

**Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю.,
Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкар'юв П.Г.**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА II

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю.,
Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА II
Конспект лекцій**

Одеса – 2014

ББК 22.11

В 93

УДК 51

Друкується за рішенням вченої ради

Одеського державного екологічного університету

(протокол №__ від_____ р.)

Вища математика: Конспект лекцій/ О.В. Глушков, Ю.Г. Чернякова, Л.А. Вітавецька, О.Ю. Хецеліус. Ю.В. Дубровська, А.В. Свінарченко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. - Одеса: Екологія, 2011- 290 с.

Викладені питання теорії функцій багатьох змінних, диференціальних рівнянь, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля, числових та функціональних рядів.

Для всіх напрямків підготовки.

Навчальне видання

**Глушков О.В. д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г. к.ф.-м.н., доц,
Вітавецька Л.А. к.ф.-м.н., доц, Хецеліус О.Ю. д.ф.-м.н., проф,
Дубровська Ю.В. к.ф.-м.н., доц, Свінарченко А.А., д.ф.- м.н., доц.,
Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц., Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н., доц.**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА II

Конспект лекцій

порядку.....	76
2.1.2 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	77
2.1.3 Однорідні диференціальні рівняння.....	81
2.1.4 Лінійні рівняння.....	84
2.1.5 Рівняння Бернуллі.....	88
2.1.6 Рівняння у повних диференціалах.....	90
2.1.7 Інтегруючий множник.....	93
2.2 Диференціальні рівняння другого порядку.....	98
2.2.1 Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку.....	99
2.2.2 Лінійні диференціальні рівняння.....	103
2.2.2.1 Властивості лінійних однорідних рівнянь.....	104
2.2.2.2 ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами.....	112
2.2.2.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку (ЛНДР-2).....	116
2.2.2.4 Метод варіації довільних сталих Лагранжа.....	118
2.2.2.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	121
2.3 Системи звичайних диференціальних рівнянь.....	127
2.3.1 Системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.....	130
2.4 Якісна теорія диференціальних рівнянь.....	137
2.4.1 Теорія стійкості по Ляпунову.....	137
2.4.2 Автономні системи.....	140
2.4.3 Фазова площина і фазовий портрет.....	143
Розділ 3 КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.....	147
3.1 Подвійні інтеграли.....	147
3.1.1 Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.....	147

Передмова.....	8
Розділ 1 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	10
1.1 Частинні похідні.....	10
1.1.1 Означення частинних похідних.....	10
1.1.2 Обчислення частинних похідних від функції $u = f(x, y, z)$	11
1.1.3 Геометричне тлумачення частинних похідних функції $z = f(x, y)$	12
1.2 Частинні похідні вищих порядків. Теорема Шварца.....	14
1.3 Частинний та повний диференціали функції багатьох змінних. Диференційовані функції.....	19
1.4 Диференціювання складної функції багатьох змінних.....	27
1.5 Інваріантність форми першого диференціала функції багатьох змінних.....	30
1.6 Застосування повного диференціала функції багатьох змінних до обчислення значень функції та похибок.....	31
1.7 Диференціали вищих порядків функції однієї та багатьох змінних.....	36
1.8 Векторне та скалярне поля.....	41
1.9 Похідна за напрямком. Градієнт.....	42
1.10 Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі.....	45
1.11 Формула Тейлора для функції багатьох змінних.....	52
1.12 Необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних.....	58
1.13 Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних.....	60
1.14 Умовний екстремум.....	65
Розділ 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	73
2.1 Диференціальні рівняння першого порядку.....	75
2.1.1 Геометричний зміст диференціального рівняння першого	

3.1.2	Поняття та існування подвійного інтеграла. Його геометричний та механічний зміст.....	149
3.1.3	Властивості подвійного інтеграла.....	152
3.1.4	Обчислення подвійного інтеграла.....	154
3.1.5	Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.....	162
3.1.6	Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Площа плоскої фігури.....	167
3.1.7	Застосування подвійних інтегралів до задач механіки.....	169
3.2	Потрійні інтеграли.....	170
3.2.1	Поняття і існування потрійного інтеграла, його геометричний і механічний зміст.....	170
3.2.2	Властивості потрійного інтеграла.....	173
3.2.3	Обчислення потрійного інтеграла.....	175
3.2.4	Заміна змінних у потрійному інтегралі.....	177
3.2.5	Застосування потрійних інтегралів до задач геометрії.....	180
3.2.6	Застосування потрійних інтегралів до задач механіки.....	180
3.3	Криволінійні інтеграли.....	182
3.3.1	Поняття криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги). Його геометричний і фізичний зміст.....	182
3.3.2	Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.....	186
3.3.3	Застосування криволінійних інтегралів першого роду до задач геометрії.....	188
3.3.4	Застосування криволінійних інтегралів першого роду до задач механіки.....	189
3.3.5	Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах).....	191
3.3.6	Обчислення криволінійних інтегралів другого роду.....	193
3.3.7	Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.....	199

3.3.8 Механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду.	
Робота змінної сили.....	200
3.3.9 Формула Гріна.....	201
3.3.10 Застосування криволінійних інтегралів другого роду до задач геометрії та механіки.....	202
3.3.11 Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.....	202
3.3.12 Інтегрування повних диференціалів.....	204
РОЗДІЛ 4 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.....	207
4.1 Скалярні та векторні поля	207
4.1.1 Скалярне поле.....	208
4.1.2 Векторне поле.....	209
4.2 Поверхневий інтеграл. Потік векторного поля.....	212
4.3 Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля.....	218
4.4 Потенційне векторне поле.....	221
4.5 Ротор векторного поля. Теорема Стокса.....	225
4.6 Розбіжність поля. Формула Остроградського.....	231
4.7 Оператор Гамільтона та його застосування.....	237
4.7.1 Оператор Гамільтона у скалярному полі	237
4.7.2 Оператор Гамільтона у векторному полі	239
Розділ 5 РЯДИ.....	242
5.1 Числові ряди.....	242
5.1.1 Ряди з додатними членами.....	247
5.1.1.1 Теореми порівняння знакододатних рядів.....	248
5.1.1.2 Інші достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.....	251
5.1.2 Знакозмінні ряди.....	259
5.1.2.1 Знакопереміжні ряди.....	260

5.2 Функціональні ряди.....	263
5.2.1 Степеневі ряди.....	269
5.2.1.1 Область збіжності степеневого ряду.....	270
5.2.1.2 Обчислення радіусу збіжності степеневого ряду.....	272
5.2.1.3 Властивості степеневих рядів.....	276
5.2.1.4 Розкладання функцій у степеневі ряди.....	277
5.2.1.5 Розкладання основних елементарних функцій у степеневі ряди...	278
5.2.1.6 Застосування степеневих рядів.....	281
5.2.2 Тригонометричні ряди.....	287
5.2.2.1 Ряди Фур'є та коефіцієнти Фур'є періодичної функції з періодом 2π	287
5.2.2.2 Розкладання функцій в тригонометричні ряди.....	289
Список рекомендованої літератури.....	290

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Вища математика” є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків гідрологія, метеорологія, екологія, комп’ютерні науки. Вона відображує нові вимоги, що пред’являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета дисципліни – розгляд проблем векторної алгебри, матричного числення, аналітичної геометрії, засвоєння основних методів розв’язання систем лінійних рівнянь, вивчення математичного аналізу, до складу якого входять диференціальне числення, інтегральне числення, теорія функцій дійсної змінної, теорія функцій комплексної змінної, ряди, теорія диференціальних рівнянь, аналіз отриманих результатів.

В результаті вивчення даної дисципліни студент повинен знати математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою дисципліни, вміти влучно і стисло виражати математичну думку під час розв’язання конкретних задач, самостійно розв’язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати.

Отримані у процесі вивчення вищої математики знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

У другій частині конспекту лекцій розглянуті питання функцій

багатьох змінних, диференціальних рівнянь, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля (для всіх напрямків підготовки, крім напрямку «Комп'ютерні науки»), теорії рядів.

У природі та техніці зустрічаються зміни, рухи, які є першою ознакою того, що ми називаємо явищем, процесом. Закони явищ природи зазвичай описуються функціями. Звідси об'єктивна важливість математичного аналізу як засобу вивчення функцій .

Математичний аналіз у широкому розумінні цього терміна охоплює дуже велику частину математики. До нього входять диференціальне числення, інтегральне числення, теорія функцій дійсної змінної, теорія функцій комплексної змінної, ряди, наближення функцій, теорія диференціальних рівнянь і деякі інші математичні науки.

1 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.1 Частинні похідні

1.1.1 Означення частинних похідних

Нехай у деякій області простору задано функцію n незалежних змінних: $U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Візьмемо довільну точку в області визначення функції багатьох змінних $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Зафіксуємо x_i і надамо аргументу x_i довільного приросту Δx_i , залишаючи значення інших $(n-1)$ змінних сталими. Дістанемо нову точку $P_1(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$. Приріст Δx_i спричинить відповідний приріст функції, який називається частинним:

$$\Delta U_i = \Delta_{x_i} U = f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Поділимо частинний приріст ΔU_i на приріст Δx_i . Відношення $\frac{\Delta U_i}{\Delta x_i}$ виражає середню швидкість зміни функції $U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i на ділянці від точки $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ до точки $P_1(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$. Перейдемо до границі у відношенні $\frac{\Delta U_i}{\Delta x_i}$, спрямовуючи Δx_i до 0.

Частинною похідною першого порядку по x_i в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ називається границя відношення частинного приросту функції Δu_i до приросту аргументу Δx_i при $\Delta x_i \rightarrow 0$, якщо ця границя існує і скінченна. Записують це так:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Для частинних похідних прийняте позначення:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}, U'_{x_i}, \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}, f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial f(P)}{\partial x_i}.$$

Частинна похідна $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ характеризує швидкість зміни функції

$U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в напрямі осі Ox_i . Для функції n змінних за цим принципом можна побудувати n частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}.$$

Для функції двох змінних $z=f(x, y)$ можна побудувати дві частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.$$

1.1.2 Обчислення частинних похідних функції $U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Оскільки частинна похідна від функції $U=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є, за означенням, похідною за однією змінною при сталих значеннях інших

змінних, то правила відшукування звичайних похідних цілком переносяться на частинні похідні. Щоб знайти $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, треба у думці зафіксувати всі інші $n-1$ змінні і диференціювати функцію $U=f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{(i-1)0}, x_i, x_{(i+1)0}, \dots, x_{n0})$ за x_i як функцію однієї змінної x_i .

Наприклад: функція $u=5xy$ має дві незалежні змінні. Запишемо дві частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(x + \Delta x)y - 5xy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5y\Delta x}{\Delta x} = 5y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{5x(y + \Delta y) - 5xy}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{5x\Delta y}{\Delta y} = 5x$$

1.1.3 Геометричне тлумачення частинних похідних

Нагадаємо, що похідна функції однієї змінної в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною в точці $M_0(x_0, y_0)$ і променем, який збігається з додатним напрямом осі Ox (рис. 1.1).

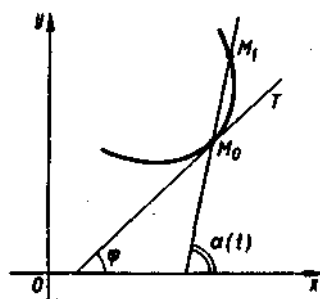


Рис. 1.1

Із означення частинної похідної випливає, що при відшуванні частинної похідної функції багатьох змінних останню розглядають, як функцію однієї змінної при фіксованих інших змінних. Тому геометричне тлумачення частинних похідних функції багатьох змінних аналогічне тлумаченню похідної функції однієї змінної. Функція $z=f(x,y)$ геометрично являє собою деяку поверхню (рис. 1.2).

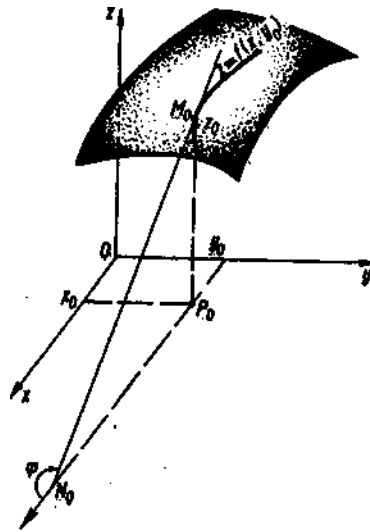


Рис. 1.2

Розглянемо в області визначення функції $z=f(x,y)$ фіксовану точку $P_0(x_0, y_0)$. Цій точці на поверхні $z=f(x,y)$ відповідає точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Щоб знайти $f'_x(x_0, y_0)$, треба продиференціювати функцію $z=f(x, y_0)$. Щоб побудувати криву $z=f(x, y_0)$, проведемо через точку P_0 площину $y=y_0$, перпендикулярну до площини xOy . Дістанемо площину $M_0P_0N_0$. У перерізі поверхні $z=f(x, y)$ цією площиною лежить крива $z=f(x, y_0)$, яка проходить через точку M_0 . Проведемо дотичну M_0N_0 до кривої в точці M_0 , позначивши через φ кут, утворений дотичною з додатнім напрямом лінії, паралельної осі Ox . Тоді $f'_x(x_0, y_0)=tg\varphi$.

Аналогічно $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$, де β - кут, утворений додатнім напрямом лінії, паралельної осі Oy , і дотичною, проведеною через точку M_0 до кривої, утвореної перерізом поверхні $z=f(x, y)$ площиною $x=x_0$. (Рис 1.3)

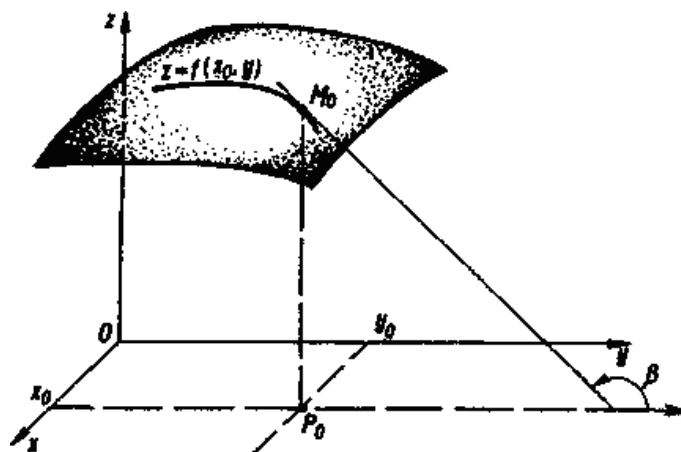


Рис. 1.3

1.2 Частинні похідні вищих порядків. Теорема Шварца.

Частинні похідні вищих порядків знаходять аналогічно звичайним похідним вищих порядків. Припустимо, що функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$ має усі перші частинні похідні за своїми змінними. При цьому результатом диференціювання є функції

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n); i = 1, n \quad (1.1)$$

Нехай функції $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мають, у свою чергу, перші частинні похідні за тими самими змінними, тобто

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n); (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

Використовуючи формулу (1.1), дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} = \psi_{ik}(X). \quad (1.2)$$

Частинні похідні

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}$$

називаються *другими частинними похідними*, або частинними похідними другого порядку. Для других частинних похідних від функції $U = f(X)$ прийнято також ще й такі позначення:

$$U''_{x_i x_k}; U''_{x_k x_i}; f''_{x_i x_k}; f''_{x_k x_i}$$

Похідні $U''_{x_i x_k}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, $i \neq k$ називаються *мішаними*, їх дістають диференціюванням функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, спочатку по x_k , а потім по x_i . Функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може мати n^2 похідних другого порядку.

Так, функція $U = f(x, y, z)$ має дев'ять других похідних. Якщо функції (1.2) мають похідні, то дістанемо похідні третього порядку

$$\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} \right) = \frac{\partial^3 U}{\partial x_{\mu} \partial x_k \partial x_i} = U'''_{x_{\mu} x_k x_i}$$

При цьому мішаними будуть всі похідні, для яких μ, k, i не рівні між собою одночасно. Так, для функції трьох змінних можна дістати 27 похідних третього порядку, серед яких мішаними будуть, наприклад,

$$U'''_{xyy}; U'''_{yzz}; U'''_{xyz}; U'''_{zxx}$$

Виявляється, що за певних умов, які накладаються на функцію $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, мішані одного порядку рівні між собою. Сформулюємо без доведення таку теорему.

Теорема Шварца. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена разом із своїми частинними похідними

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n$$

в деякому околі точки $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, причому

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}; i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$$

неперервні в точці P_0 , то значення мішаних похідних другого порядку за різними змінними не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}; i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$$

Теорема справджується і для мішаних похідних більш високого порядку.

Наприклад, для функції $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - 7xy + 5$ маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 3y^3 - 7y; \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - 7x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 9y^2 - 7;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y - 9y^2 - 7; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy.$$

Тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

Зауважимо, що коли якась умова теореми Шварца не виконана, то мішані похідні можуть залежати від порядку диференціювання.

Наприклад, нехай дано функцію

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

За умови, що $f(0,0)=0$ і $x^2 + y^2 > 0$, знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

Припустимо, що $x=0$. Тоді при будь-якому значенні y , в тому числі $y=0$, дістанемо

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = -y.$$

Потім знаходимо $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$ і, зокрема, $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = -1$. Обчисливши

аналогічно $\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial y \partial x}$ в точці $(0, 0)$, дістанемо $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 1$. Отже, для

заданої функції

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}.$$

Тут перші частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}_i, \frac{\partial f}{\partial y}$ в точці $(0, 0)$ зазнають розриву.

1.3 Частинний і повний диференціали функції багатьох змінних. Диференційовані функції.

Розглянемо функцію $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначену в деякій області. Нехай вона має частинні похідні за всіма змінними в кожній точці області D , тобто

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} U}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Використовуючи теорему про залежність між функцією, яка має границю, її границею і нескінченно малою функцією, дістаємо

$$\frac{\Delta_{x_i} U}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \alpha_i, \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i = 0; i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

де α_i є нескінченно малими функціями. З рівностей (1.3), (1.4) знаходимо частинні прирости

$$\Delta_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

Якщо порівняти вираз (1.5) з означенням диференційованої функції однієї змінної $U = f(t)$, для якої

$$\Delta U = \frac{dU}{dt} \Delta t + \alpha \Delta t \quad (1.6)$$

де α - нескінченно мала функція, то рівність (1.5) можна прийняти за означення диференційованості функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за кожною із змінних.

Функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *диференційованою* в точці

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_i , якщо її частинний приріст $\Delta_{x_i} U$ має вигляд

$$\Delta_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i; \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i = 0; i = 1, 2, \dots, n$$

Аналізуючи рівність (1.5) і порівнюючи її з (1.6), бачимо, що частинний приріст $\Delta_{x_i} U$ складається з двох частин. Перша частина, яка дорівнює

$\frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i$, є лінійною відносно приросту незалежної змінної Δx_i , вона є

нескінченно мала того самого порядку мализни, що і Δx_i . Оскільки

$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\alpha_i \Delta x_i}{\Delta x_i} = 0$, то друга частина $\alpha_i \Delta x_i$ є нескінченно мала більш високого

порядку мализни ніж Δx_i . Тому лінійна відносно Δx_i частина приросту

$\Delta_{x_i} U$ дістала назву головної.

Головна (лінійна відносно Δx_i) частина $\frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i$ приросту $\Delta_{x_i} U$ функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при фіксованих x_1, x_2, \dots, x_n називається *частинним диференціалом* функції і позначається

$$d_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Покладаючи $\Delta x_i = dx_i$, знаходимо

$$d_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

тобто частинний диференціал функції n змінних дорівнює частинній похідній функції, помноженій на диференціал відповідної незалежної змінної.

Поставимо задачу зображення повного приросту ΔU функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у формі (1.6).

Нагадаємо, що для зображення приросту функції однієї змінної у формі (1.6) має виконуватись одна умова – існування похідної в точці x . Щоб зобразити повний приріст функції n змінних у формі, аналогічній (1.6), недостатньо існування частинних похідних за всіма змінними в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, потрібно, щоб вони були також неперервні в точці. Для спрощення викладок розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в точці $P(x, y)$. Тоді ці частинні похідні існують в ε -околі точки $P(x, y)$. Розглянемо повний приріст Δz функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $P(x, y)$ до

точки $P_1 (x+\Delta x, y+\Delta y)$, де $\Delta x, \Delta y$ - довільні з області визначення функції $z = f(x, y)$, які не виводять точку P_1 з ε -околу точки P . Маємо

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (1.7)$$

Якщо в правій частині рівності (1.7) додати і відняти величину $f(x + \Delta x, y)$, то дістанемо

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]$$

Тобто повний приріст функції на ділянці PP_1 (рис. 1.4) зображується у вигляді суми двох частинних приростів: 1) приросту на ділянці PN при сталому y ; 2) приросту на ділянці NP_1 при сталому x .

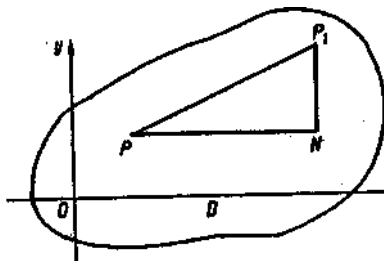


Рис. 1.4

Таким чином,

$$\Delta z = \Delta_y z(x + \Delta x, y) + \Delta_x z(x, y) \quad (1.8)$$

Із рівності (1.4) випливає, що

$$\Delta_y z(x + \Delta x, y) = \frac{\partial z(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha(x + \Delta x, y) \Delta y,$$

де

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x + \Delta x, y) = 0$$

Оскільки в точці P похідні є неперервними, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial z(x + \Delta x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

звідки

$$\frac{\partial z(x + \Delta x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} + \beta(x, y, \Delta x),$$

де

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(x, y, \Delta x) = 0.$$

Тепер знаходимо

$$\Delta_y z(x + \Delta x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \beta \Delta y + \alpha \Delta y,$$

$$\Delta_x z(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \gamma(x, y, \Delta x) \Delta x,$$

де

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma(x, y, \Delta x) = 0.$$

Отже,

$$\Delta z = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \Delta y + \gamma \Delta x + (\alpha + \beta) \Delta y, \quad (1.9)$$

або

$$\Delta z = \partial_x z + \partial_y z + \alpha_x \Delta x + \alpha_y \Delta y,$$

де

$$\alpha_x = \gamma, \alpha_y = (\alpha + \beta).$$

Вираз (1.9) зображує повний приріст Δz функції $z = f(x, y)$ яка має неперервні частинні похідні у вигляді суми частинних диференціалів і нескінченно малих більш високого порядку малізми.

Розглянемо тепер функцію $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка має неперервні частинні похідні за всіма змінними в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді, міркуючи алогічно, дістанемо

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

або

$$\Delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (1.10)$$

Перша сума є лінійною відносно приросту Δx_i , а друга – нелінійною.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні в деякій точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то її повний приріст зображується у вигляді (1.10), причому $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ не залежить від Δx_i .

Позначивши $\frac{\partial U}{\partial x_i} = A_i$, повний приріст функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta U = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (1.11)$$

Якщо приріст функції U в точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити у вигляді (1.11), де A_i не залежить від Δx_i , то функція U називається *диференційованою в точці*. Якщо $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована в кожній точці області свого визначення, то вона називається *диференційованою в області*.

Зміст означення диференційованої функції багатьох змінних зводиться, таким чином, до зображення її повного приросту у вигляді двох частин, одна з яких лінійна відносно приросту незалежних змінних, а друга — нескінченно мала більш високого порядку мализни, ніж перша. Якщо останнє твердження прийняти за означення диференційованої функції багатьох змінних, то справджується така теорема.

Теорема. Для того щоб функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб ці частинні похідні були неперервні в точці.

Введемо поняття повного диференціала функції багатьох змінних. Сума частинних диференціалів функції багатьох змінних називається *повним диференціалом*. Для функції $z = f(x, y)$ маємо

$$dz = d_x z + d_y z, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Оскільки x і y - незалежні змінні, а для них $\Delta x = \partial x, \Delta y = \partial y$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y.$$

Аналогічно повний диференціал функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ запишемо у вигляді

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i.$$

Тоді формула (1.11) набуває вигляду

$$\Delta U = dU + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. Якщо функція багатьох змінних диференційована в деякій точці, то її повний приріст дорівнює сумі повного диференціала і нескінченно малих більш високого порядку мализни.

1.4 Диференціювання складної функції багатьох змінних.

Розглянемо функцію $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задану в деякій області. Часто трапляється, що змінні $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, в свою чергу, функціями від змінної t :

$$x_i = \varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$$

Тоді ставиться задача: за яких умов складну функцію n змінних можна диференціювати по незалежній змінній t . Похідна функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по t називається *повною похідною*.

Відповідь на питання про існування повної похідної функції $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по t дає така теорема.

Теорема. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні по x_1, x_2, \dots, x_n у фіксованій точці $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а функції $x_i = \varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ мають похідні $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ в точці t , то функція

$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має повну похідну

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (1.12)$$

Доведення. Згідно з умовами теореми

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \alpha_i = 0.$$

Поділимо ΔU на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_n}{\Delta t} + \sum_{i=1}^n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t}.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \frac{dx_i}{dt}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_i \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = 0 \times \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

Теорему доведено.

Приклад. Знайти $\frac{\partial u}{\partial t}$ функції $u = \sin \frac{x}{y}$, якщо $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1+t^2}$.

Розв'язання. За формулою (1.12) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} = \sin \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} \cos \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y} = -\frac{(1+3t)^2}{\sqrt{1+t^2}} \cos \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 3, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \left(\sin \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} \cos \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} \right) - \frac{(1+3t)^2}{\sqrt{1+t^2}} \cos \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} * \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Нехай $U=f(x,y)$, а $y= \varphi(x)$, тоді $U=f(x, \varphi(x))$. Використовуючи формулу (1.12), знаходимо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (1.13)$$

Формула (1.13) виконується і для того випадку, коли внутрішня функція є функція кількох змінних, тобто

$$U=f[\varphi(x_1,x_2,...,x_n)], \quad U=f(y), y=\varphi(x_1,x_2,...,x_n).$$

При цьому замість y'_x будуть $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,n$; замість U'_x будуть $\frac{\partial U}{\partial x_i}$.

Формула (1.13) набере вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_i}, i=1,2,...,n.$$

Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли у функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ кожна із змінних залежить, у свою чергу, від двох інших змінних:

$$x_i = \varphi_i(\omega, \eta)$$

Використовуючи формулу (1.12) і вважаючи функції U і x_i диференційованими, запишемо

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \omega} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \eta}.$$

1.5 Інваріантність форми першого диференціала функції багатьох змінних.

На прикладі функції двох змінних $u=f(x; y)$ покажемо, що вираз повного диференціала

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.14)$$

зберігає свою форму незалежно від того, є x та y незалежними змінними чи функціями від інших незалежних змінних. Ця властивість повного диференціала називається *інваріантністю*. Нехай

$$x = \varphi_1(t_1, t_2); \quad y = \varphi_2(t_1, t_2); \quad (1.15)$$

Тоді

$$U = [\varphi_1(t_1, t_2), \varphi_2(t_1, t_2)],$$

$$dU = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 \quad (1.16)$$

Покажемо, що вирази (1.14) і (1.16) збігаються. Дійсно,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1}, \quad dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2. \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_2$$

Тоді з формул (1.16) і (1.17) дістанемо

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1} \right) dt_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_2} \right) dt_2 = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2 \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial y}{\partial t_2} dt_2 \right) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}$$

1.6 Застосування повного диференціала функції багатьох змінних до обчислення значень функції та похибок

Нехай задано функцію $z=f(x,y)$, її значення в деякій точці $A(x_0, y_0)$ і прирости $\Delta x, \Delta y$. Потрібно обчислити $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.
Запишемо повний приріст функції

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1.18)$$

звідси

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z.$$

Замінімо Δz на dz :

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

При цьому припускаються похибки на нескінченно малі більш високого порядку мализни, ніж dz . Тоді

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y, \quad (1.19)$$

або символічно

$$z \approx z_0 + dz$$

Приклад. Визначити об'ємну кількість стружки, отриманої при обробці циліндра заввишки h і діаметром D , якщо висота циліндра зменшилась на Δh , а діаметр на ΔD .

Розв'язання. Задача має точне розв'язання. Об'єм стружки за абсолютною величиною дорівнює приросту ΔV функції $V = \frac{1}{4}\pi D^2 h$ від двох змінних: D і h :

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{4}\pi(D + \Delta D)^2(h + \Delta h) - \frac{1}{4}\pi D^2 h = \\ &= \frac{1}{4}\pi(2Dh\Delta D + h\Delta D^2 + D^2\Delta h + 2D\Delta D\Delta h + 2D^2\Delta h) \end{aligned}$$

Приріст ΔV можна обчислити за допомогою диференціала

$$\nabla V \approx dV = \frac{1}{4}\pi(D^2\Delta h + 2Dh\Delta h).$$

Якщо покласти $h=30\text{см}; D=20\text{см}; \Delta h=-3\text{мм}; \Delta D=-2\text{мм}$, то похибка наближеного результату становить близько 1% , а обчислення при цьому значно спрощуються.

Зробимо оцінку похибки вимірювань. Нехай тепер задано функцію $u=f(x,y,...,t)$ від n змінних і величини $x,y,...,t$ виміряні з точністю $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta t$. Потрібно знайти похибку, з якою вимірюється u . За похибку зручно прийняти $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, ..., t+\Delta t) - f(x, y, ..., t)$. Для малих значень $\Delta x, \Delta y, ..., \Delta t$. приймемо

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + ... + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t.$$

Оскільки похибки і похідні можуть бути і від'ємними числами, доцільно брати їх абсолютні значення:

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + ... + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|.$$

Нехай похибка Δx вкладається в інтервал $(-0,05; +0,05)$. Тоді найбільше значення $|\Delta x| = 0,05$, яке позначається Δx і називається *максимальною абсолютною похибкою змінної x* . Те саме дістаємо для інших змінних. Тоді максимальне значення абсолютної похибки задовольняє умову

$$|\Delta u| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| + ... + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| |\Delta t|$$

Як приклад знайдемо похибку суми, добутку і частки:

$$1) u = x + y + z,$$

$$\Delta u = \Delta x + \Delta y + \Delta z, \quad |\Delta u| = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|;$$

$$2) u = xy,$$

$$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y, \quad |\Delta u| = |y||\Delta x| + |x||\Delta y|;$$

$$3) u = \frac{x}{y},$$

$$|\Delta u| = \frac{|y||\Delta x| + |x||\Delta y|}{|y|^2}$$

Розглянемо відносну похибку $\Delta\delta = \frac{\Delta x}{x}$ і максимальну відносну похибку

$|\Delta\delta| = \frac{|\Delta x|}{|x|}$. Знайдемо відносну похибку функції $u = f(x, y, \dots, z)$:

$$\begin{aligned} \Delta\delta = \frac{\Delta u}{u} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial X}}{f} \Delta X + \frac{\frac{\partial f}{\partial Y}}{f} \Delta Y + \dots + \frac{\frac{\partial f}{\partial Z}}{f} \Delta Z = \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \ln|f| \Delta X + \frac{\partial}{\partial Y} \ln|f| \Delta Y + \dots + \frac{\partial}{\partial Z} \ln|f| \Delta Z \end{aligned}$$

Максимальна відносна похибка

$$|\Delta\delta| = \frac{|\Delta u|}{|u|} = \frac{|\frac{\partial f}{\partial y}|}{|f|} |\Delta y| + \dots + \frac{|\frac{\partial f}{\partial z}|}{|f|} |\Delta z|,$$

$$|\Delta \delta| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln|f| \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln|f| \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\partial}{\partial z} \ln|f| \right| |\Delta z|, \quad |\Delta \delta| = |\Delta \ln|f||.$$

Отже, максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці натурального логарифма цієї функції. Звідси виводяться правила, які застосовуються у наближених обчисленнях:

$$1. \ u = xy, \quad \Delta u \approx du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = y \Delta x + x \Delta y,$$

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}, \quad \left| \frac{\Delta u}{u} \right| \leq \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|, \quad \delta u \leq \delta x + \delta y, \quad \delta u = \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} = |\delta x| + |\delta y|.$$

Максимальна відносна похибка добутку дорівнює сумі максимальних відносних похибок співмножників.

$$2. \ u = \frac{x}{y}; \quad \begin{aligned} |\delta u| &= \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln \left| \frac{x}{y} \right| \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln \left| \frac{x}{y} \right| \right| |\Delta y| = \left| \frac{\partial}{\partial x} (\ln|x| - \ln|y|) \right| |\Delta x| + \\ &\left| \frac{\partial}{\partial y} (\ln|x| - \ln|y|) \right| |\Delta y| = \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} = |\delta x| + |\delta y| \end{aligned}$$

Приклад. Маса 1 дм³ матеріалу при 0 °С дорівнює $m = 999.847 \pm 0.001$ г. Визначити відносну похибку результату зважування.

