

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю.,  
Дубровська Ю.В., Серга І.М., Флорко Т.О., Башкар'юв П.Г.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА  
ЧАСТИНА ІІІ  
Конспект лекцій**

Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного  
університету Міністерства освіти та науки України  
як конспект лекцій (протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2016 р.

**Одеса – 2016**

ББК 22.11

В 93

УДК 51

Гриф надано за рішенням методичної ради  
Одеського державного екологічного університету  
(протокол №\_\_ від\_\_\_\_\_ р.)

**Вища математика:** Конспект лекцій/ О.В. Глушков, Ю.Г. Чернякова, Л.А. Вітавецька, О.Ю. Хецеліус. Ю.В. Дубровська, А.В. Серга І.М., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. - Одеса: 2016. - 240 с.

Викладені питання теорії ймовірності та математичної статистики, теорії функцій комплексної змінної, операційного числення, рівнянь математичної фізики.

Для всіх напрямків підготовки.

*Навчальне видання*

**Глушков О.В. д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г. к.ф.-м.н., доц,  
Вітавецька Л.А. к.ф.-м.н., доц, Хецеліус О.Ю. д.ф.-м.н., проф,  
Дубровська Ю.В. к.ф.-м.н., доц, Серга І.М., к.ф.- м.н., доц.,  
Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц., Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н., доц.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**ЧАСТИНА III**

**Конспект лекцій**

© Одеський державний екологічний університет, 2016

<b>ПЕРЕДМОВА.....</b>	<b>7</b>
<b>РОЗДІЛ 1 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА</b>	
<b>СТАТИСТИКА.....</b>	<b>8</b>
1.1 Елементи комбінаторики.....	8
1.2 Випадкові події та їх ймовірності.....	11
1.2.1 Випадкова подія. Ймовірність події.....	11
1.2.2 Теореми додавання ймовірностей. Протилежні випадкові події.....	15
1.2.3 Теореми множення ймовірностей. Умовна ймовірність.....	17
1.2.4 Формула повної ймовірності. Формула Байєса.....	21
1.2.5 Випробування Бернуллі .....	23
1.2.6 Локальна та інтегральна теореми Лапласа.....	24
1.3 Випадкові величини та їх властивості .....	26
1.3.1 Дискретна випадкова величина. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.....	26
1.3.2 Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини.....	30
1.3.3 Неперервна випадкова величина і її закон розподілу ймовірностей .....	34
1.3.4 Числові характеристики неперервної випадкової величини.....	38
1.3.5 Мода та медіана випадкової величини.....	42
1.4 Системи випадкових величин.....	43
1.4.1 Системи дискретних випадкових величин та їх числові характеристики .....	43
1.4.2 Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин.....	48
1.4.3 Системи неперервних випадкових величин та їх закон розподілу ймовірностей.....	50
1.4.4 Числові характеристики системи неперервних випадкових величин.....	53
1.4.5 Умовні закони розподілу неперервних випадкових величин.....	56

1.5 Математична статистика.....	58
1.5.1 Основні відомості з математичної статистики.....	58
1.5.2 Генеральна та вибіркова сукупності .....	60
1.5.3 Числові характеристики вибіркової сукупності.....	63
1.5.4 Перевірка статистичних гіпотез.....	69
1.5.5 Основні параметричні статистичні критерії.....	72
1.5.6 Критерії для перевірки непараметричних статистичних гіпотез.....	75
<b>РОЗДІЛ 2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ.....</b>	<b>79</b>
2.1 Комплексні числа та дії над ними.....	79
2.1.1 Поняття комплексного числа.....	79
2.1.2 Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.....	80
2.1.3 Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа.....	82
2.1.4 Тригонометрична і показникова форми комплексного числа.....	84
2.1.5 Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах.....	87
2.1.6 Многочлени. Розкладання на множники. Розв'язання квадратних рівнянь.....	91
2.2 Комплексні функції дійсної змінної.....	93
2.2.1 Відстань між точками. Окіл точки. Нескінченно віддалена точка. Розширена комплексна площина.....	93
2.2.2 Область та її межа .....	95
2.2.3 Комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині.....	97
2.2.4 Диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної.....	100
2.3 Похідна функції комплексної змінної. Поняття аналітичної функції. Конформне відображення.....	101
2.3.1 Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність .....	101
2.3.2 Похідна. Умови Коші – Рімана.....	104
2.3.3 Поняття аналітичної функції. Зв'язок аналітичних функцій з	

гармонічними.....	107
2.3.4 Геометричний зміст модуля й аргументу похідної. Поняття про конформне відображення.....	111
2.4 Деякі елементарні функції комплексної змінної та їх властивості .....	116
2.4.1 Лінійна функція.....	116
2.4.2 Степенева і коренева функції.....	116
2.4.3 Показникова функція.....	117
2.4.4 Тригонометричні та гіперболічні функції .....	119
2.4.5 Логарифмічна функція.....	121
2.5 Інтеграл функції комплексної змінної .....	124
2.5.1 Поняття комплексного інтеграла.....	124
2.5.2 Первісна функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші.....	126
2.5.3 Інтегральна формула Коші та її наслідки.....	129
2.6 Ряди функцій комплексної змінної.....	134
2.6.1 Основні поняття про ряди з комплексними членами .....	134
2.6.2 Степеневі ряди. Ряд Тейлора .....	137
2.6.3 Ряд Лорана.....	141
2.6.4 Ізольовані особливі точки та їх класифікація.....	149
2.7 Лишки та їх застосування.....	154
2.7.1 Поняття лишку. Основна теорема про лишки.....	154
2.7.2 Обчислення інтегралів за допомогою лишків.....	158
<b>РОЗДІЛ 3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ.....</b>	<b>164</b>
3.1 Поняття та властивості перетворення Лапласа.....	164
3.2 Знаходження зображення та оригіналу функцій.....	166
3.3 Застосування операційного числення до розв'язання диференціальних рівнянь.....	174
<b>РОЗДІЛ 4 РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.....</b>	<b>178</b>
4.1 Поняття диференціальних рівнянь у частинних похідних, їх загальні і	

частинні розв'язки.....	178
4.2 Про задачі, що приводять до рівнянь у частинних похідних.....	186
4.3 Рівняння коливань струни.....	187
4.4 Рівняння малих поздовжніх коливань пружного стрижня.....	193
4.5 Рівняння поперечних коливань мембрани.....	196
4.6 Телеграфне рівняння.....	201
4.7 Рівняння теплопровідності.....	205
4.8 Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку з $n$ незалежними змінними.....	213
4.9 Проблеми математичної фізики для обмеженої області. Загальна схема застосування методу Фур'є.....	218
4.10 Загальна схема розв'язання неоднорідного рівняння методом Фур'є.....	224
4.11 Розв'язок задачі теплопровідності з теплообміном на кінцях.....	227
4.12 Розв'язання рівняння коливання струни методом Фур'є.....	234
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>240</b>

## ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Вища математика” є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків гідрологія, метеорологія, екологія, комп’ютерні науки. Вона відображує нові вимоги, що ставляться до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета дисципліни – розгляд проблем векторної алгебри, матричного числення, аналітичної геометрії, засвоєння основних методів розв’язання систем лінійних рівнянь, теорії ймовірностей, вивчення математичного аналізу, до складу якого входять диференціальне числення, інтегральне числення та теорія функцій дійсної змінної, теорія функцій комплексної змінної, ряди, теорія диференціальних рівнянь, операційне числення, рівняння математичної фізики, аналіз отриманих результатів.

В результаті вивчення цієї дисципліни студент повинен знати математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою дисципліни, вміти влучно і стисло виражати математичну думку під час розв’язання конкретних задач, самостійно розв’язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього набуті під час вивчення цієї дисципліни знання, аналізувати отримані результати.

Здобуті у процесі вивчення вищої математики знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

У третій частині конспекту лекцій розглянуті питання теорії ймовірностей, функцій комплексної змінної, операційного числення, рівнянь математичної фізики.

# 1 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

## 1.1 Елементи комбінаторики

*Комбінаторика* - розділ математики, предметом якого є теорія скінченних множин.

*Множина* - сукупність об'єктів довільної природи, які мають спільну для всіх них характеристичну властивість. Наприклад, множина учнів даного класу, множина дерев у даному саду, множина парних чисел і т.ін. Кожен об'єкт, який входить до множини, називають *елементом* цієї множини. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* множиною. Нехай  $A, B, C, \dots$  - множини;  $a, b, c$  - їх елементи. Запис  $a \in A$  означає, що елемент  $a$  належить множині  $A$ , а запис  $b \notin A$  означає, що елемент  $b$  не належить множині  $A$ . Множини бувають скінченні та нескінченні. Наприклад, множина літер українського алфавіту скінченна. Множина всіх дійсних чисел, множина цілих чисел - нескінченні множини. Для скінченної множини  $A$  через  $N(A)$  позначають кількість її елементів. Число елементів порожньої множини дорівнює 0. Якщо  $N(A)=n$ , то казатимемо, що  $A$  -  $n$ -множина.

В основі комбінаторики лежать два елементарних правила - суми і добутку.

*Правило суми.* Якщо елемент  $A$  можна обрати  $m$  способами, а елемент  $B$  -  $n$ - способами, то вибір елемента  $A$  або елемента  $B$  можна здійснити  $(m + n)$  способами.

*Правило добутку* (основне правило комбінаторики). Якщо елемент  $A$  можна вибрати  $m$  способами, а після кожного такого вибору елемент  $B$  можна вибрати  $n$  способами, то вибір пари  $(A;B)$  в указаному порядку можна здійснити  $m \cdot n$  способами.



**Приклад.** Скількома способами можна потрапити з п.  $A$  до п.  $D$ , якщо з  $A$  до  $B$  прямує  $m$  доріг, з  $B$  до  $D$  –  $k$  доріг, з  $A$  до  $C$  –  $n$  доріг і з  $C$  до  $D$  –  $l$  доріг (рис.1.1)?

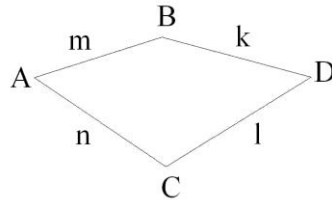


Рис. 1.1

*Розв'язання.* За правилом добутку рух шляхом  $ABD$  можна здійснити  $mk$  способами, а шляхом  $ACD$  –  $nl$  способами. Згідно з правилом суми з  $A$  до  $D$  можна потрапити  $mk + nl$  способами.

Далі розглянемо елементи комбінаторики, до яких відносяться перестановки, розміщення та комбінації елементів множини.

*Перестановками* з  $n$  елементів ( $P_n$ ) називають будь-які впорядковані множини, кожна з яких містить усі  $n$  цих елементів і які відрізняються одна від одної лише порядком розміщення елементів. Кількість усеможливих перестановок з  $n$  елементів обчислюють за формулою:

$$P_n = n!. \quad (1.1)$$

Наприклад, з елементів множини  $A = \{3, 8, 5\}$  можна утворити перестановки  $(5, 8, 3)$ ,  $(5, 3, 8)$ ,  $(3, 8, 5)$ ,  $(3, 5, 8)$ ,  $(8, 3, 5)$ ,  $(8, 5, 3)$ , усього  $P_3 = 3! = 6$ .

*Розміщеннями* ( $A_n^k$ ), утвореними з множини  $n$  різних елементів по  $k$  елементів ( $k \leq n, n > 0$ ), називають будь-які впорядковані підмножини цієї множини, які містять  $k$  елементів. Розміщення відрізняються одне від одного

або елементами, або порядком розташування елементів. Кількість розміщень з  $n$  елементів по  $k$  обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} . \quad (1.2)$$

**Приклад.** Кількість розміщень з трьох елементів множини  $A=\{1,2,3\}$  по 2 елементи складає  $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$ . Справді, можливі розміщення такі:  $(1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2)$  - всього шість.

*Комбінацією з  $n$  елементів по  $k$  ( $C_n^k$ ) називають  $k$ -елементну підмножину  $n$ -елементної множини ( $k \leq n$ ). Кількість усяких можливих комбінацій з  $n$  елементів по  $k$  обчислюють за формулою:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} . \quad (1.3)$$

**Приклад.** Кількість комбінацій з трьох елементів множини  $A=\{1,2,3\}$  по 2 елементи складає  $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ . Справді, можливі комбінації такі:  $\{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}$  - всього три.

**Приклад.** Із восьми чоловіків і шести жінок потрібно утворити таку комісію, щоб до її складу входило два чоловіки і три жінки. Скількома способами це можна зробити?

*Розв'язання.* Нехай  $C_8^2$  - кількість способів утворення чоловічої частини комісії,  $C_6^3$  - кількість способів утворення жіночої частини комісії. За правилом добутку:  $C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 560$  - способів утворення комісії.

## 1.2 Випадкові події та їх ймовірності

### 1.2.1 Випадкова подія. Ймовірність події

У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо *випадковими*. Зокрема, інформація, на основі якої розв'язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить *наближений, неточний, випадковий* характер. Наприклад, власник магазину не знає, скільки буде покупців, бізнесмен – яким буде завтра курс гривні, банкір – чи повернуть йому позику. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці закономірності вивчає теорія ймовірностей. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність. Широко розповсюджене уявлення пов'язує невизначеність і, отже, ймовірність з такими ситуаціями, як гра в кості, в рулетку, витягування карт з колоди і т.п. Саме потреба у розв'язуванні практичних задач, пов'язаних з азартними іграми, а також з питаннями страхування і демографії, якими в середині XVII ст. займалися такі відомі вчені, як Гюйгенс, Паскаль, Ферма і Яків Бернуллі, зумовила виникнення теорії ймовірностей як самостійної науки. Як і в кожній математичній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі *початкові, первісні* поняття, покладені в її основу. Першим таким поняттям є поняття *випадкової події*. До нього приходимо так.

По-перше, під *подією* розуміємо таку *дію*, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

**Приклади:** 1) Першого вересня почалось навчання в ЛНУ ім. І.Франка (подія відбулась).

2) При киданні монети герб випаде зверху (може відбутись, може не відбутись).

3) Витягнути зелену кульку зі скриньки, яка містить 1 білу і 1 чорну кульку (неможлива подія).

По-друге, поняття випадкової події пов'язане із завданням *певного комплексу умов*.

Процес реалізації певного комплексу умов називається *експериментом*. Тепер можемо дати означення випадкової події.

*Випадкова подія* – це подія, яка може відбутись або не відбутись в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов. Наприклад: випадіння грані кубика з парною кількістю очок, попадання в даний об'єкт при стрільбі по цьому об'єкту з даного зняряддя, витягування трьох тузів з колоди карт і т.ін. Якщо під час кожної реалізації заданого комплексу умов подія *обов'язково* відбувається, то вона називається *достовірною*. Якщо ж в результаті експерименту подія *обов'язково* не відбудеться, то це - *неможлива* подія.

Очевидно, що після одноразового здійснення експерименту ми не виявимо закономірностей, які властиві для конкретної випадкової події. Однак закономірності можна виявити, якщо здійснювати експеримент багаторазово в однакових умовах. Отже, другим з початкових понять теорії ймовірностей є поняття *масовості явищ (подій)*. Масові явища розглядаються як протилежність до одиничних і масовість може проявлятися: 1) в часі; 2) в просторі; 3) і в часі, і в просторі. Таким чином, *предметом теорії ймовірностей* є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій.

Нехай деякий експеримент здійснюється  $n$  разів і при цьому в результаті  $m$  випробувань відбувається подія  $A$ . Відношення  $m/n$  називається *відносною частотою* появи події  $A$  в серії з  $n$  випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, для яких має місце властивість *стійкості частот*. Вона

полягає в тому, що частота появи події  $A$  при великій кількості випробувань мало відрізняється від деякого числа. Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота випадання герба буде мало відрізнятися від  $1/2$ . Звідси, логічно міркуючи, отримуємо так зване *статистичне означення* ймовірності. *Ймовірністю* події називається об'єктивно існуюча величина, навколо якої групуються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо  $P(A)$  - ймовірність події  $A$ . Легко зрозуміти, що за значеннями відносних частот можна отримати лише наближене значення ймовірності, тому з точки зору математики таке означення є недосконалим. Якщо формулювати досконале статистичне означення з точки зору математики, то можна сказати, що *ймовірністю події* є границя, до якої прямує відносна частота появи події при необмеженому зростанні кількості випробувань:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{n}.$$

Це означення належить німецькому математику Р. Мізесу.

Нехай простір елементарних подій є скінченною множиною  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ ,  $N(\Omega) = N$ , тобто є лише  $N$  можливих результатів випробування, отже, множина  $\Omega$  є повною групою всіх попарно несумісних результатів випробування.

Події називають *попарно несумісними* в даному випробуванні, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій у тому ж випробуванні.

Вважатимемо додатково, що всі елементарні події *рівноможливі*, тобто з міркувань симетрії або якихось інших впливає, що нема об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш ймовірною порівняно з іншими. Наприклад, якщо експеримент полягає в одноразовому киданні грального кубика правильної форми, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі 6 результатів цього випробування природно вважати рівноможливими.

Класичне означення ймовірності формулюють для подій, які є підмножинами множини  $\Omega$ . Якщо  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{N(A)}}\}$ , де  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N(A)} \leq N$ ,  $N(A) = 0, 1, 2, \dots, N$ , то ймовірність події  $A$  визначають за формулою:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad (1.4)$$

де  $N(A)$  - кількість елементів множини  $A$ .

Отже, ймовірністю події  $A$  називається відношення кількості сприятливих для події  $A$  елементарних подій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.

З визначення ймовірності випливає, що вона задовольняє умові:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Ймовірність достовірної події приймають як таку, яка дорівнює 1, оскільки для достовірної події  $N(A) = N(\Omega)$ :  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1$ .

Ймовірність неможливої події дорівнює 0, бо для неможливих подій кількість  $N(A)$  елементів множини  $A$  дорівнює нулю:  $P(A) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$ .

**Приклад.** Набираючи номер телефону, дівчинка забула дві останні цифри і, пам'ятаючи тільки те, що ці цифри різні, набрала їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набраний правильно?

*Розв'язання.* Нехай подія  $A$  - номер набрано правильно. Дві останні цифри можна набрати  $A_{10}^2$  способами. Тоді кількість можливих подій :

$$n = A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = 90.$$

Події  $A$  сприяє тільки одна з них, тобто  $m=1$ . Отже, ймовірність того, що номер набраний правильно:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}$$

**Приклад.** В учня є двадцять зошитів. Серед них – п’ять у лінійку, а решта – в клітинку. Яка ймовірність того, що серед шести випадково вибраних зошитів два будуть у клітинку?

*Розв’язання.* Нехай подія  $A$  – серед шести вибраних зошитів два будуть у клітинку. Тоді чотири зошити будуть у лінійку. Оскільки учень має  $20-5=15$  зошитів у клітинку, то сприяють настанню події  $A$  число випадків  $m = C_{15}^2 \cdot C_5^4$ . Обрати шість зошитів серед двадцяти можна  $n = C_{20}^6$  способами. Тому ймовірність настання події  $A$  дорівнює:

$$P(A) = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^4}{C_{20}^6} = \frac{105 \cdot 5}{38760} \approx 0,0135.$$

### 1.2.2 Теорема додавання ймовірностей. Протилежні випадкові події

Сумою подій  $A$  та  $B$  називають подію  $C$ , яка полягає у виконанні під час одиничного випробування події  $A$  або  $B$ , або обох подій разом (хоча б однієї з них). Нижче розглянемо ймовірності суми двох несумісних подій  $A$  та  $B$ . Сума цих подій позначається, як  $A+B$  чи  $A$  або  $B$ . Справедлива наступна теорема, яка називається теоремою про додавання ймовірностей.

**Теорема 1.** Нехай при даному експерименті відбуваються випадкова подія  $A$  з ймовірністю  $P(A)$  та подія  $B$  з ймовірністю  $P(B)$ . Події  $A$  і  $B$  несумісні. Тоді ймовірність суми подій, тобто того, що з’явиться або подія  $A$  або подія  $B$ , дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.5)$$

*Доведення.* Нехай  $P(A) = \frac{m_1}{n}$ ,  $P(B) = \frac{m_2}{n}$ . Оскільки події несумісні, то при загальному числі випадків  $n$  число випадків, що сприяють появі подій  $A$  і  $B$  одночасно, дорівнює нулю, а число випадків, що сприяють появі або події  $A$  або події  $B$ , дорівнює  $m_1 + m_2$ . Отже,

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Аналогічним чином можна доказати цю теорему для будь-якого числа несумісних подій:

$$P(A + B + C + D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D). \quad (1.6)$$

**Приклад.** Стріляють по деякій області, яка складається з трьох непересічних зон. Ймовірність влучення в першу зону  $P(A) = 0,05$ , в другу зону  $P(B) = 0,1$ , в третю зону  $P(C) = 0,17$ . Яка імовірність влучити в область?

*Розв'язання.* За формулою (1.6) маємо:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,05 + 0,1 + 0,17 = 0,32.$$

Дві події називаються *протилежними*, якщо вони несумісні та утворюють повну групу випадкових подій. Якщо одну подію позначають через  $A$ , тоді протилежна подія позначається через  $\bar{A}$ . Нехай ймовірність появи події  $A$  дорівнює  $p$ , ймовірність не появи події  $A$ , тобто ймовірність появи події  $\bar{A}$ , позначимо через  $P(\bar{A}) = q$ . Оскільки при випробуванні обов'язково станеться або подія  $A$  або подія  $\bar{A}$ , то сума цих подій є подія



достовірна, тобто:  $p + q = 1$ . Тобто сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

**Приклад.** Проводиться один постріл по мішені. Ймовірність влучення в мішень дорівнює  $P(A) = 0,35$ . Тоді ймовірність промаху становить  $P(\bar{A}) = 1 - 0,35 = 0,65$ .

*Наслідок.* Якщо випадкові події  $A_1, A_2, \dots, A_n$  створюють повну групу несумісних подій, то справедлива рівність:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Випадкові події  $A$  і  $B$  називають *сумісними*, якщо при даному випробуванні поява однієї з них не виключає можливості появи іншої, тобто відбудеться суміщення подій  $A$  і  $B$ . Подію, що полягає в суміщенні подій  $A$  і  $B$ , позначимо через  $(A \text{ і } B)$  чи  $(AB)$ .

**Теорема 2.** Ймовірність появи принаймні однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх суміщення.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.7)$$

Аналогічним чином можна обчислити ймовірність суми будь-якого числа сумісних випадкових подій.

### 1.2.3 Теорема множення ймовірностей. Умовна ймовірність

Подію  $A$  називають *незалежною* від події  $B$ , якщо поява події  $B$  не змінює ймовірності появи події  $A$ .

*Добутком* двох подій  $A$  та  $B$  називають таку подію  $C$ , яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування подій  $A$  і  $B$  одночасно. Добуток позначають, як  $C = AB$ .

**Теорема 1.** Якщо випадкові події  $A$  і  $B$  незалежні, тоді ймовірність добутку подій дорівнює добутку ймовірностей появи подій  $A$  і  $B$ :

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.8)$$

*Доведення.* Проведемо доведення теореми за допомогою задачі кошиків. Нехай в кожному з двох кошиків відповідно знаходяться  $n_1$  і  $n_2$  куль. В першому кошику  $m_1$  червоних куль, а інші чорні. В другому кошику  $m_2$  червоних куль, а інші чорні. З кожного кошика вийняли по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть червоними?

Нехай подія  $A$  - виймання червоної кулі з першого кошика, а подія  $B$  - виймання червоної кулі з другого кошика. Ці події незалежні. Нехай  $P(A) = \frac{m_1}{n_1}$ ,  $P(B) = \frac{m_2}{n_2}$ . Всього можливих випадків одночасного виймання по одній кулі з кожного кошика буде  $n_1 \cdot n_2$ . Число випадків, що сприяють появі червоних куль з обох кошиків, буде  $m_1 \cdot m_2$ . Ймовірність добутку подій  $A$  і  $B$  буде:

$$P(A \text{ і } B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B).$$

Якщо маємо  $n$  незалежних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , тоді аналогічним чином можна довести виконання рівності:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (1.9)$$

Дві події  $A$  і  $B$  називаються *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша подія.

*Умовною ймовірністю* події  $A$ , залежної від події  $B$ , називають ймовірність, обчислену для події  $A$  в припущенні, що подія  $B$  вже відбулася і позначають  $P(A/B)$ . Наприклад, у коробці лежить три білих та дві чорних

кулі. З коробки беруть одну кулю і не повертають її назад. Якщо вийняли білу кулю ( подія  $B$ ), тоді ймовірність появи білої кулі при другому випробуванні (подія  $A$ ) дорівнює  $P(A/B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Якщо при першому випробуванні вийняли чорну кулю ( подія  $B$  не відбулась), тоді ймовірність появи білої кулі при другому випробуванні (подія  $A$ ) дорівнює  $P(A/\bar{B}) = \frac{3}{4}$ . Бачимо, що

$$P(A/B) \neq P(A/\bar{B}).$$

Події  $A$  і  $B$  - залежні.

**Теорема 2.** Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша подія вже настала:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (1.10)$$

*Доведення.* Нехай у кошику  $n$  куль, при цьому  $n_1$  білих та  $n_2$  чорних.

Нехай серед  $n_1$  білих куль  $n_1^*$  з дефектом, а решта нормальні. Нехай  $B$  - поява білої кулі, а  $A$  - поява білої кулі з дефектом. Отже,  $P(B) = \frac{n_1}{n}$ . Ймовірність появи

білої кулі з дефектом при умові, що з'явилась біла куля, буде  $P(A/B) = \frac{n_1^*}{n_1}$ .

Ймовірність появи білої кулі з дефектом є  $P(A \cap B)$ . Отже,  $P(A \cap B) = \frac{n_1^*}{n}$ . Але

$\frac{n_1^*}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_1^*}{n_1}$ . Звідки маємо:  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ . З формули (1.10) маємо, що

умовна ймовірність події  $A$  при умові здійснення події  $B$  визначається за допомогою формули:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

*Зауваження.* Застосуємо останню формулу до виразу  $P(B/A)$  :

$$P(B/A) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (1.11)$$

У рівностях (1.10) і (1.11) ліві частини рівні тому, що це одна й та сама ймовірність, отже, рівні і праві частини:

$$P(A/B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (1.12)$$

**Приклад.** Ймовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що її розв'яже Остап – 0,7. Знайти ймовірність того, що задачу не розв'яже жоден учень.

*Розв'язання.* Ймовірність того, що Оленка не розв'яже задачу, дорівнює  $1-0,8=0,2$ ; ймовірність того, що Остап не розв'яже задачу, дорівнює  $1-0,7=0,3$ ; ймовірність того, що задачу не розв'яжуть ані Оленка, ані Остап, дорівнює  $0,2 \cdot 0,3=0,06$ .

**Приклад.** У токаря є тринадцять конусних і сімнадцять циліндричних деталей. Він навмання взяв одну деталь, а потім іншу. Знайти ймовірність того, що перша деталь конусна, а друга – циліндрична.

*Розв'язання.* Нехай  $A$  – перша деталь конусна,  $B$  – друга деталь циліндрична. Ймовірність того, що перша деталь конусна  $P(A) = \frac{13}{30}$ . Ймовірність того, що друга деталь циліндрична, обчислимо за умови, що перша взята деталь є конусною:  $P(B/A) = \frac{17}{29}$ . Тоді шукана ймовірність

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870}.$$

### 1.2.4 Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Припустимо, що подія  $A$  може відбуватися в різних умовах, яким відповідають попарно несумісні події  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , які утворюють повну групу і які назвемо *гіпотезами*. Нехай відомі ймовірності  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$  та умовні ймовірності  $P(A/B_1), P(A/B_2), \dots, P(A/B_n)$ . Як знайти  $P(A)$  в даній ситуації?

**Теорема.** Якщо  $B_1, B_2, \dots, B_n$  - повна група попарно несумісних подій і  $P(B_i) > 0, i = \overline{1, n}$ , то для будь-якої події  $A$  справедлива рівність:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A/B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i). \quad (1.13)$$

Рівність (1.13) називають *формулою повної ймовірності*. Вона виражає ймовірність події  $A$  за умови, що відбулася одна і тільки одна з попарно несумісних подій  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

*Доведення.* Подія  $A$  може відбуватися при виконанні будь-якого з сумісних подій:  $(B_1 \text{ і } A), (B_2 \text{ і } A), \dots, (B_n \text{ і } A)$ . Отже, за теоремою суми ймовірностей отримаємо:

$$P(A) = P(B_1 \text{ і } A) + P(B_2 \text{ і } A) + \dots + P(B_n \text{ і } A).$$

Замінюючи доданки правої частини за формулою (1.10), отримаємо рівність (1.13).

**Приклад.** Ймовірності влучення в ціль з двох гармат відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Береться навмання одна гармата і з неї один раз стріляють. Знайти ймовірність того, що ціль була вражена.

*Розв'язання.* Нехай  $A$  і  $B$  – обрання гармати, з якої стріляють. Ймовірності обрання відповідно дорівнюють  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ . Нехай  $C$  - влучення в ціль одним пострілом. З умови задачі умовні ймовірності влучення

в ціль відповідно дорівнюють:  $P(C/A)=0,6$  і  $P(C/B)=0,9$ . Підставляючи отримані ймовірності в формулу (1.13), визначимо ймовірність влучення в ціль одним пострілом:

$$P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = \frac{1}{2} \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,75.$$

Припустимо тепер, що подія  $A$  відбулась. Це змінить ймовірності гіпотез  $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ . Необхідно визначити умовні ймовірності здійснення цих гіпотез в припущенні, що подія  $A$  відбулась, тобто визначити  $P(B_1/A), P(B_2/A), \dots, P(B_n/A)$ . За формулою множення ймовірностей (1.12) знайдемо ймовірність  $P(A \cap B_1)$ :

$$P(A \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) = P(A) \cdot P(B_1/A).$$

Звідки

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)}.$$

Підставляючи замість  $P(A)$  формулу повної ймовірності, отримаємо:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}.$$

Аналогічним чином визначаються і  $P(B_2/A), P(B_3/A), \dots, P(B_n/A)$ . Отже

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}. \quad (1.14)$$

Формули (1.14) називаються *формулами Байєса (формулами ймовірностей гіпотез)*.

**Приклад.** 30% приладів збирає фахівець високої кваліфікації і 70% - середньої кваліфікації. Надійність роботи приладу, зібраного фахівцем високої

кваліфікації - 0,9, надійність приладу, зібраного фахівцем середньої кваліфікації - 0,8. Взятий прилад виявився надійним. Знайти ймовірність того, що прилад зібраний фахівцем високої кваліфікації.

*Розв'язання.* Нехай  $A$  – безвідмовна робота приладу. До перевірки приладу можливі такі гіпотези:

$B_1$  – прилад зібраний фахівцем високої кваліфікації,

$B_2$  – прилад зібраний фахівцем середньої кваліфікації.

Ймовірності цих гіпотез відповідно:  $P(B_1)=0,3$  і  $P(B_2)=0,7$ . Умовні ймовірності подій  $P(A/B_1)=0,9$  і  $P(A/B_2)=0,8$ . Визначимо ймовірності гіпотез  $B_1$  і  $B_2$  при умові, що подія  $A$  відбулася. За формулою (1.14) маємо:

$$P(B_1/A) = \frac{0,3 \cdot 0,9}{0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,27}{0,83} = 0,325, \quad P(B_2/A) = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8} = \frac{0,56}{0,83} = 0,675.$$

## 1.2.5 Випробування Бернуллі

Серія повторних незалежних випробувань, у кожному з яких дана подія  $A$  має одну і ту ж саму ймовірність  $P(A)=p$ , яка не залежить від номера випробування, називається *схемою Бернуллі*. У схемі для кожного випробування можливі тільки два результати: 1) подія  $A$  відбулась – «успіх», 2) подія  $A$  не відбулась – «невдача» - подія  $\bar{A}$  з ймовірністю  $P(\bar{A})=q$ , причому  $p+q=1$ . Знайдемо у схемі Бернуллі ймовірність  $P_{m,n}$  того, що при  $n$  випробуваннях подія  $A$ , яка має одну і ту ж саму ймовірність  $P(A)=p$  для кожного випробування, відбудеться  $m$  разів. Подія  $A$  зустрічається рівно  $m$  разів, а подія  $\bar{A}$  рівно  $(n-m)$  разів в серії випробувань, оскільки випробування незалежні, тоді імовірність реалізації однієї такої сприятливої серії дорівнює

$p^m q^{n-m}$ . Всі сприятливі серії виходять в результаті вибору різних  $m$  номерів випробувань із загальної кількості  $n$  номерів і відповідно число їх  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . Звідки отримаємо *формулу Бернуллі*:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (1.15)$$

**Приклад.** Знайти ймовірність того, що в родині, яка має 5 дітей, буде дві дівчинки і три хлопчика. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,7.

*Розв'язання.* Ймовірність народження хлопчика  $p = 0,7$ , тоді ймовірність народження дівчинки дорівнює  $q = 1 - 0,7 = 0,3$ . Тоді ймовірність того, що серед п'яти дітей буде три хлопчики, за формулою (1.15) дорівнює:

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!2!} (0,7)^3 (0,3)^2 = \frac{3!4 \cdot 5}{3!2} \cdot 0,343 \cdot 0,09 = 0,309.$$

### 1.2.6 Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Якщо число випробувань  $n$  велике, тоді обчислення за формулою Бернуллі (1.15) стає скрутним. Лаплас отримав наближену формулу для ймовірності  $P_{m,n}$  появи події  $A$  рівно  $m$  разів, якщо  $n$  – достатньо велике.

**Теорема 1.** Нехай  $P(A) = p$  - ймовірність події  $A$ , причому  $0 < p < 1$  в кожному випробуванні стала, тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі подія  $A$  при  $n$  випробуваннях відбудеться рівно  $m$  разів, дорівнює:

$$P_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-t^2/2}, \quad \text{де } t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad (1.16)$$



де  $np$  - середнє значення числа появи  $m$  разів події  $A$  при  $n$  випробуваннях;  $m - np$  - відхилення числа появи події  $A$  від його середнього значення. При цьому чим більше  $n$ , тим розрахована ймовірність буде краще наближатися до точного значення  $P_{m,n}$ , отриманого за формулою Бернуллі. Також тим локальна теорема краще працює, чим ймовірність  $P(A) = p$  ближче до 0,5, і навпаки, дає суттєву погрішність при ймовірності близької до 0 або 1.

**Приклад.** Ймовірність влучення в ціль стрільцем при одиничному пострілі дорівнює  $p = 0,2$ . Яка ймовірність того, що при ста пострілах в ціль буде влучено рівно двадцять разів?

*Розв'язання.* Знайдемо ймовірність за формулами (1.16):

$$\sqrt{npq} = 4, \quad t = \frac{20 - 100 \cdot 0,2}{\sqrt{4}} = 0, \quad P_{20,100} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} = 0,1.$$

**Теорема 2.** Якщо ймовірність  $P(A) = p$  появи події  $A$  в кожному випробуванні незмінна, тоді ймовірність  $P_n(m_1 < m < m_2)$  того, що в  $n$  випробуваннях подія відбудеться не менше ніж  $m_1$  і не більше ніж  $m_2$  разів, наближено дорівнює:

$$P_n(m_1 < m < m_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

де

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \quad (1.17)$$

**Приклад.** Ймовірність влучення в ціль дорівнює  $p = 0,7$ . Знайти ймовірність того, що при ста пострілах в ціль буде влучено від 65 до 80 разів.

*Розв'язання.* Ймовірність промаху при кожному пострілі дорівнює  $q = 0,3$ . Обчислимо значення аргументів:

$$x_1 = \frac{65 - 100 \cdot 0,7}{\sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-5}{\sqrt{21}} \approx -1,09; \quad x_2 = \frac{80 - 70}{\sqrt{100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{10}{\sqrt{21}} \approx 2,18.$$

Підставляючи знайдені аргументи в інтегральну функцію Лапласа, отримаємо інтеграли, що не беруться. Тут необхідно скористатися таблицею значень інтегральної функції Лапласа. Отримаємо для наших значень:  $F(2,18) = 0,4854$ ,  $F(-1,09) = -F(1,09) = -0,3621$ . Тоді ймовірність того, що при 100 пострілах в ціль буде влучено від 65 до 80 разів:

$$P_{100}(65 < m < 80) = F(2,18) - F(-1,09) = 0,4854 + 0,3621 = 0,8475.$$

### 1.3 Випадкові величини та їх властивості

#### 1.3.1 Дискретна випадкова величина. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події  $\omega_i \in \Omega$  відповідає одне і лише одне число  $x$  або набір чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , тобто на множині  $\Omega$  визначена певна функція  $\alpha(\omega_i)$ , яка кожній елементарній події  $\omega_i$  ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору  $R_1$  або  $n$ -вимірного простору  $R_n$ . Цю функцію називають *випадковою величиною*. У разі, коли  $\alpha(\omega_i)$  відображує множину  $\Omega$  на одновимірний простір  $R_1$ , випадкову величину називають *одновимірною*. Якщо відображення здійснюється на  $R_n$ , то випадкову величину називають  *$n$ -вимірною*. Величина  $X$ , яка приймає в результаті випробування одне з кінцевої або нескінченної послідовності значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називається *дискретною випадковою величиною*, якщо кожному значенню  $x_n$  відповідає певна ймовірність  $P_n$  того,

що змінна величина  $x$  прийме значення  $x_n$ . З визначення випливає, що кожному значенню  $x_n$  відповідає ймовірність  $p_n$ . Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями, називають *законом розподілу дискретної випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$  можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини  $X$ , розміщених у порядку зростання, та відповідних їм ймовірностей:

Таблиця 1.1

$X = x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	.....	$x_n$
$P(X = x_i) = p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	.....	$p_n$

Те, що випадкова величина  $X$  прийме одне із значень послідовності  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , є подією достовірною, і тому повинна виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (1.18)$$

у випадку кінцевої послідовності значень, або

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

у випадку нескінченної послідовності значень.

