допомогою коефіцієнта Кендалла.....	7
2. Встановлення залежності або незалежності залишків розрахункової моделі за допомогою критерію Дарбіна-Уотсона.....	9
3 Оцінка рівності дисперсій двох рядів за допомогою критерію Романовського.....	12
4 Інтервальні оцінки вибірових значень.....	14
5 Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів (за допомогою критерія Фішера).....	18
6 Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Гнеденко-Корольока.....	25
7 Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Колмогорова-Смірнова.....	30
Література.....	35
Додаток.....	36

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Актуальність проведення практичних занять з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» обумовлена необхідністю навчитися застосовувати сучасні методи статистичного аналізу даних. Статистичні методи дозволяють вирішувати такі гідроекологічні задачі: встановлювати статистичні характеристики гідрологічних та гідрохімічних рядів спостережень, виявляти статистичну однорідність та наявність “викидів” у рядах спостережень, встановлювати існуючі тенденції, обґрунтовувати статистичну значущість виділених трендів, робити висновки щодо якісного стану вод та перспектив майбутнього використання водних об’єктів країни.

Метою методичних вказівок є оцінка статистичних характеристик показників якості води водних об’єктів та надійності і достовірності вибірових даних. За допомогою методичних вказівок студенти повинні оволодіти знаннями та практичними навичками статистичної обробки та аналізу гідроекологічних даних.

Математична статистика є розділом математики, яка розробляє математичні методи систематизації та використання статистичних даних для наукових та практичних висновків. Підґрунтям математичної статистики є теорія ймовірностей.

Після виконання практичних завдань з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» студенти повинні отримати базові знання:

- методи аналізу однорідності рядів даних на основі параметричних критеріїв;
- методи визначення однорідності рядів вихідних даних;
- методи визначення відповідності емпіричних законів розподілу теоретичним.

У результаті виконання практичних завдань студенти повинні оволодіти наступними вміннями:

- перевіряти гіпотези про однорідність двох рядів даних за допомогою різних критеріїв;
- встановлювати значущість або незначущість тренду в рядах гідроекологічних даних ;
- встановлювати залежність або незалежність залишків розрахункової моделі;
- оцінювати рівність дисперсій двох рядів даних;
- оцінювати точність та надійність вибірових значень відповідних параметрів.

При виконанні практичних завдань з дисципліни «Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях» студент повинен виконати наступні роботи: 1) Встановлення значущості зростаючого або убутного рангового тренду за допомогою коефіцієнта

Кендалла. 2) Встановлення залежності або незалежності залишків розрахункової моделі за допомогою критерію Дарбіна-Уотсона. 3) Оцінка рівності дисперсій двох рядів за допомогою критерію Романовського. 4) Інтервальні оцінки вибірових значень. 5) Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів (за допомогою критерія Фішера). 6) Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Гнеденко-Корольока. 7) Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Колмогорова-Смірнова.

Вивчення кожної теми закінчується відповідями на питання, поставленими по кожній темі для самоперевірки.

Контроль поточних знань виконується на базі модульної системи контролю відповідно до робочої програми дисципліни.

Практична робота №1

Встановлення значущості зростаючого або убутного рангового тренду за допомогою коефіцієнта Кендалла

Мета роботи: використовуючи вихідний ряд даних спостережень за якістю поверхневих вод суші, розраховувати коефіцієнта Кендалла і аналізувати отримані результати на предмет присутності додатного чи від'ємного тренду.

Теоретична частина

Моріс Кендалл (1907-1983 рр.) – англійський вчений, автор численних праць зі статистики і теорії ймовірностей. Однією з перших його робіт було дослідження врожайності з використанням факторного аналізу. Його ім'я носить один з коефіцієнтів рангової кореляції.

Коефіцієнт кореляції Кендалла використовується в разі, коли змінні представлені двома порядковими шкалами за умови, що пов'язані ранги відсутні. Запропонований Кендаллом коефіцієнт будується на основі відносин типу «більше-менше». Обчислення коефіцієнта Кендалла τ пов'язано з підрахунком числа збігів і інверсій.

$$\tau = \frac{4N}{n(n-1)} - 1 \quad (1.1)$$

де τ - коефіцієнт Кендалла;

N - число випадків, коли $u_j > u_i$ при $j > i$;

n – довжина досліджуваного ряду.

Отриманий коефіцієнт змінюється у межах від -1 до +1

$$-1 < \tau < 1. \quad (1.2)$$

Математичне сподівання генеральної сукупності τ дорівнює 0

$$m_\tau = 0. \quad (1.3)$$

Середнє квадратичне відхилення розраховується за формулою

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}} - 1 \quad (1.4)$$

$$\text{Якщо } \tau > \frac{1}{4}n(n-1), \text{ то присутній додатний тренд,} \quad (1.5)$$

$$\text{Якщо } \tau < \frac{1}{4}n(n-1), \text{ то має місце від'ємний тренд,} \quad (1.6)$$

$$\text{Значущість тренду встановлюється як } |\tau| > 2\sigma_r. \quad (1.7)$$

Практична частина

Вихідні дані: результати розрахунків показників якості води за різними методиками (ІЗВ, ПКІЗ, І_{1,2,3}) (Додаток А, табл.А.1-А.10).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані про результати оцінки якості води згідно варіанту (додаток А, табл.А.1-А.10).
2. Розраховуємо коефіцієнт Кендалла за формулою 1.1.
3. Далі перевіряється умови (1.5) та (1.6) і робиться висновок про наявність додатного або від'ємного тренду.
4. Для встановлення значущості тренду розраховується середнє квадратичне відхилення за формулою (1.4) і перевіряється умова (1.7).

Приклад розрахунків.

Для варіанту 1(табл.А.1) зробимо перевірку на наявність тренду та його значущість.

$$\begin{array}{llll} \text{1)Розраховуємо} & \text{коефіцієнт} & \text{Кендалла} & (1.1): \\ \tau = \frac{4N}{n(n-1)} - 1 = \frac{4 * 5}{16(16-1)} - 1 = -0,92 \end{array}$$

2) Перевіряємо умови (1.5), (1.6):

$$\frac{1}{4}n(n-1) = \frac{1}{4}16(16-1) = \frac{240}{4} = 60$$

$$\tau = -0,92$$

Виконується умова (1.6), тобто $-0,92 < 60$, робимо висновок, що присутній додатний тренд.

3) Встановлюємо значущість тренду, для цього розраховуємо дисперсію вихідного ряду σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)} - 1} = \sqrt{\frac{2(2*16+5)}{9*16(16-1)}} = 0,19$$

4) Перевіряємо умову (1.7):

$$|\tau| = 0,92.$$

$$2\sigma_x = 0,38$$

$0,92 > 0,38$, тобто робимо висновок, що від'ємний тренд є значущим.

Контрольні запитання:

1. Для чого використовується коефіцієнт Кендалла?
2. В яких межах змінюється коефіцієнт Кендалла?
3. Чому дорівнює математичне сподівання генеральною сукупності для коефіцієнта Кендалла?
4. Про що свідчить присутність додатного (від'ємного) тренду індексів якості води?
5. Як перевірити значущість тренду при використанні коефіцієнту Кендалла?

Практична робота №2

Критерій Дарбіна-Уотсона (встановлення залежності або незалежності залишків розрахункової моделі)

Мета роботи: навчитися встановлювати залежність або незалежність розрахункової моделі за критерієм Дарбіна-Уотсона для даних оцінки якості поверхневих вод.

Теоретична частина

Залишки це різниця між фактичним і розрахунковим значенням випадкової величини: $y_i - \tilde{y}_i$.

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} - 2 \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} + \frac{\sum_{i=2}^n e_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad (2.1)$$

$\Downarrow$
«1»

$\Downarrow$
«1»

де залишок є різницею між фактичним y_i та розрахованим $\tilde{y}_i$ значенням $\tilde{y}_i - y_i = e_i$;

$$\frac{\sum_{i=2}^n e_i e_i - 1}{\sum_{i=1}^n e_i^2} - \text{характеристика тісноти лінійного зв'язку між залишками.}$$

Якщо зв'язок сильний

$$r_{l,l-1} = 1$$

$$d = 1 - 2 + 1 = 0$$

Якщо зв'язок слабкий

$$r_l = 0$$

$$d = 1 - 0 + 1 = 2$$

$$1,5 < D < 2,5,$$

Тобто при наявності зв'язку між залишками $d \rightarrow 0$, при відсутності зв'язку $d \rightarrow 2$.

Практична частина

Вихідні дані: Середньорічні витрати води та значення річних сум іонів (Додаток Б, табл.Б.1).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані про результати оцінки якості води згідно варіанту (Додаток Б, табл.Б.1).

2. Будуємо графік зв'язку мінералізації води (річна сума іонів) і витрат. Додаємо лінію тренду і рівняння лінії тренду.

3. Розраховуємо залишок $\tilde{y}_i - y_i = e_i$ між фактичною сумою іонів та сумою іонів, розрахованою за рівнянням регресії.

4. Оцінюємо тісноту лінійного зв'язку між залишками за допомогою параметра d , робимо висновки.

Приклад розрахунків.

1) Згідно варіанту вихідних даних із додатку Б, будуємо графік зв'язку мінералізації води (річна сума іонів) і витрат. Додаємо лінію тренду і рівняння лінії тренду (рис.2.1).

