МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Глушков О.В., Буяджи В.В., Вітавецька Л.А., Чернякова Ю.Г.

ВИЩА МАТЕМАТИКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій

Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти та науки України
як конспект лекцій (протокол № _____ від___________________ 2018 р.

Одеса – 2018

XXXX

УДК XXXXXX

Вища математика та математичні методи дослідження операцій: **к**онспект лекцій / О.В. Глушков та ін. Одеса: 2018.   150 с.

Викладені питання лінійної алгебри, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціального та інтегрального числення функції однієї та багатьох змінних, теорії диференціальних рівнянь, кратних та криволінійних інтегралів, деяких математичних методів дослідження операцій.

Для студентів ІІ курсу та ІІІ курсу (інтегровані) спеціальності комп’ютерні науки.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальності комп'ютерні науки . Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, кратних та криволінійних інтегралів та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. *Дослідження операцій* включає в себе широкий спектр методів, використовуваних в прагненні поліпшити процес прийняття рішень і підвищення ефективності цих рішень, таких як моделювання, математична оптимізація, теорія масового обслуговування та інших моделей стохастичного процесу, прийняття Маркова, економетричні методи, нейронні мережі, експертні системи, аналіз рішень і аналіз ієрархій. Майже всі ці методи включають в себе побудову математичних моделей, які намагаються описати систему. Дослідження операцій також має тісні зв'язки з інформатикою та аналітикою. Використовуючи методи з інших математичних наук, таких як математичне моделювання, статистичний аналіз, математична оптимізація, дослідження операцій має перекриватися з іншими дисциплінами, зокрема виробничо-технічного та оперативного управління.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики та ММДО, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика та ММДО" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні задач й аналізувати результати математичних обчислень та досліджень. Вивчення дисципліни "Вища математика та ММДО" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен

знати основні визначення, положення та теореми лінійної і векторної алгебри, диференціального і інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних; основні типи диференціальних рівнянь та кратних і криволінійних інтегралів; матеріал ММДО у обсязі програми.

вміти

- використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, розв’язанні диференціальних рівнянь, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики щодо розв’язання прикладних математичних задач.
- будувати математичні моделі проблемних ситуацій;
- будувати моделі і розв’язувати задачі лінійного та нелінійного програмування;
- будувати моделі і розв’язувати задачі параметричного, дискретного, динамічного, стохастичного програмування;
- будувати моделі багатокритеріальної оптимізації.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Векторна алгебра

1.1.1 Поняття вектора та його позначення

Величина, для повної характеристики якої достатньо одного числа, називається скаляром. Це температура, маса, густина, робота сили. Два скаляри однакового розміру рівні, якщо рівні їх значення. Багато фізичних понять, таких, як швидкість і прискорення тіла, зовнішня сила, прикладена до тіла, електричні та магнітні поля і багато інших несуть у собі інформацію як про числове значення того чи іншого поняття, так і про напрям (у просторі), що асоціюється з цим поняттям. Для повного визначення таких понять (властивостей) потрібні 3 числа (скаляра). Такі поняття зручно позначати одним символом. Вони мають назву векторів.

Вектор - це спрямований відрізок, напрямок якого збігається з напрямом векторної величини, а довжина у вибраному масштабі дорівнює числовому значенню векторної величини (довжина, модуль, абсолютне значення), що цей вектор зображає. У векторі важливі дві його точки: початок вектора *A* і кінець вектора *B*. Початок вектора *A* має назву точки прикладення вектора. Цей вектор можна позначити $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ чи просто $\vec{a}$, а величину вектора - $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$. Два вектори вважаються **рівними**, якщо вони паралельні, мають один і той же напрям і однакову довжину (кут між ними дорівнює нулю). Роль нуля в алгебри векторів грає **нульовий вектор**, тобто вектор, довжина якого дорівнює нулю і його напрям не визначений (напрям можна вибрати довільно). Усі нульові вектори вважаються рівними. Два вектори називають **колінеарними** ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать у одній площині або у паралельних площинах. **Протиспрямовані вектори** мають одну й ту ж довжину та спрямовані у протилежні сторони (кут між ними дорівнює 180^0). Такі вектори рівні за винятком знака. Важливими поняттями є поняття орта вектора та орта осі. **Орт вектора** $\vec{a}$ - це вектор $\overrightarrow{a^0}$, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$. Таким чином, вектор $\vec{a}$ можна записати так: $\vec{a} = \overrightarrow{a^0}|\vec{a}|$. Аналогічно визначають орт осі – вектор з довжиной 1, напрям якого співпадає з напрямом осі.

Розглянемо поняття **лінійної залежності та незалежності векторів**. Вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_{\mathrm{n}}$ називаються **лінійно залежними** векторами, якщо існують числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, не всі рівні нулю, такі що справедлива рівність $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$. Якщо ця рівність можлива лише при умові, що $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ дорівнюють нулю, то вектори є **лінійно незалежними**. Необхідною та достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Необхідною та достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність. **Векторний базис** трьохвимірного простору – це сукупність трьох лінійно незалежних векторів у просторі. Якщо $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - базис трьохвимірного простору, то будь-який вектор $\vec{d}$ простору представляється у вигляді лінійної комбінації векторів заданого базису: $\vec{d}=\alpha\,\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Числа α,β,γ - координати вектора $\vec{d}$ у даному базисі. Зазвичай у тривимірному просторі вибирають ортонормований базис, що складається з трьох одиничних взаємно ортогональних векторів $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, які є ортами вісей OX, OY, OZ прямокутной системи координат, а будь-який вектор $\vec{a}$ представляють в координатної формі:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,, \tag{1.1}$$

де $a_x\,,a_y\,,\ a_z$ - прямокутні координати вектора $\vec{a}$.

Координати **радіуса-вектора** $\overrightarrow{AB}$, що з’єднує точку *A*, що має назву початку координат, і деяку точку простору *B*, мають назву координат точки *B*. Якщо точка *A* має координати $(a_x,a_y,\ a_z)$, а точка *B* - кординати $(b_x,b_y,\ b_z)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ буде мати координати $(b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z)$, вектор $\overrightarrow{BA}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$. Тобто координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат кінця і початку вектора. Важливим є поняття проекції вектора. Нехай задана деяка вісь – пряма з одиничним вектором $\vec{e}$, що лежить на ній та задає додатний напрям на прямій. **Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь** називають число $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|a|\cdot\cos\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{e}$. Проекціями вектора $\vec{a}\ (a_x,a_y,\ a_z)$ на координатні осі OX, OY, OZ є координати a_x, a_y, a_z

1.1.2 Дії над векторами

У алгебрі векторів визначені операції додавання, віднімання та множення. Поняття ділення на вектор не існує.

Додаванням деяких векторів, наприклад, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 1.1), називається вектор $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, по величині та напряму рівний замикаючої $\overrightarrow{OM}$ просторової ламаної лінії, побудованої на даних векторах.

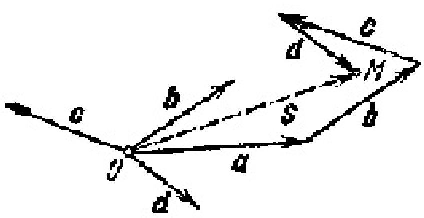


Рис. 1.1

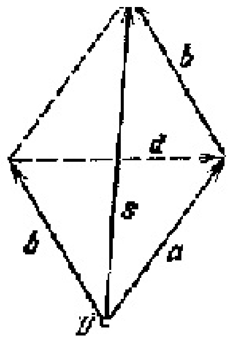


Рис. 1.2

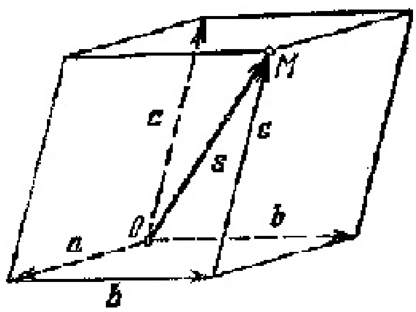


Рис. 1.3

Для випадку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.2) їх сумою $\vec{s}$ є діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, що виходить із загальної точки прикладання їх (правило паралелограма). Так як в трикутнику довжина одного боку не перевищує суми довжин двох інших сторін, то з рис. 1.2 маємо $|a+b| \le |a|+|b|$, тобто модуль суми двох векторів не перевищує суми модулів цих векторів. Для випадку трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 1.3) їх сумою $\vec{s}$ є діагональ $\overrightarrow{OM}$ діагональ паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (правило паралелепіпеда). Легко перевірити, що для векторного додавання справедливі наступні властивості:

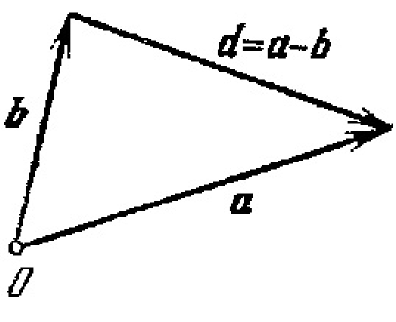


Рис. 1.4

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативність),
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоціативність),
3) $\vec{a}+0=\vec{a}$ (присутність нульового елемента),
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ (наявність протилежного елемента).

Під **різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.4) розуміють вектор $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ такий, що

$\vec{b}+\vec{d}=\vec{a}$. Зазначимо, що у параллелограмі, побудованому на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, їх різницею є відповідно спрямована друга діагональ паралелограма. Справедливе наступне правило відіймання: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Множенням вектора $\vec{a}$ на скаляр k називається вектор $\vec{b}=k\vec{a}=\vec{a}k$, що має довжину $\left|\vec{b}\right|=k\left|\vec{a}\right|$, напрямок якого: 1) збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k>0$; 2) протилежне йому, якщо $k<0$; 3) довільне, якщо $k=0$. Ця операція володіє наступними властивостями:
1) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (дистрибутивність відносно додавання векторів),
2) $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ (дистрибутивність відносно додавання чисел),
3) $k(m\vec{a})=(k\,m)\,\vec{a}$ (асоціативність),

4) $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$, $0\vec{a}=0$.

Визначимо дії над векторами, що задані своїми координатами. Нехай дані два вектори $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ та $\vec{b}\left(b_x, b_y, b_z\right)$. Тоді:

а) рівність векторів означає рівність відповідних координат:

$\vec{a}=\vec{b} \iff a_x=b_x,\ a_y=b_y, a_z=b_z$;

б) колінеарність векторів означає пропорційність відповідних координат: $\vec{a}\parallel\vec{b} \iff a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z$;

в) лінійні операції над векторами означають лінійні операції над координатами: $k\cdot\vec{a}=\left(k\cdot a_x,\ k\cdot a_y,\ k\cdot a_z\right)$;

$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\right)$, $\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z\right)$.

г) довжина вектора обчислюється за формулою $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ **;**

д) напрям вектора $\vec{a}$ може бути заданий за допомогою напрямних косинусів (косинусів кутів між вектором та додатними напрямами осей координат): $\cos\alpha=a_x/\left|\vec{a}\right|$, $\cos\beta=a_y/\left|\vec{a}\right|$, $\cos\gamma=a_z/\left|\vec{a}\right|$. Напрямні косинуси задовольняють умову: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

е) координати орта $\overrightarrow{a^0}$ вектора $\vec{a}$ обчислюються за формулою:

$\overrightarrow{a^0}=\left(a_x/\left|\vec{a}\right|,\ a_y/\left|\vec{a}\right|,\ a_z/\left|\vec{a}\right|\right)=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$.

При множенні векторів можна одержати як скаляр, так і вектор.

Тому у алгебрі векторів існують два різних добутка векторів: скалярний добуток ($\vec{a}\cdot\vec{b}$ чи $(\vec{a},\vec{b})$) , результатом якого є скаляр (число), і векторний добуток (($\vec{a}\times\vec{b}$) чи $[\vec{a},\vec{b}]$), результатом якого є новий вектор.

Під **скалярним добутком** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють добуток довжин ціх векторів на косинус кута між ними, тобто $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$, де θ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\theta\le\pi$.

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то скалярний добуток дорівнює нулю. З парності косинуса випливає комутативність скалярного добутку: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. Якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то або $|\vec{a}|=0$, або $|\vec{b}|=0$, або $\theta=\pi/2$. В останньому випадку вектори взаємно перпендикулярні. Це рівняння є умовою ортогональності двох векторів. Скалярний добуток векторів у координатній формі дорівнює сумі попарних добутків їх проекцій:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z \qquad (1.2)$$

Знаючи модулі векторів та їх скалярний добуток, можна визначити кут між векторами: $\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}/|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Основні властивості скалярного добутку векторів:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (комутативність),
2) $(\alpha\,\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$ (асоціативність відносно множення на число),
3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{a},\vec{c})$ (дистрибутивність відносно додавання).

Скалярний добуток може бути як додатним числом (якщо кут між векторами гострий) , так і від’ємним (якщо кут між векторами тупий).

Векторним добутком ненульових та неколінеарних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, що позначається символами $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\times\vec{b}$ та відповідає умовам: 1) $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ **;**

3) впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - права.

З непарності синуса випливає антикомутація співмножників у векторному добутку: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. Векторний добуток вважають рівним нулю, якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ дорівнює нулю, або якщо вони колінеарні. Векторний добуток векторів у координатній формі обчислюється за допомогою визначника 3-го порядку:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\vec{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right). \qquad (1.3)$$

За допомогою векторного добутку можна знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\theta$.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називають число, що позначається символом $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ і дорівнює: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Мішаний добуток має властивості: 1)він не змінюється при циклічній перестановці співмножників, тобто $\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\,(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\,(\vec{a}\times\vec{b})$; 2) при перестановці двох сусідніх множників мішаний добуток змінює знак на протилежний, тобто $\vec{a}\,(\vec{c}\times\vec{b})=-\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c})$; 3) необхідною та достатньою умовою компланарності трьох ненульових векторів є рівність нулю їх мішаного добутку: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є компланарні , якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$. Обчислення мішаного добутку у координатній формі робиться за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=a_x\left(b_yc_z-c_yb_z\right)-a_y\left(b_xc_z-c_xb_z\right)+a_x\left(b_xc_y-c_xb_y\right). \qquad (1.4)$$

Мішаний добуток трьох векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах, взятому зі знаком плюс, якщо ці вектори утворюють праву трійку, і зі знаком мінус, якщо трійка ліва.

1.2 Матриці та визначники

1.2.1 Визначники та їх властивості

Розрізняють визначники другого, третього і вищих порядків.

Визначник другого порядку : $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

Тут ліворуч – позначення визначника другого порядку, праворуч його значення. Величини a_{ij} - елементи визначника. Рядки та стовпці визначника називаються рядами. Перший індекс позначає номер рядка, а другий - номер стовпчика, в яких розташований елемент.

Визначник третього порядку :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Визначник n-го порядку позначають так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Він має n^2 елементів і $n!$ членів. Тому обчислення визначників більш ніж третього порядку зводиться до обчислення визначника третього або другого порядку з допомогою наступних **властивостей визначників**:

- визначник не змінюється, якщо до елементів будь-якого ряду додати відповідні елементи іншого ряду, помножені на одне і теж число;
- визначник не змінюється при транспонуванні матриці;
- визначник, рядок якого цілком складається з нулів, дорівнює нулю;
- визначник з однаковими (пропорційними) рядками дорівнює нулю;
- визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядку на їх алгебраїчні доповнення ;
-сума добутків елементів будь-якого рядку на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядку дорівнює нулю.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елементу визначника n-го порядку називається добуток $(-1)^{i+j}$ і визначника n-1-го порядку, одержа-ного з вихідного визначника викресленням *i*-й строки та *j* –го стовпця.

1.2.2 Матриці та дії над ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, що заповнена деякими математичними об'єктами, наприклад, числами, векторами, функціями, і т.і. Розглянемо матриці з елементами з поля дійсних чисел. Якщо матриця має m рядків та n стовпців, то говорять, що вона має розмір m x n. Таким чином, матриця (розміру m x n) записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Матриці, що мають однакове число n рядків та стовпців, називають **квадратними**. Квадратні матриці, всі елементи яких, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають **діагональними**. Діагональна матриця, ненульові елементи якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною** та позначається E_n. Матриця, що складається лише з нулів, називається **нульовою.** Матрицю, що складається з одного рядка, часто називають **вектором**, а з одного стовпця –**вектор-стовпцем**. Дві матриці вважають **рівними**, якщо вони мають однаковий розмір і усі їх відповідні елементи рівні. Матрицю A={ a_{ij} } можна **транспонувати**, тобто замінити рядки стовпцями, а стовпці- відповідними рядками, тоді отримаємо так звану **транспоновану** матрицю A^T={ a_{ji} }. Дві матриці A={ a_{ij} } та B={ b_{ij} } одного і того ж розміру m x n можна додавати, їх **сумою** буде матриця того ж розміру C ={ c_{ij} }, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, тобто щоб отримати суму двох матриць, достатньо додати відповідні елементи цих матриць, що знаходяться на однакових позиціях. Розглянемо матрицю A={ a_{ij} } розміром m x n та матрицю B={ b_{ij} } розміром n x k. Кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Для матриць, що мають таку властивість, можна ввести дію **множення матриці на матрицю**, у результаті чого дістанемо матрицю C={ c_{ij} } розміром (m x k), де $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Для матриць другого порядку:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12}\, b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} (1.6)$$

Також матрицю можна **помножити на число**, для цього необхідно помножити на це число кожний елемент матриці.

Наведемо **властивості дій над матрицями**:

1) (A+B)+C=A+(B+C);
2) A+B=B+A;
3) A+0=A, де 0- матриця, що складається з нулів;
4) A+(-A)=0, де –A - протилежна матриця;
5) $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$. та $c(A_1+A_2)=cA_1+cA_2$, де c_1, c_2, c – числа;
6) 1·A= A;
7) (AB)C=A(BC);
8) (cA)B=A(cB)=cAB;
9) $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$;
10) $AB \neq BA$; 11) $AE_n = A$.

Важливим поняттям матричного числення є поняття оберненої матриці. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A, якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

Обернена матриця існує тільки для квадратних матриць. Не кожна матриця має обернену, але якщо вона існує, то єдина. Обернена матриця для квадратної матриці n-го порядку (1.5) може бути знайдена за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

де |A| - визначник матриці A , а $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$- алгебраїчні доповнення елементів визначника |A|. Алгебраїчні доповнення до зворотньої матриці записують не по рядках, а по стовпцях.

Мінором M_{ij} для матриці називається визначник матриці, отриманий викресленням з неї *i*-го рядка та *j*-го стовпця.

Рангом матриці A називається найбільший порядок мінорів, що не дорівнюють нулю.

РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1 Границя функції

2.1.1 Функція однієї змінної

Нехай дано дві змінні величини x і y з областями зміни X і Y. Припустимо, що змінній x може бути задано довільне значення з області X. Тоді змінна y є функцією змінної x, якщо по деякому правилу кожному значенню x з X відповідає одне певне значення y з Y. В цьому випадку змінна x є аргумент функції, а змінна y - функція. Область зміни аргументу x - це область визначення функції, а область зміни змінної y - область зміни функції. Функціональну залежність між змінної x і y позначають так: $y = f(x)$. Існують аналітичний і графічний засоби задання функції. Аналітичний - найбільш зручний. Функція задається формулою, в якій зазначено, які дії і в якій послідовності потрібно зробити над значеннями аргументу, щоб отримати відповідні значення функції. Наприклад, $y = \sin x^2; y = 2x^3; y = e^x; y = \ln(x+5)$. Область визначення функції - це множина значень аргументу, при яких всі дії, зазначені у формулі, здійсненні. Наприклад, функція $y = \sqrt{1-x^2}$ визначена тільки на сегменті $[-1,1]$.

2.1.2 Поняття границі в точці та на нескінченності

Символічно границю записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називається границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх x, що задовольняють умові $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0$.

Границя функції на нескінченності. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ значень аргументу відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ значень функції збігається до числа A. Це записують так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty (x \to -\infty)$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$, елементи x_n якої додатні (від'ємні), відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ значень функції збігається до числа A. Це записують так: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\right)$

2.1.3 Однобічні границі

Число A називається **границею функції** $f(x)$ **у точці** x_0 **справа**, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для всіх x, які задовольняють умові $x_0<x<x_0+\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число A називається **границею функції** $f(x)$ **у точці** x_0 **зліва**, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для всіх x, які задовольняють умові $x_0-\delta<x<x_0$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Однобічні границі записують так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ та $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A\right)$.

Теорема. Функція $f(x)$ має в точці x_0 границю тоді й тільки тоді, коли в цій точці існує як права, так і ліва границя та ці границі рівні між собою. Тоді границя функції дорівнює однобічним границям.

2.1.4 Визначні границі

Перша визначна границя. Покажемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Розглянемо у колі радіуса r гострий кут BOC, хорду AC і дотичну до кола в точці C (рис. 2.1). Для площ трикутників AOC, BOC та колового сектора AOC виконуються нерівності $S_{\Delta AOC}<S_{\text{сект.AOC}}<S_{\Delta BOC}$. Отже, $\frac{1}{2}r^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}r^2\cdot x<\frac{1}{2}r^2\cdot tgx$. Звідси $\sin x<x<tgx$. Розділивши цю нерівність на $\sin x\neq 0$, оскільки $0<x<\frac{\pi}{2}$, одержимо $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$. Звідси $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$. Помноживши всі частини на (–1) та додавши 1, матимемо

$0 < 1 - \dfrac{sin\,x}{x} < 1 - cos\,x$. Оскільки

$1 - cos\,x = 2\,sin^2\dfrac{x}{2} < 2 \cdot \left(\dfrac{x^2}{4}\right) = \dfrac{x^2}{2}$, то

$0 < 1 - \dfrac{sin\,x}{x} < \dfrac{1}{2}x^2$. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Нерівність $0 < 1 - \dfrac{sin\,x}{x} < \varepsilon$ або $\left|1 - \dfrac{sin\,x}{x}\right| < \varepsilon$ виконується при $\dfrac{1}{2}x^2 < \varepsilon$,

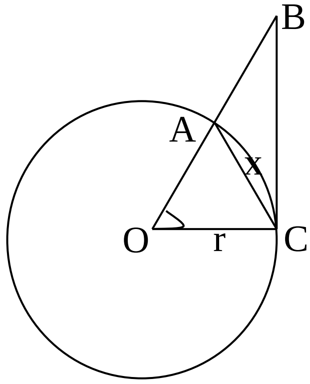


Рис. 2.1

тобто $0 < x < \sqrt{2\varepsilon}$. Таким чином, для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $0 < x < \delta$, виконується нерівність $\left|1 - \dfrac{sin\,x}{x}\right| < \varepsilon$. Це означає, що 1 є правою границею функції $\dfrac{sin\,x}{x}$, тобто $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Оскільки функція $\dfrac{sin\,x}{x}$ парна, то і $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Друга визначна границя. Це границя , яка має вигляд:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ або } \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e.$$

Доведемо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Нехай $x > 1$. Нехай $[x] = n$. Тоді $x = n + \alpha$, де $n \in N$, $0 \le \alpha < 1$. Оскільки $n \le x < n + 1$, то $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{n}$. Отже,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (2.3)$$

Якщо $x \to \infty$, то і $n \to \infty$. При цьому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = \text{e},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

Враховуючи (2.3), маємо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$ Хай $x<-1$ і $x=-y$. Тоді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1=\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot1=e.$$

Враховуючи обидва випадки, одержуємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$.

2.1.5 Арифметичні теореми про границі функції

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ має границю в точці x_0, то ця границя єдина.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають у точці x_0 границі, то функції $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq0$) у точці x_0 також мають границі, причому:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)/\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\Big/\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Теорема 3. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, визначені в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, мають у точці x_0 границі, й такі, що в околі точки x_0 $f(x)\leq\varphi(x)$. Тоді $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

Теорема 4 . Нехай функції $f(x),\varphi(x),g(x)$ визначені в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, функції $f(x),g(x)$ мають у точці x_0 границю, рівну A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$. Нехай, крім того, виконується нерівність $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$. Тоді функція $\varphi(x)$ у точці x_0 має границю, рівну A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

2.1.6 Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Їхні властивості

Нескінченно малі функції. Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою в точці $x=x_0$ (або при $x\to x_0$), якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Аналогічно означаються нескінченно малі функції при $x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty, x\to+x_0, x\to-x_0$.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою в точці** x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$ виконується для всіх x, які задовольняють умові $|x-x_0|<\delta,\ x\ne x_0$

Теорема . Число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\alpha(x)$– нескінченно мала функція від x_0.
Нескінченно малі функції мають такі властивості: 1) алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих у точці x_0 функцій є нескінченно малою в точці x_0 функцією; 2) добуток скінченного числа нескінченно малих у точці x_0 функцій, а також добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою в точці x_0 функцією.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\ne0$, де C - const, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку в околі точки x_0.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\ne C$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються непорівнянними в околі точки x_0.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими в околі точки x_0. У цьому випадку пишуть $\alpha(x)\approx\beta(x)$.

Теорема. Якщо $\alpha(x) \approx \alpha_1(x)$ та $\beta(x) \approx \beta_1(x)$ при $x \to x_0$ й існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причому $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Нескінченно великі функції. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою в точці x_0, якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)| > A$. Записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Якщо при $x_n \to x_0$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty\right)$,то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right)$.

Аналогічно означенням границі на нескінченності та скінченних односторонніх границь визначаються нескінченні границі. При цьому використовуються відповідні позначення, наприклад:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty .$$

Теорема. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці x_0 функція, причому в околі точки x_0 $\alpha(x) \neq 0$**,** то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ у точці x_0 − нескінченно велика. І навпаки, якщо функція $f(x)$ − нескінченно велика в точці x_0, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ у точці x_0 − нескінченно мала.

2.2 Неперервність функції

2.2.1 Неперервність функції в точці та на відрізку

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, або якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 справа (зліва), якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)\right)$.

Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо вона неперервна в цій точці як справа, так і зліва. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу (a,b), то говорять, що вона неперервна на інтервалі (a,b). Якщо при цьому в точці a функція неперервна справа, а в точці b неперервна зліва, то кажуть, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$

Теорема. Якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то функції $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x_0)\neq 0)$ у точці x_0 також неперервні.

2.2.2 Класифікація точок розриву функції

Точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$, якщо функція $f(x)$ у точці x_0 не є неперервною. Точки розриву класифікують так:

Розриви першого роду. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну ліву й скінченну праву границю і вони рівні, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, але відмінні від $f(x_0)$ або значення $f(x_0)$ не існує, то точка x_0 називається точкою усувного розриву функції $f(x)$. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну границю справа і скінченну границю зліва й $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$ зі скінченним скачком.

Розриви другого роду. Точка x_0 називається точкою розриву другого роду функції $f(x)$, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь.

Кусково-неперервні функції. Функція $f(x)$ називається кусково-неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках $[a,b]$, за винятком, можливо, скінченного числа точок, у яких має розрив 1-го роду і, крім того, має односторонні границі в точках a та b.

РОЗДІЛ 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Похідна та диференціал функції

3.1.1 Поняття та зміст похідної

Нехай в деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$. Оберемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо x_0 приросту Δx такого, що $x + \Delta x \in X$. Зазначимо, що Δx може бути як додатним, так і від'ємним. При цьому функція отримає приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Нехай в точці x_0 існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. **Похідною функції** $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Похідну функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначають так: $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$. Отже, за означенням:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Механічний зміст похідної випливає із задачі про миттєву швидкість, а саме: похідна від пройденого шляху $s(t)$ по часу t дорівнює миттєвій швидкості $v(t)$ в момент часу t, тобто $v(t) = s'(t)$.

Геометричний зміст похідної розкривається у задачі про дотичну: похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з координатами x_0, $y_0 = f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається диференційованою в точці x_0, якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{3.2}$$

де A - деяке число, не залежне від Δx, а $\alpha(\Delta x)$ - нескінчено мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Теорема. Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційована в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінчену похідну.

Теорема . Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ в кожній точці деякого проміжку має скінчену похідну, то на цьому проміжку вона неперервна.

Зауваження. Неперервність функції в даній точці не є достатньою умовою її диференційованості. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але в цій точці вона не диференційована.

3.1.2 Похідні елементарних функцій та правила диференціювання функцій

Похідна сталої функції. Похідна функції $y = C$, де $C - const$ при $x \in X$ виражається формулою $y' = 0$.

Таблиця 3.1 - **Похідні основних елементарних функцій**

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$tg\, x$	$1/\cos^2 x$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$	$ctg\, x$	$-1/\sin^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$1/x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$arctg\, x$	$1/1+x^2$
e^x	e^x	$arcctg\, x$	$-1/1+x^2$

Далі розглянемо **правила диференціювання функцій**. Нехай функції $U = U(x)$, $V = V(x)$ та $W = W(x)$ визначені і такі, що є диференційованими на деякому загальному інтервалі.

Похідна суми. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій, що диференціюються, дорівнює такій же алгебраїчної сумі похідних цих функцій, тобто: $(U+V-W)' = U'+V'-W'$.