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини  $F(x)$ , так звану інтегральну функцію. Функцію аргументу  $x$ , що визначає ймовірність

випадкової події  $X < x$ , називають *функцією розподілу ймовірностей*  $F(x) = P(X < x)$ . Цю функцію можна тлумачити так: внаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, менше за  $x$ . Наприклад,  $F(5) = P(X < 5)$  означає, що в результаті експерименту дискретна випадкова величина  $X$  може набути значення, яке міститься ліворуч від  $x = 5$ , що ілюструє рис. 1.2.

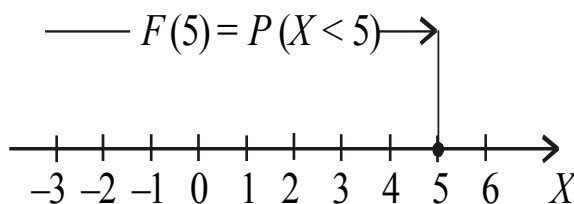


Рис. 1.2

Розглянемо властивості  $F(x)$ :

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ . Ця властивість випливає з означення функції розподілу.
2.  $F(x)$  є неспадною функцією, а саме  $F(x_2) \geq F(x_1)$ , якщо  $x_2 > x_1$ .
3.  $F(-\infty) = 0$ , оскільки подія  $X < -\infty$  полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від  $-\infty$ , а така подія є неможливою.
4.  $F(+\infty) = 1$ , оскільки подія  $X < +\infty$  полягає в тому, що випадкова величина  $X$  набуває числового значення, яке міститься ліворуч від  $+\infty$ . Ця подія є достовірною, оскільки будь-яке число  $X = x < \infty$ .

**Приклад.** Змінна величина  $X$  є число очок, що випадають на верхній грані гральної кістки при її одноразовому киданні. Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини.

*Розв'язання.* Змінна величина  $X$  може приймати одне з наступних значень: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ймовірність випадання кожного значення дорівнює  $1/6$ . Отже, закон розподілу цієї випадкової величини буде мати вигляд:

Таблиця 1.2

$X$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

**Приклад.** Закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$  задано таблицею 1.3. Знайти функцію розподілу ймовірності цієї випадкової величини.

Таблиця 1.3

$X = x_i$	- 4	- 1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

*Розв'язання.* Згідно з властивостями  $F(x)$ , дістаємо наведені далі співвідношення.

- 1)  $F(-4) = P(X < -4) = 0$ ;
- 2)  $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0,1$ ;
- 3)  $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$ ;
- 4)  $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$ ;
- 5)  $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,7$ ;
- 6)  $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8$ ;
- 7)  $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) + P(X = 13) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 1$ .

### 1.3.2 Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини

Нехай маємо дискретну випадкову величину  $X$ , закон розподілу якої задається таблицею 1.1. Математичним сподіванням  $M(X)$  дискретної випадкової величини  $X$ , називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (1.19)$$

При цьому, як раніше вказувалося,  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Покажемо, що середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини при необмеженому зростанні числа випробувань прямує до її математичного сподівання. Нехай проводиться  $N$  незалежних випробувань. Припустимо, що значення  $x_1$  з'явилося  $n_1$  разів,  
значення  $x_2$  з'явилося  $n_2$  разів,  
.....  
значення  $x_k$  з'явилося  $n_k$  разів.

Випадкова величина  $X$  набуде значень  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Обчислимо середнє арифметичне значення отриманих значень величини  $X$  (позначимо через  $m(X)$ ):

$$m(X) = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \dots + x_k \frac{n_k}{N}.$$

Але оскільки при великій кількості випробувань  $N$  відносна частота  $\frac{n_i}{N}$

прямує до ймовірності появи значення  $x_i$ , тоді  $\sum_{i=1}^k x_i \frac{n_i}{N} \approx \sum_{i=1}^k x_i p_i$ . Отже,  
 $M(X) = m(X)$ .

Математичне сподівання випадкової величини  $X$  називається також *центром розподілу ймовірностей випадкової величини  $X$* . Термін «центр розподілу ймовірностей» введений за аналогією з назвою «центр ваги». Якщо на осі  $Ox$  в точках з абсцисами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  розміщені маси  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , то з аналітичної геометрії відомо, що абсциса центра ваги таких мас визначається за формулою

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k p_k}{\sum_{k=1}^n p_k}.$$

Якщо  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$ , тоді  $x_C = \sum_{k=1}^n x_k p_k$ . Ця формула співпадає по вигляду з формулою (1.19) для математичного сподівання.

Розглянемо далі різницю між випадковою величиною та її математичним сподіванням  $X - M(X)$ . Цю випадкову величину назовемо *центрованою випадковою величиною* або *відхиленням*. Знайдемо математичне сподівання центрованої випадкової величини:

$$\begin{aligned} M(X - M(X)) &= \sum_{k=1}^n (X_k - M(X)) p_k = \sum_{k=1}^n X_k p_k - \sum_{k=1}^n M(X) p_k = \\ &= M(X) - M(X) \sum_{k=1}^n p_k = M(X) - M(X) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

Іноді буває доцільно достовірну постійну величину  $c$  розглядати як випадкову величину, яка з ймовірністю 1 приймає значення  $c$ , а інші значення

приймає з ймовірністю 0. Тоді має сенс говорити про математичне сподівання сталої  $M(c) = c \cdot 1 = c$ , тобто математичне сподівання сталої дорівнює самій цій сталій.

Крім математичного сподівання випадкової величини  $X$ , кількісною характеристикою розподілу випадкової величини є дисперсія випадкової величини  $X$ . Слово «дисперсія» означає розсіювання. Дисперсія є *кількісною характеристикою розсіювання значень випадкової величини* навколо її математичного сподівання.

*Дисперсією* випадкової величини  $X$  називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad (1.20)$$

або

$$D(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - M(X))^2 p_k. \quad (1.21)$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Іноді, для характеристики розсіювання, зручніше користуватися величиною, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини. Такою величиною є середнє квадратичне відхилення.

*Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини  $X$  називають корінь квадратний з її дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (1.22)$$

При обчисленні дисперсії формулу (1.21) зручніше перетворити так:



$$\begin{aligned}
D(X) &= \sum_{k=1}^n (x_k - M(X))^2 p_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2 \sum_{k=1}^n x_k M(X) p_k + \sum_{k=1}^n M^2(X) p_k = \\
&= \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k - 2M(X) \sum_{k=1}^n x_k p_k + M^2(X) \sum_{k=1}^n p_k = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + \\
&+ M^2(X) \cdot 1 = M(X^2) - M^2(X).
\end{aligned}$$

Отже,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \quad (1.23)$$

тобто дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадрата математичного сподівання випадкової величини.

Розглянемо *властивості дисперсії*:

1. Якщо  $C$  — стала величина, то  $D(C) = 0$ . Справді:

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

2.  $D(CX) = C^2 D(X)$ . Маємо:

$$\begin{aligned}
D(CX) &= M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = \\
&= M(C(X - M(X)))^2 = C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X).
\end{aligned}$$

**Приклад.** Закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$  задано таблицею 1.4. Обчислити  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

Таблиця 1.4

$x_i$	-4	-2	1	2	4	6
$p_i$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

*Розв'язання.* Згідно з формулами (1.19), (1.22), (1.23) маємо:

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{i=1}^6 x_i p_i = -4 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,1 = \\ &= -0,4 - 0,4 + 0,3 + 0,4 + 0,4 + 0,6 = 0,9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i = 16 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 + 36 \cdot 0,1 = \\ &= 1,6 + 0,8 + 0,3 + 0,8 + 1,6 + 3,6 = 8,7; \end{aligned}$$

$$D(X) = 8,7 - (0,9)^2 = 8,7 - 0,81 = 7,89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7,89} \approx 2,8.$$

### 1.3.3 Неперервна випадкова величина і її закон розподілу ймовірностей

Якщо значення, які може приймати дана величина  $X$ , заповнюють кінцевий або нескінченний інтервал  $(\alpha, \beta)$  числової осі  $Ox$ , то така випадкова величина називається *неперервною*. Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати за допомогою густини ймовірностей  $f(x)$ .

**Теорема.** Нехай  $f(x)$  є густиною розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини  $X$ . Тоді імовірність того, що значення випадкової величини  $X$  потрапляє у деякий інтервал  $(\alpha, \beta)$ , дорівнює визначеному інтегралу від функції  $f(x)$  в границях від  $\alpha$  до  $\beta$ , тобто справедлива рівність:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (1.24)$$

Таким чином, знаючи густину розподілу ймовірностей випадкової величини, можна визначити ймовірність того, що значення неперервної випадкової величини потрапило у заданий інтервал. Геометрично ця ймовірність дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції, яка обмежена кривою функції  $f(x)$ , віссю  $Ox$  та прямими  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ .

Функція густини ймовірностей  $f(x)$  має наступні *властивості*:

1.  $f(x) \geq 0$ .
2. Умова нормування неперервної випадкової величини  $X$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

3. Якщо неперервна випадкова величина  $X$  визначена лише на проміжку  $[\alpha, \beta]$ , то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1.$$

Нехай  $f(x)$  є густина розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини  $X$ , тоді функція

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (1.25)$$

називається *функцією розподілу ймовірностей* неперервної випадкової величини. З рівності (1.25) випливає, що

$$f(x) = F'(x).$$

Таким чином, можна надати наступне визначення: *густиною ймовірностей* неперервної випадкової величини  $X$  називається перша похідна від функції розподілу ймовірностей  $F(x)$ . Іноді функцію  $f(x)$  називають *диференціальною*

функцією розподілу ймовірностей, а  $F(x)$  – інтегральною функцією розподілу ймовірностей. Функція розподілу ймовірностей  $F(x)$  для неперервної випадкової величини має такі ж властивості, як і функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини ( див. 1.2.1).

**Теорема.** Ймовірність попадання випадкової величини  $X$  у заданий інтервал  $(\alpha, \beta)$  дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x) = F(x) \big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1.26)$$

Розглянемо далі випадкову величину із *законом рівномірного розподілу ймовірностей*. Закон розподілу або густина розподілу  $f(x)$  такої випадкової величини задається наступним чином:

$$f(x) = 0 \text{ при } x < \alpha ,$$

$$f(x) = c \text{ при } \alpha < x < \beta ,$$

$$f(x) = 0 \text{ при } \beta < x .$$

На інтервалі  $(\alpha, \beta)$  густина  $f(x)$  має незмінне значення  $c$ , а поза цим інтервалом дорівнює нулю. Такий розподіл також називають *законом рівномірної густини*. З умови  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  знаходимо значення  $c$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} cdx = c(\beta - \alpha) = 1,$$

отже,

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \beta - \alpha = \frac{1}{c}.$$

З останньої рівності випливає, що інтервал  $(\alpha, \beta)$ , на якому визначений рівномірний розподіл, обов'язково кінцевий. Визначимо ймовірність того, що випадкова величина  $X$  прийме значення, що лежить в інтервалі  $(a, b)$ :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

Знайдемо інтегральний закон розподілу  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ .

Якщо  $x < \alpha$ , тоді  $f(x) = 0$  і, відповідно,

$$F(x) = 0.$$

Якщо  $\alpha < x < \beta$ , тоді  $f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$  і, відповідно

$$F(x) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Якщо  $\beta < x$ , тоді  $f(x) = 0$  і, відповідно,  $\int_b^x f(x)dx = 0$ , звідки

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1.$$

**Приклад.** Закон розподілу неперервної випадкової величини  $X$  такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти  $f(x)$  і ймовірність попадання випадкової величини  $X$  в інтервал  $(0,2)$ .

$$\text{Розв'язання. } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{3}{64}(x+1)^2, & -1 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Ймовірність події  $P(0 < X < 2)$  обчислимо за формулою (1.26):

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Або згідно з формулою (1.24) маємо також:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 2) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{64} (x+1)^2 dx = \\ &= \frac{3}{64} \int_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64} \left. \frac{(x+1)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}. \end{aligned}$$

### 1.3.4 Числові характеристики неперервної випадкової величини

Аналогічно тому, як це було зроблено раніше для дискретної випадкової величини, розглянемо числові характеристики неперервної випадкової величини  $X$  із щільністю розподілу  $f(x)$ . Математичне сподівання неперервної випадкової величини  $X$  із густиною розподілу  $f(x)$  визначається виразом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (1.27)$$

Якщо неперервна випадкова величина  $X$  може приймати значення тільки на кінцевому відрізку  $[\alpha, \beta]$ , математичне сподівання  $M(X)$  визначається формулою:

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx. \quad (1.28)$$

Математичне сподівання  $M(X)$  називають центром розподілу ймовірностей випадкової величини  $X$ . Якщо крива розподілу симетрична відносно осі  $Oy$ , тобто  $f(x)$  - функція парна, тоді очевидно, що

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.$$

В цьому випадку центр розподілу ймовірностей співпадає з початком координат. Розглянемо центровану випадкову величину  $X - M(X)$ . Знайдемо її математичне сподівання:

$$\begin{aligned} M(X - M(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X)) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx - M(X) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \\ &= M(X) - M(X) \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Як і для дискретної величини, математичне сподівання неперервної центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

*Дисперсією* неперервної випадкової величини  $X$  називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx. \quad (1.29)$$

Якщо неперервна випадкова величина  $X$  може приймати значення тільки на кінцевому відрізку  $[\alpha, \beta]$ , тоді дисперсія дорівнює:

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - M(X))^2 f(x) dx. \quad (1.30)$$

При обчисленні дисперсії формулу (1.30) краще перетворити так:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} 2x \cdot M(X) f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} M^2(X) f(x) dx = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - 2M(X) \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx + M^2(X) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - 2M^2(X) + M^2(X) \cdot 1 = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - M^2(X). \end{aligned}$$

$$D(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - M^2(X). \quad (1.31)$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною ( $D(x) \geq 0$ ). Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини  $X$  називають корінь квадратний з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Як і у випадку дискретної випадкової величини, дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують розсіювання значень неперервної випадкової величини.

**Приклад.** За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ \frac{\sqrt{x+4}}{3}, & -3 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

обчислити  $M(X)$ ,  $D(X)$ .

*Розв'язання.* Для обчислення  $M(X)$  та  $D(X)$  необхідно знайти густину ймовірностей



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ \frac{1}{6\sqrt{x+3}}, & -3 < x \leq 6; \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-3}^6 x f(x) dx = \int_{-3}^6 x \frac{1}{6\sqrt{x+3}} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+3 = z^2 \\ x = z^2 - 3 \\ dx = 2z dz \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int_0^3 \frac{z^2 - 3}{z} 2z dz = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 (z^2 - 3) dz = \frac{1}{3} \left( \int_0^3 z^2 dz - 3 \int_0^3 dz \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{z^3}{3} \Big|_0^3 - 3z \Big|_0^3 \right) = \frac{1}{3} (9 - 9) = 0; \end{aligned}$$

Знайдемо D(x):

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-3}^6 x^2 f(x) dx - 0 = \int_{-3}^6 x^2 \frac{1}{6\sqrt{x+3}} dx = \frac{1}{6} \int_{-3}^6 \frac{x^2}{\sqrt{x+3}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+3 = z^2 \\ x = z^2 - 3 \\ dx = 2z dz \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} -3 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int_0^3 \frac{(z^2 - 3)^2}{z} 2z dz = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 (z^2 - 3)^2 dz = \frac{1}{3} \left( \int_0^3 z^4 dz - 6 \int_0^3 z^2 dz + 9 \int_0^3 dz \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{z^5}{5} \Big|_0^3 - 6 \frac{z^3}{3} \Big|_0^3 + 9z \Big|_0^3 \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{243}{5} - 54 + 9 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{243 - 270 + 45}{5} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

### 1.3.5 Мода та медіана випадкової величини

Модою  $M_o$  дискретної випадкової величини  $X$  називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність його появи.

Модою для неперервної випадкової величини  $X$  називають те її можливе значення, якому відповідає максимальна щільність ймовірності  $f(M_o) = \max$ .

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною  $M_e$  неперервної випадкової величини  $X$  називають те її значення, для якого виконуються рівність ймовірностей подій:

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx = \int_{M_e}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

або

$$P(-\infty < X < M_e) = P(M_e < X < \infty) = \frac{1}{2},$$

тобто рівноймовірно, що випадкова величина  $X$  прийме значення, менше ніж  $M_e$  і більше ніж  $M_e$ . Зауважимо, що сама випадкова величина  $X$  може значення  $M_e$  і не приймати.

**Приклад.** Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини  $X$  — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти  $M_o$ .

*Розв'язання.* Можливі значення випадкової величини:  $X = 0, 1, 2, 3$ .

Ймовірності цих можливих значень такі:

$$p_1 = (0,2)^3 = 0,008;$$

$$p_2 = 3p q^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,04 = 0,096;$$

$$p_3 = 3p^2 q = 3 \cdot 0,64 \cdot 0,2 = 0,384;$$

$$p_4 = p^3 = (0,8)^3 = 0,512.$$

Визначаємо, що  $M_o = 3$ . Отже, дістаємо одномодальний розподіл.

## 1.4 Системи випадкових величин

### 1.4.1 Системи дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

На одному й тому самому просторі елементарних подій  $\Omega$  можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба постає, наприклад, коли досліджуваний об'єкт характеризується кількома випадковими параметрами. Так, у разі виготовлення валів такі їх параметри, як діаметр, довжина, овальність є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. Або, скажімо, структура витрат випадково взятої окремої сім'ї на їжу, одяг, взуття, транспорт, задоволення духовних потреб також є випадковими величинами, визначеними на одному й тому самому просторі елементарних подій. На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини. Одночасна поява внаслідок проведення експерименту  $n$  випадкових величин  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  з певною ймовірністю являє собою  $n$ -вимірну випадкову величину, яку називають також *системою  $n$  випадкових величин*, або  *$n$ -вимірним випадковим вектором*.

*Законом розподілу системи двох дискретних випадкових величин* називають перелік можливих значень  $X = x_i$ ,  $Y = y_j$  та відповідних їм ймовір-

ностей спільної появи. Цей закон представлений у вигляді табл.1.5.

Таблиця 1.5

$Y = y_i \backslash X = x_j$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_k$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$\dots$	$p_{1k}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$	$\dots$	$p_{2k}$
$x_3$	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	$\dots$	$p_{3k}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	$p_{m3}$	$\dots$	$p_{mk}$

Тут  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ ,  $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ ,  $p_{ij}$  – ймовірність події, яка полягає в одночасному виконанні рівностей  $X = x_i$ ,  $Y = y_j$ . При цьому

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k p_{ij} = 1.$$

Таблиця може містити нескінченну множину рядків і стовпців.

Математичні сподівання дискретних випадкових величин  $X$  і  $Y$ , які входять в систему, визначаються за формулами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_i p_{ij}, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k y_j p_{ij}. \quad (1.32)$$

Точка  $(M(X), M(Y))$  називається *центром розсіювання* системи випадкових величин  $X$  та  $Y$ .

Дисперсії дискретних випадкових величин  $X$  і  $Y$  визначаються за формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_i - M(X))^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (y_j - M(Y))^2 p_{ij}. \quad (1.33)$$

Також для обчислення дисперсій можуть бути застосовані формули:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \quad D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y). \quad (1.34)$$

*Середні квадратичні відхилення* випадкових величин  $X$  і  $Y$  визначаються за формулами:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}. \quad (1.35)$$

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та характер цього зв'язку. З відповідною метою застосовують так званий *кореляційний момент*:

$$K_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]. \quad (1.36)$$

Для дискретних випадкових величин кореляційний момент обчислюється за формулою:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_i - M(X))(y_j - M(Y)) p_{ij}. \quad (1.37)$$

Кореляційний момент також можна знайти за формулою:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y). \quad (1.38)$$

Випадкові величини  $X$  і  $Y$  називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них набути певне значення не залежить від того, яке значення набула інша величина. В цьому випадку:

$$M(XY) = M(X)M(Y), K_{xy} = 0.$$

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує *коефіцієнт кореляції*:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (1.39)$$

який є безрозмірною величиною і задовольняє умову

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Отже, якщо випадкові величини  $X$  та  $Y$  є незалежними, то  $K_{xy} = 0$  та  $r_{xy} = 0$ . Умова  $r_{xy} = 0$  є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин. Справді, може існувати система залежних випадкових величин, у якій коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин  $(X, Y)$ , яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом  $R$  із центром у початку координат. Дві випадкові величини  $X$  і  $Y$  називають *некорельованими*, якщо  $r_{xy} = 0$ , і *корельованими*, якщо  $r_{xy} \neq 0$ . Отже, якщо  $X$  і  $Y$  незалежні, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

**Приклад.** Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин  $(X, Y)$ . Обчислити  $M(X)$ ;  $D(X)$ ;  $M(Y)$ ;  $D(Y)$ ;  $K_{xy}$ ;  $r_{xy}$ .

Таблиця 1.6

$X = x_i \backslash Y = y_j$	5,2	10,2	15,2
2,4	0,01	0,2	0,09
4,4	0,2	0,02	0,18
6,4	0,19	0,08	0,03

*Розв'язання.* Знайдемо спочатку ймовірності:

$$\begin{aligned}
p_{x_i}(5,2) &= 0,01 + 0,2 + 0,19 = 0,4; & p_{x_i}(10,2) &= 0,2 + 0,02 + 0,08 = 0,3; \\
p_{x_i}(15,2) &= 0,09 + 0,18 + 0,03 = 0,3; & p_{y_j}(2,4) &= 0,01 + 0,2 + 0,09 = 0,3; \\
p_{y_j}(4,4) &= 0,2 + 0,02 + 0,18 = 0,4; & p_{y_j}(6,4) &= 0,19 + 0,08 + 0,03 = 0,3.
\end{aligned}$$

Основні числові характеристики обчислюємо за формулами (1.32), (1.34), (1.35), (1.38) і (1.39):

$$\begin{aligned}
M(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i p_{x_i} = 5,2 \cdot 0,4 + 10,2 \cdot 0,3 + 15,2 \cdot 0,3 = \\
&= 2,08 + 3,06 + 4,56 = 9,7;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(X^2) &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_{x_i} = (5,2)^2 0,4 + (10,2)^2 0,3 + (15,2)^2 0,3 = \\
&= 10,816 + 31,212 + 69,312 = 111,34;
\end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 111,34 - 94,09 = 17,25;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 4,15;$$

$$\begin{aligned}
M(Y) &= \sum_{j=1}^3 y_j p_{y_j} = 2,4 \cdot 0,3 + 4,4 \cdot 0,4 + 6,4 \cdot 0,3 = \\
&= 0,72 + 1,76 + 1,92 = 4,4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(Y^2) &= \sum_{j=1}^3 y_j^2 p_{y_j} = (2,4)^2 0,3 + (4,4)^2 0,4 + (6,4)^2 0,3 = \\
&= 1,728 + 7,744 + 12,288 = 21,76;
\end{aligned}$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 21,76 - 19,36 = 2,4;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 1,55;$$

$$\begin{aligned}
M(XY) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i y_j p_{ij} = 2,4 \cdot 5,2 \cdot 0,01 + 2,4 \cdot 10,2 \cdot 0,2 + \\
&+ 2,4 \cdot 15,2 \cdot 0,09 + 4,4 \cdot 5,2 \cdot 0,2 + 4,4 \cdot 10,2 \cdot 0,02 + \\
&+ 4,4 \cdot 15,2 \cdot 0,18 + 6,4 \cdot 5,2 \cdot 0,19 + 4 \cdot 10,2 \cdot 0,08 + \\
&+ 6,4 \cdot 15,2 \cdot 0,03 = 0,1248 + 4,896 + 3,2832 + 4,576 + \\
&+ 0,8976 + 12,0384 + 6,3232 + 5,2224 + 2,9184 = 40,28; \\
K_{xy} &= M(XY) - M(X) M(Y) = 40,28 - 9,7 \cdot 4,4 = \\
&= 40,28 - 42,68 = -2,4.
\end{aligned}$$

Оскільки  $K_{xy} \neq 0$ , то між відповідними величинами існує кореляційний зв'язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-2,4}{4,15 \cdot 1,55} \approx -0,37.$$

#### 1.4.2 Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини  $X$  при фіксованому значенні  $Y = y_j$  називається перелік можливих значень випадкової величини  $X = x_i$  та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні  $Y = y_j$ . У табличній формі запису умовний закон  $X / Y = y_j$  має такий вигляд (табл. 1.7):

Таблиця 1.7

$X = x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_m$
$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}$	$P_{1j} / P_{y1}$	$P_{2j} / P_{y2}$	$P_{3j} / P_{y3}$	...	$P_{mj} / P_{ym}$

При цьому має виконуватись умова нормування:



$$\sum_{i=1}^m P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^m \frac{P_{ij}}{P_{y_j}} = \frac{1}{P_{y_j}} \sum_{i=1}^m P_{ij} = \frac{P_{y_j}}{P_{y_j}} = 1. \quad (\sum_{i=1}^m P_{ij} = P_{y_j}).$$

Числові характеристики для цього закону називають умовними.

*Умовне математичне сподівання:*

$$\begin{aligned} M(X / Y = y_j) &= \\ &= \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i / Y = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{P_{ij}}{P_{y_j}} = \frac{1}{P_{y_j}} \sum_{i=1}^m x_i P_{ij}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

*Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення:*

$$D(X / Y = y_j) = \frac{1}{P_{y_j}} \sum_{i=1}^m x_i^2 P_{ij} - M^2(X / Y = y_j); \quad (1.41)$$

$$\sigma(X / Y = y_j) = \sqrt{D(X / Y = y_j)}. \quad (1.42)$$

Умовним законом розподілу випадкової величини  $Y$  при фіксованому значенні  $X = x_i$  називається перелік можливих значень випадкової величини  $Y = y_j$  і відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні  $X = x_i$ . Форма запису умовного закону має такий вигляд (табл. 1.8):

Таблиця 1.8

$Y = y_j$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_m$
$P(Y = y_j / X = x_i) =$ $= \frac{P((Y = y_j) \cap (X = x_i))}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{x_i}}$	$P_{i1} / P_{x1}$	$P_{i2} / P_{x2}$	$P_{i3} / P_{x3}$	$\dots$	$P_{im} / P_{xm}$

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{j=1}^m P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^m \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m P_{ij} = \frac{P_{x_i}}{P_{x_i}} = 1. \quad (\sum_{j=1}^m P_{ij} = P_{x_i}).$$

Умовне математичне сподівання дорівнює:

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m y_j P_{ij}. \quad (1.43)$$

Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення обчислюються відповідно за формулами:

$$D(Y / X = x_i) = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m y_j^2 P_{ij} - M^2(Y / X = x_i). \quad (1.44)$$

$$\sigma(Y / X = x_i) = \sqrt{D(Y / X = x_i)}. \quad (1.45)$$

### 1.4.3 Системи неперервних випадкових величин та їх закон розподілу ймовірностей

Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин  $(X, Y)$  задають за допомогою функції розподілу ймовірностей  $F(x, y)$  або функції густини ймовірностей  $f(x, y)$ . Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин  $(X, Y)$  називають таку функцію двох аргументів  $x$  та  $y$ , яка визначає ймовірність одночасної появи подій  $(X < x)$  та  $(Y < y)$ :

$$F(x, y) = P((X < x) \cap (Y < y)). \quad (1.46)$$

Функція  $F(x, y)$  має такі властивості:

1.  $0 \leq F(x, y) \leq 1$ , оскільки  $0 \leq P((X < x) \cap (Y < y)) \leq 1$ .

2. Якщо один з аргументів  $F(x, y)$  прямує до  $+\infty$ , то функція розподілу

системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до  $+\infty$ , а саме:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F(y).$$

$$3. \lim_{\substack{y \rightarrow \infty, \\ x \rightarrow \infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = P(x < \infty, y < \infty) = 1.$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$$

5.  $F(x, y)$  є неспадною функцією аргументів  $x$  і  $y$ .

6. Ймовірність влучення точки  $(X, Y)$  у довільний прямокутник  $(a < X < b, c < Y < d)$  обчислюється за формулою:

$$P(a < x < b, c < y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c).$$

Розглянемо прямокутник зі сторонами  $\Delta x$  та  $\Delta y$  (рис. 1.3). Ймовірність розміщення системи  $(X, Y)$  у прямокутній області  $(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)$  обчислюється за формулою

$$P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) + F(x, y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y).$$

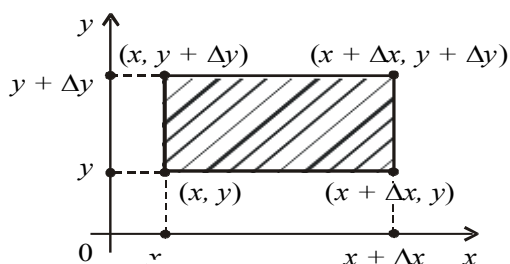


Рис. 1.3

Поділивши цю ймовірність на площу прямокутника  $\Delta x \Delta y$  і спрямувавши  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , дістанемо ймовірність у точці, тобто густину:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \\
& = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)) - (F(x + \Delta x, y) - F(x, y))}{\Delta x \Delta y} = \\
& = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \right. \\
& \left. - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \right) = \\
& = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F'_x(x, y + \Delta y) - F'_x(x, y)}{\Delta y} = F''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial_x \partial_y} = f(x, y).
\end{aligned}$$

Отже,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial_x \partial_y}.$$

Функція  $f(x, y)$  може існувати лише за умови, що  $F(x, y)$  є неперервною за аргументами  $x$  і  $y$  та двічі диференційовною. Функції  $f(x, y)$  у тривимірному просторі відповідає певна поверхня — так звана *поверхня розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин*  $(X, Y)$ .

Тоді  $f(x, y) dx dy$  — ймовірність розміщення системи двох випадкових величин у прямокутнику зі сторонами  $dx, dy$ .

*Властивості функції густини ймовірностей  $f(x, y)$ :*

1) Функція  $f(x, y) \geq 0$ , оскільки  $F(x, y)$  є неспадною відносно аргументів  $x$  і  $y$ .

Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин  $(X, Y)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (1.47)$$

2) Якщо всі випадкові точки  $(X, Y)$  належать кінцевій області  $D$ , то умова

нормування набуває вигляду:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1.$$

3) Ймовірність розміщення системи випадкових величин  $(X, Y)$  в області  $D$  обчислюється так:

$$P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.48)$$

4) Ймовірність розміщення системи змінних  $(X, Y)$  у прямокутній області  $D = (a < x < b, c < y < d)$ :

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

5) Функція розподілу ймовірностей системи двох змінних  $(X, Y)$  визначається з рівняння:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

#### **1.4.4 Числові характеристики системи неперервних випадкових величин**

*Математичні сподівання* неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$ , які входять в систему, визначаються за формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy; \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy. \quad (1.49)$$

*Дисперсії* неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$  визначаються за формулами:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x, y) dx dy; \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(Y))^2 f(x, y) dx dy; \quad (1.50)$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - M^2(X); \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy - M^2(Y). \quad (1.51)$$

*Середні квадратичні відхилення* неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$  визначаються за такими ж формулами, що і для дискретних величин, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

*Кореляційний момент* для неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - M(X)M(Y). \quad (1.52)$$

*Коефіцієнт кореляції* для неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$  визначається за формулою (1.39), як і для дискретних випадкових величин, причому також виконується умова  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ .

**Приклад.** Система випадкових величин  $X$  і  $Y$  підпорядкована закону розподілу з густиною

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x+y), & \text{в області } D; \\ 0, & \text{поза області } D. \end{cases}$$

Область  $D$  – квадрат, обмежений прямими  $x=0, x=3, y=0, y=3$ . Знайти: 1) коефіцієнт  $a$  ;  
2) імовірність попадання випадкової точки  $(X, Y)$  в квадрат  $Q$ , обмежений прямими  $x=1, x=2, y=1, y=2$  ;

- 3) математичні сподівання  $M(X)$  і  $M(Y)$ ;  
 4) середні квадратичні відхилення  $\sigma(X)$  і  $\sigma(Y)$ .

*Розв'язання.*

- 1) Коефіцієнт  $a$  знаходимо з умови нормування:  $a \int_0^3 \int_0^3 (x+y) dx dy = 1$ . Звідси

$$\begin{aligned} a \int_0^3 \int_0^3 (x+y) dx dy &= a \int_0^3 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^3 dx = a \int_0^3 \left( 3x + \frac{9}{2} \right) dx = \\ &= a \left[ \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{2} x \right]_0^3 = a \left( \frac{27}{2} + \frac{27}{2} \right) = 27a = 1, \end{aligned}$$

тобто  $a = \frac{1}{27}$ .

- 2) Імовірність попадання випадкової точки  $(X, Y)$  в квадрат  $Q$ :

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \subset Q] &= \frac{1}{27} \int_1^2 \int_1^2 (x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_1^2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx = \frac{1}{27} \int_1^2 \left( 2x + 2 - x - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{27} \int_1^2 \left( x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{1}{27} \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} x \right]_1^2 = \frac{1}{27} \left( 2 + 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

- 3) Знаходимо математичні сподівання  $M(X)$  і  $M(Y)$ :

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 x(x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left[ x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^3 dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left( 3x^2 + \frac{9}{2} x \right) dy = \\ &= \frac{1}{27} \left( x^3 + \frac{9}{4} x^2 \right)_0^3 = \frac{1}{27} \left( 27 + \frac{81}{4} \right) = \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(Y) &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 y(x+y) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left[ \frac{yx^2}{2} + y^2 x \right]_0^3 dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left( \frac{9}{2} y + 3y^2 \right) dy = \\ &= \frac{1}{27} \left( \frac{9}{4} y^2 + y^3 \right)_0^3 = \frac{1}{27} \left( \frac{81}{4} + 27 \right) = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Бачимо, що  $M(X) = M(Y)$ .

4) Щоб знайти  $\sigma(X)$  і  $\sigma(Y)$ , спочатку знайдемо дисперсії  $D(X)$  і  $D(Y)$ :

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 (x + y) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \left(x - \frac{7}{4} + y + \frac{7}{4}\right) dx dy = \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^3 dx dy + \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \left(y + \frac{7}{4}\right) dx dy = \frac{1}{27} \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^3 \cdot y \Big|_0^3 dx + \\ &+ \frac{1}{27 \cdot 2} \int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \cdot \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 \Big|_0^3 dx = \frac{1}{9} \frac{\left(x - \frac{7}{4}\right)^4}{4} \Big|_0^3 + \frac{1}{27 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} \left(x - \frac{7}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{361}{16} - \frac{49}{16}\right) \Big|_0^3 = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Відповідно, і  $D(Y) = \frac{11}{16}$ .

Отже, маємо середні квадратичні відхилення  $\sigma(X) = \sigma(Y) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{11}}{4}$ .

### 1.4.5 Умовні закони розподілу неперервних випадкових величин

Як і в системі двох дискретних випадкових величин, у системі двох неперервних випадкових величин розглядаються умовні закони розподілу.

Можна записати

$$F(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy; \quad F(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy. \quad (1.53)$$

Звідси



$$f(x) = F'(x) = \left( \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx \right)'_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad (1.54)$$

$$f(y) = F'(y) = \left( \int_{-\infty}^y \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \right)'_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (1.55)$$

Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин  $X$  і  $Y$ , що утворюють систему  $(X, Y)$ , визначаються умовними густинами ймовірностей  $f(x/y), f(y/x)$ :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}; \quad f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}. \quad (1.56)$$

Із (1.56) дістаємо

$$f(x, y) = f(x) f(y/x) = f(y) f(x/y). \quad (1.57)$$

Для умовних законів розподілу неперервних випадкових величин умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) dy = 1.$$

Якщо випадкові величини  $X$  та  $Y$  є незалежними, тоді

$$f(x/y) = f(x), \quad f(y/x) = f(y).$$

У цьому разі (1.57) набуває вигляду:

$$f(x, y) = f(x) f(y).$$

Для незалежних випадкових величин  $X$  та  $Y$  виконується рівність:

$$F(x, y) = F(x) F(y).$$

Числові характеристики для умовних законів розподілу ймовірностей дорівнюють:

$$M(X / y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x / y)dx; \quad (1.58)$$

$$M(Y / x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y / x)dy; \quad (1.59)$$

$$D(X / y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x / y)dx - M^2(X / y); \quad (1.60)$$

$$D(Y / x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y / x)dy - M^2(Y / x). \quad (1.61)$$

## 1.5 Математична статистика

### 1.5.1 Основні відомості з математичної статистики

*Математична статистика* — розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. При цьому статистичними даними називаються дані про число об'єктів в якій-небудь більш-менш поширеній сукупності, які мають ті або інші ознаки.

З'ясування закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, здійснюється за допомогою методів теорії ймовірностей. Аналіз статистичних даних може здійснюватися з метою:

а) оцінки невідомої ймовірності події; оцінки невідомої функції розподілу; оцінки невідомих параметрів розподілу, загальний вигляд якого відомий; оцінки залежності випадкової величини від одної або кількох

випадкових величин;

б) перевірки статистичних гіпотез про вигляд невідомого розподілу або про величину параметрів розподілу, вигляд якого відомий.

*Предмет і метод математичної статистики.* Статистичний опис сукупності об'єктів займає проміжне положення між індивідуальним описом кожного з об'єктів сукупності, з одного боку, і описом сукупності та її загальними властивостями, що зовсім не потребують її розчленовування на окремі об'єкти, — з іншого. В порівнянні з першим способом статистичні дані завжди більшою чи меншою мірою знеособлені і мають лише обмежену цінність у випадках, коли важливі саме індивідуальні дані. З іншого боку, в порівнянні з даними про спостережувані ззовні сумарні властивості сукупності, статистичні дані дозволяють глибше проникнути в сутність справи.

Метод дослідження, що спирається на розгляд статистичних даних про ті або інші сукупності об'єктів, називається *статистичним*. Статистичний метод застосовується у різноманітних областях знання. Проте риси статистичного методу в застосуванні до об'єктів різної природи такі своєрідні, що було б безглуздо об'єднувати, наприклад, соціально-економічну, фізичну статистику і тому подібне в одну науку.