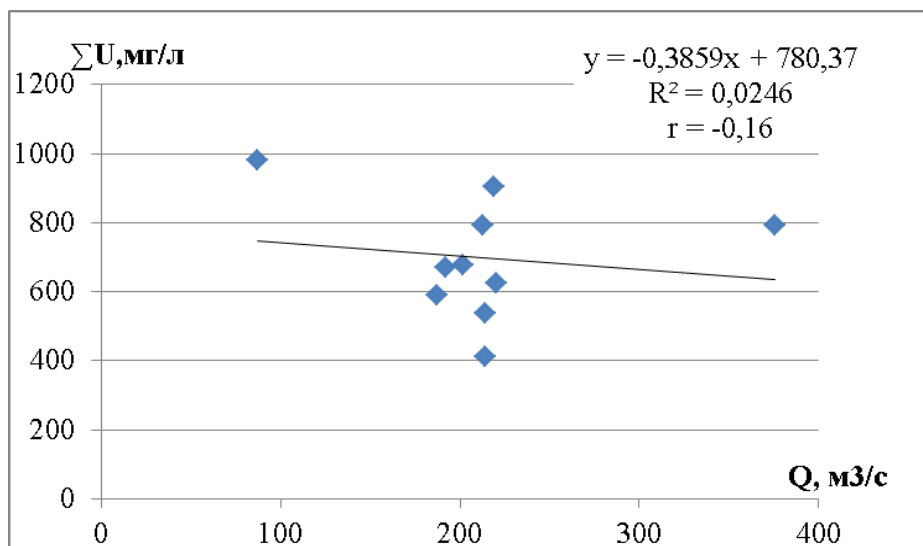


Рис.2.1 – Графік зв'язку мінералізації води (річна сума іонів) і витрат води у р. Вятка - смт Аркуль, період 1975-1984 роки

2) Розраховуємо залишок $\tilde{y}_i - y_i = e_i$ між фактичною сумою іонів та сумою іонів, розрахованою за рівнянням регресії.

Табл.2.1 – Розрахунок залишку між фактичною сумою іонів та сумою іонів, розрахованою за рівнянням регресії

Роки	Q_i , м³/с	ΣU_i , мг/л	$\tilde{Q}_i$, м³/с	$\tilde{Q}_i - Q_i$ ($e_i - e_{i-1}$)	$(e_i - e_{i-1})$	$(e_i - e_{i-1})^2$	e_i^2
1975	192	670	706	514	146	21176	264481
1976	376	791	635	259	225	50407	67221,8
1977	87	983	747	660	-184	33976	435332
1978	214	539	698	484	-7	48	234050
1979	220	624	695	475	10	94	226074
1980	219	903	696	477	24	555	227393
1981	213	792	698	485	36	1298	235393
1982	202	678	702	500	-17	277	250418
1983	187	591	708	521	-521	271656	271656
1984	214	413	698	484	-484	234050	234050
					Σ	613538	$\Sigma 2446070$

3) Оцінюємо тісноту лінійного зв'язку між залишками

$$\frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} = \frac{613538}{2446070} = 0,25.$$

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} = 1 - 2 * 0,25 + 1 = 1,5.$$

Висновок: у зв'язку з тим, що $d = 1,5$, а коефіцієнт кореляції (рис.2.1) $r = -0,16$, можна зробити висновок, що зв'язок між залишками слабкий.

Контрольні запитання:

1. Для чого використовується коефіцієнт Дарбіна-Уотсона?
2. Як розрахувати «залишки»?
3. Як оцінити тісноту зв'язку залишків?
4. В яких межах змінюється параметр d ? Які висновки слідують із значення параметру d ?

Практична робота №3 Критерій Романовського (оцінка рівності дисперсій)

Мета роботи: навчитися виконувати оцінку рівності дисперсій двох рядів гідрохімічних даних за допомогою критерію Романовського.

Теоретична частина

Критерій Романовського зручний тим, що для оцінки рівності дисперсій не потрібно спеціальних таблиць. Розрахунок виконується у наступній послідовності.

Спершу розраховується величина θ :

$$\theta = \frac{v_2 - 2}{v_2} F^*, \quad (3.1)$$

де F^* - дисперсійне відношення (встановлюється як розподіл Фішера), вказує на значущість різниць в середніх значеннях, дозволяє враховувати декілька груп вибірових даних;

ν_2 - число ступнів свободи, більше 4.

Математичне сподівання θ для вибірок із нормальної сукупності з однаковою дисперсією дорівнює одиниці, тобто:

$$M[\theta]=1, \quad (3.2)$$

а середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(\theta)=\sqrt{\frac{2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)}}. \quad (3.3)$$

З ймовірністю $p=0,89$ можна вважати, що абсолютна величина відхилення θ від одиниці за модулем не перевищує 3σ . Звідки можна припустити, що якщо вибірки відносяться до однієї генеральної сукупності, тоді

$$R=\frac{|\theta-1|}{\sigma(\theta)}<3, \quad (3.4)$$

з чого витікає, що різниця між вибіровими оцінками дисперсій не суттєва.

Якщо $R>3$, то різниця суттєва.

Практична частина

Вихідні дані: Результати співвідношення концентрації хімічних елементів до відповідних ГДК у водах р.Тилігул, вище та нижче селища селища Березівка (Додаток В, табл.В.1-В.6).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані у відповідності до варіанту (Додаток В, табл.В.1-В.6).
2. Розраховуємо величину θ за формулою (3.1).
3. Розраховуємо середнє квадратичне відхилення за формулою (3.3).

4. Перевіряємо умову (3.4), робимо висновок про суттєвість або не суттєвість різниці між вибірковими оцінками дисперсій.

Приклад розрахунків.

1) Розрахуємо критерій Романовського для концентрації нафтопродуктів (табл.В.4) у р.Тилігул вище та нижче селища.

2) За формулою (3.1) розраховуємо θ , для нашого випадку $\nu_2 = 10 - 1 = 9$, $F^* = 3,18$

$$\theta = \frac{\nu_2 - 2}{\nu_2} F^* = \frac{9 - 2}{9} * 3,18 = 2,47.$$

3) Розраховуємо середнє квадратичне відхилення за формулою (3.3)

$$\sigma(\theta) = \sqrt{\frac{2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)}} = \sqrt{\frac{2(9 + 9 - 2)}{9(9 - 4)}} = 0,82.$$

4) Розраховуємо параметр R за формулою (3.4)

$$R = \frac{|\theta - 1|}{\sigma(\theta)} = \frac{|2,47 - 1|}{0,82} = 1,79.$$

Висновок: так як $R = 1,79 < 3$, слід вважати, що різниця між вибірковими оцінками дисперсій не суттєва.

Контрольні запитання:

1. Для чого використовується критерій Романовського?
2. Чому дорівнює математичне сподівання для вибірок із однаковими дисперсіями?
3. Чим зручний критерій Романовського?
4. Коли робиться висновок про несуттєвість різниці між вибірковими оцінками дисперсій?

Практична робота 4

Інтервальні оцінки

Мета роботи: навчитися виконувати інтервальні оцінки вибірових гідрохімічних даних згідно довірчому інтервалу та за допомогою t-розподілу Стюдента.

Теоретична частина

На практиці, окрім визначення вибірових значень відповідних параметрів генеральної сукупності, необхідно оцінити їх точність та надійність. Важливо знати, з якою ймовірністю $1 - \alpha$ можна стверджувати, що допущене відхилення статистичної оцінки від відповідного параметра (наприклад, середнього арифметичного $\bar{x}$ від середнього генеральної сукупності μ) не перебільшить деякої порогової величини $\varepsilon > 0$. Ймовірність цього відхилення розраховується за виразом:

$$P(|\mu - \bar{x}| < \varepsilon) = 1 - \alpha.$$

Величина ε залежить від заданого рівня надійності α та від похибки середнього $\bar{x}$. Тому вибірові значення параметрів (їх точкові оцінки) доповнюють довірчим інтервалом, який, з одного боку, визначає область припустимих значень параметра що оцінюється, а з іншого боку, характеризується статистичною надійністю $1 - \alpha$. Остання показує ймовірність α появи помилкових (тобто ті, що виходять за границі інтервалу) значень параметру який оцінюється. Величину $1 - \alpha$ називають довірчою ймовірністю відповідного статистичного твердження, а величину α - рівнем значущості (α характеризує ймовірність помилкового твердження).

Для 95%-го довірчого інтервалу вважають, що із статистичною надійністю 95% цей інтервал містить інтервал генеральної сукупності, але разом із цим у 5% випадків твердження, що параметр належить довірчому інтервалу, буде помилковим.

Порогове значення ε обирають таким чином, щоб ймовірність помилковості твердження не перевищувала заданого малого значення α (для α надається одне із наступних значень: 0,05; 0,01; 0,001).

Довірчий інтервал для середнього значення встановлюється за наступною формулою:

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{N}}, \quad (4.1)$$

де $\bar{x}$, s - відповідно вибірове середнє та середнєквadraticне відхилення ($\frac{s}{\sqrt{N}}$ - похибка середнього);

$t_{\alpha/2}$ - коефіцієнт встановлюється за спеціальною таблицею t -розподілу Стюдента за значенням α і об'єму вибірки N .

Практична частина

Вихідні дані: результати розрахунків показників якості води за різними методиками (ІЗВ, ПКІЗ, І_{1,2,3}) (Додаток А, табл.А.1-А.10).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані у відповідності до варіанту (Додаток А, табл.А.1-А.10).
2. Розраховуємо середнє вибіркве відхилення $\bar{x}$ з ряду вихідних даних.
3. Розраховуємо вибіркве середнє квадратичне відхилення для вихідних даних s .
4. Знаходимо критерій $t_{\alpha/2}$ за таблицею Додаток Г, табл.Г.1.
5. Встановлюємо довірчий інтервал згідно формули (4.1).

Приклад розрахунків.

1) Для вихідного ряду значень показника комбінаторного індексу забруднення води для р.В.Куяльник (Додаток А, табл.А.3), розраховуємо середнє вибіркве відхилення $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення s (табл.4.1).