Похідна добутку. Похідна добутку двох функцій, що диференціюються, дорівнює добутку похідної першого співмножника на другий співмножник плюс добуток першого співмножника на похідну другого, тобто

$$(U\cdot V)' = U'\cdot V + U\cdot V'.$$

Наслідок. Постійник множник можно виносити за знак похідної, тобто

$$(C\cdot U)' = C\cdot (U)'.$$

Похідна частки. Якщо чисельник і знаменник дробу – функції, що диференціюються, і знаменник не обертається на нуль, то похідна дробу дорівнює також дробу, чисельник якого є різниця добутків знаменника дробу на похідну чисельника і чисельника дробу на похідну знаменника, а знаменник є квадратом колишнього знаменника. Тобто

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - U\cdot V'}{V^2}.$$

3.1.3 Похідна оберненої та складної функції

Теорема. Нехай функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x_0)\neq 0$. Тоді обернена до неї функція $x=\varphi(y)$ у точці $y_0=f(x_0)$ має похідну і

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Розглянемо деяку складну функцію $y=f[\varphi(x)]$. Якщо у ланцюзі функціональних залежностей $y=f(U)$ і $U=\varphi(x)$ аргумент x є останнім, то ми будемо називати його незалежною змінною. Будемо припускати, що функція $y=f(U)$ визначена і диференційована в інтервалі *(A, B),* функція $U=\varphi(x)$ визначена і диференційована в інтервалі *(a, b)*. Тоді функція $y=f[\varphi(x)]$ свідомо буде визначена і безперервна в інтервалі *(a, b)*.

Теорема. Якщо $y=f(U)$ і $U=\varphi(x)$ - диференційовані функції, тоді похідна складної функції $y=f[\varphi(x)]$ існує і дорівнює похідній даної функції y по проміжному аргументу U, помноженій на похідну самого проміжного аргументу U по незалежній змінній *x*, тобто $y_x' = y_U' \cdot U_x'$.

3.1.4 Диференціал функції, його геометричний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, доданок $A\Delta x$ є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від Δx. **Диференціалом функції** $y = f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від Δx. Диференціал функції позначається так: $d\,y = A\Delta x$.

Враховуючи, що $A = f'(x_0)$, маємо $d\,y = f'(x_0)\Delta x$. **Диференціалом незалежної змінної** x називається її приріст: $d\,x = \Delta x$. Отже, $dy = f'(x_0) \cdot dx$. Із останньої формули випливає, що похідну $f'(x_0)$ можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \qquad (3.3)$$

Диференціал функції має **геометричний зміст**. Нехай точка M (рис. 3.1) на графіку функції $y = f(x)$ має координати (x_0, y_0), де $y_0 = f(x_0)$.Пряма MP- дотична до графіка функції в точці M. Тоді приріст Δy в точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу, дорівнює довжині відрізка NQ. Оскільки $tg\alpha = \frac{PQ}{MQ}$ і $f'(x_0) = tg\alpha$, то, враховуючи, що $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, маємо: диференціал dy функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0, тобто дорівнює величині відрізка

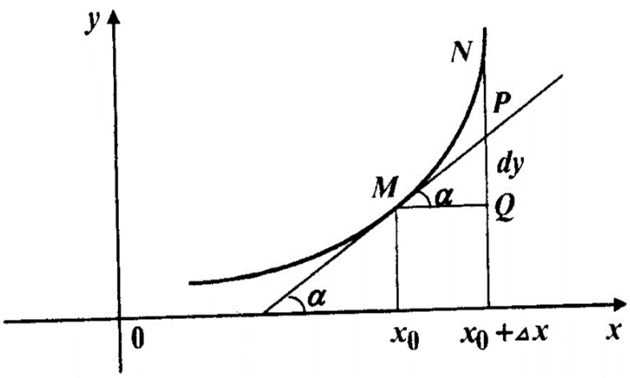


Рис.3.1– Геометричний зміст диференціала

PQ. Оскільки диференціал dy функції $y=f(x)$ є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності , тобто $dy=\Delta y$. Якщо функції $u=u(x), v=v(x)$ диференційовані, то мають місце наступні формули:

$$d(Cu)=C\cdot du \text{ , де } C\text{- const;} \quad d(u\pm v)=du\pm dv;$$
$$d(u\cdot v)=u\,dv+vdu; \qquad d(u/v)=(udv-vdu)/v^2 .$$

Нехай тепер маємо складну функцію $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, де $f(u),\varphi(x)$ диференційовані функції в точках x_0 і $u_0=\varphi(x_0)$. Тоді $dy=\left(f\left(\varphi(x_0)\right)\right)_x' dx$. Так як $\left(f\left(\varphi(x_0)\right)\right)_x' = f_u'(u_0)\cdot u_x'$, то $dy=f_u'(u_0)\cdot u_x' dx$.

Оскільки $u_x' dx=du$, то маємо $dy=f_u'(u_0)\cdot du$. Таким чином, якщо функція складна, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають інваріантністю форми диференціалу.

3.1.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідна $f'(x)$ функції $y=f(x)$ сама є деякою функцією аргументу x. Отже, можна ставити питання про існування похідної від функції $f'(x)$. Цю похідну називають похідною другого порядку, або другою похідною. Її позначають y'' або $f''(x)$. Отже, $y''=(y')'$. Похідна першого порядку від похідної другого порядку називається третьою похідною, або похідною третього порядку і т. д. Якщо визначена похідна $(n-1)$- го порядку функції $y=f(x)$, то похідною n- го порядку називається перша похідна похідної $(n-1)$-го порядку, тобто $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$. Похідні, починаючи з похідної другого порядку, називаються *похідними вищих порядків*.

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована в кожній точці x деякого проміжку X. Її диференціал першого порядку $dy=f'(x)dx$ є функцією двох змінних: аргументу x і диференціала dx. Нехай $f'(x)$ також диференційована в кожній точці x деякого проміжку X. Будемо розглядати у виразі $dy=f'(x)dx$ диференціал dx як постійний множник. Тоді

$$d(dy)=d\left(f'(x)dx\right)=\left(f'(x)dx\right)' dx=f''(x)dxdx=f''(x)(dx)^2 .$$

Диференціал $d(dy)$ називається диференціалом другого порядку і позначається d^2y. Отже, $d^2y = f''(x)(dx)^2$. Диференціал $d\left(d^{n-1}y\right)$ від диференціала $d^{n-1}y$, взятий при постійному dx називається диференціалом n-го порядку функції $y = f(x)$ і позначається $d^n y$.

Можна встановити, що $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

3.2. Застосування диференціального числення

3.2.1 Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і в деякій точці $x_0 \in (a,b)$ набуває найбільшого або найменшого значення. Тоді, якщо існує похідна $f'(x_0)$, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

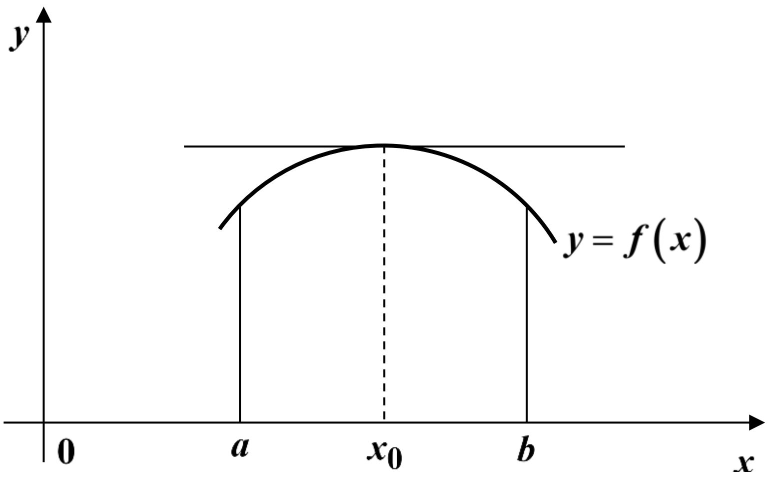


Рис. 3.2 – Дотична в точці x_0

Те, що похідна дорівнює нулю в точці x_0, означає, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсциссою x_0 паралельна осі Ox (рис. 3.2).

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і вона:

1) неперервна в кожній точці відрізка $[a,b]$; диференційована на інтервалі (a,b); 3)на кінцях відрізка $[a,b]$ приймає рівні значення $f(a) = f(b)$, то існує точка $C \in (a,b)$ така, що $f'(C) = 0$. З теореми Ролля випливає, що для функції $f(x)$ неперервної на відрізку $[a,b]$, диференційованої на інтервалі (a,b)

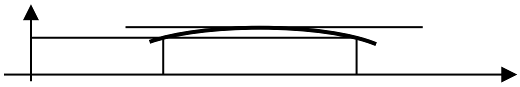


Рис. 3.3

і такої, що $f(a)=f(b)$, існує точка $C\in(a,b)$ така, що дотична до графіка функції $y=f(x)$ у точці $(C,f(C))$ паралельна осі Ox (рис. 3.3).

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і

1) неперервна в кожній точці відрізка $[a,b]$,

2) диференційована на інтервалі (a,b), то існує точка $C\in(a,b)$ така, що $f'(C)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то із останньої формули одержуємо

$f(b)-f(a)=f'(C)\cdot(b-a) \quad a<c<b$.

Ця формула називається формулою скінчених приростів або формулою Лагранжа.

Наслідок з теореми Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, має похідну $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$, то на відрізку $[a,b]$ $f(x)$ стала.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a,b]$,

2) диференційовані на інтервалі (a,b), і $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$,

то існує точка $C\in(a,b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(C)}{g'(C)}.$$

Остання формула називається формулою Коші або узагальненою формулою скінчених приростів.

Зауваження. У формулі Коші $g(b)-g(a)\neq 0$ тому, що за умови $g(b)=g(a)$, згідно з теоремою Ролля існувала б точка $C\in(a,b)$ така, що $g'(C)=0$, що суперечить умові $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

3.2.2 Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя

Теорема 1 (правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $(a,b]$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Нехай, крім того, в проміжку $(a,b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$, то існує й границя $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$, причому $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$.

Теорема 2 (правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $(a,b]$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ і в проміжку $(a,b]$ існують скінчені похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$, то існує й границя $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x)$, причому $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x)$.

Правило Лопіталя дає можливість розкривати невизначеності типу $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$.

Його можна застосовувати при розкритті невизначеностей вигляду $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$, перетворивши їх перед тим у $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$.

3.2.3 Інтервали монотонності та екстремуми функції

Функція $f(x)$ називається **зростаючою (спадаючою)** на деякому інтервалі (a,b), якщо для будь-яких точок x_1 та x_2 з цього інтервалу з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема . Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b) і $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ на (a,b), то функція $f(x)$ зростає (спадає).

Точка x_0 називається **точкою локального максимуму (мінімуму)** функції $f(x)$, якщо існує δ- окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $f(x_0) > f(x)$ $\left(f(x_0) < f(x)\right)$ для будь-якої відмінної від x_0 точки $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. При цьому саме значення $f(x_0)$ називається локальним максимумом (мінімумом) функції $f(x)$. Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються точками екстремуму або екстремальними точками функції $f(x)$.

Необхідна умова існування екстремуму функції. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ диференційована, то $f'(x_0) = 0$.

Зазначимо, що коли функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$, то або $f'(x_0) > 0$, тобто функція зростає, або $f'(x_0) < 0$ і функція спадає. Звідси випливає, що функція $f(x)$ може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна $f'(x)$ рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю, називаються стаціонарними. Стаціонарні точки й точки, в яких функція $f(x)$ визначена, але її похідна $f'(x)$ не існує називаються критичними**.**

Достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема. Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, $f(x)$ неперервна в точці x_0 і має похідну $f'(x)$ в усіх точках околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ за виключенням, можливо самої точки x_0. Тоді

1) якщо $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

2) якщо $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

3) якщо $f'(x)$ в околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ має один і той же знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Теорема . Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна другого порядку $f''(x) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$, а якщо $f''(x) < 0$, то – максимуму.

3.2.4 Опуклість та угнутість кривої. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і в кожній точці цього інтервалу має скінчену похідну. Тоді в кожній точці $M(x, f(x))$ графіка цієї функції можна провести дотичну, не паралельну осі Oy. Крива, яка є графіком цієї функції, називається гладкою.

Якщо графік функції $y = f(x)$ розміщений не нижче будь-якої дотичної на інтервалі (a,b), то він називається **угнутим на цьому інтервалі** (рис. 3.4).

Якщо графік функції $y=f(x)$, розміщений не вище будь-якої дотичної на інтервалі (a,b), то він називається **опуклим на цьому інтервалі** (рис. 3.5). Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ називається **точкою перегину** гладкої кривої $y=f(x)$, якщо існує δ-окіл точки x_0 такий, що в інтервалах $(x_0-\delta, x_0)$ і $(x_0, x_0+\delta)$ крива $y=f(x)$ має опуклість різних напрямків.

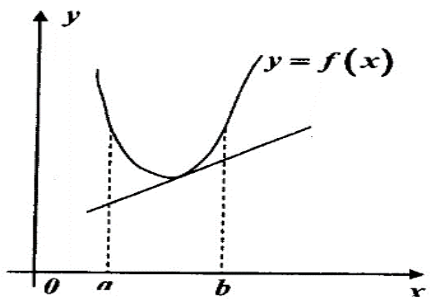


Рис. - 3.4

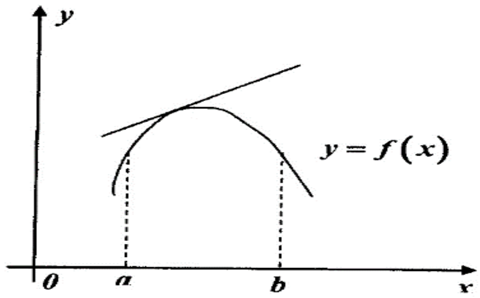


Рис. - 3.5

Необхідна умова існування точки перегину графіка функції $y=f(x)$.

Якщо на інтервалі (a,b) $f''(x)\neq 0$, то графік функції $y=f(x)$ точок перегину на цьому інтервалі не має. Таким чином, точка $M_0(x_0, f(x_0))$, де $x_0\in(a,b)$ може бути точкою перегину графіка функції $y=f(x)$ лише в тому випадку, коли $f''(x_0)=0$.

Достатня умова існування точки перегину графіка функції $y=f(x)$.

Нехай точка $M_0(x_0, f(x_0))$ така, що $f''(x_0)=0$ й існує таке δ, що в інтервалах $(x_0-\delta, x_0)$ і $(x_0, x_0+\delta)$ друга похідна $f''(x)$ має різні знаки. Тоді точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину. Дійсно, за вказаних умов у інтервалах $(x_0-\delta, x_0)$ і $(x_0, x_0+\delta)$ крива $y=f(x)$ має опуклість різних напрямків. Отже, точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину цієї кривої.

3.2.5 Асимптоти графіка функції

Пряма L називається **асимптотою кривої** $y = f(x)$, якщо відстань від точки M кривої до прямої L при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля. Із наведеного означення випливає, що асимптоти можуть існувати лише у тих кривих, які мають як завгодно віддалені точки, тобто у "нескінчених" кривих. Надалі розрізнятимемо похилі і вертикальні асимптоти. До похилих належать також і горизонтальні асимптоти.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ визначена на нескінченості і існують границі $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - k\cdot x) = b$, то пряма $y = k\cdot x + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

Аналогічно, якщо існують границі $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - k\cdot x) = b$,

то пряма $y = k\cdot x + b$ є **похилою асимптотою кривої** $y = f(x)$ при $x \to -\infty$.

Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = b$, то пряма $y = b$ є **горизонтальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Те ж при $x \to -\infty$.

Зауваження. Якщо границі $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ або $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - k\cdot x)$ не існують, графік функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ асимптот не має. Аналогічно у випадку $x \to -\infty$. З означення асимптоти кривої $y = f(x)$ випливає, що пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою**, якщо принаймні одна з границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

4.1 Частинні похідні

4.1.1 Означення частинних похідних

Нехай у деякій області простору задано функцію n незалежних змінних: $U=f(x_1, x_2,..., x_n)$. Візьмемо довільну точку в області визначення функції багатьох змінних $P(x_1, x_2,..., x_n)$. Зафіксуємо x_i і надамо аргументу x_i довільного приросту Δx_i, залишаючи значення інших $(n-1)$ змінних сталими. Дістанемо нову точку P_1 $(x_1, x_2,..., x_i+\Delta x_i,..., x_n)$. Приріст Δx_i спричинить відповідний приріст функції, який називається частинним:

$$\Delta U_i = \Delta_{x_i} U = f(x_1,...,x_i + \Delta x_i,...x_n) - f(x_1,...,x_i,...x_n)$$

Поділимо частинний приріст ΔU_i на приріст Δx_i. Відношення $\frac{\Delta U_i}{\Delta x_i}$ виражає середню швидкість зміни функції $U=f(x_1, x_2, ...,x_n)$ за змінною x_i на ділянці від точки $P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ до точки $P_1 (x_1, x_2, ..., x_i+\Delta x_i, ..., x_n)$. Перейдемо до границі у відношенні $\frac{\Delta U_i}{\Delta x_i}$, спрямовуючи Δx_i до 0.

Частинною похідною першого порядку по x_i в точці $P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ називається границя відношення частинного приросту функції Δu_i до приросту аргументу Δx_i при $\Delta x_i \to 0$, якщо ця границя існує і скінченна. Записують це так:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta U_i}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1,...,x_i + \Delta x_i,...x_n) - f(x_1,...,x_i,...x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Для частинних похідних прийняте позначення:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}, U'_{x_i}, \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}, f'_{x_i}(x_1,...,x_n), \frac{\partial f(P)}{\partial x_i}.$$

Частинна похідна $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ характеризує швидкість зміни функції $U=f(x_1, x_2, ...,x_n)$ в точці $P(x_1, x_2, ...,x_n)$ в напрямі осі Ox_i. Для функції *n* змінних за цим принципом можна побудувати *n* частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2},..., \frac{\partial U}{\partial x_i},..., \frac{\partial U}{\partial x_n}.$$

Для функції двох змінних $z=f(x, y)$ можна побудувати дві частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.$$

4.1.2 Обчислення частинних похідних функції $U=f(x_1, x_2,..., x_n)$

Оскільки частинна похідна від функції $U=f(x_1, x_2,..., x_n)$ є, за означенням, похідною за однією змінною при сталих значеннях інших змінних, то правила відшукання звичайних похідних цілком переносяться на частинні похідні. Щоб знайти $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, треба у думці зафіксувати всі інші

n-1 змінні і диференціювати функцію $U=f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{(i-1)0}, x_i, x_{(i+1)0}, \ldots, x_{n0})$ за x_i як функцію однієї змінної x_i .

Наприклад: функція $u=5xy$ має дві незалежні змінні. Запишемо дві частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x,)y - 5xy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5y\Delta x}{\Delta x} = 5y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5x(y+\Delta y) - 5xy}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{5x\Delta y}{\Delta y} = 5x$$

4.2 Частинні похідні вищих порядків. Теорема Шварца.

Частинні похідні вищих порядків знаходять аналогічно звичайним похідним вищих порядків. Припустимо, що функція $U = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ має усі перші частинні похідні за своїми змінними. При цьому результатом диференціювання є функції

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n); i = 1, n \tag{4.1}$$

Нехай функції $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ мають, у свою чергу, перші частинні похідні за тими самими змінними, тобто

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \psi_{ik}(x_1, x_2, ..., x_n); (i, k = 1, 2, ...n)$$

Використовуючи формулу (4.1), дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i} = \psi_{ik}(X). \tag{4.2}$$

Частинні похідні $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}$ називаються 2-*ми частинними похідними*, або частинними похідними другого порядку**.** Для других частинних похідних від функції $U = f(X)$ прийнято також ще й такі позначення:

$$U''_{x_i x_k}; U''_{x_k x_i}; f''_{x_i x_k}; f''_{x_k x_i}$$

Похідні $U''_{x_i x_k}$, i, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq k$ називаються *мішаними*, їх дістають диференціюванням функції $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, спочатку по x_k, а потім по x_i. Функція $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ може мати n^2 похідних другого порядку. Так, функція $U = f(x, y, z)$ має дев'ять других похідних. Якщо функції (4.2) мають похідні, то дістанемо похідні третього порядку

$$\frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}\right) = \frac{\partial^3 U}{\partial x_\mu \partial x_k \partial x_i} = U'''_{x_\mu x_k x_i}$$

При цьому мішаними будуть всі похідні, для яких μ, k, i не рівні між собою одночасно. Так, для функції трьох змінних можна дістати 27 похідних третього порядку, серед яких мішаними будуть, наприклад,

$$U'''_{xyy}; U'''_{yzz}; U'''_{xyz}; U'''_{zxz}$$

Виявляється, що за певних умов, які накладаються на функцію $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, мішані одного порядку рівні між собою.

Теорема Шварца. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, k = 1, 2, \ldots, n$

в околі точки $P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, причому $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}; i, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq k$

неперервні в точці P_0, то значення мішаних похідних другого порядку за різними змінними не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}; i, k = 1, 2, \ldots, n, i \neq k$$

Теорема справджується і для мішаних похідних більш високого порядку.

4.3 Частинний і повний диференціали функції багатьох змінних. Диференційовані функції.

Розглянемо функцію $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначену в деякій області. Нехай вона має частинні похідні за всіма змінними в кожній точці області D, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{x_i} U}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.3)$$

Використовуючи теорему про залежність між функцією, яка має границю, її границею і нескінченно малою функцією, дістаємо

$$\frac{\Delta_{x_i} U}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \alpha_i, \lim_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0; i = 1, 2, ..., n \quad , \tag{4.4}$$

де α_i є нескінченно малими функціями. З рівностей (4.3) , (4.4) знаходимо частинні прирости

$$\Delta_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i; i = 1, 2, ..., n \tag{4.5}$$

Якщо порівняти вираз (4.5) з означенням диференційованої функції однієї змінної $U = f(t)$, для якої

$$\Delta U = \frac{dU}{dt} \Delta t + \alpha \Delta t \tag{4.6}$$

де α- нескінченно мала функція, то рівність (4.5) можна прийняти за означення диференційованості функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за кожною із змінних. $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *диференційованою* в точці *P(x₁, x₂, ...,xₙ)* за змінною x_i , якщо її частинний приріст $\Delta_{x_i} U$ має вигляд:

$$\Delta_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i; \lim_{\Delta x_i \to 0} \alpha_i = 0; i = 1, 2, ..., n \tag{4.7}$$

Аналізуючи рівність (4.5) і порівнюючи її з (4.6), бачимо, що частинний приріст $\Delta_{x_i} U$ складається з двох частин. Перша частина, яка дорівнює $\frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i$, є лінійною відносно приросту незалежної змінної Δx_i , вона є нескінченно мала того самого порядку, що і Δx_i . Оскільки $\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\alpha_i \Delta x_i}{\Delta x_i} = 0$,то друга частина $\alpha_i \Delta x_i$ є нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δx_i . Тому лінійна відносно Δx_i частина приросту $\Delta_{x_i} U$ дістала назву головної.

Головна (лінійна відносно Δx_i) частина $\frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i$ приросту $\Delta_{x_i} U$ функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при фіксованих $x_1, x_2, ..., x_n$ називається *частинним диференціалом* функції і позначається

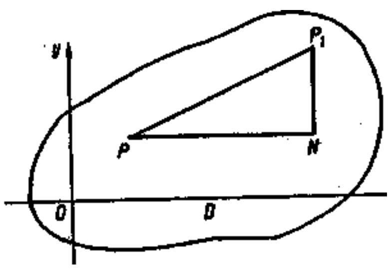
$$d_{x_i} U = \frac{\partial U}{\partial x_i} \Delta x_i, i = 1, 2, ..., n \tag{4.8}$$

Оскільки $\Delta x_i = dx_i$, знаходимо $d_{x_i}U = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}dx_i, i = 1, 2, ..., n$, тобто частинний диференціал функції n змінних дорівнює частинній похідній функції, помноженій на диференціал відповідної незалежної змінної. Поставимо задачу зображення повного приросту ΔU функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ у формі (4.6).

Нагадаємо, що для зображення приросту функції однієї змінної у формі (4.6) має виконуватись одна умова – існування похідної в точці x. Щоб зобразити повний приріст функції n змінних у формі, аналогічній (4.6) , недостатньо існування частинних похідних за всіма змінними в точці $P(x_1, x_2, ...,x_n)$, потрібно, щоб вони були також неперервні в точці. Для спрощення викладок розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в точці $P(x, y)$ Тоді ці частинні похідні існують в ε-околі точки $P(x, y)$ Розглянемо повний приріст Δz функції $z = f(x, y)$ при переході від точки $P(x, y)$ до точки $P_1 (x+\Delta x, y+\Delta y)$, де Δx, Δy - довільні з області визначення функції $z = f(x, y)$, які не виводять точку P_1 з ε-околу точки P Маємо

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{4.9}$$

Тобто повний приріст функції на ділянці PP_1 (рис. 4.4) зображується у вигляді суми двох частинних приростів: 1) приросту на ділянці PN при сталому y; 2) приросту на ділянці NP_1 при сталому x . Можна довести, що



$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \tag{4.10}$$

Перша сума є лінійною відносно приросту Δx_i , а друга – нелінійною.

Рис. 4.4

Теорема. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має неперервні частинні похідні в деякій точці $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, то її повний приріст зображується у вигляді (4.10), причому $\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ не залежить від Δx_i .

Позначивши $\frac{\partial U}{\partial x_i} = A_i$, повний приріст функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити у вигляді

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i \tag{4.11}$$

Якщо приріст функції U в точці $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити у вигляді (4.11), де A_i не залежить від Δx_i, то функція U називається *диференційованою в точці*. Якщо $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ диференційована в кожній точці області свого визначення, то вона називається *диференційованою в області.*

Теорема. Для того щоб функція $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, була диференційованою в точці, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, і достатньо, щоб ці частинні похідні були неперервні в точці.

Введемо поняття повного диференціала функції багатьох змінних. Сума частинних диференціалів функції багатьох змінних називається *повним диференціалом*. Для функції $z = f(x, y)$ маємо

$$dz = d_x z + d_y z, \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Оскільки x і y - незалежні змінні, а для них $\Delta x = \partial x, \Delta y = \partial y$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y \cdot$$

Тоді повний диференціал функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ запишемо у вигляді

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i \cdot$$

Тоді формула (4.11) набирає вигляду

$$\Delta U = dU + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$$

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. Якщо функція багатьох змінних диференційована в деякій точці, то її повний приріст дорівнює сумі повного диференціала і нескінченно малих більш високого порядку .

4.4 Диференціювання складної функції багатьох змінних.

Розглянемо функцію $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, задану в деякій області. Часто трапляється, що змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ є ,в свою чергу, функціями від змінної *t*: $x_i = \varphi_i(t), i = 1, 2, ..., n$. Тоді ставиться задача: за яких умов складну функцію *n* змінних можна диференціювати по незалежній змінній *t*. Похідна функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по *t* називається *повною похідною*.

Теорема. Якщо функція $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має неперервні частинні похідні по $x_1, x_2, ..., x_n$ у фіксованій точці $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, а функції $x_i = \varphi_i(t), i = 1, 2, ..., n$ мають похідні $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ в точці *t*, то функція $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має повну похідну

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \qquad (4.12)$$

Нехай $U=f(x,y)$, а $y= \varphi(x)$, тоді $U=f(x, \varphi(x))$. Використовуючи формулу (4.12), знаходимо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \qquad (4.13)$$

Формула (4.13) виконується і для того випадку, коли внутрішня функція є функція кількох змінних, тобто

$$U = f\left[\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\right], \quad U = f(y), y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n).$$

При цьому замість y'_x будуть $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i=1,2,....n$; замість U'_x будуть $\frac{\partial U}{\partial x_i}$.

Формула (4.13) набуде вигляду

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n.$$

Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли у функції $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ кожна із змінних залежить від двох інших змінних:

$$x_i = \varphi_i(\omega, \eta)$$

Використовуючи формулу (4.12) і вважаючи функції U і x_i диференційованими, запишемо

$$\frac{\partial U}{\partial \omega}=\frac{\partial f}{dx_1}\frac{\partial x_1}{\partial \omega}+\frac{\partial f}{dx_2}\frac{\partial x_2}{\partial \omega}+...+\frac{\partial f}{dx_n}\frac{\partial x_n}{\partial \omega}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{dx_i}\frac{\partial x_i}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{dx_1}\frac{\partial x_1}{\partial \eta}+\frac{\partial f}{dx_2}\frac{\partial x_2}{\partial \eta}+...+\frac{\partial f}{dx_n}\frac{\partial x_n}{\partial \eta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{dx_i}\frac{\partial x_i}{\partial \eta}.$$

4.5 Інваріантність форми першого диференціала функції багатьох змінних.