Загальні риси статистичного методу в різних областях знання зводяться до підрахунку числа об'єктів, що входять в ті або інші групи, розгляду розподілу кількостей, ознак, до застосування вибіркового методу (у випадках, коли детальне дослідження всіх об'єктів поширеної сукупності складне), використання теорії ймовірності при оцінці достатності числа спостережень для тих або інших висновків і тому подібне. Ця формальна математична сторона статистичних методів дослідження, байдужа до специфічної природи об'єктів, що вивчаються, і становить предмет математичної статистики.

*Зв'язок математичної статистики з теорією ймовірностей.* Зв'язок математичної статистики з теорією ймовірностей має в різних випадках різний характер. Теорія ймовірностей вивчає не будь-які явища, а явища випадкові і

саме «ймовірнісні випадкові», тобто такі, для яких має сенс говорити про відповідні до них розподіли ймовірності. Проте, теорія ймовірності відіграє певну роль і при статистичному вивченні масових явищ будь-якої природи, які можуть не відноситися до категорії ймовірнісних випадкових. Це здійснюється через засновані на теорії ймовірностей теорію вибіркового методу і теорію помилок вимірювань. У цих випадках ймовірнісним закономірностям підпорядковані не самі явища, що вивчаються, а прийоми їх дослідження.

Найважливішу роль відіграє теорія ймовірностей і при статистичному дослідженні ймовірнісних явищ. Тут повною мірою знаходять застосування такі засновані на теорії ймовірності розділи математичної статистики, як теорія статистичної перевірки ймовірнісних гіпотез, теорія статистичної оцінки розподілів ймовірності і входних до них параметрів і так далі. Область же застосування цих глибших статистичних методів значно вужча, оскільки тут потрібно, щоб самі явища, що вивчаються, були підпорядковані достатньо визначеним ймовірнісним закономірностям. Проте застосування тієї ж теорії до аналізу економічних тимчасових рядів може призвести до грубих помилок з огляду на те, що входить у визначення стаціонарного процесу. Припущення наявності незмінних розподілів ймовірності, що зберігаються протягом тривалого часу, в цьому випадку, як правило, абсолютно неприйнятно.

### **1.5.2 Генеральна та вибіркова сукупності**

Вихідними поняттями математичної статистики є поняття генеральної сукупності і вибірки.

Під *генеральною сукупністю* розуміють множину всіх реально існуючих або навіть тільки умовно можливих однорідних об'єктів, які вивчають під кутом зору їхнього розподілу за деякою ознакою. Наприклад, це можуть бути множини людей за віком, множини тварин певного виду за вагою, множини

виробів певного найменування за якістю і т. ін. Тобто *генеральною сукупністю* називається сукупність всіх однорідних об'єктів, з яких проводиться вибірка.

*Вибірковою сукупністю* (або *вибіркою*) називається сукупність випадково відібраних однорідних об'єктів. Для того щоб за вибіркою можна було судити про властивості генеральної сукупності, вибірка має бути репрезентативною.

Вибірка називається *репрезентативною* (представницькою), якщо у вибірці присутні всі випадково відібрані однорідні об'єкти в тих самих пропорціях, що й у генеральній сукупності.

Оскільки практично будь-яка ознака генеральної сукупності допускає кількісну оцінку, то замість того, щоб говорити про розподіл одиниць сукупності за ознакою, можна говорити про розподіл деякої випадкової величини  $X$ . Експеримент, з яким пов'язана випадкова величина  $X$ , полягає у обранні одного представника даної сукупності, а значення  $x$ , якого набуває  $X$ , є значенням ознаки для цього представника.

Отже, з теоретико - ймовірнісного погляду *генеральна сукупність* – це випадкова величина  $X(\omega)$ , задана на просторі елементарних подій  $\Omega$ . Зрозуміло, що повний опис закону розподілу випадкової величини  $X$  можна отримати, з'ясувавши значення ознаки для всіх без винятку представників даної сукупності. В окремих ситуаціях так і роблять: наприклад, дані про розподіл мешканців тієї чи іншої країни щодо статі, віку, освіти і т. д. отримують у результаті загальних переписів населення, які проводяться один раз на кілька десятиліть. Однак такий спосіб суцільного обстеження всієї досліджуваної сукупності пов'язаний із низкою завад. Одна з них – це великий обсяг сукупності. У деяких випадках є ще й завада принципового характеру, яка полягає в тому, що сукупність, яку ми розглядаємо, не існує в готовому вигляді, а є лише визначеною в уяві. Наприклад, якщо нас цікавить розподіл похибки, яку допускає вимірювальний прилад, то досліджувана сукупність становитиме перелік усіх можливих вимірювань, які можна здійснити за допомогою даного

приладу. Зрозуміло, що обстежити всі елементи такої сукупності неможливо. В такому випадку кажуть, що генеральна сукупність є нескінченною.

Щоб подолати або обійти вказані труднощі, найчастіше чинять так: обстеження всієї сукупності замінюють обстеженням невеликої (до того ж вибраної навмання) її частини. Таку частину генеральної сукупності і називають *вибіркою*.

З теоретико-ймовірнісного погляду, вибірка з даної генеральної сукупності – це результати обмеженого ряду спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  випадкової величини  $X$ . Число  $n$ , яке відповідає кількості спостережень, що утворюють вибірку, називають *обсягом вибірки*, а числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – *елементами* або *варіантами вибірки*.

У статистиці інтерпретація вибірки та її окремих елементів допускає, залежно від контексту, два різних варіанти.

У першому (практичному) варіанті інтерпретації під  $x_1, x_2, \dots, x_n$  розуміють фактично спостережувані в даному конкретному  $n$ -кратному експерименті значення досліджуваної випадкової величини  $X$ , тобто конкретні числа.

Згідно з другим (теоретичним) варіантом інтерпретації під вибіркою  $x_1, x_2, \dots, x_n$  розуміють послідовність випадкових величин,  $i$ -тий член якої лише означає результат спостереження, який ми могли б отримати на  $i$ -му кроці  $n$ -кратного експерименту, пов'язаного із спостереженням досліджуваної випадкової величини  $X$ .

Якщо умови експерименту не змінюються від спостереження до спостереження і якщо  $n$ -кратний експеримент організований у такий спосіб, що результати спостереження на кожному ( $i$ -му) кроці ніяк не залежать від попередніх і не впливають на майбутні результати спостережень, то очевидно, що ймовірнісні закономірності поведінки  $i$ -го спостереження теоретичної вибірки залишаються одними і тими ж для всіх  $i=1, 2, \dots, n$  і цілковито визначаються законом розподілу ймовірностей спостережуваної випадкової

величини, тобто

$$P \{x_i < x\} = P \{X < x\} = F(x).$$

При цьому із взаємної незалежності спостережень вибірки впливає незалежність випадкових величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Якщо в межах теоретичного варіанту інтерпретації вибірки ряд спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  утворює послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин, то вибірка називається *випадковою*. Надалі, використовуючи теоретичний варіант інтерпретації вибірки, завжди будемо вважати, що ця вибірка є випадковою.

### 1.5.3 Числові характеристики вибіркової сукупності

Розмістивши результати вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в порядку зростання і записавши частоти  $n_i$ , з якими зустрічаються ці значення, дістанемо *варіаційний*, або *статистичний*, ряд у вигляді таблиці 1.9.

Таблиця 1.9

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$
Частоти	$n_1$	$n_2$	$\dots$	$n_k$

На основі такого ряду можна побудувати статистичну функцію розподілу

$$F_n^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n}.$$

Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то статистична функція розподілу збігається до теоретичної функції розподілу.

Статистичний ряд графічно подається *полігоном розподілу*. Щоб побудувати його, на осі абсцис відкладають значення реалізацій, а на осі ординат — відповідні їм частоти (відносні частоти). Здобуті точки з'єднують відрізками прямих. У разі, коли  $X$  — неперервна величина і обсяг вибірки великий, результати вибірки подають інтервальним рядом. Для цього область реалізацій розбивають на  $k$  інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Кількість інтервалів  $k \leq 5 \lg n$ , а їхню довжину  $\Delta x_i$  найчастіше беруть однаковою. Здобутий ряд геометрично подається гістограмою. Для побудови її на осі абсцис відкладають інтервали, а на них як на основах будують прямокутники, висота яких пропорційна до частоти (відносної частоти) інтервалу. Для вибіркової сукупності обчислюють числові характеристики — вибіркові випадкові функції: вибіркову середню  $\bar{X}$ , вибіркову дисперсію  $S^2$ , статистичні моменти розподілу тощо. Реалізації цих вибірових функцій знаходять за формулами, вигляд яких залежить від того, в якій формі подано вибіркові дані. Якщо вибіркові дані не згруповано, тоді:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.62)$$

Якщо вибіркові дані зведено у статистичний ряд, то

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (1.63)$$

Якщо дані подаються інтервальним рядом, то перехід до статистичного ряду виконують, обчислюючи для кожного інтервалу його середину.

Початкові і центральні статистичні моменти розподілу обчислюють відповідно за такими формулами:



$$v_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r \quad \text{і} \quad \mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r. \quad (1.64)$$

Формули, за якими центральні статистичні моменти подаються через початкові, аналогічні тим, які виконуються для теоретичних моментів розподілу. Крім того, розглядають звичайні і умовні моменти розподілу. Звичайні моменти обчислюють за формулою

$$h_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - C)^r. \quad (1.65)$$

У разі подання вибірових даних інтервальним рядом з однаковими довжинами інтервалів обчислення числових характеристик значно спрощується завдяки застосуванню умовних моментів розподілу. Якщо  $u_i$  — середини інтервалів і виконано заміну  $v_i = \frac{u_i - C}{\Delta x}$  за умови, що  $C$  — одне зі значень  $u_i$ ,

то значення  $v_i$  будуть цілими числами. Тоді умовні моменти розподілу:

$$h_r^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i^r n_i. \quad (1.66)$$

Звичайні моменти розподілу пов'язані з умовними формулою:

$$h_r = (\Delta x)^r h_r^*.$$

Це дає змогу обчислювати всі числові характеристики за допомогою умовних моментів розподілу:

$$\bar{x} = C + \Delta x h_1^*, \quad s^2 = (\Delta x)^2 \left( h_2^* - (h_1^*)^2 \right). \quad (1.67)$$

Дисперсію часто обчислюють за формулою:

$$s^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2.$$

Якщо розглядається вибірка із двовимірної сукупності  $(X, Y)$ , то за великого її обсягу зручною формою подання даних є кореляційна таблиця. Щоб побудувати її, області реалізацій за обома змінними розбивають на інтервали. В такому разі, як правило,  $\Delta x_i = \Delta x$  і  $\Delta y_j = \Delta y$ . Для перетинів відповідних інтервалів визначають частоти  $n_{ij}$ . Коли обчислюють числові характеристики, то кожний інтервал характеризують його серединою. Крім середніх значень і вибірових дисперсій для складових системи визначають статистичний кореляційний момент

$$K_{XY}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})n_{ij} \quad (1.68)$$

і вибіровий коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}^*}{s_x \cdot s_y}. \quad (1.69)$$

Побудувавши кореляційну таблицю з  $\Delta x_i = \Delta x$  і  $\Delta y_j = \Delta y$ , для обчислення числових характеристик можна використати умовні моменти розподілу. З цією метою виконують заміну змінних  $u_i = \frac{x_i - C_1}{\Delta x}$ ,  $v_j = \frac{y_j - C_2}{\Delta y}$  ( $C_1$  і  $C_2$  - відповідно деякі значення  $x_i$  і  $y_j$ ). Числові характеристики вибірки можна знайти за формулами:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= C_1 + \Delta x \bar{u}, \quad s_x^2 = (\Delta x)^2 (\bar{u}^2 - (\bar{u})^2) = (\Delta x)^2 s_u^2; \\ \bar{y} &= C_2 + \Delta y \bar{v}, \quad s_y^2 = (\Delta y)^2 (\bar{v}^2 - (\bar{v})^2) = (\Delta y)^2 s_v^2; \end{aligned}$$

$$K_{xy}^* = \Delta x \Delta y (\bar{u}\bar{v} - \bar{u}\bar{v}) = \Delta x \Delta y K_{uv}^*; \quad r_{xy} = \frac{K_{uv}^*}{s_u s_v}.$$

**Приклад.** У цеху встановлено п'ять верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти  $\max_x |F(x) - F_n^*(x)|$ , вважаючи, що виконується біноміальний закон розподілу з  $p = \frac{1}{3}$ . Обчислити  $\bar{x}$  і  $s^2$ .

*Розв'язання.* На основі вибірових даних складемо статистичний ряд (табл.1.10).

Таблиця 1.10

$x_i$	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою

$$F_n^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n};$$

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \leq 1; \\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1 < x \leq 2; \\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2 < x \leq 3; \\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3 < x \leq 4; \\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4 < x \leq 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Щоб визначити  $\max_x |F(x) - F_n^*(x)|$ , знайдемо функцію розподілу за

біноміальним законом з  $n = 5$  і  $p = \frac{1}{3}$ .

Обчислимо ймовірності за формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{32}{243}; & P(X=1) &= \frac{80}{243}; & P(X=2) &= \frac{80}{243}; & P(X=3) &= \frac{40}{243}; \\ P(X=4) &= \frac{10}{243}; & P(X=5) &= \frac{1}{243}. \end{aligned}$$

Запишемо теоретичну функцію розподілу згідно з формулою  $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ \frac{32}{243}, & \text{якщо } 0 < x \leq 1; \\ \frac{112}{243}, & \text{якщо } 1 < x \leq 2; \\ \frac{192}{243}, & \text{якщо } 2 < x \leq 3; \\ \frac{232}{243}, & \text{якщо } 3 < x \leq 4; \\ \frac{242}{243}, & \text{якщо } 4 < x \leq 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Визначимо модуль максимальної різниці значень теоретичної та статистичної функцій розподілу:

$$\begin{aligned} & \max_x |F(x) - F_n^*(x)| = \\ &= \max \left| 0 - 0; \frac{32}{243} - \frac{1}{5}; \frac{112}{243} - \frac{12}{25}; \frac{192}{243} - \frac{19}{25}; \frac{232}{243} - \frac{23}{25}; \frac{242}{243} - \frac{24}{25}; 1 - 1 \right| = \frac{83}{1215}. \end{aligned}$$

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \frac{1}{25} (7 + 14 + 12 + 4 + 5) = 1,68.$$

Дисперсію визначимо за формулою  $s^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$ . Знайдемо середнє значення квадрата  $x$ :

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{25} (7 + 28 + 36 + 16 + 25) = 4,48.$$

Отже,  $s^2 = 4,48 - (1,68)^2 = 1,6576$ .

Згідно з гіпотезою про закон розподілу теоретичні числові характеристики  $MX \approx 1,67$ ;  $DX \approx 1,11$ . Бачимо, що значення математичного сподівання і вибіркового середнього різняться мало, тоді як між теоретичною і вибірковою дисперсією різниця значна.

Вибірковий розподіл має два значення з найбільшою частотою, розподіл двомодальний, медіана розподілу  $m_e = 2$ . Розмах варіації  $R = 5 - 0 = 5$ .

#### 1.5.4 Перевірка статистичних гіпотез

Дані вибірових спостережень часто становлять основу для прийняття одного з кількох альтернативних рішень (продукція може бути бракованою або якісною, точність обробки виробу в межах норми або нижча від норми і т. д.). Із загальнометодологічного погляду тут йдеться про висунення деякої гіпотези, яку відхиляють або приймають після проведення деякого експерименту. Якщо цей експеримент має статистичний (стохастичний) характер, кажуть, що гіпотеза є статистичною. *Статистичною* називається гіпотеза, яка стосується виду або параметрів розподілу випадкової величини і яку можна перевірити на

основі результатів спостереження у випадковій вибірці. Перевіряючи статистичні гіпотези за результатами випадкової вибірки, завжди ризикують прийняти хибне рішення. Задача про статистичну перевірку статистичних гіпотез формулюється так. Розглядають деяку гіпотезу про те, що розподіл ймовірностей деякої випадкової величини має той чи інший вигляд, або параметри розподілу мають ті чи інші значення. Задача полягає у тому, щоб на основі вивчення статистичних даних (вибірки) підтвердити справедливність висунутої гіпотези чи спростувати її. При цьому вказується також ймовірність того, що прийняте рішення є правильним або помилковим. Проблема зменшення ймовірності того, що прийняте рішення є помилковим, є також однією із задач математичної статистики. У результаті статистичної перевірки гіпотези може бути прийняте одне з двох правильних рішень: 1) гіпотеза приймається і вона істинна; 2) гіпотеза відхиляється і вона хибна. Поряд із тим у результаті статистичної перевірки статистичної гіпотези можуть бути допущені помилки (прийняті неправильні рішення). Помилки, яких можна припуститися, бувають двох виглядів. Помилка першого вигляду полягає в тому, що гіпотеза  $H_0$  відхиляється, тоді як вона правильна. Помилка другого вигляду полягає у тому, що гіпотеза  $H_0$  приймається, тоді як вона хибна, а правильною є деяка гіпотеза  $H_1$ . Ця гіпотеза, яка протиставляється гіпотезі  $H_0$ , називається *альтернативною*. При цьому, хоча множина альтернативних гіпотез може бути нескінченною, висувається тільки одна альтернативна гіпотеза  $H_1$ . Статистичні гіпотези поділяються на прості і складні. *Проста гіпотеза* однозначно визначає закон розподілу випадкової величини. Для побудови статистичного критерію, який дає змогу перевірити деяку гіпотезу  $H_0$ , необхідно вибрати *статистичну характеристику* гіпотези  $Q$  — деяку вибіркову функцію, визначити припустиму ймовірність помилки першого роду  $\alpha$  (рівень значущості), сформулювати альтернативну гіпотезу  $H_1$ , знайти критичну область  $G$  для статистичної характеристики, щоб мінімізувати

ймовірність помилки другого роду. Критична область  $G$  — це така множина значень  $Q$ , що коли  $Q \in G$ , то гіпотеза  $H_0$  відхиляється на користь гіпотези  $H_1$ . Критична область визначається так, щоб ймовірність потрапляння в неї статистичної характеристики за умови, що правильна гіпотеза  $H_0$ , дорівнювала  $\alpha$  — заданому рівню значущості, тобто  $P(Q \in G / H_0) = \alpha$ . Крім того, необхідно, щоб  $P(Q \in G / H_1)$  була максимальною, тобто ймовірність помилки другого роду має бути мінімальною. Останнє співвідношення називається *вимогою максимізації потужності критерію*, який виражає ймовірність того, що не буде допущено помилки другого роду.

Статистичні гіпотези поділяються на *параметричні* і *непараметричні*. Параметричні гіпотези передбачають, що вигляд закону розподілу відомий і перевірка зводиться до перевірки значень невідомих параметрів. У разі, коли гіпотези  $H_0$  і  $H_1$  прості і розглядається неперервна випадкова величина, побудова критерію ґрунтується на теоремі Неймана — Пірсона. Коли гіпотеза, що перевіряється, і альтернативна їй гіпотеза є простими гіпотезами вигляду відповідно  $H_0: \theta = \theta_0$  і  $H_1: \theta = \theta_1$  і якщо  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0)$  і  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1)$  — функції правдоподібності, які знайдено за умови, що правильна відповідно гіпотеза  $H_0$  або  $H_1$ , то існує найпотужніший критерій для гіпотези  $H_0$  стосовно альтернативної гіпотези  $H_1$ . Критична область і статистична характеристика гіпотез визначаються нерівністю:  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1) \geq cL(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0)$ , де  $c$  — додатна стала, значення якої залежить від рівня значущості. Якщо принаймні одна з гіпотез  $H_0$  або  $H_1$  не є простою, нерівність не можна застосовувати. У цьому разі можна побудувати критерій, що ґрунтується на відношенні функцій правдоподібності (знову вважається, що розподіл у сукупності неперервний). Припустимо, що змінна  $X$  має густину вигляду  $f(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ , яка залежить від  $r$  параметрів, а гіпотеза  $H_0$  подається у вигляді:  $\bar{\theta} \in \omega$ , де  $\bar{\theta}$  —

вектор з  $s$  компонентами ( $s \leq r$ ), а  $\omega$  — деяка підмножина  $\Omega$  усіх можливих значень параметра. Гіпотеза  $H_1: \bar{\theta} \in \Omega \setminus \omega$ . Для побудови критерію визначають функцію правдоподібності  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{\theta})$ , а далі знаходять її максимуми для випадків, коли  $\bar{\theta} \in \omega$  і  $\bar{\theta} \in \Omega$ . Далі складають відношення:

$$\lambda = \frac{\max_{\bar{\theta} \in \omega} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{\theta})}{\max_{\bar{\theta} \in \Omega} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{\theta})}.$$

Значення  $\lambda$  завжди належить інтервалу  $(0;1)$ . Чим ближче  $\lambda$  до одиниці, тим правдоподібніша гіпотеза  $H_0$  і навпаки: чим ближче значення  $\lambda$  до нуля, тим більше підстав для відхилення  $H_0$ . Критична область для  $\lambda$  лівостороння. Вона визначається з умови:  $P(\lambda < \lambda_\alpha / H_0) = \alpha$ . Якщо відомий закон розподілу для  $\lambda$ , можна знайти границю критичної області для заданого критерію. Критерії, що ґрунтуються на відношенні функцій правдоподібності, асимптотично найпотужніші.

### 1.5.5 Основні параметричні статистичні критерії

1. Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої сукупності. Якщо дисперсія сукупності відома і дорівнює  $\sigma^2$ , то при  $H_0: a = a_0$  і  $H_1: a = a_1$  за статистичну характеристику береться вибіркова функція  $Z = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma} \sqrt{n}$ . Критична область визначається залежно від значення  $a_1$  і відповідно до рівня значущості  $\alpha$ . Можливі три випадки:

1. Якщо  $a_1 > a_0$ , то критична область правостороння. Її межа  $z_\alpha$



визначається за умовою:

$$P(Z \geq z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 - \Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

Тоді  $z_\alpha = \Phi^{-1}(0,5 - \alpha)$ .

2. Якщо  $a_1 < a_0$ , критична область лівостороння,  $z_\alpha = -\Phi^{-1}(0,5 - \alpha)$ .

3. Якщо  $a_1 \neq a_0$ , то критичній області належать значення  $z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$  і  $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$ . При цьому  $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(0,5 - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

Коли дисперсія сукупності невідома, то для перевірки гіпотези використовується вибіркова функція  $Z = \frac{\bar{X} - a_0}{s} \sqrt{n-1}$ , розподілена за законом Стюдента з  $n - 1$  степенями вільності. Вигляд критичної області визначають так само, як і в попередніх випадках, а межу знаходять за допомогою таблиць розподілу Стюдента з відповідною кількістю степенів вільності. Якщо  $n > 20$ , то розподіл Стюдента апроксимується нормальним розподілом з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

## 2. Перевірка гіпотези про дисперсію нормально розподіленої сукупності.

Коли рівень значущості дорівнює  $\alpha$ , перевіримо гіпотезу  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  за альтернативної гіпотези  $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$ . Якщо справджується гіпотеза, яка перевіряється, то вибіркова функція  $U = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$  має розподіл  $\chi^2$  з

$n - 1$  степенями вільності. Як і в попередніх випадках, вигляд критичної області визначається значенням  $\sigma_1^2$ . Межі критичної області визначаються так:

якщо  $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ , то критична область  $G$  правостороння,  $U_\alpha = \chi^2(\alpha)$ ;

якщо  $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ , то критична область  $G$  лівостороння,  $U_\alpha = \chi^2(1 - \alpha)$ ;

якщо  $\sigma_1^2 = \sigma_0^2$ , то критична область двостороння. Їй належать значення

$$U \leq u_1 \text{ і } U \geq u_2, \text{ де } u_1 = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \text{ а } u_2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

3. Перевірка гіпотези про істотність різниці математичних сподівань двох нормально розподілених сукупностей. Нехай задано дві нормально розподілені сукупності з однаковими дисперсіями, але, можливо, із різними математичними сподіваннями. Із цих сукупностей зроблено вибірки обсягом відповідно  $n_1$  і  $n_2$ . Числові характеристики вибірових сукупностей:  $\bar{X}_1, S_1^2$  і  $\bar{X}_2, S_2^2$ . Якщо позначити різницю  $a_1 - a_0 = \delta$ , то гіпотезу  $H_0: \delta = \delta_0$  можна перевірити за допомогою вибіркової функції

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}.$$

Якщо гіпотеза  $H_0$  правильна, то  $Z$  має розподіл Стюдента з  $n_1 + n_2 - 2$  степенями вільності. Залежно від значення  $\delta_1$  у альтернативній гіпотезі визначають критичну область за допомогою таблиць розподілу Стюдента, а в разі великих значень  $n_1$  і  $n_2$  — за допомогою таблиць функції Лапласа.

4. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей. Нехай задано дві нормально розподілені сукупності. На основі виборок обсягом  $n_1$  і  $n_2$  із цих сукупностей потрібно перевірити гіпотезу  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  за альтернативної гіпотези  $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ . Статистичною характеристикою для перевірки гіпотези  $H_0$  буде вибіркова

функція  $F = \frac{\frac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2}{\frac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2}$ . При побудові відношення чисельник має бути не

меншим від знаменника. Якщо гіпотеза  $H_0$  правильна, то вибіркова функція  $F$  має розподіл Фішера з  $n_1 - 1$  і  $n_2 - 1$  ступенями волі. Критична область  $G$  правостороння і визначається умовою  $P(F \geq f_\alpha) = \alpha$ .

5. Критерій дисперсійного аналізу. Нехай задано  $k$  нормально розподілених сукупностей з однаковими дисперсіями і, можливо, різними математичними сподіваннями. Із кожної сукупності зроблено вибірку обсягом  $n_i$ . Перевіряється гіпотеза  $H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_k$ . Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція

$$F = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2 n_i}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2},$$

де  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $X_{ij}$  —  $j$ -те значення випадкової величини  $X_i$ ;

$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ ;  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i n_i$ ; Якщо гіпотеза  $H_0$  правильна, то вибіркова

функція має розподіл Фішера з  $k - 1$  і  $n - k$  степенями вільності. Критична область правостороння і визначається так, як це було зроблено в попередньому пункті.

### 1.5.6 Критерії для перевірки непараметричних статистичних гіпотез

**Критерій Пірсона.** Критерій ґрунтується на порівнянні теоретичних і емпіричних частот. Нехай область реалізацій випадкової величини розбито на  $k$

інтервалів, частоти яких дорівнюють  $n_i$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ . Якщо гіпотеза про закон розподілу в сукупності правильна, то можна обчислити ймовірності  $p_i = P(x_{i-1} \leq X < x_i)$ , тобто ймовірність потрапляння випадкової величини у  $i$ -й інтервал. Теоретичні частоти потрапляння у цей інтервал можна розглядати як математичне сподівання компонентів випадкової величини, розподіленої за поліноміальним законом:

$$P(X_1 = m_1; X_2 = m_2; \dots; X_k = m_k) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (m_i)!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k};$$

$$MX_i = n'_i = np_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Статистичною характеристикою гіпотези є вибірка функція  $U = \sum_{i=1}^k \frac{(n'_i - n_i)^2}{n'_i}$ . Якщо  $n \rightarrow \infty$ , то вибірка функція має розподіл  $\chi^2$  з  $k - r - 1$  степенями вільності, де  $r$  — кількість параметрів, оцінки для яких знайдено за вибірковими даними. Критична область для статистичної характеристики правостороння.

**Критерій Колмогорова.** Критерій ґрунтується на порівнянні статистичної і теоретичної функцій розподілу. Якщо

$$D_n = \max_x |F_n^*(x) - F(x)|,$$

$$\text{то при } n \rightarrow \infty \quad P(\sqrt{n}D_n \geq \lambda_\alpha) \rightarrow 1 - K(\lambda),$$

$$\text{де } K(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 \lambda^2}, \quad \lambda > 0.$$

За допомогою таблиць розподілу Колмогорова визначається правостороння критична область.

**Приклад.** Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези  $H_0: a = a_0$  за альтернативної гіпотези  $H_1: a = a_1$ , якщо вибірку обсягом  $n$  зроблено з нормально розподіленої сукупності з дисперсією, що дорівнює  $\sigma^2$ . Дібрати таке значення  $C$ , при якому  $\alpha=0,02$ , якщо  $a_0 = 10$ ,  $a_1 = 12$ ,  $\sigma^2 = 9$ ,  $n = 25$ . Яка з гіпотез приймається, якщо  $\bar{x} = 10,9$ ?

*Розв'язання.* Застосуємо нерівність з теореми Неймана — Пірсона:  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1) \geq cL(x_1, x_2, \dots, x_n, a_0)$ . Побудуємо функції правдоподібності:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2},$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2}.$$

Підставимо функції правдоподібності в нерівність і виконаємо спрощення скороченням сталих множників. Дістанемо нерівність

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2} \geq C e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2},$$

яку прологарифмуємо і виконаємо низку перетворень:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2 \geq \ln C - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2;$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2 \right) \geq \ln C;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2a_0 \sum_{i=1}^n x_i + na_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2a_1 \sum_{i=1}^n x_i - na_1^2 \geq 2\sigma^2 \ln C;$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{2\sigma^2 \ln C + n(a_1^2 - a_0^2)}{2(a_1 - a_0)},$$

бо за умовою  $a_1 > a_0$ . Після заміни  $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$ , остаточно дістанемо

$$\bar{X} \geq \frac{2\sigma^2 \ln C + n(a_1^2 - a_0^2)}{2n(a_1 - a_0)}.$$

Отже, статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція  $\bar{X}$ , а критичною областю для неї — множина значень, не менших за  $\frac{2\sigma^2 \ln C + n(a_1^2 - a_0^2)}{2n(a_1 - a_0)}$ . Щоб дібрати значення  $C$ , потрібно знати закон розподілу вибіркової функції. Якщо справджується гіпотеза  $H_0$ , то вибірку зроблено з нормально розподіленої сукупності з  $a = 10$  і  $\sigma^2 = 9$ . Тоді  $M\bar{X} = 10$ , а  $D\bar{X} = 0,36$ . Центруємо і нормуємо вибірккову функцію, щоб застосувати таблиці функції Лапласа. Аналогічні перетворення виконуємо з правою частиною нерівності:

$$\frac{\bar{X} - 10}{0,6} \geq \left( \frac{18 \ln C + 25(144 - 100)}{50 \cdot 2} - 10 \right) \cdot \frac{5}{3}; \quad \frac{\bar{X} - 10}{0,6} \geq \frac{18 \ln C + 100}{60}.$$

Критична область правостороння, тому її межа  $z_\alpha = \Phi^{-1}(0,5 - \alpha)$ ;  $z_{0,02} = \Phi^{-1}(0,48) = 2,055$ . Отже,  $\frac{18 \ln C + 100}{60} = 2,055$ ;  $\ln C \approx 1,2944$ ;  $C \approx 3,649$ .

Якщо  $\bar{x} = 10,9$ , то  $\frac{\bar{x} - 10}{0,6} = \frac{0,9}{0,6} = 1,5$  не належить критичній області і гіпотеза

$H_0$  приймається.

## 2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

### 2.1 Комплексні числа та дії над ними

#### 2.1.1 Поняття комплексного числа

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз

$$z = x + iy,$$

де  $x, y$  – дійсні числа;  $i$  – уявна одиниця,  $i^2 = -1$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Числа  $x$  і  $y$  називаються відповідно *дійсною* і *уявною частинами* комплексного числа  $z$ . Позначаються

$$x = \operatorname{Re} z; \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Множина всіх комплексних чисел позначається  $C$ . Будь-яке дійсне число  $x$  можна розглядати як комплексне число  $z = x + i0 = x$ , у якого уявна частина дорівнює нулю:  $y = 0$ . Таким чином, множина дійсних чисел  $R$  є підмножиною множини комплексних чисел  $C$ . Комплексне число  $z = iy = 0 + iy$ ,  $y \neq 0$ , у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається *чисто уявним*. Два комплексних числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  називаються *рівними*, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Комплексне число *дорівнює нулю*  $z = 0$ , якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини:

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

*Зауваження.* Для комплексних чисел не існують поняття “більше”,

“менше”.

Комплексне число  $-z = -x - iy$  називається *протилежним* до числа  $z = x + iy$ . Два комплексних числа  $z = x + iy$  і  $\bar{z} = x - iy$ , у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються *комплексно спряженими*. Очевидно, що  $\overline{\bar{z}} = z$ .

### 2.1.2 Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня здійснюються за правилами дій над багаточленами з врахуванням умови  $i^2 = -1$  і зведенням подібних. Зокрема, додавання і віднімання комплексних чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  здійснюються покомпонентно:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Множення комплексних чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  здійснюється за правилом множення двочленів з врахуванням умови  $i^2 = -1$  і зведенням подібних:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

*Зауваження 1.* Для множення комплексного числа  $z = x + iy$  на дійсне число  $a$  досить кожну його компоненту помножити на це число  $a$ :  $az = ax + ia y$ .

*Зауваження 2.* Знайдемо натуральні степені уявної одиниці:  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ,  $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$ . Отже

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$



*Зауваження 3.* При піднесенні комплексного числа до натурального степеня можна застосовувати відомі з елементарної математики формули скороченого множення.

*Зауваження 4.* Сума і добуток двох комплексно спряжених чисел  $z = x + iy$  і  $\bar{z} = x - iy$  є дійсним числом:

$$z + \bar{z} = 2x; \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

*Зауваження 5.* Дійсну і уявну частини комплексного числа  $z = x + iy$  можна виразити через саме число та його спряжене  $\bar{z} = x - iy$ :

$$x = (z + \bar{z}) / 2; \quad y = (z - \bar{z}) / (2i).$$

*Ділення* комплексних чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$ ,  $z_2 \neq 0$  виконується так: 1) треба чисельник і знаменник дробу  $z_1/z_2$  домножити на число  $\bar{z}_2$ , спряжене до знаменника  $z_2$ ; 2) врахувати, що  $i^2 = -1$ , і звести подібні; 3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі.

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

*Зауваження 6.* Основні властивості розглянутих арифметичних операцій над комплексними числами співпадають з відповідними властивостями аналогічних операцій над дійсними числами. Тому для комплексних чисел залишаються справедливими всі теореми, правила, формули, що виведені для дійсних чисел на основі цих властивостей.

**Приклад.** Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z = 3(2 - 3i)(2 - i) - (3 - i)^3 + 5(4 - 5i) : (3 + 4i).$$

*Розв'язання.* Виконуємо дії як над багаточленами:

$$\begin{aligned}
 z &= 3(2-3i)(2-i) - (3-i)^3 + 5(4-5i) : (3+4i) = 3(4-2i- \\
 &\quad -6i+3i^2) - 27 + 27i - 9i^2 + i^3 + 5 \cdot \frac{(4-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \\
 &= 3(4-2i-6i-3) - 27 + 27i + 9 - i + 5 \cdot \frac{12-16i-15i+20i^2}{9-16i^2} = \\
 &= 3(1-8i) - 18 + 26i + 5 \cdot \frac{12-16i-15i-20}{9+16} = \\
 &= 3-24i-18+26i + \frac{-8-31i}{5} = -15+2i + \frac{-8-31i}{5} = \\
 &= (-75+10i-8-31i)/5 = (-83-21i)/5 = -83/5 - i \cdot (21/5).
 \end{aligned}$$

### 2.1.3 Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа

Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат  $Oxy$ , то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел  $C$  можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу  $z = x + iy$  відповідає єдина точка  $M(x; y)$  і навпаки (рис. 2.1). Дійсні числа зображуються точками осі абсцис  $Ox$ , тому вісь  $Ox$  називається *дійсною віссю*. Чисто уявні числа зображуються точками осі

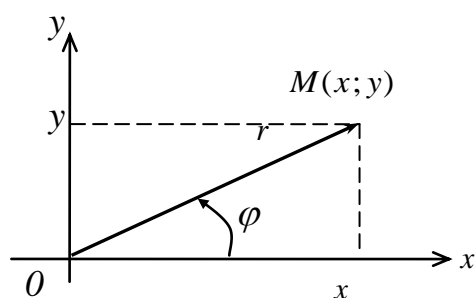


Рис.2.1

ординат  $Oy$ , тому вісь  $Oy$  називається *уявною віссю*. Числу  $z = 0$  відповідає початок координат  $O(0;0)$ . Координатна площина  $Oxy$ , яка зображує множину всіх комплексних чисел  $C$ , називається *комплексною площиною  $C$* .

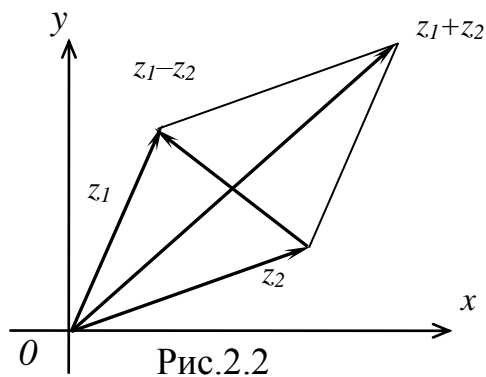


Рис.2.2

### Зауваження 1. Комплексне число

$z = x + iy$  можна також зобразити радіус-вектором  $\overrightarrow{OM}(x; y)$ , що виходить із початку координат  $O(0; 0)$  і закінчується в точці  $M(x; y)$  (рис. 2.1).

### Зауваження 2. Додавання і віднімання

комплексних чисел можна здійснювати за правилами (трикутника і паралелограма) відповідних операцій над векторами (рис. 2.2). Множення комплексних чисел можна розглядати як ще один вид (поряд зі скалярним і векторним) добутку плоских векторів.

Якщо на комплексній площині (рис. 2.1) ввести також полярну систему координат  $Or\varphi$  з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю  $Ox$ , то точку  $M(x; y)$ , що зображує комплексне число  $z = x + iy$  можна задати полярними координатами  $M(r; \varphi)$ .