2) Критерій $t_{\alpha/2}$ знаходиться за таблицею Додаток Г, табл.Г.1. Для нашого випадку довжина вибірки становить $N=16$, а отже $\nu_1 = 16-1=15$. Тоді для рівня значущості $\alpha = 0,05$, критерій Стюдента становить $t_{\alpha/2} = 2,13$.

4) Встановлюємо довірчий інтервал за формулою (4.1)

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{N}} = 3 + 2,13 \frac{1,06}{\sqrt{16}} = 3,56,$$

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{N}} = 3 - 2,13 \frac{1,06}{\sqrt{16}} = 2,44.$$

Висновок: Отже, на рівні значущості $\alpha = 0,05$, для вибірки довжиною 16, за вказаних вихідних умов довірчий інтервал змінюється від 2,44 до 3,56.

Табл.4.1 – Розрахунок параметрів $\bar{x}$ і s ПКІЗ для створу
р.В.Куяльник - м. Северинівка

№ з/п	Роки	ПКІЗ, x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1990	3,2	0,2	0,04
2	1991	2,6	-0,4	0,16
3	1992	2,1	-0,9	0,81
4	1993	2,4	-0,6	0,36
5	1999	1,2	-1,8	3,24
6	2000	3,8	0,8	0,64
7	2001	5,3	2,3	5,29
8	2002	1,5	-1,5	2,25
9	2003	2,3	-0,7	0,49
10	2004	4,3	1,3	1,69
11	2005	3,0	0	0
12	2006	3,7	0,7	0,49
13	2007	3,2	0,2	0,04
14	2008	2,5	-0,5	0,25
15	2009	3,5	0,5	0,25
16	2010	4,0	1	1
		$\bar{x} = 3,0$		$\Sigma = 17$
$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{17}{16 - 1}} = 1,06$				

Контрольні запитання:

1. Як оцінити точність та надійність вибірових значень відповідних параметрів генеральної сукупності?
2. Що називається довірчою ймовірністю та як її встановити?
3. Поясніть що таке «довірчий інтервал»? Як його розрахувати?

4. Які параметри необхідно розрахувати щоб встановити довірчий інтервал?

5. Чому дорівнює ймовірність помилки при статистичних розрахунках?

Практична робота 5

Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів (за допомогою критерія Фішера)

Мета роботи: навчитися перевіряти однорідність двох нормально розподілених рядів за допомогою критерія Фішера.

Теоретична частина

Однорідними називають такі ряди, які підпорядковуються одному і тому ж закону розподілу, тобто належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності, і для характеристики особливостей цього розподілу достатньо мати два параметри: середнє арифметичне значення та дисперсію.

Перевірка на однорідність полягає у перевірці двох гіпотез: про незначущість різниці в дисперсіях $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ і про незначущість різниці у середніх $m_x = m_y$. У випадку коли хоча б одна гіпотеза не приймається, то відкидається гіпотеза про однорідність двох рядів X і Y .

Ми не маємо математичних сподівань і дисперсій, які є параметрами генеральних сукупностей, але на основі вибірок можна отримати їх оцінки $\bar{x}, \bar{y}, S_x^2, S_y^2$. Оскільки оцінки – це випадкові величини, вони відрізняються один від одного. Можливі ситуації, що зображені на рис. 5.1.

На першому (рис.5.1а) з них дуже відрізняються одне від одного математичні сподівання m_x і m_y випадкових величин X і Y . Між їх оцінками $\bar{x}$ і $\bar{y}$ різниці будуть значущими. Тому статистичні сукупності, на основі котрих отримані ці оцінки, не будуть належати до однієї генеральною сукупності.

У другому випадку (рис. 5.1б) випадкові величини мають різні дисперсії σ_x^2 і σ_y^2 . Це приведене до значущих різниць між оцінками дисперсій S_x^2 і S_y^2 . І знову сукупності випадкових величин не будуть належати до однієї генеральною сукупності.

Ряди випадкових величин X і Y будуть однорідними, тобто будуть на рівні значущості α належати до однієї генеральною сукупності, якщо

різниці між оцінками параметрів їх розподілу S_x^2 і S_y^2 з однієї сторони і $\bar{x}$ і $\bar{y}$ - з другої носять випадковий характер, або, інакше кажучи, не будуть значущими (рис. 5.1в).

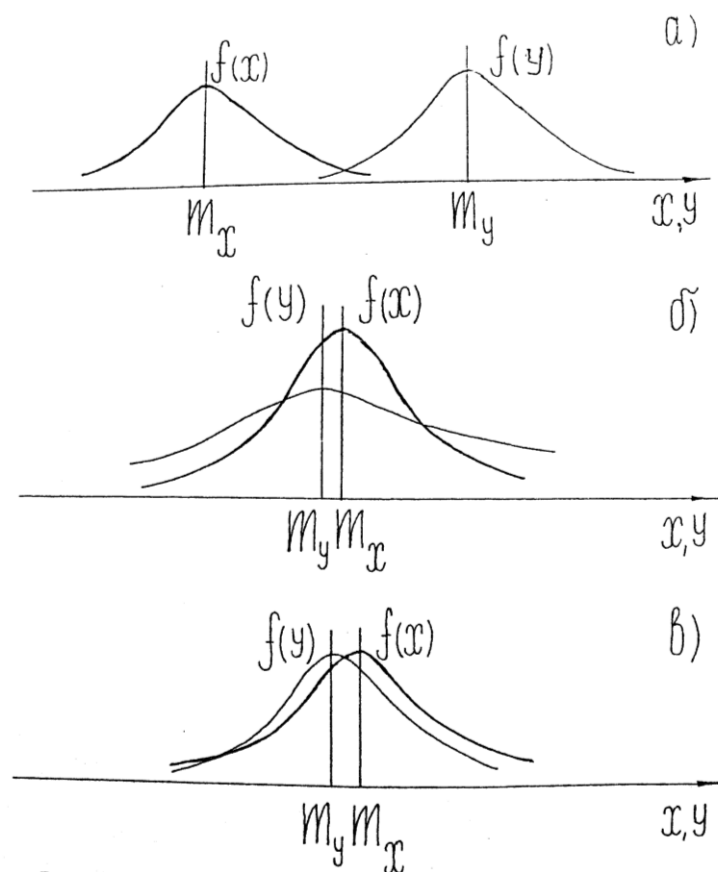


Рис. 5.1 – Можливі ситуації з розподілами величин X і Y (Школьний Є.П.)

Звідси видно, що дослідження однорідності двох випадкових рядів полягають у перевірці двох статистичних гіпотез: гіпотези H'_0 про незначущість різниць оцінок дисперсій та гіпотези H''_0 про незначущість різниць середніх значень.

Якщо випадкові величини X і Y описуються нормальним законом розподілу, то оцінки дисперсій σ_x^2 і σ_y^2 підлягають розподілу з параметрами $\nu_1 = m - 1$ та $\nu_2 = n - 1$, де m - довжина вибірки X , а n - довжина вибірки Y . У такому випадку розподіл випадкової величини описується законом Фішера-Снедекора

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}. \quad (5.1)$$

або

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{m-1}} = F \quad (5.2)$$

Статистична характеристика F має назву критерію Фішера-Снедекора. При розрахунках у чисельник ставлять більшу з дисперсій. Перевірка нульової гіпотези здійснюється шляхом порівняння розрахованого значення F з критичним $F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ (табл.5.1).

Якщо

$$F < F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2) \quad (5.3)$$

то гіпотеза H'_0 (**нульова гіпотеза**) не відхиляється, і навпаки.

У протилежному випадку приймається **альтернативна гіпотеза**, тобто різниця між дисперсіями рядів X і Y значуща і не може пояснюватися тільки впливом випадкових флуктуацій у вибірках X і Y .

Якщо розподіл випадкових величин X і Y описується нормальним законом, то середні арифметичні значення $\bar{x}$ та $\bar{y}$ також нормально розподілені. Отже, випадкова величина $u = \bar{x} - \bar{y}$ теж нормально розподілена. Дисперсії σ_x^2 і σ_y^2 підлягають χ^2 - розподілу, тоді випадкова величина також підлягає закону χ^2

$$U = (m-1)\sigma_x^2 + (n-1)\sigma_y^2, \quad (5.4)$$

де $\nu = m + n - 2$ - кількість степенів вільності.