На прикладі функції двох змінних $u=f\ (x;\ y)$ покажемо, що вираз повного диференціала

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (4.14)$$

зберігає свою форму незалежно від того , є x та y незалежними змінними чи функціями від інших незалежних змінних. Ця властивість повного диференціала називається *інваріантністю***.** Нехай

$$x=\varphi_1(t_1,t_2); \quad y=\varphi_2(t_1,t_2); \qquad (4.15)$$

Тоді $U=\left[\varphi_1(t_1,t_2),\varphi_2(t_1,t_2)\right]$,

$$dU=\frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2 \qquad (4.16)$$

Покажемо, що вирази (4.14) і (4.16) збігаються. Дійсно,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}, \quad dx=\frac{\partial x}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x}{\partial t_2}dt_2. \qquad (4.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}, \quad dx=\frac{\partial y}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial y}{\partial t_2}dt_2$$

Тоді з формул(4.16) і (4.17) дістанемо

$$du=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1}\right)dt_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}\right)dt_2=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x}{\partial t_2}dt_2\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial y}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial y}{\partial t_2}dt_2\right)\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

4.6 Застосування повного диференціала функції багатьох змінних до обчислення значень функції та похибок

Нехай задано функцію $z=f(x,y)$, її значення в деякій точці $A(x_0,y_0)$ і прирости $\Delta x,\Delta y$. Потрібно обчислити $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$

Запишемо повний приріст функції

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+,\Delta y)-f(x_0,y_0) \tag{4.18}$$

звідси $f(x_0+\Delta x,y_0+,\Delta y)=f(x_0,y_0)+\Delta z.$ Замінимо Δz на dz:

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

При цьому припускаються похибки на нескінченно малі більш високого порядку мализни, ніж dz. Тоді

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y, \tag{4.19}$$

або символічно $z\approx z_0+dz$.

Нехай тепер задано функцію $u=f(x,y,...,t)$ від n змінних і величини $x,y,...,t$ *в*иміряні з точністю $\Delta x,\Delta y,...,\Delta t.$ Потрібно знайти похибку, з якою вимірюється u. За похибку зручно прийняти

$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y,...,t+\Delta t)-f(x,y,...,t)$.Для малих значень $\Delta x,\Delta y,...,\Delta t.$ буде

$$\Delta u\approx du=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+...+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t.$$

Оскільки похибки і похідні можуть бути і від'ємними числами, доцільно брати їх абсолютні значення:

$$|\Delta u|\le\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|+...+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t|.$$

Нехай похибка Δx вкладається в інтервал (-0,05;+0,05). Тоді найбільше значення $|\Delta x|=0{,}5$, яке позначається Δx і називається *максимальною абсолютною похибкою змінної x.* Те саме дістаємо для інших змінних. Тоді максимальне значення абсолютної похибки задовольняє умову

$$|\Delta u|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|+...+\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t|$$

4.7 Диференціали вищих порядків функції однієї та багатьох змінних

Нехай дано функцію однієї незалежної змінної $y=f(x)$. *Диференціалом другого порядку* або *другим диференціалом* функції $y=f(x)$ у деякій фіксованій точці називається диференціал першого диференціала в цій точці, який позначається

$$d^2y = d(dy),$$

Диференціалом третього порядку називається диференціал другого диференціала

$$d^3y = d(d^2y)$$

Взагалі *диференціалом n-го порядку* або *n-м диференціалом* функції $y = f(x)$ називається диференціал її $(n-1)$-го диференціала

$$d^ny = d(d^{n-1}y)$$

При обчисленні диференціалів вищих порядків треба брати до уваги, що dx є довільне незалежне від x число, яке при диференціюванні по x слід розглядати як сталий множник. Так,

$$d^2y=d(dy)=d(y''dx =(y''dx)dx,\ d^2y = y''dx^2\ d^3y\ d(y''dx^2) = y'''dx^3$$

Взагалі

$$d^ny = y^{(n)}dx^n$$

Розглянемо тепер диференціали вищих порядків функції багатьох змінних. Візьмемо функцію двох змінних

$$u=f(x,y) \tag{4. 20}$$

Тоді

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=\varphi(x,y) \tag{4. 21}$$

Подальші міркування справедливі лише для випадку, коли у формулах (4.20) і (4.21) змінні x і y є незалежними і відповідно dx і dy незалежні від x і y , тобто dx і dy розглядатимемо як сталі в тому розумінні, що

$$d(dx)=0, \quad d(dy)=0, \tag{4.22}$$

У зв'язку з цим диференціали dx і dy називаються незалежними диференціалами. Диференціал другого порядку визначимо як диференціал диференціала першого порядку:

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy\right)=d\varphi(x,y)$$

тоді

$$d\varphi(x,y)=\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy$$

але

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx;\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy \tag{4.23}$$

таким чином

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 \tag{4.24}$$

У рівностях (4.23) і (4.24) була використана умова (4.22). Припускаючи, що функція $u = f(x, y)$ задовольняє умови теореми Шварца, знаходимо

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2$$

Символічно це записується у вигляді

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2u$$

Можна показати, що й для диференціала n-го порядку справедлива формула

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u$$

Аналогічно будуються диференціали вищих порядків для функції більшого числа змінних. Запишемо, наприклад, d^2u для функції n незалежних змінних $u = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Маємо

$$d^2u=d(du)=d\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx_j$$

Остання рівність записана на тій підставі, що dx_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, є незалежний диференціал. Тоді

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\partial x_j\;;\quad d^2u=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\partial x_i\partial x_j \tag{4.25}$$

Якщо функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задовольняє умови теореми Шварца, то порядок підсумовування у (4.25) можна міняти місцями.

4.8 Векторне та скалярне поля

Задамо змінні точки *M* простору вектор-функцією $\vec{r} = \vec{r}(t)$ або $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Кожній точці *M* можна поставити у відповідність або скалярну , або векторну функцію від точки *M*, тобто $\varphi(M)$ і $\vec{a}\ (M)$, або $\varphi(\vec{r})$ і $\vec{a}(\vec{r})$. Частина простору, в якій встановлена відповідність між $\varphi(\vec{r})$ і $\vec{r}$, між $\vec{a}(\vec{r})$ і $\vec{r}$, називається скалярним (векторним) полем, а функції – скалярними (векторними). Прикладом скалярного поля може бути поле тисків повітря у просторі, а прикладом векторного поля – поле швидкостей частинок рідини. Щоб задати скалярне поле, слід задати одну функцію координат $\varphi(x, y, z) = u$, а векторне поле задається трьома функціями від координат: $a_x(x,y,z)$ $a_y(x,y,z)$ $a_z(x,y,z)$

4.9 Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай на відкритій множині Q тривимірного простору задано диференційовану функцію $u = f(x, y, z)$.Оберемо довільний одиничний вектор $\vec{e}(e_x, e_y, e_z)$ і скаляр $t \geq 0$. *Похідною за напрямком* $\vec{e}$ функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z) \in Q$ називається границя

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x+te_x;\ y+te_x;\ z+te_z) - f(x,y,z)}{t} \qquad (4.26)$$

Іншими словами, $\frac{\partial u}{\partial e}$ - це частинна похідна функції $f(x+te_x;\ \ y+te_x;\ \ z+te_z)$ по t. Приймемо за t відстань між двома будь-якими точками M і M_1 одиничного вектора $t = p$. Тоді

$$f(x+te_x;y+te_x;z+te_z) - f(x,y,z) = f(M_1) - f(M) = \Delta u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \lim_{p \to 0+0} \frac{\Delta u}{p}$$

Внаслідок диференційованості функції $u = f(x,y,z)$ її приріст

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + a\ ,$$

де $a = \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y + \varepsilon_z \Delta z$, при цьому $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{a}{p} = 0$

Поділимо Δu на величину p:

$$\frac{\Delta u}{p} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{p} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{p} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{p} + \frac{a}{p} \qquad (4.27)$$

Величини $\dfrac{\Delta x}{p} = \cos a$, $\dfrac{\Delta y}{p} = \cos\beta$, $\dfrac{\Delta z}{p} = \cos\gamma$ є напрямними косинусами одиничного вектора $\vec{e}$: $\vec{e} = \vec{i}\cos a + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$. Знайдемо границю відношення (4.27): $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{\Delta u}{p} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos a + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \dfrac{\partial u}{\partial \vec{e}}$. Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (4.28)$$

Розглянемо новий вектор

$$\vec{\Gamma}_u = grad\ \ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (4.29)$$

який називається *градієнтом* скалярної функції *u*. Використовуючи вектори Γ_u і $\vec{e}$, формулу похідної за напрямком можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \vec{\Gamma}_u \cdot \vec{e} = grad\ \ u \cdot \vec{e}$$

Оскільки $grad\ \ u \cdot \vec{e} = |gradu|\,|\vec{e}|\cos(\vec{\Gamma}_u, \vec{e})$, $|\vec{e}| = 1$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |grad\ \ u|\cos(\vec{\Gamma}_u, \vec{e})$$

Нехай $\cos(\vec{\Gamma}_u, \vec{e}) = 1$, тобто напрям градієнта збігається з напрямом $\vec{e}$. Тоді $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ має найбільше значення, яке дорівнює довжині вектора Γ_u, тобто

$$\max \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |grad \quad u| \tag{4.30}$$

З формули (4.30) випливає, що $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ є проекція градієнта на напрям $\vec{e}$.

Зазначимо також, що будь-яку частинну похідну функції багатьох змінних за деякою змінною можна розглядати як похідну за напрямком.

Приклад. Знайти *grad z* у точці *M* (1, 1), якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$

Розв'язання. Маємо:

$$grad \quad z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{zy}\vec{j}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1;1)} = \frac{2}{1^2+1^2} = 1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1;1)} = \frac{2}{1^2+1^2} = 1; \quad grad \quad z = \vec{i} + \vec{j}$$

РОЗДІЛ 5 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1 Невизначений інтеграл

5.1.1 Первісна функції та невизначений інтеграл, їхні властивості

Однією із основних задач диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Різноманітні питання математичного аналізу і його застосувань приводять до оберненої задачі: для даної функції $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої рівна $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Відтворення функції за відомою її похідною – одна із основних задач інтегрального числення.

Функція $F(x)$ називається **первісною для функції** $f(x)$, на деякому проміжку *X*, якщо для усіх значень $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то й функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною для функції $f(x)$, оскільки

$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$. Нехай первісною функції $f(x)$ на проміжку *X*, крім функції $F(x)$, є функція $\Phi(x)$, тобто $\Phi'(x)=f(x)$. Розглянемо різницю $\Phi(x)-F(x)$. Обчислимо похідну цієї різниці:

$$\left(\Phi(x)-F(x)\right)'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Отже, згідно з теоремою Лагранжа $\Phi(x)-F(x)=C$. Звідси маємо: $\Phi(x)=F(x)+C$. Таким чином, множина первісних функції $f(x)$ на проміжку *X*, вичерпується функціями виду $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна із первісних функції $f(x)$.

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку *X* називається **невизначеним інтегралом функції** $f(x)$ на цьому проміжку і позначається $\int f(x)dx$. Невизначений інтеграл інакше називають інтегралом Ньютона - Лейбниця. Якщо $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, то за означенням

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Знак $\int$ називається знаком невизначеного інтеграла, $f(x)$ – підінтегральною функцією, а $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції.

Розглянемо **основні властивості невизначеного інтеграла***:*

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу $d\left(\int f(x)dx\right)=d\left(F(x)+C\right)=dF(x)=f(x)d\,x.$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної постійної.

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто, якщо $k=const\neq 0,$ то $\int k\,f(x)dx=k\int f(x)dx$.

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі

(різниці) невизначених інтегралів від кожної функції, тобто

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\,.$$

Безпосередньо з означення визначеного інтеграла випливають наступні формули, які утворюють таблицю основних інтегралів

Таблиця 5.1- **Основні інтеграли**

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	x	$ctg\,x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
x^n	$x^{n+1}/n+1$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$
$1/x$	$\ln x$	$1/\sqrt{a^2-x^2}$	$\arcsin(x/a)$
a^x	$a^x/\ln a$	$1/1+x^2$	$arctg\,x$
e^x	e^x	$1/a^2+x^2$	$(1/a)arctg\,(x/a)$
$\sin x$	$-\cos x$	$1/\cos^2 x$	$tg\,x$
$\cos x$	$\sin x$	$1/\sin^2 x$	$-ctg\,x$
$tg\,x$	$-(\ln\lvert\cos x\rvert)$	$1/\sqrt{x^2\pm a^2}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert$

5.1.2. Основні методи інтегрування

Для обчислення інтегралу необхідно, якщо це можливо, користуючись тими або іншими методами, привести його до табличного інтегралу і таким чином знайти потрібний результат. Найбільш важливими методами інтегрування є: 1) метод розкладання; 2) метод підстановки і 3) метод інтегрування частинами.

1. **Метод розкладання**. Обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці основних інтегралів та властивості $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ називається методом розкладання.

Приклади.

1. $\int\left(3\sin x+5x^2-\frac{1}{x}+6\right)dx=-3\cos x+\frac{5x^3}{3}-\ln\lvert x\rvert+6x+C$.

2. $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} + C$.

3. $\int cos^2 \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1+cos\, x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1+cos\, x) \, dx = \frac{1}{2}(x + sin\, x) + C$.

2. **Метод підстановки.**

В основі методу підстановки (методу заміни змінної) лежить формула диференціювання складної функції. Якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$, то для довільної диференційованої на проміжку (α, β) функції $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t) \in (a, b)$, якщо $t \in (\alpha, \beta)$ маємо:

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Таким чином, $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C,$ тобто

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$$

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $\int sin^6 x \, cos\, x \, dx$.

Розв’язання. Покладемо $t = sin\, x$, $dt = cos\, x\, dx$. Тоді

$\int sin^6 x \, cos\, x \, dx = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{sin^7 x}{7} + C$.

2. Обчислити інтеграл $\int e^{x^2} x \, dx$.

Розв’язання. Покладемо $t = x^2$, $dt = 2x\, dx$, $x\, dx = \frac{1}{2} dt$.

Отже, $\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

3. **Метод інтегрування частинами.**

Нехай функції $U(x)$ і $V(x)$ визначені й диференційовані на деякому проміжку *X*. Тоді $d(UV) = UdV + VdU$. Звідси маємо $UdV = d(UV) - VdU$. Припустимо, що інтеграл $\int VdU$ існує. Тоді $\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$. Оскільки $\int d(UV) = UV + C$, то маємо:

$$\int UdV = UV - \int VdU. \qquad (5.1)$$

Довільну сталу *C* включає в себе інтеграл $\int VdU$. Формула (5.1) називається формулою інтегрування частинами. За цією формулою обчислюються , зокрема інтеграли виду:

1) $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx$,

де $P_n(x)$ – многочлен *n*-го степеня відносно *x*, $\alpha\neq 0$. Тут слід прийняти $u=P_n(x)$.

2) $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$, $\int P_n(x)\arccos x\,dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}x\,dx$,

$\int P_n(x)\mathrm{arcctg}x\,dx$, $\int P_n(x)\ln x\,dx$.

Тут також $P_n(x)$ – многочлен *n*-го степеня відносно *x*. У цих інтегралах $dv=P_n(x)dx$.

Приклади.

1) $\int x\sin x\,dx=\left|\dfrac{u=x,\quad dv=\sin x\,dx}{du=dx,\quad v=-\cos x}\right|=-x\cos x+\int\cos x\,dx=$

$=-x\cos x+\sin x+C$.

2) $\int \mathrm{arctg}x\,dx=\left|\begin{matrix}u=\mathrm{arctg}x, & dv=dx\\ du=dx/1+x^2, & v=x\end{matrix}\right|=x\cdot\mathrm{arctg}x-\int\dfrac{xdx}{1+x^2}=x\cdot\mathrm{arctg}x-$

$-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left|1+x^2\right|+C.$

5.2 Визначений інтеграл

5.2.1 Умови існування визначеного інтеграла

Нехай на відрізку [*a; b*], де $a\le b$, задано функцію $y=f(x)$. Розіб'ємо відрізок [*a; b*] на n довільних частин так, щоб:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n=b.$$

Сукупність точок x_0, x_1, ... , x_n називатимемо T – розбиттям відрізка [*a; b*] на частини. На кожному частинному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$, оберемо довільно по одній точці $c_k\in[x_k; x_{k+1}]$. Точки c_k називають проміжними. Нехай λ - найбільша довжина серед довжин частинних відрізків, тобто:

$$\lambda=\max_{0\le k\le n-1}\Delta x_k,\quad \Delta x_k=x_{k+1}-x_k,\quad k=0, 1, \ldots, n-1.$$

Зрозуміло, що для різних T – розбиттів відрізка [a; b] число λ, взагалі кажучи, буде різним. Отже, λ залежить від T: $\lambda=\lambda(T)$. Надалі розглядатимемо тільки такі розбиття, для яких $\lambda(T) \to 0$. Побудуємо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \cdot \Delta x_k \,. \tag{5.2}$$

Суму (5.2) називають інтегральною сумою функції $f(x)$, побудовану на відрізку [*a; b*] для даного Т – розбиття. Границя інтегральної суми, якщо вона існує, називається **визначеним інтегралом функції** $f(x)$ на відрізку [*a; b*] і позначається:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

При цьому число *a* називається нижньою межею інтегрування, b – верхньою межею; $f(x)$ - підінтегральна функція; $f(x)dx$ - підінтегральний вираз; відрізок [*a; b*] - проміжок інтегрування. Отже, згідно з попередніми означеннями, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є границя (якщо вона існує!) інтегральної суми, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \cdot \Delta x_k \tag{5.3}$$

Якщо визначений інтеграл функції *y = f (x)* існує, то така функція називається інтегровною на відрізку [*a; b*]. Проте не всяка функція, задана на відрізку [*a; b*], є інтегровною на ньому. Так, якщо $f(x)$ не є обмеженою на відрізку [*a; b*], то вона не інтегровна на цьому відрізку. Інакше кажучи, обмеженість функції на відрізку є необхідною умовою її інтегровності. Проте не всяка обмежена функція є інтегровною. Щоб сформулювати критерій інтегровності функції на заданому відрізку, введемо до розгляду так звані суми Дарбу. Побудуємо такі суми:

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k \,, \qquad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k \,.$$

Суми $\underline{S}$ і $\overline{S}$ називаються відповідно нижньою і верхньою сумами Дарбу. Зрозуміло, що суми Дарбу залежать від Т – розбиття $\underline{S} = \underline{S}(T)$, $\overline{S} = \overline{S}(T)$ і не залежать від вибору проміжних точок c_k.

Теорема 1. (критерій інтегровності). Для того щоб обмежена на відрізку [*a; b*] функція $f(x)$ була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб справджувалося співвідношення:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(\overline{S}-\underline{S}\right)=0\,. \qquad (5.4)$$

Теорема 2. Будь – яка неперервна на відрізку $[a;\ b]$ функція $f(x)$ є інтегровною на цьому відрізку.

5.2.2 Геометричний зміст та властивості визначеного інтеграла

Розглянемо площу $S(x)$ змінної криволінійної трапеції, обмежену зверху безперервною кривою $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$), знизу віссю Ox , зліва нерухомою вертикаллю $x=a$, а праворуч рухомою вертикаллю $x=X$ ($a\leq x\leq b$) (рис. 5.1). Нехай x отримує приріст $\Delta x>0$. Тоді площа зміниться на величину ΔS . Покладемо $m=\min\limits_{x_i\leq x\leq x_i+\Delta x} f(x)$ і $M=\max\limits_{x_i\leq x\leq x_i+\Delta x} f(x)$. Порівнюючи площу ΔS з площами прямокутників з загальною основою Δx і висотами m і M, матимемо $m\,\Delta x\leq\Delta S\leq M\Delta x$. Звідки $m\leq\Delta S/\Delta x\leq M$.

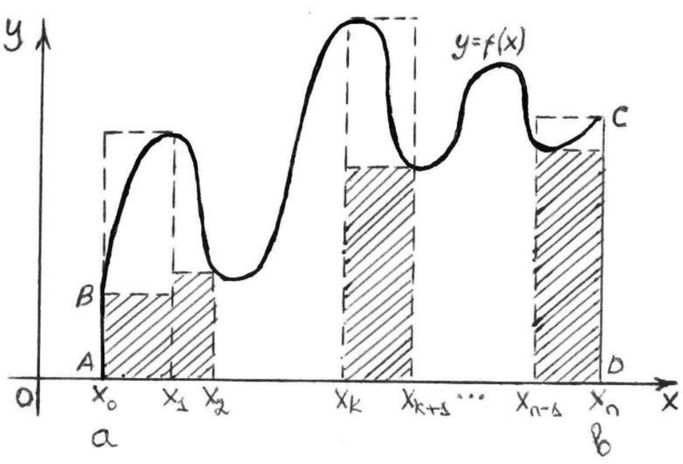


Рисунок 5.1 – Площа криволінійної трапеції

Нехай тепер $\Delta x\to +0$. Тоді в силу безперервності функції $f(x)$ маємо $m\to f(x)$ і $M\to f(x)$. Звідки на підставі теореми про границю проміжної змінної отримуємо

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)\,.$$

Аналогічно, при $\Delta x\to -0$ маємо $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$. Отже, існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=\frac{d\,S}{d\,x}=f(x)$. Таким чином, похідна площі змінної криволінійної трапеції для будь- якого значення аргументу $X = x$ дорівнює її кінцевій ординаті $y = f(x)$. З останньої формули отримаємо

$$dS = f(x)dx. \qquad (5.5)$$

Нехай S - повна площа криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, віссю *Ox* та двома вертикалями $x = a$ і $x = b$. Інтегруючи рівність (4.5) в межах від a до b і враховуючи, що $S(a) = 0$, отримаємо

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)dx, \qquad (5.6)$$

Таким чином, визначений інтеграл (5.6) від безперервної невід'ємної функції при $a \le b$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (геометричний зміст визначеного інтеграла).

Властивості визначеного інтеграла для неперервної функції:

1. Нехай функція $f(x)$ задана і неперервна на відрізку [*a; b*], тоді існує інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ і справедлива рівність: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. Для будь-якої функції $f(x)$: $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Сталу величину можна виносити за знак інтерала: $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$

4. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$- неперервні функції на відрізку [*a; b*], тоді вірно:

$$\int_a^b (f(x)dx + \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

5. Якщо $a \le c \le b$, тоді $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку [*a;b*] і для кожного $x \in [a;b]$ справедливо $f(x) \le \varphi(x)$,то справедливо також : $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

7. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку [*a; b*], то на цьому відрізку є інтегровною функція $|f(x)|$, і справджується нерівність:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

8. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є парною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

9. Якщо $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є непарною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

10. Якщо $f(x)$ інтегрована на відрізку [*a; b*], то справджується рівність:

$$m \cdot (b-a) \le \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le M \cdot (b-a),$$

де m і M - найменше та найбільше значення функції на відрізку [*a;b*].
11. **Теорема (про середнє значення визначеного інтеграла).** Визначений інтеграл від безперервної функції дорівнює добутку довжини проміжку інтегрування на значення підінтегральної функції при деякому проміжному значенню аргументу, тобто:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c) \cdot (b-a), \quad c \in [a,b].$$

5.2.3 Обчислення визначеного інтеграла

1. Формула Ньютона – Лейбниця. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку [*a; b*], то вона інтегрована і на відрізку [*a; x*], де *x*- будь-яке значення із [*a; b*]. Замінивши верхню границю *b* визначеного інтеграла змінною *x*, отримаємо інтеграл з змінною верхньою границею:

$$\varPhi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt, \tag{5.7}$$

який є функцію від *x* (*t* - щоб уникнути плутанини, змінна інтегрування позначена іншою буквою). Якщо $f(x)$ безперервна в точці $t = x$, то в цій точці функція $\varPhi(x)$ має похідну, яка дорівнює $f(x)$:

$$\varPhi'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x} f(t)dt = f(x). \tag{5.8}$$

З (5.8) маємо, що інтеграл $\varPhi(x)$ в (5.7) є первісною для функції $f(x)$, тобто

$$\varPhi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt = F(x) + C, \tag{5.9}$$

де $F(x)$- будь-яка первісна функції $f(x)$, *C*- деяка стала. Сталу *C* знаходимо, вважаючи в (5.9) *x*= *a* і використовуючи властивість 2:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a)+C=0 \;\Rightarrow C=-F(a).$$

Звідки з (5.9) маємо: $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$. Вважаючи $x=b$, отримаємо основну формулу інтегрального числення (Ньютона- Лейбниця):

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a). \tag{5.10}$$

2. Заміна змінної у визначеному інтегралі. им методом користуються тпри обчисленні як невизначених, так і визначених інтегралів.

Теорема. Нехай виконуються умови: 1) $f(x)$ неперервна функція на відрізку [$a;$ b]; 2) функція $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$; 3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і значення функції $x=\varphi(t)$ не виходять за межі відрізка [$a;$ b] при t ∈ $[\alpha;\beta]$. Тоді справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \cdot \tag{5.11}$$

Якщо при знаходженні невизначеного інтеграла методом підстановки у первісній функції ми від змінної t поверталися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла робити таку заміну немає потреби. Якщо вдається обчислити інтеграл у правій частині формули (5.11), то цим самим обчислено і інтеграл лівої частини формули (5.11).

Приклад. $\int_0^4 x\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx = \left| \begin{matrix} t=x^2+9,\ dt=2xdx \\ t=9,\ t=25 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_9^{25} = \frac{98}{3}.$

3. Метод інтегрування частинами. При обчисленні визначених інтегралів часто користуються формулою інтегрування частинами:

$$\int_a^b U(x)dV(x) = (U(x)\cdot V(x))\Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x) \tag{5.12}$$

Виведемо цю формулу. Нехай функції $U(x)$ і $V(x)$ мають на відрізку [$a;$ b] неперервні похідні U' і V'.

Знайдемо похідну добутку:

$$\frac{d}{dx}(U\cdot V) = U\frac{dV}{dx}+V\frac{dU}{dx}. \tag{5.13}$$

Тоді функція $U\ V$ є первісною для функції у правій частині (5.13).

Згідно з формулою Ньютона — Лейбниця:

$$\int_a^b \left(U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx} \right) dx = (UV)\Big|_a^b .$$

До інтеграла у лівій частині цієї рівності застосовуємо властивість 4 визначеного інтеграла і отримаємо:

$$\int_a^b UdV + \int_a^b VdU = (U \cdot V)\Big|_a^b .$$

Приклад.

$$\int_1^2 \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, \ du = dx/x \\ dv = dx, \ v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = \ln 4 - 1 .$$

5.2.4 Невласні інтеграли

Невласним інтегралом 1-го роду називають інтеграл, в якому проміжок інтегрування не скінченний. Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \le x < +\infty$. Тоді за визначенням вважають:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx . \qquad (5.14)$$

Якщо границя в (5.14) існує, то невласний інтеграл з нескінченною границею інтегрування називається збіжним і його значення визначається формулою (5.14); в іншому випадку рівність втрачає сенс, невласний інтеграл називається розбіжним і йому не приписується жодного числового значення. Геометрично для функції $f(x) > 0$ на $[a,+\infty)$ невласний інтеграл (5.14) являє собою площу криволінійної фігури, яка обмежена цією лінією $y = f(x)$, віссю *Ox* та вертикаллю $x = a$. Нехай $F(x)$ - первісна функція для $y = f(x)$. Тоді на підставі формули (5.14) маємо:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} [F(b) - F(a)].$$

Так само можна визначити невласні інтеграли виду $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ та $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Невласним інтегралом 2-го роду називають інтеграл, в якому підінтегральна функція $y = f(x)$ неперервна не на всьому відрізку $[a,b]$. Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \le x < b$ і має точку розриву при $x = b$. Тоді відповідний невласний інтеграл від розривної функції визначається за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (5.15)$$

Його називають збіжним чи розбіжним в залежності від того, існує або ні границя правої частини рівності (5.15). Якщо $f(x)$ розривна тільки в точці $c \in (a,b)$, то невласний інтеграл визначається за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to -0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right).$$

РОЗДІЛ 6 ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

6.1 Основні поняття

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням* називається рівняння, що містить незалежну змінну x, шукану функцію y та її похідні. Символічно це записують так:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком цього рівняння.* Наприклад:

а) $x^2 y' + 5x\, y = y^2$-диференціальне рівняння першого порядку.

б) $y'' - 2y' + y - x^2 = 0$ -диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність. Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду $y' = f(x)$. Щоб його розв\`язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ де } C\text{- довільна стала.}$$

6.2 Найпростіші диференціальні рівняння

6.2.1 ДР з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \qquad (6.1)$$

називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними. Якщо $y = \varphi(x)$ його розв\`язок, то маємо тотожність

$$f_1(x)dx = f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Інтегруємо його

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx + C. \qquad (6.2)$$

У правому інтегралі виконаємо заміну змінної, покладемо $y = \varphi(x)$, тоді рівність (6.2) набуде вигляду $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C.$ Таким чином, щоб розв`язати рівняння (6.1), досить проінтегрувати обидві частини цієї рівності

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \text{ або } F_1(x) = F_2(y) + C.$$

Приклад. Розв`язати диференціальне рівняння $y' = 2^{x+y}$.