Полярний радіус  $r$  (довжина радіус-вектора  $\overrightarrow{OM}$ ) називається *модулем* комплексного числа  $z$  і позначається  $|z| = r$ . Очевидно, що  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Полярний кут  $\varphi$  (кут між радіус-вектором  $\overrightarrow{OM}$  і полярною віссю  $Ox$ ) називається *аргументом* комплексного числа  $z$  і позначається  $Arg z = \varphi$ . Аргумент  $\varphi$ , як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду  $2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (довільного числа повних обертів). Єдине значення  $\varphi$ , що задовольняє умову  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , називається *головним значенням аргументу* і позначається  $\arg z$ . Отже,  $Arg z = \arg z + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \pi/2, & x = 0, y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

*Зауваження 3.* Для числа  $z = 0$  модуль дорівнює нулю  $r = |0| = 0$ , а аргумент  $\varphi$  довільний.

*Зауваження 4.* У рівних комплексних чисел  $z_1 = z_2$  модулі також рівні  $r_1 = r_2$ , а аргументи зв'язані співвідношенням  $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , тобто відрізняються на доданок  $2\pi k$ .

### 2.1.4 Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , комплексне число  $z = x + iy$  можна подати у вигляді

$$z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Вираз  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  називається *тригонометричною формою комплексного числа*.

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Якщо звернутись до *основної формули Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

(її доведення дається в теорії рядів), то від тригонометричної форми можна перейти до показникової форми комплексного числа  $z = re^{i\varphi}$ .

*Зауваження.* З основної формули Ейлера випливають допоміжні формули Ейлера:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \operatorname{Re} e^{i\varphi}; & \sin \varphi &= \operatorname{Im} e^{i\varphi}; \\ \cos \varphi &= (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2; & \sin \varphi &= (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/(2i).\end{aligned}$$

**Приклад 1.** Довести тотожність:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2} x / \sin \frac{x}{2}.$$

*Розв'язання.* Перейдемо до експонент, скористаємося формулою часткової суми геометричної прогресії, потім від експонент повернемося до тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned}\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx &= \operatorname{Re} (e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx}) = \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{ix}(e^{inx} - 1)}{e^{ix} - 1} = \operatorname{Re} \frac{e^{ix} e^{inx/2} (e^{inx/2} - e^{-inx/2})}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} = \\ &= \operatorname{Re} \left( e^{i(n+1)x/2} \cdot \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \right) = \\ &= \operatorname{Re} e^{i(n+1)x/2} \cdot \sin \frac{nx}{2} / \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{n+1}{2} x / \sin \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

**Приклад 2.** Зобразити на комплексній площині і подати в тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad z_3 = 2i; \quad z_4 = -2; \quad z_5 = -2 - i.$$

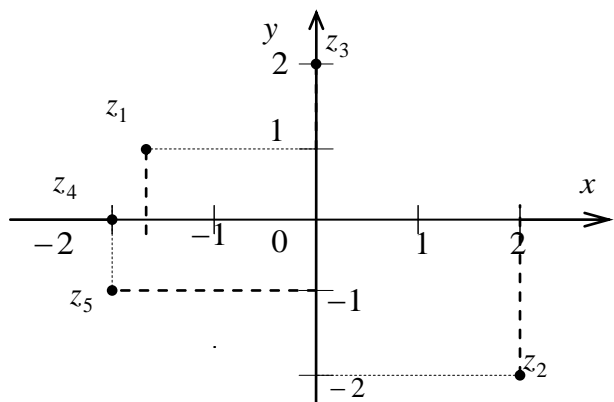


Рис.2.3

*Розв'язання.* Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис. 2.3) Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з даних чисел та запишемо їх у тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{z_1 = -\sqrt{3} + i} : \quad x_1 = -\sqrt{3}; \quad y_1 = 1; \quad |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2;$$

$$\arg z_1 = \arctg(y_1/x_1) + \pi, \quad x_1 < 0, y_1 \geq 0;$$

$$\arg z_1 = \arctg(-1/\sqrt{3}) + \pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6;$$

$$z_1 = 2(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)); \quad z_1 = 2e^{i(5\pi/6)}$$

$$\underline{z_2 = 2 - 2i} : \quad x_2 = 2; \quad y_2 = -2; \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\arg z_2 = \arctg(y_2/x_2), \quad x_2 > 0; \quad \arg z_2 = \arctg(-1) = -\pi/4;$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)); \quad z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i(\pi/4)}.$$

$$\underline{z_3 = 2i} : \quad x_3 = 0; \quad y_3 = 2; \quad |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2;$$

$$\arg z_3 = \pi/2, \quad x = 0; \quad y > 0; \quad z_3 = 2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)); \quad z_3 = 2e^{i(\pi/2)}.$$

$$\underline{z_4 = -2} : \quad x_4 = -2; \quad y_4 = 0; \quad |z_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = 2;$$

$$\arg z_4 = \arctg(y_4/x_4) + \pi, \quad x_4 < 0, y_4 \geq 0;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi; \quad z_4 = 2(\cos \pi + i \sin \pi); \quad z_4 = 2e^{i\pi}.$$

$$\underline{z_5 = -2 - i} : \quad x_5 = -2; \quad y_5 = -1; \quad |z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5};$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(y_5/x_5) - \pi, \quad x_5 < 0, y_5 < 0; \quad \arg z_5 = \operatorname{arctg}(1/2) - \pi;$$

$$z_5 = \sqrt{5} e^{i(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi)}; \quad z_5 = \sqrt{5} (\cos(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi) + i \sin(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi)).$$

### 2.1.5 Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  і  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Добутком двох комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$  є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Якщо  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  і  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  – два комплексні числа

в тригонометричній формі, причому  $z_2 \neq 0$ , то їх частка:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= (r_1/r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Часткою  $z_1/z_2$  двох комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$ , де дільник  $z_2 \neq 0$ , є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого  $z_1$  і дільника  $z_2$ , а аргумент – різниці аргументів діленого  $z_1$  і дільника  $z_2$ .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i};$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|; \quad \text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Натуральним степенем  $z^n$  комплексного числа  $z$  називається комплексне число, отримане множенням числа  $z$  самого на себе  $n$  раз, де  $n$  – натуральне число. Із правила множення комплексних чисел в тригонометричній формі випливає перша формула Муавра:

$$z^n = (r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Коренем  $n$ -го степеня  $\sqrt[n]{z}$  з комплексного числа  $z$  називається таке комплексне число,  $n$ -й степінь якого дорівнює  $z$ : Очевидно, що корінь  $n$ -го степеня з нуля дорівнює нулю. Якщо комплексне число  $z$  відмінне від нуля  $z \neq 0$ , то корінь  $n$ -го степеня  $\sqrt[n]{z}$  має рівно  $n$  різних значень, що визначаються за другою формулою Муавра:



$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ;  $\sqrt[n]{r}$  – арифметичний корінь з додатного числа.

На комплексній площині всі корені  $n$ -го степеня  $\sqrt[n]{z}$  з комплексного числа  $z \neq 0$  зображуються вершинами правильного  $n$ -кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом  $\sqrt[n]{r}$ .

**Приклад 1.** Піднести до степеня:  $(\sqrt{3} - i)^{40}$ .

*Розв'язання.* Запишемо число  $\sqrt{3} - i$  в тригонометричній формі

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)).$$

За першою формулою Муавра

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{40} &= (2(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)))^{40} = \\ &= 2^{40}(\cos(-20\pi/3) + i \sin(-20\pi/3)) = 2^{40}(\cos(-6\pi - 2\pi/3) + \\ &+ i \sin(-6\pi - 2\pi/3)) = 2^{40}(\cos(-2\pi/3) + i \sin(-2\pi/3)) = \\ &= 2^{40}(-1/2 + i \cdot \sqrt{3}/2) = -2^{39} + i \cdot 2^{39} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Знайти всі значення кореня:

$$\text{а) } \sqrt{-9i}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{i-1}.$$

*Розв'язання.*

а) Запишемо підкореневе число  $-9i$  в тригонометричній формі

$$-9i = 9(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)).$$

За другою формулою Муавра

$$\begin{aligned}\sqrt{-9i} &= \sqrt{9(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))} = \\ &= \sqrt{9}\left(\cos\frac{-\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2\pi k}{2}\right) = \\ &= 3(\cos(-\pi/4 + \pi k) + i\sin(-\pi/4 + \pi k)), \text{ де } k = 0, 1.\end{aligned}$$

$$\text{При } k = 0: \sqrt{-9i} = 3(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 3\sqrt{2}/2 - i \cdot 3\sqrt{2}/2.$$

$$\text{При } k = 1: \sqrt{-9i} = 3(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -3\sqrt{2}/2 + i \cdot 3\sqrt{2}/2.$$

б) Запишемо підкореневе число  $i-1$  в тригонометричній формі

$$i-1 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)).$$

За другою формулою Муавра

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{i-1} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))} = \\ &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right), \text{ де } k = 0, 1, 2. \\ &= \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/4 + 2\pi k/3) + i\sin(\pi/4 + 2\pi k/3)).\end{aligned}$$

$$\text{При } k = 0: \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i).$$

$$\text{При } k = 1: \sqrt[3]{i-1} = \sqrt[6]{2}(\cos(11\pi/12) + i\sin(11\pi/12)).$$

$$\begin{aligned}\text{При } k = 2: \sqrt[3]{i-1} &= \sqrt[6]{2}(\cos(19\pi/12) + i\sin(19\pi/12)) = \\ &= \sqrt[6]{2}(\cos(-5\pi/12) + i\sin(-5\pi/12)).\end{aligned}$$

## 2.1.6 Багаточлени. Розкладання на множники. Розв'язання квадратних рівнянь

Функція комплексної змінної

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

називається багаточленом  $n$ -го степеня стандартного вигляду. Тут  $z$  – комплексний аргумент;  $n$  – степінь багаточлена;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – сталі комплексні коефіцієнти;  $a_0$  називається старшим коефіцієнтом, причому  $a_0 \neq 0$ ;  $a_n$  називається вільним членом.

**Теорема 1** (теорема Безу). При діленні багаточлена  $P_n(z)$  на різницю  $z - a$  остача від ділення дорівнює  $P_n(a)$ .

*Доведення.*  $P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - a) + R$ . Нехай  $z \rightarrow a$ , тоді  $P_n(a) = R$ .

*Наслідок 1.* Якщо  $a$  – корінь багаточлена  $P_n(z)$ , то цей багаточлен  $P_n(z)$  ділиться без остачі на різницю  $z - a$ , тобто розкладається на множники

$$P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - a),$$

де частка  $Q_{n-1}(z)$  – багаточлен на одиницю меншого степеня.

**Теорема 2** (основна теорема алгебри). Будь-який багаточлен  $P_n(z)$  ненульового степеня  $n \geq 1$  має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).

*Наслідок 2.* Будь-який багаточлен  $P_n(z)$  ненульового степеня  $n \geq 1$  має рівно  $n$  коренів, серед яких можуть бути однакові.

*Наслідок 3.* Будь-який багаточлен  $P_n(z)$  ненульового степеня  $n \geq 1$

розкладається на множники у вигляді:

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

де  $a_0$  – старший коефіцієнт;  $z_1, z_2, \dots, z_m$  – різні (дійсні чи комплексні) корені;  $k_1, k_2, \dots, k_m$  – відповідні кратності цих коренів, причому  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ .

Корені квадратного рівняння  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) з комплексними коефіцієнтами  $a, b, c$  знаходяться за відомими формулами

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad D = b^2 - 4ac,$$

де  $\sqrt{D}$  – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта  $D$ .

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a, \quad z_1 z_2 = c/a.$$

**Приклад.** Розв'язати квадратне рівняння:

$$\text{а) } 4z^2 + 4z + 5 = 0; \quad \text{б) } z^2 - 4z + 7 - 4i = 0; \quad \text{в) } z^2 + 2iz - 1 + 2i = 0.$$

*Розв'язання.*

$$\text{а) } D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -64; \quad \sqrt{D} = \sqrt{-64} = 8i; \quad z_{1,2} = \frac{-4 \pm 8i}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \pm i.$$

$$\text{б) } D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (7 - 4i) = -12 + 16i = 4(-3 + 4i);$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4(-3 + 4i)} = 2\sqrt{(-3 + 4i)} = 2\sqrt{(1 + 4i + 4i^2)} = 2\sqrt{(1 + 2i)^2} =$$

$$= 2(1+2i); \quad z_{1,2} = \frac{4 \pm 2(1+2i)}{2} = 2 \pm (1+2i); \quad z_1 = 3+2i; \quad z_2 = 1-2i.$$

$$\text{в) } D = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+2i) = -8i; \quad \sqrt{D} = \sqrt{-8i} =$$

$$= \sqrt{8(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2))} = 2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) +$$

$$+ i \sin(-\pi/4)) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}/2 - i(\sqrt{2}/2)) = 2 - 2i;$$

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm (2-2i)}{2} = -i \pm (1-i); \quad z_1 = 1-2i; \quad z_2 = -1.$$

## 2.2 Комплексні функції дійсної змінної

### 2.2.1 Відстань між точками. Окіл точки. Нескінченно віддалена точка. Розширена комплексна площина

Розглядається комплексна площина  $C$ .

Відстанню  $\rho(z_1, z_2)$  між точками  $M_1$  і  $M_2$ , що зображають комплексні числа  $z_1$  і  $z_2$ , називається довжина відповідного вектора  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ :

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

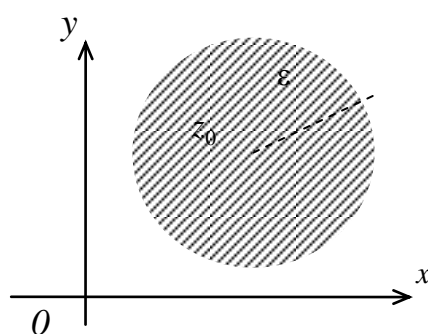


Рис 2.4

тобто відстань між комплексними числами  $z_1$  і  $z_2$  дорівнює модулю їх різниці  $|z_1 - z_2|$ . Нехай  $\varepsilon$  – довільне додатне дійсне число  $\varepsilon > 0$ . Множина точок  $U_\varepsilon(z_0)$ , що задовольняють умову  $|z - z_0| < \varepsilon$ , називається  $\varepsilon$ -околом скінченної точки

$z_0$ . Окіл точки  $z_0$  – це внутрішність круга з центром в цій точці  $z_0$  і радіусом  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$ -окіл точки  $z_0$  заштрихований на рис.2.4).

Для комплексних чисел особливу роль відіграє символ  $z = \infty$  – нескінченно віддалена точка.

*Зауваження 1.* Для невластного комплексного числа  $z = \infty$  модуль дорівнює  $+\infty$ , а поняття аргументу, дійсної та уявної частини позбавлені змісту.

*Зауваження 2.* Нескінченно віддалена точка  $z = \infty$  – це зовнішність круга нескінченно великого радіуса з центром у початку координат. Іншими словами, нескінченно віддалена точка  $z = \infty$  – це об'єднання всіх точок круга нескінченно великого радіуса з центром у початку координат.

Вся комплексна площина  $C$ , що доповнена нескінченно віддаленою точкою  $z = \infty$ , називається *розширеною комплексною площиною*  $\overline{C}$ .

*Зауваження 3.* Склеюючи всі точки круга нескінченно великого радіуса з центром у початку координат, отримуємо сферу – ще одне зображення

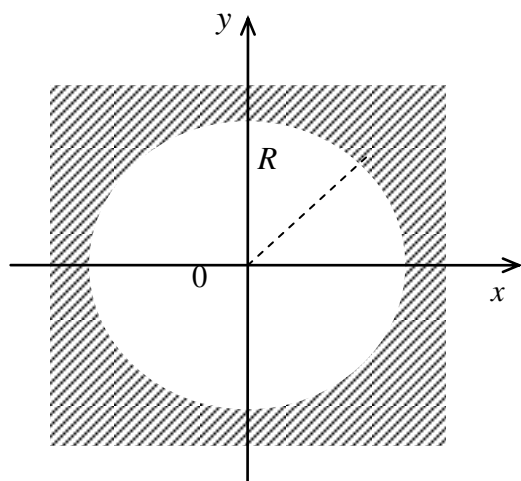


Рис.2.5

розширеної множини комплексних чисел  $\overline{C}$ . Точка  $z = \infty$  нічим не відрізняється від інших точок: можна розглядати її окіл, перетин ліній в  $z = \infty$  і т.п.

Нехай  $R$  – довільне додатне дійсне число  $R > 0$ . Множина точок  $U_R(\infty)$ , що задовольняють умову  $|z| > R$ , називається *R-околом нескінченно віддаленої точки*  $z = \infty$ .

Окіл точки  $z = \infty$  – це зовнішність круга з центром в початку координат і радіусом  $R$  ( $R$ -окіл точки  $z = \infty$  заштрихований на рис.2.5). Наочне уявлення про окіл нескінченно віддаленої точки  $z = \infty$  дає *стереографічна проекція*, що визначає взаємно однозначну

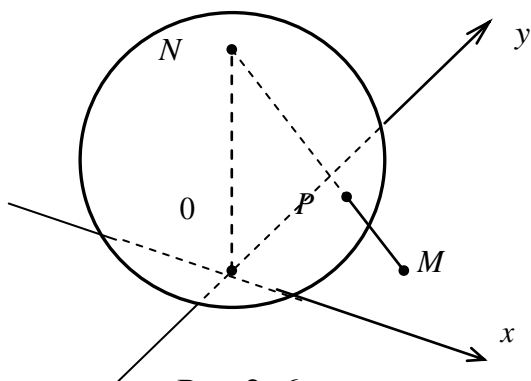


Рис.2. 6

відповідність точок розширеної комплексної площини та точок *сфери Рімана* – сфери одиничного діаметра, що дотикається до площини в початку координат (рис. 2.6).

Нехай  $ON$  – вертикальний діаметр ( $O$  – південний, а  $N$  – північний полюс). Для довільної скінченної точки  $M$  комплексної площини точка  $P$  перетину відрізка  $NM$  зі

сферою називається *стереографічною проекцією точки  $M$* . Така відповідність буде взаємно однозначною для всієї розширеної комплексної площини, якщо прийняти, що північний полюс  $N$  слугує стереографічною проекцією єдиної нескінченно віддаленої точки  $z = \infty$ .

*Зауваження 4.* Прямій чи кругу на площині при стереографічній проекції відповідає круг на сфері. Зокрема, паралельним прямим відповідають круги, що дотикаються в нескінченно віддаленій точці  $z = \infty$ .

## 2.2.2 Область та її межа

Непорожня множина  $D$  комплексної площини чи розширеної комплексної площини називається *областю*, якщо виконуються такі умови:

- 1) вона *відкрита*, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки;
- 2) вона *зв'язна*, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною  $L$ , всі точки якої належать цій множині  $D$ .

*Зауваження 1.* Ламана  $L$  може бути необмеженою лінією, що проходить через  $z = \infty$ . При цьому вона залишається обмеженою на сфері Рімана.

Точка  $z_0$  називається *межовою точкою* області  $D$ , якщо в кожному її

околі містяться точки, що належать і що не належать цій області. Множина всіх межових точок  $\Gamma$  області  $D$  називається *межею* цієї області.

*Зауваження 2.* Надалі розглядаються області, межа яких  $\Gamma$  складається зі скінченного числа кусково-гладких кривих та ізолюваних точок. Межа може мати дві сторони – два “берега” розрізу.

Якщо при русі вздовж межі  $\Gamma$  область  $D$  весь час залишається зліва, то такий напрям орієнтації межі  $\Gamma$  називається *додатним обходом*.

Об'єднання області  $D$  з її межею  $\Gamma$ , називається *замкненою областю* (замиканням області  $D$ ) і позначається  $\overline{D}$ . Якщо межу області утворює одна лінія, що не має самоперетину, то область називається *однозв'язною* (рис. 2.7), а коли межу області утворюють  $k$  таких ліній, що не мають самоперетину і спільних точок, то область називається  *$k$ -зв'язною* (на рис. 2.8 зображена тризв'язна область).

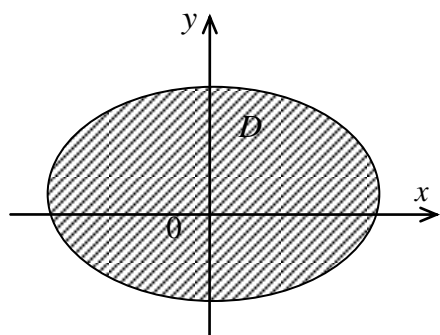


Рис. 2.7

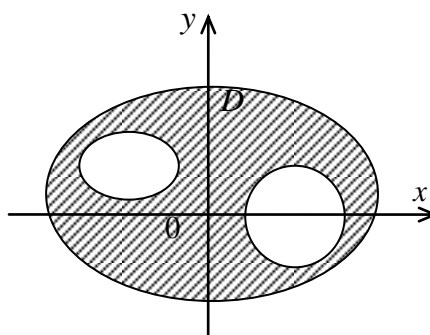


Рис.2. 8

*Зауваження 3.* Однозв'язна область  $D$  – це область, в якій довільну замкнену криву, що їй належить, можна неперервною деформацією стягнути в точку, залишаючись в цій області  $D$ . Однозв'язна область не містить “дірок”, а багатозв'язна область – це область з “дірками”.



### 2.2.3 Комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині

Комплексна функція  $z$  дійсної змінної  $t$  кожному значенню  $t$  з деякої непорожньої множини  $D$  дійсних чисел за певним законом ставить у відповідність одне єдине значення комплексної змінної  $z$  з деякої області  $E$  комплексної площини. Комплексна функція  $z = z(t)$  дійсної змінної  $t$  визначається рівністю

$$z = x(t) + i y(t), \quad t \in D,$$

де  $x(t)$  та  $y(t)$  – задані дійсні функції (відповідно дійсна і уявна частини змінної  $z = z(t)$ ).

*Зауваження 1.* Надалі розглядаються неперервні функції  $x(t)$  та  $y(t)$ , задані на відрізку  $D = [\alpha; \beta]$ .

Функція  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$  в *комплексно-параметричній формі* задає деяку неперервну лінію  $L$  (рис. 2.9). Параметричні рівняння цієї лінії:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ .

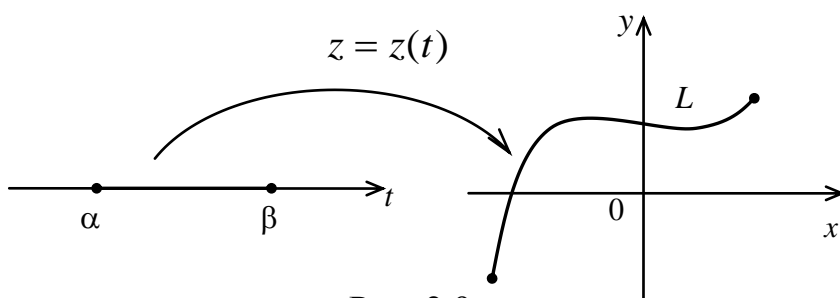


Рис. 2.9

Крива називається *простою*, якщо вона не має точок самоперетину:  $\forall t_1, t_2 \in (\alpha; \beta), t_1 \neq t_2: z(t_1) \neq z(t_2)$ , тобто всі точки різні, крім, можливо, початкової  $z(\alpha)$  і кінцевої  $z(\beta)$ . Крива називається *замкненою*, якщо її

початкова і кінцева точки співпадають:  $z(\alpha) = z(\beta)$ . Орієнтацію (напрямок обходу) замкненої кривої  $L$  (контур) можна задати трьома її точками або двома її точками і однією внутрішньою точкою області  $D$ , що обмежена даною лінією  $L$ .

*Зауваження 2.* Крива на комплексній площині може бути задана в неявній формі рівнянням  $f(z) = 0$ .

**Приклад 1.** Визначити вид і зобразити на комплексній площині лінії, задані рівняннями: а)  $|z - 2 + i| = 1$ ; б)  $z = (1 + 2i)t$ ; в)  $z = 2\cos t + 2i\sin t$ .

*Розв'язання.* Щоб визначити вид лінії, підставимо в її рівняння  $z = x + iy$  і зведемо його до відповідного стандартного вигляду. Потім побудуємо цю лінію.

а)  $|x + iy - 2 + i| = 1$ ;  $|(x - 2) + i(y + 1)| = 1$ ;  $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 1$ ;

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$  – коло радіуса  $r = 1$  з центром у точці  $M_0(2; -1)$  (рис.2.10).

б)  $x + iy = (1 + 2i)t$ ;  $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$  – похила пряма, задана в параметричній формі (рис.2.11)

$x + iy = 2\cos t + 2i\sin t$ ;  $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$  – коло радіуса  $r = 2$  з центром у

початку координат, задане в параметричній формі (рис.2.12).

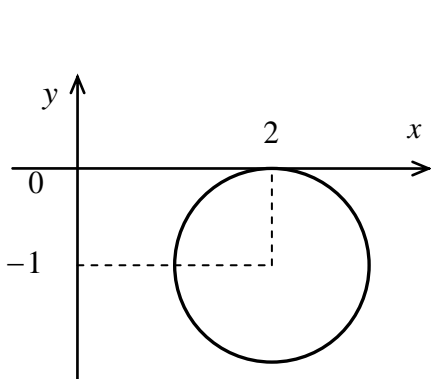


Рис. 2.10

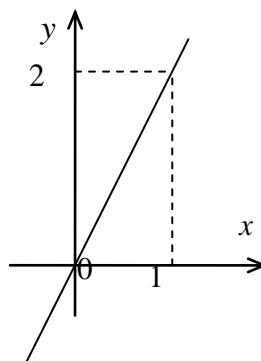


Рис. 2.11

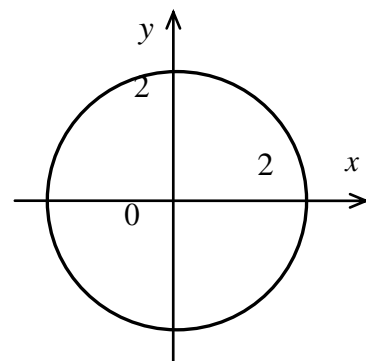


Рис. 2.12

**Приклад 2.** На комплексній площині зобразити замкнену область  $\overline{D}$ , що задана нерівностями:

а)  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 2 \geq 0, \quad |z + 2i| \leq 1;$

б)  $|z| \geq 2, \quad -\pi/4 \leq \arg z \leq \pi/2.$

*Розв'язання.* Якщо замінити знак нерівності на знак рівності, то отримаємо рівняння лінії – частини межі відповідної області. Кожна лінія розбиває комплексну площину на частини. Обирається та частина, довільно взята внутрішня пробна точка якої задовольняє відповідну нерівність. Шукана область, задана системою нерівностей, знаходиться як перетин обраних множин.

а)  $z = x + iy; \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 2 = 0, x + y + 2 = 0$  – похила пряма;  $|z + 2i| = 1$  – коло радіуса 1 з центром у точці  $(0; -2i)$ . Шукана область заштрихована на рис. 2.13.

б)  $z = x + iy; |z| = 2$  – круг радіуса 2 з центром у початку координат;  $\arg z = -\pi/4$  і  $\arg z = \pi/2$  – два промені, що виходять з початку координат, область на рис. 2.14.

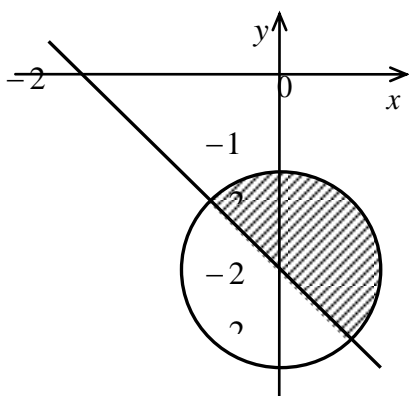


Рис. 2.13

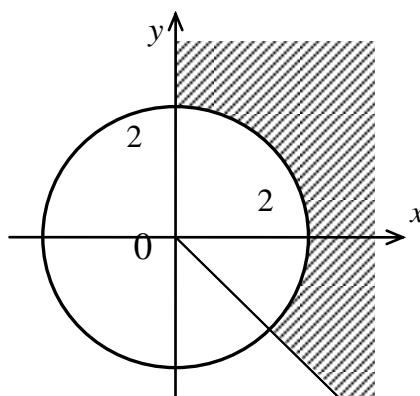


Рис. 2.14

## 2.2.4 Диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної

Комплексній змінній  $z = z(t)$  відповідає вектор-функція, тому диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної здійснюється аналогічно відповідним операціям над вектор-функцією дійсного аргументу. Для знаходження похідної  $z' = z'(t)$  комплексної функції  $z = x(t) + i y(t)$  дійсної змінної треба продиференціювати окремо дійсну  $x(t)$  та уявну  $y(t)$  частини:

$$z' = x'(t) + i y'(t).$$

*Зауваження 1.* На комплексній площині дотична до кривої  $z = z(t)$  в точці  $z_0 = z(t_0)$  задається в комплексно-параметричній формі рівнянням  $z - z_0 = z'(t_0) \cdot (t - t_0)$ .

**Приклад 1.** Знайти рівняння дотичної до комплексно-параметрично заданої лінії  $z = z(t)$  в точці  $z_0$ , що відповідає значенню параметра  $t_0$ :

$$L: z = 4 \cos^3 t + 4i \sin^3 t, \quad t_0 = \pi/4.$$

$$\text{Розв'язання.} \quad z(\pi/4) = 4 \cos^3(\pi/4) + 4i \sin^3(\pi/4) =$$

$$= 4 \cdot (\sqrt{2}/2)^3 + 4i \cdot (\sqrt{2}/2)^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$z' = (4 \cos^3 t + 4i \sin^3 t)' = -12 \cos^2 t \cdot \sin t + 12i \sin^2 t \cdot \cos t;$$

$$z'(\pi/4) = -12 \cos^2(\pi/4) \cdot \sin(\pi/4) + 12i \sin^2(\pi/4) \cdot \cos(\pi/4) =$$

$$= -12 \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) + 12i \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) = -3\sqrt{2} + i3\sqrt{2};$$

$$z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = (-3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}) \cdot (t - \pi/4) \quad - \text{дотична.}$$

Для знаходження інтеграла  $\int_{\alpha}^{\beta} z(t) dt$  комплексної функції  $z = x(t) + i y(t)$

дійсної змінної треба інтегрувати окремо дійсну  $x(t)$  та уявну  $y(t)$  частини:

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dt .$$

**Приклад 2.** Знайти інтеграл:

$$\int_0^1 (9t^2 + 8it^3) dt .$$

*Розв'язання.*

$$\int_0^1 (9t^2 + 8it^3) dt = 9 \int_0^1 t^2 dt + 8i \int_0^1 t^3 dt = 9 \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 + 8i \cdot \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 = 3 + 2i .$$

## 2.3 Похідна функції комплексної змінної. Поняття аналітичної функції. Конформне відображення

### 2.3.1 Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність

Для геометричного тлумачення поняття функції комплексної змінної розглядаються два екземпляри площини комплексних чисел:  $z$ -площина  $z = x + iy$  і  $w$ -площина  $w = u + iv$ . Нехай на  $z$ -площині задана довільна множина точок  $D$ . Якщо кожній точці  $z = x + iy$  множини  $D$  за певним законом  $f$  поставлено у відповідність одну точку  $w = u + iv$  (або декілька точок)  $w$ -площини, то говорять, що на множині  $D$  задано однозначну (або багатозначну) комплексну функцію комплексної змінної  $w = f(z)$ .  $D$

називається *множиною визначення функції*  $w = f(z)$ , а множина  $E$  усіх значень  $w$ , що приймає функція, називається *множиною значень функції*  $w = f(z)$ .

*Зауваження 1.* Множина  $D$  може бути дуже складної та різноманітної структури. Надалі розглядаються лише випадки, коли множини  $D$  та  $E$  є областями.

Комплексна функція  $w = f(z)$  – це відображення області  $D$   $z$ -площини на область  $E$   $w$ -площини (рис. 2.15). Якщо функція  $w = f(z)$  відображує точку  $z_0 = x_0 + i y_0$  площини  $z$  в точку  $w_0 = u_0 + i v_0$  площини  $w$ , то  $w_0$  називається *образом*, а  $z_0$  – *прообразом*.

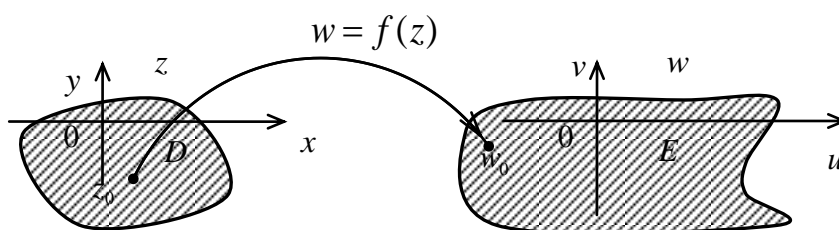


Рис. 2.15

*Нерухомою точкою* відображення  $w = f(z)$  називається така точка  $z_0$ , що  $f(z_0) = z_0$ .

**Приклад 1.** Знайти нерухомі точки заданого відображення:

$$w = z^2 + 3z + 5.$$

*Розв'язання.* Нерухомі точки визначаємо як корені рівняння

$$f(z) = z: z^2 + 3z + 5 = z; z^2 + 2z + 5 = 0; z_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Відображення  $w = f(z)$  називається *взаємно однозначним* або *однолиstim* в

області  $D$ , якщо довільним двом різним точкам  $z_1 \neq z_2$  області  $D$  завжди відповідають дві різні точки  $w_1 \neq w_2$  області  $E$ . У цьому випадку існує *обернена функція*  $z = f^{-1}(w)$  – відображення області  $E$  на область  $D$ .

**Зауваження 2.** Відображення  $w = f(z)$  є однолистим тоді і тільки тоді, коли пряма  $w = f(z)$  і обернена  $z = f^{-1}(w)$  функції однозначні.

**Зауваження 3.** Задання комплексної функції комплексної змінної  $w = f(z)$ , де  $z = x + iy$  – комплексний аргумент,  $w = u + iv$  – комплексна залежна змінна, рівносильне заданню упорядкованої пари дійсних функцій двох дійсних змінних  $u = \operatorname{Re} w = u(x, y)$  і  $v = \operatorname{Im} w = v(x, y)$ . Тому поняття *границі* та *неперервності* функції комплексної змінної вводяться так само, як і відповідні поняття для функції дійсних змінних. Це дозволяє перенести на комплексні функції основні теореми дійсного аналізу.

**Приклад 2.** Знайти образи ліній при відображенні функцією  $w = z^2$ :

а) пряма  $\operatorname{Re} z = 1$ ; б) коло  $|z| = 3$ ; в) промінь  $\arg z = \pi/3$ .

*Розв'язання.*  $z = x + iy$ ;  $w = u + iv$ ;  $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ ;

$u = u(x, y) = \operatorname{Re} w = x^2 - y^2$ ;  $v = v(x, y) = \operatorname{Im} w = 2xy$ ;

а) пряма  $\operatorname{Re} z = 1$ :  $x = 1$ ;  $u = 1 - y^2$ ;  $v = 2y$ ;  $y = v/2$ ;

$u = 1 - v^2/4$  – парабола (образ прямої  $\operatorname{Re} z = 1$ ).

б) коло  $|z| = 3$ :  $|w| = |z^2| = |z|^2 = 3^2$ ;  $|w| = 9$  – коло (образ кола  $|z| = 3$ ).

в) промінь  $\arg z = \pi/3$ :  $\arg w = \arg z^2 = 2 \cdot \arg z = 2\pi/3$ ;

$\arg w = 2\pi/3$  – промінь (образ променя  $\arg z = \pi/3$ ).

**Зауваження 4.** Відображення  $w = f(z)$ , що однолисте і неперервне в замкненій області  $\overline{D}$ , переводить цю область  $\overline{D}$  в деяку замкнену область  $\overline{E}$ .

При цьому межа області  $\bar{D}$  переходить в межу області  $\bar{E}$  зі збереженням напрямку обходу (*принцип збереження напрямку обходу*).

### 2.3.2 Похідна. Умови Коші – Рімана

Нехай  $w = f(z)$  – однозначна функція комплексної змінної у деякому околі фіксованої точки  $z$ . *Похідною*  $w' = f'(z)$  функції  $w = f(z)$  у точці  $z$  називається границя відношення приросту функції  $\Delta w$  до приросту аргументу  $\Delta z$ , коли приріст аргументу прямує до нуля довільним способом:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функція, що має скінченну похідну в точці  $z$ , називається *диференційовною* в цій точці.

*Зауваження 1.* Хоча зображенням функції комплексної змінної служить вектор-функція, комплексне диференціювання не зводиться до векторного диференціювання і накладає більш жорсткі вимоги на функцію  $w = f(z)$ .

**Теорема (необхідні та достатні умови комплексної диференційовності).** Функція  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  диференційовна в точці  $z = x + i y$  тоді і тільки тоді, коли існують неперервні частинні похідні функцій  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$  за обома змінними  $x$  і  $y$  в точці  $M(x, y)$  і виконуються умови Коші – Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

*Доведення. Необхідність.* Нехай функція  $w = f(z)$  у фіксованій точці



$z = x + i y$  має похідну  $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ ,  $f'(z) = A + iB$ . Звідси

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha \Delta z,$$

де  $\alpha = \alpha_1 + i \alpha_2$  – нескінченно мала функція при  $\Delta z \rightarrow 0$ , тому її дійсна  $\alpha_1$  і уявна  $\alpha_2$  частини також нескінченно малі. Підставимо вирази

$$\Delta w = \Delta u + i \Delta v; \quad f'(z) = A + iB; \quad \Delta z = \Delta x + i \Delta y; \quad \alpha = \alpha_1 + i \alpha_2$$

у співвідношення для приросту функції і відокремимо дійсну та уявну частини

$$\Delta u + i \Delta v = (A + iB)(\Delta x + i \Delta y) + (\alpha_1 + i \alpha_2)(\Delta x + i \Delta y);$$

$$\Delta u = A \Delta x - B \Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y;$$

$$\Delta v = B \Delta x + A \Delta y + \alpha_2 \Delta x + \alpha_1 \Delta y.$$

Останні дві рівності показують, що функції  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$  диференційовні в точці  $M(x, y)$ , причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = B; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A.$$

Звідси

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad -B = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Достатність умов Коші – Рімана приймемо без доведення.