Виходячи з вище сказаного, випадкова величина має розподіл, який може описуватись розподілом Стюдента

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{(m-1)\sigma_x^2 + (n-1)\sigma_y^2}{m+n-2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}}. \quad (5.5)$$

Табл. 5.1 - Значення критерію Фішера F для рівня значущості 0.05 ν_1 - число степенів вільності для більшої дисперсії ν_2 - число степенів вільності для меншої дисперсії

ν_2	ν_1								
	12	14	16	20	24	30	40	50	75
10	2.9	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6
11	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5
12	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4
13	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3
14	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2
15	2.5	2.4	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2
16	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1
17	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0
18	2.3	2.3	2.3	2.3	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0
19	2.3	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0
20	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9
21	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9
22	2.2	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9
23	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8
24	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8
25	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
26	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8
27	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
28	2.1	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8
29	2.1	2.1	2.0	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7
30	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.7
32	2.1	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7
34	2.1	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7
36	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7
38	2.0	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6
40	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7	1.6
42	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
44	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
46	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6
48	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
50	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
100	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4
200	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.5	1.7	1.4	1.4
∞	1.8	1.6	1.6	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	1.3

Продовження табл. 5.1
Критерій Фішера F

Рівень значимості $\alpha = 0,01$								
$\begin{matrix} \backslash f_1 \\ f_2 \backslash \end{matrix}$	4	7	10	16	24	40	100	∞
1	5625,0	5928,0	6056,0	6169,0	6234,0	6286,0	6334,0	6366,0
2	99,25	99,34	99,40	99,44	99,46	99,48	99,49	99,50
3	28,71	27,67	27,23	26,83	26,60	26,41	26,23	26,12
4	15,98	14,98	14,54	14,15	13,93	13,74	13,57	13,46
5	11,39	10,45	10,05	9,68	9,47	9,29	9,13	9,02
6	9,15	8,26	7,87	7,52	7,31	7,14	6,99	6,88
7	7,85	7,00	6,62	6,27	6,07	5,90	5,75	5,65
8	7,01	6,19	5,82	5,48	5,28	5,11	4,96	4,86
9	6,42	5,62	5,26	4,92	4,73	4,56	4,41	4,31
10	5,99	5,21	4,85	4,52	4,33	4,17	4,01	3,91
12	5,41	4,65	4,30	3,98	3,78	3,61	3,46	3,36
14	5,03	4,28	3,94	3,62	3,43	3,26	3,11	3,00
16	4,77	4,03	3,69	3,37	3,18	3,01	2,86	2,75
18	4,58	3,85	3,51	3,19	3,00	2,83	2,68	2,57
Рівень значимості $\alpha = 0,05$								
$\begin{matrix} \backslash f_1 \\ f_2 \backslash \end{matrix}$	4	7	10	16	24	40	100	∞
1	225,0	237,0	242,0	246,0	249,0	251,0	253,0	254,0
2	19,25	19,36	19,39	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
3	9,12	8,88	8,78	8,69	8,64	8,60	8,56	8,53
4	6,39	6,09	5,96	5,84	5,77	5,71	5,66	5,63
5	5,19	4,88	4,74	4,60	4,53	4,46	4,40	4,36
6	4,53	4,21	4,06	3,92	3,84	3,77	3,71	3,67
7	4,12	3,79	3,63	3,49	3,41	3,34	3,28	3,23
8	3,84	3,50	3,34	3,20	3,12	3,05	2,98	2,93
9	3,63	3,29	3,13	2,98	2,90	2,82	2,76	2,71
10	3,48	3,14	2,97	2,82	2,74	2,67	2,59	2,54
12	3,26	2,92	2,76	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
14	3,11	2,77	2,60	2,44	2,35	2,27	2,19	2,13
16	3,01	2,66	2,49	2,33	2,24	2,16	2,07	2,01
18	2,93	2,58	2,41	2,25	2,15	2,07	1,98	1,92

Примітка: f_1 – відноситься до більшої дисперсії, f_2 – до меншої.

Гіпотеза H_0 про незначущість різниці між середніми арифметичними значеннями перевіряється шляхом порівняння критерію t з $t_{кр.}(\alpha, \nu)$ за допомогою таблиці.

H_0 приймається, коли $t < t_{кр.}(\alpha, \nu)$.

Статистична гіпотеза про однорідність рядів X і Y приймається тільки тоді, коли справедливі обидві гіпотези H_0 і H_0' .

Практична частина

Вихідні дані: результати співвідношення концентрації хімічних елементів до відповідних ГДК у водах р.Тилігул, вище та нижче селища селища Березівка (Додаток В, табл.В.1-В.6).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані у відповідності до варіанту (Додаток В, табл.В.1-В.6).
2. Розраховуємо дисперсії рядів змінних величин (вище та нижче селища).
3. Далі за формулою (5.1) знаходимо розподіл випадкової величини за законом Фішера-Снедекора.
4. За таблицею 5.1 встановлюємо критичне значення критерія Фішера у відповідності до числа ступенів волі ν_1, ν_2 , які залежать від довжини вихідних рядів.
5. Порівнюємо значення F і $F_{кр.}$ і робимо висновки про значущість або незначущість різниці між середніми, а також приймаємо нульову або альтернативну гіпотезу. Робимо висновок про однорідність двох рядів даних.

Приклад розрахунків.

1) Отримаємо вихідні дані щодо індексу загальної оцінки якості води вище і нижче міста (табл.5.2) і розраховуємо середнє арифметичне вихідних рядів даних.

2) Розраховуємо дисперсії для змінних X і Y , отримуємо:

$$s_x^2 = 572,83;$$

$$s_y^2 = 174,04$$

3) За формулою (5.1) для розрахунку за F критерієм Фішера знаходимо:

$$F_{\text{злост}} = \frac{572,83}{174,04} = 3,29$$

Табл.5.2 – Розрахунок середніх арифметичних для рядів індексів загальної оцінки якості води

№ відбору проб	Індекс загальної оцінки Вище міста	Індекс загальної оцінки Нижче міста
1	90	41
2	29	49
3	39	56
4	79	64
5	88	72
6	53	65
7	34	63
8	40	87
9	75	77
10	79	62
Суми	606	636
Середнє	60,6	63,6

По таблиці 5.1 для F критерію при ступенях свободи в обох випадках рівних $\nu_1, \nu_2 = 10 - 1 = 9$ знаходимо $F_{\text{крит.}} = 3,18 (< 3,29)$, отже, в термінах статистичних гіпотез можна стверджувати, що H_0 (гіпотеза про однорідність) може бути відкинута на рівні 5%, а приймається в цьому випадку гіпотеза H_1 .

Контрольні запитання:

1. Які ряди називаються однорідними?
2. В яких випадках сукупності випадкових величин не будуть належати до однієї генеральної сукупності?
3. Як розрахувати критерій Фішера-Снедекора?
4. У чому полягає нульова і альтернативна гіпотеза (при перевірці на однорідність рядів випадкових величин)?
5. За якими параметрами знаходиться критичне значення критерія Фішера?

Практична робота 6

Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Гнеденко-Корольока

Мета роботи: навчитися перевіряти статистичну гіпотезу про однорідність двох рядів за допомогою критерія Гнеденко-Корольока.

Теоретична частина

Цей метод застосовується у випадку коли

$$N = 2n < 60. \quad (6.1)$$

Вихідний ряд довжиною N розбивається на дві вибірки однакової довжини n . Якщо число елементів непарне, то перший або останній елемент відкидається. Розбивка ряду відбувається посередині.

Для кожної вибірки довжиною n підраховується інтегральна функція розподілу $F(x)$. Для розрахунків кожна з вибірок розміщується у порядку зростання. Емпіричне значення ординат інтегральної функції визначається за формулою

$$d_m = \frac{m'}{n}, \quad (6.2)$$

де m' - порядковий номер члену вибірки, розташованого у порядку зростання.

Аналізуючи графіки інтегральних функцій розподілу, знаходимо для будь-якого x_i найбільше відхилення між значеннями $F(x_i)$, виражене в частках від одиниці і позначимо його d_m . Величина d_m повинна бути додатною

$$0 \leq d_m \leq 1. \quad (6.3)$$

Величина d_m випадкова і показує міру відхилення емпіричних розподілів двох вибірок. Якщо помножити випадкову величину d_m на n , отримаємо закон розподілу Гнеденко-Корольока

$$C_m = d_m \cdot n . \quad (6.4)$$

Використовуючи закон (6.4), можна розрахувати ймовірність потрапляння C_m у критичну область

$$p(C_m > C_{кр.}) = \alpha_c \quad (6.5)$$

Величину α_c визначають за таблицею 6.1.

Якщо $\alpha_c > \alpha$ (α - рівень значущості дорівнює 5%), то нульова гіпотеза приймається.

Практична частина

Вихідні дані: результати співвідношення концентрації хімічних елементів до відповідних ГДК у водах р.Тилігул, вище та нижче селища селища Березівка (Додаток В, табл.В.1-В.6).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані у відповідності до варіанту (табл.В.1-В.6).
2. Розміщуємо вихідні вибірки у порядку зростання та розраховуємо емпіричне значення ординат інтегральної функції за формулою (6.2).
3. Будуємо графіки інтегральних функцій розподілу.
4. Розраховуємо величину C_m за формулою (6.4) і отримаємо закон розподілу Гнеденко-Корольюка.
5. Визначаємо величину α_c за таблицею 6.1 і робимо висновки.

Приклад розрахунків.

- 1) Розміщуємо вихідний ряд концентрації нафтопродуктів (табл.В.4) у р.Тилігул вище та нижче селища у порядку зростання (табл.6.2).
- 2) Розраховуємо величину d_m за формулою (6.2) (табл.6.2).
- 3) Будуємо графіки інтегральних функцій розподілу за даними табл.6.2 (рис.6.1) і знаходимо найбільше відхилення між значеннями $F(x_i)$, виражене в частках від одиниці. Для нашого випадку найбільше відхилення становить 0,5 (в долях від одиниці).