Розв'язання. Маємо

$$|\Delta m| = 0.001 \text{ г}, \quad m \leq 999.846, \quad \text{тоді} \quad |\delta m| = \frac{0.001}{999.846} = 10^{-4} \%$$

1.7 Диференціали вищих порядків функції однієї та багатьох змінних

Нехай дано функцію однієї незалежної змінної $y=f(x)$. Диференціалом другого порядку або другим диференціалом функції $y=f(x)$ у деякій фіксованій точці називається диференціал першого диференціала в цій точці, який позначається

$$d^2y = d(dy),$$

за умови, що x є незалежною змінною.

Диференціалом третього порядку або третім диференціалом називається диференціал другого диференціала

$$d^3y = d(d^2y)$$

за умови, що x є незалежною змінною.

Взагалі диференціалом n -го порядку або n -м диференціалом функції $y = f(x)$ називається диференціал її $(n-1)$ -го диференціала

$$d^n y = d(d^{n-1}y)$$

за умови, що x є незалежною функцією.

При обчисленні диференціалів вищих порядків треба брати до уваги, що dx є довільне незалежне від x число, яке при диференціюванні по x слід розглядати як сталий множник. Так,

$$d^2y = d(dy) = d(y''dx) = (y''dx)dx,$$

$$d^2y = y''dx^2$$

$$d^3y = d(y''dx^2) = y'''dx^3$$

Взагалі

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції $y = \sin^2 x$.

Розв'язання. Маємо

$$dy = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx,$$

$$d^2y = d(\sin 2x dx) = 2 \cos 2x dx^2.$$

Раніше було показано, що диференціал першого порядку має властивість інваріантності. Диференціали вищих порядків такої властивості не мають. Покажемо це на прикладі диференціала другого порядку. Нехай $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ такі, що можна утворити диференційовану складну функцію від t : $y = f[\varphi(t)]$. Тоді $dy = y'_x dx$, $dx = \varphi'(t)dt$

$$dy = f'_\varphi [\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

Обчислюємо другий диференціал по x :

$$d^2y = d(dx) = dy'_x dx + y'_x d(dx)$$

На підставі інваріантності першого диференціала маємо $dy'_x y''_{x^2} dx$,
тоді

$$d^2 y = y''_{x^2} dx^2 + y'_x d^2 x$$

Якщо x – незалежна змінна, то

$$d^2 y = y''_{x^2} dx^2$$

А це значить, що диференціал другого порядку не інваріантний.

Розглянемо тепер диференціали вищих порядків функції багатьох змінних. Візьмемо функцію двох змінних

$$u = f(x, y) \quad (1.20)$$

Тоді

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = \varphi(x, y) \quad (1.21)$$

Подальші міркування справедливі лише для випадку, коли у формулах (1.20) і (1.21) змінні x і y є незалежними і відповідно dx і dy незалежні від x і y , тобто dx і dy розглядатимемо як сталі в тому розумінні, що

$$d(dx) = 0, \quad d(dy) = 0, \quad (1.22)$$

У зв'язку з цим диференціали dx і dy називаються незалежними диференціалами. Диференціал другого порядку визначимо як диференціал диференціала першого порядку:

$$d^2u = d(du) = d \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right) = d\varphi(x, y)$$

тоді

$$d\varphi(x, y) = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy$$

але

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad (1.23)$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (dy)^2 \quad (1.24)$$

У рівностях (1.23) і (1.24) була використана умова (1.22). Припускаючи, що функція $u = f(x, y)$ задовольняє умови теореми Шварца, знаходимо

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (dy)^2$$

Символічно це записується у вигляді

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u$$

Можна показати, що й для диференціала n -го порядку справедлива формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u$$

Аналогічно будуються диференціали вищих порядків для функції більшого числа змінних. Запишемо, наприклад, $d^2 u$ для функції n незалежних змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Маємо

$$d^2 u = d(du) = d \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx_j$$

Остання рівність записана на тій підставі, що dx_j , $j = 1, 2, \dots, n$, є незалежний диференціал. Тоді

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i$$

$$d^2 u = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (1.25)$$

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задовольняє умови теореми Шварца, то порядок підсумовування у формулі (1.25) можна міняти місцями.

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції $u = xy^2 - x^2 y$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - x^2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y - 2x$$

Тоді

$$d^2 u = -2y(dx)^2 + 4(y-x)dxdy + 2x(dy)^2$$

1.8 Векторне та скалярне поля

Задамо змінні точки M простору вектор-функцією

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

або

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Кожній точці M можна поставити у відповідність або скалярну функцію, або векторну функцію від точки M , тобто $\varphi(M)$ і $\vec{a}(M)$, або $\varphi(\vec{r})$ і $\vec{a}(\vec{r})$. Частина простору, в якому встановлена відповідність між $\varphi(\vec{r})$ і \vec{r} , між $\vec{a}(\vec{r})$ і \vec{r} називається скалярним (векторним) полем, а функції – скалярними (векторними).

Прикладом скалярного поля може бути поле тисків повітря у просторі, а прикладом векторного поля – поле швидкостей частинок рідини. Щоб задати скалярне поле, слід задати одну функцію координат $\varphi(x, y, z) = u$, а векторне поле задається трьома функціями від координат:

$$a_x(x, y, z) \quad a_y(x, y, z) \quad a_z(x, y, z)$$

1.9 Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай на відкритій множині Q тривимірного простору задано диференційовану функцію $u = f(x, y, z)$. Виберемо довільний одиничний вектор $\vec{e}(e_x, e_y, e_z)$ і скаляр $t \geq 0$.

Похідною за напрямком \vec{e} функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z) \in Q$ називається границя

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x+te_x; y+te_y; z+te_z) - f(x, y, z)}{t} \quad (1.26)$$

якщо ця границя існує.

Іншими словами, $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ – це частинна похідна від функції

$$f(x+te_x; y+te_y; z+te_z)$$

по t . Прийmemo за t відстань між двома будь-якими точками M і M_1 одиничного вектора $\vec{e} = p$. Тоді

$$f(x+te_x; y+te_y; z+te_z) - f(x, y, z) = f(M_1) - f(M) = \Delta u,$$

а

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{p \rightarrow 0+0} \frac{\Delta u}{p}$$

Внаслідок диференційованості функції $u=f(x,y,z)$ її приріст

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + a,$$

де

$$a = \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y + \varepsilon_z \Delta z, \text{ при цьому } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} = 0$$

Поділимо Δu на величину p :

$$\frac{\Delta u}{p} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{p} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{p} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{p} + \frac{a}{p} \quad (1.27)$$

Величини

$$\frac{\Delta x}{p} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{p} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{p} = \cos \gamma$$

є напрямними косинусами одиничного вектора \vec{e} :

$$\vec{e} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$

Знайдемо границю відношення (1.27):

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{p} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos a + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$$

Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos a + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.28)$$

Розглянемо новий вектор

$$\vec{\Gamma}_u = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (1.29)$$

який називається *градієнтом* скалярної функції u .

Використовуючи вектори $\vec{\Gamma}_u$ і \vec{e} , формулу похідної за напрямком можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \vec{\Gamma}_u \cdot \vec{e} = \text{grad } u \cdot \vec{e}$$

Оскільки

$$\text{grad } u \cdot \vec{e} = |\text{grad } u| |\vec{e}| \cos(\vec{\Gamma}_u, \vec{e}), \quad |\vec{e}| = 1$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\text{grad } u| \cos(\vec{\Gamma}_u, \vec{e})$$

Нехай $\cos(\vec{\Gamma}_u, \vec{e})=1$, тобто напрям градієнта збігається з напрямом \vec{e} . Тоді

$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ має найбільше значення, яке дорівнює довжині вектора Γ_u . Таким чином,

$$\max_{\vec{e}} \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\text{grad } u| \quad (1.30)$$

Із формули (1.30) випливає, що $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ є проекція градієнта на напрям \vec{e} .

Зазначимо також, що будь-яку частинну похідну функції багатьох змінних за деякою змінною можна розглядати як похідну за напрямком.

Приклад. Знайти $\text{grad } z$ у точці $M(1, 1)$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$

Розв'язання. Маємо:

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M(1;1)} = \frac{2}{1^2 + 1^2} = 1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M(1;1)} = \frac{2}{1^2 + 1^2} = 1; \quad \text{grad } z = \vec{i} + \vec{j}$$

1.10 Рівняння дотичної площини до поверхні. Рівняння нормалі

Нехай деяка поверхня S задана рівнянням у неявній формі $F(x, y, z) = 0$. Візьмемо точку $P(x, y, z) \in S$, в якій функція F має неперервні частинні похідні, що одночасно не дорівнюють нулю. Тоді

$\text{grad } F \neq 0$ в точці P .

Точки P поверхні, для яких $\text{grad } F \neq 0$, називаються *звичайними*. Множина точок, узятих з достатньо малого δ -околу звичайної точки і належних поверхні S , називається *гладким (простим) куском поверхні*.

Якщо всі точки поверхні S є звичайними, то поверхня називається *гладкою (простою)*.

Дотичною прямою до поверхні у деякій її точці називається дотична до деякої кривої, яка розміщена на цій поверхні і проходить через дану точку. Доведемо таку теорему.

Теорема 1. Усі дотичні прямі до гладкої поверхні у звичайній точці лежать в одній площині.

Доведення. Нехай точка $P(x, y, z)$ розміщена на поверхні $F(x, y, z)=0$. Розглянемо орієнтовану криву, яка належить цій поверхні і проходить через точку P . Нехай рівняння цієї кривої задано у параметричній формі:

$$x=x(t); \quad y=y(t); \quad z=z(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

По дотичній до кривої напрямлено вектор

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Утворимо вектор

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

Якщо обчислити F'_x, F'_y, F'_z в точці $P(x, y, z)$, то принаймні одна з цих похідних не дорівнює нулю, тобто $\vec{N} \neq 0$. Розглянемо скалярний добуток

$$N * \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} x(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z(t)$$

Функцію $F(x, y, z)$ можна розглядати як скалярну функцію t . Оскільки функція F диференційована, а $x(t), y(t), z(t)$ мають похідні, то

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Отже, $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$, тобто $\vec{N} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}$, або вектор \vec{N} перпендикулярний до всіх дотичних, які проходять через точку P . Звідси випливає, що всі дотичні у точці P лежать в одній площині. Ця площина й називається дотичною до поверхні у даній точці.

Отже, площина, яка містить усі дотичні до кривих, що розміщені на поверхні і проходять через дану точку, називається *дотичною площиною*.

Пряма, яка проходить через точку $P(x, y, z)$ перпендикулярно до дотичної площини, називається *нормаллю* до поверхні.

Вектор лежить на нормалі. Тому рівнянням нормалі є рівняння прямої, напрямлений вектор якої має компоненти $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ обчислені у точці P . Тоді рівняння нормалі запишеться таким чином:

$$\frac{X-x_p}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p} = \frac{Y-y_p}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p} = \frac{Z-z_p}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_p} \quad (1.31)$$

Нехай поверхню задано рівнянням в явному вигляді

$$z=f(x,y) \cdot$$

Тоді

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

і, отже,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

Рівняння нормалі до поверхні

$$\frac{X-x_p}{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p} = \frac{Y-y_p}{\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p} = \frac{Z-z_p}{1} \quad (1.32)$$

У формулах (1.31) і (1.32) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$ означає, що відповідна похідна

обчислюється в точці P . Тепер можна записати рівняння дотичної площини, яка проходить через точку P :

$$A(X-x_p)+B(Y-y_p)+C(Z-z_p)=0$$

Оскільки ця площина перпендикулярна до нормалі, то з точністю до сталого множника

$$A=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p, B=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p, C=\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_p$$

Рівняння дотичної площини:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_p (X-x_p) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_p (Y-y_p) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_p (Z-z_p) = 0$$

Таким чином, у кожній точці гладкої поверхні, заданої рівнянням

$F(x, y, z) = 0$, можна провести дотичну площину і притому лише одну.

Якщо функцію задано у явному вигляді $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини запишеться у вигляді

$$z - z_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p (X - x_p) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p (Y - y_p) \quad (1.33)$$

Нехай точку $M(X, Y, Z)$ на дотичній площині розміщено близько до точки $P(x, y, z)$. Тоді, позначаючи

$$X - x_p = \Delta x; \quad Y - y_p = \Delta y;$$

рівняння (1.33) можна записати у вигляді

$$Z - z_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_p \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_p \Delta y$$

Права частина цього виразу є повний диференціал функції $z = f(x, y)$.

Отже,

$$Z - z_p = \Delta z$$

Звідси випливає, що з геометричної точки зору повний диференціал функції двох змінних є приріст аплікати дотичної площини.

Теорема 2. Градієнт функції $u = f(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня.

Дійсно, поверхня рівня має рівняння $u = f(x, y, z) = c$. Градієнт

$$\vec{\Gamma}_u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Нехай

$$f(x, y, z) - c = 0 = F(x, y, z).$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

Отже, $\vec{\Gamma}_u = \vec{N}$, тобто градієнт напрямлений по нормалі до поверхні рівня.

Зауважимо, що градієнт позначається символом $\vec{\nabla} u$ (набла), де $\vec{\nabla}$ - оператор, який кожній диференційованій функції $u(x, y, z)$ ставить у відповідність вектор $\text{grad } u$. Цей символічний вектор

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

називається *оператором набла* або *оператором Гамільтона* і дає змогу розглядати $\text{grad } u$, як добуток вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр u .

Приклад: Знайти рівняння нормалі і дотичної площини у точці $P(2; 2; 3)$ до поверхні $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$.

Розв'язання. Маємо

$$F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_p = (2x)_p = 2 \cdot 2 = 4, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_p = (-8y)_p = -8 \cdot 2 = -16$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_p = (4z)_p = 4 \cdot 3 = 12$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12}$$

Рівняння дотичної площини:

$$4(X-2)-16(Y-2)+12(Z-3)=0,$$

тобто

$$X-4Y+3Z-3=0$$

1.11 Формула Тейлора для функції багатьох змінних.

Виведення формули Тейлора для функції багатьох змінних виконується формально за тією самою схемою, що й для функції однієї змінної. Так, багаточлен n -го степеня двох змінних x і y , розвинений за степенями x і y в околі точки $(0, 0)$, має вигляд

$$P_n(x, y) = \sum_{i+j=n} b_{ij} x^i y^j. \quad (1.34)$$

Розвинення багаточлена n -го степеня за степенями $(x - x_0)$ і $(y - y_0)$ є

$$P_n(x, y) = \sum_{i+j=n} b_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j. \quad (1.35)$$

Розвинення багаточлена n -го степеня трьох змінних за степенями трьох різниць таке:

$$P_n(x, y, z) = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk} (x - x_0)^i (y - y_0)^j (z - z_0)^k. \quad (1.36)$$

Коефіцієнти у формулах (1.34) – (1.36) можна виразити через частинні похідні в точках (x_0, y_0) ; (x_0, y_0, z_0) аналогічно формулам:

$$b_0 = P_n(x_0), b_1 = \frac{P'_n(x_0)}{1!}, b_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!}, \dots, b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \dots, b_n = \frac{P_n^{(n)}}{n!}$$

Тоді дістаємо поліноми Тейлора.

Якщо задано функцію $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то для неї можна побудувати багаточлени Тейлора.

Дійсно, для функції двох змінних, $(n+1)$, разів диференційованої за обома змінними як в точці (x_0, y_0) , так і в її достатньо малому околі, формула Тейлора має вигляд

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + R_n(x, y) \quad (1.37)$$

де, наприклад,

$$df(x_0, y_0) = \frac{df(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

$$d^n f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right]^n f(x_0, y_0) \quad (1.38)$$

$R_n(x, y)$ – залишковий член формули Тейлора.

Формула Тейлора розвинення функції m змінних, диференційованої в точці $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ та її достатньо малому околі, має вигляд:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) + df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) + \frac{d^2 f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{n!} + R_n(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (1.39)$$

де

$$df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = \frac{df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_1} (x_1 - x_{10}) + \dots + \frac{df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_2} (x_2 - x_{20}) + \frac{df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_3} (x_3 - x_{30}) + \dots + \frac{df(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})}{\partial x_m} (x_m - x_{m0})$$

.....

$$d^n f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = \left[\frac{\partial(x_1 - x_{10})}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2 - x_{20})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial(x_m - x_{m0})}{\partial x_m} \right]^n f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$$

$R_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – залишковий член формули Тейлора.

Якщо в формулі (1.39) позначити

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = \Delta u$$

або

$$f(M) - f(M_0) = \Delta u,$$

де M – точка з координатами (x_1, x_2, \dots, x_m) , то дістанемо формулу:

$$\Delta u = df(M, M_0) + \frac{d^2 f(M, M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M, M_0)}{n!} + R_n(M, \xi), \quad (1.40)$$

де

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in (M_0, M)$$

За певних умов, що накладаються на функцію багатьох змінних, зберігається асимптотичне розвинення, а також вираз для залишкового члена у формі Лагранжа. Так, для розвинення функції двох змінних дістаємо

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k+j=n+1} \frac{\partial^{k+j} f(\xi, \eta)}{\partial x^k \partial y^j} (x-x_0)^k (y-y_0)^j, \quad (1.41)$$

де

$$\xi = x_0 + \theta_1(x-x_0), \quad 0 < \theta_1 < 1; \quad \eta = y_0 + \theta_2(y-y_0), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

Якщо $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k+j=n+1} \frac{\partial^{k+j} f(\theta_1 x, \theta_2 y)}{\partial x^k \partial y^j} x^k y^j$$

Для функції m змінних залишковий член у формі Лагранжа можна записати у вигляді

$$R_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k+j+\dots+\mu=n+1} \frac{\partial^{k+j+\dots+\mu} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \dots \partial x_m^\mu} \times \\ \times (x_1-x_{10})^k (x_2-x_{20})^j \dots (x_m-x_{m0})^\mu$$

де

$$\xi_1 = x_{10} + \theta_1(x_1 - x_{10}), 0 < \theta_1 < 1;$$

$$\xi_2 = x_{20} + \theta_2(x_2 - x_{20}), 0 < \theta_2 < 1;$$

...

$$\xi_m = x_{m0} + \theta_m(x_m - x_{m0}), \quad 0 < \theta_m < 1;$$

Для розвинення функції m змінних в околі точки $(0, 0, \dots, 0)$ залишковий член має вигляд

$$R_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k+j+\dots+\mu=n+1} \frac{\partial^{k+j+\dots+\mu} f(\theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \dots, \theta_m x_m)}{\partial x_1^k \partial x_2^j \dots \partial x_m^\mu} x_1^k x_2^j \dots x_m^\mu$$

Якщо ввести позначення залишкового члена у вигляді диференціала, то вираз залишкового члена формули Тейлора для функції двох змінних в околі точки (x_0, y_0) набирає вигляду

$$R_n(x, y) = \frac{d^{n+1} f(\xi, \eta)}{(n+1)!}$$

або для формули Маклорена

$$R_n(x, y) = \frac{d^{n+1} f(\theta_1 x, \theta_2 y)}{(n+1)!}$$

Для функції m змінних залишковий член формули Тейлора для розвинення запишеться таким чином:

$$R_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{d^{n+1} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{(n+1)!} \quad (1.42)$$

а для формули Маклорена

$$R_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{d^{n+1} f(\theta_1 x_1, \theta_2 x_2, \dots, \theta_m x_m)}{(n+1)!}$$

При такому запису залишкових членів формули (1.37), (1.39), (1.41) набирають компактного вигляду. Так, формула Тейлора функції двох змінних в околі точки (x_0, y_0)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi, \eta)}{(n+1)!} \quad (1.43)$$

Формулу Маклорена дістають із формули (1.43) при

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad \xi = \theta_1 x; \quad \eta = \theta_2 y$$

Формула Тейлора функції m змінних в околі $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$ має вигляд

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = & f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) + \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{n!} + \\ & + \frac{d^{n+1} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (1.44)$$

де

$$\xi_i = x_{i0} + \theta_i (x_i - x_{i0}), \quad 0 < \theta_i < 1, i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Формулу Маклорена дістаємо з формулі (1.44) при

$$x_{10}=0, x_{20}=0, \dots, x_{m0}=0; \quad \xi_1 = \theta_1 x_1, \xi_2 = \theta_2 x_2, \dots, \xi_m = \theta_m x_m$$

Формула (1.40) розвинення приросту функції з урахуванням (1.41) набирає вигляду

$$\Delta u = df(M, M_0) + \frac{d^2 f(M, M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(M, M_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{(n+1)!} \quad (1.45)$$

Розвинення проросту за формулою Маклорена дістаємо з розвинення (1.45) при

$$x_{i0}=0, \quad \xi_i = \theta_i x_i, \quad M_0(0, 0, \dots, 0), \quad i=1, 2, \dots, m.$$

1.12 Необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних

Для функції однієї і багатьох змінних є кілька формулювань необхідних умов локальних внутрішніх максимумів або мінімумів.

Якщо функція $y = f(X)$ має частинні похідні в точці $X = X_0$ і має в цій точці максимум або мінімум, то всі ці похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{X=X_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{X=X_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x_n} \right|_{X=X_0} = 0; \quad (1.46)$$

Для функції однієї змінної частинна і повна похідні рівні між собою.

Повний диференціал функції n змінних

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad (1.47)$$

З рівностей (1.46) і (1.47) випливає, що коли функція $y = f(X)$ в точці $X = X_0$ має повний диференціал і максимум або мінімум є в цій точці, то повний диференціал в цій точці дорівнює нулю:

$$dy|_{X=X_0} = 0.$$

Часто екстремуми існують в точках, в яких частинні похідні (1.46) або повний диференціал (1.47) не існують. Тоді формулювання необхідної умови екстремуму таке: якщо в деякій точці $X = X_0$ функція $y = f(X)$ має екстремум, то в цій точці повний диференціал функції або дорівнює нулю, або не існує.

Точки, в яких повний диференціал існує і дорівнює нулю, називаються *стаціонарними*. Точки, в яких повний диференціал існує і дорівнює нулю, або не існує, називаються *критичними*. Для визначення стаціонарних точок потрібно розв'язати рівняння

$$dy = 0 \quad (1.48)$$

а для визначення критичних точок потрібно також знайти умови, за яких dy не існує. Серед стаціонарних точок слід шукати точки екстремуму диференційованих функцій, а серед критичних- ще й недиференційованих. Наведемо доведення необхідних умов. Розглянемо спочатку функцію однієї змінної $y = f(x)$. Нехай в точці $x = x_0$ функція має екстремум і $f'(x_0)$

існує. Доведемо, що $f'(x_0) = 0$. Припустимо супротивне (що $f'(x_0) \neq 0$). Тоді в δ -околі точки є значення функції $f(x) > f(x_0)$ і $f(x) < f(x_0)$, що суперечить означенню екстремуму в точці x_0 . Нехай тепер задана функція n змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має екстремум у точці $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. При цьому частинні похідні $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$, за всіма змінними функції в точці M_0 існують. Розглянемо функцію $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в околі точки M_0 при даних значеннях аргументу $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_{i-1} = x_{i-10}, x_i \neq x_{i0}, x_{i+1} = x_{i+10}, x_n = x_{n0}$ як функцію одного аргументу x_i . Ця функція $f(x_{i0}, \dots, x_{i-10}, x_i, x_{i+10}, \dots, x_{n0})$ визначена в околі точки M_0 і має в ній екстремум. Отже,

$$\frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_i} = 0 ; i=1, 2, \dots, n$$

1.13 Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних

Для диференційованих функцій багатьох змінних

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$$

справедлива формула

$$\Delta u = du + \frac{1}{2!} d^2 u + \frac{1}{3!} d^3 u + \dots + \frac{1}{n!} d^n u + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u + R_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (1.49)$$

Тут перший диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \quad (1.50)$$

є лінійною формою, а другий диференціал

$$d^2u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (1.51)$$

квадратичною формою. Дійсно, позначимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}; \quad dx_i = h_i, \quad dx_j = k_j.$$

Тоді, по-перше,

$$a_{ij} = a_{ji} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right),$$

тобто матриця $[a]_{i,j=1}^n$ симетрична, і, по-друге,

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i k_j.$$

Припустимо, що є стаціонарна точка $X_0(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{n0})$. У цій точці $du = 0$. Визначимо знак Δu у розвиненні (1.49). Припустимо, що цей знак визначається знаком d^2U . Тоді в рівності (1.49) всіма диференціалами більш високого порядку мализни, ніж другий, можна знехтувати. Отже, в стаціонарній точці

$$\Delta u \approx \frac{1}{2!} d^2 u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (1.52)$$

де $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ є точкою з δ -околу стаціонарної точки. Запишемо праву частину (1.52) у формі (1.51):

$$\begin{aligned} \Delta u &\approx \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{d^2 u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{d^2 u(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j, \end{aligned}$$

де

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} a_{ij} = 0.$$

Нехтуючи малими третього порядку $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j$, дістанемо

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

позначаючи $dx_i = h_i, dx_j = k_j$, знаходимо

$$\Delta u \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j \quad (1.53)$$

Звідси випливає, що функція має мінімум у стаціонарній точці, якщо форма (1.53) додатньо визначена, і максимум – якщо від’ємно визначена; не має в критичній точці ні максимуму, ні мінімуму, якщо форма не

визначена. Якщо ж форма напіввизначена, то питання про існування максимуму або мінімуму в стаціонарній точці диференціалом другого порядку не визначається (не можна визначити знак Δu). При цьому необхідно враховувати диференціали більш високого порядку.

Запишемо достатні умови екстремуму для функції двох змінних $U = f(x, y)$ в стаціонарній точці (x_0, y_0) . Маємо

$$\begin{aligned}\Delta U &\approx \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 U(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial y^2} k^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (a_{11} h^2 + 2a_{12} h k + a_{22} k^2), \\ a_{11} &= \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2}, a_{12} = \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, a_{22} = \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial y^2}\end{aligned}\tag{1.54}$$

Згідно з критерієм Сільвестра в точці (x_0, y_0) маємо максимум, якщо квадратична форма (1.54) від'ємно визначена, тобто

$$\begin{aligned}a_{11} = \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \\ \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0.\end{aligned}$$

Згідно з критерієм Сільвестра в точці (x_0, y_0) маємо мінімум, якщо квадратична форма (1.54) додатно визначена, тобто

$$a_{11} = \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0,$$

Якщо

$$\frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0, \quad (1.56)$$

то квадратична форма (1.54) не визначена, а тому в стаціонарній точці немає ні максимуму, ні мінімуму. Для функції однієї змінної $u=f(x)$

$$\Delta U \approx \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U(x_0)}{\partial x^2} h^2,$$

якщо

$$\frac{\partial^2 U(x_0)}{\partial x^2} > 0, \quad \Delta U < 0,$$

тобто маємо другу достатню умову екстремуму функції однієї змінної. Виведені вище достатні умови екстремуму функції кількох змінних називаються другими достатніми умовами.

Приклад. Знайти екстремум функції $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$

Розв'язання. Система рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - 3y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - 3x) = 0 \end{cases}$$

має два розв'язки:

$$x_1=y_1=0 \text{ і } x_2=y_2=3.$$

Знайдемо значення частинних похідних у точках $P_1(0, 0)$ і $P_2(3, 3)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f(3,3)}{\partial x^2} = 18. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6x, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f(3,3)}{\partial y^2} = 18, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9. \end{aligned}$$

Для $x=y=0$ виконується умова (1.56), тобто в точці $(0,0)$ немає екстремуму, а для $x_2=y_2=3$ виконується умова (1.55) і, крім того, $\frac{\partial^2 f(3,3)}{\partial x^2} > 0$, тобто в точці $(3, 3)$ маємо мінімум:

$$f_{\min} = f(3, 3) = -26.$$

1.14 Умовний екстремум

Нехай задано функцію $u = f(x, y)$, визначену в області D (рис.1.5), і нехай в цій області задано деяку лінію L , рівняння якої $\varphi(x, y)=0$. Вивчаючи екстремум функції $u=f(x,y)$ в області D , можна ставити дві задачі: визначити екстремум функції $u=f(x,y)$, в області D і екстремум функції $u=f(x, y)$, на лінії L , яка належить цій області. У першому випадку говорять про безумовний екстремум а в другому – про умовний. Остання назва пов'язана з тим, що на змінні x і y накладено додаткову умову: $\varphi(x,y)=0$. Якщо це рівняння розв'язане, наприклад, щодо $y=\psi(x)$, то, підставляючи

$y = \psi(x)$ у вираз для $u = f(x, y)$, дістанемо складну функцію однієї змінної $u = f(x, \psi(x))$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$, яке задає лінію L , називається *рівнянням зв'язку*. Нехай задана функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$, визначена в деякому об'ємі V , і нехай в об'ємі V є деяка поверхня, задана рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$, або лінія L , задана системою рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

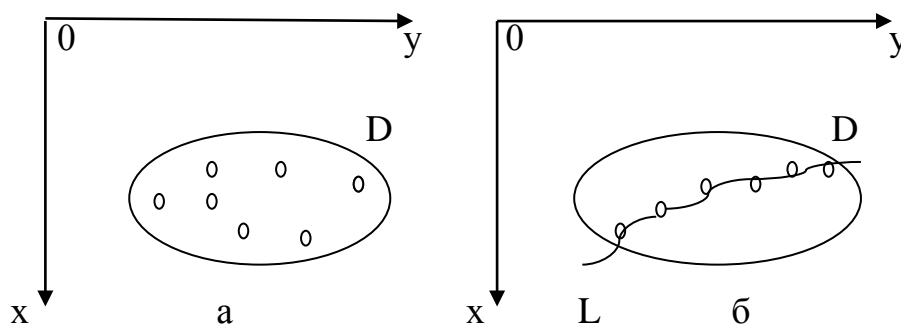


Рис. 1.5

Тоді можна сформулювати три задачі на екстремум функції $u = f(x, y, z)$, одну – на безумовний (визначення екстремуму функції в об'ємі V) і дві – на умовний (визначення екстремуму тієї самої функції на поверхні і на лінії).

Нехай тепер дано функцію $u = f(x)$ n змінних в деякій області D і нехай в цій області задано деяку m -вимірну лінію або поверхню L .

Якщо функція $f(X)$, що розглядається на поверхні або лінії L , має в точці $A \in L$ екстремум, то говорять, що $f(X)$ має в точці A даної поверхні або лінії умовний екстремум.

Розглядають локальні, глобальні, строгі і нестрогі умовні екстремуми. Так, строгий локальний умовний екстремум (максимум) характеризується нерівністю

$$f(X) < f(A)$$

в точках даної поверхні або лінії, які містяться в ε -околі точки A . Сформулюємо найпростіші задачі на умовний екстремум:

1. Знайти екстремум функції $u = f(x, y)$ на лінії, заданій параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$ або рівнянням $\varphi(x, y) = 0$

2. Знайти екстремум функції $u = f(x, y, z)$ на лінії, заданій параметрично

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

або системою рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

У загальному випадку задача відшукування умовного екстремуму формулюється так: знайти екстремум функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на m -вимірній поверхні, заданій рівняннями

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, m < n.$$

Рівняння, які задають лінію або поверхню, називаються *в'язами*.