*Зауваження 2.* Згідно з умовами Коші – Рімана похідну функції комплексної змінної можна подати через частинні похідні дійсної та уявної частин наступними чотирма способами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Приклад 1.** Перевірити, що функція  $w=1/z$  задовольняє умови Коші – Рімана, і знайти її похідну.

а) пряма  $\operatorname{Re} z = 1$ ; б) коло  $|z| = 3$ ; в) промінь  $\arg z = \pi/3$ .

*Розв'язання.*  $z = x + i y$ ;  $w = u + i v$ ;

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + i y} = \frac{x - i y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Знайдені частинні похідні задовольняють умови Коші – Рімана. Обчислимо комплексну похідну:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-(x - i y)^2}{(x + i y)^2 (x - i y)^2} = \frac{-1}{(x + i y)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

*Зауваження 3.* Умови Коші – Рімана можна подати в геометричній формі:

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0; \quad |\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|,$$

де вектори градієнтів

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}; \quad \operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}.$$

З такого геометричного тлумачення умов Коші – Рімана випливає, що вони зберігаються для будь-яких двох взаємно перпендикулярних напрямів  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  з тією ж взаємною орієнтацією, що і осі  $Ox$ ,  $Oy$  (рис. 2.16):

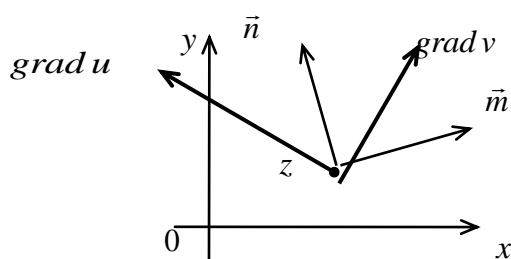


Рис.2.16

$$\frac{\partial u}{\partial m} = \frac{\partial v}{\partial n}; \quad \frac{\partial u}{\partial m} = -\frac{\partial v}{\partial l}.$$

Зокрема, в полярній системі координат умови Коші – Рімана мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

**Зауваження 4.** Як і в дійсному аналізі, диференційовна в деякій точці функція комплексної змінної є неперервною в цій точці. З означення похідної і властивостей границь випливає, що правила диференціювання і таблиця похідних функцій комплексної змінної не відрізняються від аналогічних співвідношень для функцій дійсної змінної.

### 2.3.3 Поняття аналітичної функції. Зв'язок аналітичних функцій з гармонічними

Функція  $w = f(z)$  називається *аналітичною* в точці  $z$ , якщо вона диференційовна в цій точці та в деякому її околі. Функція  $w = f(z)$ , що аналітична в кожній точці деякої області  $D$ , називається *аналітичною* (*голоморфною* або *регулярною*) в цій області  $D$ .

Точка, в якій функція  $w = f(z)$  є аналітичною, називається *правильною точкою* цієї функції. Точка, в якій функція  $w = f(z)$  не є аналітичною, називається *особливою точкою* цієї функції.

Наприклад, функція  $w = z^2$  аналітична на всій комплексній площині;

функція  $w = \frac{z}{(z-1)(z+2i)}$  аналітична на всій комплексній площині за винятком двох особливих точок  $z_1 = 1$  і  $z_2 = -2i$ ; функція  $w = z \operatorname{Im} z$  не аналітична в жодній точці і має похідну тільки при  $z = 0$ .

Нехай функція  $w = f(z)$  – аналітична в деякій області  $D$ . Тоді для її дійсної  $u = u(x, y)$  і уявної  $v = v(x, y)$  частин справедливі умови Коші – Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Якщо продиференціювати першу рівність по  $x$ , а другу – по  $y$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

і скористатись рівністю змішаних похідних з різним порядком диференціювання, то можна одержати співвідношення

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

що називається *рівнянням Лапласа*.

Аналогічно можна одержати рівняння Лапласа для функції  $v = v(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Функція, що задовольняє рівняння Лапласа, називається *гармонічною*.

*Зауваження 1.* Якщо останнє рівняння домножити почленно на уявну одиницю і скласти з попереднім, то можна одержати:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 (u + iv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u + iv)}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

– рівняння Лапласа для комплексної функції  $w = f(z)$ .

Дійсна  $u = u(x, y)$  і уявна  $v = v(x, y)$  частини аналітичної функції  $w = f(z)$  є гармонічними. Ці функції також пов'язані умовами Коші – Рімана і тому називаються *спряженими гармонічними*.

Зауваження 2. Дійсна і уявна частини аналітичної функції є залежними як спряжені гармонічні. Знаючи одну з них, можна знайти іншу з точністю до сталого доданка і відновити аналітичну функцію. Для знаходження конкретного значення сталого доданка досить задати значення комплексної функції в деякій фіксованій точці.

**Приклад 1.** Перевірити на аналітичність задану функцію і, у випадку аналітичності, подати її у вигляді  $w = f(z)$ :

$$w = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y).$$

$$\text{Розв'язання. } z = x + iy; \quad w = u + iv; \quad u = x^2 - y^2 - x; \quad v = 2xy - y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$$

Частинні похідні неперервні і задовольняють умови Коші – Рімана, тому функція аналітична. Якщо в початковий вираз для комплексної функції підставити

$$x = (z + \bar{z})/2; \quad y = (z - \bar{z})/(2i),$$

то отримаємо її вираз у вигляді  $w = f(z)$ :

$$w = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 - \frac{z + \bar{z}}{2} + i\left(2 \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = z^2 - z.$$

**Приклад 2.** Перевірити, чи існує аналітична функція, дійсна частина якої  $u = xy - x^2 + y^2$ . В разі позитивної відповіді знайти уявну частину  $v = v(x, y)$  і відновити саму аналітичну функцію  $w = f(z)$  при додатковій умові  $w(i\sqrt{2}) = 2$ .

*Розв'язання.* Частинні похідні  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2$  і  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$  задовольняють

рівняння Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , тому функція  $u = xy - x^2 + y^2$  – гармонічна.

Значить, існує така спряжена гармонічна функція  $v = v(x, y)$ , що функція  $w = u + iv$  буде аналітичною. З умов Коші – Рімана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y - 2x.$$

Функцію  $v = v(x, y)$  можна знайти за її частинними похідними як криволінійний інтеграл від її повного диференціала:

$$v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C; \quad v = \int_{(0,0)}^{(x, y)} (-x - 2y) dx + (y - 2x) dy + C = \int_0^x (-x) dx + \\ + \int_0^y (y - 2x) dy + C = -x^2/2 + y^2/2 - 2xy + C.$$

Тоді

$$w = u + iv = (xy - x^2 + y^2) + i(-x^2/2 + y^2/2 - 2xy + C).$$

Щоб подати функцію у вигляді  $w = f(z)$ , треба підставити  $x = (z + \bar{z})/2$ ;  $y = (z - \bar{z})/(2i)$ . Тоді

$$w = \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} - \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 - \frac{i}{2} \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 +$$

$$+\frac{i}{2}\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2-2i\cdot\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}+Ci=-\frac{2+i}{2}z^2+Ci.$$

З додаткової умови  $w(i\sqrt{2})=2$  знайдемо значення довільної сталої  $C$ :

$$-\frac{2+i}{2}(i\sqrt{2})^2+Ci=2; \quad C=-1.$$

Шукана аналітична функція  $w=-\frac{2+i}{2}z^2-i$ .

### 2.3.4 Геометричний зміст модуля й аргумента похідної. Поняття про конформне відображення

Нехай аналітична функція  $w=f(z)$  відображає область  $D$   $z$ -площини на область  $E$   $w$ -площини (рис. 2.17), при цьому точці  $z_0$  відповідає точка  $w_0$ , а дуга  $AB$  довільної гладкої кривої  $L$  переходить у дугу  $A_wB_w$  відповідної гладкої кривої  $L_w$ .

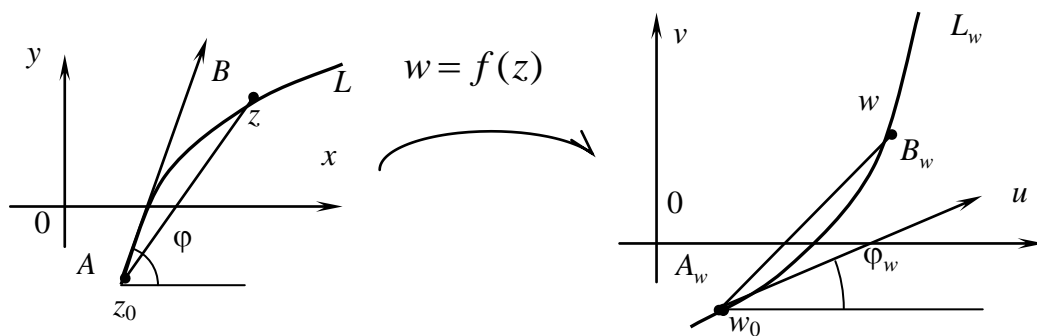


Рис. 2.17

Нехай похідна  $f'(z_0)$  скінченна  $f'(z_0) \neq \infty$  і відмінна від нуля

$f'(z_0) \neq 0$ , а  $\Delta z$  прямує до нуля вздовж кривої  $L$ .

*Локальним коефіцієнтом розтягу* в точці  $z_0$  називається границя відношення довжин дуги-образу  $A_w B_w$  і дуги-прообразу  $AB$ :

$$k = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\cup AB}{\cup A_w B_w}.$$

Замінюючи відношення дуг відношенням їхніх хорд, можна одержати:

$$k = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|.$$

Геометричний зміст модуля похідної: оскільки границя  $k = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\cup AB}{\cup A_w B_w}$

не залежить від характеру прямування  $\Delta z$  до нуля (від вибору кривої  $L$ ), то локальний коефіцієнт розтягу в точці  $z_0$  під дією аналітичної функції  $w = f(z)$  в усіх напрямках однаковий і дорівнює модулю похідної  $k = |f'(z_0)|$  (властивість сталості розтягу).

Нехай  $\varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z$  і  $\varphi_w = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \arg \Delta w$  – кути нахилу дотичних відповідно до кривої  $L$  у точці  $z_0$  і до кривої  $L_w$  у точці  $w_0$ .

*Локальним коефіцієнтом повороту* в точці  $z_0$  називається різниця кутів нахилу дотичних відповідно до дуги-образу  $A_w B_w$  і дуги-прообразу  $AB$ :  $\alpha = \varphi_w - \varphi$ . Оскільки кут нахилу дотичної дорівнює границі кута нахилу січної, а з диференційовності випливає неперервність, то

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi_w - \varphi = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \\ &= |\Delta w \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta z \rightarrow 0| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \end{aligned}$$



$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg f'(z_0).$$

Геометричний зміст аргументу похідної: локальний коефіцієнт повороту в точці  $z_0$  під дією аналітичної функції  $w = f(z)$  не залежить від обрання кривої  $L$  і дорівнює аргументу похідної  $\alpha = \arg f'(z_0)$ . Якщо через точку  $z_0$  провести дві різні лінії, то кут між образами дорівнюватиме куту між прообразами як за величиною, так і за напрямом (*властивість консерватизму (зберігання) кутів*).

Відображення, що має властивості консерватизму кутів та сталості розтягу, називається *конформним*.

Отже, аналітична функція  $w = f(z)$  здійснює конформне відображення у кожній точці  $z_0$ , де  $f'(z_0) \neq \infty$  і  $f'(z_0) \neq 0$ .

Відображення називається *конформним в області  $D$* , якщо воно конформне в кожній точці цієї області.

*Зауваження 1.* При конформному відображенні нескінченно малі фігури перетворюються в подібні собі нескінченно малі фігури. Проте від точки до точки значення коефіцієнтів  $k$  і  $\alpha$  змінюються, тому форми скінченних фігур змінюються, хоча зберігаються кути між лініями.

Основна задача конформного відображення: знайти аналітичну функцію  $w = f(z)$ , яка однолисто і конформно відображує задану область  $D$   $z$ -площини на область  $E$   $w$ -площини. Якщо ці області однозв'язні та їхні межі складаються більш ніж з однієї точки, то ця задача має нескінченну кількість розв'язків. Для виділення конкретного розв'язку треба задати додаткові умови, наприклад, образи однієї внутрішньої та однієї межевої точки області  $D$ .

*Зауваження 2.* Викликає значний інтерес також більш проста задача: знайти образ  $E$  однозв'язної області  $D$  при заданому відображенні

аналітичною функцією  $w = f(z)$ . Правило її розв'язання:

1) знаходимо образ  $\Gamma_w$  межі  $\Gamma$  області  $D$ , при цьому лінія  $\Gamma_w$  розбиває  $w$ -площину на частини;

2) щоб обрати з них відповідну частину  $E$ , треба скористатися принципом збереження напрямку обходу: якщо задана орієнтація межі області  $D$ , то при відображенні образ  $E$  повинен залишатися по той же бік від межі, що й прообраз  $D$ .

**Приклад 1.** Визначити, яка частина комплексної площини розтягується і яка стискається при відображенні  $w = z^2 + z$ ?

*Розв'язання.* Знайдемо похідну:

$$w' = 2z + 1 = 2(x + iy) + 1 = (2x + 1) + 2yi.$$

Обчислимо її модуль:

$$|w'| = \sqrt{(2x + 1)^2 + 4y^2}.$$

Оскільки коефіцієнт лінійного розтягу дорівнює модулю похідної, то область, де  $|w'| < 1$ , стискається, а область, де  $|w'| > 1$ , розтягується. Знайдемо

межову лінію:

$$|w'| = 1;$$

$$(2x + 1)^2 + 4y^2 = 1; \quad 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 = 1;$$

$$x^2 + x + y^2 = 0; \quad (x + 1/2)^2 + y^2 = 1/4.$$

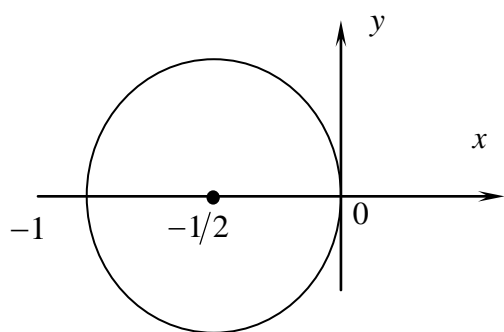


Рис. 2.18

Таким чином, межею служить коло з центром у точці  $z_0 = -1/2$  і радіусом  $r = 1/2$  (рис. 2.18). Внутрішня частина кола стискається, а зовнішня – розтягується.

**Приклад 2.** Знайти образ квадрата  $D: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$  (рис. 2.19)

при відображенні функцією  $w = z^2 + z - i$ .

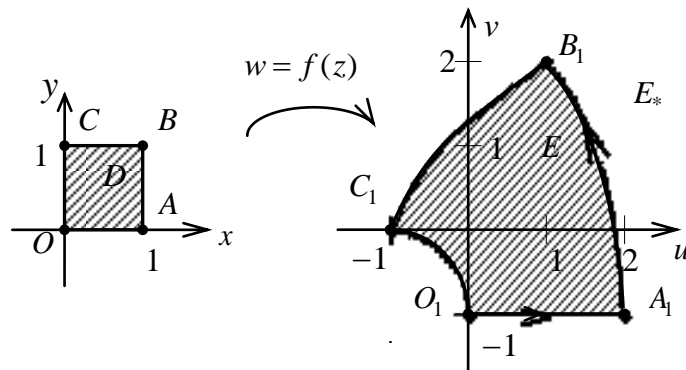


Рис. 2.19

*Розв'язання.* Знаходимо дійсну й уявну частини заданої функції:

$$w = u + iv = z^2 + z - i = (x + iy)^2 + x + iy - i = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y - 1); \quad u = x^2 - y^2 + x; \quad v = 2xy + y - 1.$$

Визначаємо образи сторін квадрата:

1)  $OA$ :  $y = 0; 0 \leq x \leq 1$ , тому  $u = x^2 + x; v = -1$ . Образом відрізка  $OA$  є відрізок  $O_1A_1: v = -1; 0 \leq u \leq 2$ , паралельний до осі  $Ou$ .

2)  $AB$ :  $x = 1; 0 \leq y \leq 1$ , тому  $u = 2 - y^2; v = 3y - 1$ . Тоді  $y = (v + 1)/3$ ;  $u = 2 - (v + 1)^2/9$ . Образом відрізка  $AB$  є дуга параболи  $A_1B_1: u = 2 - (v + 1)^2/9; -1 \leq v \leq 2$ .

3)  $BC$ :  $y = 1; 0 \leq x \leq 1$ , тому  $u = x^2 + x - 1; v = 2x$ . Тоді  $x = v/2$ ;  $u = v^2/4 + v/2 - 1$ . Образом відрізка  $BC$  є дуга параболи  $B_1C_1: u = v^2/4 + v/2 - 1; 0 \leq v \leq 2$ .

4)  $OC$ :  $x = 0; 0 \leq y \leq 1$ , тому  $u = -y^2; v = y - 1$ . Тоді  $y = v + 1; u = -(v + 1)^2$ . Образом відрізка  $OC$  є дуга параболи  $O_1C_1: u = -(v + 1)^2; -1 \leq v \leq 0$ .

Контур  $O_1A_1B_1C_1O_1$  розбиває  $w$ -площину на дві частини: внутрішню  $E$  і зовнішню  $E_*$  (рис. 2.19). Користуючись відповідністю кутових межових точок і принципом збереження напрямку обходу контуру, визначаємо, що образом квадрата служить внутрішня область  $E$ .

## 2.4 Деякі елементарні функції комплексної змінної та їх властивості

### 2.4.1 Лінійна функція

*Лінійна функція* має вигляд  $w = az + b$ , де  $a \neq 0$ ,  $b$  – комплексні сталі.

Лінійна функція визначена на всій комплексній площині, однозначна і неперервна. Обернена до неї функція  $z = w/a - b/a$  також лінійна і однозначна. Похідна  $w' = a \neq 0$ . Отже, лінійна функція аналітична, однолиста і здійснює конформне відображення на всій площині. Лінійне відображення  $w = az + b$  є перетворенням подібності, що зводиться до послідовної суперпозиції:

1) повороту площини на кут  $\arg a$ ; 2) розтягування її в  $|a|$  разів; 3) зміщення її вздовж вектора  $b$ . Лінійне відображення має *кругову властивість*: пряма переходить в пряму, а коло – в коло.

### 2.4.2 Степенева і коренева функції

*Степенева функція з натуральним показником  $n$*  має вигляд  $w = z^n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ . Степенева функція  $w = z^n$  визначена на всій комплексній площині, однозначна, неперервна. Похідна  $w' = nz^{n-1}$  всюди неперервна. Отже, степенева функція аналітична на всій комплексній площині. Промінь  $\arg z = \varphi_0$

відображується в промінь  $\arg w = n\varphi_0$ . Якщо точка  $z = re^{i\varphi}$  належить сектору  $-\pi/n < \arg z \leq \pi/n$ , різним  $z$  відповідають різні  $w$ . Значить, функція  $w = z^n$  є однолистою в цьому секторі. Указаний сектор відображується в  $w$ -площину з розрізом по від'ємній дійсній півосі (рис.2.20).

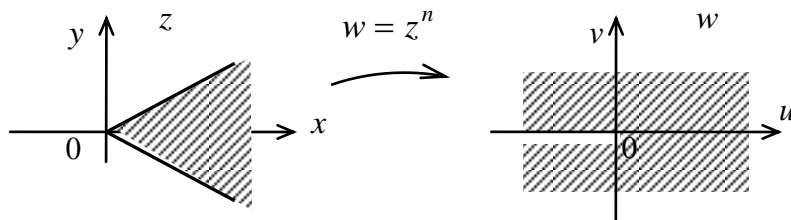


Рис. 2.20

Коренева функція має вигляд  $w = z^p$ , де  $p = m/n$  – нескоротний правильний дріб:  $0 < m/n < 1$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Коренева функція (радикал)  $w = z^p$  визначена на всій комплексній площині і багатозначна. Похідна  $w' = p z^{p-1}$  всюди визначена і неперервна, крім  $z = 0$ . Тому ця функція аналітична на всій площині за винятком точки  $z = 0$ . Оскільки функція  $w = z^{m/n}$   $n$ -значна, то для визначення єдиного образу при цьому відображенні необхідні додаткові умови. Функція  $w = z^p$  стає однолистою на всій площині, якщо вважати значення функції  $w = z^p$  додатним дійсним для додатного дійсного аргументу. Тоді  $z$ -площина з розрізом по від'ємній дійсній півосі відображається на сектор  $-\pi p < \arg w \leq \pi p$ .

### 2.4.3 Показникова функція

Показникова (експоненціальна) функція комплексної змінної визначається рівністю

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

На дійсній осі  $y = 0$  ця функція збігається з дійсною експонентою  $e^x$ . Зберігається основне правило: при множенні експонент їхні показники додаються  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ . Справедливі також співвідношення:  $e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$ ;  $(e^z)^n = e^{nz}$ . Модуль комплексної експоненти  $|e^z| = e^x$ , а аргумент  $\text{Arg } e^z = y + 2\pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Отже, ця функція є періодичною з уявним періодом  $2\pi i$ :  $e^{z+2\pi ni} = e^z$ .

Похідна комплексної експоненти  $w = e^z$  дорівнює їй самій і всюди відмінна від нуля  $w' = e^z \neq 0$ . Тому ця функція аналітична в усій комплексній площині і задає конформне відображення. При цьому довільна горизонтальна пряма перетворюється у відкритий промінь, що виходить з початку координат, а довільний вертикальний відрізок довжиною  $2\pi$  переходить в коло з центром у початку координат. Через періодичність комплексної експоненти  $w = e^z$  відображення буде однолистим у кожній горизонтальній смузі

$$-\pi + 2\pi n < \text{Im } z \leq \pi + 2\pi n, \text{ де } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Кожна така смуга відображається в  $w$ -площину з вилученим початком координат (рис. 2.21). При цьому координатна сітка декартової системи на  $z$ -площині перетворюється в сітку полярних координат на  $w$ -площині.

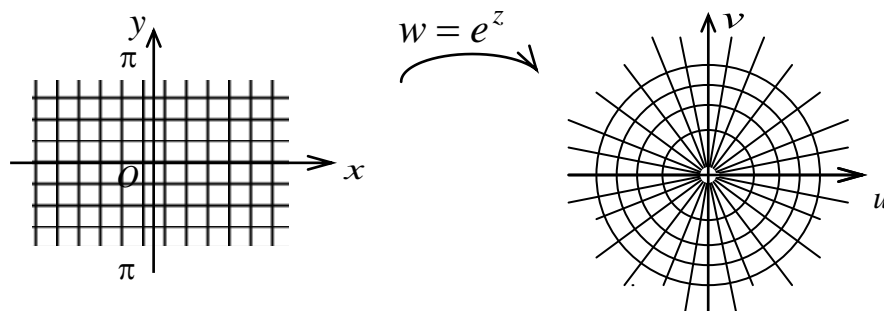


Рис. 2.21  
118

#### 2.4.4 Тригонометричні та гіперболічні функції

Тригонометричні та гіперболічні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою основної формули Ейлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

і узагальнюють відповідні дійсні функції:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; & \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}; \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.\end{aligned}$$

Оскільки комплексна експонента  $e^z$  є періодичною з уявним періодом  $2\pi i$ , то тригонометричні функції  $\sin z$  і  $\cos z$  також періодичні на всій комплексній площині з дійсним періодом  $2\pi$ , а  $\operatorname{tg} z$  і  $\operatorname{ctg} z$  – з дійсним періодом  $\pi$ :

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(z + 2\pi); & \cos z &= \cos(z + 2\pi); \\ \operatorname{tg} z &= \operatorname{tg}(z + \pi); & \operatorname{ctg} z &= \operatorname{ctg}(z + \pi).\end{aligned}$$

Причому на відміну від дійсних функцій, на всій комплексній площині  $\sin z$  і  $\cos z$  є необмеженими:

$$|\cos z| \rightarrow +\infty, \quad |\sin z| \rightarrow +\infty \quad \text{при } y \rightarrow \pm\infty.$$

Гіперболічні функції  $sh z$  і  $ch z$  на всій комплексній площині є періодичними з уявним періодом  $2\pi i$ , а  $th z$  і  $cth z$  – з уявним періодом  $\pi i$ :

$$\begin{aligned} sh z &= sh(z + 2\pi i); & ch z &= ch(z + 2\pi i); \\ th z &= th(z + \pi i); & cth z &= cth(z + \pi i). \end{aligned}$$

Комплексні тригонометричні функції  $\sin z$  і  $\cos z$  набувають нульових значень тільки в точках дійсної осі, в яких відповідно  $\sin x = 0$  і  $\cos x = 0$ . Аналогічно, комплексні гіперболічні функції  $sh z$  і  $ch z$  набувають нульових значень тільки в точках уявної осі, в яких відповідні тригонометричні функції перетворюються в нуль:  $\sin y = 0$  і  $\cos y = 0$ .

*Зауваження 1.* Для тригонометричних і гіперболічних функцій комплексного аргументу залишаються справедливими основні тотожності (синус и косинус суми, різниці та ін.), а також формули диференціювання.

*Допоміжні формули Ейлера:*

$$sh z = -i \sin iz; \quad ch z = \cos iz; \quad th z = -itg iz;$$

дають зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними.

*Зауваження 2.* Геометрично зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними зводиться до поворотів на  $\pi/2$  образів і прообразів.

*Зауваження 3.* При комплексних аргументах зникають принципові відмінності між показниковою, тригонометричними і гіперболічними функціями: експонента  $e^z$  стає періодичною,  $\sin z$  і  $\cos z$  – необмеженими і т.п. Формули Ейлера відображують тісний внутрішній зв'язок цих функцій: їх можна розглядати як різні прояви одних і тих же закономірностей.



**Приклад 1.** Знайти  $\sin(1+2i)$ .

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \sin(1+2i) &= \frac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^i - e^2e^{-i}}{2i} = \\ &= \frac{(e^{-2}(\cos 1 + i \sin 1) - e^2(\cos 1 - i \sin 1))}{(2i)} = \\ &= \frac{(\cos 1(e^{-2} - e^2) + i \sin 1(e^2 + e^{-2}))}{(2i)} = \\ &= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \sin 1 + i \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cos 1 = ch 2 \sin 1 + i sh 2 \cos 1. \end{aligned}$$

## 2.4.5 Логарифмічна функція

Логарифмічна функція комплексної змінної визначається як обернена до показникової. Комплексне число  $w = Ln z$  називається *натуральним логарифмом* ненульового комплексного числа  $z$ , якщо виконується рівність  $e^w = z$ . Нехай  $w = u + iv$ ;  $z = r e^{i\varphi}$ . Тоді за означенням

$$\begin{aligned} e^{u+iv} &= r e^{i\varphi}; \quad e^u e^{iv} = r e^{i\varphi}; \\ e^u &= r; \quad v = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Звідси  $u = \ln r = \ln |z|$  – звичайний натуральний логарифм додатного числа  $|z| > 0$ ;  $v = \arg z + 2\pi n = Arg z$  – вся множина значень аргументу ненульового комплексного числа  $z \neq 0$ .

Отже,

$$Ln z = \ln |z| + i Arg z.$$

Останній вираз показує, що функція  $w = Ln z$  є нескінченнозначною і

визначена на всій комплексній площині, за винятком початку координат  $z = 0$ .

Нехай в деякій області  $D$  обранням одного зі значень багатозначної функції  $w = F(z)$  одержана деяка однозначна функція  $w = f(z)$ . Якщо ця функція  $w = f(z)$  неперервна в області  $D$ , то вона називається *однозначною гілкою* багатозначної функції  $w = F(z)$ .

*Зауваження 1.* Багатозначну функцію  $w = F(z)$  можна розглядати як однозначну, але не на комплексній площині, а на деякому більш складному геометричному об'єкті – *Рімановій поверхні*, що утворюється шляхом “склеювання” певним чином між собою відповідної (скінченної чи нескінченної) кількості екземплярів комплексної площини. Наприклад, кореневу функцію  $w = z^{2/3}$  можна розглядати як однозначну, множиною визначення якої служить трилиста поверхня (“склеєна” з трьох екземплярів площини), а множиною значень є дволіста поверхня (“склеєна” з двох екземплярів площини). Однозначну гілку логарифмічної функції  $w = \operatorname{Ln} z$  можна отримати в будь-якій частині комплексної площини, що не містить початку координат, шляхом виділення відповідного проміжку змінювання його уявної частини. Якщо для аргументу  $z \neq 0$  обмежитися його головним значенням  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , то одержимо однозначну гілку

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z ,$$

що називається *головним значенням логарифма*.

*Зауваження 2.* Якщо число  $z$  – дійсне додатне, тоді головне значення аргументу  $\arg z = 0$  і головне значення логарифма співпадає зі звичайним натуральним логарифмом  $\ln z = \ln |z|$ .

*Зауваження 3.* На логарифм комплексної змінної поширюються основні властивості звичайного логарифма дійсного аргументу:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 ; \operatorname{Ln}(z_1 / z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 ;$$

$$\operatorname{Ln}(z)^n = n \operatorname{Ln} z.$$

Область  $D$ , що відповідає однозначній гілці логарифма, не може включати точку  $z=0$  як внутрішню. Точку  $z=0$  не можна обійти, залишаючись у цій області, оскільки при кожному обході в заданому напрямі аргумент  $z$  одержує приріст  $2\pi$  чи  $-2\pi$  і відбувається перехід до нового значення логарифма  $w = \operatorname{Ln} z$ . Тому  $z=0$  є так званою **точкою розгалуження** багатозначного логарифма  $w = \operatorname{Ln} z$ .

*Зауваження 4.* Точкою розгалуження логарифмічної функції є також  $z = \infty$ .

*Зауваження 5.* За допомогою логарифмічної функції визначаються:

а) *загальна степенева функція*  $w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ , де показник  $a = \alpha + i\beta$  – довільне комплексне число. Ця функція багатозначна, її головне значення  $w = e^{a \ln z}$ .

б) *загальна показникова функція*  $w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ , де основа  $a = \alpha + i\beta \neq 0$  – довільне ненульове комплексне число. Ця функція багатозначна, її головне значення  $w = e^{z \ln a}$ .

в) *показниково-степенева функція*  $w = z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1}$ , де основа відмінна від нуля  $z_1 \neq 0$ . Ця функція нескінченнозначна, її головне значення  $w = e^{z_2 \ln z_1}$ .

*Зауваження 6.* Багатозначні *обернені тригонометричні* і *обернені гіперболічні функції* визначаються як розв'язки відповідних рівнянь для прямих функцій. Переходячи в цих рівняннях за формулами Ейлера до експоненти, вказані аркфункції також можна виразити через логарифмічну функцію. Наприклад:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}); & \operatorname{Arccos} z &= -i \operatorname{Ln}(z + i\sqrt{1-z^2}); \\ \operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}); & \operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}). \end{aligned}$$

**Приклад 1.** Знайти  $w = i^{-i}$ .

*Розв'язання.*  $w = i^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} i} = e^{-i(\ln|i| + i \operatorname{Arg} i)} =$   
 $= e^{-i(\ln 1 + i(\pi/2 + 2\pi n))} = e^{\pi/2 + 2\pi n}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

## 2.5 Інтеграл функції комплексної змінної

### 2.5.1 Поняття комплексного інтеграла

Нехай функція  $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  неперервна та однозначна в деякій області  $D$ , а  $L_{AB}$  – будь-яка кусково-гладка крива в цій області (рис. 2.22). Розіб'ємо цю криву довільним чином на  $n$  елементарних дуг  $\Delta L_i = \overline{z_{i-1} z_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  точками  $z_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  у напрямку від точки  $A = z_0$  до точки  $B = z_n$ . Кожній елементарній дузі  $\Delta L_i$  відповідає елементарна хорда  $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ . На кожній елементарній дузі  $\Delta L_i$  виберемо довільну точку  $\zeta_i$  і складемо інтегральну суму  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$  для функції  $f(z)$  на кривій  $L_{AB}$ .

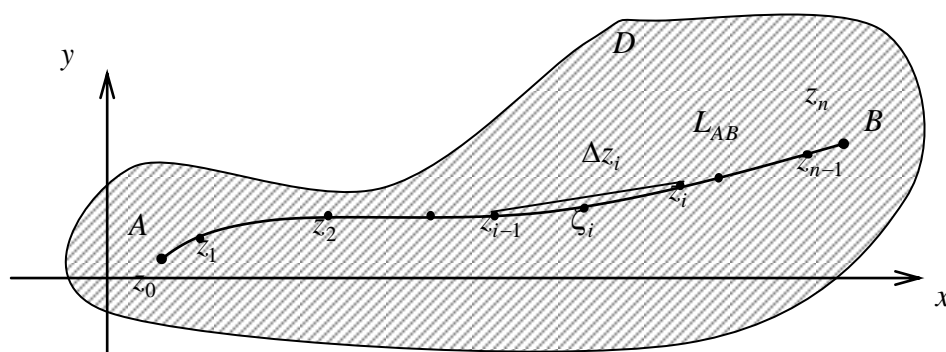


Рис. 2.22

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття (незалежно від способу розбиття та вибору точок) називається *інтегралом*

(контурним інтегралом) комплексної функції  $f(z)$  по кривій (контур)  $L_{AB}$ :

$$\int_{L_{AB}} f(z) dz = \lim_{\max |\Delta z_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i ,$$

де  $dz = dx + i dy$  – диференціал комплексного аргументу.

Інтеграл від комплексної функції можна виразити через два дійсні криволінійні інтеграли за координатами:

$$\int_{L_{AB}} f(z) dz = \int_{L_{AB}} (u + i v) (dx + i dy) = \int_{L_{AB}} u dx - v dy + i \int_{L_{AB}} v dx + u dy .$$

Тому для інтеграла від комплексної функції справедливі відповідні властивості криволінійних інтегралів. Зокрема, при зміні напрямку обходу кривої цей інтеграл тільки змінює знак:

$$\int_{L_{BA}} f(z) dz = - \int_{L_{AB}} f(z) dz$$

Як і для дійсних криволінійних інтегралів, обчислення інтеграла від комплексної функції зводиться за допомогою методу заміни змінної до обчислення звичайного визначеного інтеграла.

**Приклад.** Обчислити заданий інтеграл по вказаній дузі:

а)  $I = \int_L \frac{dz}{z - z_0}$  ;  $L: z = z_0 + R \cdot e^{it}$ ,  $t \in [0; 2\pi]$  – коло.

б)  $I = \int_L (2z + \bar{z} + i) dz$  ;  $L: y = x^2$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1 + i$  – дуга параболи.

Розв'язання. а)  $I = \int_L \frac{dz}{z - z_0} = \left| \begin{array}{l} z = z_0 + R e^{it}; \quad dz = i R e^{it} dt \\ z_1 = 0; \quad z_2 = 2\pi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{i R e^{it} dt}{R e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$  .

$$\begin{aligned}
\text{б) } I &= \int_L (2z + \bar{z} + i) dz = \left| \begin{array}{l} y = x^2; \quad z = x + iy = x + ix^2; \quad \bar{z} = x - ix^2; \quad dy = 2x dx; \\ dz = dx + i dy = dx + i 2x dx = (1 + 2xi) dx; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \\ f(z) = 2z + \bar{z} + i = 2(x + ix^2) + x - ix^2 + i = 3x + i(x^2 + 1); \end{array} \right| = \\
&= \int_0^1 (3x + i(x^2 + 1))(1 + 2xi) dx = \int_0^1 (3x - 2x(x^2 + 1)) dx + i \int_0^1 ((x^2 + 1) + 6x^2) dx = \\
&= \int_0^1 (x - 2x^3) dx + i \int_0^1 (7x^2 + 1) dx = \left( x^2/2 - x^4/2 \right) \Big|_0^1 + i \left( 7x^3/3 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{10}{3} i.
\end{aligned}$$

*Зауваження.* Для існування інтеграла досить неперервності підінтегральної функції  $w = f(z)$ , тому інтеграл може існувати і у випадку неаналітичності цієї функції.

## 2.5.2 Первісна функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші

Якщо крива  $L_{AB}$  лежить в області аналітичності функції  $w = f(z)$ , то комплексний інтеграл  $I = \int_{L_{AB}} f(z) dz$  не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової та кінцевої точок. Це пояснюється тим, що для аналітичної функції виконуються умови Коші–Рімана  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  і  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , які співпадають з умовами незалежності від шляху інтегрування обох відповідних дійсних криволінійних інтегралів  $\int_{L_{AB}} u dx - v dy$  і  $\int_{L_{AB}} v dx + u dy$ .

Таким чином, інтеграл аналітичної функції можна подати у вигляді  $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ .

Якщо зафіксувати нижню межу інтегрування, то одержаний інтеграл

$F(z) = \int_a^z f(\xi) d\xi$ , як функція верхньої межі, служить *первісною* для  $f(z)$ :

$$F'(z) = \left( \int_a^z f(\xi) d\xi \right)' = f(z).$$

Множина всіх первісних для даної функції утворює відповідний *невизначений інтеграл*.

Для інтеграла аналітичної функції справджується формула Ньютона – Лейбниця

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

де  $F(z)$  – довільна первісна.

*Зауваження.* Таблиця інтегралів аналогічна відповідній таблиці для функцій дійсного аргументу, але підлогарифмові вирази не містять модуля.