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, запишемо його у вигляді $2^{-y}dy = 2^x dx$. Беремо інтеграли $\int 2^{-y}dy = \int 2^x dx$, або $-\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

6.2.2 Однорідні ДР першого порядку

Означення. Функція називається *однорідною функцією к-го* порядку, якщо $f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$.

Наприклад, $f(x, y) = 4x^3 + 7x^2y - 5xy^2 + 9y^3$ є однорідною функцією третього порядку, тут сумарний степінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y} - 5$- однорідна нульового порядку.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x, y)dx = f_2(x, y)dy \qquad (6.3)$$

називається диференціальним рівнянням з однорідними функціями, якщо $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$- однорідні функції того самого порядку або, якщо диференціальне рівняння (6.3) можна розв’язати відносно y', тобто

$$y' = f(x, y), \qquad (6.4)$$

то $f(x, y)$ - однорідна функція нульового порядку.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $(x - y)dy = (x + y)dx$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. Розділимо чисельник і знаменник правої частини на *x*: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$. Покладемо $t=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xt\Rightarrow \frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$. Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t+x\frac{dt}{dx}=\frac{1+t^2}{1-t}$. Відокремлюємо змінні: $\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}$. Звідки $arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln x+C$ або $arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+C$.

6.2.3 Лінійні ДР першого порядку

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)\cdot y=q(x). \tag{6.4}$$

Зробимо підстановку: $y=u(x)\cdot v(x),$ де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні функції. Тоді $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}$. Підставляємо в рівняння: $\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}+p(x)uv=q(x).$ Покладаючи $u\cdot\frac{dv}{dx}+p(x)uv=0, u\neq 0.$, маємо

$$\begin{cases}\frac{dv}{dx}+p(x)v=0\\ \frac{du}{dx}v=q(x).\end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v}=-p(x)dx\Rightarrow \ln v=-\int p(x)dx.\quad v(x)=e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи і знаходимо $u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C.$ Шуканий розв`язок $y=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)e^{-\int p(x)dx}.$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y' - 2xy = 2x^3$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Робимо заміну: $y = u \cdot v,\ \ y' = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$. Підставляємо в рівняння: $\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3$. Покладемо $\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \frac{du}{dx} = 2x^3. \end{cases}$ Розв`яжемо перше рівняння системи: $\frac{dv}{v} = 2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}$. Підставляємо в друге рівняння системи: $\frac{du}{dx} \cdot e^{x^2} = 2x^3 \Rightarrow du = 2x^3 dx \Rightarrow$

$$u = \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \begin{bmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = -\int te^t dt = \begin{bmatrix} u = t; dv = e^t dt \\ du = dt; v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C.$$

Шуканий розв'язок

$$y = u \cdot v = \left(x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C\right) e^{x^2} = x^2 + 1 + C\, e^{x^2}.$$

6.3 Диференціальні рівняння ІІ порядку

6.3.1 Диференціальні рівняння ІІ порядку, що допускають пониження порядку

У деяких випадках розв`язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

Диференціальне рівняння виду $y'' = f(x)$.

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1- стала інтегрування. Шуканий розв`язок

$$y = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2.$$

Приклад. Розв`язати диференціальне рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв`язання: $$y' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1,$$

$$y = \int \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 x + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2.$$

Диференціальне рівняння, що не містить явно шукану функцію y .

$$y'' = f(x, y').$$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. А рівняння звелося до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1)$. Загальний розв`язок даного рівняння $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

Покладемо $y' = p.$ Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні: $\frac{dp}{1+p^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow arctg\ p = arctgC_1 - arctgx.$ Звідси (у відповідністю із формулою $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$), $p = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}$ або $y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}$.

Остаточно маємо

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} dx = -\frac{1}{C_1}\int dx + \left(C_1 + \frac{1}{C_1}\right)\int \frac{dx}{1 + C_1 x} = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1 + \frac{1}{C_1}}{C_1}\ln|1 + C_1 x| + C_2.$$

Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x.

$$y'' = f(y, y').$$

Покладаємо $y' = p(x)$, тоді $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$. Підставляємо у вихідне рівняння $p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \Rightarrow p = p(y, C_1)$, або $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$.

Розділяємо змінні $\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$ Загальний розв`язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення $x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2$.

Приклад. Розв`язати диференціальне рівняння $y'' = 2y\,y'.$

$y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння $p\frac{dp}{dx} = 2yp$ або $p\left(\frac{dp}{dx} - 2y\right) = 0$. 1. $p = y' = 0 \Rightarrow y = C\,(const).$

2. $\frac{dp}{dy} = 2y \Rightarrow dp = 2ydy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = y^2 + C_1$

а) $C_1 = 0$, тоді $\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2}$;

б) $C_1 > 0$. $\frac{dy}{C_1^2 + y^2} = dx \Rightarrow x = \frac{1}{C_1} arctg \frac{y}{C_1} + C_2$.

в) $C_1 < 0$. Якщо $\left(-C_1^2\right)$, маємо: $\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx$, а розв'язок

$x = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{y - C_1}{y + C_1} + C_2$.

6.3.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне (ЛОДР) рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6.5}$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв`язки рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$.

Підставляючи в рівняння, отримаємо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$ Оскільки $e^{kx} \neq 0,$ маємо

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{6.6}$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Воно являє собою квадратне рівняння відносно k. Його корені: $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Розглянемо три випадки:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв`язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що відношення $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$. Загальний розв`язок рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 9y' + 14y = 0.$ Характеристичне рівняння: $k^2 - 9k + 14 = 0, k_1 = 2, k_2 = 7.$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}$.

2. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p.$ Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$.

Один частинний розв`язок $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx.$ Маємо

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x}\int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x}\int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв`язок рівняння $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \cdot x$.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0.$ Характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0, k_1 = k_2 = 4.$

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} x.$

3. *Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені*: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

У цьому випадку можна покласти $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$.

Теорема. Якщо розв`язком диференціального рівняння (6.5) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x),$, то розв`язками рівняння (6.5) будуть його дійсна $u(x)$та уявна $v(x)$ частини.

Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (6.5)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + q) = 0.$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \text{ і } v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$$

У відповідності із формулами Ейлера, записані вище розв`язки рівняння (6.5) подамо у вигляді $y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$, $y_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$. В силу доведеної теореми розв`язками рівняння (5.5) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Вони лінійно незалежні

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctgx \neq const.$$

Загальний розв`язок набуде вигляду $y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0,\ k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i.$

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x))$.

6.3.3 Лінійні неоднорідні ДР II-го порядку

ЛНДР II-го порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{6.7}$$

Теорема. (Структура загального розв`язку рівняння (6.7)). Загальний розв`язок рівняння (6.7) являє собою суму загального розв`язку відповідного йому однорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{6.8}$$

і деякого частинного розв`язку $y_ч$ неоднорідного рівняння (6.7)

$$y = y_{одн} + y_ч.$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Нехай задане диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6.9}$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x)=P_n(x)e^{\lambda x}, \tag{6.10}$$

де $P_n(x)$- багаточлен n- го порядку. Візьмемо функцію $y=Q(x)e^{\lambda x}$, де

$$Q(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_{n-1}x+A_n$$

- багаточлен n- го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (6.9). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x)+(2\lambda+p)Q_n'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q_n(x)=P_n(x). \tag{6.11}$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - багаточлен n- го порядку, то $Q_n'(x)$ - (n-1)- го, а $Q_n''(x)$- (n-2)- го порядку.

А) Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (6.11) є багаточлени n -го порядку. Частинний розв`язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_ч=Q_n(x)e^{\lambda x}. \tag{6.12}$$

Б) Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (6.11) залишиться багаточлен n -го порядку, а в лівій – (n-1)- го, тому що $\lambda^2+p\lambda+q=0.$
Частинний розв`язок

$$y_ч=xQ_n(x)e^{\lambda x}. \tag{6.13}$$

В) λ - дійсний двоpазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (6.11) не тільки $\lambda^2+p\lambda+q=0,$ але і у силу теореми Вієта $2\lambda+p=0.$ Частинний розв`язок

$$y_ч=x^2Q_n(x)e^{\lambda x}. \tag{6.14}$$

Запишемо праву частину рівняння (6.9) так

$$f(x)=P_n(x)e^{\lambda_1 x}+Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \tag{6.15}$$

де $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, наведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_ч=U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \tag{6.16}$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_ч = x\left[U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x).\right] \qquad (6.17)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \qquad (6.18)$$

Покажемо, що рівність (6.18) можна записати у вигляді (6.15). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha+\beta i)x} + \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Тут у кожній із квадратних дужок багаточлен степеня $n = \max(n_1, n_2)$.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = x + 2 + 9xe^{2x} + e^x\cos x. \qquad (6.19)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - y' = 0. \qquad (6.20)$$

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0, k_1 = 0, k_2 = 1.$ Загальний розв`язок рівняння (6.20)

$$y_{одн} = C_1 + C_2e^x.$$

Подамо праву частину рівняння (6.19) у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, де $f_1(x) = x + 2$; $f_2(x) = 9xe^{2x}$; $f_3(x) = e^x\cos x.$ Шукаємо частинний розв`язок неоднорідного рівняння (6.19). $f_1(x) = x + 2$ можна записати в такому вигляді $f_1(x) = (x+2)e^{0x}$. А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k = 0$, то розв`язок $y_{ч_1}$ шукаємо у вигляді $y_{ч_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Знаходимо $y'_{ч_1} = 2Ax + B,\ \ y''_{ч_1} = 2A$ і і підставляємо в рівняння $2A - 2Ax - B = x + 2$. Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left.\begin{aligned} x\,&|\,2A = 1 \\ x^0\,&|\,2A - B = 2 \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{1}{2},\ B = -1.\ \ y_{ч_1} = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_2} = (Ax + B)e^{2x} \quad \Rightarrow y'_{ч_2} = [2Ax + (A + 2B)]e^{2x},$$

$$y''_{ч_2} = [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (6.19)

$$\left[4Ax+\left(4A+4B\right)\right]e^{2x}-\left[2Ax+\left(A+2B\right)\right]e^{2x}=9xe^{2x} \text{ або}$$

$$2Ax+\left(3A+2B\right)=9x.$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,\big|\,2A=9 \\ x^0\,\big|\,3A+2B=0 \end{array}\right\} \quad A=4.5,\ B=-6.75. \quad y_{ч_2}=\left(4.5x-6.75\right)e^{2x}.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_3}=e^x\left(A\cos x+B\sin x\right)\Rightarrow$$

$$y'_{ч_3}=e^x\left(\left(A+B\right)\cos x+\left(B-A\right)\sin x\right),\ y''_{ч_3}=\left[2B\cos x-2A\sin x\right]e^x.$$

Підставляємо в рівняння (6.19)

$$\left[2B\cos x-2A\sin x-\left(A+B\right)\cos x-\left(B-A\right)\sin x\right]e^x=e^x\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(B-A\right)\cos x+(-A-B)\sin x=\cos x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x\,\big|\,B-A=1 \\ \sin x\,\big|\,-A-B=0 \end{array}\right\} \quad A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}. \quad y_{ч_3}=\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)e^x.$$

Загальний розв`язок рівняння (6.19)

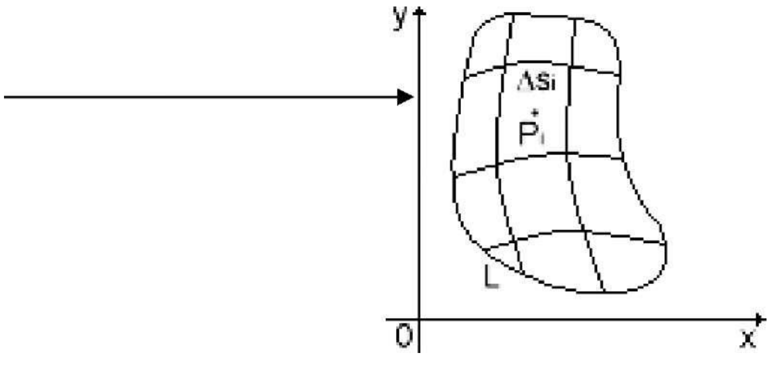
$$y=y_{одн}+y_ч=C_1+C_2e^x+\frac{1}{2}x^2-x+\left(4.5-6.75\right)e^{2x}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)e^x.$$

РОЗДІЛ 7 КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

7.1 Подвійний і потрійний інтеграли, їхні властивості

Розглянемо в площині Oxy замкнуту область D, обмежену лінією L. Розіб'ємо цю область якими-небудь лініями на n частин $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$



(причому тими ж символами $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ позначатимемо і площі відповідних частин), а відповідні найбільші відстані між точками в кожній з цих частин

Рис. 7.1- Ділення області D на частини

позначимо $d_1, d_2, ..., d_n$. Величину d_i називатимемо **максимальним діаметром** підобласті ΔS_i. Виберемо в кожній частині точку P_i (рис.7.1). Нехай в області *D* була задана функція $z = f(x, y)$. Позначимо через $f(P_1), f(P_2), ..., f(P_n)$ значення цієї функції у вибраних точках і складемо суму добутків вигляду $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i . \tag{7.1}$$

Означення 1. Сума вигляду (7.1) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ в області *D*.

Зауваження. З геометричної точки зору (при $f(x, y) \geq 0$) інтегральна сума (6.1) є сумою об'ємів циліндрів з основами ΔS_i і висотами $f(P_i)$.

Означення 2. Якщо існує одна і та ж границя інтегральних сум (6.1) при $n \to \infty$, незалежна ні від способу розбиття області *D* на частини, ні від вибору точок P_i в них, то вона називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області *D* і позначається

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i . \tag{7.2}$$

В цьому випадку функція $f(x, y)$ називається *інтегрованою* в області *D*, область *D* – *областю інтегрування*, *x* і *y* – *змінними інтегрування*, $dxdy = dS$ – *елементом площі*.

7.2 Властивості подвійних інтегралів

Частина властивостей подвійних інтегралів безпосередньо витікає з означення цього поняття і властивостей інтегральних сум, а саме:

1. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в *D*, то $k \cdot f(x, y)$, де $k = const$, теж інтегрується в цій області, причому

$$\iint_D k \cdot f(x, y)dxdy = k\iint_D f(x, y)dxdy . \tag{7.3}$$

2. Якщо в області *D* інтегруються функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$, то в цій області інтегруються і функції $f(x, y) \pm g(x, y)$, і при цьому

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint g(x, y)dxdy. \tag{7.4}$$

3. Якщо для тих, що інтегруються в області D функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ виконується нерівність $f(x,y) \leq g(x,y)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (7.5)$$

7.3 Потрійний інтеграл

Поняття потрійного (а надалі – *m-мірного*) інтеграла вводиться по аналогії з подвійним інтегралом. Нехай в просторі була задана деяка область V, обмежена замкнутою поверхнею S. Задамо в цій замкнутій області безперервну функцію $f(x,y,z)$. Потім розіб'ємо область V на довільні частини Δv_i, рахуючи об'єм кожної частини рівним Δv_i, і складемо інтегральну суму вигляду

$$\sum_V f(P_i)\Delta v_i \ , \qquad (7.6)$$

де точка P_i належить Δv_i. Нехай ρ - найбільша відстань між двома точками
будь-якої частини області V. Знайдемо границю інтегральної суми при необмеженому збільшенні числа елементів розбиття і за умовою, що кожний елементарний об'єм Δv_i стягується в точку, тобто максимальний діаметр кожної підобласті прагне до нуля.

Означення. Границя при $\rho \to 0$ інтегральних сум (7.6), незалежна від способу розбиття області V і вибору точок P_i в кожній підобласті області, називається потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області V:

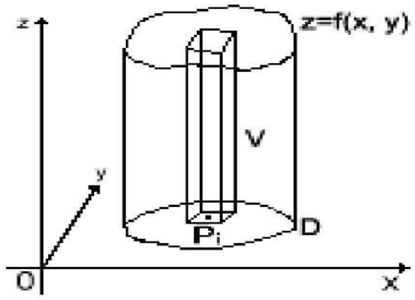
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\rho \to 0} \sum_V f(P_i)\Delta v_i \, . \qquad (7.7)$$

Зауваження 1. Умова неперервності підінтегральної функції не є обов'язковою для існування кратного (подвійного, потрійного і т. д.) інтеграла, але дослідження питань, пов'язаних з інтегруванням розривних функцій, виходить за рамки нашого конспекту.

Зауваження 2. Всі сформульовані раніше властивості подвійного інтеграла можна розповсюдити на потрійний інтеграл.

Зауваження 3. Так само можна надати означення інтеграла будь-якої кратності, розглядаючи функцію n змінних, задану в замкнутій області n-мірного простору.

7.4 Геометричне тлумачення подвійного інтеграла



Розглянемо тіло *V*, обмежене частиною поверхні, що задається рівнянням $z = f(x, y)$, проекцією *D* цієї поверхні на площину *Oxy* і бічною циліндровою поверхнею, отриманою з вертикальних утворюючих, з'єднуючих точки границі поверхні з їх проекціями (рис.7.2).

Рис.7.2- Розбиття тіла на циліндри

Шукатимемо об'єм цього тіла як границю суми об'ємів циліндрів, основами яких є частини ΔS_i області *D*, а висотами – відрізки довжиною $f(P_i)$, де точки P_i належать ΔS_i. Переходячи до границі при $\max \Delta S_i \to 0$, отримаємо, що

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy, \qquad (7.8)$$

тобто подвійний інтеграл є об'ємом так званого цилиндроїда, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, а знизу – областю *D*.

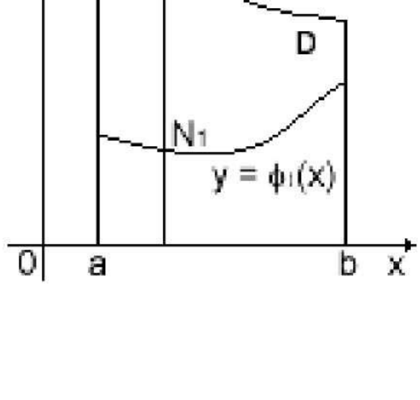
7.5 Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах шляхом зведення його до повторного

Розглянемо область *D*, обмежену лініями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$), $x = a, x = b, (a < b)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ неперервні на $[a, b]$. Якщо будь-яка пряма, паралельна координатній осі *Oy* і проходячи через внутрішню точку області *D*, перетинає межу області двох точок N_1 і N_2 (рис 7.3), то таку **область назвемо** правильною у напрямку осі *Oy*. Аналогічно визначається область, правильна у напрямку осі *Ox*. Область, правильну у напрямку обох координатних осей, називатимемо просто правильною. Нехай функція $f(x, y)$безперервна в області *D*. Розглянемо вираз

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2} f(x, y)dy \right) dx, \qquad (7.9)$$

який має назву **двократного інтеграла** від функції $f(x, y)$ по області *D*.

Обчислимо спочатку внутрішній



інтеграл (що стоїть в дужках) по змінній y, вважаючи x постійним. В результаті вийде

Рис. 7.3 – Область D

безперервна функція від x:

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)\,dy.$$

Отриману функцію проінтегруємо по x в межах від a до b. В результаті отримаємо число

$$I_D=\int_a^b \Phi(x)\,dx.$$

Теорема 1. Якщо область D, правильна у напрямі Oy, розбита на дві підобласті D_1 і D_2 прямою, паралельної осі Oy або осі Ox, то двократний інтеграл по області D буде рівний сумі таких же інтегралів по областях D_1 і D_2:

$$I_D=I_{D_1}+I_{D_2}\,. \tag{7.10}$$

Наслідок. Таким же чином можна розбити область D на будь-яке число правильних областей. При цьому двократний інтеграл по області D буде рівний сумі інтегралів по часткових областях.

Зауваження. Найчастіша форма запису двократного інтеграла є

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)\,dy. \tag{7.11}$$

Теорема 2. Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x,y)$ по правильній області D дорівнює двократному інтегралу від цієї функції по даній області, тобто

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2} f(x,y)\,dy\right)dx. \tag{7.12}$$

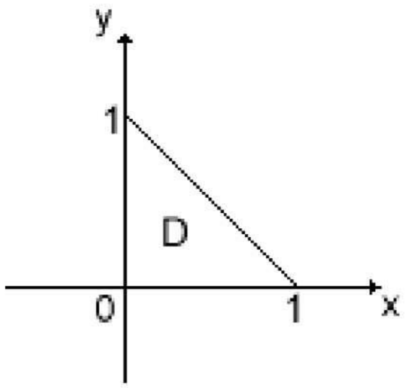


Рис.7.4

Приклад 1. Обчислимо подвійний інтеграл від функції $z=x+y$ по області, що є трикутником з вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0) (рис. 7.4). Оскільки

$$a=0, b=1, \varphi_1(x)=0, \varphi_2(x)=1-x.$$

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_a^b dx \int_0^{1-x}(x+y)dy = \int_0^1 dx\left(\left(xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right)\right) = \int_0^1\left(x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

7.6 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Введемо на площині криволінійну систему координат, яка має назву **полярна**. Вона складається з точки *O* (полюса) і, променя що виходить з нього (полярної осі).

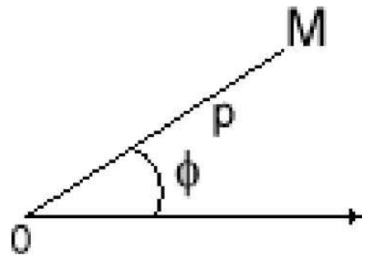


Рис. 7.5

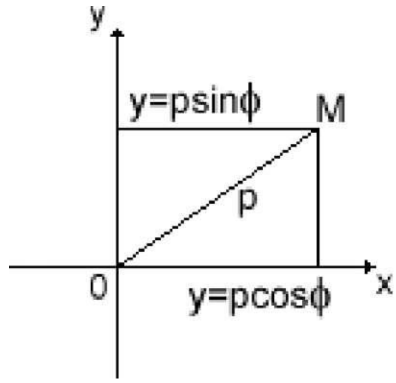


Рис.7.6

Координатами точки *M* в цій системі (рис.7.5) будуть довжина відрізка *MO* – полярний радіус ρ і кут φ між *MO* і полярною віссю: $M(\rho,\varphi)$. Відзначимо, що для всіх точок площини, окрім полюса, ρ > 0, а полярний кут φ вважатимемо додатним при вимірюванні його в напрямі проти годинникової стрілки і від'ємним – при вимірюванні в протилежному напрямку.

Зауваження. Якщо обмежити значення φ інтервалом $[0,2\pi]$ або $[-\pi,\pi]$, то кожній точці площини відповідає єдина пара координат (ρ,φ) . В інших випадках можна вважати, що φ може приймати довільні значення, тобто полярний кут визначається з точністю до доданку, кратного 2π . Зв'язок між полярними і Декартовими координатами точки *M* можна задати, якщо сумістити початок Декартової системи координат з полюсом, а додатню напіввісь *Ox* – з полярною віссю (рис. 7.6). Тоді

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Звідси, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}, tg\varphi=\dfrac{y}{x}$.

Приклад . Виведемо з використанням подвійного інтеграла формулу для площі круга радіусу R з центром на початку координат:

$$\iint\limits_D d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^R \right) = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$

Приклад. Обчислимо, використовуючи полярні координати, подвійний інтеграл

$$I = \iint\limits_D \left(2x + y^3\right) dxdy,$$

де D – частина кругового сектора одиничного радіусу з центром на початку координат, розташована в 1-у квадранті.

Заданий інтеграл в полярних координатах $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ по вказаній

області D: $\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ має вигляд:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho\cos\varphi + \rho^3 \sin^3\varphi\right) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} \rho^3 \Bigg|_0^1 \cos\varphi \, d\varphi -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5} \Bigg|_0^1 \sin^2\varphi \cdot \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} \sin\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2\varphi\right) d\cos\varphi =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cos\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{15}\cos^3\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{4}{5}.$$

*Перехід від подвійного інтеграла до повторного. Зміна порядку інтегрування. Перехід до полярних координат***.** Значення цих задач - навчитися швидко визначати параметри $a, b, \varphi_1(x), \varphi_2(x), c, d, \psi_1(y), \psi_2(y)$ (в Декартових координатах) і (в полярних координатах), необхідні для переходу від подвійного інтеграла до повторного.

Приклади:

1. Нехай область $D = \{x \le 0, y \le 0, x^2 + y^2 \le 4\} \cup \{x \ge 0, x^2 + y^2 \le -2y\}$. Представити подвійний інтеграл по області D у вигляді повторних. Перейти до полярних координат.

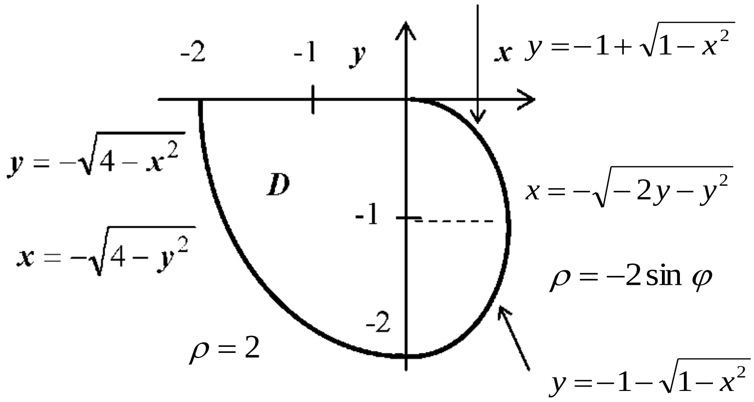


Рис. 7.7

Розв’язання: область була зображена на рис.7.7 . Для лівої частини D: $-2 \le x \le 0$, $-\sqrt{4-x^2} \le y \le 0$; для правої - $0 \le x \le 1$, $-1-\sqrt{1-x^2} \le y \le -1+\sqrt{1-x^2}$; - (рівняння правого півкола після виділення повних квадратів приймає вигляд $x^2+(y+1)^2=1$), тому $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$. D можна також описати нерівностями $-2 \le y \le 0$, $-\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{-2y-y^2}$;

тому $$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}}f(x,y)dx.$$

В полярних координатах рівняння лівої чверті кола має вигляд $r=2$ для $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$ (можна взяти також відрізок $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$) правої чверті кола $r=-2\sin\varphi$, $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$ (можна взяти відрізок $-\pi/2 \le \varphi \le 0$), тому:

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{r,\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi=$$

$$=\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}d\varphi\int\limits_{0}^{2}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr+\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{-2\sin\varphi}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

РОЗДІЛ 8 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

8.1 Задачі лінійного програмування

8.1.1. Основні властивості задач лінійного програмування

Перед лінійним програмуванням (ЛП) стоять дві важливі проблеми:
1) моделювання економічних задач;
2) пошук найефективнішого (оптимального) плану на базі побудованої математичної моделі [1], [3].

Задача лінійного програмування (ЗЛП) полягає в наступному: серед всіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=,\ge)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=,\ge)\ b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=,\ge)\ b_m, \end{cases} \tag{8.1}$$

знайти такий, при якому функція $z(x)$

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{8.2}$$

набуває найбільшого значення.

Залежно від системи обмежень, ЗЛП має такі основні форми: стандартна, канонічна та загальна. Стандартна форма має вигляд:

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \;\to\; \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le\ b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le\ b_m, \end{cases} \tag{8.3}$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad \ldots,\quad x_n \ge 0.$$

Якщо

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

тоді стандартна форма у матричному вигляді:

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;\le\; b \qquad (8.4)$$
$$x \;\ge\; 0,$$

де $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$,

$c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – скалярний добуток векторів c та x, знак T – це транспонування.

Загальна ЗЛП має вигляд:

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;\le\; (=, \ge) \;\; b \qquad (8.5)$$

$$x \;\; \square\square\square \; 0.$$

Компоненти вектора c називають *коефіцієнтами вартості*, сам вектор c – *вектор вартості*.

Вектор b – це матриця умов або *витрат*. Функція $z = c^T x$ називається *цільовою функцією*.

Обмеження Ax □ (=, □) b називають *основними обмеженнями*, а обмеження x □ 0 – *прямими*.

Стандартна форма ЗЛП

1) Цільова функція максимізується.
2) Обов’язкова присутність прямих обмежень.

3) Основні обмеження містять знак нерівності «≤». Кількість основних обмежень може бути будь-якою.

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;\le\; b; \qquad (8.6)$$

$$x \;\ge\; 0.$$

Канонічна форма ЗЛП

1) Цільова функція (8.2) максимізується.
2) Обов’язкова присутність прямих обмежень.
3) Основні обмеження мають знак «=», кількість основних обмежень менша, ніж кількість невідомих.
4) Вектор обмежень b невід’ємний ($b \ge 0$).

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;=\; b,\;\; b \;\ge\; 0 \qquad (8.7)$$

$$x \;\ge\; 0,$$

$$m \;<\; n.$$

Будь-яку ЗЛП можна звести до стандартної або канонічної форми.

Правила зведення ЗЛП до стандартної або канонічної форми.