Задачу на умовний екстремум звичайно зводять до задачі на безумовний екстремум. Розглянемо це на прикладі функції двох змінних $u=f(x,y)$. Нехай x, y пов'язані рівнянням $\varphi(x, y)=0$. Припустимо, що рівняння $\varphi(x,y)=0$ розв'язане щодо y , тобто $y=\psi(x)$. Тоді задача зводиться до відшукування екстремуму від складної функції однієї змінної $u=f(x, \psi(x))$. Необхідна умова екстремуму для цієї функції запишеться у вигляді $\frac{du}{dx}=0$.

Однак

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.57)$$

Візьмемо тепер повну похідну по x функції $\varphi(x, y)=0$ Маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Помножимо останню рівність на сталий множник λ :

$$\lambda \frac{d\varphi}{dx} + \lambda \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.58)$$

Додаючи вирази (1.57) і (1.58), дістанемо

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} + \lambda \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

або

$$\frac{du}{dx} + \lambda \frac{d\varphi}{dx} + \left(\frac{du}{dy} + \lambda \frac{d\varphi}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.59)$$

З рівняння (1.59) визначаємо стаціонарні точки. Параметр λ виберемо таким, щоб

$$\frac{du}{dy} + \lambda \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Тоді рівняння (1.59) можна записати у вигляді

$$\frac{du}{dx} + \lambda \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

Отже, стаціонарні точки визначаються з системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

з трьома невідомими x , y , λ . Аналізуючи цю систему, помічаємо, що відшукування умовного екстремуму зводиться до відшукування безумовного, якщо за досліджувану функцію взяти

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

Функція F називається *функцією Лагранжа*. Характер умовного екстремуму, так само, як і безумовного, визначається знаком диференціала (квадратичною формою) другого порядку

$$d^2 F = \frac{d^2 F}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{d^2 F}{\partial y^2} dy^2. \quad (1.61)$$

Якщо в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ $d^2 F < 0$, то в цій точці функція має максимум, а при $d^2 F > 0$ функція в стаціонарній точці має мінімум.

Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, із в'язами

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

функція Лагранжа запишеться у вигляді

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z),$$

а необхідні умови – у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.62)$$

Приклад. Знайти прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму, якщо його повна поверхня має площу, яка дорівнює $2a$.

Розв'язання. Позначимо довжини сторін паралелепіпеда через x , y , z . Тоді його об'єм $V = xyz$, а площа поверхні

$$S = 2(xy + xz + yz).$$

Отже, потрібно знайти максимум функції $V = xyz$ за умови

$$xy + xz + yz - a = 0.$$

Тут $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Побудуємо функцію Лагранжа

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a).$$

Необхідні умови:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, & yz + \lambda(y + z) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, & xz + \lambda(x + z) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 0, & xy + \lambda(y + x) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0, & xy + xz + yz - a &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо стаціонарну точку

$$x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Якщо в стаціонарній точці обчислити $d^2 F$ за формулою (1.61), то дістанемо $d^2 F < 0$. Звідси випливає, що куб із стороною $\sqrt{\frac{a}{3}}$, площа поверхні якого дорівнює $2a$, має найбільший об'єм $V = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}$.

Якщо задано функцію n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з накладеними на них умовами зв'язку

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, j = 1, 2, \dots, m, m < n \quad (1.63)$$

то складається функція Лагранжа

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.64)$$

Необхідні умови

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

разом з рівняннями (1.63) утворюють систему рівнянь, з якої визначаються координати стаціонарних точок. Функція (1.64) зводить задачу умовного екстремуму до безумовного. Тому достатні умови існування умовного екстремуму можуть визначатися за знаком другого диференціала $d^2 F$.

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням* називається рівняння, що залежить від незалежної змінної x , шуканої функції y та її похідних. Символічно це записують так

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння*.

Приклад.

$$y'' - 2y' + y - x^2 = 0$$

диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння вигляду

$$y' = f(x). \quad (2.2)$$

Щоб його розв'язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2.3)$$

де C - довільна стала.

Означення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

У загальному випадку для знаходження розв'язку диференціального рівняння n -го порядку буде потрібно n послідовних інтегрувань, і, виходить, розв'язок загального вигляду буде містити n незалежних довільних сталих.

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка залежить від незалежної змінної x і n незалежних довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n , що перетворює разом зі своїми похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$ рівняння (2.1) у тотожність.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння (2.1) називається розв'язок, який можна отримати із загального розв'язку, якщо сталим C_1, C_2, \dots, C_n надати певні числові значення.

Означення. Загальним інтегралом диференціального рівняння (2.1) називається функція $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, яка визначає загальний розв'язок в неявному вигляді.

Означення. Частинним інтегралом диференціального рівняння (2.1) називається інтеграл, отриманий із загального інтеграла наданням сталим C_1, C_2, \dots, C_n певного числового значення.

Загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння (2.1) з геометричної точки зору являє собою сімейство кривих на площині, (що залежить від параметрів C_1, C_2, \dots, C_n); назовемо їх *інтегральними кривими* диференціального рівняння.

Інтегральна крива диференціального рівняння, таким чином- це графік його розв'язку (інтегралу).

2.1 Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.4)$$

Якщо його можна розв'язати відносно y' , воно запишеться у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (2.5)$$

Однією з основних задач теорії диференціальних рівнянь є **задача Коші**:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Вона полягає у відшуванні розв'язку (інтегралу) диференціального рівняння, який задовольняє так звані початкові умови (початкові дані). Задача Коші звичайно виникає при аналізі процесів, обумовлених диференціальним законом і початковим станом, математичним вираженням яких і є рівняння і початкова умова (звідки термінологія і вибір позначень: початкові дані задаються при $t = 0$, а розв'язок знаходиться при $t \geq 0$).

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C), \quad (2.7)$$

яка залежить від довільної сталої C , що задовольняє дане диференціальне рівняння при кожному C , і для будь-якої пари значень x_0, y_0 значення $C = C_0$ визначається однозначно. Розв'язати диференціальне рівняння (2.4) або (2.5) - означає знайти його загальний розв'язок. Розв'язати задачу Коші - означає знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

Теорема Коші (про існування і єдність розв'язку):

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна по змінній y неперервні в деякій області S площини xOy , яка містить точку (x_0, y_0) , то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Геометрично це означає, що через кожну точку області S проходить лише одна інтегральна крива.

2.1.1 Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку

Нехай задано диференціальне рівняння (2.5) в області D площини xOy . Це рівняння задає в кожній точці області значення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції-розв'язку у цій точці. Якщо в кожній точці області напрямок дотичної, обумовлений рівнянням (2.5), представити за допомогою відрізка, то одержимо *поле напрямків*. Вирішити диференціальне рівняння (2.5) – значить знайти криву $y = \varphi(x)$, яка в кожній своїй точці має заданий рівнянням (2.5) напрямок дотичної. Загальний розв'язок рівняння (2.5) – це множина інтегральних ліній

$$y = \varphi(x, C).$$

Зауваження. Якщо в деяких точках $f(x, y)$ дорівнює нескінченності, має сенс рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (2.8)$$

Іноді, якщо

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

диференціальне рівняння (2) можна записати у формі, симетричній відносно x і y

$$P(x, y)dx = Q(x, y)dy \text{ або } P(x, y)dx - Q(x, y)dy = 0. \quad (2.9)$$

2.1.2 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy. \quad (2.10)$$

називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Якщо $y = \varphi(x)$ - його розв'язок, то маємо тотожність

$$f_1(x)dx = f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx.$$

Інтегруємо її

$$\int f_1(x)dx = \int f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx + C. \quad (2.12)$$

У правому інтегралі виконаємо заміну змінної, покладемо $y = \varphi(x)$, тоді рівність (2.12) набуде вигляду

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C.$$

Таким чином, щоб розв'язати рівняння (2.10), досить проінтегрувати обидві частини цієї рівності

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \text{ або } F_1(x) = F_2(y) + C.$$

Означення. Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx = f_3(x) \cdot f_4(y)dy. \quad (2.13)$$

Вимагаючи, що в розглянутій області $f_2(y) \neq 0$ і $f_3(x) \neq 0$, розділимо обидві частини рівності (2.13) на $f_2(y) \cdot f_3(x)$. Одержимо рівняння з розділеними змінними

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx = \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy.$$

Його залишається лише проінтегрувати.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = 2^{x+y}.$$

Дивлячись на те, що $y' = \frac{dy}{dx}$, запишемо його у вигляді

$$2^{-y} dy = 2^x dx.$$

Беремо інтеграли

$$\int 2^{-y} dy = \int 2^x dx, \text{ або } -\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Спочатку шукаємо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} : \arctg y = \arctg x + C.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє задану початкову

умову. Підставляємо в останню рівність $x = 0, y = 1$. Отримаємо $\frac{\pi}{4} = C_0$.

Шуканий розв'язок:

$$\arctgy = \arctgx + \frac{\pi}{4}.$$

Будемо вважати, що $\arctgx + \frac{\pi}{4}$ не є величиною, кратною $\frac{\pi}{2}$.

Скориставшись формулою

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

остаточно отримаємо

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Зауваження. Розглянемо приклад:

$$(x - y)dy = (y - 2)dx.$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x-1}.$$

З останньої рівності слідує, що $x-1 \neq 0$ і $y-2 \neq 0$. Інтегруємо обидві частини цієї рівності:

$$\ln|y-2| = \ln|x-1| + \ln C, \text{ або } y-2 = C(x-1).$$

Розв'язки $x = 1$ та $y = 2$ задовольняють загальний розв'язок диференціального рівняння, але вони не є розв'язками цього рівняння, це так звані загублені розв'язки. З іншого боку, розв'язками рівняння

$$(1+x)ydx + (1-y)x dy = 0$$

є $x = 0$ і $y = 0$, але вони не входять у загальний інтеграл $\ln|xy| + x - y = C$ цього рівняння. Отже, вони є особливими розв'язками.

2.1.3 Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією k -го виміру*, якщо $f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$.

Наприклад,

$$f(x, y) = 4x^3 + 7x^2y - 5xy^2 + 9y^3$$

є однорідною функцією третього виміру, тут сумарний ступінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y} - 5$$

однорідна нульового виміру.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x, y)dx = f_2(x, y)dy \quad (2.14)$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням*, якщо $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ - однорідні функції одного й того ж виміру, або, якщо диференціальне рівняння (2.14) можна розв'язати відносно y' , тобто

$$y' = f(x, y), \quad (2.15)$$

то $f(x, y)$ - однорідна функція нульового виміру.

З співвідношення (2.15) маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = f(x, y) \quad (2.16)$$

Функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ однорідні одного й того ж виміру. Для визначеності будемо вважати, що вимір їх однорідності дорівнює k . З означення однорідної функції маємо

$$f(tx, ty) = \frac{f_1(tx, ty)}{f_2(tx, ty)} = \frac{t^k f_1(x, y)}{t^k f_2(x, y)} = t^0 \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = t^0 f(x, y)$$

Поділивши чисельник і знаменник у рівності (2.16) на x^k , отримаємо

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

За допомогою підстановки $t = \frac{y}{x}$ зведемо диференціальне рівняння (2.15) до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}.$$

Підставляємо це в рівняння (2.15):

$$t + x \frac{dt}{dx} = f(t) \Rightarrow \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x - y)dy = (x + y)dx.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Покладемо

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}.$$

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t} dt = \frac{dx}{x}.$$

Звідки

$$-t + 2 \ln(1+t) = \ln|x| + C$$

або

$$-\frac{y}{x} + 2 \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

2.1.4 Лінійні рівняння

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду*

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (2.17)$$

Зробимо підстановку:

$$y = u(x) \cdot v(x),$$

де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні функції.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}.$$

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x).$$

Покладаємо

$$u \frac{dv}{dx} + p(x)uv = 0, \quad u \neq 0.$$

Зауваження. Якщо поставити $u = 0$, отримаємо $y = 0$ й $y' = 0$.

Лінійне рівняння втратить зміст. Маємо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \\ \frac{du}{dx}v = q(x) \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx. \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане значення $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи, і знаходимо

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Шуканий розв'язок

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Зауваження. При розв'язанні конкретних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку варто користуватися не остаточною формулою для знаходження шуканої функції, а запропонованою схемою його рішення.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' - 2xy = 2x^3$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Робимо заміну:

$$y = u \cdot v, \quad y' = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}.$$

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \frac{du}{dx} = 2x^3 \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2x dx; \Rightarrow \ln|v| = x^2; \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} e^{x^2} &= 2x^3; \Rightarrow du = 2x^3 e^{-x^2} dx; \Rightarrow \\ u &= \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right] = -\int t e^t dt = \left[\begin{array}{l} \text{за частинами:} \\ u = t; dv = e^t dt \\ du = dt; v = e^t \end{array} \right] = \\ &= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

Шуканий розв'язок

$$y = u \cdot v = (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C) e^{x^2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}.$$

2.1.5 Рівняння Бернуллі

Означення. Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \quad (2.18)$$

Покажемо спосіб, за допомогою якого рівняння Бернуллі приводиться до лінійного рівняння. Розділимо обидві частини рівності (2.18) на y^n .

Отримаємо

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Зробимо заміну змінної, покладаючи

$$z = y^{1-n}, \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}.$$

Підставляємо в рівняння

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Якщо ще позначити

$$P(x) = (1-n)p(x), \quad Q(x) = (1-n)q(x),$$

отримаємо лінійне рівняння щодо невідомої функції $z = z(x)$

$$z' + P(x)z = Q(x).$$

Отримавши розв'язок цього рівняння, легко отримаємо розв'язок рівняння (2.18) з рівності $y = \sqrt[n]{z}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі

$$y' - \operatorname{tg} x y = -\cos x \cdot y^2.$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на y^2 :

$$y^{-2} y' - \operatorname{tg} x \frac{1}{y} = -\cos x.$$

Робимо заміну:

$$z = \frac{1}{y}; \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} y'.$$

Підставляємо в рівняння

$$-\frac{1}{y^2} y' + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{y} = \cos x \quad \text{або} \quad z' + \operatorname{tg} x \cdot z = \cos x$$

- лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

$$z = u \cdot v; \quad z' = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} + \operatorname{tg} x \cdot u \cdot v = \cos x$$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + \operatorname{tg} x \cdot v = 0 \\ \frac{du}{dx}v = \cos x \end{cases} \quad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x; \Rightarrow \ln v = \ln \cos x; \Rightarrow v = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} \cos x = \cos x; \Rightarrow du = dx; \Rightarrow u = x + C; \quad z = u \cdot v = (x + C) \cos x.$$

Шуканий розв'язок

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{(x + C) \cos x}.$$

2.1.6 Рівняння у повних диференціалах

Означення. Диференціальне рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.19)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $z(x, y)$:

$$dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (2.20)$$

З теорії функцій багатьох змінних відомо, що повний диференціал деякої функції $z = z(x, y)$ має вигляд

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

З теореми про рівність мішаних похідних слідує, що якщо частинні похідні функції $z = z(x, y)$ неперервні до другого порядку включно, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Тому, щоб диференціальне рівняння (2.19) було рівнянням у повних диференціалах, повинна виконуватися рівність

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (2.21)$$

на що вперше вказав Л.Ейлер. Маємо

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dz,$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y),$$

звідки

$$z(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y). \quad (2.22)$$

Тут враховано, що при обчисленні частинної похідної по змінній x вирази, що містять лише змінну y , розглядаються як сталі.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) + C'(y) = Q(x, y).$$

З останньої рівності визначаємо $C'(y)$. Значення

$$C(y) = \int C'(y)dy + C$$

підставляємо в рівність (2.22).

Зауваження. Так як диференціальне рівняння (2.19) має вигляд $dz = 0$, його розв'язок запишеться у вигляді $z(x, y) = C$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = (2x^3 - xy^2)'_y = -2xy; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = (2y^3 - x^2y)'_x = -2xy; \quad -$$

рівняння у повних диференціалах. Знаходимо

$$z(x, y) = \int (2x^3 - xy^2)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \cdot y^2 + C(y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + C(y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + C(y) \right) = -x^2 y + C'(y) = 2y^3 - x^2 y \Rightarrow C'(y) = 2y^3 \Rightarrow C(y) = \frac{y^4}{2} + C.$$

Шуканий розв'язок

$$z(x, y) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C \quad \text{або} \quad x^4 - x^2 y^2 + y^4 = C.$$

2.1.7 Інтегруючий множник

Нехай диференціальне рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2.23}$$

не є рівнянням у повних диференціалах, але множення його на функцію $\mu(x, y)$ перетворює ліву частину цієї рівності у повний диференціал. У цьому випадку функцію $\mu(x, y)$ називають *інтегруючим множником*.

Рівняння

$$\mu(x, y) \cdot P(x, y)dx + \mu(x, y) \cdot Q(x, y)dy = 0 \tag{2.24}$$

у повних диференціалах, тому

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} \cdot P(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} \cdot Q(x, y) + \mu(x, y) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \mu(x, y)}{\mu \partial y} \cdot P(x, y) - \frac{\partial \mu(x, y)}{\mu \partial x} Q(x, y) &= \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad \text{або} \\ \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \cdot P(x, y) - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} Q(x, y) &= \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Розв'язати останнє диференціальне рівняння або знайти з нього множник $\mu(x, y)$ у загальному випадку завдання дуже складне. Простіше підібрати інтегруючий множник, якщо він є функцією однієї незалежної змінної. Так, якщо $\mu = \mu(x)$, рівність (2.25) запишеться у вигляді

$$-\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

звідки за умови, що

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} =$$

неперервна функція,

$$\ln \mu = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx + \ln C, \text{ а } \mu(x) = Ce^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}.$$

Аналогічно знаходимо

$$\mu(y) = Ce^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy}.$$

Зауваження. Можна вважати, що $C=1$, тому що нам досить знайти один інтегруючий множник.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0. \quad (2.26)$$

$$P(x, y) = x^2 + y; \quad Q(x, y) = -x; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1;$$

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1-1}{-x} dx = -2 \ln|x| = \ln x^{-2}; \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Множимо рівняння (2.26) на $\mu(x)$

$$(1 + \frac{y}{x^2})dx - \frac{1}{x}dy = 0 \quad (2.27)$$

$$\bar{P} = 1 + \frac{y}{x^2}; \quad \bar{Q} = -\frac{1}{x}; \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = \frac{1}{x^2} -$$

рівняння (2.27) – у повних диференціалах.

$$z = \int (1 + \frac{y}{x^2})dx = x - \frac{y}{x} + C(y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x - \frac{y}{x}) + C'(y) = -\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x}; \quad C'(y) = 0; \quad C(y) = C.$$

Шуканий розв'язок

$$x - \frac{y}{x} = C.$$

Задача. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хвилин знижується від 100° до 60° . Температура повітря дорівнює 25° . Через який час від моменту початку охолодження температура хліба знизиться до 30° ? За законом Ньютона швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Цей процес нерівномірний – зі зміною різниці температур змінюється і швидкість охолодження тіла.

Запишемо диференціальне рівняння

$$\frac{dT}{d\tau} = k(T - t),$$

де T – температура хліба, t – температура повітря, k – коефіцієнт пропорційності, $\frac{dT}{d\tau}$ – швидкість охолодження хліба, τ – час охолодження. Розділяємо змінні:

$$\frac{dT}{T - t} = k d\tau.$$

З огляду на те, що $t = 25$, отримаємо

$$\frac{dT}{T - 25} = k d\tau; \Rightarrow \int \frac{dT}{T - 25} = k \int d\tau; \Rightarrow \ln|T - 25| = k\tau + \ln C; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - 25 = Ce^{k\tau}. \quad (2.28)$$

З огляду на те, що при $\tau = 0$ $T = 100$, отримаємо : $100 - 25 = Ce^{k \cdot 0} = C$, звідки $C=75$.

Підставляємо в рівність (2.28)

$$T - 25 = 75e^{k\tau}.$$

При $\tau = 20$ $T = 60^\circ$:

$$60 - 25 = 75(e^k)^{20} \Rightarrow e^k = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Отже, охолодження хліба відбувається у відповідності із формулою

$$T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25.$$

Якщо взяти $T=30$, то $30 = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} + 25$ або $\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}} = \frac{1}{15}$.

Шуканий розв'язок

$$\tau = \frac{-20 \ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx \frac{-20 \cdot 2,7081}{-0,7622} \approx 71(\text{хв}).$$

2.2 Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку записується так

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (2.29)$$

або, якщо воно розв'язано відносно y'' ,

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (2.30)$$

Теорема існування та єдності: Якщо в рівнянні

$$y'' = f(x, y, y')$$

функція $f(x, y, y')$, і її частинні похідні по y і y' неперервні в деякій області, що містить значення

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0,$$

то існує єдиний розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (2.31)$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2),$$

яка залежить від довільних сталих C_1 і C_2 , що задовольняє дане диференціальне рівняння при будь-яких C_1, C_2 , і для будь-якої пари значень x_0, y_0 значення C_1 і C_2 визначаються однозначно.

Розв'язати диференціальне рівняння (2.29) або (2.30) означає знайти його загальний розв'язок. Розв'язати задачу Коші означає виділити з загального розв'язку частинний розв'язок, що задовольняє задані початкові умови.

2.2.1 Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку

У деяких випадках розв'язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

1) Диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = f(x).$$

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності:

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

де C_1 - стала інтегрування. Шуканий розв'язок

$$y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2 .$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = \cos 2x.$$

Розв'язання:

$$y' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1,$$

$$y = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx + C_1 x + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2.$$

2) Диференціальне рівняння не містить явно шукану функцію y :

$$y'' = f(x, y').$$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. А рівняння звелось до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1)$. Загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \int p(x, C_1) dx + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

Покладемо $y' = p$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$$\frac{dp}{1+p^2} = -\frac{dx}{1+x^2}; \Rightarrow \arctg p = \arctg C_1 - \arctg x.$$

Звідси (у відповідності з формулою)

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad p = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} \quad \text{або} \quad y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

Остаточно маємо

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} dx = -\frac{1}{C_1} \int dx + (C_1 + \frac{1}{C_1}) \int \frac{dx}{1 + C_1 x} = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1 + \frac{1}{C_1}}{C_1} \ln|1 + C_1 x| + C_2.$$

3) Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x

$$y'' = f(y, y').$$

Покладемо $y' = p(x)$; тоді

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Підставляємо у вихідне рівняння

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p), \Rightarrow p = p(y, C_1), \text{ або } \frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Розділяємо змінні

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = 2yy'; \quad y' = p; \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dx}.$$

Підставляємо у рівняння

$$p \frac{dp}{dx} = 2yp \quad \text{або} \quad p \left(\frac{dp}{dx} - 2y \right) = 0.$$

$$1. \quad p = y' = 0 \Rightarrow y = C(\text{const}).$$

$$2. \quad \frac{dp}{dy} = 2y; \Rightarrow dp = 2ydy; \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = y^2 + C_1$$

$$\text{а) } C_1 = 0, \text{ тоді } \frac{dy}{y^2} = dx; \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C; \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2};$$

б) $C_1 > 0$. Так як стала довільна, покладемо C_1^2 , маємо

$$\frac{dy}{C_1^2 + y^2} = dx \Rightarrow \Rightarrow x = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} + C_2.$$

в) $C_1 < 0$. Якщо $(-C_1^2)$, маємо: $\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx$, а розв'язок

$$x = \frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{y - C_1}{y + C_1} \right| + C_2.$$

Зауваження. У загальному випадку розв'язок диференціального рівняння може бути отриманий і у неявному вигляді: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.

2.2.2 Лінійні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції та її похідних

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (2.32)$$

де a_i ($i=1,2,\dots,n$) - або неперервні функції, або постійні.

Означення. Диференціальне рівняння (2.32) називається *неоднорідним*, якщо $f(x) \neq 0$, і *однорідним*, якщо $f(x) \equiv 0$.

Розв'яжемо рівняння (2.32) щодо старшої похідної

$$y^{(n)} = f(x) - a_1 y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} y' - a_n y.$$

Воно задовольняє умовам теореми існування і єдності.

Зауваження. Надалі ми іноді будемо посилатися на диференціальні рівняння n -го порядку, але основні доведення будемо проводити лише для рівнянь не вище другого порядку.

2.2.2.1 Властивості лінійних однорідних рівнянь

Обмежимося диференціальними рівняннями другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (2.33)$$

Теорема 1. Якщо y_1 і y_2 - розв'язки рівняння (2.33), то і їхня сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Так як y_1 і y_2 є розв'язками рівняння (2.33), тоді при підстановці їх у рівність (2.33) вони обертають його в тотожність

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 \equiv 0 \text{ і } y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 \equiv 0.$$

Підставимо в рівняння (2.33) замість y суму $y_1 + y_2$ і у відповідності з властивостями похідних перегрупуємо доданки

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_2(x)(y_1 + y_2) = (y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + (y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) \equiv \equiv 0 + 0 \equiv 0.$$

Теорема 2. Якщо y_0 є розв'язком рівняння (2.33), тоді і Cy_0 також є розв'язком цього рівняння, де $C = \text{const}$.

Дійсно,

$$y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0 \equiv 0.$$

Підставляємо Cy_0 :

$$(Cy_0)'' + a_1(x)(Cy_0)' + a_2(x)(Cy_0) = C(y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0) \equiv 0.$$

Означення. Два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (2.33) називаються *лінійно незалежними на відрізку $[a, b]$* , якщо

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda(\text{const}); \text{ і лінійно залежними, якщо } \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda.$$

Означення. *Визначником Вронського або вронскіаном* для функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називається визначник вигляду

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 3. Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні на відрізку $[a, b]$, то їхній визначник Вронського на цьому відрізку тотожно дорівнює нулю.

Доведення. Зі співвідношення $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ слідує, що $y_1 = \lambda y_2$.

Визначник Вронського дорівнює нулю,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

як визначник із двома пропорційними стовпцями.

Теорема 4 (Ліувілля). Якщо визначник Вронського для розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (2.33) не дорівнює нулю при якому-небудь значенні $x_0 \in [a, b]$, то він не перетворюється на нуль на всьому цьому відрізку.

Доведення. Підставляючи y_1 та y_2 у рівняння (2.33), отримаємо рівності

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \text{ і } y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$$

Множимо першу з цих рівностей на y_2 , а другу на y_1 , і від другої віднімаємо першу

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0. \quad (2.34)$$

З іншої сторони, визначник Вронського

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1', \text{ а}$$

$$W' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

У результаті рівність (2.34) запишеться у вигляді

$$W' + a_1 W = 0,$$

або за умови, що $W \neq 0$,

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx. \Rightarrow \ln W = -\int_{x_0}^x a_1 dx + \ln C, \Rightarrow W = C e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx}. \quad (2.35)$$

Покладаючи в останній рівності $x = x_0$, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x_0} a_1 dx = 0, \text{ а } C = W(x_0) \neq 0.$$

І, виходить,

$$W = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} \neq 0$$

для будь-якого $x \in [a, b]$.

Зауваження. Якщо для якогось значення $x_1 \in [a, b]$ визначник Вронського $W(x_1) = 0$, то він буде дорівнювати нулю на всьому відрізку $[a, b]$.

Теорема 5. Якщо розв'язки y_1 і y_2 рівняння (2.33) лінійно незалежні на відрізку $[a, b]$, то визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ не перетворюється на нуль ні при якому $x \in [a, b]$.

Доведення. Припустимо, що в деякій точці відрізка $[a, b]$

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

За теоремою Ліувілля він буде дорівнювати нулю на всьому цьому відрізку. Припускаючи, що y_1 не дорівнює нулю на відрізку $[a, b]$, розділимо визначник Вронського на y_1^2 . Отримаємо

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0,$$

з чого слідує, що

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0, \text{ а } \frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const.}$$

Але це означає лінійну залежність функцій y_1 і y_2 , що суперечить умові теореми про їхню незалежність. Виходить, визначник Вронського не повинен перетворюватись на нуль.

Теорема 6. (про загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР)). Якщо y_1 і y_2 - лінійно незалежні розв'язки рівняння (2.33), то загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (2.36)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Доведення. Те, що рівність (2.36) є розв'язком рівняння (2.33), слідує із властивостей 1 і 2 ЛОДР. Покажемо, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ сталі C_1 і C_2 визначаються однозначно, щоб відповідний частинний розв'язок $y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0)$ задовольняв задані початкові умови. Підставимо початкові умови у функцію (2.36) і її похідну

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Отримали систему двох рівнянь із двома невідомими C_1 і C_2 , визначник якої відмінний від нуля, тому що є визначником Вронського

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

для лінійно незалежних функцій y_1 і y_2 . За правилом Крамера система має єдиний розв'язок. Теорема доведена.

Означення. Система n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку (ЛОДР- n) називається її *фундаментальною системою*.

Загальний розв'язок ЛОДР- n є лінійна комбінація з довільними постійними коефіцієнтами його розв'язків, що становлять фундаментальну систему.

Теорема. Якщо відомий один розв'язок y_1 ЛОДР-2 (2.33) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то другий розв'язок можна знайти з співвідношення

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

Доведення. Скористаємося рівністю для визначника Вронського з теореми Ліувілля $W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = C e^{-\int a_1 dx}$, де y_1 - відома функція. Розділимо цю рівність на y_1^2 . Отримаємо

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a_1 dx},$$

Звідки

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C_1, \text{ а } y_2 = y_1 \left(\int \frac{C e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C_1 \right).$$

З огляду на те, що ми шукаємо частинний розв'язок, візьмемо $C=1$, а $C_1=0$. Тоді шуканий розв'язок

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx,$$

а загальний розв'язок рівняння (2.33)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Методом підбору знаходимо

$$y_1 = x. \quad y_1' = 1, y_1'' = 0.$$

Підставляємо в рівняння:

$$0 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} = 0.$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = x \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln x}}{x^2} dx = x \int \frac{\frac{1}{x}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{2}{x}.$$

Шуканий розв'язок

$$y = C_1 x + C_2 \left(-\frac{2}{x}\right).$$

2.2.2.2 ЛОДР - 2 зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (2.37)$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв'язки рівняння (2.37) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$.

$y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Тому що $e^{kx} \neq 0$, маємо

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Він являє собою квадратне рівняння відносно k .

Корені квадратного рівняння $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Розглянемо три

випадки:

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що відношення

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const.}$$

Загальний розв'язок рівняння запишеться у вигляді

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 9y' + 14y = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 9k + 14 = 0, \quad k_1 = 2, k_2 = 7.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}$.

2. Корені характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ дійсні й рівні: $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p$. Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$.

Один частинний розв'язок

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}.$$

Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2(x)} dx; \quad y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 16 = 0, \quad k_1 = k_2 = 4.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$

3. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i.$

У цьому випадку можна покласти

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Теорема: Якщо розв'язком диференціального рівняння (2.37) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$, то розв'язками рівняння (2.37) будуть його дійсна $u(x)$ та уявна $v(x)$ частини.

Доведення. Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (2.37)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \quad \text{і} \quad v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$$

Теорема доведена.

У відповідності з формулами Ейлера, записані вище розв'язки рівняння (2.37) подамо у вигляді

$$y_1 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad \text{і} \quad y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

В силу доведеної теореми розв'язками рівняння (2.37) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ й $v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Вони лінійно незалежні

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} x \neq \operatorname{const}.$$

Загальний розв'язок набуде вигляду

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 20y = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 20 = 0, \quad k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 20} = 2 \pm 4i.$$

Відповідь: $y = e^{2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$

2.2.2.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку (ЛНДР-2)

ЛНДР - 2 має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (2.38)$$

Теорема. (Структура загального розв'язку рівняння (2.38)).
Загальний розв'язок рівняння (2.38) являє собою суму загального розв'язку $y_{\text{одн}}$ відповідного йому однорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2.39)$$

і деякого частинного розв'язку $y_{\text{ч}}$ неоднорідного рівняння (2.38)

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}. \quad (2.40)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}$ взагалі є розв'язком рівняння (2.38). Дійсно, те, що $y_{\text{одн}}$ є розв'язком рівняння (2.39), а $y_{\text{ч}}$ - розв'язком рівняння (2.38), означає

$$y_{\text{одн}}'' + a_1 y_{\text{одн}}' + a_2 y_{\text{одн}} \equiv 0 \text{ і } y_{\text{ч}}'' + a_1 y_{\text{ч}}' + a_2 y_{\text{ч}} = f(x).$$

Підставляємо в рівняння (2.38)

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}};$$

$$\begin{aligned} (y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}})'' + a_1 (y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}})' + a_2 (y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}) &= (y_{\text{одн}}'' + a_1 y_{\text{одн}}' + a_2 y_{\text{одн}}) + (y_{\text{ч}}'' + a_1 y_{\text{ч}}' + a_2 y_{\text{ч}}) = \\ &= 0 + f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Тепер доведемо, що рівність (2.40) є загальним розв'язком рівняння (2.38).