**Приклад.** Користуючись таблицею інтегралів, обчислити заданий інтеграл від аналітичної функції:

$$I = \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 4}}.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 4}} = \ln \left( z + \sqrt{z^2 + 4} \right) \Big|_0^i = \ln \left( i + \sqrt{i^2 + 4} \right) - \ln 2 = \ln(\sqrt{3} + i) - \ln 2 = \ln|\sqrt{3} + i| + \\ &\quad + i \arg(\sqrt{3} + i) - \ln 2 = \ln 2 + i\pi/6 - \ln 2 = i\pi/6. \end{aligned}$$

Умови незалежності криволінійного інтеграла  $\int_L P dx + Q dy$  від форми шляху інтегрування  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  еквівалентні рівності до нуля цього інтеграла по

довільному замкненому контуру  $L$ , що лежить в даній однозв'язній області

$$\int_L P dx + Q dy = 0 .$$

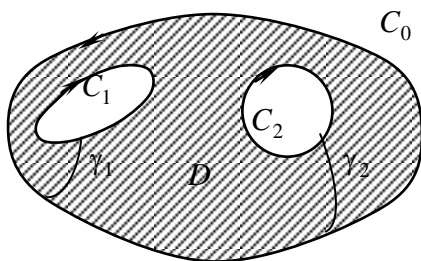
Аналогічне твердження справедливе для комплексного інтеграла аналітичної функції.

**Теорема (інтегральна теорема Коші для однозв'язної області).** Якщо функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній області  $D$ , що обмежена кусково-гладким контуром  $C$  і неперервна в замкненій області  $\bar{D}$ , то інтеграл функції  $f(z)$  по контуру  $C$  дорівнює нулю

$$\int_C f(z) dz = 0 .$$

Теорема Коші поширюється на багатозв'язну область (рис. 2.23): якщо функція  $f(z)$  аналітична в багатозв'язній області  $D$ , що обмежена зовнішнім контуром  $C_0$  і внутрішніми контурами  $C_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , і неперервна в замкненій

області  $\bar{D}$ , то інтеграл функції  $f(z)$  по повній межі області в додатному напрямі дорівнює нулю



$$\int_{C_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0 .$$

Рис. 2.23

Іншими словами, для складеного контуру

справедливо: інтеграл функції  $f(z)$  по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по всіх внутрішніх контурах при умові, що обіг усіх контурів здійснюється проти годинникової стрілки



$$\int_{C_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz .$$

При доведенні багатозв'язна область перетворюється на однозв'язну область за допомогою розрізів  $\gamma_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , що з'єднують внутрішні контури із зовнішнім (рис. 2.23). Кожна лінія розрізу  $\gamma_k$  проходиться двічі в протилежних напрямках, тому інтеграли по ній при додаванні взаємно знищуються.

### 2.5.3 Інтегральна формула Коші та її наслідки

Інтегральна теорема Коші відкриває можливість визначення значень аналітичної функції всередині області через її значення на межі цієї області.

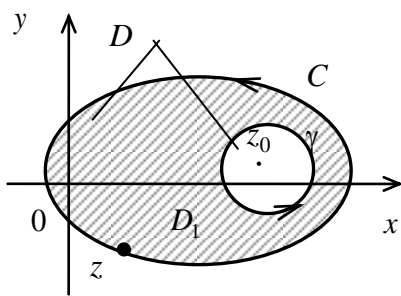


Рис. 2.24

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній області  $D$ , що обмежена кусково-гладким контуром  $C$  і неперервна в замкненій області  $\overline{D}$  (рис. 2.24). Для довільної фіксованої внутрішньої точки  $z_0$

області  $D$  допоміжна функція  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  є

аналітичною в цій області, крім хіба що точки  $z_0$ .

Обведемо точку  $z_0$  колом  $\gamma$  з центром у цій точці та радіусом  $r$  таким, що все коло лежить всередині області  $D$ . Тоді допоміжна функція  $\varphi(z)$  буде аналітичною у двозв'язній області  $D_1$  між контурами  $\gamma$  і  $C$ . За теоремою Коші

$$\int_C \varphi(z) dz = \int_\gamma \varphi(z) dz ; \quad \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_\gamma \frac{f(z_0) + f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} + \\
&+ \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \left| \begin{array}{l} \gamma: z = r e^{it}, \quad t_1 = 0, t_2 = 2\pi \\ dz = i r e^{it} dt \end{array} \right| = \\
&= 2\pi i f(z_0) + \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it}) - f(z_0)}{r e^{it}} i r e^{it} dt = 2\pi i f(z_0) + \\
&+ \int_0^{2\pi} (f(z_0 + r e^{it}) - f(z_0)) dt.
\end{aligned}$$

Із неперервності підінтегральної функції випливає, що останній інтеграл прямує до нуля при  $r \rightarrow 0$  і при  $r = 0$  набуває значення нуль. Дістаємо інтегральну формулу Коші (інтеграл Коші)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

*Зауваження 1.* У випадку багатозв'язної області інтегрування треба проводити по повній межі у додатному напрямі.

*Зауваження 2.* Оскільки  $z_0$  – довільна точка області аналітичності, то індекс можна опустити, а межові точки позначити через  $\zeta$ . Тоді формула Коші (інтеграл Коші) набуває вигляду

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Інтеграл Коші виражає значення аналітичної функції  $f(z)$  в довільній точці  $z$  через її значення  $\zeta$  на довільному контурі  $C$ , що лежить в області аналітичності функції  $f(z)$  і містить точку  $z$  всередині. В цей інтеграл змінна  $\zeta$  входить як параметр.

$$\text{Наслідок 1.} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ 0, & z \notin D. \end{cases}$$

*Зауваження 3.* Нехай функція  $f(z)$  – аналітична в області  $D$  з межею  $C$  і неперервна в замкненій області  $\bar{D}$ . Нехай  $a$  – довільна точка межі  $C$ . Тоді в силу неперервності функції  $f(z)$  до самої межі  $C$  з наслідку 1 випливає:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in D}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f(a); \quad \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \notin D}} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Таким чином, на межі області  $D$  функція  $f(z)$  має стрибок, що дорівнює  $f(a)$  – значенню цієї функції на межі.

*Наслідок 2.* Нехай функція  $f(z)$  – аналітична в області  $D$  з межею  $C$  і  $z$  – довільна внутрішня точка цієї області. Тоді функція  $f(z)$  нескінченну кількість разів диференційовна, причому

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^2} d\zeta; \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^{n+1}} d\zeta.$$

Ці співвідношення одержуються диференціюванням інтеграла Коші, де похідна по параметру береться від підінтегральної функції.

Теорема і формула Коші знаходять широке застосування при обчисленні інтегралів по замкнених контурах.

**Приклад.** Обчислити інтеграл  $I = \int_C \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2}$  по замкненому контуру  $C$ :

а)  $C: |z-1|=1/2$ ; б)  $C: |z-i|=1/2$ ; в)  $C: |z|=2$ .

Розв'язання. Підінтегральна функція  $f(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$  всюди аналітична за

винятком двох особливих точок  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1$ .

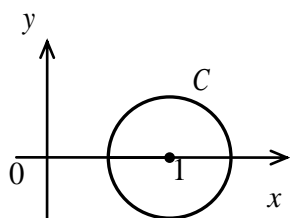


Рис. 2.25

а) Особлива точка  $z_1 = 0$  не входить всередину області  $D$ , обмеженої контуром  $C: |z-1|=1/2$  (рис. 2.25). У підінтегральному виразі виділимо функцію  $\varphi(z) = e^{2z}/z$ , що аналітична в області  $D$ . Тоді для обчислення інтеграла можна скористатися формулою Коші для першої похідної:

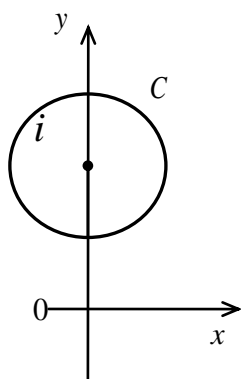


Рис. 2.26

$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2} dz = \int_C \frac{\varphi(z) dz}{(z-1)^2} = 2\pi i \varphi'(z) \Big|_{z=1} =$$

$$= \left| \varphi'(z) = \frac{2e^{2z}z - e^{2z}}{z^2} \right|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{2e^{2 \cdot 1} \cdot 1 - e^{2 \cdot 1}}{1^2} = 2\pi e^2 i.$$

б) Обидві особливі точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1$  не входять всередину області  $D$ , обмеженої контуром  $C: |z-i|=1/2$  (рис. 2.26). Підінтегральна функція

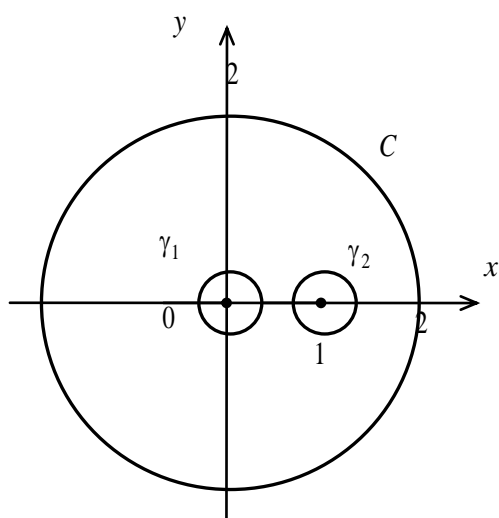


Рис. 2.27

$f(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$  аналітична в цій області, тоді за теоремою Коші

$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2} dz = 0.$$

в) Обидві особливі точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1$  входять всередину області  $D$ , обмеженої контуром  $C: |z|=2$  (рис. 2.27). Побудуємо

кола  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  з центрами відповідно в точках  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1$  достатньо малих радіусів так, щоб вони не перетинались ані з контуром  $C$ , ані між собою. У тризв'язній області, що обмежена ззовні контуром  $C$ , а зсередини – колами  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , підінтегральна функція  $f(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$  аналітична. За теоремою Коші для складеного контуру

$$I = \int_C \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2} = \int_{\gamma_1} \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2},$$

де обхід всіх контурів здійснюється проти годинникової стрілки.

У підінтегральному виразі першого доданка виділимо функцію  $\phi(z) = e^{2z}/(z-1)^2$ , що аналітична в області, обмеженій контуром  $\gamma_1$ . Тоді за формулою Коші:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2} = \int_{\gamma_1} \frac{\phi(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot \phi(z)|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{e^{2 \cdot 0}}{(0-1)^2} = 2\pi i.$$

Другий доданок  $I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2}$  не залежить від обрання контуру  $\gamma_2$ , що охоплює тільки одну особливу точку  $z_2 = 1$ , тому його значення співпадає з обчисленням в пункті а).

Отже,

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z} dz}{z(z-1)^2} = 2\pi e^2 i.$$

Таким чином,

$$I = I_1 + I_2 = 2\pi i + 2\pi e^2 i = 2\pi(e^2 + 1)i .$$

## 2.6 Ряди функцій комплексної змінної

### 2.6.1 Основні поняття про ряди з комплексними членами

**Теорема 1.** Числовий ряд з комплексними членами  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , де

$c_n = a_n + ib_n$ ,  $a_n \in R$ ,  $b_n \in R$  збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються обидва

ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , складені з дійсних і уявних частин відповідно.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд з модулів його

членів  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  називається *умовно збіжним*, якщо сам ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

збігається, а ряд з модулів його членів  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  розбігається.

*Зауваження.* Дослідження на збіжність рядів з комплексними членами зводиться до дослідження рядів з дійсними членами, що здійснюється за відомими ознаками збіжності дійсних рядів.

**Приклад 1.** Дослідити на збіжність:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2^n} + i \frac{1}{n^n} \right)$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + i \frac{1}{n!} \right)$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + i 2^n \right)$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)/n + i \ln n)$ .

*Розв'язання.*

а) Обидва дійсні ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  збігаються – перший за ознакою

Даламбера, а другий за радикальною ознакою Коші (покажіть це самостійно).

Тому заданий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2^n} + i \frac{1}{n^n} \right)$  також збігається.

б) Ряд з дійсних частин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  розбігається як гармонічний, тому заданий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + i \frac{1}{n!} \right)$  теж розбігається (хоча ряд з уявних частин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  збігається за ознакою Даламбера).

в) Ряд з дійсних частин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  збігається як узагальнений гармонічний з

показником степеня  $\alpha = 2 > 1$ , а ряд з уявних частин  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$  розбігається як геометрична прогресія зі знаменником  $q = 2 \geq 1$ . Тому заданий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + i 2^n \right)$  теж розбігається.

г) Обидва дійсні ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$  розбігаються, оскільки не

задовольняють необхідну ознаку збіжності (покажіть це самостійно). Тому

заданий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)/n + i \ln n)$  також розбігається.

**Приклад 2.** Показати, що заданий ряд збігається абсолютно

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((1+2i)/5)^n.$$

*Розв'язання.* Дослідимо на збіжність ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( (1+2i)/5 \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left( |1+2i|/5 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{5}/5 \right)^n .$$

Цей ряд збігається як геометрична прогресія зі знаменником  $q = \sqrt{5}/5 < 1$ . Тому

заданий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( (1+2i)/5 \right)^n$  збігається абсолютно.

Нехай в деякій області  $D$  комплексної площини задана послідовність функцій комплексної змінної  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ...,  $f_n(z)$ , .... Вираз (нескінченна сума)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

називається *функціональним рядом з комплексними членами*.

Функціональний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  називається *збіжним* у точці  $z_0$ , якщо збігається

відповідний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ .

Множина всіх точок збіжності називається *областю збіжності*.

**Теорема 2 (теорема Вейерштрасса).** Якщо члени функціонального ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  неперервні в області  $D$  і ряд збігається рівномірно, то сума ряду  $S(z)$

– неперервна в  $D$  і допускає почленне інтегрування вздовж довільної кривої  $L$ , що лежить в області  $D$ :

$$\int_L S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z) dz .$$

**Теорема 3.** Якщо члени функціонального ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  аналітичні в



області  $D$  і ряд збігається рівномірно в будь-якій замкненій області, що належить  $D$ , то сума ряду  $S(z)$  – аналітична в області  $D$  і допускає почленне диференціювання довільне число разів:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z); \quad S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

### 2.6.2 Степеневі ряди. Ряд Тейлора

*Степеневим рядом* з центром у точці  $z_0$  називається функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots,$$

де  $c_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – коефіцієнти ряду (комплексні числа).

Очевидно, що степеневий ряд завжди збігається в своєму центрі  $z = z_0$ .

**Теорема 1 (теорема Абеля).** Якщо степеневий ряд збігається в деякій точці  $z_1$  ( $z_1 \neq z_0$ ), то він абсолютно збігається всередині кола радіуса  $|z_1 - z_0|$  з центром  $z_0$ . Якщо степеневий ряд розбігається в деякій точці  $z_2$  ( $z_2 \neq z_0$ ), то він розбігається поза колом радіуса  $|z_2 - z_0|$  з центром  $z_0$ .

За теоремою Абеля для степеневого ряду завжди існує так званий *круг збіжності*  $|z - z_0| < R$ , всередині якого ряд збігається, зовні – розбігається, а на самому колі  $|z - z_0| = R$  можуть бути як точки збіжності, так і розбіжності. Радіус  $R$  цього кола називається *радіусом збіжності*.

*Зауваження 1.* Очевидно,  $0 \leq R \leq +\infty$ . Якщо  $R = 0$ , то ряд збігається

тільки в центрі  $z = z_0$ . Якщо  $R = +\infty$ , то ряд збігається на всій комплексній площині.

Застосовуючи до ряду з модулів ознаку Даламбера чи радикальну ознаку Коші, радіус збіжності степеневого ряду можна знайти відповідно за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

**Приклад 1.** Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (n-2i)(z+i)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+i)^n(z-1+i)^n.$$

*Розв'язання.*

$$\text{а) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n-2i|}{|n+1-2i|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n+1)^2+4}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+4}{(n+1)^2+4}} = 1.$$

$$\text{б) } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1/n!|}{|1/(n+1)!|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

$$\text{в) } R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+i)^n|} = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} |n+i| = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} = 0.$$

**Теорема 2 (теорема Тейлора).** Нехай функція  $f(z)$  – аналітична всередині кола радіуса  $R$  з центром у точці  $z_0$ . Тоді вона може бути подана у цьому колі збіжним степеневим *рядом Тейлора*, причому цей ряд визначається однозначно.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

*Зауваження 2.* Спираючись на наслідок 2 формули Коші, коефіцієнти ряду Тейлора можна подати у вигляді

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\dots),$$

де  $\gamma$  – довільний замкнений контур, що лежить у колі  $|z - z_0| < R$  і охоплює точку  $z_0$ .

*Зауваження 3.* Якщо функція  $f(z)$  – аналітична в області  $D$  і  $z_0$  – внутрішня точка цієї області, то радіус збіжності ряду Тейлора

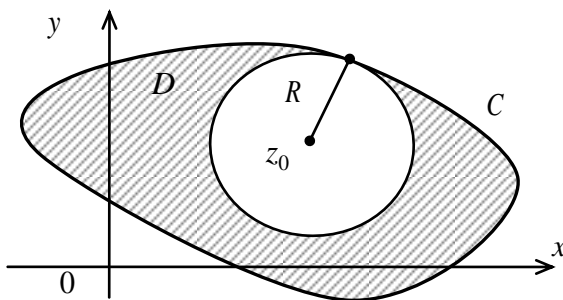


Рис. 2.28

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{не менший}$$

за відстань від точки  $z_0$  до межі  $C$  області (рис. 2.28). Таким чином, радіус

збіжності ряду Тейлора дорівнює відстані від центра  $z_0$  до найближчої до нього особливої точки функції  $f(z)$ .

*Зауваження 4.* Теорема Тейлора дозволяє дати еквівалентне означення аналітичної функції як функції, ряд Тейлора якої збігається до неї самої, що співпадає з прийнятим у дійсному аналізі.

*Зауваження 5.* Ряд Тейлора для функції  $f(z)$  в точці  $z_0$  єдиний, тобто, якщо функція  $f(z)$  якимось чином подана рядом за степенями  $(z - z_0)$ , то це і буде ряд Тейлора. Тому на практиці для розкладу функції в степеневий ряд використовують відомі розвинення елементарних функцій. Наведемо деякі з

них:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n};$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Розвинення для експоненти, синуса і косинуса справедливі на всій комплексній площині. Радіус збіжності  $R$  ряду для логарифма дорівнює 1. Радіус збіжності  $R$  біноміального ряду залежить від показника степеня  $\alpha$ :  $R = +\infty$  при натуральному  $\alpha$  і  $R = 1$  при ненатуральному  $\alpha$ .

**Приклад 2.** Розкласти функцію  $f(z) = \frac{z}{z+4}$  в ряд Тейлора в околі точки

$z_0 = 1$  і знайти радіус збіжності отриманого ряду.

*Розв'язання.* Подамо функцію у вигляді

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z+4} = \frac{z+4-4}{z+4} = 1 - \frac{4}{z+4} = 1 - \frac{4}{(z-1)+5} = \\ &= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+(z-1)/5} = 1 - \frac{4/5}{1-(z-1)/5}. \end{aligned}$$

Якщо  $|(z-1)/5| < 1$ , то другий доданок в останньому виразі можна розглядати

як суму  $S = \frac{a_1}{1-q}$  нескінченно спадної геометричної прогресії  $a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$  з

першим членом  $a_1 = 4/5$  і знаменником  $q = -(z-1)/5$ . Тоді

$$\begin{aligned}
 f(z) &= 1 - (4/5) \sum_{n=1}^{\infty} \left( -(z-1)/5 \right)^{n-1} = \\
 &= 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \left( -\frac{z-1}{5} \right) - \frac{4}{5} \left( -\frac{z-1}{5} \right)^2 - \dots - \frac{4}{5} \left( -\frac{z-1}{5} \right)^n - \dots = \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} (z-1)^n.
 \end{aligned}$$

Отриманий ряд завдяки однозначності розвинення і є шуканим рядом Тейлора. Радіус збіжності цього ряду визначається з умови  $|-(z-1)/5| < 1$ . Тоді  $|z-1| < 5$ . Отже,  $R=5$ . Радіус збіжності  $R=5$  можна знайти інакше як відстань від центра ряду  $z_0 = 1$  до найближчої особливої точки  $z = -4$  функції

$$f(z) = \frac{z}{z+4} \text{ (у даної функції особлива точка єдина).}$$

### 2.6.3 Ряд Лорана

Розглянемо *узагальнений степеневий ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де  $c_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) – коефіцієнти ряду,  $z_0$  – центр ряду.

Цей ряд містить як невід'ємні, так і від'ємні степені різниці  $(z - z_0)$ . Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \text{ називається } \textit{головною частиною}, \text{ а ряд } \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ – } \textit{правильною}$$

*частиною*. Узагальнений степеневий ряд збігається, якщо одночасно збігаються його головна і правильна частини. Правильна частина як звичайний степеневий

ряд збігається всередині деякого кола з центром  $z_0$  і радіусом  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} (|c_n|/|c_{n+1}|)$ . Якщо у головній частині зробити заміну  $\zeta = 1/(z - z_0)$ , то

отриманий звичайний степеневий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$  збігається всередині деякого кола з центром  $\zeta = 0$  і радіусом  $R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (|c_{-n}|/|c_{-n-1}|)$ . Нехай  $r = 1/R_1$ .

Повертаючись до змінної  $z$ , можна встановити, що головна частина збігається зовні кола з центром  $z_0$  і радіусом  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} (|c_{-n-1}|/|c_n|)$ .

Якщо області  $|z - z_0| < R$  і  $|z - z_0| > r$  мають непорожню спільну частину, то узагальнений степеневий ряд збігається у їх спільній частині – кільці  $r < |z - z_0| < R$  (рис. 2.29). На межі кільця ряд може як збігатися, так і розбігатися.

**Приклад 1.** Знайти область збіжності узагальненого степеневого ряду

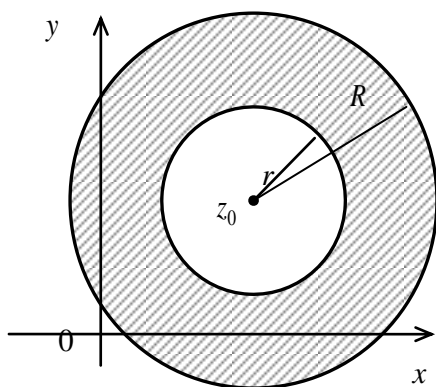


Рис. 2.29

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^5}$$

*Розв'язання.* Знайдемо область збіжності головної

частини  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n}$ . Застосовуючи радикальну

ознаку Коші до ряду з модулів, визначаємо радіус збіжності

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n} = e.$$

Тобто, головна частина абсолютно збігається при  $|z - i| > e$ . На колі  $|z - i| = e$

цей ряд розбігається, оскільки для відповідного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$  не виконується необхідна ознака збіжності. Знайдемо область збіжності правильної частини  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^5}$ . Застосовуючи ознаку Даламбера до ряду з модулів, визначаємо радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)^5}{3^n n^5} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^5 = 3.$$

Тобто, правильна частина абсолютно збігається при  $|z-i| < 3$ . На колі  $|z-i| = 3$  цей ряд теж абсолютно збігається, оскільки відповідний ряд з модулів  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(z-i)^n}{3^n n^5} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$  є збіжним узагальненим гармонічним рядом. Тоді областю збіжності правильної частини служить замкнений круг  $|z-i| \leq 3$ . Отже, областю збіжності початкового сумарного ряду служить спільна частина знайдених областей – кільце  $e < |z-i| \leq 3$  з центром  $z_0 = i$ .

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в деякій області  $D$  за винятком окремих особливих точок. Візьмемо довільну точку  $z_0$  цієї області. Якщо точка  $z_0$  – правильна, то функцію  $f(z)$  можна розвинути в ряд Тейлора, радіус збіжності якого дорівнює відстані від центра  $z_0$  до найближчої особливої точки. Якщо точка  $z_0$  – особлива, то функцію  $f(z)$  не можна розкласти в ряд Тейлора за степенями  $(z - z_0)$ .

Проведемо концентричні кола з центром  $z_0$  через кожну особливу точку області  $D$ . Тоді всередині кожного кільця між сусідніми колами особливих

точок не буде. Наступна теорема дає розв'язок задачі: розкласти функцію  $f(z)$ , що аналітична в кільці  $r < |z - z_0| < R$ , в узагальнений степеневий ряд.

**Теорема 1 (теорема Лорана).** Нехай функція  $f(z)$  – аналітична в круговому кільці  $r < |z - z_0| < R$  з центром у точці  $z_0$ . Тоді вона може бути однозначно подана у цьому кільці збіжним узагальненим степеневим **рядом Лорана**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де  $\gamma$  – довільний замкнений контур, що охоплює внутрішнє коло і повністю лежить у кільці.

*Зауваження 1.* Збіжний в деякому кільці до функції  $f(z)$  ряд Лорана можна почленно диференціювати та інтегрувати. Отримані при цьому ряди збіжні у тому ж кільці.

*Зауваження 2.* Ряд Тейлора є окремим випадком ряду Лорана, коли в останньому відсутня головна частина ( $c_{-n} = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ).

*Зауваження 3.* Нехай функція  $f(z)$  аналітична в круговому кільці  $R < |z| < +\infty$  – в проколотому околі нескінченно віддаленої точки  $z_0 = \infty$ . Якщо перейти до нової змінної  $\zeta = 1/z$ , то одержана функція  $f(1/\zeta)$  аналітична в кільці  $0 < |\zeta| < 1/R$  – в проколотому околі точки  $\zeta_0 = 0$ . Розкладаючи функцію  $f(1/\zeta)$  в ряд Лорана в околі точки  $\zeta_0 = 0$  і повертаючись до змінної  $z$ , можна отримати ряд Лорана за степенями  $z$  функції  $f(z)$  в околі нескінченно віддаленої точки  $z_0 = \infty$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}; \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}},$$



де  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  – головна частина;  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$  – правильна частина (зміст і назви частин ряду протилежні тим, що існують для ряду Лорана з центром у скінченній точці).

**Зауваження 4.** Нехай функція  $f(z)$  – аналітична в круговому кільці  $r < |z - z_0| < R$ . Тоді коефіцієнти ряду Лорана задовольняють **нерівність Коші**

$$|c_n| \leq M / \rho^n,$$

де  $M = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$ ,  $r < \rho < R$ ,  $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$ ,  $(n = 0, \pm 1, \dots)$ .

**Приклад 2.** Розкласти в ряд за степенями  $z$  функцію

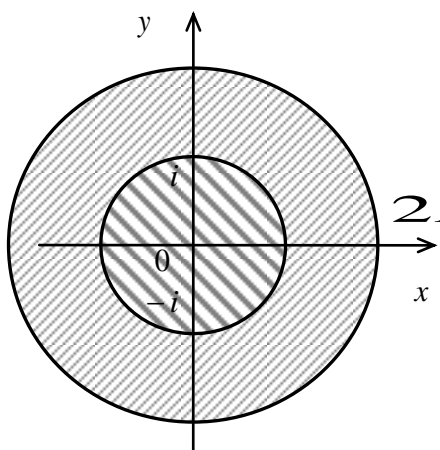


Рис. 2.30

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 10}{(z - 2)(z^2 + 1)}$$

- а) в крузі  $|z| < 1$  (в околі точки  $z_0 = 0$ );
- б) у кільці  $1 < |z| < 2$ ;
- в) у кільці  $2 < |z| < \infty$  (в околі точки  $z_0 = \infty$ ).

**Розв'язання.** Особливими точками даної

функції  $f(z)$  є точки  $z = 2$  і  $z = \pm i$  (у цих точках знаменник  $(z - 2)(z^2 + 1)$  дорівнює нулю). Тому існують три області з центром у правильній точці  $z_0 = 0$  (рис. 2.30), де функція  $f(z)$  є аналітичною і може бути розвинена в ряд за степенями  $z$ : а) в крузі  $|z| < 1$  – в ряд Тейлора; б) у кільці  $1 < |z| < 2$  – в ряд Лорана; в) у кільці  $2 < |z| < \infty$  – в ряд Лорана. Оскільки функція  $f(z)$  є правильним раціональним дробом, то 1) розкладемо її на суму елементарних дробів; 2) у відповідній області кожен з доданків перетворимо до вигляду суми

нескінченно спадної геометричної прогресії і перейдемо до відповідної прогресії; 3) підставляючи отримані розклади у вираз для функції  $f(z)$ , знайдемо шукане розвинення цієї функції в ряд Лорана у відповідній області.

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 10}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} A(z+i)(z-i) + B(z-2)(z-i) + C(z-2)(z+i) = \\ = z^2 - 2z + 10; \\ z=2: 5A=10; \quad A=2; \\ z=i: 2i(i-2)C = -1-2i+10; \quad C = -1/2 + 2i; \\ z=-i: 2i(i+2)B = -1+2i+10; \quad B = -1/2 - 2i \end{array} \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} + \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{z-i}.$$

а) В крузі  $|z| < 1$ :

$$2 \cdot \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-z/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n};$$

$$\frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{-i}{1-iz} = \frac{-4+i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (iz)^n =$$

$$= \frac{-4+i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n; \quad \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{i}{1-(-iz)} =$$

$$= \frac{-4-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = \frac{-4-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n z^n;$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \frac{-4+i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n + \frac{-4-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( (i^n + 2^{n-1}(-4+i) + 2^{n-1}(-1)^{n+1}(4+i)) / 2^n \right) i^n z^n.$$

б) У кільці  $1 < |z| < 2$ :

$2 \cdot \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$  (для першого доданку використовуємо знайдене в пункті а) розвинення);

$$\begin{aligned} \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} &= \frac{-1-4i}{2z} \cdot \frac{1}{1-(-i/z)} = \frac{-1-4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-i/z)^n = \\ &= \frac{-1-4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^n}; \quad \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{-1+4i}{2z} \cdot \frac{1}{1-i/z} = \\ &= \frac{-1+4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (i/z)^n = \frac{-1+4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n}; \\ f(z) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \frac{-1-4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^n} + \frac{-1+4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( (-1)^n (1+4i) + (-1+4i) \right) / 2 \right) i^{n-1} \frac{1}{z^n}. \end{aligned}$$

в) У кільці  $2 < |z| < \infty$ :

$$2 \cdot \frac{1}{z-2} = \frac{2}{z} \cdot \frac{1}{1-(2/z)} = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (2/z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}.$$

Для другого і третього доданків використовуємо знайдені в пункті б) розвинення:

$$\begin{aligned} \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} &= \frac{-1-4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{z^n} = \frac{-1-4i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} i^{n-1}}{z^n}; \\ \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} &= \frac{-1+4i}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} = \frac{-1+4i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n}. \end{aligned}$$

Тоді

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \frac{-1-4i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} i^{n-1}}{z^n} + \frac{-1+4i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{z^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^{n+1}i^{n-1} + (-1)^n(1+4i) + (-1+4i)}{2} i^{n-1} \frac{1}{z^n}.$$

**Приклад 3.** Розкласти в ряд Лорана функцію  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 10}{(z-2)(z^2+1)}$

в (проколотому) околі точки  $z_0 = 2$ .

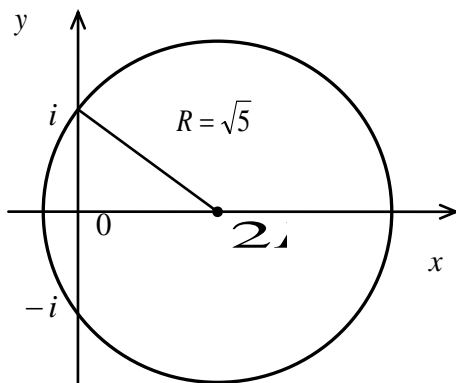


Рис. 2.31

*Розв'язання.* Особливими точками даної функції  $f(z)$  є точки  $z = 2$  і  $z = \pm i$  (див. попередній прикл. 2). Тому існують дві області з центром в особливій точці  $z_0 = 2$  (рис. 2.31), де функція  $f(z)$  є аналітичною і може бути розвинена в ряд за степенями різниці  $z - 2$ :

а) у кільці  $0 < |z - 2| < \sqrt{5}$  (у проколотому околі точки  $z_0 = 2$ ) – в ряд Лорана; б) у кільці  $\sqrt{5} < |z - 2| < \infty$  – в ряд Лорана.

У поставленій задачі розглядається (проколотий) окіл  $0 < |z - 2| < \sqrt{5}$  точки  $z_0 = 2$ . Радіус  $R = \sqrt{5}$  визначається як відстань від центра  $z_0 = 2$  до найближчої особливої точки (в даному випадку обидві особливі точки  $z = \pm i$  розміщені на однаковій відстані від точки  $z_0 = 2$ ). Розкладемо функцію  $f(z)$  у суму елементарних дробів (див. попередній прикл. 2):

$$f(z) = 2 \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} + \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{z-i}.$$

Перший доданок виражений через степінь різниці  $z - 2$ , тобто має потрібний вигляд. Другий і третій доданки перетворимо до вигляду суми нескінченно спадної геометричної прогресії відносно різниці  $z - 2$  і перейдемо до відпо-

відної прогресії. Підставляючи отримані розклади у вираз для функції  $f(z)$ , знайдемо розвинення її в ряд Лорана в (проколотому) околі точки  $z_0 = 2$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{-1-4i}{2} \cdot \frac{1}{i+2+z-2} = \frac{-1-4i}{2(2+i)} \times \\
 & \times \frac{1}{1 - ((z-2)/(2+i))} = \frac{-1-4i}{2(2+i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{z-2}{2+i} \right)^n = \frac{-6-7i}{10} \times \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^n} (z-2)^n = \frac{-6-7i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (2-i)^n (z-2)^n ; \\
 & \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} = \frac{-1+4i}{2} \cdot \frac{1}{2-i+z-2} = \frac{-1+4i}{2(2-i)} \times \\
 & \times \frac{1}{1 - ((z-2)/(2-i))} = \frac{-1+4i}{2(2-i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{z-2}{2-i} \right)^n = \frac{-6+7i}{10} \times \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2-i)^n} (z-2)^n = \frac{-6+7i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (2+i)^n (z-2)^n ; \\
 & f(z) = 2 \cdot \frac{1}{z-2} + \frac{-6-7i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (2-i)^n (z-2)^n + \\
 & + \frac{-6+7i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (2+i)^n (z-2)^n = \frac{2}{z-2} + \\
 & + \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} \left( -(6+7i)(2+i)^n + (-6+7i)(2-i)^n \right) (z-2)^n .
 \end{aligned}$$

## 2.6.4 Ізольовані особливі точки та їх класифікація

Точка  $z_0$  називається *ізольованою особливою точкою* функції  $f(z)$ , якщо ця функція аналітична в деякому околі цієї точки, за винятком самої точки (в проколотому околі). Класифікація ізольованих особливих точок

здійснюється за характером розвинення функції в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

в (проколотому) околі особливої точки  $z_0$ . При цьому можливі три випадки:

а) Головна частина ряду Лорана відсутня (в ряді не має членів з від'ємними степенями різниці  $z - z_0$ ), тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тоді  $z_0$  називається *усувною особливою точкою*. При цьому  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ ,

тобто в усувній особливій точці  $z_0$  функція  $f(z)$  має скінченну границю.

Якщо доозначити функцію  $f(z)$  в точці  $z_0$  рівністю  $f(z_0) = c_0$ , то функція  $f(z)$  стане аналітичною в точці  $z_0$ , а відповідний ряд буде рядом Тейлора для функції  $f(z)$ . Оскільки  $|c_0| < +\infty$ , то в околі усувної особливої точки функція  $f(z)$  обмежена.

б) Головна частина ряду Лорана містить  $m$  членів, тобто

$$f(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тоді  $z_0$  називається *полюсом  $m$ -го порядку*. Полюс першого порядку також називають *простим полюсом*. Ясно, що коли точка  $z_0$  – полюс  $m$ -го порядку функції  $f(z)$ , то для функції  $\varphi(z) = (z - z_0)^m f(z)$  ця точка  $z_0$  є усувною особливою. Тоді  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = c_{-m} \neq 0$ . Тому

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = \infty,$$

тобто в полюсі  $z_0$  функція  $f(z)$  має нескінченну границю. *Порядком полюса* служить найбільше натуральне значення  $m$ , при якому існує скінченна границя

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0.$$

Якщо точка  $z_0$  – полюс  $m$ -го порядку функції  $f(z)$ , то для функції  $f(z) = 1/f(z)$  ця точка  $z_0$  служить  $m$ -кратним коренем. Справедливе також обернене твердження.

в) Головна частина ряду Лорана має нескінченну кількість членів, тобто

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тоді  $z_0$  називається *істотно особливою точкою*. В істотно особливій точці  $z_0$  функція  $f(z)$  не має границі ні скінченної, ні нескінченної. У залежності від вибору шляху прямування точки  $z$  до точки  $z_0$  функція  $f(z)$  буде мати різні границі.

Нескінченно віддалена точка. Особлива точка  $z_0 = \infty$  називається ізольованою особливою точкою, якщо функція  $f(z)$  аналітична в круговому кільці  $R < |z| < +\infty$  (зовні кола  $|z| = R$ ) – в проколотому околі нескінченно віддаленої точки  $z_0 = \infty$ . Функція  $f(z)$  в околі нескінченно віддаленої точки  $z_0 = \infty$  розвивається в ряд Лорана за степенями  $z$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}.$$

(зміст і назви частин ряду протилежні тим, що мають місце для ряду Лорана з центром у скінченній точці).

Ізольована особлива точка  $z_0 = \infty$  називається: а) усувною особливою точкою, якщо ряд Лорана не містить додатних степенів  $z$ ; б) полюсом  $m$ -го порядку, якщо найбільша додатна степінь  $z$  в ряді Лорана дорівнює  $m$ ; в) істотно особливою точкою, якщо ряд Лорана має нескінченну кількість додатних членів. Наприклад, для функції  $f(z) = (z-1)^m$  точка  $z_0 = \infty$  – полюс  $m$ -го порядку, а для функції  $f(z) = \cos z$  точка  $z_0 = \infty$  – істотно особлива.