Табл.6.1 – Розподіл функції Гнеденко-Королюка

<i>n</i>	<i>C</i>																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	100	87.3	35.71	7.94	0.79													
6	100	93.07	47.4	14.29	2.60	0.22												
7	100	96.27	57.52	5.30	0.82	0.06												
8	100	98.01	66.01	28.27	8.70	1.87	0.25	0.02										
9	100	98.95	73.01	35.17	12.59	3.36	0.63	0.07	0.00									
10	100	99.45	78.69	41.75	16.78	5.24	1.23	0.21	0.02	0.00								
11	100	99.71	83.26	47.92	21.15	5.77	1.70	0.38	0.06	0.01	0.00							
12	100	99.85	86.9	53.61	25.58	9.95	3.14	0.79	0.15	0.02	0.00							
13	100	99.92	89.78	58.82	29.99	12.65	4.43	1.26	0.29	0.05	0.01	0.00						
14	100	99.96	92.06	63.55	34.33	15.49	5.90	1.88	0.49	0.10	0.02	0.00						
15	100	99.98	93.83	67.81	38.55	18.44	7.55	2.62	0.77	0.18	0.04	0.01	0.00					
16	100	99.99	95.23	71.64	42.63	21.45	9.33	3.50	1.12	0.30	0.07	0.01	0.00					
17	100	99.99	96.31	75.06	46.54	24.50	11.24	4.50	1.56	0.46	0.12	0.02	0.00					
18	100	100	97.15	78.10	50.26	27.54	13.24	5.60	2.07	0.67	0.18	0.04	0.01	0.00				
19	100	100	97.81	80.81	53.79	30.57	15.32	6.81	2.67	0.92	0.28	0.07	0.02	0.00				
20	100	100	98.31	83.20	57.13	33.56	17.45	8.11	3.35	1.23	0.40	0.10	0.03	0.01	0.00			
21	100	100	98.70	85.31	60.28	36.50	19.63	9.48	4.11	1.59	0.55	0.17	0.04	0.01	0.00			
22	100	100	99.01	87.17	63.24	39.37	21.84	10.93	4.93	2.00	0.73	0.24	0.07	0.02	0.00			
23	100	100	99.24	88.80	66.01	42.18	24.06	12.43	5.83	2.47	0.95	0.32	0.10	0.03	0.01	0.00		
24	100	100	99.42	90.24	68.60	44.90	26.28	13.98	6.78	2.99	1.20	0.43	0.14	0.04	0.01	0.00		
25	100	100	99.50	91.50	71.02	47.55	28.50	15.58	7.79	3.56	1.48	0.56	0.19	0.06	0.02	0.00		
26	100	100	99.66	92.60	73.27	50.10	30.71	17.20	8.85	4.18	1.81	0.71	0.26	0.08	0.02	0.01	0.00	
27	100	100	99.74	93.57	75.37	54.56	32.90	18.86	9.96	4.84	2.17	0.98	0.33	0.11	0.03	0.01	0.01	
28	100	100	99.80	94.41	77.32	54.94	35.06	20.53	11.10	5.55	2.56	1.09	0.42	0.15	0.05	0.01	0.01	
29	100	100	99.85	95.14	79.12	57.22	37.20	22.21	12.29	6.30	2.99	1.31	0.53	0.20	0.07	0.02	0.01	0.00
30	100	100	99.88	95.78	80.80	59.41	39.29	23.91	13.50	7.09	3.46	1.56	0.65	0.25	0.09	0.03	0.01	0.00

Табл.6.2 – Розрахунок параметрів емпіричної кривої для нафтопродуктів у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{нафтопрод.} (вище селища)	Сі/ГДК _{нафтопрод.} від мін. до макс. (вище селища)	d_m
1	1990	0,00	0,0	0,1
2	1991	0,13	0,0	0,2
3	1992	2,60	0,0	0,3
4	1993	0,00	0,1	0,4
5	2001	0,00	0,4	0,5
6	2002	0,50	0,4	0,6
7	2003	0,80	0,5	0,7
8	2005	0,53	0,5	0,8
9	2007	0,40	0,8	0,9
10	2008	0,36	2,6	1
№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{нафтопрод.} (нижче селища)	Сі/ГДК _{нафтопрод.} від мін. до макс. (нижче селища)	d_m
1	1990	0,00	0,0	0,1
2	1991	0,00	0,0	0,2
3	1992	0,00	0,0	0,3
4	1993	0,00	0,0	0,4
5	2001	0,00	0,0	0,5
6	2002	0,60	0,6	0,6
7	2003	1,20	0,6	0,7
8	2005	0,60	0,6	0,8
9	2007	0,55	0,6	0,9
10	2008	0,55	1,2	1

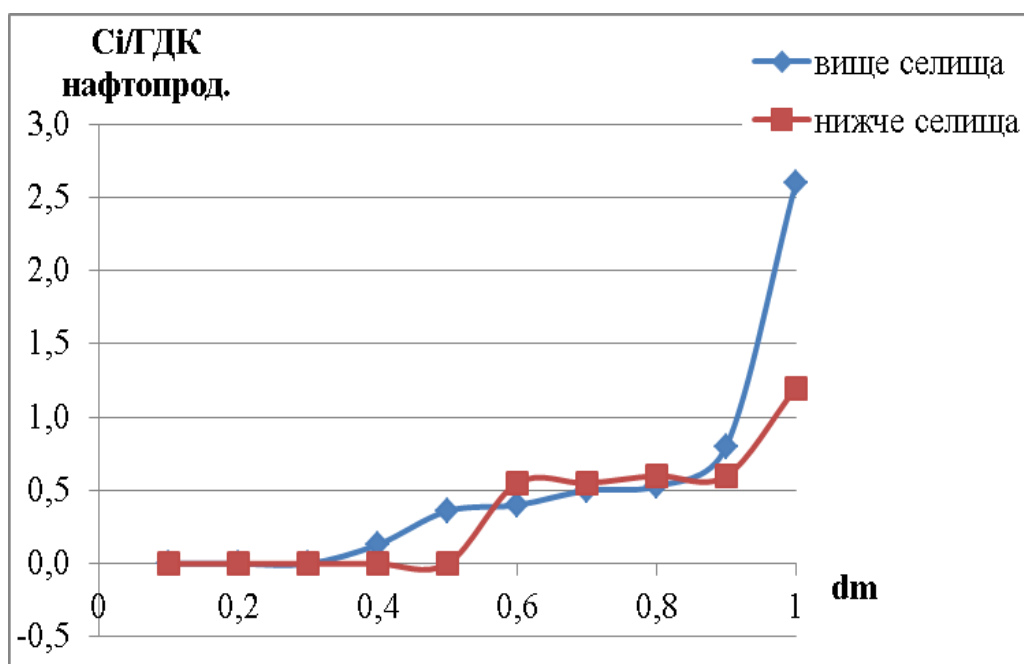


Рис.6.1 - Графіки інтегральних функцій розподілу для гідрохімічних даних вище та нижче міста

4) Розраховуємо закон розподілу Гнеденко-Корольюка C_m за формулою (6.4) для найбільшого відхилення

$$C_m = 0,5 \cdot 10 = 5$$

5) Визначаємо величину α_c за таблицею 6.1:

$$\alpha_c = 16,78, \text{ для } C_m = 5 \text{ та } n = 10.$$

Висновок: так як $\alpha_c > \alpha$ (на рівні значущості 5%) приймаємо нульову гіпотезу про однорідність двох вибірок.

Контрольні запитання:

1. Для яких рядів даних застосовується критерій Гнеденко-Корольюка?
2. Як підраховується інтегральна функція розподілу $F(x)$?
3. У чому полягає закон розподілу Гнеденко-Корольюка?
4. Коли приймається нульова гіпотезу про однорідність двох вибірок?

Практична робота 7

Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох рядів за критерієм Колмогорова-Смірнова

Мета роботи: навчитися перевіряти статистичну гіпотезу про однорідність двох рядів за допомогою критерія Колмогорова-Смірнова.

Теоретична частина

Критерій згоди Колмогорова-Смірнова є більш результативним, ніж критерій χ^2 і може бути використаний для перевірки гіпотези про відповідність емпіричного розподілу будь-якому теоретичному безперервному розподілу $F(x)$ з заздалегідь відомими параметрами (Степнов М.Н., 1985). На відміну від критерію Гнеденко-Корольока критерій Колмогорова-Смірнова не потребує парної кількості елементів, а вихідний ряд не обов'язково розбивати на дві вибірки посередині. *Критерій Колмогорова-Смірнова рекомендовано застосовувати при для статистичних рядів довжиною $N = 2n \geq 60$.*

Умова, яка ставиться при використанні критерію Колмогорова-Смірнова

$$kl/(k+l) = n \geq 15 \quad (7.1)$$

де k та l - довжина вибірок, на які розбито вихідний ряд (розбивають ряд у місті найімовірніших змін характеру величини).

Вихідний ряд розбивається на дві вибірки довжиною k і l , щоб виконувалась умова (7.1).

Для кожної вибірки розраховуються ординати емпіричної інтегральної функції розподілу за формулою (6.2). Обидві інтегральні криві зіставляються і для x_i знаходять найбільше відхилення d_{kl} в частках від одиниці. Величина d_{kl} є мірою розходження між емпіричним розподілом двох вибірок.

Якщо d_{kl} є функцією від випадкової величини $F(x)$, то вона теж є випадковою. Далі визначається статистична величина

$$z = d_{kl} \sqrt{n}, \quad (0 \leq d \leq 1), \quad (7.2)$$

z - величина, яка підлягає розподілу Колмогорова. За таблицею 7.1 перевіряється умова $z \leq z_{кр.}$.

$$p(z < z_{кр.}) = L(z). \quad (7.3)$$

Якщо ймовірність p перевищує рівень значущості $\alpha = 5\%$, тобто

$$p(z < z_{кр.}) > 0.05, \quad (7.4)$$

тоді приймається нульова гіпотеза.

Можна графічно порівняти емпіричний і теоретичний розподіли за критерієм Колгomorphic-Смірнова (рис. 7.1 а) і за критерієм Пірсона (рис. 7.1 б).