Нагадаємо, що $y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Потрібно довести, що для будь-яких початкових умов

$$y|_{x=x_0} = y_0, y_1|_{x=x_0} = y_{10}, y_2|_{x=x_0} = y_{20}, y_{\text{ч}}|_{x=x_0} = y_{\text{ч}0}, y'|_{x=x_0} = y'_0, y'_1|_{x=x_0} = y'_{10}, y'_2|_{x=x_0} = y'_{20}, y'_{\text{ч}}|_{x=x_0} = y'_{\text{ч}0}$$

постійні C_1 і C_2 знаходяться однозначно. Маємо

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_{\text{ч}0} = y_0, C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y'_{\text{ч}0} = y'_0.$$

Отримали систему

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 - y_{\text{ч}0} \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0 - y'_{\text{ч}0} \end{cases}$$

двох рівнянь із двома невідомими C_1 і C_2 , визначником якої є визначник Вронського для лінійно незалежних функцій. Визначник системи відмінний від нуля, а система має єдиний розв'язок.

2.2.2.4 Метод варіації довільних сталих Лагранжа

Нехай

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

- загальний розв'язок рівняння (2.39). Розв'язок неоднорідного рівняння (2.38) будемо шукати в такому ж самому вигляді, тільки будемо вважати $C_1 = C_1(x)$ і $C_2 = C_2(x)$ деякими функціями від x .

Похідна

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2.$$

Підберемо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ таким чином, щоб виконувалася рівність

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0. \quad (2.41)$$

Тоді

$$y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2, \text{ а } y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2'.$$

Підставляємо в рівняння (2.38)

$$C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + a_1[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'] + a_2[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2] = f(x)$$

або

$$C_1(x)(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(x)(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Так як y_1 і y_2 - розв'язки однорідного рівняння (2.39), то

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0 \text{ і } y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0.$$

Отримали рівність

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x),$$

яка разом з рівністю (2.41) утворюють систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського для лінійно незалежних функцій y_1 і y_2 . Система має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

звідки

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C_1}, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C_2},$$

де $\overline{C_1} = const, \overline{C_2} = const$.

Будемо вважати, що $C_1 = C_2 = 0$, бо нам досить знайти частинний розв'язок рівняння (2.38). Загальний розв'язок рівняння (2.38)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - \frac{2}{x}y' = x^2.$$

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - \frac{2}{x} y' = 0.$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2}{x}; \Rightarrow \ln y' = 2 \ln |x| + \ln C; \Rightarrow y' = Cx^2; \Rightarrow y = C_1 x^3 + C_2.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо з системи

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot x^3 + C_2'(x) \cdot 1 = 0 \\ 3C_1'(x) \cdot x^2 + C_2'(x) \cdot 0 = x^2 \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{3}; C_2'(x) = -\frac{1}{3}x^3; \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{3}x; C_2(x) = -\frac{x^4}{12}.$$

Шуканий розв'язок

$$y = C_1 x^3 + C_2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^4}{12} = C_1 x^3 + C_2 + \frac{1}{4}x^4.$$

2.2.2.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай задане диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (2.38):

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (2.42)$$

де $P_n(x)$ - многочлен n -го порядку. Візьмемо функцію

$$y = Q(x)e^{\lambda x}, \text{ де } Q(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n -$$

многочлен n -го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (2.38). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p)Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_n(x) = P_n(x) \quad (2.43)$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - многочлен n -го порядку, то $Q_n'(x) - (n-1)$ -го, а $Q_n''(x) - (n-2)$ -го порядку.

1. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (2.43) є многочлени n -го порядку. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_{\text{ч}} = Q_n(x)e^{\lambda x}. \quad (2.44)$$

2. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (2.43) залишиться многочлен n -го порядку, а в лівій – $n-1$ -го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.
Частинний розв'язок

$$y_{\text{ч}} = xQ_n(x)e^{\lambda x}. \quad (2.45)$$

3. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (2.43) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0$. Частинний розв'язок

$$y_{\text{ч}} = x^2Q_n(x)e^{\lambda x}. \quad (2.46)$$

4. Запишемо праву частину рівняння (2.38) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \quad (2.47)$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, проведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_{\text{ч}} = U_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (2.48)$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta x$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_{\text{ч}} = x[U_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x.] \quad (2.49)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (2.50)$$

Покажемо, що рівність (2.50) можна записати у вигляді (2.47). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n_1}(x)e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} = \\ &= \left[\frac{1}{2} P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i} Q_{n_2}(x) \right] e^{(\alpha + \beta i)x} + \left[\frac{1}{2} P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i} Q_{n_2}(x) \right] e^{(\alpha - \beta i)x}. \end{aligned}$$

Тут у кожній із квадратних дужок многочлен степеня $n = \max(n_1, n_2)$.

Зауваження. Якщо $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y_{\text{ч}} = y_{\text{ч}_1} + y_{\text{ч}_2}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = x + 2 + 9xe^{2x} + e^x \cos x. \quad (2.51)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - y' = 0. \quad (2.52)$$

Характеристичне рівняння

$$k^2 - k = 0; \quad k_1 = 0, k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.52)

$$y_{\text{одн}} = C_1 + C_2 e^x.$$

Подамо праву частину рівняння (2.51) у вигляді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

$$\text{де } f_1(x) = x + 2; f_2(x) = 9xe^{2x}; f_3(x) = e^x \cos x.$$

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.51).

$$f_1(x) = x + 2, \text{ або } f_1(x) = (x + 2)e^{0x}.$$

А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k = 0$, то розв'язок

$$y_{\text{ч}_1} \text{ шукаємо у вигляді } y_{\text{ч}_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx.$$

Знаходимо $y'_{\text{ч}_1} = 2Ax + B$, $y''_{\text{ч}_1} = 2A$ і підставляємо в рівняння

$$2A - 2Ax - B = x + 2.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left. \begin{array}{l} x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2A = 1 \\ 2A - B = 2 \end{array} \right\} \quad A = \frac{1}{2}, B = -1. \quad y_{q_1} = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Частинний розв'язок

$$y_{q_2} = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow y'_{q_2} = [2Ax + (A + 2B)]e^{2x}, y''_{q_2} = [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (2.51)

$$\begin{aligned} [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x} - [2Ax + (A + 2B)]e^{2x} &= 9xe^{2x} \quad \text{або} \\ 2Ax + (3A + 2B) &= 9x. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 2A = 9 \\ 3A + 2B = 0 \end{array} \right\} \quad A = 4,5; B = -6,75. \quad y_{q_2} = (4,5x - 6,75)e^{2x}.$$

Частинний розв'язок

$$y_{q_3} = e^x(A \cos x + B \sin x) \Rightarrow y'_{q_3} = e^x[(A + B) \cos x + (B - A) \sin x], y''_{q_3} = [2B \cos x - 2A \sin x]e^x.$$

Підставляємо в рівняння (2.51)

$$\begin{aligned} [2B \cos x - 2A \sin x - (A + B) \cos x - (B - A) \sin x]e^x &= e^x \cos x; \Rightarrow \\ \Rightarrow (B - A) \cos x + (-A - B) \sin x &= \cos x. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array} \right| \begin{array}{l} B - A = 1 \\ -A - B = 0 \end{array} \right\} \quad A = -\frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}. \quad y_{q_3} = \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^x.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.51)

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}} = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2} x^2 - x + (4,5x - 6,75)e^{2x} + \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right)e^x.$$

2.3 Системи звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо систему рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (2.53)$$

де t - незалежна змінна, x і y - шукані функції.

Система, у лівій частині якої знаходяться похідні шуканих функцій першого порядку, а права не містить похідних, називається нормальною.

Розв'язувати систему будемо зведенням її до рівняння другого порядку щодо однієї з невідомих функцій. Диференціюємо по t перше рівняння системи

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Заміняючи $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$ на $f_1(t, x, y)$ і $f_2(t, x, y)$, отримаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, y).$$

Припускаючи, що y можна виразити через t, x і $\frac{dx}{dt}$ із системи

$(y = \psi(t, x, \frac{dx}{dt}))$, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt}).$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$x = \varphi(t, C_1, C_2).$$

Невідому функцію y знайдемо із співвідношення

$$y = \psi(t, x, \frac{dx}{dt}) = \psi(t, C_1, C_2).$$

Зауваження. Система n диференціальних рівнянь із n невідомими функціями зводиться до диференціального рівняння n – го порядку.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}.$$

Робимо заміну у відповідності із другим рівнянням системи:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4(2x + 3y).$$

Виражаємо

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$$

з першого рівняння системи і підставляємо в останню рівність

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 8x + 3\frac{dx}{dt} - 3x \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0.$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k - 5 = 0; \quad k_1 = -1, k_2 = 5.$$

Розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y = \frac{1}{4} \left(\frac{dx}{dt} - x \right) = \frac{1}{4} (-C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{5t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{5t}) = C_2 e^{5t} - \frac{1}{2} C_1 e^{-t}. \end{cases}$$

2.3.1 Системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нехай задана система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (2.54)$$

Її розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{\lambda t}, y = \alpha_2 e^{\lambda t}.$$

Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \alpha_1 e^{\lambda t}, \frac{dy}{dt} = \lambda \alpha_2 e^{\lambda t}.$$

Підставляємо в систему (2.54)

$$\begin{cases} \lambda \alpha_1 e^{\lambda t} = (a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2) e^{\lambda t} \\ \lambda \alpha_2 e^{\lambda t} = (a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2) e^{\lambda t} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 = 0 \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - \lambda) \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Це однорідна система двох рівнянь із двома невідомими α_1 і α_2 . Вона має ненульові розв'язки тільки в тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Назвемо останнє рівняння характеристичним, і знайдемо з нього значення λ . Підставляючи характеристичні числа λ в систему (2.55), знайдемо α_1 і α_2 , а, отже, і розв'язок системи.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ -2 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

Його корінь $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = 7$. Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$x^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{3t}, y^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{3t} \text{ і } x^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{7t}, y^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{7t}.$$

Складаємо систему для кореня $\lambda_1 = 3$ і визначаємо $\alpha_1^{(1)}$ й $\alpha_2^{(1)}$

$$\begin{cases} (1-3)\alpha_1^{(1)} + 6\alpha_2^{(1)} = 0 \\ -2\alpha_1^{(1)} + (9-3)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -2\alpha_1^{(1)} + 6\alpha_2^{(1)} = 0 \\ -2\alpha_1^{(1)} + 6\alpha_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

звідки $\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{3}\alpha_1^{(1)}$. Припускаючи, що $\alpha_1^{(1)} = 1$, одержимо $\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{3}$. Таким

чином, ми одержали розв'язок системи

$$x^{(1)} = e^{3t}, y^{(1)} = \frac{1}{3}e^{3t}.$$

Складемо систему для $\lambda_2 = 7$ і визначимо $\alpha_1^{(2)}$ й $\alpha_2^{(2)}$:

$$\begin{cases} -6\alpha_1^{(2)} + 6\alpha_2^{(2)} = 0 \\ -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0, \end{cases}$$

звідки $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ й $\alpha_1^{(2)} = 1, \alpha_2^{(2)} = 1$. Отримали другий розв'язок системи:

$$x^{(2)} = e^{7t}, y = e^{7t}.$$

Загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{7t} \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{3t} + C_2 e^{7t} \end{cases}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases} \quad (2.56)$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0.$$

Його корінь $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Розглянемо систему для кореня $\lambda_1 = 1 + 3i$

$$\begin{cases} (1 - 1 - 3i)\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (1 - 1 - 3i)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \alpha_2 = -\alpha_1 i.$$

Нехай $\alpha_1 = 1$, тоді $\alpha_2 = -i$.

Для кореня $\lambda_2 = 1 - 3i$ маємо систему

$$\begin{cases} (1 - 1 + 3i)\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (1 - 1 + 3i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_2 = \alpha_1 i$, а при $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = i$.

Розв'язок системи - це комплексно спряжені функції

$$\begin{aligned} x &= e^{(1+3i)t} = e^t (\cos 3t + i \sin 3t), \quad \bar{x} = e^{(1-3i)t} = e^t (\cos 3t - i \sin 3t); \\ y &= -ie^t (\cos 3t + i \sin 3t) = e^t (\sin 3t - i \cos 3t), \\ \bar{y} &= ie^t (\cos 3t - i \sin 3t) = e^t (\sin 3t + i \cos 3t). \end{aligned}$$

Систему (2.56) будуть задовольняти й дійсні функції, отримані з даних за допомогою формул Ейлера

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x + \bar{x}}{2} = e^t \cos 3t, \quad x_2 = \frac{x - \bar{x}}{2i} = e^t \sin 3t; \quad y_1 = \frac{y + \bar{y}}{2i} = e^t \sin 3t, \\ y_2 &= \frac{y - \bar{y}}{2i} = -e^t \cos 3t. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{cases}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Розв'язок системи варто шукати у вигляді

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, y = (C_3 + C_4 t)e^{3t}.$$

Знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = (3C_1 + 3C_2 t + C_2)e^{3t}, \frac{dy}{dt} = (3C_3 + 3C_4 t + C_4)e^{3t}.$$

Підставляючи ці значення в систему, отримаємо

$$\begin{cases} 3C_1 + 3C_2 t + C_2 = 2C_1 + 2C_2 t - C_3 - C_4 t \\ 3C_3 + 3C_4 t + C_4 = C_1 + C_2 t + 4C_3 + 4C_4 t \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_2 t = -C_3 - C_4 t \\ C_1 + C_2 t = -C_3 + C_4 - C_4 t \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в обох рівностях, отримаємо $C_3 = -(C_1 + C_2)$, $C_4 = -C_2$, а загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \\ y = -(C_1 + C_2) e^{3t} - C_2 t e^{3t}. \end{cases}$$

Для порівняння приведемо ще один розв'язок системи. Диференціальне рівняння, що відповідає нашій системі для функції x має вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} + 9x = 0.$$

Воно має те ж характеристичне рівняння, що і система. Кореню $\lambda = 3$ буде відповідати два лінійно незалежних розв'язка: $x_1 = e^{3t}$ і $x_2 = t e^{3t}$. Загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \\ y = 2x - \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{3t} + 2C_2 t e^{3t} - (3C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + 3C_2 t e^{3t}) = -(C_1 + C_2) e^{3t} - C_2 t e^{3t} \end{cases}$$

2.4 Якісна теорія диференціальних рівнянь

Якісна теорія, вперше введена норвезьким математиком Абелем, не дає остаточного розв'язку тієї або іншої задачі. Вона вказує на умови, при яких даний клас задач або рівнянь має розв'язки.

Розглянута вище теорема існування і єдності, теорема про аналітичне продовження і так далі відносяться до якісної теорії диференціальних рівнянь. До речі, формула Ліувілля - Остроградського для диференціальних рівнянь другого порядку отримана в 1827 році Абелем, а вже в 1838 році в загальному випадку Ліувілем і Остроградським.

2.4.1 Теорія стійкості по Ляпунову

Робота будь-якого механізму описується диференціальним рівнянням або системою диференціальних рівнянь, які можуть мати, загалом кажучи, множину розв'язків.

Нехай деяке рівняння описує роботу настінного годинника. Годинник стоїть. Це один з розв'язків диференціального рівняння. Інший розв'язок описує рівномірний хід заведеного годинника. Годинник заводиться відхиленням маятника. Якщо відхилення є дуже малим, годинник майже відразу ж зупиниться. Якщо кут відхилення маятника досить великий, робота годинника незабаром нормалізується. Таким чином, залежно від початкових умов ми отримали два розв'язки диференціального рівняння. *Незначна різниця в початкових умовах не*

впливає на розв'язок задачі. І тоді ми говоримо про стійкість розв'язків. Обидва розв'язки нашої задачі стійкі.

Якщо збудження, що діють на механізм, короткочасні, пов'язані з початковими умовами, ми говоримо про стійкість у сенсі А.М.Ляпунова. (Стійкість при постійно діючих збудженнях досліджена И.Г.Малкіним і Г.Н.Дубошиним).

Нехай задано систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (2.57)$$

Нехай $x = x(t)$ і $y = y(t)$ - розв'язки системи (2.57), що задовольняють початкові умови

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0. \quad (2.58)$$

Нехай $\bar{x} = \bar{x}(t)$ і $\bar{y} = \bar{y}(t)$ - також розв'язки цієї системи, що задовольняють початкові умови

$$\bar{x}|_{t=0} = \bar{x}_0, \quad \bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0.$$

Означення. Розв'язки $x = x(t)$ і $y = y(t)$ системи диференціальних рівнянь (2.57), що задовольняють початкові умови (2.58), називаються *стійкими за Ляпуновим при $t \rightarrow \infty$* , якщо для кожного, як завгодно малого

$\xi > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що при всіх $t > 0$ будуть виконуватися нерівності

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \xi, \quad |\bar{y}(t) - y(t)| < \xi,$$

якщо

$$|\bar{x}_0 - x_0| < \delta \text{ і } |\bar{y}_0 - y_0| < \delta.$$

Зміст цього визначення полягає в тому, що якщо система диференціальних рівнянь описує деякий рух, то у випадку стійкості розв'язків характер рухів мало зміниться при малій зміні початкових даних.

Приклад. Задано одне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dt} = -y + 2 \tag{2.59}$$

Розділяємо змінні

$$\frac{dy}{y-2} = -dx; \quad \ln|y-2| = -x + \ln C.$$

Розв'язок рівняння

$$y = Ce^{-x} + 2 \tag{2.60}$$

Нехай $y = 2$ - частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початковій умові $y|_{t=0} = 2$. У ньому $C = 0$. Знайдемо частинний розв'язок, що

задовольняє початкову умову $\overline{y}|_{t=0} = \overline{y}_0$. Підставляємо $\overline{y}(0) = \overline{y}_0$ в рівність (2.60)

$$\overline{y}_0 = C + 2 \Rightarrow C = \overline{y}_0 - 2.$$

Шуканий частинний розв'язок

$$\bar{y} = (\bar{y}_0 - 2)e^{-t} + 2.$$

Різниця

$$\bar{y} - y = [(\bar{y}_0 - 2)e^{-t} + 2] - 2 = (\bar{y}_0 - 2)e^{-t}$$

прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Тому розв'язок $y = 2$ є стійким.

2.4.2 Автономні системи

Автономною системою диференціальних рівнянь називають систему, яка має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Праві частини рівнянь системи не містять незалежної змінної t .

Розв'язки системи (2.61) зручно розглядати в просторі x_1, x_2, \dots, x_n , який називається *фазовим простором*. Його точки будемо позначати однією буквою $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Домножуючи кожне з рівнянь системи (2.61) на орт відповідної осі координат і складаючи почленно результати, отримаємо більш простий запис системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2.62)$$

У фазовому просторі ми отримали поле швидкостей, що розглядається як стаціонарний потік, а кожний розв'язок $x = x(t)$, що зветься *траєкторією*, описує закон руху частки в цьому потоці.

Система (2.62) може бути задана у всьому просторі (кожний її розв'язок визначений при $-\infty < t < \infty$), або у деякій його області.

Існує три типи траєкторій: незамкнені; замкнені (цикли їхнього розв'язку $x(t)$ періодичні) і точки спокою. Точкою спокою (або точкою рівноваги) називається траєкторія, що складається тільки з однієї точки x_0 . В цьому випадку $f(x_0) = 0$.

Автономна система диференціальних рівнянь на площині має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (2.63)$$

Її можна звести до диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}, \quad (2.64)$$

якщо поділити одну на одну праві і ліві частини системи. Точки, в яких рівняння (2.64) має єдиний розв'язок, називаються *регулярними*. Для точок, в яких $f_1(x, y) = 0$ і $f_2(x, y) = 0$, порушуються умови теореми існування і єдності. Такі точки називаються *особливими*. Система рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

дозволяє визначити координати особливої точки. Поставимо у відповідність особливій точці положення рівноваги. Тоді за напрямком руху траєкторій, що оточують особливу точку, можна судити про стійкість положення рівноваги. Якщо швидкість точки, що зображує, спрямована до особливої точки і з часом точка, що зображує, прагне до збігу з положенням рівноваги, то положення рівноваги або особлива точка будуть асимптотично стійкими. Якщо швидкість точки, що зображує, спрямована від положення рівноваги і з часом точка, що зображує, віддаляється на нескінченність, то положення рівноваги або особлива точка будуть нестійкими. Якщо точка, що зображує, рухається по замкнутій кривій, то положення рівноваги буде стійким, але не асимптотично.

Для автономної системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + gy \\ \frac{dy}{dt} = ax + by \end{cases} \quad (2.65)$$

особливою точкою буде початок координат ПРО(0,0).

Відомо, що цю систему можна звести до одного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c)\frac{dx}{dt} - (ag-bc)x = 0. \quad (2.66)$$

Характеристичне рівняння диференціального рівняння (2.66)

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag-bc) = 0. \quad (2.67)$$

Дослідження показали, що стійкість рішень системи (2.65) залежить від коренів характеристичного рівняння (2.67). Розв'язок буде стійким, якщо:

1. корені характеристичного рівняння дійсні і або обидва менше нуля ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$), або один з них дорівнює нулю, а інший менше нуля ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$);
2. дійсні частини комплексно спряжених коренів менше нуля ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha < 0$);
3. корені характеристичного рівняння чисто уявні ($\lambda_{1,2} = \pm \beta i$).

2.4.3 Фазова площина і фазовий портрет

Для системи диференціальних рівнянь (2.65)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + gy \\ \frac{dy}{dt} = ax + by \end{cases}$$

фазовим простором є площина xOy . Розв'язками цієї системи є параметричні рівняння

$$x = \varphi(t, C_1, C_2), y = \psi(t, C_1, C_2).$$

Якщо задані початкові умови, отримаємо параметричні рівняння кривої

$$x = \varphi(t, x_0, y_0), y = \psi(t, x_0, y_0).$$

Ця крива називається *фазовою траєкторією* системи. Змінюючи положення початкової точки, отримаємо різні фазові траєкторії. Сімейство всіх фазових траєкторій називається *фазовим портретом*.

Характеристика поведінки фазових траєкторій як і стійкість системи залежить від коренів характеристичного рівняння.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:

- Особлива точка ПРО(0,0) – стійкий вузол, якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ (рис.1) і нестійкий вузол, якщо $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ (рис.2).

- Якщо $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$, то особлива точка ПРО(0,0) – нестійке сідло (рис.3).

При цьому на вісях координат (крім початку координат, що є окремою траєкторією) лежать особливі траєкторії, так звані *сепаратриси*. На одній координатній осі лежать дві сепаратриси. Вони спрямовані до

початку координат, якщо відповідне власне значення негативне, і від нього, якщо відповідне власне значення позитивне. Інші траєкторії мають сепаратиси в якості асимптот.

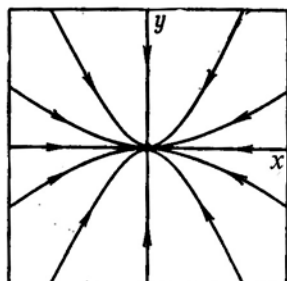


рис.1

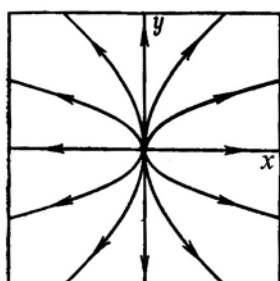


рис.2

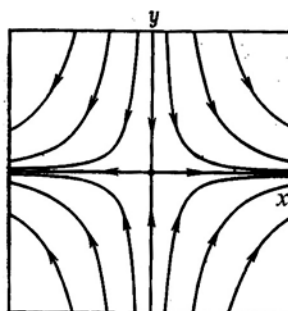


рис.3

2. Корені характеристичного рівняння дійсні, при чому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$.

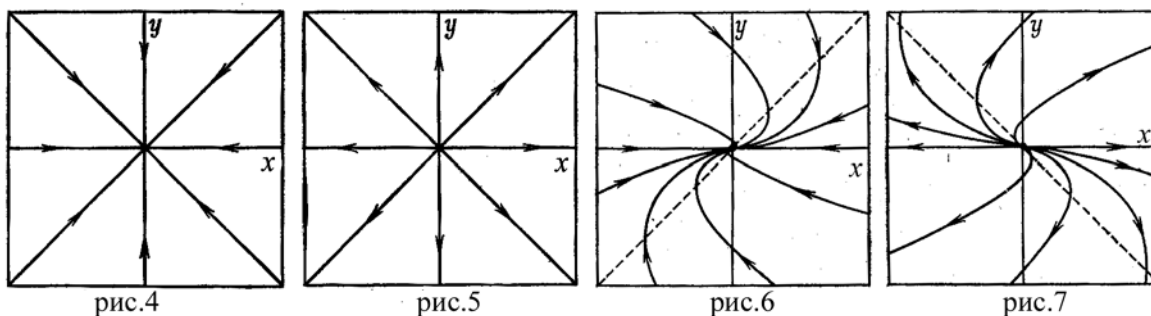
а) Якщо система (2.65) має вигляд $\frac{dx}{dt} = \lambda_0 x, \frac{dy}{dt} = \lambda_0 y$, особлива точка - ПРО(0,0) – *зірковий* вузол, стійкий (мал.4), якщо $\lambda_0 < 0$, і нестійкий (рис.5), якщо $\lambda_0 > 0$.

б) Якщо система (2.65) має вигляд $\frac{dx}{dt} = \lambda_0 x + y, \frac{dy}{dt} = \lambda_0 y$, її розв'язок

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_0 t},$$

$$y = C_2 e^{\lambda_0 t},$$

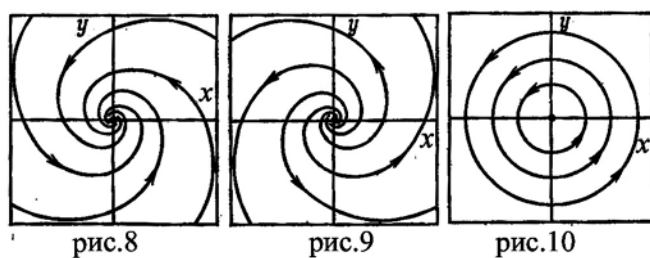
а особлива точка - ПРО(0,0) – *вироджений* вузол; він стійкий, якщо $\lambda_0 < 0$ (мал.6), і нестійкий, якщо $\lambda_0 > 0$ (рис.7).



3. Нехай $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ - розв'язок стійкий. Якщо $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ - розв'язок нестійкий. У цьому випадку одна з осей координат складається з нерухливих точок, а траєкторії - прямі, паралельні іншій осі. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, розв'язок системи (2.65) нестійкий. У цьому випадку всі точки площини є нерухливими точками.

4. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$). Особлива точка ПРО(0,0) - стійкий (рис.8) або нестійкий (рис.9) фокус залежно від того, менше чи більше нуля дійсна частина α .

5. Корені характеристичного рівняння чисто уявні ($\lambda_{1,2} = \pm \beta i$). Особлива точка ПРО(0,0) - стійкий центр (рис.10).



З КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

3.1 Подвійні інтеграли

3.1.1 Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

1) *Задача про об'єм циліндричного тіла.* Нехай маємо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy , з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D , а твірні паралельні осі Oz (рис. 3.1). Таке тіло називають *циліндричним*.

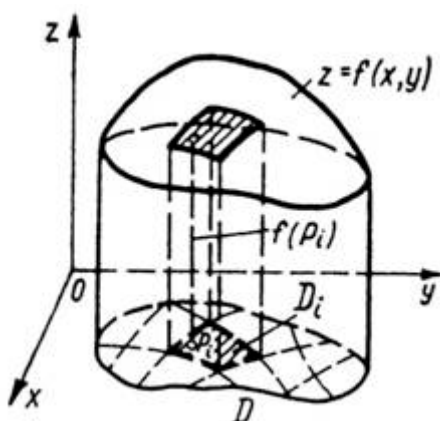


Рис. 3.1

Обчислимо його об'єм V . Для цього довільним способом розіб'ємо область D на n частин D_i , які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній області D_i оберемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, знайдемо значення функції в цій точці $f(\xi_i, \eta_i)$ і

обчислимо добуток $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$. Цей добуток дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz , основою D_i і висотою $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Усього таких стовпчиків є n , і сума їхніх об'ємів

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i \quad (3.1)$$

наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла $V \approx V_n$. Це наближення тим точніше, чим більше число n і чим менші розміри областей D_i . Назвемо діаметром $d(D)$ замкненої обмеженої області D найбільшу відстань між двома точками межі цієї області. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей D_i : $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$. Тоді об'єм даного тіла визначається як границя суми (1) при $\lambda \rightarrow 0$:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (3.2)$$

2) *Задача про масу пластинки.* Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластинку, формою якої є область D (рис. 3.2).

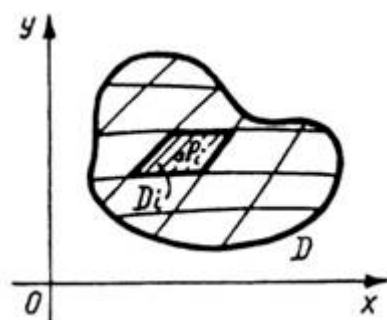


Рис. 3.2

В області D задана неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластинки в точці (x, y) . Знайдемо масу m пластинки. Для цього довільним чином розіб'ємо область D на частини D_i , які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У

кожній області D_i візьмемо яку-небудь точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ і знайдемо густину в цій точці:

$$\gamma(P_i) = \gamma(\xi_i, \eta_i)$$

Якщо розміри області D_i достатньо малі, то густина в кожній точці $(x, y) \in D_i$ мало відрізнятиметься від значення $\gamma(P_i)$. Тоді добуток $\gamma(P_i)\Delta S_i$ наближено визначає масу тієї частини пластинки, яка займає область D_i , а сума

$$m_n = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (3.3)$$

є наближеним значенням маси m всієї пластинки. Точне значення маси дістанемо як границю суми (3) при $\lambda \rightarrow 0$:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} m_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (3.4)$$

Таким чином, різні за змістом задачі ми звели до знаходження границь (3.2) і (3.4) одного й того самого виду. Кожна така границя називається *подвійним інтегралом*.

3.1.2 Поняття та існування подвійного інтеграла. Його геометричний та механічний зміст

Припустимо, що границя області $D \subset \square^2$ складається зі скінченної кількості кривих, заданих рівняннями вигляду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – неперервні функції. Такою областю, наприклад, є

замкнений многокутник, границя якого складається зі скінченного числа відрізків, що представляють собою графіки неперервних функцій вигляду $y = kx + b$ або $x = a$.

Розіб'ємо область D довільним чином на n частин D_i , які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 3). У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (3.5)$$

яку назовемо *інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по області D* .

Означення. Якщо інтегральна сума (3.5) при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i) \rightarrow 0$ має скінченну границю I , яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i , ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D* і позначається одним із символів:

$$I = \iint_D f(x, y) dS \quad \text{або} \quad I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Таким чином, за означенням

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \quad (3.6)$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою в області D* , D – *областю інтегрування*, x і y – *змінними інтегрування*, dS (або $dx dy$) – *елементом площі*.

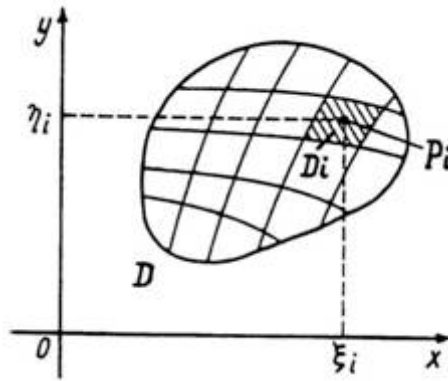


Рис. 3.3

Теорема (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то вона інтегровна в цій області.