**Приклад.** Знайти всі особливі точки функції та визначити їх характер:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)}.$$

*Розв'язання.* Знайдемо точки, де функція  $f(z)$  не визначена:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = 2i$ ,  $z_4 = -2i$ ,  $z_5 = -i$ ,  $z_6 = \infty$ . Дослідимо поведінку функції в околі кожної з цих точок.

$$\begin{aligned} \underline{z_1 = 0}: \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \times \\ &\times \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} = 1 \cdot \frac{1}{4} e^{1/i} = \frac{1}{4} e^{-i}; \end{aligned}$$

$z_1 = 0$  – усувна особлива точка.

$$\underline{z_2 = 1}: \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} = \infty;$$



$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1)^2 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{z(z^2+4)} e^{1/(z+i)} = \frac{\sin 1}{5} e^{1/(1+i)} =$$

$$= (\sin 1 / 5) e^{1/2-i/2}; \quad z_2 = 1 - \text{полюс другого порядку.}$$

$$\underline{z_3 = 2i}: \lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} = \infty;$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2i} f(z)(z-2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z+2i)} e^{1/(z+i)} = \\ &= \frac{\sin 2i}{2i(2i-1)^2(2i+2i)} e^{1/(2i+i)} = -\frac{\sin 2i}{8(2i-1)^2} e^{-i/3}; \end{aligned}$$

$$z_3 = 2i - \text{простий полюс.}$$

$$\underline{z_4 = -2i}: \lim_{z \rightarrow -2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} = \infty;$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -2i} f(z)(z+2i) &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z-2i)} e^{1/(z+i)} = \\ &= \frac{\sin(-2i)}{(-2i)(-2i-1)^2(-2i-2i)} e^{1/(-2i+i)} = \frac{\sin 2i}{8(2i+1)^2} e^i; \end{aligned}$$

$$z_4 = -2i - \text{простий полюс.}$$

$$\underline{z_5 = -i}: \lim_{z \rightarrow -i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} - \text{не}$$

$$\text{існує, оскільки не існує } \lim_{z \rightarrow -i} e^{1/(z+i)};$$

$$z_5 = -i - \text{істотно особлива точка.}$$

$$\underline{z_6 = \infty}: \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)} e^{1/(z+i)} - \text{не}$$

$$\text{існує, оскільки не існує } \lim_{z \rightarrow \infty} \sin z;$$

$$z_6 = \infty - \text{істотно особлива точка.}$$

*Зауваження.* Особливі точки можуть бути неізолюваними. Наприклад, функція  $f(z) = (e^{1/z} - 1)^{-1}$  має полюси  $z_n = i/(2\pi n)$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Тому в довільному околі особливої точки  $z = 0$  є інші особливі точки. Початок координат  $z = 0$  є *точкою згущення полюсів* цієї функції.

## 2.7 Лишки та їх застосування

### 2.7.1 Поняття лишку. Основна теорема про лишки

Нехай  $z_0$  – ізолювана особлива точка функції  $f(z)$ , а  $\gamma$  – довільний контур, що охоплює цю єдину особливу точку  $z_0$  і повністю лежить в області аналітичності даної функції (всередині контуру, окрім точки  $z_0$ , і на самому контурі функція аналітична). *Лишком* функції  $f(z)$  в ізолюваній особливій точці  $z_0$  називається комплексне число

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta,$$

де обхід контуру здійснюється проти годинникової стрілки.

Інтегруючи почленно ряд Лорана, можна одержати:

а)  $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$  – у скінченній точці  $z_0 \neq \infty$ .

Тобто лишок функції  $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$  в скінченній ізолюваній особливій точці  $z_0 \neq \infty$  дорівнює коефіцієнту  $c_{-1}$  при мінус першому степені в розвиненні даної функції в ряд Лорана в околі цієї точки.

б)  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$  – у нескінченно віддаленій точці  $z_0 = \infty$ , оскільки додатному обходу для цієї точки відповідає рух за годинниковою стрілкою.

Тобто лишок функції  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$  в нескінченно віддаленій ізольованій особливій точці  $z_0 = \infty$  дорівнює мінус коефіцієнту  $c_{-1}$  при мінус першому степені в розвиненні даної функції в ряд Лорана в околі цієї точки.

*Зауваження 1.* З означення лишку випливає, що лишок функції в скінченній правильній чи усувній особливій точці  $z_0 \neq \infty$  дорівнює нулю (ряд Лорана не містить від'ємних степенів).

*Зауваження 2.* Лишок функції  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$  в нескінченно віддаленій точці  $z_0 = \infty$  може бути відмінним від нуля й у випадку, коли дана функція  $f(z)$  має скінченну границю в цій точці  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \neq \infty$ , і навіть при її аналітичності в  $z_0 = \infty$ . При цьому

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\lim_{z \rightarrow \infty} z \left( f(z) - \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \right).$$

Якщо  $z_0$  – простий полюс функції  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

*Зауваження 3.* Якщо функція  $f(z)$  має вигляд дробу  $f(z) = g(z)/h(z)$ ,  $h(z_0) \neq 0$  і  $z_0$  – простий полюс цієї функції  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = g(z_0)/h'(z_0).$$

Якщо  $z_0$  – полюс  $m$ -го порядку функції  $f(z)$ , то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_0)^m f(z) \right].$$

*Зауваження 4.* Якщо  $z_0$  – істотно особлива точка, то для знаходження лишку слід безпосередньо скористатися розвиненням функції в ряд Лорана і виділити коефіцієнт  $c_{-1}$ .

**Теорема 1** (*основна теорема про лишки*). Нехай функція  $f(z)$  аналітична в області  $D$  з межею  $\Gamma$  за винятком скінченного числа  $n$  внутрішніх ізольованих особливих точок  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) і неперервна на межі  $\Gamma$ . Тоді інтеграл по контуру  $\Gamma$  дорівнює сумі лишків у всіх внутрішніх ізольованих особливих точках

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z),$$

де обхід межі  $\Gamma$  здійснюється в додатному напрямі.

*Доведення.* Охопимо кожну особливу точку окремим колом  $\gamma_k$  так, щоб ці кола не перетиналися одне з одним і з межею  $\Gamma$ . В одержаній багатозв'язній області, що обмежена контурами  $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , функція  $f(z)$  буде аналітичною. За теоремою Коші (для складеного контуру) справедливо

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

*Наслідок 1.* Якщо функція  $f(z)$  аналітична в комплексній площині за винятком скінченного числа  $n$  ізольованих особливих точок  $z_k \neq \infty$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то сума всіх лишків, включаючи лишок у нескінченно віддаленій точці, дорівнює нулю

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

*Наслідок 2.* Нехай функція  $f(z)$  аналітична в комплексній площині.

Якщо всередині області  $D$  з межею  $\Gamma$  знаходяться ізольовані особливі точки  $z_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ), а зовні неї – ізольовані особливі точки  $z_k$  ( $k=n+1,n+2,\dots,n+p$ ), причому  $z_{n+p}=\infty$ , тоді інтеграл по контуру  $\Gamma$  дорівнює взятій з протилежним знаком сумі лишків у всіх зовнішніх ізольованих особливих точках

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{j=1}^p \operatorname{res}_{z=z_{n+j}} f(z).$$

*Зауваження 5.* Наведені в цьому пункті формули одержані в припущенні, що на контурах інтегрування немає особливих точок.

**Приклад.** Обчислити вказані лишки:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)}; \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=\pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)}; \quad \text{в) } \operatorname{res}_{z=2i} \frac{z}{(z-2i)^2(z-1)}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{1/z}.$$

*Розв'язання.*

а) Для функції  $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)}$  точка  $z=0$  – усувна особлива, оскільки

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-\pi/4} = -\frac{4}{\pi} \neq \infty.$$

Тому  $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)} = 0$ .

б) Для функції  $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)}$  точка  $z=\pi/4$  – простий полюс, оскільки

$$\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)} = \infty; \quad \lim_{z \rightarrow \pi/4} (z-\pi/4)f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{(z-\pi/4)\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)} = \frac{4}{\pi} \neq 0.$$

Тому  $\operatorname{res}_{z=\pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)} = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{(z-\pi/4)\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)} = \frac{4}{\pi}$ .

в) Для функції  $f(z) = \frac{z}{(z-2i)^2(z-1)}$  точка  $z=2i$  – полюс другого порядку,

оскільки

$$\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z-2i)^2(z-1)} = \infty; \quad \lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z-2i)^2 z}{(z-2i)^2(z-1)} = \frac{2i}{2i-1} \neq 0$$

.

Тому

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2i} \frac{z}{(z-2i)^2(z-1)} &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[ \frac{(z-2i)^2 z}{(z-2i)^2(z-1)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = - \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{(z-1)^2} = - \frac{1}{(2i-1)^2} = \frac{3-4i}{25}. \end{aligned}$$

г) Для функції  $f(z) = z^2 e^{1/z}$  точка  $z=0$  – істотно особлива, оскільки не існує ні скінченної, ні нескінченної границі  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 e^{1/z}$ . Знайдемо ряд Лорана:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}; \\ f(z) &= z^2 e^{1/z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots \end{aligned}$$

Тому  $\operatorname{res}_{z=0} z^2 e^{1/z} = c_{-1} = 1/3! = 1/6$ .

## 2.7.2 Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Обчислення комплексних інтегралів по замкнутому контуру. За допомогою лишків можна обчислювати інтеграли по замкнутому контуру від однозначних функцій, що не містять особливостей на контурі, або від однозначних гілок багатозначних функцій, якщо всередині контуру відсутні точки розгалуження.

**Приклад 1.** Обчислити комплексний інтеграл

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)}, \text{ де а) } L: |z|=2/3; \text{ б) } L: |z-i|=2.$$

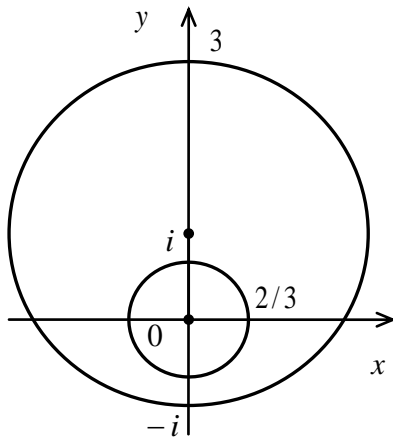


Рис. 2.32

Розв'язання. Підінтегральна функція

$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-i)}$  має три особливі точки:  $z_1 = 0$  – полюс третього порядку,  $z_2 = i$  – простий полюс,  $z_3 = \infty$  – істотно особлива точка (рис. 2.32).

а) Усередині кола  $L: |z|=2/3$  розміщена тільки одна особлива точка  $z_1 = 0$  – полюс третього порядку. За основною теоремою про лишки

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)} &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3(z-i)}; \\ \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3(z-i)} &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left( z^3 \frac{e^z}{z^3(z-i)} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z(z-i) - e^z}{(z-i)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(e^z(z-1-i) + e^z)(z-i)^2 - 2(z-i)e^z(z-1-i)}{(z-i)^4} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2 - (2+2i)z + 1 + 2i)}{(z-i)^3} = \frac{1+2i}{(-2i)^3} = 1 - \frac{1}{2}i; \quad \oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)} = 2\pi i \cdot \left( 1 - \frac{1}{2}i \right) = \pi + 2\pi i. \end{aligned}$$

б) Перший спосіб. Усередині кола  $L: |z-i|=2$  розміщені дві особливі точки  $z_1 = 0$  – полюс третього порядку і  $z_2 = i$  – простий полюс. За основною теоремою про лишки

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)} = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^z}{z^3(z-i)} + \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^z}{z^3(z-i)} \right);$$

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{e^z}{z^3(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \left( (z-i) \frac{e^z}{z^3(z-i)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^z}{z^3} = \frac{e^i}{i^3} = ie^i ;$$

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)} = 2\pi i \left( 1 - \frac{1}{2}i + ie^i \right) = \pi + 2\pi i - 2\pi e^i .$$

Другий спосіб. Зовні кола  $L: |z-i|=2$  розміщена тільки одна особлива точка

$z_3 = \infty$  – істотно особлива. За наслідком 2 з основної теореми про лишки

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{z^3(z-i)} .$$

Розвинемо підінтегральну функцію  $f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-i)}$  в ряд Лорана:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots ;$$

$$\frac{1}{z^3(z-i)} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1-i/z} = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{i}{z} \right)^n = \frac{1}{z^4} + \frac{i}{z^5} + \frac{i^2}{z^6} + \dots ;$$

$$f(z) = \left( 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \left( \frac{1}{z^4} + \frac{i}{z^5} + \frac{i^2}{z^6} + \dots \right) .$$

Звідси

$$\begin{aligned} c_{-1} &= 1 \cdot \frac{1}{3!} + i \cdot \frac{1}{4!} + i^2 \cdot \frac{1}{5!} + \dots = \frac{1}{i^3} \left( \frac{i^3}{3!} + \frac{i^4}{4!} + \frac{i^5}{5!} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{i^3} \left( \left( 1 + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \dots \right) - \left( 1 + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} \right) \right) = \frac{1}{i^3} \left( e^i - \frac{1}{2} - i \right) = \\ &= 1 + ie^i - \frac{1}{2}i ; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{e^z}{z^3(z-i)} = -c_{-1} = - \left( 1 + ie^i - \frac{1}{2}i \right) . \end{aligned}$$



Тоді

$$\oint_L \frac{e^z dz}{z^3(z-i)} = -2\pi i \left( - \left( 1 + ie^i - \frac{1}{2}i \right) \right) = \pi + 2\pi i - 2\pi e^i .$$

Обчислення дійсних інтегралів за допомогою переходу до комплексних інтегралів. Звичайно, контур інтегрування вибирають так, щоб інтеграл по деякій частині контуру при необмеженому його розширенні перетворювався на заданий дійсний інтеграл, а інтеграл по частині, що залишилася, прямував до нуля.

**Лема Жордана.** Нехай  $a$  – додатне число  $a > 0$  і  $C_R$  – півколо  $\{ |z| = R, \operatorname{Im} z > 0 \}$ , що лежить в області  $D$  – верхній півплощині  $\operatorname{Im} z > 0$  (рис. 2.33). Якщо функція  $f(z)$  – аналітична в області  $D$  за винятком скінченного числа  $n$  ізольованих особливих точок  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) і прямує до нуля, коли  $|z| \rightarrow \infty$ , тоді

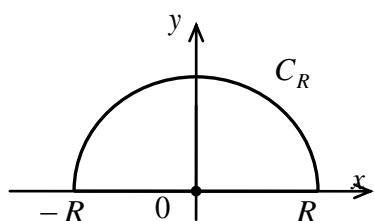


Рис. 2.33

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0 .$$

**Наслідок.** Нехай функція  $f(x)$  дійсної змінної  $x$  неперервна на всій дійсній осі  $(-\infty; +\infty)$ , а відповідна функція  $f(z)$  комплексної змінної  $z$

задовольняє лему Жордана, тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} e^{iaz} f(z) .$$

**Приклад 2.** Обчислити дійсний невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} .$

*Розв'язання.* Підінтегральна функція  $f(x) = 1/(x^2 + 4)^2$  неперервна на дійсній осі, а відповідна комплексна функція  $f(z) = 1/(z^2 + 4)^2$  аналітична у верхній півплощині за винятком однієї особливої точки  $z = 2i$  – полюса другого порядку. Крім того,  $f(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Знайдемо лишок:

$$\operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left( \frac{(z - 2i)^2}{(z^2 + 4)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + 2i)^2} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{-2}{(z + 2i)^3} = -\frac{2}{(4i)^3} = \frac{1}{32i}.$$

Тоді за наслідком леми Жордана (при  $a = 0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}.$$

**Приклад 3.** Обчислити дійсний невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos 2x dx}{x^2 - 4x + 5}.$

*Розв'язання.* Застосуємо заміну  $\cos 2x = \operatorname{Re} e^{2ix}$ . Відповідна комплексна функція

$f(z) = \frac{(z-2)e^{2iz}}{z^2 - 4z + 5}$  у верхній півплощині має одну особливу точку  $z = 2 + i$  – простий полюс. Знайдемо лишок:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=2+i} \frac{(z-2)e^{2iz}}{z^2 - 4z + 5} &= \lim_{z \rightarrow 2+i} \left( (z-2-i) \frac{(z-2)e^{2iz}}{z^2 - 4z + 5} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{(z-2)e^{2iz}}{z-2+i} = \frac{(2+i-2)e^{2i(2+i)}}{2+i-2+i} = \frac{1}{2} e^{-2+4i}. \end{aligned}$$

Тоді, виділяючи дійсну частину, за наслідком леми Жордана отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos 2x dx}{x^2-4x+5} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)e^{2ix} dx}{x^2-4x+5} = \operatorname{Re} (2\pi i \times \\ \times (1/2)e^{-2+4i}) = \operatorname{Re} (\pi i e^{-2}(\cos 4 + i \sin 4)) = -\pi e^{-2} \sin 4 .$$

*Зауваження.* Інколи зручно формувати контур інтегрування у вигляді прямокутника чи криволінійного трикутника.

## 3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

### 3.1 Поняття та властивості перетворення Лапласа

Методи операційного числення являють собою своєрідний спосіб розв'язання різних математичних задач, в першу чергу диференціальних рівнянь, які мають поширене розповсюдження. В основі цих методів лежить ідея інтегральних перетворень, пов'язаних із зіставленням з розв'язком вихідної задачі, функції  $f(t)$  дійсної змінної, деякої функції  $F(p)$  комплексної змінної так, що звичайне диференціальне рівняння для функції  $f(t)$  переходить в алгебраїчне рівняння для  $F(p)$ . Це дозволяє полегшити техніку обчислень. Основну роль в операційному численні відіграє перетворення Лапласа, з вивчення властивостей якого ми і почнемо виклад.

Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$  функцію  $F(p)$  комплексної змінної  $p$  за допомогою співвідношення:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Звичайно, що не для будь-якої функції  $f(t)$  цей інтеграл має сенс. Тому почнемо з визначення класу функцій  $f(t)$ , для яких це перетворення свідомо реалізовується.

Розглянемо функцію  $f(t)$ , яка визначена для всіх значень дійсної змінної  $-\infty < t < +\infty$  і задовольняє умови:

- 1)  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
- 2)  $f(t)$  - однозначна, неперервна або кусково – неперервна зі своїми похідними до  $n$ -го порядку при  $t \geq 0$  ;

3) існують такі числа  $M > 0$  і  $s > 0$ , що для всіх  $t > 0$  справедливо:

$|f(t)| < Me^{st}$ . Число  $s > 0$ , для якого нерівність в умові 3) виконується при будь-якому  $s = s_0 + \xi$  ( $\xi > 0$ ) і не виконується при  $s = s_0 - \xi$  ( $s_0$  - точна нижня границя чисел  $s$ ), називається *показником зростання* функції  $f(t)$ .

Таку функцію  $f(t)$  в операційному численні називають *такою, що зображується за Лапласом*, або *оригіналом*. Відзначимо, що функція  $f(t)$  може бути комплексною функцією дійсної змінної  $t$ :  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ , де  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$  - дійсні функції.

Перетворенням Лапласа або зображенням функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$  називається функція  $F(p)$  комплексної змінної  $p = \alpha + i\beta$ , яка визначається за допомогою інтеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (3.1)$$

Відповідність між зображенням та оригіналом записують як  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ .

Зауважимо, що інтеграл (3.1) є невласним інтегралом, який залежить від змінної  $p$  як від параметра. Очевидно, інтеграл (3.1), взагалі, збігається не при всіх значеннях параметра  $p$ . Дійсно, якщо функція  $f(t)$  прямує при  $t \rightarrow \infty$  до границі, що не дорівнює нулю, а  $\operatorname{Re} p < 0$ , тоді інтеграл розбігається. Тому природно поставити питання про область збіжності інтеграла (3.1), а тим самим про область визначення функції  $F(p)$ .

**Теорема.** Інтеграл (3.1) збігається в області  $\operatorname{Re} p > s$ , де  $s$  - показник зростання функції  $f(t)$ , причому для будь-якого  $x_0 > s$  інтеграл (3.1) при  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > s$  збігається рівномірно.

Далі розглянемо *властивості* зображень:

1) Якщо два зображення  $F(p)$  і  $\Phi(p)$  співпадають, то співпадають між собою і відповідні оригінали у всіх точках, за винятком, можливо, точок розриву, тобто якщо  $F(p) \leftrightarrow f(t)$  і  $\Phi(p) \leftrightarrow \varphi(t)$  і при цьому  $F(p) = \Phi(p)$ , тоді  $f(t) = \varphi(t)$  у всіх точках неперервності.

2) Будь-яке зображення  $F(p)$  при  $\operatorname{Re} p > s$  є аналітичною функцією, тобто воно може бути розкладене у степеневий ряд і, відповідно, необмежено раз диференційоване та інтегроване в області збіжності ряду.

3) Якщо  $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$  і при цьому  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$  та  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ , тоді справедливо:

$$f(t) \leftrightarrow F(p) = C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

1) Будь-яке зображення  $F(p)$  функції  $f(t)$  при  $p \rightarrow \infty$  прямує до нуля.

### 3.2 Знаходження зображення та оригіналу функцій

Використовуючи визначення (3.1), знайдемо зображення деяких функцій дійсної змінної.

1. Одиначна функція **Хевісайда**. Нехай

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Знайдемо

$$\int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} (p > 0).$$

Отже,  $\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$  або  $1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$ .

2. Показникова функція  $f(t) = e^{\alpha t}$ .

За формулою (3.1) маємо:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

Отже,  $e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}$ .

3. Тригонометричні функції  $\cos \alpha t$  і  $\sin \alpha t$ .

$$\cos \alpha t = \frac{1}{2} (e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t}) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - i\alpha} + \frac{1}{p + i\alpha} \right) = \frac{p + i\alpha + p - i\alpha}{2(p^2 + \alpha^2)} = \frac{p}{p^2 + \alpha^2},$$

$$\sin \alpha t = \frac{1}{2} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - i\alpha} - \frac{1}{p + i\alpha} \right) = \frac{p + i\alpha - p + i\alpha}{2(p^2 + \alpha^2)} = \frac{i\alpha}{p^2 + \alpha^2}.$$

4. Зображення функції  $1 - e^{-\alpha t}$ .

$$1 - e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \alpha} = \frac{p + \alpha - p}{p(p + \alpha)} = \frac{\alpha}{p(p + \alpha)}.$$

Далі в таблиці 3.1 наведені зображення основних елементарних функцій.

Таблиця 3.1- Зображення елементарних функцій

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$t \sin at$	$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$
2	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	8	$t \cos at$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
3	$e^{-at}$	$\frac{1}{p + a}$	9	$e^{-at} \sin at$	$\frac{a}{(p + a)^2 + a^2}$
4	$te^{-at}$	$\frac{1}{(p + a)^2}$	10	$e^{-at} \cos at$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + a^2}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$	11	$shat$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$	12	$chat$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

**Приклад.** Знайти зображення функції  $f(t) = te^{-2t}$ . За формулою Лапласа маємо:

$$F(p) = \int_0^{\infty} te^{-2t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} te^{-(2+p)t} dt = \left[ \begin{array}{ll} \text{по} & \text{частям} \\ u = t & dv = e^{-(2+p)t} dt \\ du = dt & v = -\frac{e^{-(2+p)t}}{2+p} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{t}{2+p} e^{-(2+p)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2+p} \int_0^{\infty} e^{-(2+p)t} dt = 0 - \frac{1}{(2+p)^2} e^{-(2+p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(p+2)^2}.$$

У спрощеному варіанті можна просто скористатися таблицею.



**Приклад.** Знайти зображення функції  $f(t) = \cos^3 t$ .

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left( \frac{1}{2} (e^{i3t} + e^{-i3t}) \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3t} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-i3t}) = \frac{1}{4} \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} + \\ &+ \frac{3}{4} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t.\end{aligned}$$

Застосувавши формулу 6 з таблиці 1.1, отримаємо

$$\cos^3 t \leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{3}{4} \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p(p^2 + 7)}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$$

При знаходженні оригіналу за зображенням в найпростіших випадках використовують табл. 3.1 і теореми розкладання.

**Перша теорема розкладання.** Якщо функція  $F(p)$  являє собою степеневий ряд по від'ємних степенях  $p$  з ненульовим радіусом збіжності, тобто

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то оригіналом такої функції є степеневий ряд по додатних степенях – ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

який збігається при всіх  $t > 0$ .

**Приклад.** Знайти оригінал  $F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)}$ .

Застосувавши теорему, маємо

$$F(p) = \frac{1}{p(1+p^4)} = \frac{1}{p^5} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{p^4}} = \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^9} + \frac{1}{p^{13}} - \dots$$

Цей ряд збігається при  $|p| > 1$ . Звідки знаходимо

$$f(t) = \frac{t^4}{4!} - \frac{t^8}{8!} + \frac{t^{12}}{12!} - \dots$$

**Друга теорема розкладання.** Нехай  $F(p) = \frac{U(p)}{V(p)}$  - правильний нескоротний дріб, знаменник якого можна розкласти на прості множники:

$$V(p) = (p-p_1)^{k_1} (p-p_2)^{k_2} \dots (p-p_r)^{k_r} \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_r = n).$$

Оскільки відомо, що функцію  $F(p)$  можна розкласти на суму простих дробів

вигляду  $\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$ , де  $j$  набуває всіх значень від 1 до  $r$ , а  $s$  - всіх значень

від 1 до  $r_j$ , то

$$F(p) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} \frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \quad (3.2)$$

Коефіцієнти цього розкладання можна визначити за формулою:

$$A_{j,s} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \left[ (p - p_j)^{k_j} \cdot F(p) \right] \right\}. \quad (3.3)$$

Замість цієї формули для визначення коефіцієнтів  $A_{j,s}$ , можна використати елементарні прийоми, які використовують в інтегральному обчисленні при інтегруванні раціональних дробів. Зокрема, це доцільно робити у випадках, коли всі комплексні корні знаменника прості та попарно спряжені.

Якщо всі корні  $V(p)$  прості, тобто

$$V(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \quad (p_j \neq p_k, j \neq k),$$

тоді розкладання спрощується:

$$F(p) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{A_j}{p - p_j}, \quad A_j = \frac{U(p_j)}{V'(p_j)}.$$

При обчисленні тим чи іншим способом розкладання  $F(p)$  на прості дроби оригінал  $f(t)$  визначається за такими формулами:

а) якщо корені знаменника  $V(p)$  кратні:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{j=r} \sum_{s=1}^{s=k_j} A_{j,s} \frac{t^k j^{-s}}{(k_j - s)!} \cdot e^{p_j t};$$

б) якщо корені знаменника  $V(p)$  прості :

$$f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{U(p_j)}{V'(p_j)} \cdot e^{p_j t}.$$

**Приклад.** Знайти оригінал функції  $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$ .

Використовуємо елементарні прийоми для розкладання цього дробу на суму дробів, оригінали яких відомі:

$$\frac{p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{p - 1 + 1}{(p - 1)^2 + 4} = \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(p - 1)^2 + 2^2}.$$

Тоді маємо:

$$\frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(p - 1)^2 + 2^2} \leftrightarrow e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^t \sin 2t.$$

**Приклад.** Знайти оригінал функції  $F(p) = \frac{p}{(p - 1)^3 (p + 2)^2}$ .

Розклад цієї функції на прості дроби має вигляд

$$F(p) = \frac{A_{1,1}}{(p - 1)^3} + \frac{A_{1,2}}{(p - 1)^2} + \frac{A_{1,3}}{p - 1} + \frac{A_{2,1}}{(p + 2)^2} + \frac{A_{2,2}}{p + 2}.$$

Знаходимо коефіцієнти цього розкладання за формулою (3.3):

$$A_{1,1} = \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ (p - 1)^3 \cdot F(p) \right\} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p}{(p + 2)^2} = \frac{1}{9};$$

$$\begin{aligned}
A_{1,2} &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left\{ (p-1)^3 \cdot F(p) \right\} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d}{dp} \left\{ \frac{p}{(p+2)^2} \right\} = \\
&= \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{(p+2)^2} - \frac{2p}{(p+2)^3} \right\} = \frac{1}{27}; \\
A_{1,3} &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} \left\{ (p-1)^3 \cdot F(p) \right\} = \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \frac{d^2}{dp^2} \left\{ \frac{p}{(p+2)^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 1} \left\{ -\frac{4}{(p+2)^3} + \frac{6p}{(p+2)^3} \right\} = -\frac{1}{27}; \\
A_{2,1} &= \frac{1}{0!} \lim_{p \rightarrow -2} \left\{ (p+2)^2 \cdot F(p) \right\} = \lim_{p \rightarrow -2} \frac{p}{(p-1)^3} = \frac{2}{27}; \\
A_{2,1} 2 &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow -2} \frac{d}{dp} \left\{ (p+2)^2 \cdot F(p) \right\} = \lim_{p \rightarrow -2} \frac{d}{dp} \left\{ \frac{p}{(p-1)^3} \right\} = \\
&= \lim_{p \rightarrow -2} \left\{ \frac{1}{(p-1)^3} - \frac{3p}{(p-1)^4} \right\} = \frac{1}{27}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2} = \frac{1}{27} \left( \frac{3}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} \right).$$

Тоді оригінал

$$f(t) = \frac{1}{27} \left( \frac{3}{2} t^2 e^t + t e^t - e^t + 2 t e^{-2t} + e^{-2t} \right).$$

### 3.3 Застосування операційного числення до розв'язання диференціальних рівнянь

Розглянемо спочатку зображення похідної та інтеграла від функції, які застосовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь.

Якщо  $f'(t)$  задовольняє умови існування зображення при  $\operatorname{Re} p > s$  і  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ , тоді

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > s. \quad (3.4)$$

Дійсно, інтегруючи за частинами, отримаємо:

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0).$$

Якщо похідні вищих порядків функції  $f(t)$  задовольняють умови існування зображення при  $\operatorname{Re} p > s$  і  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ , тоді легко знайти їхні зображення, знаючи зображення  $f'(t)$ . Дійсно, позначимо  $f'(t) = \varphi(t)$ . Тоді  $f''(t) = \varphi'(t)$ . Якщо  $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(p)$ , тоді  $\Phi(p) = pF(p) - f(0)$ . Маємо

$$\varphi'(t) \leftrightarrow p\Phi(p) - \varphi(0) = p[pF(p) - f(0)] - f'(0),$$

тобто

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно

$$f''(t) \leftrightarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

І нарешті,

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}. \quad (3.5)$$

Формула особливо спрощується у тому випадку, коли

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0:$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p). \quad (3.6)$$

Нехай  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s$ . Тоді

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p). \quad (3.7)$$

Дійсно, легко перевірити, що функція  $\varphi(t)$  задовольняє усі умови існування зображення, причому має той самий показник зростання, що і  $f(t)$ .

Обчисливши інтеграл за формулою (3.1), маємо

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Змінюючи в останньому інтегралі порядок інтегрування, маємо:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} F(p).$$

Нехай задане лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку з постійними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t), \quad (3.8)$$

де  $a_0, a_1, a_n$  задані сталі,  $f(t)$  - задана функція незалежної змінної  $t$ , яка задовольняє всі умови існування зображення.

Потрібно знайти розв'язок цього рівняння при  $t > 0$ , що задовольняє задані початкові умови:

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.9)$$

Позначаючи зображення розв'язку цього диференціального рівняння через  $F(p)$ , знаходимо зображення лівої частини вихідного диференціального рівняння і, прирівнюючи його до зображення функції  $f(t)$ , приходимо до рівняння, яке завжди є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно  $F(p)$ . Визначивши з цього рівняння  $F(p)$ , знаходимо оригінал від отриманого виразу.

**Приклад.** Розв'язати диференціальне рівняння  $y'' - 9y = e^{-2t}$ ; якщо  $y(0) = 0$ ;  $y'(0) = 0$ .

Нехай  $y(t) \leftrightarrow F(p)$ . Переходимо до зображення похідних:

$$y'(t) \leftrightarrow pF(p) - y(0), \quad y''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - py(0) - y'(0).$$

З урахуванням початкових умов маємо:

$$y'(0) \leftrightarrow pF(p) = 0, \quad y''(0) \leftrightarrow p^2 F(p).$$



Знаходимо зображення від правої частини рівняння:

$$e^{-2t} \leftrightarrow \frac{1}{p+2}.$$

Підставляємо всі ці зображення в задане рівняння:

$$p^2 F(p) - 9F(p) = \frac{1}{p+2};$$

Звідки

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2-9)} = \frac{1}{(p+2)(p-3)(p+3)}.$$

Розкладемо цей раціональний дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{1}{(p+2)(p-3)(p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+3},$$
$$1 = A(p-3)(p+3) + B(p+2)(p+3) + C(p+2)(p-3).$$

Вважаючи  $p=3$ , отримаємо  $1=30B$ , тобто  $B=1/30$ , при  $p=-3$  маємо  $1=6C$ , тобто  $C=1/6$ , при  $p=-2$  маємо  $1=-5A$ , тобто  $A=-1/5$ . Звідки

$$F(p) = \frac{-1/5}{(p+2)} + \frac{1/30}{p-3} + \frac{1/6}{p+3}.$$

Скориставшись таблицею зображень, отримаємо

$$y(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{30}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{-3t}.$$

## 4. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

### 4.1 Поняття диференціальних рівнянь у частинних похідних, їх загальні й частинні розв'язки

Рівняння математичної фізики є одним з основних спеціальних розділів вищої математики, присвячених вивченню диференціальних рівнянь у частинних похідних. На практиці саме такі диференціальні рівняння виступають у вигляді математичних моделей багатьох фізико-механічних полів. Диференціальним рівнянням називається таке рівняння, яке містить в собі не тільки невідому функцію, але і її похідні до деяких порядків.

Якщо невідома функція, що входить у диференціальне рівняння разом зі своїми похідними, залежить від одного аргументу, то таке рівняння називають *звичайним диференціальним рівнянням*. Якщо невідома функція залежить від декількох аргументів і рівняння містить частинні похідні від невідомої функції, то диференціальне рівняння називають *рівнянням у частинних похідних*.

Загальний вигляд такого рівняння:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \quad (k_1 + \dots + k_n = n). \quad (4.1)$$

Порядок старшої похідної, що присутня у рівнянні, визначає порядок рівняння.

Наприклад, рівняння першого порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (4.2)$$

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь є знаходження й дослідження функцій, що задовольняють заданому диференціальному

рівнянню, тобто їх розв'язків.

*Розв'язком або інтегралом* диференціального рівняння називається така функція  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , підстановка якої в рівняння разом зі своїми похідними перетворює його на тотожність. Задача інтегрування рівняння (4.1) або (4.2) полягає не тільки в тому, щоб знайти частинні розв'язки, але й в тому, щоб одержати всю сукупність розв'язків. Інакше кажучи, і в теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних природно порушувати питання про знаходження загального розв'язку, тобто такого розв'язку, з якого можна одержати частинні розв'язки, що задовольняють додаткові умови. При вивченні звичайних диференціальних рівнянь було показано, що їх загальний розв'язок містить в собі не тільки незалежні змінні, але й довільні сталі. Наприклад, загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння I порядку містить одну довільну сталу, загальний розв'язок рівняння II порядку – дві довільні сталі, і т.д.

Щоб з'ясувати характер загального розв'язку диференціального рівняння у частинних похідних, розглянемо найпростіші приклади таких рівнянь. Нехай необхідно розв'язати рівняння

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \quad (4.3)$$

Невідома функція  $u$  залежить від двох змінних  $x$  і  $y$ . У рівнянні явно присутня тільки частинна похідна  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , при обчисленні якої аргумент  $y$  розглядається як стала. При сталому  $y$  рівняння (4.3) можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з невідомою функцією  $u$  і незалежною змінною  $x$ . Змінюючи значення  $y$ , будемо одержувати різні звичайні диференціальні рівняння, тобто змінна  $y$  у рівнянні (4.3) відіграє роль параметра. Нехай  $u = \varphi(x, y, C)$  є загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння.

Воно містить параметр  $y$  і константу  $C$ , яка є сталою щодо змінної  $x$ , а відносно  $y$  може бути будь-якою функцією, тобто  $C = C(y)$ . Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння I-го порядку вигляду (4.3) має вигляд  $u = \varphi(x, y, C(y))$ , тобто воно містить одну довільну функцію  $C(y)$ .

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{x} - xy^2. \quad (4.4)$$

*Розв'язання.* Рівняння (4.4) можна розглядати як звичайне лінійне диференціальне рівняння I порядку, що містить параметр  $y$ . Розв'яжемо його методом варіації довільної сталої. Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{x}.$$

Розділяємо змінні

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial x}{x}$$

й інтегруємо

$$\ln|u| = \ln|x| + \ln|C(y)|.$$

З останнього виразу одержимо, що  $u = C(y)x$ . Згідно з методом варіації довільної сталої вважаємо, що стала  $C$  залежить від  $x$ . Отже,  $u = C(x, y)x$ , де  $C(x, y)$  – будь-яка функція, яку обираємо так, щоб функція  $u = C(x, y)x$  була розв'язком неоднорідного рівняння (4.4). Підставимо  $u$  в (4.4), маючи на увазі,

що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C'_x x + C.$$

Тоді одержимо

$$C'_x x + C = \frac{Cx}{x} - xy^2 \Rightarrow C'_x x = -xy^2 \Rightarrow C'_x = -y^2 \Rightarrow C(x, y) = -xy^2 + C_1(y).$$

Остаточно розв'язок набуде вигляду

$$u(x, y) = (-xy^2 + C_1(y))x,$$

де функція  $C_1$  повинна бути константою відносно змінної  $x$ , але може залежати від параметра  $y$ . Таким чином, загальний розв'язок містить довільну функцію  $C_1 = C_1(y)$ .

Розглянемо ще випадок квазілінійного диференціального рівняння першого порядку із двома незалежними змінними. За означенням таке рівняння має вигляд:

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z).$$

Функції  $P, Q, R$  будемо вважати неперервними в розглянутій області й такими, що не перетворюються на нуль одночасно.

Розглянемо векторне поле  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \quad (4.5)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти.