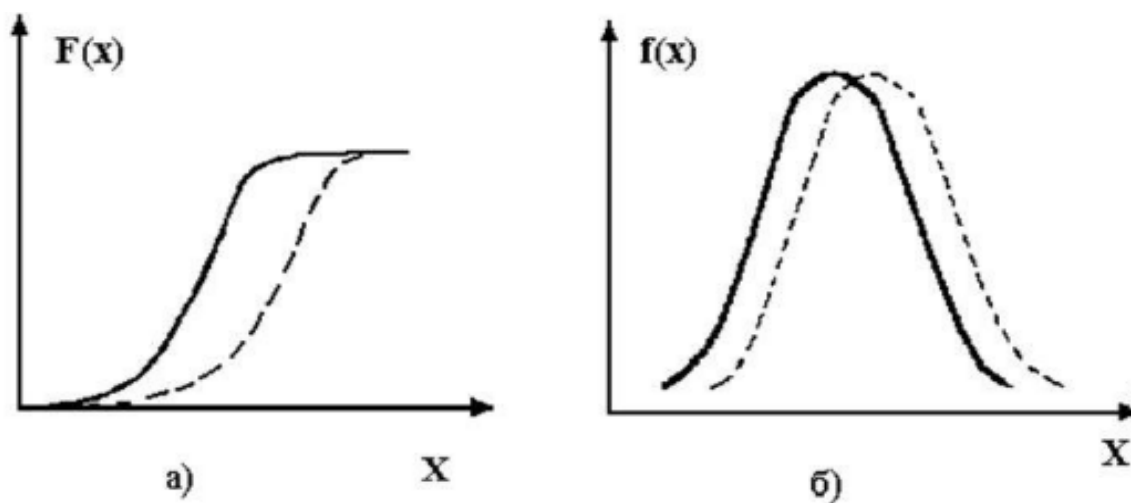


Рис. 7.1 – Емпіричний (пунктирна лінія) і теоретичний (суцільна лінія) розподіли за критеріями Колгomorphic-Смірнова (а) і за критерієм Пірсона (б) (Степнов М.Н., 1985)

Табл.7.1 – Функція розподілу Колгоморова $L(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,2	0,000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001	000004
0,3	0,000009	000021	000046	000091	000171	000303	000511	000826	001285	001929
0,4	0,002808	003972	005476	007377	009730	012589	016005	020022	024682	030017
0,5	0,036055	042814	050306	058534	067497	077183	087577	098656	110394	122760
0,6	0,135718	149229	163255	177752	192677	207987	223637	239582	255780	272188
0,7	0,288765	305471	322265	339114	355981	372833	389640	406372	423002	439505
0,8	0,455858	472039	488028	503809	519365	534682	549745	564545	579071	593315
0,9	0,607269	620928	634285	647337	660081	672515	684836	696445	707941	719126
1,0	0,730000	740566	750825	760781	770436	779794	788860	797637	806130	814343
1,1	0,822282	829951	837356	844502	851395	858040	864443	870610	876546	882258
1,2	0,887750	893030	898102	903973	907648	912134	916435	920557	924506	928288
1,3	0,931908	935371	938682	941847	944871	947758	950514	953144	955651	958041
1,4	0,960318	962487	964551	966515	968383	970159	971846	973448	974969	976413
1,5	0,977782	979080	980310	981475	982579	983623	984610	985544	986427	987261
1,6	0,988048	988791	989492	990154	990777	991364	991917	992438	992928	993389
1,7	0,993823	994230	994612	994972	995309	995625	995922	996200	996460	996704
1,8	0,996932	997146	997346	997533	997707	997870	998023	998165	998297	998421
1,9	0,998536	998644	998744	998837	998924	999004	999079	999149	999213	999273
2,0	0,999329	999381	999429	999473	999514	999553	999588	999620	999651	999679
2,1	0,999705	999728	999750	999771	999790	999807	999823	999837	999851	999863
2,2	0,999874	999886	999895	999904	999912	999920	999927	999933	999939	999944
2,3	0,999949	999954	999958	999961	999965	999968	999971	999974	999976	999978
2,4	0,999980	999982	999984	999985	999987	999988	999989	999990	999991	999992

Практична частина

Вихідні дані: результати співвідношення концентрації хімічних елементів до відповідних ГДК у водах р.Тилігул, вище та нижче селища селища Березівка (Додаток Д, табл.Д.1).

Хід роботи:

1. Отримаємо вихідні дані у відповідності до варіанту (табл.Д.1).
2. Розбиваємо вихідний ряд гідрохімічних даних на дві вибірки довжиною k і l , щоб виконувалась умова (7.1).
3. Розраховуємо ординати емпіричної інтегральної функції розподілу за формулою (6.2), будуємо графіки емпіричних кривих розподілу.
4. Обидві інтегральні криві зіставляємо і для x_i знаходимо найбільше відхилення d_{kl} (в частках від одиниці).
5. Знаходимо величину z , що підлягає розподілу Колмогорова за формулою (7.2), а за таблицею 7.1 встановлюємо $z_{кр.}$.
6. Перевіряємо умову $z \leq z_{кр.}$ або $z \geq z_{кр.}$ і робимо висновок про однорідність двох рядів.

Приклад розрахунків.

1) Як вихідний ряд розглянемо дані моніторингу концентрації хлоридів у р. Тилігул створ смт. Березівка (табл.Д.1).

2) Розбиваємо вихідний ряд гідрохімічних даних на дві вибірки довжиною k і l , щоб виконувалась умова (7.1) (табл.7.2).

Табл.7.2 – Розрахунок ординат емпіричної кривої для ряду даних спостережень за хлоридами у р.Тилігул –сmt.Березівка

№ з/п (з 1 по 28)	Вибірка, k хлориди, мг/л	Вибірка, k хлориди, мг/л від мін. до макс.	$d_m = \frac{m'}{n}$	№ з/п (з 29 по 50)	Вибірка, l хлориди, мг/л	Вибірка, l хлориди, мг/л від мін. до макс.	$d_m = \frac{m'}{n}$
1	190	27,3	0,04	1	233	37,2	0,05
2	230	33,0	0,07	2	172	66,2	0,09
3	147	36,7	0,11	3	265	66,2	0,14
4	33	42,9	0,14	4	233	83	0,18
5	241	72,3	0,18	5	179	110,2	0,23
6	42,9	83,3	0,21	6	191	146,7	0,27
7	83,3	125	0,25	7	176	147,7	0,32
8	167	147	0,29	8	66,2	151	0,36
9	352	167	0,32	9	176	172	0,41
10	213	174	0,36	10	222	176	0,45
11	258	176	0,39	11	37,2	176	0,50
12	176	179	0,43	12	83,0	176	0,55
13	174	183	0,46	13	151,0	179	0,59
14	199	190	0,50	14	110,2	179	0,64
15	183	194	0,54	15	146,7	191	0,68
16	179	199	0,57	16	325,3	191	0,73
17	72,3	213	0,61	17	147,7	222	0,77
18	237	222	0,64	18	319,6	233	0,82
19	232	230	0,68	19	179	233	0,86
20	230	230	0,71	20	191	265	0,91
21	222	232	0,75	21	176	319,6	0,95
22	36,7	237	0,79	22	66,2	325,3	1,00
23	294	241	0,82				
24	294	258	0,86				
25	194	262	0,89				
26	262	294	0,93				
27	27,3	294	0,96				
28	125	352	1,00				

3) Розраховуємо ординати емпіричної інтегральної функції розподілу за формулою (6.2) (табл.7.2), будуємо графіки емпіричних кривих розподілу (рис.7.2).

4) Обидві інтегральні криві зіставляємо і для x_i знаходимо найбільше відхилення d_{kl} (в частках від одиниці). Для даного випадку максимальне розходження складає $222-179=43$, $d_{kl} = 0,64$.

5) Знаходимо величину z за формулою (7.2), а за таблицею 7.1 встановлюємо $z_{кр.}$:

$$z = d_{kl} \sqrt{n} = 0,64 \sqrt{50} = 4,53,$$

$$z_{кр.} = 0,19.$$

6) Порівнюємо z і $z_{кр.}$: $4,53 < 0,19$, робимо висновок про неоднорідність двох рядів.

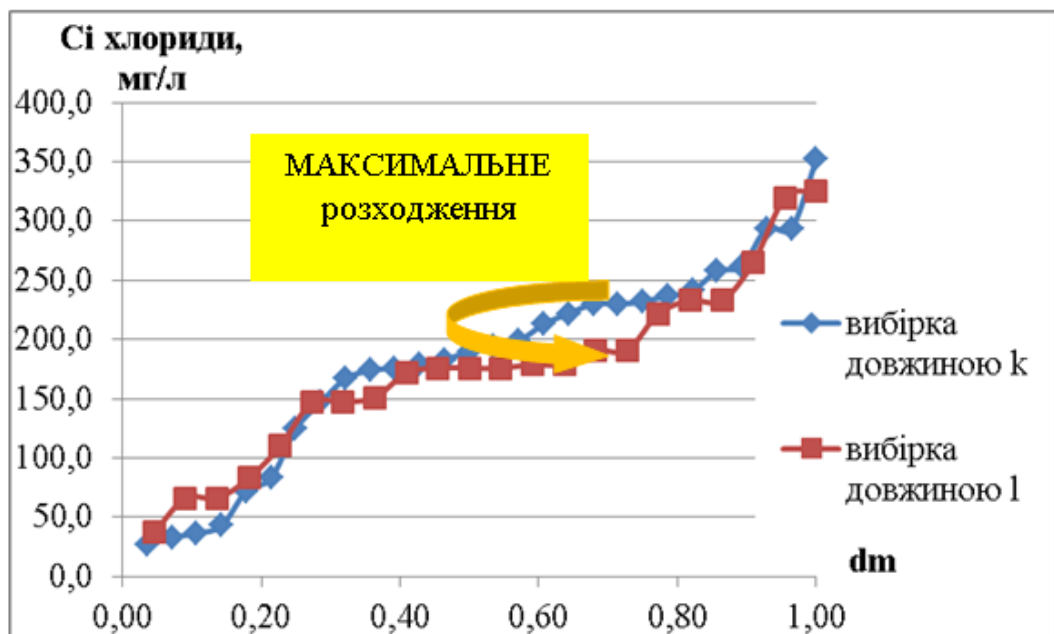


Рис.7.2 - Графіки інтегральних функцій розподілу для вибірок довжиною k (28) і l (22)

Контрольні запитання:

1. За яких умов використовується Критерій згоди Колмогорова-Смірнова?
2. У чому відмінність критеріїв Гнеденко-Королюка та Колмогорова-Смірнова?
3. Який параметр є мірою розходження між емпіричним розподілом двох вибірок?
4. Коли приймається нульова гіпотеза статистичну гіпотезу про однорідність двох рядів при використанні критерія Колмогорова-Смірнова?