Є ще й інші умови існування подвійного інтеграла, але надалі ми вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Повертаючись до задач п. 3.1.1, ми можемо формули (3.2) і (3.4) записати з використанням рівності (3.6) в такому вигляді:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (3.7)$$

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (3.8)$$

Формула (3.7) дає нам геометричний зміст подвійного інтеграла.

Геометричний зміст подвійного інтеграла. Якщо $f(x, y) > 0$, то

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

де V – об’єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy , з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D , а твірні паралельні осі Oz .

Довільну функцію $f(x, y)$ можна тлумачити як густину. Формула (3.8) дає нам механічний зміст подвійного інтеграла.

Механічний зміст подвійного інтеграла. Якщо $f(x, y) > 0$, то

$$m = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

де m – маса пластинки з густиною $f(x, y)$ в точці $(x, y) \in D$.

Зауважимо, що якщо $f(x, y)$ набуває від’ємних значень, то можна сказати, наприклад, що $f(x, y)$ – густина електрики, розподіленої в області D , тобто ввести в розгляд від’ємні маси. Тоді у цьому випадку можливо доцільніше говорити не про “механічний”, а про фізичний зміст інтеграла. Якщо у формулі (3.7) покласти $f(x, y) \equiv 1, (x, y) \in D$, то одержимо формулу для обчислення площі S області D :

$$S = \iint_D dx dy \quad (3.9)$$

3.1.3 Властивості подвійного інтеграла

Основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла.

Властивість 1 (однорідність подвійного інтеграла). Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D cf(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy, \quad c = \text{const.}$$

Властивість 2. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості інтегровних в області D функцій дорівнює алгебраїчній сумі подвійних інтегралів від цих функцій:

$$\begin{aligned} \iint_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y) \pm \dots \pm f_n(x, y)) dx dy = \\ = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy \pm \dots \pm \iint_D f_n(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Властивість 3. Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

Властивість 4 (інтегрування нерівності). Якщо $f(x, y) \leq g(x, y)$ у довільній точці $(x, y) \in D$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y).$$

Властивість 5 (адитивність по області інтегрування). Якщо область інтегрування D функції $f(x, y)$ є об'єднанням областей D_1, D_2, \dots, D_n , що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

Властивість 6 (оцінка подвійного інтеграла). Якщо функція

$f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , яка має площу S , то

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS,$$

Де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D .

Властивість 7 (теорема про середнє значення). Якщо функція

$f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , яка має площу S , то

в цій області існує така точка (x_0, y_0) , що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0)S.$$

Величину $f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$ називають *середнім значенням*

функції $f(x, y)$ в області D .

3.1.4 Обчислення подвійного інтеграла

Означення подвійного інтеграла одночасно дає і спосіб його обчислення. Однак цей спосіб досить складний, тому розглянемо інший, який зводиться до обчислення так званого *повторного інтеграла* – двох визначених інтегралів.

Якщо $f(x, y) \geq 0$ для $(x, y) \in D$, то подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ виражає об'єм циліндричного тіла з основою D , обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , а напрямною є межа області D (рис. 3.4).

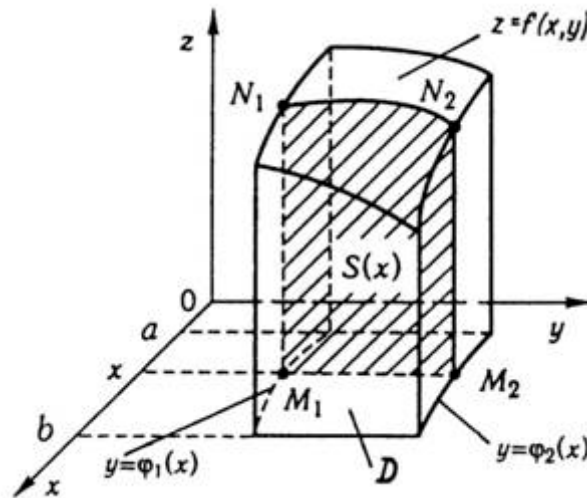


Рис. 3.4

Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних перерізів

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (3.10)$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox , а $x = a$ та $x = b$ – рівняння площин, що обмежують задане тіло.

Спочатку розглянемо випадок, коли область D обмежена прямими $x = a$, $x = b$, де $a < b$, та неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 3.5).

Провівши через точку $(x; 0; 0)$ ($a < x < b$), перпендикулярну до осі Ox площину, дістанемо у перерізі криволінійну трапецію $M_1N_1N_2M_2$, яка перетне область D по прямій M_1M_2 . Точку M_1 називатимемо точкою входу в область D , а точку M_2 – точкою виходу з неї. Їх ординати позначимо відповідно $y_{вх}$, $y_{вих}$. Тоді $y_{вх} = \varphi_1(x)$, $y_{вих} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається *правильною в напрямі осі Oy* .

Означення. Область D називається *правильною в напрямі осі Oy (осі Ox)*, якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy (осі Ox), перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Правильна область в напрямі осі Oy зображена на рис. 3.5, а правильна область в напрямі осі Ox – на рис. 3.6.

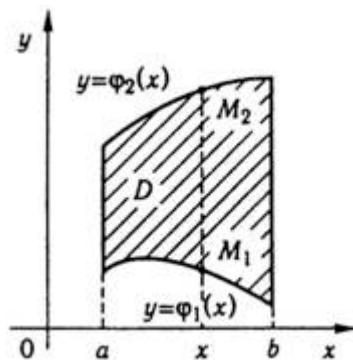


Рис. 3.5

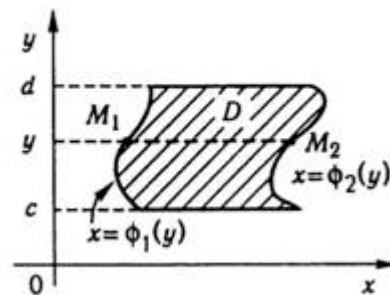


Рис. 3.6

Площа $S(x)$ трапеції $M_1N_1N_2M_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int_{y_{вх}}^{y_{вих}} f(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Підставляючи у рівність (3.10) вираз для $S(x)$, дістанемо

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Оскільки об'єм V циліндричного тіла дорівнює подвійному інтегралу $\iint_D f(x, y) dx dy$, то маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

або

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3.11)$$

Праву частину формули (3.11) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x, y)$ по області D . У повторному інтегралі (3.11) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x . Інтеграл по змінній y називають *внутрішнім*, а по змінній x – *зовнішнім*. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла одержуємо певну функцію від однієї змінної x . Інтегруючи цю функцію в межах від a до b , тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число – значення подвійного інтеграла.

Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x = \phi_1(y)$, $x = \phi_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$ ($c < d$), причому $\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$ для всіх $y \in [c; d]$, то справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (3.12)$$

У формулі (3.12) внутрішнім є інтеграл по змінній x . Обчислюючи його в межах від $\phi_1(y)$ до $\phi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y . Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d , одержимо значення подвійного інтеграла.

Визначена таким чином область D є правильна в напрямі осі Ox .

Праві частини формул (3.11) і (3.12) також називають *двократними інтегралами* від функції $f(x, y)$ по області D .

Для зведення подвійного інтеграла до повторного потрібно побудувати область інтегрування D , а потім визначити порядок інтегрування.

Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1. Обчислити $\iint_D (1 + x - y) dx dy$, якщо область D ,

обмежена лініями $y = x$, $y = 2 - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо область D . Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$ (рис. 3.7).

Оскільки область D правильна в напрямі осі Oy , то подвійний інтеграл обчислюється за формулою (3.11):

$$\begin{aligned}
\iint_D (1+x-y) dx dy &= \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} (1+x-y) dy = \int_{-2}^1 \left(y + xy - \frac{y^2}{2} \right) \bigg|_x^{2-x^2} dx = \\
&= \int_{-2}^1 \left(2-x^2 + x(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} - x - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\
&= \int_{-2}^1 \left(x - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{2 \cdot 5} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) \bigg|_{-2}^1 = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{32}{2 \cdot 5} + \frac{8}{2 \cdot 3} = \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

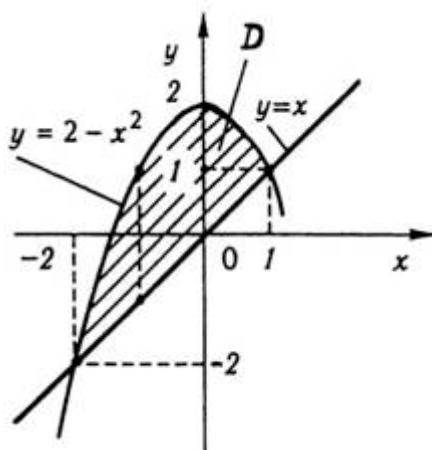


Рис. 3.7

Зауваження 1. Якщо область D правильна в обох напрямках, то подвійний інтеграл можна обчислювати за формулою (3.11) або (3.12). Результати матимемо однакові.

Зауваження 2. Повторні інтеграли в правих частинах формул (3.11) і (3.12) називаються інтегралами з різним порядком інтегрування. Щоб змінити порядок інтегрування потрібно від формули (3.11) перейти до

Зауваження 3. Наведені геометричні міркування при отриманні формул (3.11) і (3.12) можливі у випадку, коли $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$. Ці формули справедливі також тоді, коли $f(x, y) < 0$ або $f(x, y)$ змінює знак в області D . Достатньо вимагати неперервності функції $f(x, y)$ в області D .

Зауваження 4. Якщо область інтегрування D є прямокутником, обмеженим прямими $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ ($a < b$, $c < d$), то справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (3.13)$$

Якщо підінтегральна функція має вигляд $f(x, y) = \varphi(x)\phi(y)$, то формулу (3.13) можна записати так:

$$\iint_D \varphi(x)\phi(y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx \int_c^d \phi(y) dy = \int_c^d \phi(y) dy \int_a^b \varphi(x) dx$$

Зазначимо, що у випадку, коли область D відмінна від розглянутих вище видів, її слід розбити (якщо це можливо), на скінченне число областей, до яких можна застосувати формулу (3.11) або (3.12). Наприклад, якщо функція неперервна в замкненій області D , зображеній на рис. 3.9, то

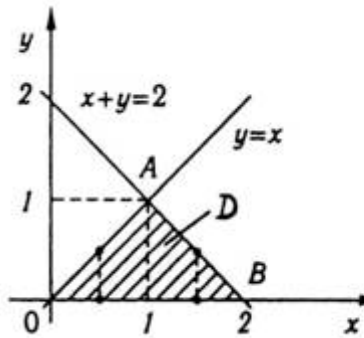


Рис. 3.8

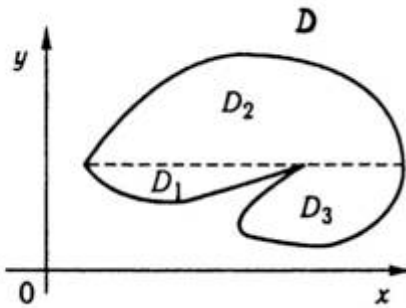


Рис. 3.9

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \iint_{D_3} f(x, y) dx dy$$

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y) dy.$$

Розв'язання. Маємо повторний інтеграл, записаний за формулою (3.11). Будуємо область D , враховуючи межі інтегрування. Вона обмежена лініями: $y = \phi_1(x) = \sqrt{x}$, $y = \phi_2(x) = 2 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$.

Тому проекцією цієї області на вісь Ox є відрізок $[0; 1]$ (рис. 3.10).

Якщо функція неперервна у заданій області D , то можна змінити порядок інтегрування і записати повторний інтеграл за формулою (3.12). Проекцією області D на вісь Oy є відрізок $[0; 2]$. Зліва область D обмежена прямою $\phi_1 = 0$, а справа – кривою

$$\phi_2(y) = \begin{cases} y^2, & 0 \leq y \leq 1, \\ \sqrt{2-y}, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Тому маємо

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$$

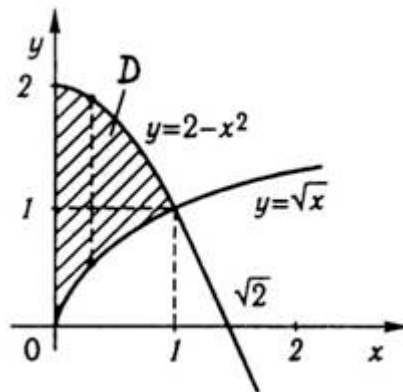


Рис. 3.10

Отже, при зміні порядку інтегрування іноді область D доводиться розбивати на дві (D_1 і D_2) або більше областей.

3.1.5 Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Одним із методів спрощення обчислення подвійного інтеграла є метод заміни змінних у подвійному інтегралі.

Нехай у деякій області D для функції $f(x, y)$ існує подвійний інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Припустимо далі, що з допомогою формул подвійний інтеграл перетворюється від декартових координат $(x; y) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ до криволінійних координат (u, v) , пов'язаних з декартовими координатами співвідношеннями:

$$x = x(u, v); y = y(u, v) \quad (3.14)$$

ми переходимо до нових змінних u і v . Припускається, що u і v визначаються з (3.14) єдиним способом:

$$u = u(x, y); v = v(x, y) \quad (3.15)$$

Позначимо через D^* множину точок $M^*(u, v)$. За допомогою формул (3.15) кожній точці $M(u, v)$ із області D ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u, v)$ із області D^* . Формули (3.14) називають *формулами перетворення координат*, а формули (3.15) – *формулами оберненого перетворення*.

Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо перетворення (3.14) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (14) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива така формула заміни змінних:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (3.17)$$

Функціональний визначник (3.16) називається *визначником Якобі* або *якобіаном*. Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (3.14), ми маємо елемент площі $dx dy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u, v)| du dv$ в координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^* .

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за відомими формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi \\ (0 \leq \rho \leq +\infty, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}$$

Оскільки

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

то формула (3.17) набуває вигляду

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (3.18)$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy , а D^* – відповідна їй область в полярній системі координат. Вираз $\rho d\rho d\varphi$ є елементом площі в полярних координатах.

Формула (3.18) виражає правило заміни змінних у подвійному інтегралі при переході до полярних координат.

Для спрощення запису в подальшому не будемо вводити нове позначення для області змін ρ і φ (тобто D^*), а будемо розглядати область D як задану в декартовій системі координат, так і задану в полярній системі координат. Це зв'язано з тим, що перехід від змінних x, y до змінних ρ, φ можна розглядати не як перетворення області D , а як перехід до узгодженої з декартовою полярної системи координат. Знаходження області, що відповідає області D , при переході до полярних координат на площині, тобто при $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, спрощується геометричним змістом ρ, φ . Довжина радіуса-вектора з початку координат в точку $(x; y)$ це ρ , а φ – кут між цим вектором і додатним напрямом осі Ox .

Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах проводять шляхом зведення його до повторного. Нехай область D обмежена лініями $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (причому $\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$) (рис. 3.12), $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ – неперервні функції на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \quad (3.19)$$

Якщо полюс лежить на межі області D (рис. 3.13), то радіус точки входу дорівнює нулю і тому

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

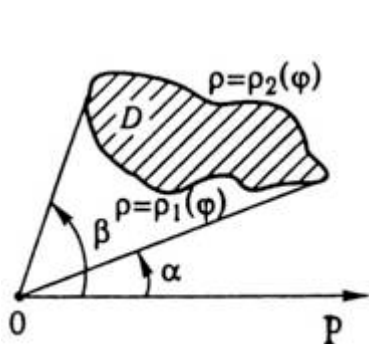


Рис. 3.12

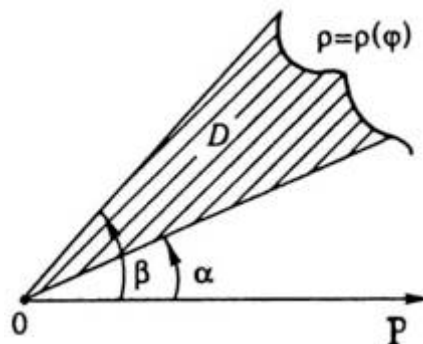


Рис. 3.13

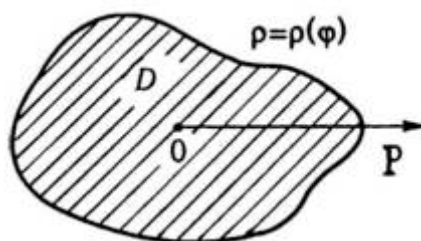


Рис. 3.14

Якщо полюс лежить всередині області D , а ця область обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 3.14), то

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Якщо $\rho = \rho(\varphi) = R = \text{const}$, тобто область D є кругом із центром у полюсі, то

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Зауваження 1. Оскільки сума $x^2 + y^2$ в полярних координатах має простий вигляд: $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$, то формулу (3.18)

доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння межі області D містить цю суму.

3.1.6 Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії

Площа плоскої фігури

Якщо в площині Oxy задана фігура, що має форму замкненої обмеженої області D , то площа S цієї фігури знаходиться (п. 3.1.2) за формулою (3.9):

$$S = \iint_D dx dy$$

При переході до полярних координат ця формула набуває вигляду

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi \quad (3.20)$$

Об'єм тіла. Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy , а зверху – поверхнею

$z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна та невід'ємна в області D , знаходиться за формулою (3.7) (п. 3.1.2):

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Площа поверхні. Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо поверхня σ задана рівнянням

$$z = f(x, y) \quad (3.21)$$

проектується на площину Oxy в область D (рис. 3.15)

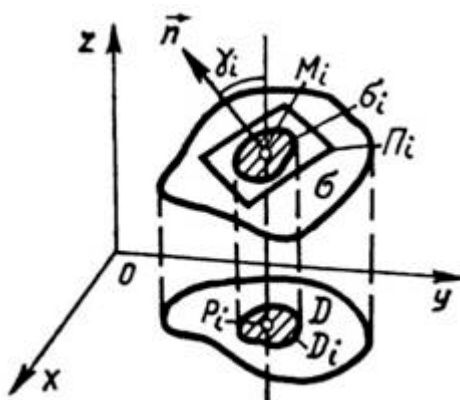


Рис. 3.15

і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy. \quad (3.22)$$

Якщо поверхню задано рівнянням $x = \phi(y, z)$ ($y = \phi(x, z)$) і проекцією її на площину Oyz (Oxz) є область D_{yz} (D_{xz}), причому функція $\phi(y, z)$ ($\phi(x, z)$) і її перші частинні похідні неперервні в області D_{yz} (D_{xz}), то матимемо ще такі формули для обчислення площі поверхні:

$$Q = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + (\phi'_y(y, z))^2 + (\phi'_z(y, z))^2} dy dz. \quad (3.23)$$

$$Q = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + (\phi'_x(x, z))^2 + (\phi'_y(x, z))^2} dx dz. \quad (3.24)$$

3.7 Застосування подвійних інтегралів до задач механіки

Маса пластинки. Нехай на площині Oxy маємо матеріальну пластинку, яка має форму замкненої обмеженої області D , в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$. Як відомо (п. 3.1.2), маса такої пластинки визначається за формулою (3.8):

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

Центр маси пластинки. Статичні моменти. Знайдемо координати центра маси пластинки, що займає в площині Oxy деяку область D . Нехай неперервна функція $\gamma(x, y)$ – густина цієї пластинки в точці $M(x, y)$.

Координати центра маси пластинки визначаються формулами

$$x_c = \frac{\iint_D x\gamma(x, y) dx dy}{m}, \quad y_c = \frac{\iint_D y\gamma(x, y) dx dy}{m}, \quad (3.25)$$

де $m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$ – маса пластинки.

Якщо пластинка однорідна, тобто $\gamma = const$, то формули координат центра маси спрощуються:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}. \quad (3.26)$$

Величини

$$M_y = \iint_D x\gamma(x, y) dx dy, \quad M_x = \iint_D y\gamma(x, y) dx dy,$$

що стоять у формулах (3.25), називаються *статичними моментами* пластинки відносно осей Oy і Ox .

Таким чином, обчислення координат центра маси пластинки зводиться до обчислення трьох подвійних інтегралів.

Моменти інерції пластинки. Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Формули для обчислення моментів інерції розглядуваної пластинки відносно осей координат:

$$I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy. \quad (3.27)$$

3.2 Потрійні інтеграли

3.2.1 Поняття і існування потрійного інтеграла. Його геометричний і механічний зміст

Нехай довільна функція $u = f(x, y, z)$ визначена і обмежена в замкненій обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^3$. Розіб'ємо область G довільним чином сіткою поверхонь на n частин G_i , які не мають спільних внутрішніх точок, і

об'єми яких дорівнюють $\Delta V_i, i=1,2,\dots,n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \quad (3.28)$$

яка називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y, z)$ по області G .

Нехай $d(G_i)$ – діаметр G_i .

Означення. Якщо інтегральна сума (3.28) при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i) \rightarrow 0$ має скінченну границю I , яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i , ні від вибору в них точок P_i , то ця границя називається *потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області G* і позначається одним із таких символів:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dV \quad \text{або} \quad I = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

де функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою в області G* , G – *область інтегрування*, x, y, z – *змінні інтегрування*, dV (або $dx dy dz$) – *елемент об'єму*.

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії

подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формулюваннями тверджень і короткими поясненнями.

Геометричний зміст потрійного інтеграла.

Якщо $f(x, y, z) \equiv 1$, $(x; y; z) \in G$, то потрійний інтеграл дорівнює об'єму V тіла G :

$$V = \iiint_G dx dy dz \quad (3.29)$$

Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ у точці $(x; y; z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz \quad (3.30)$$

Оскільки довільну функцію $f(x, y, z)$ можна тлумачити як густину деякого розподілу маси, то формула (3.30) дає нам механічний зміст потрійного інтеграла.

Механічний зміст потрійного інтеграла. Якщо $f(x, y, z) > 0$, то

$$m = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$$

Зауважимо, що якщо $f(x, y, z)$ набуває від'ємних значень, то $f(x, y, z)$ можна вважати густиною електрики, розподіленої на G тобто ввести і від'ємні маси.

3.2.2 Властивості потрійного інтеграла

Властивість 1 (однорідність потрійного інтеграла). Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint_G cf(x, y, z) dV = c \iiint_G f(x, y, z) dV, \quad c = \text{const}$$

Властивість 2. Потрійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості інтегровних в області G функцій дорівнює алгебраїчній сумі потрійних інтегралів від цих функцій:

$$\begin{aligned} \iiint_G (f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z) \pm \dots \pm f_n(x, y, z)) dV = \\ \iiint_G f_1(x, y, z) dV \pm \iiint_G f_2(x, y, z) dV \pm \dots \pm \iiint_G f_n(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

Властивість 3. Якщо в області G функція $f(x, y, z) \geq 0$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \geq 0$$

Властивість 4 (інтегрування нерівності).

Якщо $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$ у довільній точці $(x, y, z) \in G$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \leq \iiint_G \varphi(x, y, z) dV$$

Властивість 5 (адитивність по області інтегрування).

Якщо область інтегрування G функції $f(x, y, z)$ є об'єднанням областей G_1, G_2, \dots, G_n , що не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV + \dots + \iiint_{G_n} f(x, y, z) dV.$$

Властивість 6 (оцінка потрібного інтеграла).

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G , яка має об'єм V , то

$$mV \leq \iiint_G f(x, y, z) dV \leq MV,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y, z)$ в області G .

Властивість 7 (теорема про середнє значення).

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G , яка має об'єм V , то в цій області існує така точка $(x_0; y_0; z_0)$, що

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = f(x_0; y_0; z_0)V.$$

Величину

$$f(x_0; y_0; z_0) = \frac{1}{V} \iiint_G f(x, y, z) dV$$

називають *середнім значенням функції* $f(x, y, z)$ в області G .

3.2.3 Обчислення потрійного інтеграла

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійних інтегралів зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

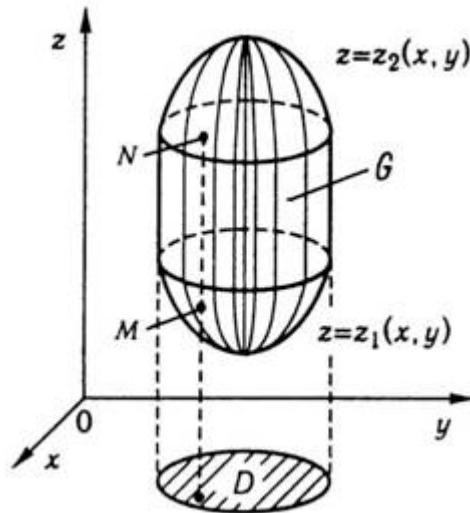


Рис. 3.16

Нехай замкнена область G обмежена знизу і зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ визначені і неперервні в області D , яка є проєкцією області G на площину Oxy , причому $z_1(x, y) < z_2(x, y)$, $(x, y) \in D$. Із боків область G обмежена циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz . Кожна пряма, паралельна осі Oz , перетинає границю області G не більше ніж у двох точках (рис. 3.16).

Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається *правильною в напрямі осі Oz* . Припустимо, що кожна пряма, яка проходить через кожну внутрішню точку $(x, y, 0) \in D$ паралельно осі Oz , перетинає

межу області G у точках M і N . Точку M назовемо *точкою входу в область G* , точку N – *точкою виходу з області G* а їхні аплікати позначимо відповідно через $z_{\text{вх}}$ і $z_{\text{вих}}$. Тоді $z_{\text{вх}} = z_1(x, y)$, $z_{\text{вих}} = z_2(x, y)$, і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ має місце формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3.31)$$

Тут у внутрішньому інтегралі x, y вважають сталими. Після його обчислення отримаємо вираз, залежний тільки від x, y .

Якщо, крім цього, область D є правильною в напрямі осі Oy , тобто

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

де $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a, b]$, то

$$\iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3.32)$$

Із формул (3.34) і (3.35) отримаємо

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (3.33)$$

Права частина формули (3.33) називається *повторним або трикратним інтегралом* від функції $f(x, y, z)$ по області G .

Порядок інтегрування може бути й іншим. Якщо область D правильна в напрямі осі Ox , тобто

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\},$$

де $\phi_1(y), \phi_2(y)$ – неперервні функції на відрізку $[c, d]$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

3.2.4 Заміна змінних у потрійному інтегралі

Декартова система координат не завжди зручна. Так, при дослідженні руху рідини в циліндричних трубах або повітряних мас у приземному шарі атмосфери використовувати таку систему нераціонально. Тому поряд із декартовою використовують і інші ортогональні системи координат, найбільш поширеними серед яких являються *циліндрична* і *сферична*.

Координатними поверхнями циліндричної системи являються циліндр $\rho = \text{const}$ і площини $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$, тобто вона є об'єднанням полярної системи на площині Oxy і декартової в напрямку осі Oz . Циліндрична (рис. 3.17) і декартова системи пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \\ (0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty) \end{aligned}$$

Координатними поверхнями сферичної системи є сфера $\rho = \text{const}$, площина $\varphi = \text{const}$ і конус $\theta = \text{const}$. Сферична (рис. 3.18) і декартова системи пов'язані співвідношеннями

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

$$(0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi).$$

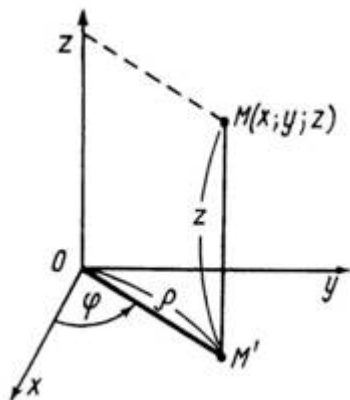


Рис. 3.17

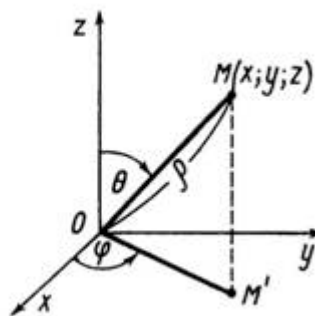


Рис. 3.18

Нехай неперервно диференційовані функції

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

здійснюють взаємно однозначне відображення замкненої обмеженої області G простору (x, y, z) на область G^* простору (u, v, w) . Тоді, як і в двовимірному випадку, можна довести, що для неперервної в області G функції $f(x, y, z)$ справедлива формула:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де якобіан в області G^* не дорівнює нулю:

$$J = J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

У випадку циліндричних координат маємо

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

З формули (3.34) дістаємо потрібний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz \end{aligned} \quad (3.35)$$

Для сферичних координат маємо

$$J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

З формули (3.34) дістаємо потрібний інтеграл у сферичних координатах:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{G^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (3.36)$$

При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область G^* , як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо по області G , користуючись геометричним змістом нових координат. При цьому рівняння поверхонь $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, які обмежують область G , записують у нових координатах.

3.2.5. Застосування потрійних інтегралів до задач геометрії

Об'єм тіла. Якщо деяке тіло є замкненою обмеженою областю G , що має об'єм V , то відповідно до формули (3.29)

$$V = \iiint_G dx dy dz \quad (3.37)$$

Доведення формули (41) випливає з означення потрійного інтеграла.

3.2.6. Застосування потрійних інтегралів до задач механіки

Маса тіла. Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ у точці $(x, y, z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz \quad (3.38)$$

Моменти інерції тіла. Моменти інерції I_x, I_y, I_z розглядуваного тіла відносно координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно дорівнюють

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_G (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, \\ I_y &= \iiint_G (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, \\ I_z &= \iiint_G (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV, \end{aligned} \quad (3.39)$$

Моменти інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_G z^2 \gamma(x, y, z) dV, \\ I_{xz} &= \iiint_G y^2 \gamma(x, y, z) dV, \\ I_{yz} &= \iiint_G x^2 \gamma(x, y, z) dV, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Момент інерції тіла відносно початку координат обчислюється за формулою

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV. \quad (3.41)$$

Статичні моменти тіла та його центр маси. Статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюються за формулами:

$$M_{xy} = \iiint_G z \gamma(x, y, z) dV,$$

$$M_{xz} = \iiint_G y \gamma(x, y, z) dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x \gamma(x, y, z) dV. \quad (3.42)$$

Координати x_c, y_c, z_c центра маси тіла визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (3.43)$$

3.3 Криволінійні інтеграли

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива.

Такого роду інтеграли називаються криволінійними. Вони мають широке застосування в різноманітних розділах математики.

Розрізняють два типи криволінійних інтегралів, які зазвичай називають криволінійними інтегралами першого і другого роду.

3.3.1 Поняття криволінійного інтеграла першого роду (по довжині дуги). Його геометричний і фізичний зміст

Нехай на площині Oxy розміщена деяка крива AB , гладка або кусково-гладка (рис. 3.19), і припустимо, що функція $z = f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій AB .

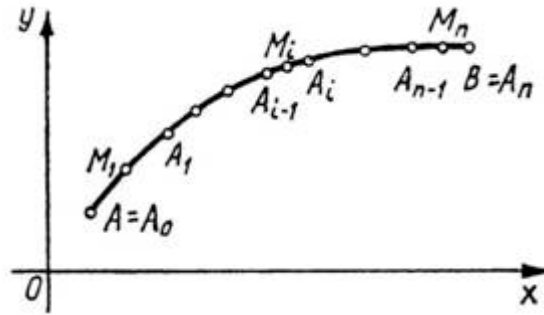


Рис. 3.19

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i \quad (3.44)$$

де Δl_i - довжина дуги $A_{i-1}A_i$. Сума (3.44) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по кривій AB .

Означення. Якщо інтегральна сума (3.44) при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$ має скінченну границю I , яка не залежить ні від розбиття кривої AB , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають $\int_{AB} f(x, y) dl$.

Таким чином, за означенням

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i \quad (3.45)$$

Якщо границя (3.45) існує, то функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою на кривій AB* , крива AB – *контуром інтегрування*, A – *початковою*, а B – *кінцевою* точками інтегрування.

Криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтеграла за формулою:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl, \quad (3.46)$$

де L – довжина кривої AB . Формула (3.46) не тільки зводить криволінійний інтеграл до звичайного, але й доводить існування криволінійного інтеграла для функції $f(x, y)$, яка неперервна на кривій AB .