1) У випадку мінімізації цільової функції $z = c^T \cdot x$, вводячи функцію $w = -z$, дістанемо оптимізацію на максимум:

$$\min z = \max w$$

2) Основне обмеження у вигляді рівності, яке має від’ємну праву частину

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \;=\; -\,b_k,$$

можна замінити на обмеження з невід’ємною правою частиною, якщо обидві його частини помножити на –1:

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n \;=\; b_k.$$

3) Для зведення обмеження у вигляді нерівності:

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n \;\le\; b_l,$$

до канонічної форми необхідно ввести додаткову невідому $x_{n+1} \geq 0$. Тоді отримаємо

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n + x_{n+1} = b_l,$$

4) Для перетворення обмеження: $a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n \geq b_s,$

до канонічної форми необхідно додаткову змінну $x_{n+2} \geq 0$ відняти від лівої частини:

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n - x_{n+2} = b_s.$$

5) Для того, щоб звести обмеження $a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \geq b_p,$

до стандартної форми, необхідно обидві частини нерівності помножити на –1:

$$-a_{p1}x_1 - a_{p2}x_2 - \ldots - a_{pn}x_n \leq -b_p.$$

6) Для перетворення обмеження $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r,$

до стандартної форми розглянемо два обмеження:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \leq b_r,$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \geq b_r.$$

Останнє з них треба домножити на –1.

8.1.2 Основні визначення та теореми лінійного програмування

Розглянемо основні обмеження прикладу з попереднього параграфу. Вони мають вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600, \end{cases} \qquad \text{де } m = 2, n = 4, m < n.$$

Коли система містить рівнянь менше, ніж невідомих, то вона має нескінченну множину розв’язків. Розглянемо:

$$(x_1,x_2),\ (x_1,x_3),\ (x_1,x_4),\ (x_2,x_3),\ (x_2,x_4),\ (x_3,x_4).$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	1700	1600
2	0	425	0	–525
3	0	320	420	0
4	$566\ \frac{2}{3}$	0	0	$466\ \frac{2}{3}$
5	800	0	–700	0
6	300	200	0	0

З усіх розв'язків отримали 4, які задовольняють основні та прямі обмеження, і саме серед них знаходиться оптимальний розв'язок задачі. Це той розв'язок, який надає цільової функції максимального значення.

Означення. Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, який є розв'язком ЗЛП, називається *оптимальним розв'язком*.

Означення. Будь-який вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який задовольняє всім обмеженням ЗЛП, називається *допустимим розв'язком (планом)*.

Означення. Вектор x називається *базисним розв'язком*, якщо $n - m$ його компонентів дорівнюють «0», а решта m компонент обчислюються, як єдиний розв'язок системи основних обмежень, які містять m рівнянь відносно n невідомих.

Змінні, прирівняні до 0, називаються *вільними*, а змінні, одержані як розв'язок системи обмежень, називаються *базисними*.

Означення. Базисний розв'язок називається *допустимим*, якщо всі його компоненти невід'ємні, тобто задовольняють прямі обмеження (опорні плани).

Означення. Множина K називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох елементів цієї множини, відрізок, який їх з'єднує, повністю належить множині K. *Вершиною* опуклої множини називається точка множини, для якої не існує відрізка, який містить в собі цю точку і повністю належить цій множині.

Теорема. Множина допустимих розв'язків в ЗЛП є опуклою.

Теорема. Базисні допустимі розв'язки відповідають вершинам опуклої множини.

Якщо ЗЛП має оптимальний розв'язок, то він міститься серед базисних допустимих розв'язків, тобто серед вершин опуклої множини. Якщо ЗЛП має нескінченну множину розв'язків, то вони містяться на однієї з границь опуклої множини (коли лінія рівня цільової функції паралельна однієї з границь області). ЗЛП не має розв'язків, коли область допустимих розв'язків – це опукла, необмежена множина.

8.1.3 Симплекс-метод розв’язання задач лінійного програмування

Після зведення задачі ЛП у стандартній формі до канонічної форми введенням нових додаткових змінних отримуємо:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \ldots x_{n+m} \geq 0. \end{array}$$

Отримали задачу, яка називається канонічною ЗЛП в базисній формі. Вона містить змінні, які входять в основні обмеження один раз в одне рівняння з коефіцієнтом 1 ($x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$) і називаються *базисними*.

m – кількість основних обмежень, n – кількість змінних.

Нам треба знайти початковий базисний допустимий розв’язок.

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_n$ – базисні змінні; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – небазисні (вільні) змінні.

Нехай: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Тоді: $x_{n+1} = b_1$, $x_{n+2} = b_2, \ldots,$ $x_{n+m} = b_m$ – початковий базисний допустимий розв’язок.

Умову ЗЛП у базисній формі зручно задати у вигляді симплекс-таблиці

c	x	b	c_1	c_2	$\ldots c_n$	c_{n+1}	c_{n+2}	$\ldots$	c_{n+m}	θ
			x_1	x_2	$\ldots x_n$	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots a_{1n}$	1	0	$\ldots$	0	$\frac{b_1}{a_{1s}}$
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots a_{2n}$	0	1	$\ldots$	0	$\frac{b_2}{a_{2s}}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$			$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots a_{mn}$	0	0	$\ldots$	1	$\frac{b_m}{a_{ms}}$
Δj		z	Δ_1	Δ_2	$\ldots \Delta_n$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	Δ_{n+m}	

x містить змінні, які є базисними,

c – відповідні коефіцієнти цільової функції,

b – початковий базисний допустимий розв'язок задачі, який не дорівнює нулю.

Решта таблиці містить коефіцієнти основних обмежень.

Побудуємо оціночний рядок за формулою:

$$\Delta j = z_j - c_j$$

(для кожного j-того стовпчика матриці коефіцієнтів обчислюється сума добутків відповідних коефіцієнтів цього стовпчика та стовпчика c, а потім віднімається відповідне c_j):

$$\Delta_1 = c_{n+1}a_{11} + c_{n+2}a_{21} + \ldots + c_{n+m}a_{m1} - c_1$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\Delta j = c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \ldots + c_{n+m}a_{mj} - c_j$$

В оціночному рядку у стовпчику b знаходиться початкове значення цільової функції.

Алгоритм розв'язання ЗЛП симплекс методом

1. Продивляємось усі елементи оціночного рядка. Якщо всі оцінки $\Delta j \geq 0$, то записаний в таблиці базисний допустимий розв'язок є оптимальним, а відповідне значення цільової функції максимальне.

2. Якщо серед оцінок Δj є хоча б одна від'ємна, то оберемо стовпчик з найменшою від'ємною оцінкою і назвемо його ключовим стовпчиком. Нехай номер цього стовпчика s ($\Delta_s < 0$). Якщо у ключовому стовпчику усі елементи $a_{is} < 0$, то ЗЛП розв'язків не має, бо цільова функція необмежена.

3. Якщо серед елементів ключового стовпчика є додатні, то для них обчислюємо відповідні величини, які записуємо у стовпчик θ. $\theta_i = b_i/a_{is}$ (відношення елементів стовпчика b до відповідних додатних коефіцієнтів ключового стовпчика). Серед отриманих відношень θ_i виберемо найменше. Номер цього відношення визначає номер ключового рядка r.

Елемент a_{rs}, який знаходиться на перетині ключового стовпчика та ключового рядка, називається ключовим елементом. З його допомогою ми перетворюємо таблицю та одержуємо новий базисний допустимий розв'язок. Номер рядка показує, яку базисну змінну виводимо з базису, а номер стовпчика ключового елементу вказує, яку вільну змінну треба ввести в базис.

Перетворення таблиці

1. Ключовий рядок ділимо на ключовий елемент.
2. Елементи ключового стовпчика, крім самого ключового елементу, замінимо нулями.
3. Для решти елементів таблиці використовуємо метод Жордана-Гаусса.

Для перетворення елементу a_{ij} будуємо прямокутник, діагональ якого утворюють елемент a_{ij} та ключовий елемент a_{rs}.

$$
\begin{array}{ccc}
a_{ij} & \cdots\cdots & a_{rs} \\
\vdots & \diagdown & \vdots \\
a_{rj} & \cdots\cdots & a_{rs}
\end{array}
$$

$$a_{ij}^{*} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$

Перетворену таблицю аналізуємо за оціночним рядком.

Приклад.

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

x_3, x_4 – базисні змінні; x_1, x_2 – вільні.
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1700$, $x_4 = 1600$; $z = 0$.
$x_o = (0; 0; 1700; 1600)$ – початковий роз’язок, $z_o = 0$.

c	x	b	2	4	0	0	θ	
			x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	1700	3	4	1	0	425	
0	x_4	1600	2	5	0	1	320	$\rightarrow$
	Δj	0	–2	–4	0	0		
				$\uparrow$				
0	x_3	420	$^7/_5$	0	1	$-^4/_5$	300	$\rightarrow$
4	x_2	320	$^2/_5$	1	0	$^1/_5$	800	
	Δj	1280	$-^2/_5$	0	0	$^4/_5$		
			$\uparrow$					
2	x_1	300	1	0	$^5/_7$	$-^4/_7$		
4	x_2	200	0	1	$-^2/_7$	$^3/_7$		
	Δj	1400	0	0	$^1/_7$	$^4/_7$		

Від’ємна оцінка Δj при обчислюванні значення цільової функції дозволяє отримати значення більші, ніж на попередньому етапі.

$$x_1 = (0; 320; 420; 0), \quad z_1 = 1280$$

$$x_2 = (300; 200; 0; 0), \quad z_2 = 1400$$

x_2 – оптимальний розв’язок $(\Delta j \geq 0)$.

Отже ідея методу полягає в переході від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб значення цільової функції оптимізувалося (зростало). Зазначимо, що змінні задачі, які переходять з базисних у вільні, обираються так, щоб зберігалась умова невід’ємності задачі. Крім того, на кожному кроці в базисі змінюється лише одна базисна і одна вільна невідомі.

8.1.4 Метод штучного базису

Розглянемо ЗЛП в канонічній формі, але не в базисній:

$$\begin{gathered} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \\ m < n, \quad b_i \geq 0, \ x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0. \end{gathered} \tag{8.8}$$

Задача у такій формі не містить базисних змінних. Для розв’язання задачі (8.8) розглянемо допоміжну задачу. Для цього вводимо m додаткових штучних змінних: $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ (≥ 0).

В кожне рівняння основних обмежень додамо по одній штучній змінній:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m} \rightarrow \max. \end{gathered} \tag{8.9}$$

Додаткові змінні мають невід’ємні значення. Тому, якщо їх помножити на нескінченно велике число M і взяти зі знаком «–» та, крім того, ввести їх у цільову функцію, яка максимізується, то найбільшого значення функція набуває у випадку, коли всі додаткові змінні будуть дорівнювати нулю.

Величина M в (8.9) має значення штрафу за те, що штучні змінні увійдуть до базису.

Ціль методу – отримати допустимий базисний розв'язок, який не містить штучних додаткових змінних у складі базисних.

c	x	b	c_1	c_2	…	c_n	$-M$	…	$-M$
			x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}
$-M$ … $-M$	x_{n+1} … x_{n+m}	b_1 … b_m							

$M >> 0$.

1. Якщо в оптимальному розв'язку M-задачі штучні змінні дорівнюють «0», то отриманий розв'язок є оптимальним розв'язком вихідної задачі.
2. Якщо в оптимальному розв'язку M-задачі хоча б одна штучна змінна ≥ 0, то вихідна задача не має розв'язку, бо умови несумісні.
3. Якщо M-задача не має розв'язку, то і вихідна задача не має оптимального розв'язку.

При розв'язанні ЗЛП в канонічній формі можуть виникнути такі ситуації: 1) всі рівняння основних обмежень містять одну базисну змінну (тоді можна отримати початковий базисний допустимий розв'язок і застосувати звичайний симплекс-метод);

2) жодне з рівнянь основних обмежень не містить базисних невідомих (тоді вводимо стільки штучних базисних змінних, скільки маємо основних обмежень. Для розв'язання застосовується M-метод);

4) якщо кількість рівнянь основних обмежень містить базисні змінні, а решта їх не має, то штучні змінні вводяться в кількості, яка не достає до базису. Для розв'язання застосовується M-метод.

8.1.5 Двоїста задача лінійного програмування

Розглянемо ЗЛП у стандартній формі:

$$z = c^{\mathrm{T}}x \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_n; \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Побудуємо для (8.10) двоїсту задачу, використовуючи такі правила:

1. Введемо змінні $y_1, y_2, \dots, y_m$. Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості основних обмежень вихідної задачі, а кількість основних обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.
2. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі – це праві частини основних обмежень вихідної задачі. Цільова функція мінімізується.
3. Стовпчики матриці основних обмежень вихідної задачі є коефіцієнтами основних обмежень двоїстої задачі. Знаки нерівностей основних обмежень двоїстої задачі «≥». Коефіцієнти цільової функції вихідної задачі є правими частинами основних обмежень двоїстої задачі.
4. Всі змінні двоїстої задачі задовольняють прямим обмеженням.

Маємо:

$$u = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \min$$

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{m1}y_m &\ge c_1;\\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m &\ge c_2;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m &\ge c_n;\\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ \dots,\ y_m &\ge 0. \end{aligned} \qquad (8.11)$$

Приклад. Для ЗЛП

$$z = -4x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} -8x_1 + 3x_2 &\le 12;\\ -x_1 + 5x_2 &\le 5;\\ 5x_1 - 8x_2 &\le 8;\\ x_1 \ge 0;\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

побудувати двоїсту.

$$u = 12y_1 + 5y_2 + 8y_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} -8y_1 - y_2 + 5y_3 &\ge -4;\\ 3y_1 + 5y_2 - 8y_3 &\ge 3;\\ y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Теорема. Якщо одна з двоїстих одна одній задач має оптимальний розв'язок, то і друга задача має оптимальний розв'язок. Значення цільової функції вихідної та двоїстої задач співпадають. Якщо x^* – оптимальний розв'язок вихідної задачі, y^* – оптимальний розв'язок двоїстої задачі, то $c^Tx^* = b^Ty^*$.

Теорема. Для того, щоб допустимі розв'язки x* та y* були оптимальними розв'язками вихідної та двоїстої задач, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:

1) $$y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$Y^* \cdot (A \cdot X^* - B) = 0;$$

2) $$x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j^* - c_i \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$X^* \cdot (A \cdot Y^* - C) = 0.$$

Перше обмеження означає, що на оптимальному розв'язку, або *i*-та компонента розв'язку двоїстої задачі дорівнює нулю (тобто вільна), або відповідне обмеження вихідної задачі виконується як рівність.

Аналогічно і друга умова – або *j*-та компонента розв'язку вихідної задачі дорівнює нулю, або відповідне обмеження двоїстої задачі виконується як рівність.

Розв'язання двоїстої задачі

Якщо одна з двоїстих задач має стандартну форму, то зводячи її до канонічної форми та розв'язавши симплекс-методом, ми одночасно розв'язали і двоїсту задачу. Якщо вихідна задача має оптимальний розв'язок, то оптимальній розв'язок двоїстої задачі міститься в останній симплекс-таблиці в оціночному рядку в стовпчиках, які відповідають початковим базисним змінним.

Приклад. Ми розв'язали симплекс-методом задачу

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 1700;$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 1600;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Отримали, що

$$x_1 = 300,$$
$$x_2 = 200,$$
$$z = -1400.$$

Двоїста задача має вигляд:

$$u = 1700y_1 + 1600y_2 \to \min$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 2;$$
$$4y_1 + 5y_2 \geq 4;$$
$$y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0.$$

З тієї ж симплекс-таблиці маємо: $y_1 = {}^2/_7$; $y_2 = {}^4/_7$; $u = 1400$.

8.1.6 Економічний аналіз вихідної та двоїстої задач

Розглянемо задачу раціонального використання ресурсів. Нехай підприємство виготовляє n видів виробів, маючи m різних ресурсів. Відомі: 1) витрати ресурсів, які задані матрицею A, елементи якої a_{ij} – витрати i-го виду ресурсів на виробництво одиниці j-го виду виробів; 2) запаси ресурсів, які задаються вектором B, елементи якого b_i – запас i-го виду ресурсів; 3) прибуток від реалізації j-го виду виробів c_j. Необхідно скласти план виробництва виробів із запасів ресурсів, який забезпечить максимальний прибуток підприємству.

Побудуємо відповідну математичну модель. Нехай x_j – план виробництва j-го виду виробів. Набір $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – це план підприємства по виготовленню усіх видів виробів.

Нехай z – прибуток, який планується при реалізації виготовлених виробів. Тоді

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

Обмеженість ресурсів означає, що витрати кожного з них не повинні перевищувати їх запас. Таким чином, з’являються обмеження:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

План виробництва не може визначатися від’ємною величиною, тому

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.$$

Підприємство може продавати ресурси, які воно має у розпорядженні. Тоді виникає задача визначення таких цін на ресурси, щоб продаж був не менш ефективним, ніж виробництво товарів. При цьому вважається, що покупець бере увесь запас ресурсів і вимагає, щоб їх вартість була мінімальною.

Побудуємо відповідну модель. Нехай y_i – вартість i-го виду ресурсів, тоді u – вартість усієї покупки

$$u = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \rightarrow \min.$$

Основні обмеження відображають вимоги покупця. Прибуток від продажу ресурсів повинен бути не меншим за прибуток від продажу готового виробу. Прибуток від продажу одного виду ресурсів:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m &\geq c_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m &\geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m &\geq c_n. \end{aligned}$$

Ціни на ресурси повинні бути невід’ємними – так з’являються прямі обмеження.

Сформульовані постановки задач утворюють пару двоїстих задач. Розв’язавши одну з них симплекс-методом, ми відразу знаходимо і розв’язок двоїстої задачі.

Властивості розв’язків

1. Компоненти вектора y_i^* – оптимальний розв’язок двоїстої задачі. Вони показують, наскільки виросте максимальний прибуток підприємства при додатковому залученні до виробництва одиниці i-го виду ресурсів.
2. y_i^* показують граничну ефективність використання даного виду ресурсів.
3. Компоненти y_i^* відображають порівняну дефіцитність ресурсів. Ресурс називається дефіцитним, якщо додаткове залучення його до процесу виробництва приведе до підвищення прибутку, тобто, якщо $y_i^* > 0$, то ресурс дефіцитний. Якщо $y_i^* = 0$ – ресурс не є дефіцитним. З двох дефіцитних ресурсів більш дефіцитний той, чия вартість вища.

Приклад.

Підприємство виготовляє два види виробів і витрачає два види ресурсів. Відомі: витрати ресурсів, їх запаси і прибуток, який буде одержаний від реалізації одиниці продукції.

Види ресурсів	Виріб 1	Виріб 2	Запаси
Сировина 1	3	4	1700
Сировина 2	2	5	1600
Прибуток	2	4	

Необхідно:

1) скласти математичну модель задачі (треба так організувати випуск продукції, виходячи з наявних ресурсів, щоб одержати найбільший прибуток);
2) скласти математичну модель двоїстої задачі;
3) розв'язати одну з них і одержати розв'язок другої;
4) проаналізувати розв'язки з економічної точки зору.

Нехай x_1 – запланована кількість виробів 1-го виду, x_2 – другого виду. Прибуток від реалізації цих виробів визначається функцією

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Запаси ресурсів на виробництво продукції обмежені:

$$\begin{gathered} 3x_1 + 4x_2 \le 1700; \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1600; \\ x \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{gathered}$$

y_1 – вартість продажу сировини 1-го виду; y_2 – другого виду.
Цільова функція визначає ціну продажу всіх ресурсів:

$$u = 1700y_1 + 1600y_2 \to \min$$

$$\begin{gathered} 3y_1 + 2y_2 \ge 2; \\ 4y_1 + 5y_2 \ge 4; \end{gathered}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Продаж ресурсів повинен бути не менш вигідним, ніж продаж готової продукції.

Розв'язавши задачу симплекс-методом, ми одержали оптимальний розв'язок вихідної задачі:

$$x_{\text{опт}} = (300;\ 200;\ 0;\ 0),\ z_{max} = 1400.$$

Виробів 1-го виду необхідно виробляти 300 одиниць, виробів 2-го виду – 20 одиниць. Основні обмеження канонічної задачі:

$$\begin{gathered} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600, \end{gathered}$$

де x_3 та x_4 – додаткові змінні.

В оптимальному розв'язку вони мають нульові значення, тому основні обмеження стандартної задачі виконуються як рівності.

Це означає, що наявні ресурси 1-го та 2-го виду витрачені повністю. Якби одна з додаткових змінних не дорівнювала б нулю, це означало б, що відповідне обмеження виконується як рівність, а сама змінна відповідає остачі невикористаної сировини.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі $y_{опт} = ({}^{2}/_{7}, {}^{4}/_{7})$; $u_{min} = 1400$. Вартість одиниці ресурсу 1-го виду становить ${}^{2}/_{7}$ грошових одиниць, вартість одиниці ресурсу 2-го виду – ${}^{4}/_{7}$ грошових одиниці.

Виходячи з цін на ресурси, можна зробити висновок, що сировина 1-го та 2-го виду дефіцитна, але сировина 2-го виду більш дефіцитна, бо ${}^{4}/_{7} > {}^{2}/_{7}$.

$y_1 = {}^{2}/_{7}$, отже, виходячи з теореми двоїстості, перше основне обмеження вихідної задачі повинно виконуватись як рівність. Це означає, що ресурси 1-го виду використані повністю.

$y_2 = {}^{4}/_{7}$, отже друге основне обмеження вихідної задачі виконується як рівність, і відповідний ресурс використано повністю.

Якби одна з змінних y_1 чи y_2 дорівнювала б нулю, це означало б, що відповідна сировина не є дефіцитною, її вартість дорівнює нулю, а відповідна нерівність виконувалась би як рівність. Це означало б, що є остача даної сировини.

Виходячи з теореми двоїстості, $x_1 \neq 0$ та $x_2 \neq 0$. Це означає, що основні обмеження двоїстої задачі повинні виконуватись як рівності. З економічної точки зору це означає, що витрати при виробництві товару збігаються з прибутком від реалізації цього товару.

Якщо б $x_1 = 0$, чи $x_2 = 0$, то відповідне обмеження двоїстої задачі виконувалось би як нерівність, тобто витрати при виробництві перевищували б прибуток від продажу і відповідний товар виробляти було б невигідно.

8.2 Транспортна задача

8.2.1 Постановка транспортної задачі і побудова її математичної моделі

Класична транспортна задача (ТЗ) полягає у пошуку найбільш економного плану перевезення однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва (станцій відправлення) до пунктів споживання (станцій призначення), ефективність якого будемо оцінювати за критерієм найменшої вартості перевезення.

Нехай на m пунктах відправлення $A_1, \ldots, A_m$ зосереджено $a_1, \ldots, a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення $B_1, \ldots, B_n$, причому в кожний з них потрібно завезти відповідно $b_1, \ldots, b_n$ одиниць цього вантажу.

Вартість перевезення c_{ij} одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j вважається заданою.

Треба скласти такий план перевезення, щоб загальна вартість його виявилася мінімальною.

Заради простоти будемо вважати, що загальний запас вантажу на всіх станціях відправлення дорівнює загальній сумі потреб всіх пунктів призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i. \tag{8.2.1}$$

Таку задачу називають *ТЗ з правильним балансом* (або *закритою ТЗ*).

Якщо умова (8.2.1) порушується, таку задачу називають *ТЗ з неправильним балансом* (або *відкритою ТЗ*).

Заради простоти викладок і для наочності всі дані транспортної задачі (вартості c_{ij}, запаси a_i, потреби b_j) заносять в спеціальну таблицю, яку називають матрицею перевезень (табл.1).

Оскільки наперед невідомо, скільки вантажу потрібно перевезти з пункту A_i до пункту B_j, щоб план перевезень був оптимальним, то позначимо його через x_{ij}. Всі невідомі занесемо в табл.2.

Таблиця 1

Пункти відправлен-ня	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Таблиця 2

Пункти відправлен-ня	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	x_{11}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	…	x_{ij}	…	x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	…	x_{mj}	…	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Для складання математичної моделі задачі скористаємося такими міркуваннями: кількість вантажу, який планується перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення, з одного боку, дорівнює $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, з іншого — b_j. Оскільки загальна сума запасів дорівнює загальній сумі потреб, то ці величини рівні між собою, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8.2.2}$$

З кожного пункту відправлення до пунктів призначення відправлено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{8.2.3}$$

Разом системи (8.2.2) і (8.2.3) складають систему обмежень транспортної задачі. В розгорнутому вигляді вона має вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \tag{8.2.4}$$

Систему обмежень (8.2.4) легко скласти, якщо скористатися табл.2. Для цього слід пам'ятати, що сума всіх x_{ij}, розміщених в i-му рядку, дорівнює запасу a_i у пункті відправлення A_i, а сума x_{ij} з j-го стовпчика дорівнює потребам b_j пункту споживання B_j.

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезення, треба просумувати вартості перевезення всіх клітинок. Отже, загальна вартість перевезення

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (\min). \tag{8.2.5}$$

Виходячи з економічної постановки задачі, тепер можемо сформулювати її математичну модель: серед всіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь (8.2.4) знайти такий, при якому форма z в (8.2.5) набуде найменшого значення.

Із фізичних міркувань випливає, що оптимальний розв’язок транспортної задачі завжди існує.

Теорема. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі (8.2.4) визначається за формулою

$$R = m + n - 1, \tag{8.2.6}$$

де m — число пунктів відправлення, а n — споживання**.**

8.2.2 Метод найменшої вартості пошуку опорних планів транспортної задачі

Оскільки транспортна задача є задачею ЛП, то її можна розв’язувати симплекс-методом. Однак через просту будову системи обмежень (8.2.4) симплекс-метод у цьому разі значно спрощується. Це вже можна помітити на прикладі відшукання початкових планів. Заповнюють клітинки матриці перевезень A_iB_j меншим з чисел її рядка і стовпчика, тобто числом min (a_i,b_j).

Починають заповнювати ті клітинки таблиці, де вартості перевезення на даному етапі є мінімальними (табл.3).

Найменша вартість в клітинці A_1B_2, тому заповнюємо її. Наступна мінімальна вартість 2, в клітинках A_2B_1, A_2B_3, A_2B_4, A_3B_3. Можна обрати будь-яку із цих клітинок, наприклад A_2B_1, потім A_2B_3, A_3B_3. Клітинку A_2B_4 не заповнюємо, тому що запаси A_2 вичерпано. Вибираємо клітинку A_3B_4 з мінімальною вартістю 4, з вартістю 3 всі клітинки заповнені і т.д.

Таблиця3

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	1 45	3	4	4 15	60
A_2	2 22	3	2 13	2	3	35
A_3	3	5	2 7	4 18	4 15	40
Потреби	22	45	20	18	30	135

Зауваження. Число базисних клітинок завжди має дорівнювати рангу ТЗ, у протилежному випадку доповнюємо їх до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням 0.

8.2.3 Критерій оптимальності опорних розв'язків за методом потенціалів

Ми вже вміємо знаходити початкові опорні плани. Зрозуміло, що опорні плани в табл.3 не є оптимальними. Критерій оптимальності знаходимо із співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Запишемо двоїсту задачу до транспортної, математична модель якої задана формулами (8.2.4) і (8.2.5).

$$\left\{\begin{array}{l|l}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 & \alpha_1 \\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 & \alpha_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m & \alpha_m \\
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 & \beta_1 \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 & \beta_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n & \beta_n
\end{array}\right.$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (\min).$$

Введемо двоїсті змінні $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ і за правилами складання двоїстих задач складемо двоїсту задачу, система обмежень якої має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \qquad (8.2.7)$$

$$(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

Нерівності (8.2.7), враховуючи співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач, можна конкретизувати:

а) для базисних невідомих (клітинок)

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}\ ; \qquad (8.2.8)$$

б) для вільних невідомих (клітинок)

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}\ . \qquad (8.2.9)$$

Зауваження. Взагалі кажучи, у співвідношеннях (8.2.9) ми мали б писати знак строгої нерівності, але щоб врахувати факти виродженості задачі, ми будемо допускати у формулах (8.2.9) і рівності, що не суперечить співвідношенням між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Цей метод називають методом потенціалів. Розглянемо його на прикладі табл.4.

Поставимо у відповідність пунктам A_i потенціали α_i, B_j – β_j і побудуємо систему рівнянь

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \tag{8.2.10}$$

для всіх базисних клітинок.

Таблиця 4

Пункти	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	4 1	1 45	3 1	4 1	4 15	0
A_2	2 2	3 3	2 1	2 18	3 15	–1
A_3	3 20	5 4	2 20	4 1	4 0	0
β_j	3	1	2	3	4	

Для базисної клітинки A_1B_2 рівняння системи має вигляд

$\alpha_1 + \beta_2 = 1$; $A_2B_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 2$ і т.д.