ЛІТЕРАТУРА

1. Лобода Н.С. Методи статистичного аналізу у гідрологічних розрахунках і прогнозах: навч. посіб. / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: Екологія. 2010. 184 с.
2. Лобода Н.С., Куза А.М. Методи математичної статистики у гідроекологічних дослідженнях: конспект лекцій / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса, 2017 – 93 с.
3. Лобода Н.С., Овчарук В.А. Гідрологічні розрахунки: конспект лекцій / Дніпропетровськ: Економіка. 2006. 175 с.
4. Лобода Н.С. Расчеты и обобщения характеристик годового стока рек Украины в условиях антропогенного влияния: моногр. / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: Екологія, 2005. 208 с.
5. Лобода Н.С., Гопченко Є.Д. Стохастичні моделі у гідрологічних розрахунках: навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: Екологія, 2006. 200 с.
6. Сніжко С. І. Оцінка та прогнозування якості природних вод. Підручник. - К.: Ніка-Центр, 2001. - 264 с.
7. Методика екологічної оцінки якості поверхневих вод за відповідними категоріями / Романенко В.Д., Жукинський В.М., Оксінок О.П. та ін. – К.: Символ-Т, 1998. - 28 с.
8. Шкільний Є.П., Серга Е.М., Галич Є.А. Багатовимірний статистичний аналіз гідрометеорологічної інформації: навчальний посібник / Одеса, «ТЕС» - 2016, - 161 с.
9. Шкільний Є.П., Лоева І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації / Одес. держ. еколог. ун-т. Одеса: 1999. 600с.
10. Хільчевський В.К., Курило С.М. Аналіз багаторічної трансформації хімічного складу річкових вод України // Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія / за ред. докт. геогр. наук В.К. Хільчевського. Київ. нац. ун-т ім. Т.Шевченка. Київ, 2014. Т.2 (33). С. 17-28.

ДОДАТОК

Додаток А

Табл.А.1 - Значення індексу забруднення води (ІЗВ) розрахованого для створу р.Десна - м. Новгород-Сіверський

Варіант 1

№ з/п	Роки	ІЗВ
1	1989	0,45
2	1990	0,30
3	1991	0,29
4	1992	0,17
5	1993	0,50
6	1994	2,02
7	1995	0,75
8	1997	0,75
9	1998	0,91
10	1999	0,24
11	2000	0,92
12	2001	0,79
13	2003	0,20
14	2004	0,12
15	2005	0,14
16	2007	0,35

Табл.А.2 - Значення індексу забруднення води (ІЗВ) розрахованого для створу р.Десна - м. Летки

Варіант 2

№ з/п	Роки	ІЗВ
1	1990	0,29
2	1991	0,20
3	1992	0,20
4	1993	0,96
5	1994	2,58
6	1995	2,08
7	1996	1,08
8	1997	0,43
9	1998	0,07
10	1999	0,90
11	2000	1,00
12	2001	0,35
13	2003	0,37
14	2004	0,26
15	2006	0,26
16	2007	0,71

Табл.А.3 - Значення показника комбінаторного індексу забруднення води
для створу р.В.Куяльник - м. Северинівка

Варіант 3

№ з/п	Роки	ПКІЗ
1	1990	3,2
2	1991	2,6
3	1992	2,1
4	1993	2,4
5	1999	1,2
6	2000	3,8
7	2001	5,3
8	2002	1,5
9	2003	2,3
10	2004	4,3
11	2005	3,0
12	2006	3,7
13	2007	3,2
14	2008	2,5
15	2009	3,5
16	2010	4,0
17	2012	3,4

Табл.А.4 - Значення показника індексу забруднення компонентами
сольового складу осереднені для р. Рось

Варіант 4

№ з/п	Роки	I ₁
1	1994	1,67
2	1995	1,67
3	1996	1,67
4	1997	2,00
5	1998	1,67
6	1999	2,00
7	2000	1,33
8	2001	2,00
9	2002	2,00
10	2003	1,67
11	2004	2,00
12	2005	1,33
13	2006	1,33
14	2007	1,67
15	2008	1,33
16	2009	1,67
17	2010	1,67
18	2011	1,67

Табл.А.5 - Значення показника індексу забруднення компонентами
сольового складу осереднені для р. Сула

Варіант 5

№ з/п	Роки	I ₁
1	1990	3,00
2	1991	3,66
3	1992	4,67
4	1993	3,00
5	1994	2,67
6	1995	3,00
7	1996	4,00
8	1997	4,00
9	1998	3,33
10	1999	3,33
11	2000	2,67
12	2001	3,33
13	2002	2,67
14	2003	3,00
15	2004	3,00
16	2005	3,33
17	2006	3,33
18	2007	2,67

Табл.А.6 - Значення показника індексу забруднення компонентами
сольового складу осереднені для р. Ольшанка

Варіант 6

№ з/п	Роки	I ₁
1	1994	3,33
2	1995	2,33
3	1996	1,67
4	1997	2,00
5	1998	2,00
6	1999	2,00
7	2000	1,67
8	2001	2,00
9	2002	2,00
10	2003	2,00
11	2004	2,00
12	2005	2,33
13	2006	2,33
14	2007	2,67
15	2008	2,67
16	2009	2,33
17	2010	2,33

Табл.А.7 - Значення індексу еколого-санітарних показників
осереднені для р. Рось
Варіант 7

№ з/п	Роки	I ₂
1	1993	3,25
2	1994	3,82
3	1995	3,50
4	1996	3,80
5	1997	3,00
6	1998	2,90
7	1999	3,36
8	2000	3,45
9	2001	3,55
10	2002	3,09
11	2003	3,18
12	2004	3,36
13	2005	3,30
14	2006	3,40
15	2007	3,33
16	2008	3,75
17	2009	3,50
18	2010	3,75
19	2011	3,50

Табл.А.8 - Значення індексу еколого-санітарних показників
осереднені для р. Ольшанка
Варіант 8

№ з/п	Роки	I ₂
1	1990	2,82
2	1991	2,91
3	1992	3,72
4	1993	3,25
5	1994	4,12
6	1995	4,00
7	1996	5,25
8	1997	3,66
9	1998	4,14
10	1999	2,82
11	2000	3,27
12	2001	3,73
13	2002	3,64
14	2003	4,00
15	2004	3,09
16	2005	3,73
17	2006	3,73
18	2007	3,82
19	2008	4,00
20	2009	3,68

Табл.А.9 - Значення індексу еколого-санітарних показників
осереднені для р. Сула
Варіант 9

№ з/п	Роки	I ₂
1	1995	3,45
2	1996	3,50
3	1997	3,20
4	1998	3,20
5	1999	2,90
6	2000	2,70
7	2001	3,45
8	2002	3,18
9	2003	3,30
10	2004	3,11
11	2005	3,33
12	2006	3,22
13	2007	3,27
14	2008	3,45
15	2009	3,33
16	2010	3,00
17	2011	3,45

Табл.А.10 - Значення індексу специфічних показників токсичної
і радіаційної дії осереднені для р. Рось
Варіант 10

№ з/п	Роки	I ₃
1	1990	2,86
2	1991	3,00
3	1992	3,71
4	1993	4,43
5	1994	5,00
6	1995	4,50
7	1996	4,50
8	1997	4,14
9	1998	4,25
10	1999	3,71
11	2000	3,57
12	2001	3,57
13	2002	3,57
14	2003	2,14
15	2004	3,00
16	2005	2,88
17	2006	3,12
18	2007	2,86
19	2008	3,00

Додаток Б

Табл.Б.1 – Середньорічні витрати води та середньорічні суми іонів у р.Вятка - смт Аркуль, період 1965-2014 роки

№ з/п	Варіант 1			Варіант 2			Варіант 3		
	Роки	Q, м³/с	ΣU, мг/л	Роки	Q, м³/с	ΣU, мг/л	Роки	Q, м³/с	ΣU, мг/л
1	1965	192	970	1975	192	670	1985	192	770
2	1966	236	891	1976	376	791	1986	376	841
3	1967	653	1283	1977	87,0	983	1987	87,0	1073
4	1968	95,0	839	1978	214	539	1988	199	689
5	1969	525	924	1979	220	624	1989	206	864
6	1970	850	1005	1980	219	903	1990	202	955
7	1971	212	1092	1981	213	792	1991	187	942
8	1972	424	978	1982	202	678	1992	169	963
9	1973	700	891	1983	187	591	1993	158	791
10	1974	221	713	1984	214	413	1994	191	563
№ з/п	Варіант 4						Варіант 5		
	Роки	Q,	ΣU,				Роки	Q,	ΣU,
1	1995	517	985				2005	373	1020
2	1996	532	906				2006	362	941
3	1997	513	1298				2007	368	1333
4	1998	513	854				2008	398	889
5	1999	524	939				2009	460	974
6	2000	597	1020				2010	508	1055
7	2001	550	1107				2011	479	1142
8	2002	509	993				2012	438	1028
9	2003	850	906				2013	367	941
10	2004	212	728				2014	424	763