Хоча криволінійний інтеграл першого роду безпосередньо зводиться до визначеного, між цими поняттями існує наступна відмінність. В інтегральній сумі (3.44) величини Δl_i обов'язково додатні, незалежно від того, яку точку кривої AB ми рахуємо початковою, а яку – кінцевою, тобто

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl,$$

у той час, як визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ при перестановці меж інтегрування змінює знак. В усьому іншому криволінійний інтеграл першого роду має ті ж самі властивості, що і визначений інтеграл, що безпосередньо випливає з формули (3.46).

Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду.

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ представляє собою площу криволінійної трапеції, то криволінійний інтеграл $\int_{AB} f(x, y)dl$ при $f(x, y) \geq 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x, y)$ і паралельні осі Oz , а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис. 3.20).

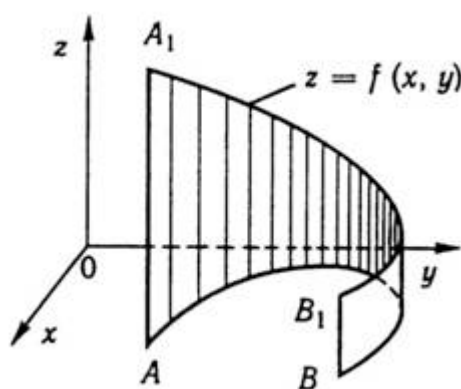


Рис. 3.20

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то одержимо криволінійний інтеграл $\int_{AB} dl$, значення якого є довжина дуги кривої AB .

Фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду. Якщо крива AB – матеріальна, тобто вздовж кривої розподілено з лінійною густиною $\gamma(x, y)$ деяку масу m , то

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i = \int_{AB} \gamma(x, y) dl$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

3.3.2 Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ функції, а $f(x, y)$ – функція неперервна вздовж цієї кривої, причому для визначеності будемо рахувати, що точці A відповідає значення $t = \alpha$, точці B – значення $t = \beta$. Тоді для будь-якої точки $M(x, y)$ кривої AB довжину l дуги AM можна розглядати як функцію параметра t , $l = l(t)$ і обчислити її за формулою:

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

звідки за правилом диференціювання інтеграла по верхній межі знаходимо

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (3.47)$$

Здійснивши заміну змінної у визначеному інтегралі рівності (3.46), з урахуванням (3.47), одержимо

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (3.48)$$

Зокрема, якщо крива AB явно задана одним із рівнянь

$y = y(x)$, $x \in [a; b]$, або $x = x(y)$, $y \in [c; d]$, і відповідно функція $y(x)$ або $x(y)$ разом із похідною $y'(x)$ або $x'(y)$ неперервні відповідно на відрізках $[a; b]$ або $[c; d]$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(x, y) dl &= \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \\ \int_{AB} f(x, y) dl &= \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Якщо крива AB задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, то

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi, \\ \int_{AB} f(x, y) dl &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Поширимо поняття криволінійних інтегралів першого роду на просторові криві.

Розглянемо просторову криву AB , яку задано параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha; \beta]$, де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, а функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна вздовж кривої AB . Внаслідок неперервності $x'(t), y'(t), z'(t)$ крива AB є гладкою і її нескінченно малі дуги еквівалентні до своїх хорд. Елементарну дугу dl з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами dx, dy, dz . Тоді

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

Таким чином, має місце повна аналогія з формулою (3.47). Тоді ясно, що

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (3.51)$$

3.3.3 Застосування криволінійних інтегралів першого роду до задач геометрії

Нехай у площині Oxy задано кусково-гладку криву AB замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$.

Площа циліндричної поверхні. Площа P циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x, y)$, обчислюється за формулою:

$$P = \int_{AB} f(x, y) dl. \quad (3.52)$$

Довжина кривої. Довжина L кривої AB визначається за формулою:

$$L = \int_{AB} dl. \quad (3.53)$$

Формули (3.52) і (3.53) випливають з геометричного змісту криволінійного інтеграла першого роду.

3.3.4 Застосування криволінійних інтегралів першого роду до задач механіки

Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$.

Маса кривої. Маса кривої L обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl \quad (3.54)$$

Центр маси та статичні моменти кривої. Координати x_c, y_c центра маси кривої L обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{\int_L x\gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y\gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_x}{m}, \quad (3.55)$$

де M_x, M_y – статичні моменти кривої L відносно осей Ox, Oy .

Моменти інерції кривої. Моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат відповідно дорівнюють:

$$I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \quad (3.56)$$

Робота змінної сили. Нехай матеріальна точка M переходить вздовж кривої L із положення A у положення B , причому під час руху на точку M діє сила \vec{F} , напрямок і величина F якої змінюються разом із положенням точки M . Знайдемо роботу сили \vec{F} на переміщенні AB . Для цього виділимо із кривої L елементарну дугу dl . Цю дугу можна вважати прямолінійною і прийняти, що за час руху M вздовж цієї дуги сила \vec{F} не встигає змінитися ні за величиною, ні за напрямком. Тоді елементарна робота dA сили на дузі dl може бути знайдена як робота сталої сили на прямолінійному переміщенні, тобто як скалярний добуток сили \vec{F} і вектора переміщення $d\vec{l}$. Іншими словами, $dA = F \cos \theta dl$, де θ – кут між силою \vec{F} і кривою L (рис. 3.21).

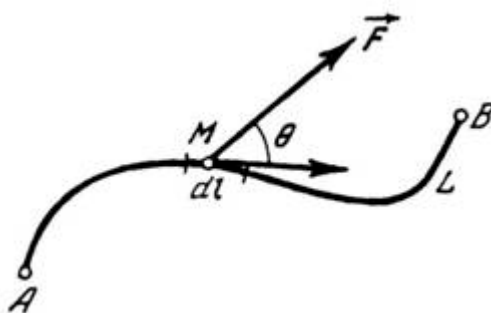


Рис. 3.21

Звідси очевидно, що

$$A = \int_L F \cos \theta dl, \quad (3.57)$$

Зауважимо, що F (числове значення сили \vec{F}) і кут θ є функціями від координат x, y, z точки M .

3.3.5 Поняття криволінійного інтеграла другого роду (по координатах)

Криволінійний інтеграл другого роду визначається майже так само, як інтеграл першого роду.

Нехай функція $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) визначена і обмежена на гладкій чи кусково-гладкій кривій AB у площині Oxy . На відміну від інтегралів першого роду крива AB розглядається як напрямна лінія. Нехай A – її початок, а B – кінець. Розіб'ємо AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n = B$ на n довільних частин в напрямі від A до B . Як і при означенні інтеграла першого роду, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо по точці $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \quad \left(\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right), \quad (3.58)$$

де Δx_i (Δy_i) – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox (на вісь Oy) (рис. 3.22).

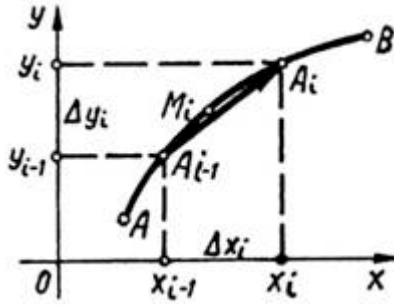


Рис. 3.22

Сума (3.58) називається *інтегральною сумою* для функції $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) по координаті x (y) вздовж кривої AB .

Означення. Якщо інтегральна сума (3.58) при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$ має скінченну границю I , яка не залежить ні від розбиття кривої AB , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають *криволінійним інтегралом від функції $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) по координаті x (y) вздовж кривої AB* і позначають

$$\int_{AB} P(x, y) dx \quad \left(\int_{AB} Q(x, y) dy \right).$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i \\ \left(\int_{AB} Q(x, y) dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right). \end{aligned}$$

Суму

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

називають *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом другого роду від функцій P і Q по кривій AB* і позначають СИМВОЛОМ

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

3.3.6 Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta],$$

де $x(t), y(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$ разом зі своїми похідними $x'(t), y'(t)$ функції, причому точці A кривої відповідає значення $t = \alpha$, точці B – значення $t = \beta$, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні вздовж кривої AB . Тоді маємо формули:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt, \\ \int_{AB} Q(x, y)dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt, \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt, \end{aligned} \quad (3.60)$$

що зводять криволінійні інтеграли до визначених інтегралів.

Якщо криву AB явно задано рівнянням $y = y(x)$, де функція $y(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ разом із своєю похідною $y'(x)$, або рівнянням $x = x(y)$, де функція $x(y)$ неперервна на відрізку $[c, d]$ разом із своєю похідною $x'(y)$, і вздовж цієї кривої неперервна функція $f(x, y)$, то з формули (3.60) маємо

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ \int_c^d (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y))dy, \end{aligned} \quad (3.62)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_L xydx + (x^2 + y)dy$, якщо L :

- 1) дуга параболи $y = \frac{x^2}{2} + 1$ між точками $A(0;1)$ і $B(2;3)$;
- 2) відрізок прямої AB .

Розв'язання. 1) Зведемо обчислення криволінійного інтеграла до визначеного, покладаючи $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $y' = x$, $0 \leq x \leq 2$. Тоді за формулою (3.61) маємо

$$\int_L xy dx + (x^2 + y) dy = \int_0^2 \left(x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) + \left(x^2 + \frac{x^2}{2} + 1 \right) x \right) dx = \int_0^2 (2x^3 + 2x) dx = 12.$$

2) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}, \text{ тобто } \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{2}, \text{ звідки } y = x + 1.$$

Таким чином, покладаючи $y = x + 1$, $y' = 1$, $0 \leq x \leq 2$, за формулою (3.61) маємо

$$\int_L xy dx + (x^2 + y) dy = \int_0^2 (x(x + 1) + x^2 + x + 1) dx = \int_0^2 (2x^2 + 2x + 1) dx = \frac{34}{3}.$$

Поширимо поняття криволінійних інтегралів другого роду на просторові криві.

Розглянемо просторову криву AB , яку задано параметричними рівняннями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha; \beta],$$

де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому зміні параметра $t \in [\alpha; \beta]$ відповідає рух по кривій AB від

А до В. $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні вздовж кривої АВ. Тоді справедлива формула

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt. \quad (3.68)$$

Формули (3.59), (3.60), (3.61)–(3.63) використовуються для обчислення криволінійних інтегралів другого роду. З цих формул випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} (x + y)dx + 2zdy + xydz,$$

якщо АВ – дуга кривої $x = t$, $y = t^2$, $z = 3 - t$, причому точці А відповідає $t = 1$, а точці В відповідає $t = 2$.

Розв’язання. За формулою (3.63) маємо

$$\int_{AB} (x + y)dx + 2zdy + xydz = \int_1^2 \left(t + t^2 + 2(3 - t)2t - t^3 \right) dt = 8\frac{3}{4}.$$

Підкреслимо суттєву відмінність між криволінійними інтегралами: на відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

У випадку, коли L – замкнена крива, тобто коли точка B співпадає з точкою A , із двох можливих напрямів обходу замкненого контура L домовимось називати *додатним* той, при якому область, що розміщена всередині цього контура, залишається зліва по відношенню до точки, яка здійснює обхід (рис. 3.23 а). Протилежний напрям обходу контура L домовимось називати *від’ємним* (рис. 3.23 б).

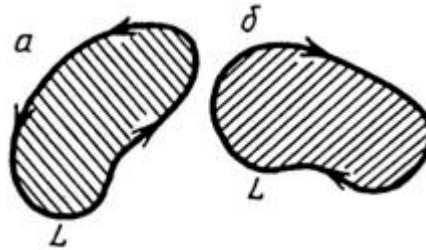


Рис. 3.23

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L , що має додатний напрям, часто позначають символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\oint_L (x + y)dy$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ (рис. 3.24).

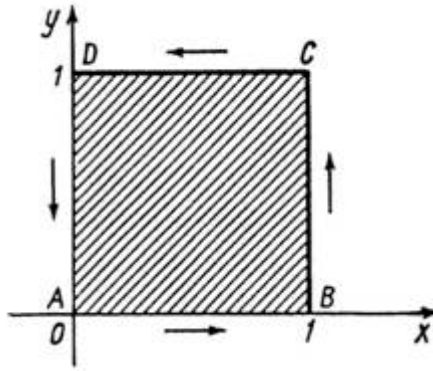


Рис. 3.24

Розв'язання. На рис. 3.24 додатний напрям обходу контура L позначений стрілками. Розбиваючи весь контур інтегрування на частини, маємо

$$\oint_L (x+y) dy = \int_{AB} (x+y) dy + \int_{BC} (x+y) dy + \int_{CD} (x+y) dy + \int_{DA} (x+y) dy.$$

Інтеграли по AB і CD дорівнюють нулю, оскільки $dy=0$. Тому обчислимо другий і четвертий інтеграли в останній рівності.

$$\int_{BC} (x+y) dy = \int_0^1 (1+y) dy = \frac{3}{2}, \quad \int_{DA} (x+y) dy = \int_0^1 (0+y) dy = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, маємо

$$\oint_L (x+y) dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

3.3.7. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Нехай $L = AB$ – напрямлена просторова крива з початком A і кінцем B . Тоді всі дотичні до L також напрямлені прямі (рис. 3.25).

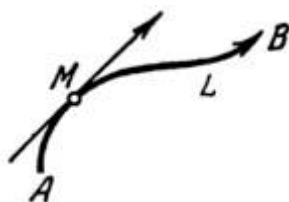


Рис. 3.25

Нехай α, β, γ – кути, які утворює дотична до L з осями координат. Вони є функціями координат x, y, z точки дотику M . Виділимо з L елементарну дугу dl . Якщо вважати її прямолінійною, то вона представляє собою вектор \vec{dl} з проекціями dx, dy, dz . Тоді

$$dx = \cos \alpha dl, \quad dy = \cos \beta dl, \quad dz = \cos \gamma dl.$$

Звідси

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl. \quad (3.64)$$

3.3.8 Механічний зміст криволінійного інтеграла другого роду

Робота змінної сили

Повернемося до формули (3.57), що виражає роботу A змінної сили \vec{F} . Нехай кути цієї сили з осями координат дорівнюють λ, μ, ν , тоді

$$\cos \theta = \cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma,$$

де θ – кут між векторами \vec{F} і $d\vec{l}$. Тому формула (3.57) набуває вигляду

$$A = \int_{AB} F (\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma) dl \quad (3.65)$$

Нехай проекції сили \vec{F} на осі координат

$$P = F \cos \lambda, \quad Q = F \cos \mu, \quad R = F \cos \nu.$$

Тоді (3.65) можна записати так:

$$A = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl$$

або за формулою (3.64), прочитаною справа наліво

$$A = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz. \quad (3.66)$$

Це найбільш зручна формула для обчислення A .

3.3.9 Формула Гріна

У простих випадках залежність між подвійним інтегралом по деякій плоскій області і криволінійним інтегралом по кривій, яка обмежує цю область, виражається формулою Гріна.

Доведемо цю формулу для правильної області, контур, якої обмежений гладкими чи кусково-гладкими кривими.

Теорема (Гріна). Нехай D – деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L , і функції $P(x, y), Q(x, y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ у цій області. Тоді справедлива формула Гріна

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (3.67)$$

Зауваження 1. Формула Гріна справедлива і для довільної замкненої області, яку можна розбити на скінченне число правильних замкнених областей.

Зауваження 2. Формула Гріна справедлива для довільної області обмеженої одним або кількома кусково-гладкими контурами.

3.3.10 Застосування криволінійних інтегралів другого роду до задач геометрії та механіки

Площа плоскої фігури. Одне із застосувань формули Гріна полягає в тому, що вона дозволяє обчислювати площу області з кусково-гладкою межею за допомогою криволінійного інтеграла.

$$S = \oint_L xdy = -\oint_L ydx = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx. \quad (3.68)$$

Робота змінної сили. Нехай сила $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої AB , причому функції $P(x, y), Q(x, y)$, неперервні на кривій AB ; тоді з (3.66) маємо

$$A = \int_{AB} Pdx + Qdy. \quad (3.69)$$

3.3.11 Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

З'ясуємо, за яких умов існує незалежність криволінійного інтеграла від вибору шляху інтегрування.

Визначимо області, з якими будемо мати справу.

Означення. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ називається *однозв'язною*, якщо для довільного замкненого контура $L \subset D$ множина, обмежена L , цілком

міститься в D (L замкнена без точок самоперетину неперервна кусково-гладка крива).

Якщо область однозв'язна, то довільний замкнений контур $L \subset D$ можна неперервно стягнути в точку, не виходячи з D .

На рис. 3.26 а показана однозв'язна область, а на рис. 3.26 б – неоднозв'язна. Образно кажучи, однозв'язна область – це область без “дірок”.

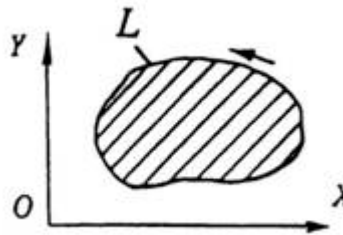


Рис. 3.26 а

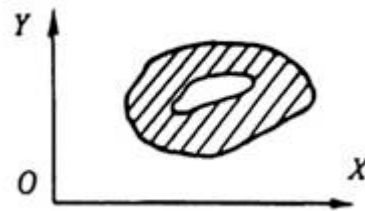


Рис. 3.26 б

Теорема. Якщо в деякій замкненій однозв'язній області D функції $P(x, y), Q(x, y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, то наступні чотири умови еквівалентні:

- 1) для довільних двох точок M і N області D криволінійний інтеграл від заданих функцій не залежить від вибору шляху інтегрування, взятого в цій області;
- 2) криволінійний інтеграл по довільній замкненій кусково-гладкій кривій у даній області D дорівнює нулю;
- 3) у даній області D виконується умова

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad (3.70)$$

4) існує така функція $F(x, y)$, визначена в області D , для якої вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом, тобто

$$dF = Pdx + Qdy$$

Зауваження. Аналогічна теорема справедлива для криволінійних інтегралів другого роду вздовж просторових кривих.

3.3.12 Інтегрування повних диференціалів

Нехай у деякій замкненій однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^2$ функції $P(x, y), Q(x, y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, причому $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Зафіксуємо точку $M_0(x_0, y_0)$ і розглянемо функцію

$$F(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} Pdx + Qdy. \quad (3.71)$$

Підінтегральний вираз у (3.71) називається *диференціальною формою першого порядку*. Диференціальна форма $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом функції $F(x, y)$, визначеної в області D , тобто існує така функція $F(x, y)$, визначена в області D ,

$$dF = Pdx + Qdy \quad (3.72)$$

Означення. Диференційовна функція $F(x, y)$, визначена в області D , називається *первісною* для диференціальної форми $Pdx + Qdy$, якщо виконується умова (3.72).

Множина всіх первісних функцій для диференціальної форми $Pdx + Qdy$ задається формулою

$$\Phi(x, y) = F(x, y) + C, \quad C = \text{const} \quad (3.73)$$

Розглянемо спосіб знаходження первісної. Формула

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} Pdx + Qdy + C, \quad (3.74)$$

де (x_0, y_0) – фіксована точка, а C – довільна стала, і дає можливість визначити всі функції, що мають підінтегральний вираз своїм повним диференціалом.

Оскільки криволінійний інтеграл (3.74) не залежить від форми шляху інтегрування, то досить було б обчислити цей інтеграл по довільній лінії, яка сполучає точки M_0 та M . Проте виявляється, що найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, яка сполучає точки M_0 та M так, що сторони ламаної паралельні осям координат (рис. 3.27).

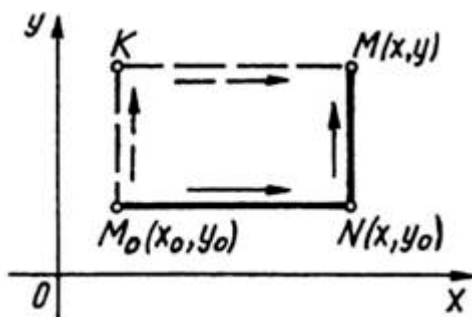


Рис. 3.27

Тоді криволінійний інтеграл (3.74) обчислюється по ламаній M_0NM так:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C, \quad (3.75)$$

Аналогічно обчислюється криволінійний інтеграл (3.74) по ламаній M_0KM :

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C.$$

Зауваження. Формула множини всіх первісних функцій трьох змінних для диференціальної форми $Pdx + Qdy + Rdz$ при інтегруванні, наприклад, по ламаній $M_0M_1M_2M$ (рис. 3.28) має вигляд

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C$$

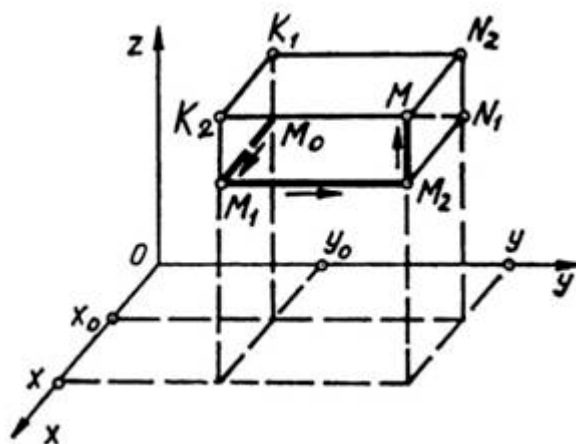


Рис. 3.28

4 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

4.1 Скалярні та векторні поля

Полем називається область простору, кожній точці P якої поставлена в однозначну відповідність деяка величина $f(P)$.

Якщо величина $f(P)$ фізична, то поле називається фізичним. При цьому, залежно від природи функції $f(P)$, поля розділяють на скалярні й векторні.

Прикладами скалярних фізичних полів можуть бути поля температури, атмосферного тиску, щільності повітря, електричного потенціалу та ін.

До векторних полів відносяться, наприклад, поля сили ваги, швидкості частинок поточної рідини, зрушення точок пружного тіла, густини електричного струму.

Якщо функція $f(P)$ не змінюється за часом, то поле називається *стаціонарним*, або *постійним*, а якщо змінюється, то - *нестационарним*, або *змінним*.

Для одержання загальних результатів, справедливих для будь-яких конкретних фізичних полів, усякому фізичному полю ставиться у відповідність його математична модель, де абстрагуються від заданої фізичної величини, замінюючи її математичним поняттям функції, а точці простору приписують координати, вважаючи їх аргументами. Математичним апаратом, найбільш відповідним досліджуванам у теорії поля явищам, служить векторна алгебра й векторний аналіз.

4.1.1 Скалярне поле

Для завдання скалярного поля треба обрати скалярну функцію $f(P) = f(x, y, z)$.

Поверхнею рівня скалярного поля $f(P)$ називається така поверхня, на якій функція $f(P)$ має постійне значення.

Рівняння поверхні рівня: $f(x, y, z) = C$ де C - деяка стала.

При різних значеннях постійної C одержуємо сімейство поверхонь рівня. Будемо вважати, що функція $f(x, y, z)$, що задає поле, однозначна. Тоді, мабуть, через кожную точку поля проходить лише одна поверхня рівня. Для плоского скалярного поля розглядають лінії рівня, на яких функція, що задає поле, має постійне значення. Лінії рівня застосовуються в математиці при дослідженні поверхонь (методом перетинів). Рівняння лінії рівня $f(x, y) = C$.

Приклад. Знайти поверхню рівня поля $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, що проходить через точку $M_0(1, -1, 2)$.

Розв'язання. Рівняння поверхні рівня: $f = C$;

Очевидно, у цьому випадку $C \geq 0$. Поверхні рівня – сімейство сфер із центром на початку координат. Із цього сімейства треба вибрати сферу, що проходить через точку $M_0(1, -1, 2)$.

Підставимо координати цієї точки в рівняння поверхні рівня

$$1^2 + (-1)^2 + 2^2 = C, \quad C = 6.$$

Це сфера радіуса $R = \sqrt{6}$ із центром на початку координат.

Приклад. Знайти лінії рівня поля $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Розв'язання. При $C > 0$ лінії рівня – гіперболи з вершинами, що лежать на лініях, паралельних осі Ox в площині zOx , при $C < 0$ – гіперболи з вершинами, що лежать на лініях, паралельних осі Oy в площині zOy . Розташовуються вони на поверхні $z = x^2 - y^2$. Якщо $C = 0$, одержимо прями $y = \pm x$ – асимптоти цих гіпербол.

4.1.2 Векторне поле

Нехай у деякій області простору задане векторне поле

$$\vec{F}(P) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – скалярні функції, проекції вектора $\vec{F}(P)$ на осі координат.

Векторною лінією поля $\vec{F}(P)$ зветься лінія, дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором $\vec{F}(P)$, що визначає поле в цій точці.

Прикладами векторних ліній поля в електротехніці є лінії вектора напруги магнітного поля \vec{H} чи лінії вектора напруги електричного поля \vec{E} . Лінії вектора \vec{E} називають силовими лініями внаслідок того, що напруга електричного поля чисельно дорівнює силі, яка діє в даній точці поля на одиничний додатний заряд. Напрямки вектора цієї сили та вектора \vec{E} завжди співпадають.

Виведемо диференціальне рівняння векторних ліній.

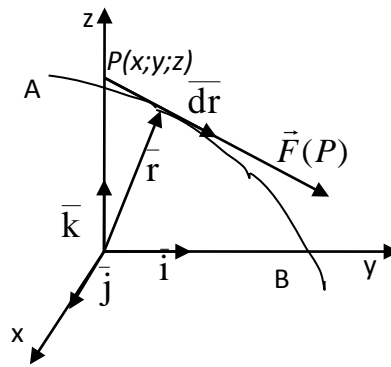


Рис. 4.1

Нехай (рис.4.1) AB - векторна лінія, \vec{r} - радіус-вектор точки $P(x, y, z)$.
Тоді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Обчислимо

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

З диференціального числення відомо, що вектор $d\vec{r}$ напрямлений по дотичній до AB в точці P . Отже, $d\vec{r} \parallel \vec{F}(P)$, але тоді умови паралельності векторів

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Це і є диференціальне рівняння векторних ліній. Якщо векторне поле за природою є поле сили, то і його векторні лінії будуть силовими.

Приклад. Знайти векторні лінії магнітного поля (лінії вектора напруженості магнітного поля), утвореного постійним електричним струмом I , що тече по нескінченно довгому дроту, що збігається з віссю Ox . Вектор напруженості цього магнітного поля:

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi\rho^2}(-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Розв'язання. Проекції вектора \vec{H} на осі координат:

$$H_x = -\frac{1}{2\pi\rho^2}y, \quad H_y = \frac{1}{2\pi\rho^2}x, \quad H_z = 0.$$

Диференціальні рівняння векторних ліній поля після скорочення на $2\pi\rho^2$:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Останнє відношення $\frac{dz}{0}$ має сенс лише у випадку, коли $z = C$ - постійна величина. Рівняння

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$$

запишемо так: $x dx = -y dy$. Інтегруючи, одержимо:

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Отже, векторні лінії даного векторного поля визначаються рівняннями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 \\ z = C. \end{cases}$$

Вони являють собою кола з центрами на осі Oz , що лежать у площинах, перпендикулярних до цієї осі.

4.2 Поверхневий інтеграл. Потік векторного поля

Нехай у просторі задано деяку область V і нехай в цій області задано поверхню σ , обмежену просторовою лінією L . Відносно поверхні σ будемо припускати, що в кожній її точці визначено нормаль

$$\vec{n} = \cos(n, x) \cdot \vec{i} + \cos(n, y) \cdot \vec{j} + \cos(n, z) \cdot \vec{k}.$$

Нехай в кожній точці поверхні σ визначено векторну функцію

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Інакше кажучи, розглянемо векторне поле \vec{F} на поверхні σ .

Розіб'ємо поверхню σ будь-яким способом на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частини візьмемо довільну точку P_i , обчислимо в ній значення функції $\vec{F}_i = \vec{F}(P_i)$, потім візьмемо скалярний добуток векторів \vec{F}_i та \vec{n}_i , і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(P_i) \cdot \vec{n}(P_i)) \Delta\sigma_i \quad (4.1)$$

Ця сума є інтегральною, а її скінченна границя за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин зветься *поверхневим інтегралом по координатах*:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{diam \Delta\sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{F}(P_i) \cdot \vec{n}(P_i)) \Delta\sigma_i. \quad (4.2)$$

Кожний доданок суми (4.1)

$$(\vec{F}(P_i) \cdot \vec{n}(P_i)) \Delta\sigma_i = |\vec{F}_i| \cdot \cos(\vec{n}_i, \vec{F}_i) \cdot \Delta\sigma_i \quad (4.3)$$

може бути витлумачений механічно таким чином: цей добуток дорівнює об'єму циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\vec{F}_i| \cos(\vec{n}_i, \vec{F}_i)$. Якщо вектор \vec{F} є швидкість рідини, що протікає через поверхню σ , то добуток (4.3) дорівнює кількості рідини, що протікає через площадку $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора \vec{n}_i (рис.4.2).

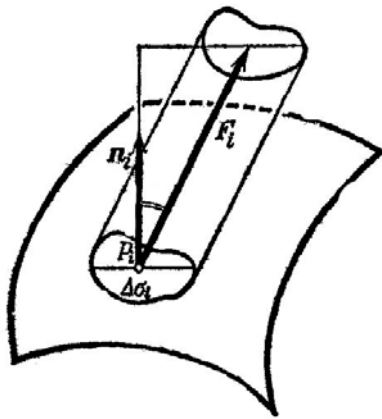


Рис. 4.2

Вираз $\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma$ дає загальну кількість рідини, що протікає через поверхню

σ в додатному напрямку, якщо під вектором \vec{F} мається на увазі вектор швидкості течії рідини в даній точці. Тому поверхневий інтеграл (4.2) називається *поток векторного поля \vec{F} через поверхню σ* .

З визначення поверхневого інтеграла випливає, що якщо поверхню σ розбити на частини $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ тоді

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \dots + \iint_{\sigma_k} \vec{F} \vec{n} d\sigma.$$

Представимо одиничний вектор \vec{n} через його проєкції на осі координат. Підставляючи в інтеграл (4.2) вирази векторів \vec{F} і \vec{n} через їх проєкції, одержимо:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] d\sigma. \quad (4.4)$$

Добуток $\Delta\sigma \cos(n, z)$ є проєкція площадки $\Delta\sigma$ на площину Oxy (рис. 4.3); аналогічне твердження справедливо і для добутків:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma \cos(n, x) &= \Delta\sigma_{yz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, y) &= \Delta\sigma_{xz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, z) &= \Delta\sigma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

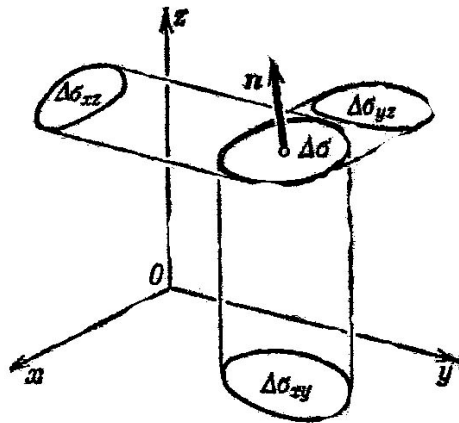


Рис. 4.3

де $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ - проєкції площадки $\Delta\sigma$ на відповідні координатні площини.

На підставі цього інтеграл (4.4) записують також у іншій формі:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + \\ + R \cos(n, z)] d\sigma = \iint_{\sigma} P dydz + Q dzdx + Z dxdy. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Обчислення інтеграла по кривій поверхні зводиться до обчислення подвійного інтеграла по плоскій області.

Зазначимо, наприклад, спосіб обчислення інтеграла

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma.$$

Нехай поверхня σ така, що будь-яка пряма, паралельна осі Oz , перетинає її в єдиній точці. Тоді рівняння поверхні можна записати у вигляді

$$z = f(x, y).$$

Позначаючи через D проекцію поверхні σ на площину Oxy , отримаємо (на підставі означення поверхневого інтеграла):

$$\iint_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma = \lim_{diam \Delta \sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, z_i) \cos(n_i, z) \Delta \sigma_i.$$

Враховуючи, далі, останню з формул (4.5), отримаємо:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma &= \lim_{diam \Delta \sigma_{xy} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) (\Delta \sigma_{xy})_i = \\ &= \pm \lim_{diam \Delta \sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \left| \Delta \sigma_{xy} \right|_i, \end{aligned}$$

а останній вираз є інтегральна сума для подвійного інтегралу

$$\iint_{\sigma} Z \cos(n, z) d\sigma = \pm \iint_D Z(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

При цьому знак плюс перед подвійним інтегралом береться, якщо $\cos(n, z) \geq 0$, і знак мінус, якщо $\cos(n, z) \leq 0$.