Для відшукання потенціалів α_i, β_j з табл.2.4 дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_5 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_5 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2. \end{cases} \tag{8.2.11}$$

Система рівнянь (8.2.11) складається з рівнянь, до кожного з яких входять дві невідомі. Всього маємо 7 рівнянь і 8 невідомих. Ранг системи

(8.2.10) дорівнює 7 (у загальному випадку $m + n - 1$). Тому одну з невідомих беруть за вільну (наприклад, α_1). Покладемо $\alpha_1 = 0$. Із першого рівняння знайдемо β_2, з другого β_5, з п'ятого α_2 і т.д.

В результаті розв'язок системи (8.2.11) має вигляд:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0;\\&\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 3, \beta_5 = 4.\end{aligned} \qquad (8.2.12)$$

Теорема. Для того, щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j), \qquad (8.2.13)$$

обчислені для вільних клітинок, де α_i і β_j — розв'язки системи (8.2.10), були невід'ємними.

Перевіримо на оптимальність розв'язок табл.4. Потенціали задаються розв'язками (8.2.12). За формулами (8.2.13) обчислюємо коефіцієнти: $\gamma_{11} = 4 - (0 + 3) = 1$,

$\gamma_{13} = 3 - (0 + 2) = 1$ і т.д.

Ці числа поміщаємо в табл.2.4 і обводимо кружком.

Із табл.4 випливає, що всі коефіцієнти $\gamma_{ij} \geq 0$ для вільних клітинок. Тому знайдений опорний план буде оптимальним і

$$x_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 0 & 18 & 15 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ z_{\min} = 290.$$

Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь (8.2.11). Їх можна знайти безпосередньо за таблицею, користуючись таким правилом: невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.

Наприклад, покладемо в табл.2.4 $\alpha_1 = 0$. Із базисних клітинок A_1B_2 і A_1B_5 знаходимо β_2 і β_5 як різницю між вартістю і $\alpha_1 = 0$. У стовпчику B_5 є ще одна базисна клітинка A_2B_5, тому $\alpha_2 = 3 - 4 = -1$; із клітинок A_2B_1 аналогічно знаходимо β_1, β_4 і т.д. Проілюструємо цей метод за допомогою табл.5.

План не є оптимальним, тому що є від'ємні значення γ_{ij} у клітинках A_2B_1, A_3B_1, A_3B_3.

Таблиця 5

α_i

	4 22	1 38	3	4	4	0
	2	3 7	2	2 20	3 8	2
	3	5	2	4 10	4 30	4
β_j	4	1	0	0	0	

8.2.4 Пошук опорних розв'язків за допомогою иклу перерахунку

Із табл.5 випливає, що план неоптимальний, оскільки є від'ємні коефіцієнти γ_{ij} (γ_{21}, γ_{31}, γ_{33}), тому необхідно вказати способи переходу до наступного опорного плану таким чином, щоб значення цільової функції мінімізувалось. Вкажемо метод, який дає змогу це зробити.

Означення. *Циклом* в матриці будемо називати *замкнену ламану лінію*, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпчику.

Можливі цикли, які схематично зображені на рис. 1.

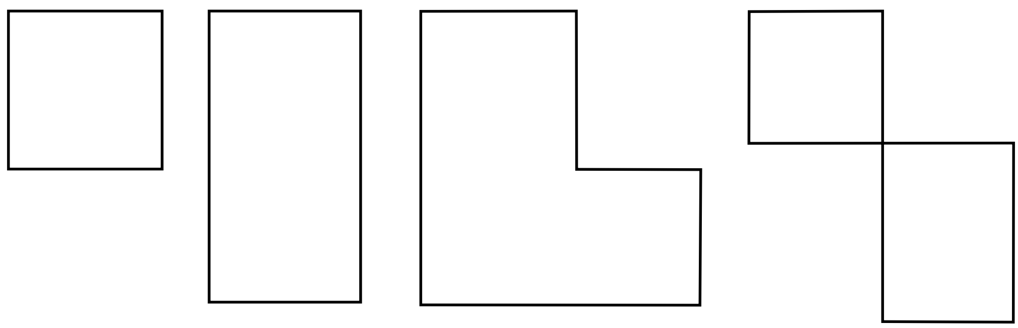


Рис.1

Перпендикулярні ламані циклу в матриці можуть перетинатися, а точки перетину не будуть вершинами циклу.

Означення. Вершини одного і того самого відрізку циклу будемо називати *сусідніми*. Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки («+», «–»), називають *означеним***.**

Означення. Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші в базисних, називають *циклом перерахунку.*

Наприклад, в табл.5 для клітинки A_3B_1 цикл перерахунку зображено на рис. 2.

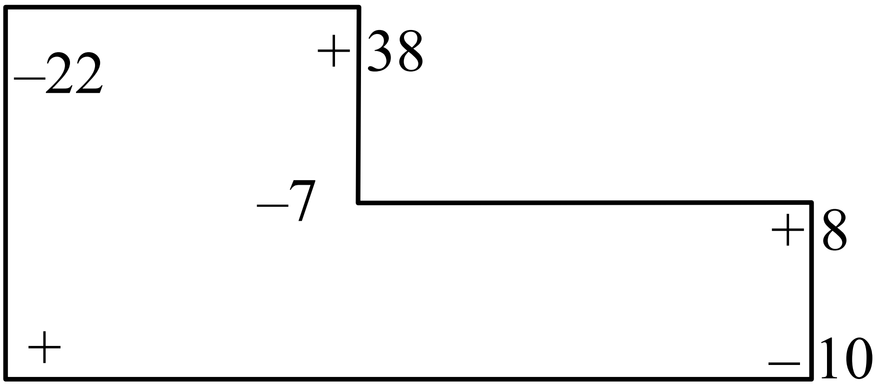


Рис. 2

Домовимося у вільній клітинці у відповідність ставити знак «+».

Означення. *Зсувом по циклу перерахунку* на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ, а у від'ємних віднімається.

Теорема. Зсув за означеним циклом в матриці перевезень перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший цієї самої задачі.

Теорема. Для будь-якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

За допомогою зсуву за циклом перерахунку можна перейти до нового опорного плану, в якому значення цільової функції буде меншим, ніж у попередньому. Проілюструємо це за допомогою рис. 3:

θ = min (22; 7; 10) = 7.

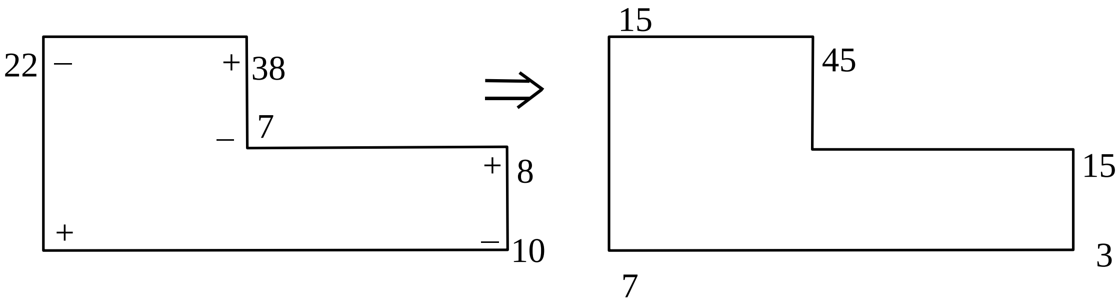


Рис. 3

Оберемо у від'ємних вершинах базисне значення min (22; 7; 10) = 7 і зробимо зсув на цю величину. Для того, щоб число базисних клітинок не змінилося, клітинку, на значення якої здійснюємо зсув, зробимо вільною. Додамо в додатних вершинах циклу (рис. 3) число 7, а у від'ємних віднімемо 7. В результаті дістанемо опорний план (табл.6).

Таблиця 6

4 15	1 45	3	4	4
2	3	2 20	2 15	3
3	5	2	4 3	4 30

Зауваження. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці залишаються без змін

Зауваження. У вироджених задачах часто зсув треба робити на число 0, яке не змінює базисних значень.

Тоді цей нуль переводять у вільну клітинку циклу перерахунку, залишаючи попередню вільною

За методом потенціалів перевіряємо опорний план на оптимальність.

Якщо розв'язок оптимальний, то обчислюємо мінімальне значення функції, а якщо ні, то знову будуємо цикл перерахунку і за допомогою зсуву переходимо до наступного опорного плану. Процес продовжують доти, доки розв'язок не стане оптимальним.

8.2.5 Транспортна задача з неправильним балансом

На практиці транспортні задачі, в яких загальна сума запасів не дорівнює загальній сумі потреб, називають транспортними задачами з неправильним балансом (іноді їх називають відкритими).

Розв'язують такі задачі розподільчим методом, зводячи їх попередньо до відповідної задачі з правильним балансом.

Для цього вводять фіктивний пункт призначення чи відправлення в залежності від дефіциту потреб чи запасів.

Вартості у фіктивних пунктах вважають рівними нулю (щоб не змінювалась загальна вартість перевезень).

Приклад. Нехай транспортну задачу задано матрицею перевезень

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

і запасами та потребами відповідно

$$a_i = (60, 40), \quad b_j = (20, 30, 45, 15).$$

Загальні суми запасів 60 + 40 = 100 і потреб 20 + 30 + 45 + 15 = 110 різні, тому треба ввести фіктивний пункт постачання із запасами, що дорівнюють різниці 110 – 100 = 10, і нульовими вартостями.

Зауваження. При розв'язуванні транспортних задач з неправильним балансом доцільно будувати таблиці дещо в іншій формі (табл. 7).

Таблиця 7

a_i \ b_j	20	30	45	15	α
60	3 —	4 30	6 30	7 —	–2
40	2 20	5 —	8 5	1 15	0
10	0 —	0 —	0 10	0 —	–8
β	2	6	8	1	

Знайдемо початковий опорний план методом найменшої вартості. При цьому у розрахунок фіктивний пункт не враховуватимемо, тому що всі вартості в ньому найменші (нулі), а на загальну вартість вони не впливають. Остачу після заповнення основних клітинок заносимо до відповідних клітинок фіктивного пункту. Для наочності в пунктах, де використані всі запаси або потреби, вільні клітинки, що залишилися, позначаємо знаком «—». У нашому прикладі в кінці непозначеною залишилася клітинка A_3B_3, в якій розміщуємо залишок 10 од. Розв'язок, знайдений методом найменшої вартості, не є оптимальним, причому умова оптимальності порушується лише для клітинки A_2B_2: $\gamma_{22} = 5 - (6 + 0) = -1$. Будуємо для цієї клітинки цикл перерахунку і в ньому робимо зсув на число $\theta = 5$ (цього досягнемо також, якщо замінимо неправильний квадрат $[A_2B_2]$ на правильний (зсувом на $\theta = 5$).

4 30	6 30
5 	8 5

$\Rightarrow$

4 25	6 35
5 5	8

Таблиця 8

20	30	45	15	
3 —	4 25	6 35	7 —	–1
2 20	5 5	8 —	1 15	0
0 —	0 —	0 10	0 —	–7
2	5	7	1	

В результаті зсуву дістанемо табл.8.

Легко перевірити, що опорний розв'язок табл.8 оптимальний,

$$x_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 35 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$z_{\min} = 4\times 25 + 6\times 36 + 2\times 20 + 1\times 15 = 365 \text{ од.}$$

Значення оптимального плану у фіктивному пункті можна тлумачити таким чином: пункт B_3 недоодержує 10 од. вантажу.

8.3 Задачі нелінійного програмування

8.3.1 Особливості задач нелінійного програмування

Зрозуміло, що ряд економічних задач допускають такі математичні моделі, до яких невідомі або деяка їх частина входять нелінійно. У загальній постановці задачу нелінійного програмування (НЛП) записують так:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{8.3.1}$$

$$(\max) z(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{8.3.2}$$

де $F_1(x)$, …, $F_n(x)$, $z(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – довільні функції. У конкретних задачах частина обмежень (або всі) можуть бути нерівностями. Крім того, на невідомі можуть накладатися умови невід'ємності і т.п. Однією з основних особливостей задач НЛП є можливість різними способами задавати цільову функцію. Друга особливість задач НЛП випливає із порушення властивості опуклості многокутника розв'язків задач ЛП.

Легко навести приклади задач, де область розв'язків задачі НЛП буде багатозв'язною.

8.3.2 Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

Розглянемо випадок двох змінних з обмеженнями-нерівностями.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 5$$

за таких обмежень: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Система обмежень лінійна, тому область розв'язків складається з многокутника розв'язків. Неважко помітити, що цільову функцію можна записати у вигляді: $z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$.

Отже z є квадратом радіуса кола. При фіксованому z маємо коло з центром у точці $C(1,2)$, а найбільше концентричне коло буде проходити через точку В(6,0) многокутника розв'язків. Тому

$$z_{\min} = (6-1)^2 + (0-2)^2 = 29.$$

Аналогічно: $z_{\max} = (1-1)^2 + (2-2)^2 = 0..$

В даному випадку найменше значення функції міститься в області розв'язків, а найбільше — на її границі (рис. 4.). Якщо в цьому ж прикладі розглянути функцію:

$$z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2,$$

то найменше значення буде в точці C, а найбільше в точці O (рис.5).

$$z_{\max} = (4-0)^2 + (4-0)^2 = 32. \; z_{\min} = \left(\frac{4+4-6}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2.$$

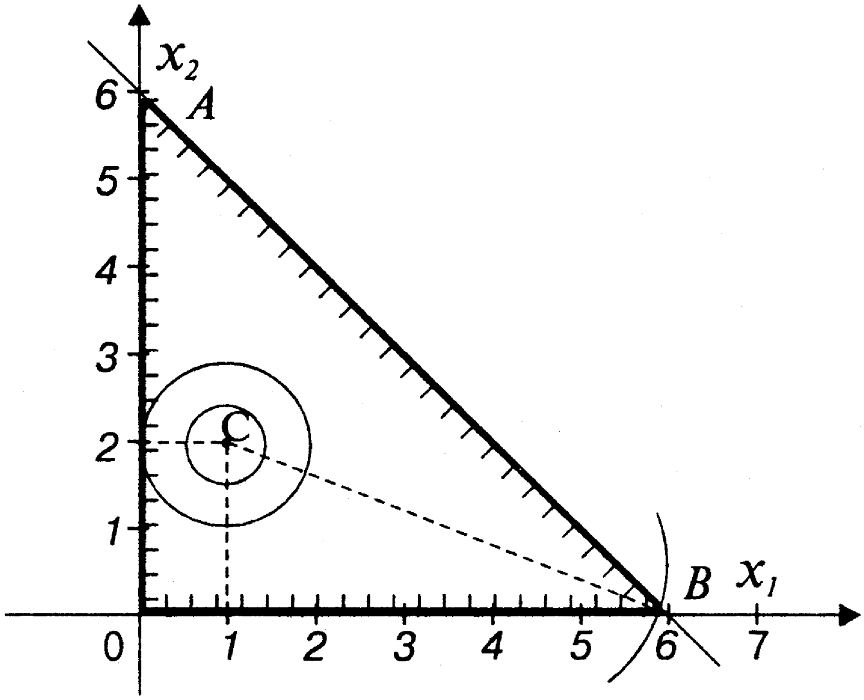


Рис. 4

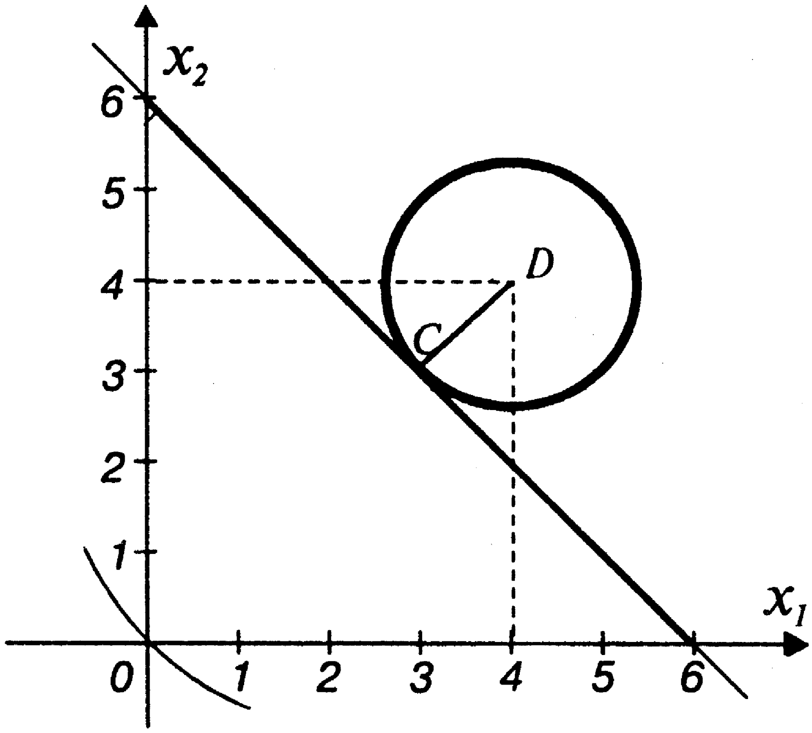


Рис. 5

8.3.3 Задачі нелінійного програмування без обмежень. Необхідні та достатні умови оптимальності точки

Вивчення загальної задачі НЛП (8.3.1), (8.3.2) почнемо з найпростішого випадку, коли на змінні функції (8.3.2) не накладено жодних обмежень. Таку задачу називають задачею без обмежень.

Покажемо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Відомо, що у випадку однієї змінною в точках, де функція досягає найбільшого чи найменшого значення, перша похідна перетворюється в нуль. Для функції багатьох змінних перших похідних більше, ніж одна. Їх можна брати за будь-яким аргументом.

Означення. Частинною похідною першого порядку $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{x_i}}$ називають похідну функції $z(x_1 \ \ldots, \ x_n)$ по x_i, яку обчислюють у припущенні, що всі інші змінні величини є сталими.

Приклад. Частинні похідні першого порядку функції $z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - -2x_2^2 + 3$ мають вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2 - 2.$$

Означення. Вектор, складений з частинних похідних функції $z(x)$ першого порядку, називають градієнтом функції (позначають ∇ — “набла” або “grad”).

$$\nabla = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right).$$

У курсі диференціального числення зазначається, що вектор-градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Очевидно, що коли в деякій точці x_0 значення функції оптимальне, то воно буде оптимальним і по будь-якій змінній, а для них, як відомо з курсу диференціального числення,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Отже, необхідною умовою оптимальності точки x_0 є така:

$$\operatorname{grad} z(x_0) = 0. \tag{8.3.3}$$

або у розгорнутій формі —

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

Рівності (8.3.3), (8.3.4) допускають наочну фізичну інтерпретацію: швидкість зростання функції в точці дорівнює нулю і її можна назвати точкою спокою.

Домовимося, розв'язки системи (8.3.4) позначати через x^* (серед них можуть бути і точки, які не є оптимальними). Щоб визначити характер оптимальності точки x недостатньо частинних похідних першого порядку, необхідно обчислити частинні похідні вищих порядків.

Введемо матрицю, складену з частинних похідних другого порядку — матрицю Гессе.

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_n} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \tag{8.3.5}$$

Найпростішими умовами додатної (від'ємної) визначеності матриці є умови Рауса–Гурвіца. Додатна (від'ємна) визначеність матриці є узагальненням додатного (від'ємного) числа на більш складні математичні об'єкти.

Для матриці $H(x)$ випишемо головні мінори.

$$M_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \; M_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

$$\ldots$$

$$Mn = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Умови Рауса-Гурвіца додатної визначеності матриці $H(x)$ (min) через головні мінори запишемо у вигляді:

$$M_1 > 0,\ M_2 > 0,\ \ldots,\ M_n > 0. \tag{8.3.6}$$

Умови max мають вигляд

$$M_1 < 0,\ M_2 > 0,\ M_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n M_n \ge 0. \tag{8.3.7}$$

Приклад. Найти оптимальні значення функції

$$z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 0, \\ 2x_2 - 2 = 0, \end{cases} \qquad x^* = (-1,1).$$

Матриця $H(x)$ для даної функції має вигляд

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_1 = 2 > 0, \ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, в точці (–1,1) маємо мінімум

$$z_{\min} = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1.$$

8.3.4 Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями

Розглянемо загальну задачу НЛП

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \qquad (8.3.8)$$

$$(\max) \qquad z(x_1, \ldots, x_n). \qquad (8.3.9)$$

в якій функції $F_i(x)$ ($i = 1, \ldots, m$), $z(x)$ два рази неперервно-диференційовані. Для визначення її оптимальних точок користуються функцією Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = z(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x), \qquad (8.3.10)$$

яка дає змогу задачу з обмеженнями звести до задачі без обмежень. Очевидно, що на обмеженнях (8.3.8)

$$L(x,\lambda) = z(x) \quad \text{і} \quad z_{\max}(x^*) = L_{\max}(x^*,\lambda).$$

Необхідні умови оптимальності точки x^* функції $L(x,\lambda)$ мають вигляд

$$\operatorname{grad} L(x, \lambda) = 0, \qquad (8.3.11)$$

або в розгорнутій формі —

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = \dfrac{\partial z}{\partial x_n} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} = F_1(x) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_m} = F_m(x) = 0. \end{cases} \qquad (8.3.12)$$

Із системи $n + m$ рівнянь (8.3.12) випливає, що для її побудови достатньо взяти частинні похідні по x від функції Лагранжа, зрівняти їх з нулем і додати до них систему обмежень (8.3.8).

Характер оптимальності точки з'ясовують за допомогою достатніх умов. Застосовуємо їх лише до функції $z(x)$, оскільки $F_i(x^*) = 0$.

Приклад. Визначити оптимальні значення функції

$$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$$

при обмеженні: $x_1 + x_2 = 2$.

Перед тим, як будувати функцію Лагранжа, обмеження записуємо таким чином, щоб у правій частині був нуль:

$$x_1 + x_2 - 2 = 0,$$

$$L(x,\lambda) = 2x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + x_1 + 2 + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda.$$

Складаємо систему для відшукання точок, підозрілих на оптимальність

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Виключимо λ з перших двох рівнянь, в результаті чого дістанемо

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 4 = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Точка $x^* = (-1{,}3)$ є підозрілою на оптимальність. Для визначення типу оптимальності обчислюємо матрицю $H(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 1;$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$M_1 = 4 > 0;$$

$$M_2 = 7 > 0.$$

Отже, в точці x^* маємо мінімум

$$z_{\min} = 2 \times (-1)^2 + (-1) \times 3 + 3^2 + 2 \times (-1) - 43 = -6.$$

Зауваження. Із наведених міркувань випливає, що при обчисленні координат оптимальної точки конкретне значення λ нас не цікавить. Отже, там, де це можливо, множники Лагранжа треба виключати, що дасть змогу знизити порядок системі рівнянь.

Цікаво порівняти дану задачу з аналогічною задачею без обмежень.

Система для знаходження мінімуму (а він буде існувати тому, що значення $H(x)$ не залежить від обмеження) має вигляд

$$\begin{matrix} 4x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^*(8/7, 18/7); \quad z(x^*) = -308/49 = -6{,}29.$$

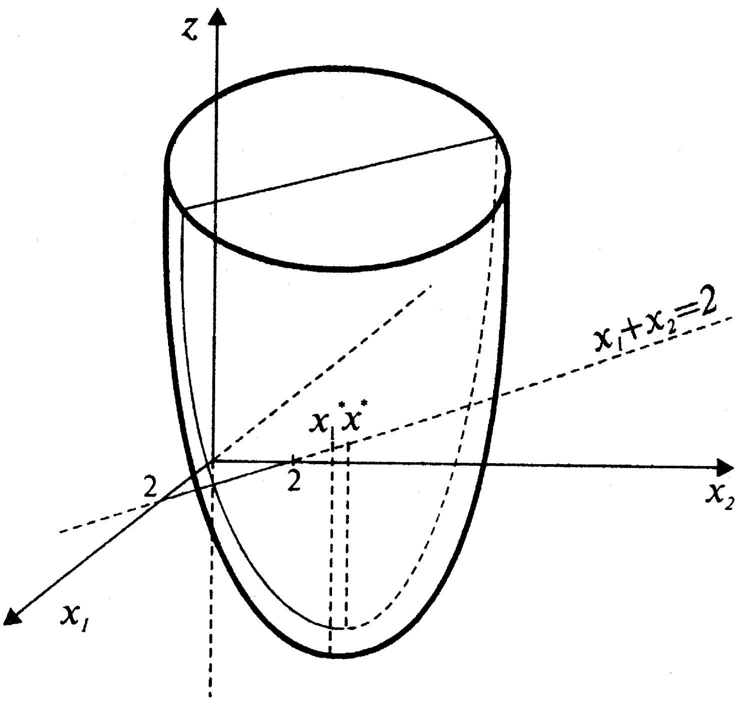


Рис. 6

Із рис. 6 випливає, що геометрично задача без обмежень зображується параболоїдом, площина $x_1 + x_2 = 2$ відтинає його частину — параболу. Природно, що мінімум задачі з обмеженнями не менший, ніж глобальний мінімум функції.

Обмеженість класу задач, в яких вдається знайти оптимальні значення функції, ті самі, що й для однієї змінної: точка має бути внутрішньою.

8.3.5 Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Умови Куна-Таккера

На практиці частіше зустрічаються задачі, в яких оптимальні точки не обов’язково містяться всередині області розв’язків. Як правило, це буде тоді, коли в обмеженнях трапляються нерівності. Наприклад, якщо на змінні задачі накладені умови невід’ємності.

Спочатку розглянемо задачу НЛП, коли всі обмеження являють собою нерівності:

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n)\geq 0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n)\geq 0, \end{cases} \tag{8.3.13}$$

$$(\max) \quad z(x_1,\ldots,x_n). \tag{8.3.14}$$

На область розв’язків задачі (8.3.13), (8.3.14) накладається умова регулярності, яка виконується, коли її границя складається, наприклад, з диференційованих функцій. Випадки, коли порушується ця умова, являють собою спеціальні математичні побудови, і їх існування на практиці є мало ймовірним. Полягає ця умова в тому, що існує такий вектор y і точка границі області, для яких

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} y_i < 0.$$

В результаті цього порушується замкненість області.

Для визначення оптимальних точок задачі (8.3.13), (8.3.14) користуються теоремою Куна-Таккера ([1], [3]).

Теорема. Нехай x^* - оптимальна точка задачі (8.3.13), (8.3.14) регулярної області. Тоді

1) x^* — допустима точка, існують множники $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1,\ldots,m$);

$$2)\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, m); \qquad (8.3.15)$$

$$3)\ \nabla(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x_i) = 0. \qquad (8.3.16)$$

Перша умова теореми є очевидною. Друга стверджує, що коли точка x^* не лежить на границі i-го обмеження і $g_i(x^*) > 0$, то відповідний множник Лагранжа дорівнює нулю. Третя умова теореми — рівність нулю вектора-градієнта функції Лагранжа задачі (8.3.13), (8.3.14). У розгорнутому вигляді умови (8.3.16) є системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_i} = 0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Якщо в задачі є мішані обмеження (частина рівнянь і частина нерівностей), то у формулюванні теореми змінюється лише умова 2). Для обмежень нерівностей $\lambda_i \geq 0$, для рівнянь λ_i може мати довільний знак, причому

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m). \qquad (8.3.17)$$

Коли функція $f(x)$ вигнута, а система обмежень утворює опуклу область, умови Куна-Таккера стають не тільки необхідними, але й достатніми.

Зауваження. Зрозуміло, що умова (8.3.15) для обмежень-рівнянь є тривіальною

$$g_i(x^*) = 0.$$

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається вигнутою, якщо

$$f\left[\tau x^{(1)} + (1-\tau)x^{(2)}\right] \geq \tau f\left(x^{(1)}\right) + (1-\tau) f\left(x^{(2)}\right),$$

$0 \leq \tau \leq 1.$

Графічно це зображено на рис. 7.

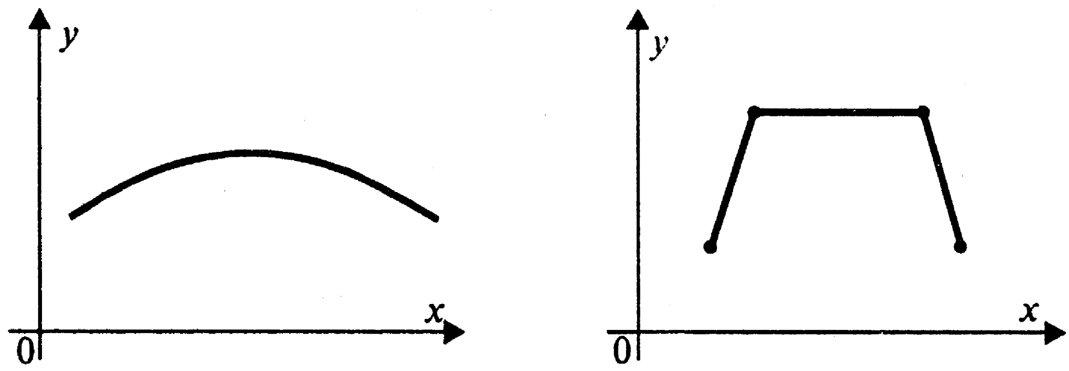


Рис. 7

Для опуклості області достатньо, щоб функції $g_i(x)$ ($I = 1, \ldots, m$) були вигнутими.