Додаток В

Табл.В.1 - Результати спостережень за азотом амонійним
у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

Варіант 1

№ з/П	Роки	Сі/ГДК _{азот амон.} (вище селища)
1	1990	5,81
2	1991	5,02
3	1992	1,45
4	1993	8,66
5	2001	0,05
6	2002	0,09
7	2003	0,51
8	2005	0,19
9	2007	0,24
10	2008	0,30
№ з/П	Роки	Сі/ГДК _{азот амон.} (нижче селища)
1	1990	5,65
2	1991	1,23
3	1992	2,26
4	1993	8,94
5	2001	0,08
6	2002	0,28
7	2003	0,08
8	2005	0,04
9	2007	0,28
10	2008	0,71

Табл.В.2 - Результати спостережень за азотом нітритним
у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

Варіант 2

№ з/п	Роки	Сі/ГДК азот нітрит. (вище селища)
1	1990	1,28
2	1991	0,55
3	1992	0,00
4	1993	0,95
5	2001	0,35
6	2002	0,00
7	2003	0,00
8	2005	0,00
9	2007	0,00
10	2008	0,25
№ з/п	Роки	Сі/ГДК азот нітрит. (нижче селища)
1	1990	0,83
2	1991	0,33
3	1992	1,02
4	1993	0,98
5	2001	0,23
6	2002	0,45
7	2003	0,00
8	2005	0,21
9	2007	0,00
10	2008	0,41

Табл.В.3 - Результати спостережень за хромом (6-ти валентним)
у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

Варіант 3

№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{хром VI.} (вище селища)
1	1990	7,44
2	1991	2,70
3	1992	7,00
4	1993	10,30
5	2001	6,00
6	2002	7,25
7	2003	3,60
8	2005	4,67
9	2007	3,15
10	2008	3,00
№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{хром VI.} (нижче селища)
1	1990	7,00
2	1991	7,90
3	1992	3,67
4	1993	15,70
5	2001	5,30
6	2002	6,35
7	2003	2,50
8	2005	6,12
9	2007	3,23
10	2008	5,68

Табл.В.4 - Результати спостережень за нафтопродуктами
у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

Варіант 4

№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{нафтопрод.} (вище селища)
1	1990	0,00
2	1991	0,13
3	1992	2,60
4	1993	0,00
5	2001	0,00
6	2002	0,50
7	2003	0,80
8	2005	0,53
9	2007	0,40
10	2008	0,36
№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{нафтопрод.} (нижче селища)
1	1990	0,00
2	1991	0,00
3	1992	0,00
4	1993	0,00
5	2001	0,00
6	2002	0,60
7	2003	1,20
8	2005	0,60
9	2007	0,55
10	2008	0,55

Табл.В.5 - Результати спостережень за біохімічним споживанням
кисню у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

Варіант 5

№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{БСК5} (вище селища)
1	1990	2,78
2	1991	4,03
3	1992	1,18
4	1993	1,13
5	2001	1,13
6	2002	1,17
7	2003	1,12
8	2005	1,07
9	2007	1,08
10	2008	0,99
№ з/п	Роки	Сі/ГДК _{БСК5} (нижче селища)
1	1990	2,85
2	1991	4,11
3	1992	1,17
4	1993	1,14
5	2001	1,13
6	2002	1,13
7	2003	1,16
8	2005	1,07
9	2007	1,09
10	2008	0,99

Табл.В.6 - Результати спостережень за розчиненим киснем
у воді р.Тилігул-сmt.Березівка

Варіант 6

№ з/п	Роки	ГДК O ₂ /Cі. (вище селища)
1	1990	2,78
2	1991	4,03
3	1992	1,18
4	1993	1,13
5	2001	1,13
6	2002	1,17
7	2003	1,12
8	2005	1,07
9	2007	1,08
10	2008	0,99
№ з/п	Роки	ГДК O ₂ /Cі. (нижче селища)
1	1990	2,85
2	1991	4,11
3	1992	1,17
4	1993	1,14
5	2001	1,13
6	2002	1,13
7	2003	1,16
8	2005	1,07
9	2007	1,09
10	2008	0,99

Додаток Г

Табл.Г.1 – Значення критерію Стюдента у відповідності до значення α і об'єму вибірки N (число ступенів свободи ν_1)

ν	Двостороння критична область, α							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,30	636,61
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,20	2,68	3,05	3,43	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,69	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,51	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,48	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,90	3,09	3,47	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,44	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,04	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65

Додаток Д

Табл.Д.1 – Ряди даних спостережень за концентраціями хімічних елементів р.Тилігул – смт Березівка, період 1965-2014 роки

Номер варіанту		1	2	3	4	5	6	7	8
№ з/п	Роки	Магній, мг/л	Хлориди, мг/л	Хром (с вал,+6), мг/л	Цинк, мг/л	Амоній, мг/л	Мідь, мг/л	Сульфат и, SO ₄ ²⁻ , мг/л	Нітрати, мг/л
1	1965	99,9	190	0,012	0,002	0,90	0,004	271	0,84
2	1966	65,9	230	0,018	0,003	1,76	0,002	58	0,74
3	1967	24,3	147	0,009	0,002	0,26	0,002	62	0,33
4	1968	117	33	0,015	0,001	0,28	0,003	63	0,15
5	1969	114	241	0,014	0,002	0,80	0,003	68	0,52
6	1970	107	42,9	0,009	0,027	1,04	0,005	220	1,92
7	1971	112	83,3	0,006	0,021	3,70	0,003	124	1,66
8	1972	146	167	0,004	0,017	2,95	0,010	246	0,21
9	1973	92,4	352	0,004	0,015	0,25	0,002	220	1,39
10	1974	102	213	0,004	0,014	3,38	0,002	243	0,30
11	1975	112	258	0,004	0,017	2,26	0,006	97	1,10
12	1976	82,5	176	0,004	0,015	0,34	0,005	170	1,64
13	1977	71,9	174	0,005	0,018	1,53	0,005	71	1,25
14	1978	59,3	199	0,007	0,006	4,00	0,007	209	1,45
15	1979	88,8	183	0,013	0,005	1,96	0,004	140	0,06
16	1980	23,3	179	0,012	0,004	0,50	0,003	196	0,37
17	1981	99,4	72,3	0,007	0,008	0,80	0,003	289	0,89
18	1982	74,0	237	0,009	0,003	0,63	0,004	60	0,44
19	1983	46,4	232	0,009	0,005	0,64	0,005	400	0,01
20	1984	69,5	230	0,009	0,004	0,76	0,005	236	0,00
21	1985	23,4	222	0,009	0,005	1,37	0,004	82	0,02
22	1986	127	36,7	0,013	0,004	8,00	0,002	54	0,01
23	1987	110	294	0,009	0,005	3,38	0,004	68	0,02
24	1988	90,2	294	0,016	0,008	0,02	0,005	54	0,01
25	1989	99,7	194	0,000	0,010	0,01	0,007	121	0,02
26	1990	122	262	0,010	0,007	0,02	0,005	113	0,19
27	1991	112	27,3	0,012	0,009	0,05	0,005	65	0,76
28	1992	97,5	125	0,005	0,007	0,04	0,005	238	0,48
29	1993	99,7	233	0,008	0,005	0,57	0,003	116	0,22
30	1994	93,0	172	0,007	0,007	0,01	0,004	102	0,25
31	1995	117	265	0,004	0,012	0,02	0,006	208	0,47
32	1996	97,2	233	0,007	0,008	0,20	0,005	166	0,42
33	1997	87,7	179	0,006	0,010	0,04	0,007	826	0,07
34	1998	87,5	191	0,002	0,006	0,01	0,003	36,8	0,00
35	1999	82,6	176	0,000	0,003	0,12	0,002	396	0,00

Продовження таблиці Д.1

Номер варіанту		1	2	3	4	5	6	7	8
№ з/п	Роки	Магній, мг/л	Хлориди, мг/л	Хром (с вал,+б), мг/л	Цинк, мг/л	Амоній, мг/л	Мідь, мг/л	Сульфати, SO ₄ ²⁻ ,мг/л	Нітрати, мг/л
36	2000	12,0	66,2	0,003	0,006	0,04	0,004	338	0,19
37	2001	97,2	176	0,000	0,004	0,05	0,001	340	0,09
38	2002	89,9	222	0,010	0,004	0,02	0,001	360	0,00
39	2003	12,0	37,2	0,011	0,003	0,13	0,003	108	0,01
40	2004	204,6	83,0	0,007	0,003	0,04	0,002	395	0,04
41	2005	58,8	151,0	0,000	0,000	0,06	0,002	334	0,04
42	2006	121,7	110,2	0,013	0,010	0,04	0,001	343	0,51
43	2007	72,9	146,7	0,018	0,000	0,43	0,000	333	0,04
44	2008	61,8	325,3	0,010	0,003	0,01	0,001	231	0,12
45	2009	72,5	147,7	0,006	0,015	0,12	0,010	191	0,02
46	2010	61,8	319,6	0,000	0,015	0,10	0,007	37	0,05
47	2011	87,7	179	0,006	0,010	0,04	0,007	826	0,07
48	2012	87,5	191	0,002	0,006	0,01	0,003	36,8	0,00
49	2013	82,6	176	0,000	0,003	0,12	0,002	396	0,00
50	2014	12,0	66,2	0,003	0,006	0,04	0,004	338	0,19

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
по проведенню практичних занять
з дисципліни
«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ У
ГІДРОЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ»

для студентів 3 курсу
напрямом підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього
середовища та збалансоване природокористування»
за спеціалізація «Гідроекологія».

Підп. до друку
Умов. друк арк..

Формат
Тираж

Папір
Зак. №

Надруковано з готового оригінал - макету

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, Львівська, 15