Якщо поверхня σ така, що всяка пряма, паралельна осі Oz , не перетинає її в єдиній точці, то її розбивають на частини, що задовольняють цю умову, і обчислюють інтеграл по кожній частині окремо.

Аналогічно обчислюються інтеграли

$$\iint_{\sigma} X \cos(n, x) d\sigma, \quad \iint_{\sigma} Y \cos(n, y) d\sigma.$$

Доведене виправдовує запис поверхневого інтеграла у формі (4.6). При цьому праву частину рівності (4.6) можна розглядати як суму подвійних інтегралів за відповідними проекціями області σ , причому знаки цих подвійних інтегралів беруться згідно із зазначеним вище правилом.

Приклад. Нехай замкнена поверхня σ така, що будь-яка пряма, паралельна осі Oz , перетинає її не більше ніж у двох точках. Розглянемо інтеграл

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma.$$

Додатним напрямком нормалі будемо вважати зовнішню нормаль. У даному випадку поверхню можна розбити на дві частини: нижню і верхню; їхні рівняння будуть, відповідно,

$$z = f_1(x, y) \text{ і } z = f_2(x, y)$$

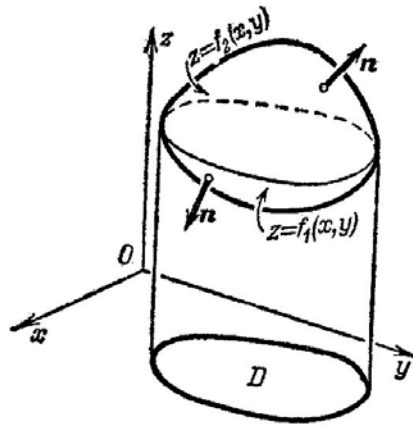


Рис. 4.4

Позначимо через D проекцію σ на площину Oxy (рис. 4.4), тоді

$$\iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma = \iint_D f_2(x, y) dx dy - \iint_D f_1(x, y) dx dy. \quad (4.7)$$

Знак мінус у другого інтеграла узятий тому, що в поверхневому інтегралі знак $dx dy$ на поверхні $z = f_1(x, y)$ потрібно взяти від'ємним, так як для неї $\cos(n, z)$ від'ємний.

Але різниця інтегралів, що стоять праворуч в формулі (4.7), дає об'єм, обмежений поверхнею σ .

Значить, об'єм тіла, обмеженого замкнутою поверхнею σ , дорівнює наступному інтегралу по поверхні:

$$V = \iint_{\sigma} z \cos(n, z) d\sigma.$$

4.3 Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля

Лінійним інтегралом векторного поля \vec{F} уздовж лінії L називається криволінійний інтеграл

$$\omega = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \quad (4.8)$$

де \vec{r} - одиничний дотичний вектор до лінії L , dl - диференціал її дуги, \vec{r} - радіус-вектор точки, що описує лінію L .

Якщо \vec{F} - поле сил, то лінійний інтеграл (4.8) являє собою роботу цього силового поля уздовж лінії L .

Якщо лінія L задана параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

причому в початковій і кінцевій точках шляху параметр t відповідно приймає значення $t = \alpha$ й $t = \beta$, тоді

$$\omega = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\} dt \quad (4.9)$$

Якщо лінія L задана рівняннями

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad a \leq x \leq b,$$

тоді лінійний інтеграл дорівнює:

$$w = \int_a^b \{P[x, y(x), z(x)] + Q[x, y(x), z(x)]y'(x) + R[x, y(x), z(x)]z'(x)\} dx. \quad (4.10)$$

При зміні напрямку лінія L (з граничними точками A і B) лінійний інтеграл змінює знак:

$$\omega = \int_{AB} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{F} d\vec{r}.$$

Циркуляцією векторного поля \vec{F} називається лінійний інтеграл цього поля уздовж замкненого шляху L : $\int_L \vec{F} d\vec{r}$.

Циркуляція, як усякий лінійний інтеграл, безпосередньо обчислюється за формулами (4.9), (4.10), (4.11).

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{F} = xi + yj + (x + y - 1)k$$

по відрізку прямої, який з'єднує точки $A(1;1;1)$ та $B(2;3;4)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії L тобто прямої AB :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$\begin{cases} x = t + 1, & dx = dt \\ y = 2t + 1, & dy = 2dt \\ z = 3t + 1, & dz = 3dt. \end{cases}$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються границі інтегрування а саме, якщо $1 \leq x \leq 2$, то $0 \leq t \leq 1$. Отже:

$$\int_L \overline{F} \overline{ds} = \int_A^B x dx + y dy + (x + y - 1) dz =$$

$$= \int_0^1 [t + 1 + (2t + 1) \cdot 2 + (t + 1 + 2t + 1 - 1) \cdot 3] dt = \int_0^1 (14t + 6) dt = 14 \cdot \frac{t^2}{2} + 6z \Big|_0^1 = 13.$$

Приклад. Обчислити роботу силового поля $\overline{F} = 2xy\overline{i} + y^2\overline{j} - x^2\overline{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж перерізу гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ площиною $y = x$ від т. $A(1;1;0)$ до т. $B(\sqrt{2};\sqrt{2};1)$.

Розв'язання.

$$A = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_l 2xy dx + y^2 dy - x^2 dz$$

Запишемо рівняння лінії $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} \\ z = \sqrt{t-1} \end{cases}$$

при цьому $1 \leq t \leq 2$, якщо, наприклад $1 \leq x \leq \sqrt{2}$. Тоді

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, \quad dy = \frac{dt}{2\sqrt{t}}, \quad dz = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}.$$

$$\text{Інтеграл: } \int_l 2xy dx + y^2 dy - x^2 dz = \int_1^2 \left[2\sqrt{t}\sqrt{t} \frac{1}{2\sqrt{t}} + t \frac{1}{2\sqrt{t}} - t \frac{1}{2\sqrt{t-1}} \right] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2} \sqrt{t} - \frac{t}{2\sqrt{t-1}} \right) dt = \frac{3}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt - \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t-1} dt - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = \\
&= t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 - \frac{1}{3} (t-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 - \sqrt{t-1} \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{3-1} = 2\sqrt{2} - \frac{7}{3} = \frac{6\sqrt{2}-7}{3}.
\end{aligned}$$

4.4 Потенційне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F}(P) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j}$.

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Тоді вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої

функції $u = u(x, y)$, тобто $du = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy$, де

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy.$$

Але тоді задане векторне поле можна записати так:

$$\vec{F}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \vec{j} = \text{grad } u(x, y).$$

Векторне поле \vec{F} зветься *потенційним*, якщо воно є градієнтом деякого скалярного поля u : $\vec{F} = \text{grad } u(x, y)$. Скалярна функція u зветься *потенціалом* векторного поля \vec{F} .

Іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{F} = -\text{grad } u$ означає, що в напрямку вектора напруги електричного поля \vec{F} електричний потенціал спадає.

Як бачимо, умова

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

в потенційному полі рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача відшукування повного диференціала рівнозначна задачі обчислення потенціалу векторного поля.

Зазначимо, що потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої на підставі того, що $\text{grad}(u + c) = \text{grad } u$.

Приклад. Пересвідчитись, що векторне поле

$$\vec{F} = (2x - 3y^2 + 1)\vec{i} + (2 - 6xy)\vec{j}$$

потенційне і знайти його потенціал.

Розв'язання. Так як

$$P(x, y) = 2x - 3y^2 + 1, \quad Q(x, y) = 2 - 6xy$$

маємо, що

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -6y, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -6y, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

Це свідчить про те, що поле потенційне. Потенціал векторного поля дорівнює циркуляції цього поля по деякій лінії L .

$$\int_L \vec{F} d\vec{S} = \int_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy.$$

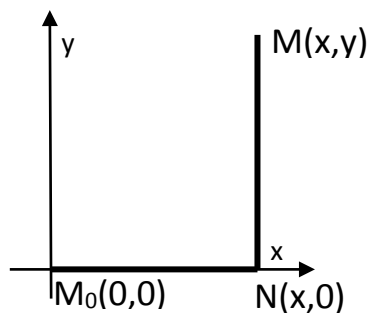


Рис. 4.5

Шлях інтегрування L (рис. 4.5) оберемо так:

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy = \\ & = \left[\begin{array}{l} M_0N: y=0; dy=0 \\ NM: x=const; dx=0 \end{array} \right] = \\ & = \int_0^x (2x+1)dx + \int_0^y (2-6xy)dy = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^x + \\ & + \left(2y - 6x \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^y = x^2 + x + 2y - 3xy^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$u(x, y) = x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C \quad (C = \text{const}).$$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Якщо векторне поле \vec{F} потенційне, а $u = u(x, y, z)$ - його потенціал, то

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

У потенційному векторному полі циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової і кінцевої точок $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та $M(x; y; z)$:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} d\vec{S} &= \int_{M_0}^M P dx + Q dy + R dz = \int_{M_0}^M \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ &= \int_{M_0}^M du = u \Big|_{M_0}^M = u(M) - u(M_0). \end{aligned}$$

Приклад. Знайти циркуляцію градієнта скалярного поля $u = x$ у по відрізок прямої, яка з'єднує точки $A(1;1)$ та $B(2;2)$.

Розв'язання:

$$\vec{F} = \text{grad } u,$$

тоді

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{(1,1)}^{(2,2)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{(1,1)}^{(2,2)} \text{grad } u \cdot d\vec{s} = u(x, y) \Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = xy \Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

Циркуляцією градієнта скалярного поля є різниця потенціалів цього поля.

Для потенційного поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтегралу:

Теорема. Наступні чотири властивості векторного поля \vec{F} , заданого в однозв'язній області D , еквівалентні:

1. циркуляція поля \vec{F} по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області D , дорівнює нулю;
2. циркуляція поля \vec{F} впродовж довільної кривої L (яка лежить в області D) з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої;
3. існує функція $u = u(x, y, z)$ така, що $\vec{F} = \text{grad } u$;
4. поле \vec{F} є безвихорним, тобто $\text{rot} \vec{F} = 0$.

4.5 Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Векторному полю $\vec{F}(P) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ може бути поставлене у відповідність інше векторне поле, яке зветься *ротором* (або вихром) поля \vec{F} і обумовлене рівністю

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} = [\nabla \times \vec{F}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ротор має наступні **властивості**:

1. $\operatorname{rot} \vec{c} = 0$, де \vec{c} - постійний вектор;
2. $\operatorname{rot}(C_1 \vec{F}_1 \pm C_2 \vec{F}_2) = C_1 \operatorname{rot} \vec{F}_1 \pm C_2 \operatorname{rot} \vec{F}_2$;
3. $\operatorname{rot}(u \cdot \vec{F}) = \operatorname{grad} u \times \vec{F} + u \cdot \operatorname{rot} \vec{F}$, де u - скалярна функція.
4. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$;
5. $\operatorname{div} \vec{F}_1 \times \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{F}_1 - \vec{F}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{F}_2$.

Нехай поле \vec{F} – потенційне, а $u = u(x, y, z)$ - його потенціал. Тоді

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Обчислимо ротор потенційного поля:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0.
\end{aligned}$$

Отже, $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, якщо поле - потенційне. Зворотнє твердження також вірне.

Векторне поле будемо називати *безвихорним*, якщо його ротор дорівнює нулю. Тож всяке потенціальне поле є безвихорним. Зокрема, рівність $\text{rot grad } u = 0$ свідчить про те, що поле градієнтів завжди потенційне.

Теорема Стокса. Якщо в деякій області простору знаходиться двостороння кусочно - гладка поверхня σ , обмежена кусочно - гладким контуром L , з одиничним вектором нормалі \vec{n} , обраним так, щоб видимий з його кінця обхід контуру L відбувався проти годинникової стрілки, тоді

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \vec{n} d\sigma, \quad (4.12)$$

тобто циркуляція вектора вздовж контуру L поверхні σ дорівнює потоку вихору через цю поверхню.

Тому що

$$\vec{n} = \cos(n, x) \cdot \vec{i} + \cos(n, y) \cdot \vec{j} + \cos(n, z) \cdot \vec{k},$$

та на підставі визначення (4.11) формула (4.12) може бути записана так:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\sigma} & \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Приклад. Нехай $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$. Знайти ротор векторного поля

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{r} = \frac{y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Розв'язання. Обчислимо $\operatorname{rot} \frac{\vec{a}}{r}$ за властивістю 3, поклавши $u = \frac{1}{r}$.

Тому що

$$\operatorname{grad} u = -\frac{1}{r} \operatorname{grad} r = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^2},$$

а

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k},$$

маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{\vec{a}}{r} &= u \cdot \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} u \wedge \vec{a}] = -\frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{r} + \\ &+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{x}{r^3} & -\frac{y}{r^3} & -\frac{z}{r^3} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\frac{1}{r}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - \\ &- \frac{1}{r^3}[(xy - z^2)\vec{i} + (zy - x^2)\vec{j} + (xz - y^2)\vec{k}] = \\ &= -\frac{1}{r^3}[(x^2 + y^2 + xy)\vec{i} + (y^2 + z^2 + zy)\vec{j} + (x^2 + z^2 + xz)\vec{k}]. \end{aligned}$$

Приклад. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

по контуру $ABCA$, одержаному при перетинанні параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - y$ з координатними площинами (рис. 4.6).

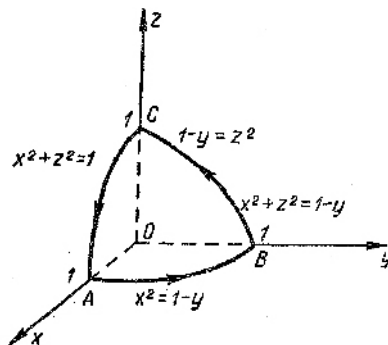


Рис 4.6

Розв'язання. Розв'яжемо задачу, користуючись теоремою Стокса.
У якості поверхні, натягнутої на даний контур, беремо поверхню $x^2 + z^2 = 1 - y$. Одиничний вектор нормалі до цієї поверхні визначається за формулою

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} F}{|\text{grad} F|},$$

де

$$F = x^2 + y + z^2 - 1.$$

Тому

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + \vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}},$$

звідки

$$\cos(n, z) = \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 1 + 4z^2}} \geq 0, \quad z \geq 0,$$

і нормаль \vec{n} забезпечує необхідний за теоремою Стокса напрямок обходу контуру L .

Ротор даного поля

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x+y)\vec{k}.$$

За теоремою Стокса

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \vec{a} \vec{n} d\sigma = \iint_D \frac{\text{rot} \vec{a} \vec{n}}{|\cos(n, z)|} \Big|_{z=z(x,y)} dx dy.$$

Але

$$\frac{\text{rot} \vec{a} \vec{n}}{|\cos(n, z)|} = -2(x+y),$$

отже,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \text{rot} \vec{a} \vec{n} d\sigma &= -2 \iint_D (x+y) dx dy = -2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} (x+y) dy = \\ &= -2 \int_0^1 \left[x(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2} \right] dx = -\frac{31}{30}. \end{aligned}$$

4.6 Розбіжність поля. Формула Остроградського

Нехай маємо векторне поле \vec{F} . Візьмемо в ньому довільну точку P і розмістимо її всередині замкнутої поверхні σ , яка обмежує об'єм Δv .

Обчислимо величину $\frac{\oiint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma}{\Delta v}$. Припустимо, що існує границя цієї величини за умови, якщо поверхня σ стягується в точку P :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma}{\Delta v}. \quad (4.14)$$

Границя (4.14) є дивергенцією (розбіжністю) векторного поля \vec{F} . Вона є скалярною величиною.

Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля $\vec{F}(P)$ у т. P називається об'ємна щільність потоку векторного поля \vec{F} в цій точці:
 $\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\sigma \rightarrow P} \oiint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma$, де v - об'єм, обмежений замкненою поверхнею σ ,

що містить точку P .

Дивергенція має наступні **властивості**:

1. $\operatorname{div}[C_1 \vec{F}_1 + C_2 \vec{F}_2] = C_1 \operatorname{div} \vec{F}_1 + C_2 \operatorname{div} \vec{F}_2$, де C_1, C_2 - постійні.
2. Дивергенція постійного вектора дорівнює нулю.
3. Дивергенція добутку функції $u(P)$ на векторне поле $\vec{F}(P)$ обчислюється за формулою

$$\operatorname{div}[u \vec{F}] = u \cdot \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad} u}.$$

Якщо в т. P $\operatorname{div} \vec{F}(P) > 0$, тоді, враховуючи фізичний зміст векторного поля, заключаємо, що в цьому випадку в т. P перебуває джерело поля. Якщо в т. P $\operatorname{div} \vec{F}(P) < 0$, то в цій точці перебуває стік поля. В точках, де $\operatorname{div} \vec{F} > 0$, векторні лінії починаються, а в точках, де $\operatorname{div} \vec{F} < 0$, векторні лінії скінчуються.

Векторне поле, в кожній точці якого $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*). У такому полі немає джерел і стоків, векторні лінії не можуть на кінцевій відстані ніде ані починатися, ані скінчуватися, вони можуть іти у нескінченність, бути замкненими або ж починатися й скінчуватися біля границь поля.

Розглянемо у просторі тіло V , обмежене замкненою поверхнею σ (рис.4.4). Проекцію тіла на площину $ХОУ$ позначимо через D . Лінія на поверхні тіла, яка проектується в границю області D , поділяє поверхню σ на дві частини σ_+ та σ_- , які описуються функціями відповідно $z = f_2(x, y)$ та $z = f_1(x, y)$. Окрім того, будемо відрізняти зовнішню сторону поверхні та внутрішню в залежності від направленості нормалі до поверхні. Нехай тепер у цьому просторі задано векторне поле $\vec{F}(P)$.

Обчислимо потрійний інтеграл

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R(x; y; z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left[\int_{f_1(x; y)}^{f_2(x; y)} \frac{\partial R(x; y; z)}{\partial z} dz \right] dx dy = \\ &= \iint_D \left[R(x; y; z) \Big|_{f_1(x; y)}^{f_2(x; y)} \right] dx dy = \iint_D [R(x; y; f_2(x; y)) - R(x; y; f_1(x; y))] dx dy = \\ &= \iint_D R(x; y; f_2(x; y)) dx dy - \iint_D R(x; y; f_1(x; y)) dx dy. \end{aligned}$$

Перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневий. Для цього розглянемо поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma_+} R \vec{k} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_+} R(x; y; z) \vec{k} \vec{n} d\sigma = \iint_D R(x; y; f_2(x; y)) dx dy ,$$

враховуючи, що

$$\cos\left(\vec{k} \wedge \vec{n}\right) > 0.$$

Аналогічно:

$$\iint_{\sigma_-} R \vec{k} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_-} R(x; y; z) \vec{k} \vec{n} d\sigma = -\iint_D R(x; y; f_1(x; y)) dx dy ,$$

враховуючи, що в цьому випадку

$$\cos\left(\vec{k} \wedge \vec{n}\right) < 0 ,$$

склавши одержані два інтеграли, маємо:

$$\begin{aligned} & \iint_D R(x; y; f_2(x; y)) dx dy - \iint_D R(x; y; f_1(x; y)) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma_+} R(x; y; z) \vec{k} \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_-} R(x; y; z) \vec{k} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} R(x; y; z) \vec{k} \vec{n} d\sigma . \end{aligned}$$

Таким чином

$$\iiint_V \frac{\partial R(x; y; z)}{\partial z} dV = \iint_{\sigma} R(x; y; z) \vec{k} \vec{n} d\sigma .$$

Аналогічно можна обчислити:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_{\sigma} Q \vec{j} \vec{n} d\sigma ; \quad \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_{\sigma} P \vec{i} \vec{n} d\sigma .$$

Склавши ці три рівності, маємо:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dx dy dz = \iint_{\sigma} (P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}) \vec{n} d\sigma. \quad (4.15)$$

Ця рівність і є формулою *Остроградського*.

Теорема. Дивергенція векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ виражається формулою

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

де значення частинних похідних беруться в точці P .

Доведення. За формулою Остроградського потік векторного поля можна записати у вигляді

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Потрійний інтеграл за теоремою про середнє значення дорівнює добутку об'єму V на значення підінтегральної функції в деякій точці P_1 області, тобто

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{P_1} \cdot V.$$

Якщо об'єм V стягується в точку P , то точка P_1 також прямує до точки P , і ми маємо

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{P_1} \cdot V}{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

що і треба було довести.

Користуючись одержаним виразом для дивергенції, тепер і формулу Остроградського можна записати у вигляді:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV,$$

тобто потік векторного поля з середини замкнутої поверхні дорівнює потрібному інтегралу за об'ємом, обмеженим цією поверхнею від дивергенції поля.

Розглянемо соленоїдальне (або трубчатє) поле саме таке, для якого $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Візьмемо в цьому полі яку-небудь площинку σ_0 і проведемо через кожну точку її границі векторні лінії.

Ці лінії обмежують частину простору, так звану векторну трубку. Рідина рухається в цій трубці, не перетинаючи її стінок. Розглянемо

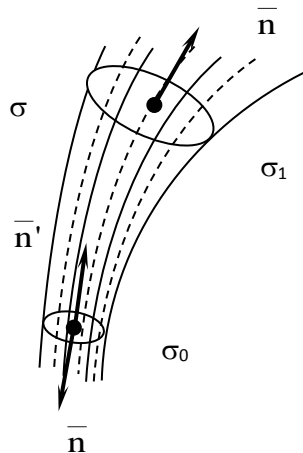


Рис. 4.7

частину цієї трубки, обмежену вже згадуваною площинкою σ_0 і σ_1 деяким перерізом (рис.4.7).

Оскільки умовою $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю, отже

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_0} \vec{F} \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 0,$$

де σ - бічна поверхня трубки, а \vec{n} - зовнішня нормаль.

Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль \vec{n} перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint_{\sigma} \vec{F} \vec{n} d\sigma = 0$. Тоді виходить, що

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma = -\iint_{\sigma_0} \vec{F} \vec{n} d\sigma.$$

Якщо змінити напрямок нормалі на σ_0 , тобто взяти внутрішню нормаль \vec{n} , то одержимо:

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_0} \vec{F} \vec{n} d\sigma.$$

Це означає, що потік вектора в напрямку векторних ліній через кожен переріз векторної трубки один і той же, тобто в полі без джерел через кожен переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

поле ротора довільного векторного поля – трубчатє. Справедливо й зворотнє твердження – кожнє трубчатє поле є полєм ротора деякого векторного поля, тобто якщо $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то існує таке векторнє поле $\vec{\Phi}$, що

$$\vec{\Phi} = \operatorname{rot} \vec{F}.$$

Вектор $\vec{\Phi}$ називають *вектором-потенціалом* даного поля.

4.7 Оператор Гамільтона та його застосування

Оператор Гамільтона, або “набла” записується символічно як вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (4.16)$$

4.7.1 Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярнє поле $u = u(x, y, z)$. Застосуємо до функції $u = u(x, y, z)$ оператор “набла”:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \operatorname{grad} u.$$

Тобто при “множенні” символічного вектора на скалярну функцію виходить градієнт цієї функції $\nabla u = \text{grad } u$.

Знайдемо далі

$$\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

або

$$\text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (4.17)$$

Права частина цього виразу позначається

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{або} \quad \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u.$$

Символ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

називається *оператором Лапласа*.

Отже, рівність (4.17) можна записати так:

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u. \quad (4.18)$$

За допомогою оператора ∇ рівність (4.18) запишемо у вигляді

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u, \text{ тобто } \Delta = \nabla^2.$$

Зауважимо, що рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{або} \quad \Delta u = 0$$

називається *рівнянням Лапласа*. Функція, що задовольняє рівнянню Лапласа, називається *гармонійною функцією*.

Приклад. Знайти $\text{grad } |\vec{r}|$, де

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ;$$

відповідно

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{grad } |\vec{r}| &= \nabla |\vec{r}| = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \end{aligned}$$

4.7.2 Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Застосуємо оператор "набла" до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$(\nabla \cdot \vec{F}) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Таким чином, скалярний добуток є дивергенцією векторного поля \vec{F} :

$$\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}.$$

Наприклад, для вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\text{div } \vec{r} = \nabla \cdot \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Розглянемо тепер векторний добуток, що означає соленоїдальність поля:

$$\begin{aligned} [\nabla \times \vec{F}] &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Такий добуток є ротором і позначається

$$[\nabla \times \vec{F}] = \text{rot } \vec{F}.$$

Приклад. Знайти ротор векторного поля

$$\vec{F} = y^2 \vec{i} - 2xz \vec{j} - x^2 \vec{k}.$$

Розв'язання.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -2xz & -x^2 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(-x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial z} \right] \vec{i} -$$

$$- \left[\frac{\partial(-x^2)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y} \right] \vec{k} = 2x \vec{i} + 2x \vec{j} - (2z + 2y) \vec{k}.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку:

$$\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами скалярного добутку:

$$\nabla \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla \cdot \vec{F}_1 + \nabla \cdot \vec{F}_2.$$

5 РЯДИ

5.1 Числові ряди

Означення. Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, де $\{u_n\}$ - задана нескінченна числова послідовність, називається *числовим рядом*.

Означення. Кінцеві суми $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$ називаються *частковими сумами* ряду.

Означення. Якщо існує границя послідовності часткових сум $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд називається *збіжним*, і число S називається *сумою* цього ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Часткова сума цього ряду

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Для того, щоб обчислити границю послідовності часткових сум, розкладемо загальний член даного ряду на найпростіші дробі:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n \leftarrow \infty} S_n = \lim_{n \leftarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

За визначенням, даний ряд збігається і його сума дорівнює одиниці.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Часткова сума цього ряду

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \Rightarrow S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2} \cdot n = \infty,$$

Такий ряд є розбіжним.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Послідовність часткових сум:

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$$

Границя послідовності таких часткових сум не існує, тобто, даний ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots$.

Такий ряд є геометричною прогресією, сума якої визначається за формулою

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ для } b_1 = 1 \Rightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = \infty$.

Теорема1. Відкидання кінцевого числа початкових членів ряду не впливає на його збіжність, але змінює суму ряду.

Доведення. Розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5.1)$$

і

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n + \dots \quad (5.2)$$

Позначимо суму відкинутих членів ряду через A , відкинемо m членів, тоді часткова сума для ряду (5.1) буде мати вигляд $S_n = A + \delta_{n-m}$, де δ_{n-m} - часткова сума ряду (5.2). При $n \rightarrow \infty$ величина $n - m = k \rightarrow \infty$, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A + \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_k.$$

Це означає, що якщо існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то буде існувати границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k$. Значить, ряди (5.1) і (5.2) збігаються і розбігаються одночасно.

Теорема2. Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, що збігається, помножити на

одне і теж постійне число C , то його збіжність не порушується, а сума зміниться у C разів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot u_n = C \cdot S$$

Доведення.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot S_n = \left\langle \begin{array}{cc} \text{н} \rightarrow \text{а} \text{а} \text{а} & \\ \text{н} \rightarrow \text{а} \text{а} \text{а} & \end{array} \right\rangle = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C \cdot S$$

Теорема 3. Два збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ можна почленно додавати та віднімати, при цьому збіжність знову отриманого ряду збережеться і його сума буде дорівнювати сумі або різниці даних рядів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$$

Доведення.

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \dots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \pm (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) = A \pm B \end{aligned}$$

Теорема 4. (Критерій Коші). Для того, щоб числовий ряд був збіжним, необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $\forall n > N$ і $k = 1, 2, 3, \dots$ виконувалася нерівність:

$$|S_{n+k} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon$$

Теорема 5. (Необхідна ознака збіжності числового ряду). Якщо

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то загальний член цього ряду прямує до нуля при

значеннях $n \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доведення.

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Оскільки, за умовою теореми 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S,$$

то значення $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. В іншому випадку ряд розбігається. Ця умова не є достатньою. Покажемо, що гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

розбігається, незважаючи на те, що $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Розглянемо

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, критерій Коші не виконується і гармонійний ряд розбігається.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)}$.

Ряд розбігається, так як для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-5n^2}{n^2+n-2} = -5 \neq 0.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$.

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

ряд розбігається.

5.1.1 Ряди з додатними членами

Розглянемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \text{ де } u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для такого ряду

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n.$$

Значить, послідовність часткових сум зростає.

З теореми про границю монотонної послідовності можна сформулювати умову збіжності ряду з додатними членами:

Ряд з додатними членами завжди має суму, і ця сума скінченна, а ряд буде збіжним, якщо часткові суми ряду обмежені згори, і нескінченна, а ряд розбіжним в іншому випадку.

5.1.1.1 Теореми порівняння знакододатних рядів

Нехай дані два знакододатних ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0 \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, v_n \geq 0$$

Теорема 1. Якщо виконується нерівність $u_n \leq v_n$, починаючи з деякого n , то із збіжності другого (більшого) ряду випливає збіжність першого (меншого) ряду, а із розбіжності меншого ряду випливає розбіжність більшого ряду.

Доведення. Оскільки відкидання кінцевого числа початкових членів ряду не впливає на збіжність, можна вважати, що

$$u_n \leq v_n \quad \forall n = 1.2.3....$$

Для часткових сум цих рядів виконується $U_n \leq V_n$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, тоді $V_n \leq S$, і тим більше $U \leq S$,

значить ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, тоді $U_n \geq S$, значить $V_n \geq S$ і ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається.

Теорема 2. Якщо існує кінцева границя відношення загальних членів двох рядів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad v_n \neq 0, \quad 0 \leq k < \infty$$

то обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно.

Приклади. Дослідити на збіжність наступні ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Порівняємо члени цього ряду з членами розбіжного гармонійного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так як $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, досліджуваний ряд розбігається.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ряд збігається за теоремою порівняння, так як границя відношення загального члена даного ряду до загального члену збіжного (доведено

раніше) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ є постійне число:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)^2} = 1$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \dots \frac{1}{n^n} + \dots$$

Порівняємо цей ряд з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

який являє собою нескінченно убутну геометричну прогресію зі знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$, отже, збігається. Так як $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$, досліджуваний ряд збігається.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots$$

Цей ряд порівняємо з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

з урахуванням того, що $(\ln(1 + \alpha) \sim \alpha)$. Наведемо отримані відомості про збіжність деяких рядів, які можуть бути використані для порівняння:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збігається, якщо } \alpha > 1, \\ \text{розбігається, якщо } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \begin{cases} \text{збігається}, \text{ якщо } a < 1, \\ \text{розбігається}, \text{ якщо } a \geq 1. \end{cases}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ збігається.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \begin{cases} \text{збігається}, \text{ якщо } |q| < 1, \\ \text{розбігається}, \text{ якщо } |q| \geq 1. \end{cases}$

5.1.1.2 Інші достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

Теорема (Ознака Даламбера). Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами і границю відношення наступного члена ряду до попереднього.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ існує, тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{збігається}, \text{ якщо } l < 1 \\ \text{розбігається}, \text{ якщо } l > 1 \\ \text{не визначено}, \text{ якщо } l = 1 \end{cases}$$

Доведення.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n \geq N,$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon, \text{ тобто } l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$$

Розглянемо 3 випадки:

1) $l < 1$; Виберемо ε настільки малим, щоб значення $l + \varepsilon < 1$, тоді, вважаючи $l + \varepsilon = q$, при значенні $0 < q < 1$ маємо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \quad u_{n+1} < u_n \cdot q \quad \text{для } n \geq N(\varepsilon),$$

$$u_{n+2} < u_{n+1} \cdot q < u_n \cdot q^2, \quad u_{n+3} < u_{n+2} \cdot q < u_n \cdot q^3$$

і так далі. Члени ряду

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots \quad (5.3)$$

менше членів геометричної прогресії:

$$u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + \dots \quad (5.4)$$

Так як $q < 1$, то ряд (5.4) збігається, значить, по теоремі порівняння збігається і ряд (5.3).