8.3.6 Сідлові точки та їх зв'язок з функцією Лагранжа

Попередні параграфи підкреслюють важливу роль функції Лагранжа в задачах НЛП. Фактично вона залежить від змінних двох видів:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{і} \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

Виявляється, що задача НЛП має розв'язок в тих випадках, коли функція Лагранжа має сідлову точку.

Означення. Нехай $x \in X$, $y \in Y$. Кажуть, що функція $K(x,y)$ має сідлову точку (x_0,y_0), якщо

$$K(x,y_0) \leq K(x_0,y_0) \leq K(x_0,y) \qquad (8.3.18)$$

Функція, яка міститься в лівій частині нерівності, залежить лише від x, а в другій — від y. У неперервних функціях

$$K_{\max}(x, y_0) = K_{\min}(x_0, y) = K(x_0, y_0), \tag{8.3.19}$$

$$x \in X, y \in Y,$$

тобто оптимальні значення функцій збігаються. Графічно для двох змінних сідлову точку можна подати так, як це зображено на рис. 8.

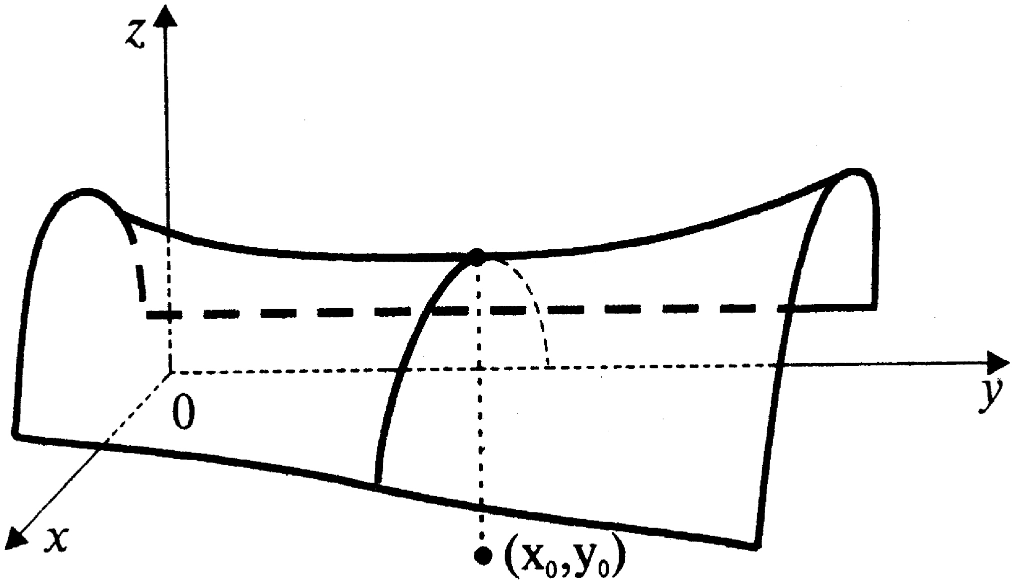


Рис. 8

Для функції Лагранжа замість y необхідно підставити λ. Введемо функцію

$$L_*(x) = \min_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda), \tag{8.3.20}$$

де Λ — область зміни $\lambda_i (i = 1, \ldots, m)$. Для задачі (8.3.13), (8.3.14) Λ складається з обмежень $\lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m)$;

$$L^*(\lambda) = \max_{x \in X} L(x, \lambda), \tag{8.3.21}$$

X — складають обмеження (8.3.13)

$$(g_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m)).$$

У термінах функцій $L_*(x)$ і $L^*(\lambda)$ пряму задачу формулюють у вигляді: знайти $\max_{x \in X} L_*(x)$ серед таких x, що

$$g_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Двоїсту задачу з вигнутими функціями $f(x)$, $g_i(x)$ ($i = 1, \ldots, n$) запишемо у вигляді: знайти

$$\min\left[f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) \right]$$

при

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, m).$$

Для вихідної і двоїстої задач можна сформулювати умови Куна-Таккера, суть яких зводиться до такого твердження: для того щоб задача НЛП мала розв’язок, необхідно і достатньо, щоб відповідна функція Лагранжа мала сідлову точку.

8.4 Динамічне програмування

8.4.1 Основні ідеї обчислювального методу динамічного програмування

У *динамічному програмуванні* розглядаються методи, що дозволяють шляхом поетапної оптимізації отримати загальний (результуючий) оптимум.

Звичайно методами динамічного програмування оптимізують роботу деяких *керованих систем*, ефект якої оцінюється *адитивною*, або *мультиплікативною*, цільовою функцією. **Адитивною** називається така функція декількох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значення якої обчислюється як сума деяких функцій f_j, що залежать тільки від однієї змінної x_j:

$$f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{8.4.1}$$

Доданки адитивної цільової функції відповідають ефекту рішень, що приймаються на окремих етапах керованого процесу. Аналогічно, **мультиплікативна** функція розпадається на добуток додатних функцій різних змінних:

$$f(x_2, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{8.4.2}$$

Оскільки логарифм функції типу (8.4.2) є адитивною функцією, досить розглянути функції вигляду (8.4.1).

Викладемо суть обчислювального методу *динамічного програмування* на прикладі задачі оптимізації

$$f(x_2, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max \tag{8.4.3}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b,\, a_j > 0,\, x_j \ge 0. \tag{8.4.4}$$

Зазначимо, що про лінійність і диференційованість функцій $f_j(x_i)$ не робиться ніяких припущень, тому застосування класичних методів оптимізації (наприклад, методу Лагранжа) для розв'язання задачі (8.4.3)-(8.4.4) або проблематично, або просто неможливо.

Змістовно задача (8.4.3)-(8.4.4) може бути інтерпретована як проблема оптимального вкладення деяких ресурсів j коефіцієнтів, що приводяться до єдиної розмірності (наприклад, грошей) за допомогою a_j, в різні активи (інвестиційні проекти, підприємства і т.п.), що характеризуються функціями прибутку f_j, тобто такого розподілу обмеженого об'єму ресурсу *(b), який* максимізує сумарний прибуток. Уявимо ситуацію, коли вона вирішується послідовно для кожного активу. Якщо на першому кроці прийнято рішення про вкладення в n-й *актив* x_n одиниць, то на інших кроках ми зможемо розподілити $b - a_n x_n$ *одиниць* ресурсу. Абстрагуючись від міркувань, на основі яких приймалося рішення на першому кроці (припустимо, ми з будь-яких причин не могли на нього вплинути), буде цілком природним вчинити так, щоб на *кроках,* що залишилися *розподіл поточного об'єму ресурсу стався оптимально, що* рівнозначно розв'язанню задачі

$$\max \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \tag{8.4.5}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le b - a_n x_n,\; a_j > 0,\; x_j \ge 0. \tag{8.4.6}$$

Очевидно, що максимальне значення (8.4.5) залежить від розміру залишку, що розподіляється, і якщо кількість ресурсів, що залишилася визначити через ξ, то величину (8.4.5) можна виразити як функцію від ξ:

$$\Lambda_{n-1}(\xi)=\max_{x_1,\dots,x_{n-1}\ \sum_{j=1}^{n-1}a_jx_j\le\xi}\ \sum_{j=1}^{n-1}f_j(x_j), \tag{8.4.7}$$

де індекс *n-1* вказує на кількість кроків, що залишилася. Тоді сумарний прибуток, що отримується як наслідок рішення, прийнятого на першому кроці, і оптимальних рішень, прийнятих на інших кроках, буде

$$\Omega_n(x_n)=f_n(x_n)+\Lambda_{n-1}(b-a_nx_x). \tag{8.4.8}$$

Якби була можливість впливати на x_n, то ми для отримання максимального прибутку повинні були б максимізувати Ω_n по змінної x_n, тобто знайти $\Lambda_{n-1}(b)$ і фактично розв'язати задачу:

$$\max_{0\le x_n\le\frac{b}{a_n}}\Omega_n(x_n)=\max_{0\le x_n\le\frac{b}{a_n}}\{f_n(x_n)+\Lambda_{n-1}(b-a_nx_n)\}=\Lambda_n(b). \tag{8.4.9}$$

В результаті ми отримуємо вираз для значення цільової функції задачі при оптимальному поетапному процесі прийняття рішень про розподіл ресурсу. Воно внаслідок побудови даного процесу дорівнює глобальному оптимуму цільової функції

$$\max_{x_1,\dots,x_n}\left\{\sum_{j=1}^{n}f_j(s_j)\right\}=\Lambda_n(b), \tag{8.4.10}$$

тобто значенню цільової функції при одномоментному розподілі ресурсу.

Якщо у виразі (8.4.9) замінити значення *b* на ξ і *n* на *k*, то його можна розглядати як *рекурентну формулу*, що дозволяє послідовно обчислювати оптимальні значення цільової функції при розподілі об'єму ресурсу ξ за *k* кроків:

$$\Lambda_k(\xi)=\max_{0\le x_k\le\frac{\xi}{a_k}}\{f_k(x_k)+\Lambda_{k-1}(\xi-a_kx_k)\}. \tag{8.4.11}$$

Значення змінної x_k, при якому досягається максимум, позначимо $\hat{x}_k(\xi)$.

При $k = 1$ формула (8.4.11) виглядає

$$\Lambda_k(\xi)=\max_{0\le x_1\le\frac{\xi}{a_1}}f_1(x_1),$$

тобто допускає безпосереднє обчислення функцій $\Lambda_1(\xi)$ і $\hat{x}_k(\xi)$.

Скориставшись (8.4.12) як базою рекурсії, можна з допомогою (8.4.11) послідовно обчислити $\Lambda_k(\xi)$ і $\hat{x}_k(\xi)$, $k \in 1:n$. Поклавши на останньому кроці $\xi = b$, в силу (8.4.9), знайдемо глобальний максимум функції (8.4.3), який дорівнює $\Lambda_n(b)$, і компоненту оптимального плану $x_n^* = \hat{x}_n(b)$. Отримана компонента дозволяє обчислити нерозподілений залишок на наступному кроці при оптимальному плануванні: $\xi_{n-1} = b - a_n x_n^*$, і, в свою чергу, знайти $x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}(\xi_{n-1})$. Внаслідок подібних обчислень послідовно будуть знайдені всі компоненти оптимального плану.

Таким чином, динамічне програмування являє собою цілеспрямований перебір варіантів, який призводить до знаходження глобального максимума. Рівняння (8.4.11), яке виражає оптимальне рішення на *k-му* кроці через рішення, прийняті на попередніх кроках, називається *основним рекуррентним співвідношенням динамічного програмування*. У той же час потрібно помітити, що описана схема рішення при загальній постановці задачі має чисто теоретичне значення, оскільки замикає обчислювальний процес на побудову функцій $\Lambda_k(\xi)(k \in 1:n)$, тобто зводить вихідну задачу (8.4.3)-(8.4.4) до іншої вельми складної проблеми. Однак при певних умовах застосування рекурентних співвідношень може виявитися корисним. Насамперед це відноситься до задач, які допускають табличне завдання функцій $\Lambda_k(\xi)$.

8.4.2 Принцип оптимальності Беллмана

Ще раз підкреслимо, що значення підходу, що реалізовується в динамічному програмуванні, полягає в *заміні розв'язання вихідної багатомірної задачі послідовністю задач меншої розмірності*.

Сформулюємо основні вимоги до задач, виконання яких дозволяє застосувати даний підхід:

1) об'єктом дослідження повинна служити *керована система (*об'єкт) із заданими допустимими станами *і* допустимими управліннями*;*
2) задача повинна дозволяти інтерпретацію як, багатокроковий процес, кожний крок якого складається з прийняття *рішення* про вибір одного з допустимих управлінь, що призводять до *зміни стану* системи;

3) задача не повинна залежати від кількості кроків і бути визначеною на кожному з них;
4) стан системи на кожному кроці повинен описуватися однаковим (по складу) набором параметрів;
5) подальший стан, в якому з'являється система після вибору рішення на k-му кроці, залежить тільки від даного рішення і початкового стану на початок k-го кроку. Дана властивість є основною з точки зору ідеології динамічного програмування і називається *відсутністю післядії.*

Розглянемо питання застосування моделі динамічного програмування в узагальненому вигляді.

Нехай стоїть задача управління деяким абстрактним *об'єктом,* який може перебувати в різних станах. Поточний стан об'єкта ототожнюється з деяким набором параметрів, що позначаються надалі ξ і іменуються *вектором стану*. Передбачається що задано множину Ξ всіх можливих станів. Для об'єкта визначено також множину *допустимих управлінь* (керуючих впливів X), яку, не поменшуючи спільності, можна вважати числовою множиною. Керуючі впливи можуть здійснюватися в дискретні моменти часу k ($k \in 1{:}n$), причому управлінське *рішення* полягає у виборі одного з управлінь $x_k \in X$.

Планом задачі або *стратегією управління* називається вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, компонентами якого служать управління, вибрані на кожному кроці процесу. У зв'язку з передбачуваною *відсутністю післядії* між кожними двома послідовними станами об'єкта ξ_k і ξ_{k+1} існує відома функціональна залежність, що включає також вибране управління: $\xi_{k+1} = \varphi(x_k, \xi_k),\ k \in 1{:}\, n-1$. Тим самим задання початкового стану об'єкта $\xi_1 \in \Xi$ і вибір плану x однозначно визначають *траєкторію поведінки* об'єкта, як це показано на *рис. 9.*

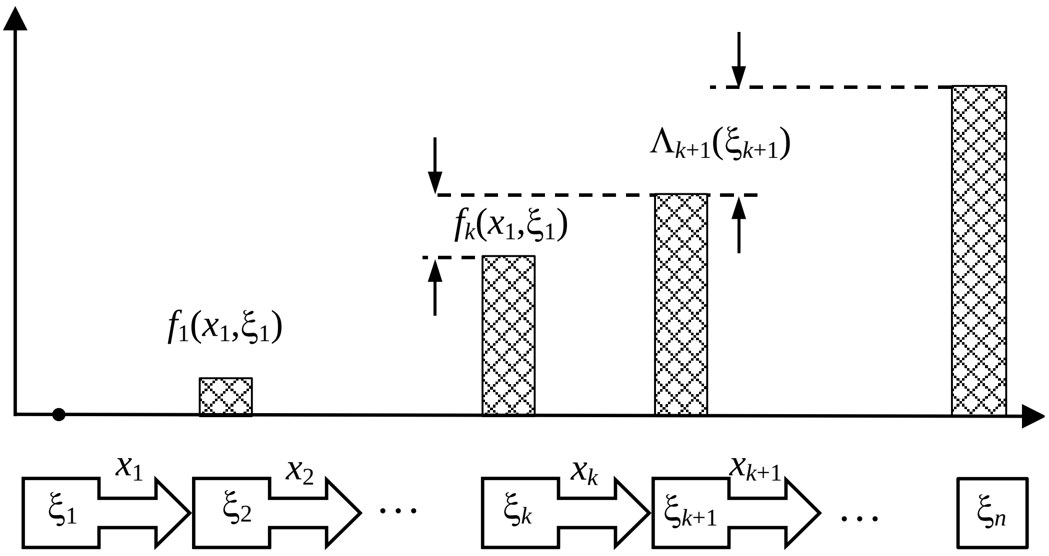


Рис. 9

Ефективність управління на кожному кроці k залежить від поточного стану ξ_k, вибраного управління x_k і кількісно оцінюється за допомогою функцій $f_k(x_k, \xi_k)$, що є складовими адитивної цільової функції, *яка характеризує загальну* ефективність управління об'єктом.

Зазначимо, що у визначення функції включається область допустимих значень x_k, і ця область, як правило, залежить від поточного стану ξ_k.

Оптимальне управління, при заданому початковому *стані* ξ_1, *зводиться* до вибору такого оптимального плану x^*, при якому досягається максимум суми значень f_k на відповідній *траєкторії.*

Основний принцип динамічного програмування полягає в тому, що на кожному кроці потрібно прагнути не до ізольованої оптимізації функції $f_k(x_k, \xi_k)$, а вибирати оптимальне управління x_k^* в припущенні про оптимальність всіх подальших кроків.

Формально вказаний принцип реалізовується шляхом відшукання на кожному кроці k *умовних оптимальних управлінь*, що забезпечують найбільшу сумарну ефективність, починаючи з цього кроку, в припущенні, що поточним є стан ξ.

Позначимо $\Lambda_k(\xi)$ максимальне значення суми функцій f_k протягом кроків від k до n (що отримується при *оптимальному* управлінні на даному відрізку процесу), при умові, що об'єкт на початку кроку k знаходиться в стані ξ. Тоді функції $\Lambda_k(\xi)$ повинні задовольняти рекурентному співвідношенню:

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{x_k} \{f_k(x_k, \xi) + \Lambda_{k+1}(\xi_{k+1})\},\ k \in 1:(n-1), \qquad (8.4.12)$$

де $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$.

Співвідношення (8.4.12) називають *основним рекурентним співвідношенням* динамічного програмування. Воно реалізовує базовий принцип динамічного програмування, відомий також як *принцип оптимальності Беллмана.* Оптимальна стратегія управління повинна задовольняти наступній умові: які б не були початковий стан ξ_k k-му кроці і обране на цьому кроці управління x_k, подальші управління (управлінські рішення) повинні бути оптимальними по відношенню до стану $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$, що виходить внаслідок рішення, прийнятого на k-му кроці.

Основне співвідношення (8.4.12) дозволяє знайти функції $\Lambda_k(\xi)$ тільки в поєднанні з початковою умовою, якою в нашому випадку є рівність

$$\Lambda_n(\xi) = \max_{x_n}\{f_n(x_n, \xi)\}.$$

8.5 Теорія ігор

8.5.1 Предмет теорії ігор. Термінологія і класифікація ігор

Одним з основних питань в задачах з колективним вибором рішень є *питання про визначення оптимальності*, тобто питання, які рішення потрібно визнавати найкращими в ситуації оптимізації по декількох критеріях, що відображають різні інтереси. Багато які методи розв'язання проблем теорії гри засновані на зведенні їх до задач математичного програмування. На найбільш простих з них ми зупинимося в цьому розділі.

Термін «*гра*» застосовується для позначення сукупності правил і угод, якими керуються суб'єкти, поведінку яких ми вивчаємо. Кожний такий суб'єкт *k*, де $k \in 1{:}\ K$, або *гравець*, характеризується наявністю індивідуальної системи цільових установок і *стратегій* $s_1^k, s_2^k, \ldots, s_{m_k}^k$, тобто можливих варіантів дій в грі.

Досить поширений спосіб математичного опису гри заснований на задані функцій $f_k\left(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \ldots, s_{i_k}^k, \ldots, s_{i_K}^K\right)$, кожна з яких визначає результат (платіж, виграш), що отримується *k*-м гравцем в залежності від набору стратегій $S = \left(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \ldots, s_{i_k}^k, \ldots, s_{i_K}^K\right)$, застосованого всіма учасниками гри. Функції $f_k, k \in 1{:}\ K$ також називають *функціями виграшу*, або платіжними функціями. У тому випадку, якщо для будь-яких S

$$\sum_{k=1}^{K} f_k(S)=0,$$

гра називається грою з нульовою сумою. Гру з двома учасниками і нульовою сумою називають *антагоністичною*. Антагоністична гра, тобто гра, в якій виграш одного учасника дорівнює програшу іншого, в силу відносно простої постановки задачі є найбільш вивченим розділом теорії гри. Однак зміст теорії гри, безумовно, не вичерпується ними. У класифікації ігрових моделей виділяють гру з кінцевими і нескінченними наборами стратегій у гравців, виділяють гру по можливих кількостях ходів у учасників. Також ігри діляться на *некооперативні* і *кооперативні*, тобто ті, в яких функції виграшу учасників залежать від коаліцій, що утворюються ними. Крім цього ігра можна розрізнювати по обсягу інформації, що є у гравців відносно минулих ходів. У зв'язку з цим вони діляться на гру з *повною* і *неповною інформацією*.

8.5.2 Матрична гра і поняття сідлової точки

Розглянемо більш детально антагоністичні ігри і їх основні властивості. Зручним способом завдання гри двох учасників з нульовою сумою є *платіжна матриця*. Звідси, до речі, з’являється ще одна з назва - *матрична гра*. Кожний елемент платіжної матриці a_{ij} містить числове значення *виграшу гравця* I (програшу гравця II), якщо перший застосовує стратегію i, а другий – стратегію j. Терміни *виграш і програш* потрібно розуміти в широкому значенні, так як вони можуть приймати негативні значення і з життєвої точки зору означати протилежне. Нетривіальність задачі передусім полягає в тому, що кожний з гравців робить свій вибір, не знаючи про вибір іншого, що істотно ускладнює процес оптимізації вибираної стратегії.

Класичним прикладом антагоністичної гри є гра з двома учасниками, що загадують незалежно один від одного числа. Передбачається, що якщо їх сума виявляється парною, то виграш, рівний 1, досягається першому гравцеві, а якщо непарної, то другому. Поклавши, що для обох гравців загадання непарного числа є першою стратегією, а парного - другою, можемо записати платіжну матрицю даної гри:

$$\begin{array}{c|cc} & н/ч & ч \\ \hline н/ч & 1 & -1 \\ ч & -1 & 1 \end{array} \qquad (8.5.1)$$

Рядки матриці (8.5.1) відповідають стратегіям гравця I, стовпці - стратегіям гравця II, а її елементи - результатам першого гравця. Також з визначення гри маємо, що елементи даної матриці, взяті із зворотним знаком, відповідають виграшам другого гравця.

Більш складна і змістовна платіжна матриця може бути отримана, якщо дещо модифікувати запропоновану гру. Припустимо, що обидва учасника мають право загадувати числа від 1 до 4, що складає їх відповідні стратегії. У випадку, якщо результат складання задуманих чисел буде парним, то другий гравець, виплачує першому суму, що вийшла, а якщо непарним, то перший - другому. Запишемо платіжну матрицю для такої гри:

$$A = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 9 & -7 \\ 5 & 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}}_{\begin{matrix} 1 & \ \ 2 & \ \ 3 & \ \ 4 \end{matrix}} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \qquad (8.5.2)$$

Деяка умовність і штучність в постановці проблеми не повинні в цьому випадку нас бентежити, оскільки до подібної форми може бути зведена модель, що описує, наприклад, змагання двох фірм за ринок збуту продукції, що знову відкрився і т.п.

Як вже зазначалося, найважливішим в теорії гри є питання про оптимальність рішення (вибору стратегії) для кожного з гравців. Проаналізуємо з цієї точки зору деяку матричну гру, для якої задана платіжна матриця $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$. При виборі гравцем I стратегії i його гарантований прибуток незалежно від дій гравця II складе min a_{ij}. Оскільки він може вибирати i самостійно, то доцільно цей вибір зробити таким, щоб він при будь-якій стратегії противника максимізував величину гарантованого прибутку, тобто забезпечував отримання $\min_j \max_j a_{i,j}$. Такий принцип вибору стратегії отримав назву «принцип максиміна». З іншого боку, аналогічні *міркування можуть* бути проведені з приводу дій другого гравця. Його найбільший програш при виборі стратегії j складе,

$\max\limits_i a_{i,j}$, і, отже, йому потрібно вибирати стратегію так, щоб мінімізувати величину програшу при будь-яких діях суперника, тобто забезпечити $\min\limits_j (\max\limits_i a_{i,j})$. У цьому суть принципу мінімакса.

Можна довести справедливість наступного співвідношення:

$$\max_i \min_j a_{i,j} \le \min_j \max_i a_{i,j}. \tag{8.5.3}$$

Однак очевидний інтерес представляє ситуація, при якій значення виграшу (платежу), що отримується гравцем I при виборі ним максимінної стратегії, дорівнює платежу (програшу) II-го гравця при мінімаксної стратегії

$$\max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}. \tag{8.5.4}$$

У цьому випадку кажуть, що гра має *сідлову точку.* Збіг значень гарантованих виграшів гравців при максимінній і мінімаксній стратегії означає можливість досягнення в грі деякого оптимального (стабільного) стану, від якого невигідно відхилятися жодному з учасників. Поняття «оптимальність» тут означає, що жоден розумний (обережний) гравець не прагне змінити свою стратегію, оскільки його противник, в принципі, зможе вибрати таку стратегію, яка дасть гірший для першого результат. Стратегії i^* і j^*, що створюють сідлову точку, називаються *оптимальними,* а значення $v = a_{i^*,j^*}$ називають *ціною гри*. Трійка *(i*, j*, v)* вважається *розв'язком матричної гри з сідловою точкою.*

Неважко помітити, що не всяка гра володіє сідловою точкою. Зокрема, як гра (8.5.1), так і гра (8.5.2) сідлової точки не мають. Прикладом гри, що має сідлову точку, є гра з платіжною матрицею (8.5.5).

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 & 17 \\ 8 & -3 & 2 & 11 \end{bmatrix}. \tag{8.5.5}$$

У даній матриці мінімальні (гарантовані) виграші першого гравця по рядках рівні 1, 5 і (- 3). Отже, його максимінному вибору буде відповідати стратегія 2, що гарантує виграш 5. Для другого гравця максимальні програші по стовпцях матриці становитимуть 8, 10, 5, 17, тому доцільно зупинитися на стратегії 3, при якій він програє тільки 5. Таким образом, друга стратегія першого гравця і третя стратегія другого утворять сідлову точку зі значенням 5, тобто для гри з матрицею (8.5.5) має рішення (2; 3; 5).

8.5.3 Змішані стратегії

Подальший розвиток теорії матричної гри засновується на дослідженні гри як деякого процесу, що повторюється. Дійсно, навряд чи можна дати змістовні рекомендації з такого питання, як слід чинити учасникам гри, що проводиться однократно і не має сідлової точки. У разі ж її багаторазових повторів природною і плідною представляється ідея *рандомизації* вибору стратегії гравцями, тобто внесення в процес вибору елемента випадковості. Дійсно, систематичне відхилення, наприклад, гравця I від максимінної стратегії з метою збільшення виграшу може бути зафіксовано другим гравцем і покарано. У той же час абсолютно хаотичний вибір стратегій не принесе в середньому найкращого результату.

Змішаною стратегією гравця I в грі з матрицею $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ називається впорядкований набір дійсних чисел $x_i, i\in 1:m$, що задовольняють умови

$$x_i \geq 0,\ i\in 1:m;\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \tag{8.5.6}$$

Числа інтерпретуються як імовірності застосування гравцем I стратегій 1, 2, …, *m*, які, на відміну від змішаних, також називають *чистими стратегіями*.

Аналогічно вводиться поняття змішаних стратегій гравця II які визначаються як набір чисел $y_i,\ j\in 1:n$, що задовольняють умовам

$$y_i \geq 0,\ j\in 1:n;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{8.5.7}$$

Тоді, якщо гравець I застосовує змішану стратегію $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а гравець II змішану стратегію $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *то* математичне очікування виграшу гравця I (програшу гравця II) визначається співвідношенням

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} s_i y_j\,. \tag{8.5.8}$$

Надалі через *X* будемо позначати множину допустимих змішаних стратегій гравця I, що визначається умовою (8.5.7), а через *Y* - що визначається умовою (8.5.8) множину допустимих змішаних стратегій гравця II.

До пошуку рішення гри в змішаних стратегіях, так само як і в попередньому пункті, можуть бути застосовані критерії максиміна-мінімакса. Відповідно до них гравець I буде вибирати свою змішану стратегію $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ таким чином, щоб максимізувати найменший середній виграш:

$$\max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right], \qquad (8.5.9)$$

який, як можна довести, дорівнює

$$\max_{x \in X} \left[\min \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{i,1} x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i,2} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{i,n} x_i \right\} \right], \qquad (8.5.10)$$

а гравець II - свою змішану стратегію так, щоб мінімізувати найбільший середній програш:

$$\min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right], \qquad (8.5.11)$$

також рівний

$$\min_{y \in Y} \left[\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} y_j \right\} \right]. \qquad (8.5.12)$$

Аналогічно з (8.5.3) для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ справедлива нерівність

$$\max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right] \le \min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right]. \qquad (8.5.13)$$

Стратегії $x^* \in X$ і $y^* \in Y$ називають **оптимальними змішаними стратегіями**, якщо для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ справедлива рівність

$$F\left(x^*, y^*\right) = \max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right] = \min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right]. \qquad (8.5.14)$$

$v = F\left(x^*, y^*\right)$ називають ціною гри, і якщо x^* і y^* існують, то кажуть, що *гра має розв'язок в змішаних стратегіях (x^*, y^*, v).*

Теорема (основна теорема матричної гри). Будь-яка матрична гра має розв'язок в змішаних стратегіях

8.5.4 Розв'язування матричної гри методами лінійного програмування

Розглянемо деякі способи рішення матричної гри. Задача, що вирішується першим гравцем, (8.5.10) була сформульована як максимізація найменшої з сум

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i ,$$

але якщо визначити деяке x_{m+1}, для якого виконується

$$x_{m+1} \le \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i ,\ j \in 1:n, \qquad (8.5.15)$$

то вона може бути зведена до задачі лінійного програмування:

$$f : x_{m+1} \to \max \qquad (8.5.16)$$

з обмеженнями

$$D = \{x \in R^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i \ge x_{m+1}, j \in 1:n; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; x_i \ge 0, i \in 1:m\}. \qquad (8.5.17)$$

Провівши аналогічні міркування, приходимо до того, що задача мінімізації найбільшого очікуваного програшу, що вирішується гравцем II (8.5.12), зводиться до задачі лінійного програмування

$$f^* : y_{n+1} \to \min, \qquad (8.5.18)$$

$$D = \{y \in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \ge y_{n+1}, i \in 1:m; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; y_j \ge 0, j \in 1:n\}. \qquad (8.5.19)$$

Таким чином, ми отримуємо можливість застосовувати всі можливості апарату лінійного програмування для пошуку оптимальних стратегій обох гравців.