2) $l > 1$; Візьмемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, що $l - \varepsilon > 1$, тоді при $n \geq N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \quad u_{n+1} > u_n, \quad \text{члени ряду не прямують до нуля і не виконується}$$

необхідна ознака збіжності \Rightarrow ряд розбігається.

3) $l = 1$; Покажемо, що в цьому випадку ряд може як збігатися, так і розбігатися.

а) Гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, для нього

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

б) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для нього

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Порівняємо члени досліджуваного ряду зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (доведено раніше).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}, \quad \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)},$$

Значить, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$u_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \text{Ряд збігається.}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Ряд збігається.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$$

Можна впевнитися, що $u_n \rightarrow 0$. Обчислимо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(2(n+1)+1)!(3n)!}{(3n+3)!n!(2n+1)!} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(2n+3)!(3)!}{(3n+3)!n!(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27} < 1 ; \end{aligned}$$

досліджуваний ряд збігається.

Теорема (Радикальна ознака Коші). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ існує, тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{збігається до } 0, \text{ якщо } l < 1 \\ \text{розбігається до } \infty, \text{ якщо } l > 1 \\ \text{може збігатися до } 0 \text{ або розбігатися, якщо } l = 1 \end{cases}$$

Доведення.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow \left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < \varepsilon \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon$$

1) $l < 1$. Оберемо ε так, щоб $l + \varepsilon < 1$, $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тоді вираз

$\sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon, \Rightarrow u_n < q^n$. Так як $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ збігається при $q < 1$, то і

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - збігається.

2) $l > 1$. Оберемо ε так, щоб $q = l - \varepsilon > 1$. Тоді

$l - \varepsilon > \sqrt[n]{u_n} \Rightarrow u_n > q^n > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ і $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається при $l > 1$.

3) $l = 1$ Ознака відповіді не дає.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Значить, ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{\ln n}}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

Ознака відповіді не дає.

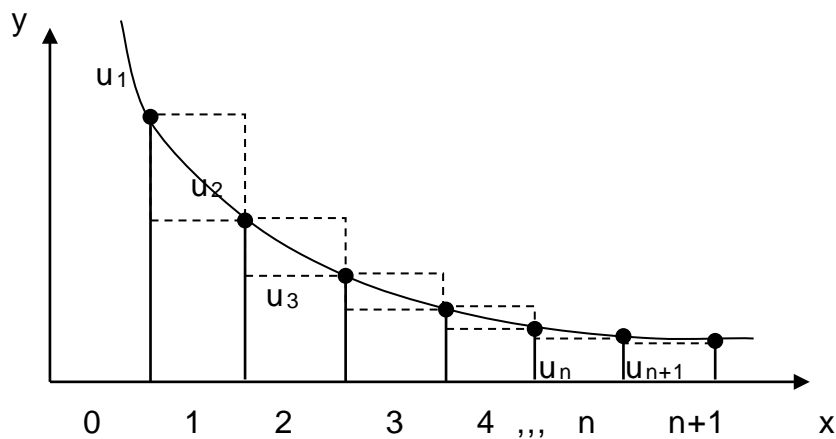
Теорема (Інтегральна ознака Коші).

Нехай $u_n \geq u_{n+1}$ не зростають, $f(n)$ – безперервна незростаюча функція

така, що $f(n) = u_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається або розбігається

одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Доведення. Зобразимо члени ряду геометрично:



Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - це площа «вихідних» прямокутників,

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

де величина $S_n > \int_1^n f(x)dx$ - обмежена знизу, як площа криволінійної трапеції.

$$S_{n+1} - u_1 = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx$$

як площа «внутрішніх» прямокутників.

$$S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1.$$

1) Якщо $\int_1^{\infty} f(x)dx$ збігається, то $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$, і часткова

сума $S_n < S_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)dx + u_1$ обмежена згори. Отже, послідовність часткових сум S_n обмежена, монотонно зростає, отже, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ і ряд збігається.

2) Якщо $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$, то $\int_1^{n+1} f(x)dx \rightarrow \infty$ і $n \rightarrow \infty$, значить

$S_n \rightarrow \infty$ і $n \rightarrow \infty$ і ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

Складемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} &= \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^a \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(a+1)} \right] = \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

Значить, досліджуваний ряд збігається.

Приклад. Дослідіть на збіжність ряд

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}} = \sum_{n=5}^{\infty} u_n.$$

Досліджуємо на збіжність допоміжний ряд

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\sqrt{\ln(n-3)}} = \sum_{n=5}^{\infty} v_n$$

за допомогою інтегральної ознаки. Так як невласний інтеграл

$$\int_5^{\infty} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{\ln(x-3)}} = \int_5^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{\ln(x-3)} \Big|_5^{\infty} = \infty$$

розбігається, то розбігається і відповідний ряд. Обчислення границі відношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n-2} = 1$$

свідчить про розбіжність вихідного ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^a = \infty.$$

досліджуваний ряд розбігається.

Приклад. Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ потрібно взяти, щоб отримати значення суми ряду з точністю до 0,001?

Тут

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}.$$

За умовою задачі

$$\frac{1}{n} > 0,001 \Rightarrow n > 1000,$$

Значить, потрібно взяти 1001 член ряду.

5.1.2 Знакозмінні ряди

Теорема. Якщо для знакозмінного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots,$$

то вихідний ряд збігається.

Доведення. Розглянемо допоміжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) = (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \dots + (u_n + |u_n|) + \dots$$

Для нього справедлива нерівність

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n| \text{ для всіх значень } n = 1, 2, \dots$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2|u_n|) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

збігається згідно з умовою теореми. Допоміжний ряд збігається на підставі ознаки порівняння. Вихідний ряд можна представити як різницю двох збіжних рядів.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

Отже, він збігається.

Зауваження. Протилежне твердження невірне.

Означення. Збіжний ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд, складений з абсолютних величин його членів, збігається.

Зауваження. Доведена ознака збіжності є достатньою, але не необхідною: існують знакозмінні ряди, для яких ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбігаються.

Означення. Збіжний ряд називається *умовно збіжним*, якщо ряд з абсолютних величин його членів розбігається.

5.1.2.1 Знакопереміжні ряди

Означення. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

називається *знакопереміжним*.

Теорема (Ознака Лейбниця). Якщо в знакопереміжному ряді абсолютні величини членів ряду:

- 1) монотонно спадають: $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

то ряд збігається, його сума додатна $S > 0$ і не перевищує першого члена ряду, тобто $S < u_1$.

Доведення. Розглянемо послідовність часткових сум парної кількості членів знакопереміжного ряду

$$\begin{aligned} S_2 &= u_1 - u_2, & S_4 &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) \dots, \\ \dots, S_{2n} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \end{aligned}$$

Кожна з різниць, що стоять в дужках, додатна за умовою теореми, значить, $S_{2n} > 0$ і послідовність S_{2n} є зростаючою. Якщо записати цю суму у вигляді

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - u_{2n},$$

то кожна з різниць в дужках додатна і $S_{2n} > u_1$ тобто послідовність S_{2n} обмежена згори. Отже, послідовність S_{2n} є зростаючою і обмежена згори, значить, має границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, причому $0 < S < u_1$.

Аналогічно можна показати збіжність послідовності часткових сум непарної кількості членів знакопереміжного ряду, отже, ряд збігається.

Приклад. Знакопереміжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

збігається умовно за ознакою Лейбниці, так як

$$\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} \text{ та } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

але відповідний ряд з абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є гармонічним і розбігається. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

збігається абсолютно, так як цей знакопереміжний ряд збігається за ознакою Лейбниці, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається теж.

Зауваження. Ознака Лейбниці використовується для наближеного обчислення суми знакопереміжного ряду з певною точністю. Сума відкинутих членів знакопереміжного ряду за ознакою Лейбниці не перевищує першого з них.

Приклад. Скільки членів ряду потрібно взяти, щоб суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S \text{ знайти з точністю } 0,001?$$

Уявимо суму ряду у вигляді:

$$S = S_k + \delta, \text{ де } S_k = \sum_{n=1}^k u_n, \quad \delta = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$$

за ознакою Лейбниця. За умовою задачі, $u_{k+1} = \frac{1}{k+1} < 0,001$, звідки $k > 999$. Потрібно взяти 1000 членів ряду.

5.2 Функціональні ряди

Нехай функція $f_n(x)$, $n \in N$ визначена в області D , $x \in D$

Означення. Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

називається *функціональним рядом*.

Приклад.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} = \sin x + \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin \frac{x}{3} + \dots$$

Для одних значень x ряд може збігатися, для інших значень - розбігатися.

Приклад. Знайдіть область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \dots$$

Даний ряд визначений для значень $x \in (-\infty, \infty)$. Якщо $|x| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1 \neq 0$$

і ряд розбігається, тому що не виконується необхідна ознака збіжності

ряду; якщо $x = 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ розбігається; якщо

$|x| > 1$: $\frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$ - нескінченно спадна геометрична прогресія.

Порівняння даного ряду зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ при $|x| > 1$ дає область збіжності досліджуваного ряду: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

При значеннях $x = x_0 \in D$ з функціонального ряду виходить числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots$$

Якщо для $x_0 \in D$ числовий ряд збігається, то точка x_0 називається *точкою збіжності* функціонального ряду.

Сукупність усіх точок збіжності ряду утворює область його збіжності. Областю збіжності зазвичай буває будь-який інтервал осі Ox .

Якщо в кожній точці $x \in D_1$ числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігаються, то функціональний ряд називається *збіжним* в області D_1 .

Сума функціонального ряду є деякою функцією від змінної x , визначеної в області збіжності ряду

$$S_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x).$$

Які властивості мають функції $S_k(x)$, якщо відомі властивості членів

ряду, тобто $f_1(x); f_2(x); \dots; f_k(x)$?

Безперервність функцій $f_1(x); f_2(x); \dots; f_k(x)$ не достатня для того, щоб зробити висновок про безперервність $S_k(x)$.

Збіжність ряду безперервних функцій до безперервної ж функції забезпечується додатковою умовою, що виражає одну важливу особливість збіжності функціонального ряду.

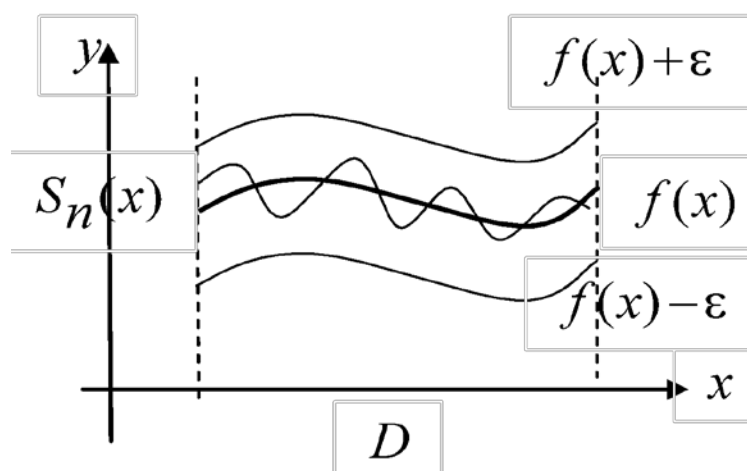
Означення. Функціональний ряд називається *збіжним* в області D , якщо існує границя часткових сум цього ряду, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

Означення. Функціональний ряд називається *рівномірно збіжним* в області D , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число N , що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon; \forall x \in D.$$

Геометричний сенс рівномірної збіжності:



Якщо оточити графік функції $y = f(x)$ " ε -смужкою", обумовленою співвідношенням

$$f(x) - \varepsilon > y > f(x) + \varepsilon, \quad x \in D$$

то графіки всіх функцій $S_n(x)$, починаючи з досить великого значення n , цілком лежать в цій " ε -смужці", що оточує графік граничної функції $y = f(x)$.

Властивості ряду, що рівномірно збігається:

1. Сума ряду, що рівномірно збігається в деякій області D , складеного з безперервних функцій, є функцією безперервною у цій області.

2. Такий ряд можна почленно диференціювати.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = f'(x)$$

3. Ряд можна почленно інтегрувати.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_n(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Для того, щоб визначити, чи є функціональний ряд рівномірно збіжним, треба скористатися достатньою ознакою збіжності Вейєрштрасса.

Означення. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ називається *таким, що мажорується*, в деякій області зміни x , якщо існує такий збіжний

числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами, що для всіх x з цієї області виконуються нерівності

$$|f_n(x)| \leq u_n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Теорема (Ознака Вейєрштрасса) рівномірної збіжності функціонального ряду: Функціональний ряд збігається рівномірно в області збіжності, якщо він є таким, що мажорується в цій області.

Іншими словами, якщо функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ в деякій області $x \in D$ не перевищують по абсолютній величині відповідних додатних чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ і якщо числовий ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ збігається, то функціональний ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ у цій області збігається рівномірно.

Приклад. Довести рівномірну збіжність функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}.$$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^4 x^2};$$

Замінімо загальний член цього ряду загальним членом числового ряду, який перевищує кожен відповідний член ряду за абсолютною величиною. Для цього треба визначити x , при якому загальний член ряду буде максимальним.

$$f'_n(x) \Big|_x = \frac{1+n^4 x^2 - 2n^4 x^2}{(1+n^4 x^2)^2} = \frac{1-n^4 x^2}{(1+n^4 x^2)^2}.$$

$$f'_n(x)\Big|_x = 0 \Rightarrow 1 - n^4 x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n^4} \Rightarrow |x| = \frac{1}{n^2}$$

Тоді

$$\left(f_n(x)\right)_{\max} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + n^4 \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2n^2} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^2}.$$

Отриманий числовий ряд збігається, значить, функціональний ряд збігається рівномірно згідно з ознакою Вейерштрасса.

Приклад. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n+1} = f(x)$$

Для знаходження суми ряду скористаємося відомою формулою для суми геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (5.5)$$

Диференціюючи ліву і праву частини формули (5.5), отримаємо послідовно

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)''. \quad (5.6)$$

Виділимо в сумі, що підлягає обчисленню, доданки, пропорційні до першої та другої похідної:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n-2+3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) + 10n + 5)x^{n-2+3} = \\
&= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + 10x^2 \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} + 5x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \\
&= x^3 \left(\frac{1}{1-x} \right)'' + 10x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)' + 5x \left(\frac{1}{1-x} \right).
\end{aligned}$$

Обчислимо похідні:

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{1}{(1-x)^3},$$

тоді

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{10x^2}{(1-x)^2} + \frac{5x}{1-x} = \\
&= \frac{2x^3 + 10x^2(1-x) + 5x(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{-3x^3 + 5x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

5.2.1 Степеневі ряди

Серед функціональних рядів існує клас степеневих рядів.

Означення. Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

називається *степеневим* за ступенями $(x - x_0)$. Вирази $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ - постійні числа. Якщо $x_0 = 0$, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

є *степеневим* за ступенями x .

5.2.1.1 Область збіжності степеневого ряду.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці x_0 ($x_0 \neq 0$), то він збігається, й притім абсолютно, для будь-якого значення x , за абсолютною величиною меншого x_0 , тобто $|x| < |x_0|$, або в інтервалі $(-x_0, x_0)$.

Доведення. Внаслідок збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ його загальний член повинен прямувати до нуля, тому всі члени цього ряду рівномірно обмежені: існує таке постійне додатне число M , що при всякому n має місце нерівність $|a_n x_0^n| < M$. Тоді даний ряд можна записати так:

$$a_0 + |a_1 x_0| \left(\frac{x}{x_0} \right) + |a_2 x_0^2| \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + |a_n x_0^n| \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots$$

Завдяки зробленому зауваженню можна записати ряд

$$M + M\left(\frac{x}{x_0}\right) + M\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots + M\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \dots$$

який утворює геометричну прогресію зі знаменником $\left|\frac{x}{x_0}\right|$. Якщо

$|x| < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, і прогресія збігається. Якщо більший ряд збігається,

то буде збігатися і даний ряд. Теорема доведена.

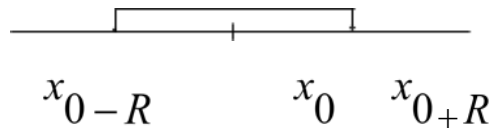
Наслідок: Якщо степеневий ряд розбігається при значенні $x = x_0$, то ряд розбігається при всякому значенні x , більшому за абсолютною величиною x_0 ($|x| > |x_0|$).

З теореми Абеля і наслідку з цієї теореми випливає наступне припущення. Для кожного степеневому ряду, що має як точки збіжності, так і точки розбіжності, існує таке додатне число R , що для всіх x , $|x| < R$, ряд абсолютно збігається, а для значень x , $|x| > R$, ряд розбігається. Що стосується значень $x = R$ або $x = -R$, то тут можливі ситуації, коли ряд збігається в обох точках, або тільки в одній з них, або ні в одній.

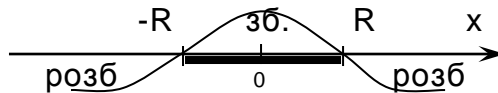
Означення. Число R , таке, що для всіх x , $|x| < R$, степеневий ряд збігається, а для всіх x , $|x| > R$, розбігається, називається *радіусом збіжності* ряду, а інтервал $(-R; R)$ називається *інтервалом збіжності*.

Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ інтервал збіжності має вигляд:

$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ з центром в точці x_0 .



Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ інтервал збіжності має вигляд $x \in (-R, R)$ з центром в точці 0:



У граничних точках $x = \pm R$ поведінка ряду вимагає додаткового дослідження. Можна вказати правило для знаходження радіуса збіжності степеневому ряду.

5.2.1.2 Обчислення радіуса збіжності степеневому ряду

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

то радіус збіжності ряду дорівнює $\frac{1}{\rho}$, тобто $R = \frac{1}{\rho}$, причому вважаємо

$R = 0$, якщо $\rho = \infty$, і $R = \infty$, якщо $\rho = 0$.

Доведення. Припустимо, що $u_n = |a_n x^n|$, тобто розглянемо числовий ряд $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, який є рядом абсолютних величин даного степеневому ряду. Тоді:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$

1. Нехай ρ - кінцеве число, відмінне від нуля, значить, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \cdot |x|$. За радикальною ознакою Коші ряд, складений з абсолютних величин членів ряду, збігається при $\rho \cdot |x| < 1$, звідси випливає, що $|x| < \frac{1}{\rho}$. При $\rho \cdot |x| > 1$ і

$|x| > \frac{1}{\rho}$ ряд розбігається для всіх значень x . Справді, якби при $x = x_1$,

$|x_1| > \frac{1}{\rho}$ ряд збігався, то по теоремі Абеля для $x = x_2$, де $|x_1| > |x_2| > \frac{1}{\rho}$, він

мав би збігатися, чого бути не може. Таким чином, ряд збігається при $|x| < \frac{1}{\rho}$ і розбігається при $|x| > \frac{1}{\rho}$ і, значить, $R = \frac{1}{\rho}$.

2. Нехай $\rho = 0$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ при всякому значенні x , і ряд збігається для будь-якого x . Значить, ряд абсолютно збігається у будь-якій точці осі Ox і $R = \infty$.

3. Нехай $\rho = \infty$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ при всякому значенні $x, x \neq 0$, і значить, ряд не може збігатися ні при якому $x \neq 0$. На підставі теореми Абеля укладаємо, що ряд у всіх точках осі Ox (крім нульової) розбігається і $R = 0$.

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \rho,$$

то радіус збіжності ряду дорівнює $\frac{1}{\rho}$, тобто $R = \frac{1}{\rho}$, причому ми вважаємо $R = 0$, якщо $\rho = \infty$, і $R = \infty$, якщо $\rho = 0$.

Степеневі ряди в області збіжності збігаються абсолютно і тому для дослідження збіжності можна використовувати ознаки збіжності рядів з додатними членами.

1. За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} < 1, & \text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1, \\ > 1, & \text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1. \end{cases}$$

Ряд збігається, якщо

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

звідси радіус збіжності

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

1. За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} < 1, & \text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \\ > 1, & \text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1. \end{cases}$$

Ряд збігається, якщо

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

звідси випливає, що

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад. Знайдіть область збіжності рядів:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$. Досліджуємо граничні точки.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{ряд розбігається};$$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \text{збігається умовно за ознакою Лейбниця.}$$

Область збіжності ряду: $x \in [-1, 1)$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty;$$

ряд збігається при всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

5.2.1.3 Властивості степеневих рядів

В силу теореми Абеля степеневий ряд збігається рівномірно на $(-R, R)$, його можна почленно диференціювати й інтегрувати в інтервалі збіжності.

Теорема. Сума степеневого ряду - це функція, що має всередині інтервалу збіжності похідні будь-якого порядку. Ці похідні є сумами степеневих рядів, отриманих з даного функціонального ряду почленным диференціюванням його елементів відповідне число разів, причому радіус збіжності кожного «похідного» ряду той же, що і у вихідного функціонального ряду.

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$$

Теорема. Сума степеневого ряду є функція, аналітична в інтервалі збіжності.

Можна виразити коефіцієнти степеневого ряду через похідні від функції суми даного ряду

$$a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Таким чином, коефіцієнти степеневого ряду є відповідними коефіцієнтами Тейлора для функції $S(x)$ в точці $x = x_0$.

$$S(x) = S(x_0) + \frac{S'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{S''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots +$$

Якщо є деяка функція $f(x)$, чи можна її представити у вигляді суми деякого степеневих ряду, або, іншими словами, чи можна дану функцію розкласти в степеневий ряд?

5.2.1.4 Розкладання функцій в степеневі ряди

Означення. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд за ступенями різниці $(x - x_0)$, то цей ряд обов'язково є *рядом Тейлора* цієї функції:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

залишковий член у формі Лагранжа ($0 < \theta < 1$).

Необхідною умовою розкладання функції в ряд Тейлора є диференційованість функції нескінченне число разів. Для того, щоб ряд Тейлора збігався до даної функції $f(x)$, абсолютні величини всіх похідних функції $f(x)$ повинні бути обмежені одним і тим же

числом $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, де M - постійна яка не залежить від n . Остаточний член $R_n(x)$ визначається нерівністю

$$|R_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5.2.1.5 Розкладання основних елементарних функцій у степеневі ряди

1. $f(x) = e^x$

$$f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x; \quad f^{(n)}(0) = 1 \quad |f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^R$$

На будь-якому інтервалі $x \in (-R, R)$ осі x , значить для всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R.$$

2. $f(x) = \sin x$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad x \in R. \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \quad f''(0) = 0$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

$$3. f(x) = \cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R.$$

$$4. f(x) = \ln|1+x|, \quad |x| < 1$$

Продиференціюємо $f(x)$ і розкладемо похідну за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\left[\ln(1+x) \right]' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Продиференціюємо цю рівність почленно:

$$\ln(1+x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Постійну інтегрування C знайдемо, вважаючи $x = 0$.

$$\ln 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1$$

$$5. f(x) = \arctg x$$

Уявимо функцію арктангенс у вигляді інтеграла із змінною верхньою

$$\text{границею } \arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

За формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

$$\arctg x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots +$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$7. f(x) = (1+x)^m, \quad m - \text{довільне постійне число,}$$

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f''(0) = m(m-1)$$

.....

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots[m-(n-1)](1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots[m-(n-1)].$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n + \dots$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \quad x \in (-1, 1).$$

Область збіжності цього ряду знаходиться за ознакою Даламбера:

$$m = \frac{1}{2}: \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots$$

$$m = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!m(m-1)\dots[m-(n-1)]x^n} \right| =$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n-m|}{n+1} = |x| < 1.$$

5.2.1.6 Застосування степеневих рядів

1. Обчислення значень функцій.

а) Обчислити $\sin 10^\circ$ з точністю 0,001.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Ряд збігається при значенні $x \in R$.

$$10^\circ = \frac{\pi \cdot 10^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{18}; \quad \sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 - \dots$$

Ряд знакопереміжний, залишок ряду можна оцінити за ознакою Лейбниця.

Знайдемо член ряду, менший за модулем, ніж 0,001.

$$|u_2| = \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} < 0.001$$

За ознакою Лейбниця похибка від відкидання всіх членів, починаючи з n -го, дорівнює

$$|R_n| < |u_{n+1}|,$$

значить

$$|R_1| < |u_2| < 0.001; \sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0.174.$$

б) Обчислити з точністю до 0,01 значення $\ln 8$.

$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$; Обчислимо $\ln 2$. Скористаємося розкладанням логарифмічної функції в ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad |x| < 1$$

При якому значенні x $\frac{1+x}{1-x} = 2$?

$$1+x = 2(1-x) \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} + \dots \right)$$

$$\ln 8 = 3 \cdot 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots \right)$$

Скільки членів потрібно залишити, щоб обчислити $\ln 8$ з точністю 0,01?

$$R_n = 3 \cdot 2 \left[\frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{2n+3} + \dots \right] <$$

$$\begin{aligned}
&< 6 \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \right] = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{9}{8} \\
R_2 &< 2 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1 \cdot 9}{5 \cdot 8} = \frac{1}{180} \approx 0,005 < 0,01; \\
\ln 8 &= 6 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} \right) = 2 + \frac{2}{27} \cong 2,07.
\end{aligned}$$

в) Обчислити $\sqrt[4]{17}$ з точністю 0,01.

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2 \sqrt[4]{1 + \frac{1}{16}} = 2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Скористаємося біноміальним рядом, вважаючи

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{16}, \quad m = \frac{1}{4} \\
2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}} &= 2 \left[1 + \frac{1}{4 \cdot 16} + \frac{(-1) \cdot 3}{2! \cdot 4^2} \left(\frac{1}{16} \right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{16} \right)^3 + \dots \right] = \\
&= 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{16^3} + \frac{7}{4 \cdot 16^4} - \dots, \quad |R_n| < |u_{n+1}| \\
|u_3| &= \frac{3}{16^3} < 0,01 \quad |R_2| < |u_3| \\
\sqrt[4]{17} &= 2 + \frac{1}{32} = 2 + 0,031 = 2,03.
\end{aligned}$$

г) Обчислити число e з точністю 0,001.

Оцінимо похибку наближеної рівності:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \dots \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < 1.$$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) < \\ &< \frac{x^n}{n!} \left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{n+1} \right)^3 + \dots \right] = \end{aligned}$$

за формулою для суми нескінченно спадної геометричної прогресії

$$= \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} \Rightarrow R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}$$

Для обчислення числа e оцінимо $R_n(x)$ при $x=1$:

$$\frac{1}{n!n} < 0,001, \quad n=5.$$

$$\begin{aligned} e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \\ &= 2 + 0,5 + 0,166 + 0,041 + 0,008 = 2,715 \end{aligned}$$

2. Обчислення інтегралів, що не беруться в елементарних функціях

Хай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

$$a) f(x) = e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \right) \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{1!3} + \frac{a^5}{2!5} - \frac{a^7}{3!7} + \dots$$

Визначимо, скільки членів ряду потрібно врахувати, щоб отримати результат з точністю 0,001 ; $a = 1$.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \dots$$

Ряд збігається за ознакою Лейбніца, при цьому $S < u_1$. Відкинемо члени, для яких

$$\frac{1}{n!(2n+1)} \leq 0,001 \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow n = 5.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{t(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{t(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \end{aligned}$$

3. Розв'язання диференціальних рівнянь

а) Метод послідовного диференціювання.

Приклад.

$$y' = x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

За умовою завдання $y(0)=1$, підставляючи $x=0$ в диференціальне рівняння $y' = x^2 y^2 - 1$, отримуємо $y'(0) = -1$. Послідовним диференціюванням вихідного диференціального рівняння знаходимо:

$$y'' = 2xy^2 + 2x^2 yy', \Rightarrow y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 2x^2 (y')^2 + 2x^2 yy'', \Rightarrow y'''(0) = 2$$

і т.д. У підсумку

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

б) Метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад.

$$y'' = 2xy' + 4y, \quad y=0, \quad y'=1 \text{ при } x=0$$

Шукаємо рішення у вигляді:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad a_n = ? \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots$$

Підстановка в рівняння дає:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots = 2x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3 + \dots$$

$$\dots + 4x + 4a_2x^2 + 4a_3x^3 + \dots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях x :

$$x^0: 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0; x^1: 6a_3 = 2 + 4 \rightarrow a_3 = 1;$$

$$x^2: 12a_4 = 4a_2 + 4a_2 \rightarrow a_4 = 0; \dots\dots a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1} \dots\dots$$

$$a_5 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_6 = 0, \dots \Rightarrow y = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \dots$$

5.2.2 Тригонометричні ряди

Означення. Функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

називається *тригонометричним рядом*, а постійні числа $a_n, b_n, (n=1, 2, 3, \dots)$ називаються *коефіцієнтами ряду*.

5.2.2.1 Ряд Фур'є і коефіцієнти Фур'є для періодичної функції з періодом 2π

Теорема. Якщо $y = f(x)$ - безперервна періодична функція з періодом 2π , інтегрована на інтервалі $(-\pi; \pi)$, така, що для всіх x справедливий розклад

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

і ряд збігається до функції $y = f(x)$ рівномірно, то для коефіцієнтів ряду справедливі формули Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $(-\pi; \pi)$, то числа a_0, a_n, b_n , визначені формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $y = f(x)$, а тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- рядом Фур'є функції $y = f(x)$.

Теорема. Якщо функцію $y = f(x)$ можна розкласти в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей ряд є її рядом Фур'є.

5.2.2.2 Розкладання функцій у тригонометричні ряди

Питання про можливість розкладання функції $y = f(x)$ в тригонометричний ряд зводиться до наступного.

Якими властивостями повинна володіти функція, щоб побудований для неї ряд Фур'є збігався, і його сума збігалася з функцією $y = f(x)$?

На відміну від степеневих рядів, в які розкладаються тільки функції, що мають похідні всіх порядків, в тригонометричні ряди розкладаються майже будь-які функції.

Достатні умови того, що функція може бути розкладена у ряд Фур'є, дає наступна теорема, яку ми приймемо без доведення.

Теорема Діріхле. Якщо функція $y = f(x)$ з періодом 2π обмежена і кусочно-монотонна на відрізку $(-\pi; \pi)$, то ряд Фур'є, побудований для функції $y = f(x)$, збігається в усіх точках цього інтервалу.

При цьому:

- 1) сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$ в точках безперервності функції $f(x)$;
- 2) якщо точка $x = c$ є точкою розриву $f(x)$, то сума ряду Фур'є

$$S(x) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Т.1,2 – М.: «Наука», 1978.
2. М.І. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 720 с
3. Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко „Вища математика в 2-х книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 554 с.
4. Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим В.М. та ін. Вища математика. Спеціальні розділи. Кн. 1, 2. – К.: Либідь, 2003.
5. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч.1,2. – К.: Техніка, 2000.
6. А.Ф. Берман „ Краткий курс математического анализа ”. Москва. „Наука”, 1971, 255 с.
7. Бугров Л.С., Никольский С.М. „Дифференциальное и интегральное исчисление”. Москва. Наука, 1979, 362 с.
8. А.М. Самойленко „ Диференціальні рівняння ”. Київ, „Вища школа”, 1994, 437 с.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1,2 – М.: «Высшая школа», 1986.
10. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. ,Т.1,2 – М. «Наука», 1986.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. «Наука», 1972.

Навчальне видання

Глушков Олександр васильович, д.ф.-м.н., проф.,
Чернякова Юлія Георгіївна, к.ф.-м.н., доц.,
Вітавецька Лариса Анатоліївна, к.ф.-м.н., доц.,
Хецеліус Ольга Юріївна, д.ф.-м.н., проф.,
Дубровська Юлія Володимирівна, к.ф.-м.н., доц.,
Свінарєнко Андрій Андрійович, д.ф.-м.н., доц.,
Флорко Тетяна Олександрівна, к.ф.-м.н., доц.
Башкарьов Петро Георгійович, к.ф.-м.н., доц.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина II

Конспект лекцій

Підписано до друку Формат
Папір офсетний. Ум. друк. арк.. Наклад прим.
Замовлення

Видавництво та друкарня «ТЕС»
(Свідоцтво ДК № 771) Одеса, Канатна 82/1

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет

65016, Одеса, вул.. Львівська, 15