Досить легко перевірити, що задачі (8.5.16)-(8.5.17) і (8.5.18)-(8.5.19) утворюють двоїсту пару. Тут в певному значенні ми повернулися до проблем, що вже розглядалися, а саме до взаємозв'язку між наявністю рішення у деякої оптимізаційної задачі і існуванням сідлової точки у відповідної функції Лагранжа. У цьому випадку аналогічний зв'язок простежується між сідловою точкою гри і розв'язком пари задач оптимізації.

8.6 Стохастичне програмування

8.6.1 Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку - випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише за розроблення методів розв'язування задач, а також у разі їх постановки. Адже у постановці кожної задачі мають відображатися особливості прийняття рішень за умов невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

Типову задачу математичного програмування в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для компонент якого:

$$\max(\min) F = f(X),$$
$$q_i(X) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0.$$

Якщо функції в даній задачі крім керованих параметрів X залежать ще і від деяких випадкових величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, то маємо **задачу стохастичного програмування**:

$$\max(\min) F = f(X, \omega),$$
$$q_i(X, \omega) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0, \ \omega \in \Omega,$$

де Ω — простір подій ω.

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію стосовно детермінованості (стохастичності) функцій $f(X, \omega)$, $q_i(X, \omega)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

I) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;

II) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

III) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

1. Детермінованим чи випадковим є вектор X. Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від ω — $X(\omega)$, тобто залежить від випадкових змінних.
2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500 ± 200 чи 450 ± 50? У першому разі платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому — лише від 400 до 500.
3. Як виконуються обмеження: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи - прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X,\omega)$ і $g_i(X,\omega) \le 0, i=\overline{1,m}$ на базі інформації щодо параметра ω. Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

8.6.2 Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування

Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин: цільової функції і обмежень. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

- максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву *М*-моделей;
- мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву *V*-моделей;
- ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до Р-моделей.

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді:

$$g(X,\omega) \le 0\,. \tag{8.6.1}$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (8.6.1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega \in \Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема замість (8.6.1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю.

Наприклад:

$$P\{g(X,\omega) > 0\} \le \gamma\,, \tag{8.6.2}$$

або

$$P\{g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma\,. \tag{8.6.3}$$

Обмеження (8.6.2) трактується так: ймовірність того, що $g(X,\omega) > 0$, не перевищує величину γ. Відповідно вираз (8.6.3) гарантує, що з ймовірністю $1-\gamma$ буде виконуватися обмеження (8.6.1). Наприклад, якщо $\gamma = 0{,}05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у п'яти випадках не буде виконуватися.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватися в середньому, частина — в жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X,\omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану для заданих X та ω. Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X за випадкових параметрів ω можна сформулювати у таких варіантах:

а) $\max Mf(X,\omega)$,

за умов:

$$P\{g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma\,;$$

$$X \ge 0\,,\ \omega \in \Omega\,;$$

$$\text{б) } \max \xi$$

за умов:

$$P\{f(X,\omega) \ge \xi,\ g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma;$$
$$X \ge 0,\ \omega \in \Omega.$$

Отже, за постановки задачі варіанту а) необхідно максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, щодо ресурсів, виконання контрактів тощо виконуються з імовірністю $1-\gamma$. За постановки задачі варіанту б) крім цього вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку було не менше величини ξ з імовірністю $1-\gamma$, а також, щоб величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанту а) полягає у тому, що він простіший стосовно обчислення. Оскільки у моделі як критерій оптимальності використано математичне сподівання $f(X,\omega)$, то маємо *М*-модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають *М*-планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і по-іншому, поєднуючи або комбінуючи у певний спосіб умови наведених вище першої та другої моделей.

Отже, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного їх виду для розв’язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, наявної інформації та мети дослідження.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Розробляючи стратегічні плани, враховують всі можливі значення ω, тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища, та приймають рішення щодо траєкторії розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести спостереження над ω (у певний момент стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв’язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, плануючи виробничу діяльність підприємства, рішення щодо обсягів випуску продукції приймаються з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ при заданому $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу:

$$\max f(X(\omega)),$$

за умов:

$$g_i(X(\omega)) \le 0; \quad i = \overline{1, m},$$
$$X(\omega) \ge 0 .$$

У загальному випадку спостереження уможливлюють неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення — спостереження — рішення — спостереження або спостереження — рішення — спостереження — рішення.

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається *N* раз, то модель називають *N*-етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — то задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з *N* етапів у свою чергу також може бути поділений. У такому разі маємо одноетапні чи двохетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому разі, коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми величинами і початкову задачу стохастичного програмування зводять до детермінованої.

Двоетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи.

На першому етапі обирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі.

Для існування розв'язку двохетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

Приклад.

Побудуємо математичну модель відомої задачі про визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування.

Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого максимізується загальний прибуток підприємства.

Для спрощення розглянемо використання лише двох видів ресурсів, обсяги яких відомі: $b_1 = 550$ од., $b_2 = 205$ од.

Прибуток від реалізації одиниці *j*-го виду продукції $c_{kj}\ (k, j = \overline{1,3})$ є випадковим, але відомі ймовірності одержання *k*-ої величини прибутку від реалізації одиниці *j*-го виду продукції $p_{kj}\ (k, j = \overline{1,3})$.

Норми витрат *i*-го виду ресурсу на одиницю *j*-го виду продукції $a_{ij}\ (i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3})$ детерміновані. Початкові дані наведені в таблицях 1- 4.

Таблиця 1

Прибуток від одиниці першого виду продукції, ум. од. (c_{k_1})	Ймовірність (p_{k_1})
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 2

Прибуток від одиниці другого виду продукції, ум. од. (c_{k_2})	Ймовірність (p_{k_2})
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 3

Прибуток від одиниці третього	Ймовірність (p_{k_3})

виду продукції, ум. од. (c_{k_3})	
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 4

Вид продукції	Норма витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, ум. од.	
	першого виду	другого виду
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Як зазначалось, математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції. Розглянемо кілька можливих варіантів постановок для умов даної задачі.

І варіант.

Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\max F = C(\omega)X,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною з законом розподілу ймовірностей $N(\overline{F}, \sigma_F^2)$, де $\overline{F}$ — математичне сподівання, а σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв’язати таку задачу, необхідно знайти математичне сподівання $\overline{F}$.

Позначимо символами $M(c_j)$, $j = \overline{1,3}$ — математичне сподівання прибутку від *j*-го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду:

$$\max \overline{F} = M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega)X),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з *М*-моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням випадкової величини (прибутку).

Оскільки випадкова величина прибутку є дискретною і відомі значення відповідних ймовірностей $p_{kj}\ (k = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3})$, то можна безпосередньо обчислити значення $M(c_j)$ $\left(j = \overline{1,3}\right)$. Отже, в числовому вигляді маємо:

$$M(c_1) = \sum_{k=1}^{3} c_{k1}p_{k1} = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} + c_{31}p_{31} = 10 \cdot 0{,}3 + 13 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}3 = 12{,}7;$$

$$M(c_2) = \sum_{k=1}^{3} c_{k2}p_{k2} = c_{12}p_{12} + c_{22}p_{22} + c_{32}p_{32} = 12 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}5 + 13 \cdot 0{,}3 = 13{,}8;$$

$$M(c_3) = \sum_{k=1}^{3} c_{k3}p_{k3} = c_{13}p_{13} + c_{23}p_{23} + c_{33}p_{33} = 12 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}2 = 11{,}9.$$

Математична модель задачі набуває такого вигляду:

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку можна розв’язати симплексним методом, але оптимальний план детермінованої задачі є наближеним розв’язком початкової стохастичної.

Оптимальним планом є $X_1^* = (x_1^* \approx 46{,}67;\ x_2^* = 0;\ x_3^* \approx 105{,}56)$, причому прибуток становить $F_{\max} \approx 1848{,}78$.

ІІ варіант.

Отриманий розв’язок може бути основою плану виробництва продукції за даних умов. Однак очевидно, що, оскільки значення випадкових величин були замінені їх математичним сподіванням, то розв’язок задачі знайдено як деяке усереднення всіх можливих за даних умов розв’язків. Для деякого набору фіксованих умов розрахований план може виявитись неоптимальним, тобто справжнє значення прибутку буде значно відрізнятися від очікуваного рівня. Якщо, наприклад, зовнішні умови складаються найнесприятливіше (мінімальні рівні прибутків для кожного з видів продукції), то значення цільової функції для відшуканого оптимального плану буде дорівнювати:

$$F(c_{j\min}) = 10 \cdot 46,67 + 11 \cdot 105,56 = 1627,86 .$$

Очевидно, що відхилення даного значення від середнього очікуваного рівня (1848,78 – 1627,86 = 220,92) показує можливе завищення прибутку у плані. Відомо, що однією з головних характеристик відхилення значень випадкової величини від її середнього є дисперсія. Розрахуємо значення дисперсії для отриманого оптимального плану:

$$D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 =$$
$$= 3,81 \cdot (46,67)^2 + 1,56 \cdot 0 + 1,29 \cdot (105,56)^2 = 22672,88 .$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{22672,88} = 150,58$.

Якщо допустити, що випадкова величина має нормальний закон розподілу, то, враховуючи властивості середнього квадратичного відхилення (правило трьох «сігм»), визначимо межі, в яких змінюватиметься прибуток: $\overline{F} \pm 3\sigma_F = 1848,78 \pm 451,74 = [1397,04; 2300,52]$. Якщо розраховані зміни прибутку не можуть влаштовувати особу, що приймає рішення, то доцільно ввести обмеження, яке зменшить ризик втрати доходу.

За необхідності зменшення можливих втрат прибутку в систему обмежень вводять умову, що дисперсія прибутку має не перевищувати деякої заданої величини. Розв'яжемо задачу з додатковою умовою, що дисперсія має не перевищувати 5000.

$$\max F = 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3 ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \le 205; \\ 3,81x_1^2 + 1,56x_2^2 + 1,29x_3^2 \le 5000; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}) .$$

Ця задача є нелінійною. Розв'язавши її, маємо такий оптимальний план:

$X_2^* = (x_1^* = 14,23;\ x_2^* = 37,78;\ x_3^* = 39,39)$, причому прибуток $F = 1170$ буде змінюватися приблизно на 210 ум. од. (оскільки $\sigma_F = \sqrt{D_F} \approx 70,7$).

III варіант.

Застосування інструментарію математичного програмування до розв'язання економічних задач уможливлює врахування найвибагливіших побажань стосовно набору властивостей розроблюваних планів. Допустимо, що необхідно, орієнтуючись на деякий середній рівень прибутку, досягти мінімального рівня можливих його змін. У такому разі доречно використати *V*-модель задачі стохастичного програмування:

$$\min Z = D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 ,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \\ M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 \ge W; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}),$$

де W — бажаний рівень сподіваного прибутку.
Зафіксуємо бажаний прибуток на рівні не нижче, ніж 1500 ум. од., і знайдемо оптимальний план такої задачі:

$$\min Z = D_F = 3{,}81x_1^2 + 1{,}56x_2^2 + 1{,}29x_3^2 ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \\ 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3 \ge 1500; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}) .$$

Розв'язавши цю задачу квадратичного програмування, маємо:
$X_3^* = (x_1^* \approx 18{,}24;\ x_2^* \approx 48{,}4;\ x_3^* \approx 50{,}47)$, мінімальна дисперсія сподіваного прибутку буде дорівнювати $Z = \min D_F = 8206{,}125$, тобто зміни прибутку відбуватимуться в межах ± 270 ум. од.

Вибір одного з наведених варіантів математичних моделей залежатиме від конкретної ситуації, поставлених цілей та вимог, однак наведений приклад показує, що використання стохастичних задач дає математично обґрунтовану інформацію, яка може бути основою прийняття рішень за складних реальних умов.

8.6.3 Одноетапні задачі стохастичного програмування

Розглянемо лінійну одноетапну задачу стохастичного програмування в такій постановці: визначити план *X*, для якого

$$\max M\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j\right\},$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\right\} \ge p_i \ (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \ge 0, \omega \in \Omega \ \ (j = \overline{1,n}),$$

де вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції $C(\omega) = (c_j(\omega))$ $(j = \overline{1, n})$, матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень $A(\omega) = \left(a_{ij}(\omega)\right)$ $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, а також вектор $B(\omega) = (b_i(\omega))$ $(i = \overline{1, m})$ є випадковими величинами; ω — випадковий параметр, Ω — множина значень ω, що з'являються з певною ймовірністю. Нехай $A(\omega)$ — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $\bar{a}_{ij}$ і дисперсією σ_{ij}^2, а $B(\omega)$ і $C(\omega)$ — нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями відповідно $\bar{b}_i$ та $\bar{c}_j$ і дисперсіями σ_i^2, σ_j^2.

Оскільки в обмеженнях задачі виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \le b_i(\omega)$ $(i = \overline{1, m})$ матриця $A(\omega)$ та вектор $B(\omega)$ є нормально розподіленими випадковими величинами, то їх різниці $\Delta_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega)$ $(i = \overline{1, m})$ також є випадковими величинами з нормальним розподілом, математичним сподіванням $\overline{\Delta}_i(X) = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i$ $(i = \overline{1, m})$ і дисперсією $\sigma_i^2 = \sum \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_j^2$.

Обмеження $P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \le b_i(\omega)\right\} \ge p_i$ $(i = \overline{1, m})$ еквівалентні нерівностям $P\{\Delta_i(X) \le 0\} \ge p_i (i = \overline{1, m})$. Враховуючи, що $\Delta_i(X)$ нормально розподілена випадкова величина, використаємо функцію нормального закону розподілу, внаслідок чого наведену нерівність можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(X)} \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{\frac{(\xi - \overline{\Delta}_i)^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\} d\xi \ge p_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Позначимо: $\Phi(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$. Тоді останню нерівність зведемо до вигляду:

$$\Phi\left(-\frac{\overline{\Delta}_i(X)}{\sigma_i(X)}\right) \ge p_i \text{, звідки } \overline{\Delta}_i(X) + \Phi^{-1}(p_i)\sigma_i(X) \le 0 .$$

Підставивши в цю нерівність значення $\overline{\Delta}_i(X)$ і $\sigma_i(X)$, отримаємо:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \quad (i = \overline{1, m}) .$$

Отже, початкову стохастичну задачу зведено до детермінованого аналогу з лінійною цільовою функцією та нелінійними обмеженнями:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \quad (i = \overline{1,m}).$$

Таку задачу можна розв'язати одним з відомих методів розв'язування задач нелінійного програмування, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо одноетапну задачу стохастичного програмування, що задана *P*-моделлю. Отже, маємо задачу виду:

$$\min F = k$$

за умов:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0;$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$X \ge 0.$$

У даній задачі необхідно мінімізувати величину *k*, що обмежує витрати на виготовлення продукції $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$, причому така вимога має виконуватися не строго, а із заданим рівнем імовірності - p_0. Інші обмеження також виконуються з певною імовірністю - p_i $(i = \overline{1,m})$.

Допустимо, що випадкова величина c_j $(j = \overline{1,n})$ — нормально розподілена з математичним сподіванням $\overline{c_j}$ і кореляційною матрицею $C = (c_{tj})$, де $c_{tj} = M\{(c_t - \bar{c}_t)(c_j - \bar{c}_j)\}$. Тоді вираз $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ буде випадковою величиною, що також нормально розподілена з математичним сподіванням $\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$ та дисперсією $\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_t x_j$. Отже, (з попередніх викладок) можна записати:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_t x_j}}\right) = p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(X) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_t x_j}\ .$$

При $p_0 \ge 0$ величина $k(X)$ є угнутою функцією за змінними x_j. Отже, за зроблених допущень задачі стохастичного програмування

$$\min F = k\ ,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0\,,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i = \overline{1,m})\,,$$

$$X \ge 0$$

відповідає детермінований еквівалент:

$$\min\ k(X) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_t x_j}$$

за умов: $$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{t}\sum_{j} \nu_{it} x_t x_j + 2\sum_{j} \nu_{ij} x_j^2 + \theta_i^2} \le \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i = \overline{1,m})\,.$$

Остання задача являє собою задачу опуклого програмування. Для її розв'язування можна застосувати теорему Куна—Таккера, або один з інших методів розв'язування задач нелінійного програмування.

Приклад. Фермер має змогу купити три види зерна та готувати з нього різні суміші для виробництва свинини. У табл. 5 містяться дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби у поживних речовинах. Потреба у поживних речовинах розподілена рівномірно на зазначених інтервалах від мінімально можливого до максимального рівня $[\min_i; \max_i]$ для кожної *i*-ої поживної речовини $(i = \overline{1,4})$.

Таблиця 5

ВМІСТ ПОЖИВНИХ РЕЧОВИН В 1 Ц ЗЕРНА ТА ПОТРЕБА У ПОЖИВНИХ РЕЧОВИНАХ

Зерно	Поживна речовина				Ціна, грн
	кормові одиниці, ц	перетравний протеїн, кг	лізин, кг	кальцій, кг	
Ячмінь, ц	1,15	8,5	0,41	0,2	45
Кукурудза,ц	1,33	7,3	0,21	0,05	40
Горох, ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
Потреба у поживних речовинах:					
а) максимальна (max_i)	106	890	45	12	—
б) мінімальна (min_i)	95,4	801	41	9	—

Необхідно розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальний розв’язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна за умов задоволення мінімально допустимих потреб у всіх поживних речовинах з ймовірністю $\gamma = 0{,}9$.

Розв’язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — відповідно обсяги ячменю, кукурудзи і гороху, які необхідно закупити.

Критерій оптимальності:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$P\{1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq a\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d\} \geq 0{,}9\ ,$$

де a, b, c, d — відповідно потреби кормових одиниць, перетравного протеїну, лізину та кальцію (випадкові, рівномірно розподілені величини). Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами, тобто:

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq a_1;$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b_1;$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c_1;$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 — відповідно значення випадкових величин, що задовольняють умови:

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0{,}9; \text{ і } P\{b \geq b_1\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{c \geq c_1\} \geq 0{,}9; \text{ і } P\{d \geq d_1\} \geq 0{,}9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1. З теорії ймовірностей відомо, що:

$$\frac{1}{106 - 95{,}4} \int_{95{,}4}^{a_1} d\varphi = 0{,}9 .$$

Отже, маємо: $\frac{1}{10{,}6}\left(\varphi\Big|_{95{,}4}^{a_1}\right) = 0{,}9.$ Звідси: $\frac{1}{10{,}6}(a_1 - 95{,}4) = 0{,}9$ або $a_1 - 95{,}4 = 9{,}54,$ тому $a_1 = 104{,}94.$

Відповідно отримаємо: $b_1 = 881{,}1;$ $c_1 = 44{,}6;$ $d_1 = 11{,}7.$

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке буде використано для відгодівлі свиней:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq 104{,}94,$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq 881{,}1,$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq 44{,}6,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq 11{,}7,$$
$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0.$$

Розв’язавши цю задачу симплексним методом, отримаємо: $x_1 = 30{,}94$, $x_2 = 35{,}59$, $x_3 = 18{,}66$. Оптимальні витрати дорівнюють 3749 гривням.

8.6.4 Двоетапні задачі стохастичного програмування

Недоліком розглянутих одноетапних задач стохастичного програмування є те, що в них лише фіксується факт можливих відхилень значень випадкових параметрів і усереднені розв'язки вибирають за умови, що відхилення значень від середнього рівня в будь-який бік небажане (зменшується величина дисперсії параметрів у обмеженнях або цільова функція — дисперсія мінімізується).

У більшості реальних економічних задач має значення не лише величина відхилення, але також і його напрямок.

Двоетапні задачі стохастичного програмування позбавлені зазначеного недоліку.

Розглянемо задачу стохастичного програмування в такій постановці:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j\,, \tag{8.6.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j = b_i(\omega) \ (i = \overline{1,m})\,; \tag{8.6.5}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}) \tag{8.6.6}$$

Якщо обмеження залежно від значень випадкових параметрів та вектора X виконуються як $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega)$, то можливе існування надлишку (ресурсів, продукції тощо). Позначимо його через Δ_i^+:

$$\Delta_i^+(X,\omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right).$$

За виконання обмежень залежно від значень випадкових параметрів та вектора X у вигляді $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \geq b_i(\omega)$ виникає дефіцит. Позначимо його через Δ_i^-:

$$\Delta_i^-(X,\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right).$$

Отже, якщо $\Delta_i^+(X,\omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right)$, то $\Delta_i^-(X,\omega) = 0$, а якщо $\Delta_i^-(X,\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right)$, то $\Delta_i^+(X,\omega) = 0$.

Інакше кажучи,

$$\Delta_i^+(X,\omega) = \max\left[0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right) \right],$$

$$\Delta_i^-(X,\omega)=\max\left[0,\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j-b_i(\omega)\right)\right].$$

Очевидно, що система обмежень (8.6.5) задачі може бути подана в еквівалентній формі:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j+\Delta_i^+-\Delta_i^-=b_i(\omega)\ (i=\overline{1,m}).$$

Припустимо також, що відомі величини α_i — питомі витрати на збереження надлишків $(\alpha_i>0)$ та β_i — питомі витрати, що пов’язані з дефіцитом $(\beta_i>0)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Отже, можна визначити штрафну функцію для i-го обмеження за результатом його виконання. Позначимо її через S, тоді:

$$S_i=\max\left\{\alpha_i\Delta_i^+;-\beta_i\Delta_i^-\right\}=\begin{cases}\alpha_i\Delta_i^+,\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)\le b_i(\omega),\\-\beta_i\Delta_i^-,\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)\ge b_i(\omega).\end{cases}$$

Тоді доцільно розв’язувати задачу (7.4) - (7.6) у такій постановці:

$$\min F(X)=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_jx_j+M\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i\Delta_i^+(X,\omega)+\beta_i\Delta_i^-(X,\omega)\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_jx_j+M\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\max\left\{0,\left(b_i(\omega)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\beta_i\max\left\{0,\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j-b_i(\omega)\right)\right\}\right)\qquad(8.6.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j=b_i(\omega)\ (i=\overline{1,m})\qquad(8.6.8)$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,n}).\qquad(8.6.9)$$

Змінні Δ_i^+ та Δ_i^- можна розглядати як такі, що забезпечують виконання обмежень (8.6.5) як рівностей.

Отже, розв’язування задачі відбувається в два етапи: спочатку відшукують фіксований план $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ згідно з апріорною інформацією про стан зовнішнього середовища, який і визначає реалізацію випадкових параметрів.

Значення вектора X не задовольняє обмеження задачі для кожного $\omega\in\Omega$.

На другому етапі після спостереження за зовнішнім середовищем і отримання точного значення випадкових параметрів ω знаходять значення змінних Δ_i^+ та Δ_i^-, що компенсують відхилення, які виникли за попереднім планом *X*. Витрати на корекцію початкового плану визначаються як

$$\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i\Delta_i^+ + \beta_i\Delta_i^-).$$

Важливо спочатку отримати такий план, який би вимагав мінімальних витрат не лише на його реалізацію, але і на його коректування.

Коректування планів у процесі їх реалізації є цілком природним при складанні планів для реальних економічних процесів.

Необхідність коректування плану зумовлена не недоліками планування, а складністю прийняття рішень за умов невизначеності.

Детерміноване моделювання не дає змоги об’єднати два етапи: прийняття плану та його коректування.

Перехід від детермінованих моделей до стохастичних, в яких використовуються випадкові величини, що саме і викликають необхідність корекції, уможливлює отримання математичних моделей, що об’єднують вищеназвані два етапи планування.

Отже, в результаті розв’язування двоетапних стохастичних задач отримують плани, що є стійкими за умов невизначеності і мінімізують загальні витрати на реалізацію і корекцію плану, тобто забезпечують загальний ефект від попереднього плану та його корекції.

У моделях двоетапного стохастичного програмування відображаються найхарактерніші особливості планування за умов невизначеності:

1) ймовірнісний характер початкової інформації,
2) вибір попереднього плану з урахуванням його майбутнього коректування,
3) коректування попередньо обраного плану по мірі уточнення інформації.

Модель (8.6.7)-(8.6.9) - найпростіша двохетапна модель стохастичного програмування.

У загальному випадку план-корекція вводиться в систему обмежень з допомогою матриці корекції загального вигляду, елементи якої можуть залежати від ω, тобто розглядається система нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j + \sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega)y_k + b_i(\omega) \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0, \ \left(j=\overline{1,n}\right); \ y_k \ge 0 \ \left(k=\overline{1,r}\right),$$

або у векторно-матричній формі:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \geq 0\,; \qquad (8.6.10)$$

$$X \geq 0\,,\ Y \geq 0\,. \qquad (8.6.11)$$

Попередній план X вибирається до спостережень над ω. Коли ω стає відомим, то визначають план-корекцію Y у такий спосіб, щоб виконувались співвідношення (8.6.10), (8.6.11). При цьому ефект від плану-корекції дорівнює:

$$\sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega) y_k\,. \qquad (8.6.12)$$

Оскільки з кожним планом-корекцією Y пов'язаний певний ефект, то при певному X і спостереженому ω його краще за все вибирати з умови максимізації (8.6.12) за обмежень (8.6.10), (8.6.11). Позначимо такий план через $Y(X,\omega)$ і назвемо його оптимальною корекцією плану X за зовнішніх умов ω. Можна допустити, що $Y(X,\omega)$ існує при кожному X і ω, у протилежному разі в (8.6.10) можна ввести штучні змінні Y^{-} і одночасно — в (8.6.11) з досить великим штрафом. Сподіваний ефект від плану-корекції дорівнює:

$$M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega) y_k(X,\omega)\right).$$

Суть задачі полягає у відшуканні плану X, який максимізував би математичне сподівання ефекту від плану з урахуванням його майбутньої корекції:

$$F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega) y_k(X,\omega)\right) \qquad (8.6.13)$$

за умов:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \geq 0\,; \qquad (8.6.14)$$

$$X \geq 0\,,\ Y \geq 0\,. \qquad (8.6.15)$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1984. - 416с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1971. - 432с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. –М.: “Наука”, 1976. – 315с.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: “Наука”, 1975
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: ”Наука”, 1971
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б. П., Краткий курс высшей математики. – М.: “Наука”, 1985. – 575с.
7. Кулініч Г.Л., Таран Є. Ю., Бурим В.М. та ін. Вища математика. Спеціальні розділи. Кн. 1,2. – К.: Либідь, 2003.
8. Глушков О.В., Чернякова Ю. Г., Вітавецька Л. А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю. В., Лобода А.В., Середенко С.С., Вища математика. Одесса: Екологія.-2011.
9. Кузнєцов Ю.Н., Кузубов В. И., Волощенко А.Б. Математичесчкое программирование.- М.: Высшая школа, 1976, 1980.
10. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. – «Питер», 2000.
11. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: Видавничий центр “Академія”, 1998.
12. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960.
13. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.
14. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию - М.: Высшая школа, 1975.
15. Зайченко Ю.П. Исследование операций.- К.: Вища школа, 1988.
16. Ляшенко И.Н. и др. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975.

17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации.- М.: Наука, 1981.
18. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник.- М.: МГУ, Изд-во «ДИС», 1998.
19. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. М., 1973.
20. Карлин С. Математичекие методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964.
21. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М., 1960.
22. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.
23. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М., 1977.
24. Лобода А.В. Програмна реалізація моделей нейронно-мережевих систем. Блок структури нейрон-мережі: Препр./ МОНУ Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, 2001.
25. Glushkov A. V., Vitavetskaya L.A., Ambrosov S.V., Loboda A. V. Nevral networks programming and thinking mashines approach. – Odessa National University, 2001.
26. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М., 1980.
27. Моисеев Н.Н. Современное состояние теории исследования операций.- М., 1979.
28. Муртаф Б. Современное линейное программирование. – М., 1984.

Навчальне видання

Глушков О.В. д.ф.-м.н., проф., Буяджи В.В. к.ф.-м.н., доц,

Вітавецька Л.А., к.ф.-м.н., доц, Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц.

ВИЩА МАТЕМАТИКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій

ОДЕкУ

65016 Одеса, вул. Львівська,15