Векторні лінії цього поля (тобто лінії, дотичні до яких у кожній точці мають напрямок, що збігається з напрямком вектора  $\vec{F}$  в цій же точці) визначаються з умови колінеарності вектора  $\vec{F}$  й напрямного вектора дотичної до шуканої лінії  $\vec{t} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$  □ □, тобто з умови

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (4.6)$$

Поверхні, утворені з векторних ліній, називаються векторними поверхнями. Очевидно, векторні поверхні можна одержати, розглядаючи множину точок, що лежать на довільно обраному неперервно залежному від параметра однопараметричному сімействі векторних ліній.

Векторна поверхня характеризується тим, що вектор  $\vec{N}$ , спрямований по нормалі до неї, у будь-якій точці поверхні буде ортогональним до вектора поля  $\vec{F}$ , тобто

$$(\vec{N}, \vec{F}) = 0. \quad (4.7)$$

Якщо векторна поверхня визначається рівнянням  $z = f(x, y)$ , то вектор нормалі має вигляд

$$\vec{N} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} - \vec{k}, \text{ або } \vec{N} \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right).$$

Тоді з умови (4.7) маємо

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (4.8)$$

Якщо векторна поверхня задається рівнянням  $u(x, y, z) = 0$ , то

$$\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \text{ або } \vec{N} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

і з умови (4.7) одержимо, що

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.9)$$

Отже, для знаходження векторних поверхонь треба проінтегрувати квазілінійне рівняння (4.8) або (4.9). Оскільки векторні поверхні можуть складатись з векторних ліній, то інтегрування рівнянь (4.8) або (4.9) зводиться до інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь векторних ліній (4.6). Нехай  $\Psi_1(x, y, z) = C_1$  і  $\Psi_2(x, y, z) = C_2$  - два незалежних перших інтеграли системи (4.6), які називаються характеристиками системи (4.6) та утворюють двопараметричне сімейство векторних ліній. Виділимо з нього довільним способом однопараметричне сімейство, встановлюючи яку-небудь неперервну залежність  $\Phi(C_1, C_2) = 0$  між параметрами  $C_1$  і  $C_2$ . Крім параметрів  $C_1$  і  $C_2$ , із системи і  $\Psi_2(x, y, z) = C_2$ ,  $\Phi(C_1, C_2) = 0$ , одержуємо шукане рівняння векторних поверхонь

$$\Phi(\Psi_1(x, y, z), \Psi_2(x, y, z)) = 0,$$

де  $\Phi$  – довільна функція.

**Приклад 2.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

*Розв'язання.* Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1}.$$

Перші інтеграли цієї системи визначаються таким чином:

$$x - y = C_1, x - z = C_2.$$

Тоді інтегралом вихідного рівняння є  $\Phi(C_1, C_2) = 0$ , або  $\Phi(x - y, x - z) = 0$ .

Можна покласти  $C_2 = \varphi(C_1)$ , тоді рівняння поверхні в явному вигляді буде таким:

$$z = x + C_2 = x + \varphi(x - y),$$

тобто

$$z = x + \varphi(x - y)$$

**Приклад 3.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

*Розв'язання.* Складемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{-x + y} = \frac{dz}{z}$$



Перші інтеграли цієї системи визначаються методом інтегрованих комбінацій. Виконаємо тотожні перетворення системи й використаємо основну властивість пропорції

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3}{\lambda b_1 + \lambda b_2 + \lambda b_3}$$

Вихідна система перетвориться таким чином:

$$\frac{xdx}{x^2 + xy} = \frac{ydy}{-xy + y^2} = \frac{dz}{z};$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + xy - xy + y^2} = \frac{dz}{z};$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z};$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln z_1 + \ln C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Звідки

$$\frac{ydx - xdy}{y^2 \left( 1 + \left( \frac{x}{y} \right)^2 \right)} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{d\left( \frac{x}{y} \right)}{1 + \left( \frac{x}{y} \right)^2} = d \ln z \Rightarrow \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{y} \right) = \ln z + C_2;$$

$$C_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \ln z.$$

Інтеграл вихідного рівняння  $\Phi(C_1, C_2) = 0$ , або

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \ln z\right) = 0.$$

Розглянуті приклади дозволяють зробити висновок про докорінну відмінність розв'язку звичайного диференціального рівняння від розв'язку диференціального рівняння у частинних похідних. Якщо загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння містить довільні сталі, то загальний розв'язок рівняння у частинних похідних містить довільні функції. Задача знаходження загального розв'язку рівняння у частинних похідних досить важка. Часто необхідно знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє деякі додаткові умови (граничні і початкові). Характер додаткових умов, за допомогою яких можна знайти певний частинний розв'язок рівняння у частинних похідних, істотно відрізняється від характеру умов для звичайних диференціальних рівнянь.

## 4.2 Про задачі, що приводять до рівнянь у частинних похідних

Розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних при додаткових початкових і граничних умовах у загальному випадку пов'язане з великими математичними труднощами. У класичному курсі математичної фізики вивчаються лише найпростіші диференціальні рівняння в частинних

похідних, до яких приводить велика кількість задач фізики й техніки. Це лінійні рівняння 2-го порядку вигляду

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + C(x, y, z, t)u + g(x, y, z, t), \quad (4.10)$$

де  $\alpha, \beta, a$  - сталі. Якщо  $g(x, y, z, t) = 0$ , то рівняння називається однорідним. Розглянемо приклади задач, що приводять до рівнянь типу (4.10).

### 4.3 Рівняння коливань струни

*Струною* називають тонку сильно натягнуту нитку, зроблену з пружного матеріалу.

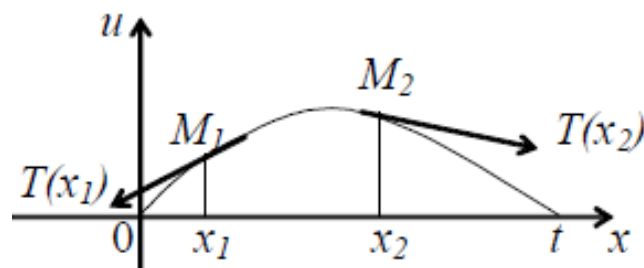


Рис.4.1

Передбачається, що струна має абсолютну гнучкість, тобто не чинить опору згину. Тобто, якщо видалити частину струни, що лежить по одну сторону від якої-небудь її точки, то сила натягу, яка замінює дію вилученої частини, скрізь буде спрямована по дотичній до лінії струни.

Нехай у стані рівноваги струна спрямована вздовж осі  $Ox$ . Будемо розглядати тільки поперечні коливання струни, припускаючи, що рух відбувається в одній площині і всі точки струни рухаються перпендикулярно до осі  $Ox$  (рис. 4.1).

Позначимо через  $u(x, t)$  відхилення точки струни в момент часу  $t$  від положення рівноваги. При кожному фіксованому значенні  $t$  графік функції  $u(x, t)$  визначатиме форму струни в цей момент часу. Розглядаючи далі тільки малі коливання струни, будемо вважати, що відхилення  $u(x, t)$ , а також похідна  $\frac{\partial u}{\partial x}$  настільки малі, що їхніми квадратами й добутками можна знехтувати порівняно із самими цими величинами

$$\left( u^2 \ll u; \left( u'_x \right)^2 \ll u'_x \right).$$

Виділимо довільну ділянку  $(x_1, x_2)$  струни, яка при коливанні деформується в ділянку  $M_1 M_2$ . Довжина дуги цієї ділянки в момент часу  $t$  дорівнює

$$l' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x'^2} dx \approx x_2 - x_1 = l,$$

внаслідок чого можна вважати, що в процесі малих коливань подовження ділянок струни не відбувається. Звідси, за законом Гука, виходить, що величина натягу  $T$  у кожній точці струни не змінюється з часом.

Таким чином, при прийнятих припущеннях зміною величини натягу струни, що виникає під час її руху, можна нехтувати порівняно з натягом в положенні рівноваги.

Покажемо, що величину натягу  $T$  можна вважати також незалежною від  $x$ , тобто  $T(x) = T_0$ . Дійсно, на ділянку  $M_1M_2$  струни діють сили натягу, спрямовані вздовж дотичних до струни в точках  $M_1$  і  $M_2$ , зовнішні сили й сили інерції. Сума проекцій на вісь  $Ox$  всіх цих сил повинна дорівнювати нулю. Оскільки розглядаємо тільки поперечні коливання, то сили інерції й зовнішні сили спрямовані паралельно осі  $Ou$ , тоді маємо, що

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) + T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

де  $\alpha(x)$  – кут між дотичною в точці з абсцисою  $x$  до струни в момент часу  $t$  та додатним напрямком осі  $Ox$ . Внаслідок малості коливань маємо, що

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2}} \approx 1.$$

Отже,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Звідси, через довільність  $x_1$  і  $x_2$ , заключаємо, що величина натягу  $T$  не залежить від  $x$ . Таким чином, можна вважати, що  $T \approx T_0$  для всіх значень  $x$  і  $t$ .

Перейдемо до виведення рівняння. На елемент струни  $(x, x + \Delta x)$  діють сили натягу  $\vec{T}(x, x + \Delta x)$ ,  $-\vec{T}(x, t)$  й зовнішня сила. Відповідно до закону Ньютона, сума цих сил повинна дорівнювати добутку маси цього елемента на прискорення, тобто  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Проектуючи цю векторну рівність на вісь  $u$ , одержимо

$$T_0 \sin \alpha \Big|_{x_2=x+\Delta x} - T_0 \sin \alpha \Big|_{x_1=x} + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (4.11)$$

де  $\rho(x)$  – щільність матеріалу струни. Але в рамках наближення, яке розглядаємо,

$$\sin \alpha(x) = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1+tg^2 \alpha}} \approx tg \alpha \approx \frac{\partial u}{\partial t},$$

а тому з (4.11) маємо

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u(x+\Delta, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + F(x, t).$$

Переходячи до границі в останній рівності, коли  $\Delta x \rightarrow 0$  одержимо

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x, t)$$

Це і є рівняння малих поперечних коливань струни. Якщо щільність  $\rho$  постійна,  $\rho(x) = \rho$ , то рівняння коливань струни набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (4.12)$$

де

$$\alpha^2 = \frac{T_0}{\rho}; \quad f = \frac{F}{\rho}.$$

Рівняння (4.12) будемо також називати одновимірним хвильовим рівнянням.

Якщо зовнішня сила відсутня, то  $F(x, t) = 0$ . Тоді одержуємо рівняння вільних коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Рівняння (4.12) має нескінченну множину частинних розв'язків. Тому одного рівняння (4.12) недостатньо для повного опису руху струни. Потрібні ще деякі додаткові умови, що впливають із фізичного змісту задачі. Так у початковий момент  $t = 0$  потрібно задати розташування й швидкість всіх точок струни

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (4.13)$$

Умови (4.13) називаються *початковими*. Далі, через те що струна обмежена, потрібно вказати, що відбувається на її кінцях. Для закріпленої струни на кінцях повинно бути

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (4.14)$$

при  $\forall t > 0$ . Умови (4.14) називаються *крайовими*. Отже, фізичну задачу про коливання струни зведено до математичної задачі:

- знайти розв'язки рівняння (4.12), які задовольняють початкові (4.13) і крайові умови (4.14).

Така задача називається *початково-крайовою*.

Нехай один з кінців, наприклад лівий, з'єднаний із пружно закріпленим повзуном (рис. 4.2).

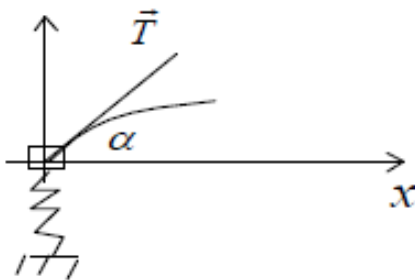


Рис.4.2

Оскільки, як вже говорилося,

$$T_u = T \sin \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha \approx T u'_x,$$

то II закон Ньютона для повзунка має вигляд

$$m u''_{tt}(0, t) = T u'_t(0, t) - c u(0, t),$$

де  $m$  – маса повзунка, а  $c$  – коефіцієнт пружності пружини. Якщо  $m$  величина, якою можна нехтувати, то одержуємо таку рівність:

$$u'_x(0, t) = \frac{c}{T} u(0, t).$$

Звісно, що повзунка може не бути, оскільки струну можна припаяти кінцем до самої пружини. Якщо пружина відсутня, то  $c = 0$  і одержуємо так звані умови вільного краю

$$u'_x(0, t) = 0.$$



*Зауваження.* Виведення рівняння коливань струни можливо одержати за допомогою методів варіаційного числення.

#### 4.4 Рівняння малих поздовжніх коливань пружного стрижня

Рівняння малих поздовжніх коливань пружного стрижня має вигляд:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t),$$

де  $\rho$  – щільність матеріалу стрижня,  $S(x)$  – площа поперечного перерізу стрижня,  $E(x)$  – модуль Юнга. Виведемо це рівняння. Розглянемо прямолінійний стрижень, діаметр поперечного перерізу якого значно менший за його довжину (рис.4.3). Припустимо далі, що один кінець цього стрижня закріплений, а другий – вільний. Ці умови несуттєві й приймаються для визначеності.

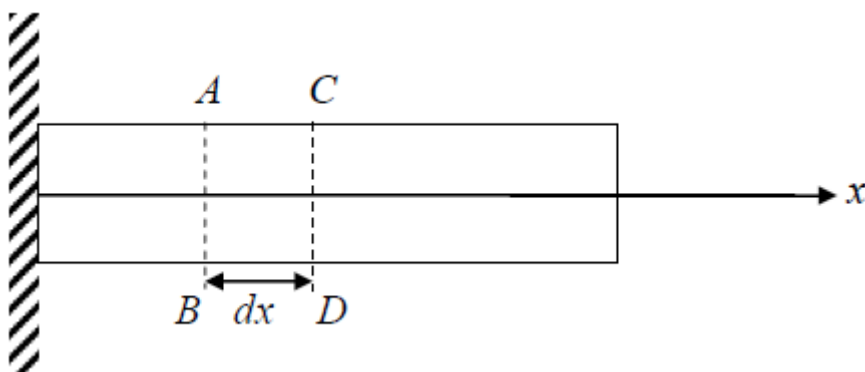


Рис. 4.3

Будемо вважати, що всі поперечні перерізи стрижня однакові. Виберемо вісь стрижня як лінію, що проходить через центри ваги поперечних перерізів. Координату уздовж осі стрижня позначимо  $x$ . Природно розглядати тонкий стрижень як матеріальну лінію, тобто об'єкт, позбавлений об'єму, але наділений масою. Масу стрижня зручно задавати за допомогою лінійної масової щільності:  $dm = \rho S dx$ . Якщо відтягнути уздовж осі  $x$  й відпустити правий кінець стрижня, то стрижень почне коливатися. Такі коливання називаються поздовжніми коливаннями стрижня. Змоделюємо цей стан. Для цього введемо функцію  $u(x, t)$  – зсув точки стрижня з координатою  $x$  в момент часу  $t$  уздовж осі стрижня. У процесі руху стрижня в момент часу  $t$  поперечний переріз  $AB$  стрижня зсунеться уздовж осі на відстань  $u(x, t)$  так, що його координата дорівнює  $x + u(x, t)$ . Поперечний переріз  $CD$  стрижня також зсунеться, і його координата визначається як

$$x + dx + u(x + dx, t) = x + dx + u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Відстань між перерізами  $AB$  й  $CD$  у момент часу  $t$  буде

$$\left[ x + dx + u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] - \left[ x + u(x, t) \right] = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

*Поздовжньою деформацією* стрижня називається відносна зміна довжини нескінченно малих відрізків стрижня. У нашому випадку відносне подовження відрізка  $dx$  між перерізами  $AB$  й  $CD$ , відповідно до останньої формули, дорівнює

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Складемо рівняння руху стрижня. На елемент стрижня  $(x, x + dx)$  діють сили натягу  $\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$  й зовнішня масова сила, що розподілена по довжині стрижня і змінюється з часом. Зусилля  $\vec{T} = \vec{T}(x, t)\vec{i}$  моделює вплив частини стрижня, що перебуває праворуч точки з координатою  $x$ , на частину стрижня, що перебуває ліворуч точки з координатою  $x$ . Якщо  $T(x, t) > 0$ , то зусилля  $T$  називається *тим, що розтягує*, інакше – *тим, що стискає*. Сума всіх цих сил, відповідно до закону Ньютона, повинна дорівнювати добутку маси розглянутого елемента на прискорення:

$$T(x + dx, t) - T(x, t) + F(x, t)dx = \rho(x)S(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx + F(x, t)dx = \rho(x)S(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + F(x, t) = \rho(x)S(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Останнє рівняння містить дві невідомі функції:  $T, u$ .

Таким чином, необхідна додаткова умова. Оскільки розглядаються малі поздовжні коливання, то використаємо закон Гука про пропорційність сили й переміщення:

$$T(x, t) = ES\varepsilon = ES \frac{\partial u}{\partial x},$$

де коефіцієнт пропорційності  $ES$  називається *жорсткістю стрижня на розтягання*. Остаточно одержимо рівняння:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t),$$

що й було потрібно довести.

#### 4.5 Рівняння поперечних коливань мембрани

*Мембраною* називають тонку пружну пластинку, що не чинить опору згину. Будемо вивчати її поперечні коливання. Відхилення в момент часу  $t$  точки  $(x, y)$  мембрани від площини  $xOy$  позначимо функцією  $u(x, y, t)$ .

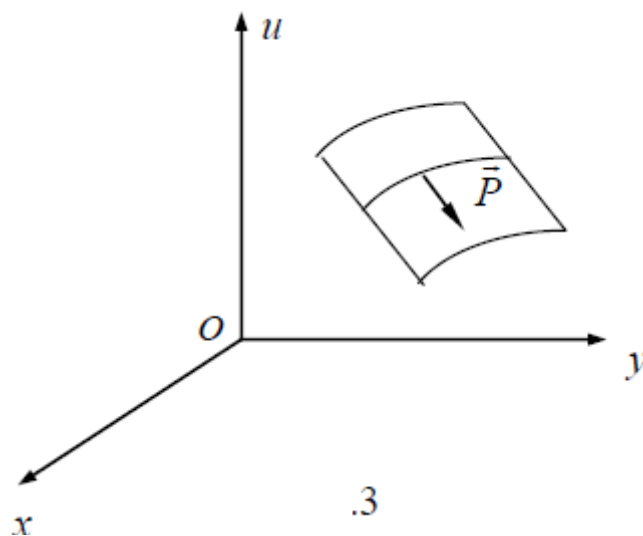


Рис.4.4

Нехай мембрана перебуває під дією рівномірного натягу  $P$ , прикладеного до її країв. Тобто якщо її уявно поділити на дві частини деякою лінією, то сила впливу однієї частини на іншу, прикладена до даного елемента

$\Delta s$  подільної лінії, спрямована через відсутність опору згину по нормалі до цієї лінії та лежить у дотичній площині до поверхні мембрани й дорівнює за величиною  $P\Delta s$  (рис. 4.4).

Виділимо на мембрані (рис. 4.5) довільну частину  $\Sigma$  із площею  $\sigma$ . Нехай  $D$  – проекція  $\Sigma$  на площину  $xOy$ , а  $S$  – її площа. Тоді за формулою для площі поверхні маємо

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2} dS.$$

Вважаючи коливання малими, будемо нехтувати величиною  $u_x'^2 + u_y'^2$ , тоді

$$\sigma = \iint_D dS = S.$$

Таким чином, у процесі малих коливань натяг  $P$  мембрани залишається сталим, і її площа не змінюється.

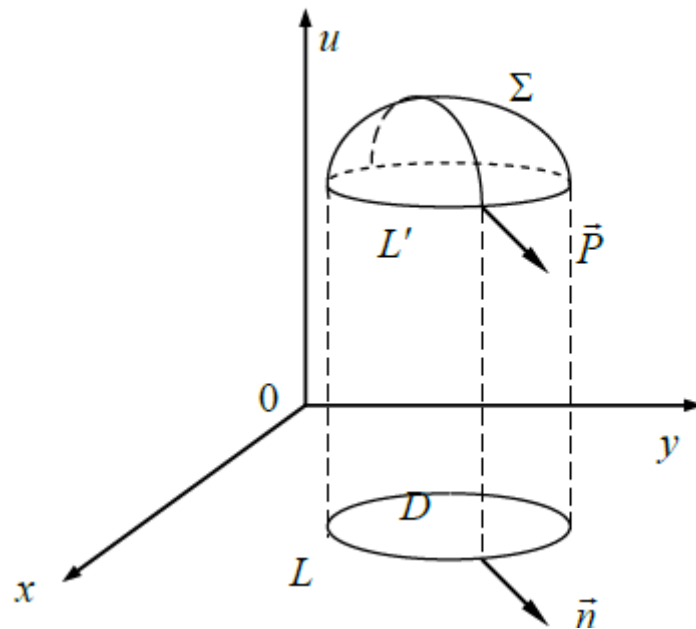


Рис.4.5

Нехай  $L'$  – контур, що обмежує поверхню  $\Sigma$ , а  $\Delta s'$  – елемент дуги контуру  $L'$ . Нехай, далі,  $L'$  і  $\Delta s'$  – проекції контуру  $L'$  й елемента дуги  $\Delta s'$  на площину  $xOy$ . Позначимо через  $\alpha(x, y, t)$  кут нахилу до площини  $xOy$  вектора натягу, прикладеного в точці  $(x, y, t)$ , а через  $\vec{n}$  – напрямок зовнішньої нормалі до контуру  $L$  в точці  $(x, y)$  на рис. 4.5. Тоді, як відомо,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Але

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2}}.$$

Отже, виходить, у рамках обраного степеня точності,  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ . Тому проекція вектора  $\vec{P}$  на вісь  $Ou$  дорівнює

$$P_u = P \sin \alpha = P \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Отже, проекція на вісь  $Ou$  сили, прикладеної до елемента  $\Delta s'$ , дорівнює  $P \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s'$ . Але тоді проекція на вісь  $Ou$  сумарної сили натягу, прикладеної до

всього контуру  $L'$ , дорівнює  $P \int_{L'} \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s'$ . Оскільки, за припущенням,  $u_x'^2 + u_y'^2 = 0$ ,

то  $\cos \alpha = 1$ . Тоді останній інтеграл дорівнює  $P \int_L \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s$ . Це криволінійний інтеграл 1-го роду, тобто інтеграл за довжиною дуги.

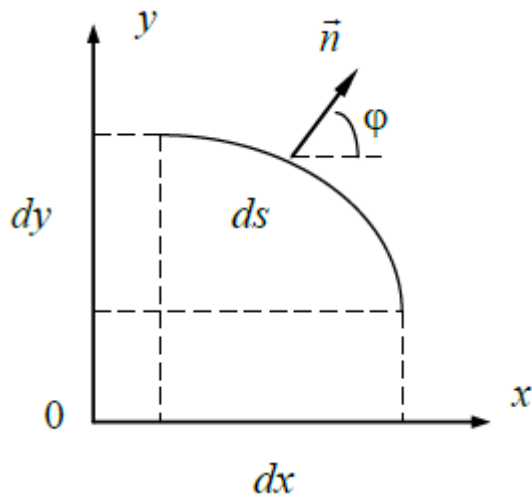


Рис.4.6

Нехай  $\varphi$  – кут між вектором  $\vec{n}$  і віссю  $Ox$  (рис. 4.6). Тоді, використовуючи формулу для похідної за напрямком, одержимо

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) ds,$$

оскільки

$$ds \cdot \cos \varphi = dy, \quad ds \cdot \sin \varphi = -dx,$$

то

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Останній інтеграл є вже криволінійним інтегралом 2-го роду. Застосовуючи до нього формулу Гріна

$$\oint_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS,$$

будемо мати

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS.$$

Нехай  $\rho(x, y)$  – поверхнева щільність мембрани. Тоді застосуємо до поверхні  $\Sigma$  другий закон Ньютона в проекції на вісь  $Ou$  :

$$\iint_D \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dS = P \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dS,$$

або

$$\iint_D \left[ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dS = 0.$$

Оскільки область  $D$  – довільна, то остання рівність виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Припустимо, що мембрана однорідна, тобто  $\rho(x, y) = \rho = const$ . Вважаючи

$\frac{P}{\rho} = a^2$ , знаходимо остаточно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Це і є рівняння вільних малих поперечних коливань мембрани.

У випадку наявності зовнішніх сил будемо мати



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (4.15)$$

де  $f(x, y, t)$  – зовнішня сила, що припадає на одиницю маси мембрани.

#### 4.6 Телеграфне рівняння

Нехай є прямолінійний провідник, що займає відрізок  $[0, l]$  осі  $Ox$ . У кожен момент часу  $t$  в кожній точці з абсцисою  $x$  задано струм  $i$  та напругу  $v$ . Ці дві функції:  $i(x, t)$  та  $v(x, t)$  підлягають визначенню. При цьому повинні бути відомі чотири характеристики провідника: опір  $R$ , ємність  $C$ , самоіндукція  $L$  й витік  $A$ ; всі ці величини розраховані на одиницю довжини. Провідник будемо вважати однорідним, тоді величини  $R, C, L$  і  $A$  є відомими сталими.

Виділимо на провіднику елемент  $[x, x + dx]$ . На його лівому кінці напруга дорівнює  $v(x, t)$ , а на правому  $-v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ . Отже, падіння напруги на даній ділянці є  $-\frac{\partial v}{\partial x} dx$ . За законом Ома

$$-\frac{\partial v}{\partial x} dx = R dx \cdot i + L dx \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Отже, маємо перше з рівнянь:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Візьмемо тепер проміжок часу  $[t, t + dt]$ . Через лівий кінець елемента  $[x, x + dx]$  входить за цей час кількість електрики  $i dt$ , а через правий –  $\left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) dt$ . Отже, усього ввійде кількість електрики  $-\frac{\partial i}{\partial x} dx dt$ . Ця кількість електрики йде на підняття потенціалу й на витік. Але підняття потенціалу дорівнює  $\frac{\partial v}{\partial t} dt$ . Отже, на це збільшення потенціалу буде потрібно кількість електрики  $C dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt$ . Витік же, як відомо, пропорційний напрузі  $v$ , довжині  $dx$  й часу  $dt$ , а значить він дорівнює  $A v dx dt$ .  
Отже,

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx dt = C dx \frac{\partial v}{\partial t} dt + A v dx dt,$$

тобто маємо друге рівняння

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A v + C \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Отже, отримуємо два рівняння:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t} + A v. \quad (4.17)$$

Виключимо із цієї системи функцію  $i(x, t)$ .

Диференціюючи рівняння (4.16) по  $x$ , а рівняння (4.17) – по  $t$ , одержимо

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = R \frac{di}{dx} + L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}.$$

Звідси

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = R \frac{\partial i}{\partial x} - CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - AL \frac{\partial v}{\partial t}$$

або, з урахуванням рівнянь (4.16) і (4.17), маємо

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -CR \frac{\partial v}{\partial t} - ARv - CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - AL \frac{\partial v}{\partial t},$$

тобто

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (AL + CR) \frac{\partial v}{\partial t} + ARv. \quad (4.18)$$

Таке саме рівняння можна одержати й для  $i(x, t)$ .

Для спрощення розв'язку рівняння (4.18) припустимо, що  $A = 0$ , тобто будемо нехтувати витоком. Тоді замість (4.18) одержимо рівняння

$$CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + CR \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4.19)$$

Це рівняння відрізняється від рівняння коливання струни тільки наявністю доданка  $CR \frac{\partial v}{\partial t}$ . У рівнянні (4.19) введемо нову невідому функцію  $u(x, t)$  за формулою

$$v = e^{\mu t} u, \quad (4.20)$$

де  $\mu = \text{const}$ . Підберемо  $\mu$  так, щоб був відсутній член з  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

З (4.20) маємо

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu e^{\mu t} u + e^{\mu t} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu^2 e^{\mu t} u + 2\mu e^{\mu t} \frac{\partial u}{\partial t} + e^{\mu t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Підставляючи це в (4.19) і скорочуючи на  $e^{\mu t}$ , одержимо

$$CL \left( \mu^2 u + 2\mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + CR \left( \mu u + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.21)$$

Вимагаючи, щоб коефіцієнт при  $\frac{\partial u}{\partial t}$  дорівнював нулю, одержимо

$2\mu CL + CR = 0$ , звідки  $\mu = -\frac{R}{2L}$ . У цьому випадку замість (4.20) одержимо, що

$$v = e^{\frac{R}{2L}t} u,$$

і рівняння (4.21) набуде вигляду

$$CL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (CL\mu^2 + 2CR\mu)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

або

$$CL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{CR^2}{4L} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.22)$$

#### 4.7 Рівняння теплопровідності

Нехай у деякому середовищі (тілі) є поле температури  $u$ , що змінюється з часом, тобто  $u = u(x, y, z, t)$ . Виділимо в розглянутому середовищі довільну замкнуту поверхню  $\sigma$ , яка обмежує тіло об'ємом  $V$ . На  $\sigma$  виділимо елементарну частину поверхні  $d\sigma$ , орт зовнішньої нормалі, до якої позначимо  $\vec{n}^0$  ( $|\vec{n}^0| = 1$ ).

Підрахуємо кількість тепла  $dQ_1$ , що протікає за час  $dt$  через частину поверхні  $d\sigma$  (для визначеності зсередини назовні). З фізики відомо, що ця кількість тепла  $dQ_1$  пропорційна часу  $dt$ , площі  $d\sigma$  й зміні температури  $u$  в напрямку нормалі до поверхні, тобто похідній  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Отже,

$$dQ_1 = -k dt d\sigma \frac{\partial u}{\partial n},$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, який називають коефіцієнтом внутрішньої теплопровідності. Знак мінус забезпечує додатність величини  $dQ_1$ , оскільки

при перетіканні тепла зсередини назовні температура в напрямку зовнішньої нормалі падає й  $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ .

Сумарна кількість тепла, що протікає через всю поверхню  $\sigma$ , визначається поверхневим інтегралом

$$Q_1 = -dt \iint_{\sigma} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (4.23)$$

Виділимо тепер в об'ємі  $V$  елементарний об'єм  $dV$  і підрахуємо кількість тепла  $dQ_2$ , що втрачає об'єм  $dV$  за час  $dt$  через перетікання тепла крізь поверхню  $\sigma$  зсередини назовні. З фізики відомо, що ця кількість тепла пропорційна часу  $dt$ , масі тіла ( $dm = \rho dV$ , де  $\rho$  – щільність) і зміні температури тіла за одиницю часу, тобто похідній  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . Отже,

$dQ_2 = -cdt\rho dV \frac{\partial u}{\partial t}$ , де  $c$  – коефіцієнт пропорційності, який називається питомою теплоємністю. Знак мінус забезпечує додатність  $dQ_2$ , оскільки, якщо об'єм втрачає тепло, то його температура  $u$  падає і  $\frac{\partial u}{\partial t} < 0$ .

Сумарна кількість тепла, що втрачена тілом за час  $dt$ , визначається інтегралом

$$Q_2 = -dt \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (4.24)$$

У розглянутому середовищі можливе так само виділення або поглинання тепла (через хімічні перетворення й інші причини).

Нехай відома функція  $F(x, y, z, t)$  визначає кількість тепла, що виділяється (поглинається) за одиницю часу одиницею маси даного середовища. Тоді кількість  $dQ_3$  тепла, яке виділяється в об'ємі  $dV$  за час  $dt$  буде

$$dQ_3 = \rho F(x, y, z, t) dt dV ,$$

а сумарна кількість тепла, що була втрачена об'ємом  $V$  за час  $dt$ , визначається об'ємним інтегралом

$$Q_3 = dt \iiint_V \rho F(x, y, z, t) dV . \quad (4.25)$$

Скористаємося тепер рівнянням балансу тепла

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 ,$$

яке означає, що сумарна кількість тепла, яке протікає крізь поверхню  $\sigma$ , складається з тепла, втраченого (набутого) тілом і тепла, що виділилося (поглинулося) у цьому тілі, припустимо, через хімічні перетворення.

Підставляючи вирази (4.23)–(4.25) для  $Q_1, Q_2$  й  $Q_3$ , одержимо

$$\iint_{\sigma} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_V \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho F \right) dV . \quad (4.26)$$

З того, що

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left( \text{gradu}, \vec{n}^0 \right) \text{grad}_n u$$

і за теоремою Гаусса-Остроградського одержимо

$$\iint_{\sigma} k \cdot \text{grad}_n u d\sigma = \iiint_V \text{div}(k \cdot \text{grad} u) dV,$$

причому

$$\text{div}(k \cdot \text{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Тоді (4.26) можна записати так:

$$\iiint_V \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho F - \text{div}(k \cdot \text{grad} u) \right) dV = 0.$$

Позначимо

$$\Phi(M) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho F - \text{div}(k \cdot \text{grad} u),$$

тоді

$$\iiint_V \Phi(M) dV = 0 \Rightarrow \Phi(M) \equiv 0$$

(на підставі довільності виділеного об'єму  $V$  при неперервній підінтегральній функції). Дійсно, якщо припустити, що в деякій точці  $M_0, \Phi(M_0) \neq 0$ , наприклад  $\Phi(M_0) > 0$ , то через неперервність функції  $\Phi(M)$  існує такий об'єм  $V_1$ , що містить точку  $M_0$ , в якому  $\Phi(M) > 0 \quad \forall M \in V_1$ , а тоді  $\iiint_{V_1} \Phi(M) dV > 0$ ,

що суперечить умові. Таким чином, одержуємо рівняння



$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho F - \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{gradu}) = 0$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{c} F.$$

Це рівняння називається *рівнянням теплопровідності*.

Рівняння теплопровідності отримане у припущенні неперервної диференційованості параметра  $k$ , неперервності функцій  $F, c, \rho$ , а також неперервності  $u$  разом з її частинними похідними до другого порядку за координатами і першою похідною за часом. Якщо фізичні параметри  $k, c, \rho$  сталі, то позначивши  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$  й включивши множник  $\frac{1}{c}$  до складу функції  $F$ , одержимо канонічну форму рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + F(x, y, z, t)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x, y, z, t). \quad (4.27)$$

Якщо температура  $u$  є функцією часу  $t$  і тільки двох координат  $x, y$  (плоска задача), то рівняння спрощується й набуває вигляду

$$u'_t = a^2 (u''_{xx} + u''_{yy}) + F(x, y, t), \quad (4.28)$$

де  $u = u(x, t)$ .

Рівняння (4.28) описує поширення тепла в прямолінійному стержні, за напрямком якого прийнято вісь  $Ox$ .

Рівняння в частинних похідних мають нескінченну множину розв'язків, що залежать від довільних функцій. Для виділення єдиного розв'язку необхідно на шуканий розв'язок диференціального рівняння накласти додаткові умови.

Для рівняння теплопровідності початкові умови задаються у вигляді  $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$  та означають розподіл температури у всьому розглянутому об'ємі в початковий момент часу. На практиці найчастіше використовують такі крайові умови:

*Крайові умови I роду*

$$u|_S = f(M_S, t)$$

де  $f$  – задана функція точок  $M_S$  межі  $S$  і часу  $t$ . Ця умова відповідає завданню на межі  $S$  певного розподілу температури.

Задача розв'язку диференціального рівняння при крайових умовах I-го роду називається *задачею Діріхле*.

*Крайові умови II роду*

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f(M_S, t)$$

де  $\vec{n}$  – напрямок нормалі до межі  $S$  (звичайно зовнішньої). Ця умова відповідає завданню на межі  $S$  теплової течії, тому що  $dQ = -k dt dS \frac{\partial u}{\partial n}$ , тобто  $\frac{\partial u}{\partial n}$  пропорційно тепловій течії  $dQ$ .

Задача розв'язку диференціального рівняння при крайових умовах II-го роду називається *задачею Неймана*.

Крайові умови III роду

$$\left[ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right]_S = f(M_S, t),$$

де  $\alpha \neq 0; \beta \neq 0$  (у найпростішому випадку  $\alpha$  й  $\beta$  – сталі).

З'ясуємо фізичний зміст III крайової умови в теплових задачах. Припустимо, що крізь поверхню тіла здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого  $u_0$  розподілена за законом  $u_0 = f(M, t)$ . Кількість тепла  $dQ$ , що протікає крізь елемент  $d\sigma$  поверхні  $\sigma$  за час  $dt$ , дорівнює

$$dQ = -k dt d\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{M_S}.$$

Цю ж кількість тепла можна виразити через різницю температур межі й навколишнього середовища:

$$dQ = k_1 dt d\sigma \left[ u \Big|_{M_S} - f(M_S, t) \right],$$

де  $k$  – коефіцієнт теплопередачі

Прирівнюючи отримані для  $dQ$  вирази, одержимо

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{M_S} = k_1 \left[ u \Big|_{M_S} - f(M_S, t) \right]$$

або, з огляду на те, що ця рівність виконується для будь-якої точки поверхні  $S$ , маємо

$$\left( k_1 u + k \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = k_1 f(M_S, t).$$

Таким чином, крайова умова III роду відповідає теплообміну із зовнішнім середовищем. Цю умову звичайно записують у вигляді

$$\left( u + h \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = f(M_S, t),$$

де  $h = \frac{k}{k_1}$ .

Якщо процес розподілу тепла стаціонарний, тобто температура  $u$  від часу не залежить ( $u'(t) = 0$ ), то рівняння теплопровідності набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \quad (4.29)$$

де  $f(x, y, z) = -F(x, y, z)$  – відома функція координат.

Рівняння (4.29) називають неоднорідним рівнянням Лапласа, або *рівнянням Пуассона*. Якщо в розглянутому середовищі відсутнє виділення (поглинання) тепла, то  $f(x, y, z) \equiv 0$  й рівняння (4.29) набуде вигляду:

$$\Delta u = 0. \quad (4.30)$$

Рівняння (4.30) називається *рівнянням Лапласа*. Отже, всі можливі стаціонарні процеси поширення тепла в однорідному середовищі описуються рівнянням Лапласа.

#### 4.8 Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку з $n$ незалежними змінними

У загальному випадку лінійне диференціальне рівняння другого порядку з  $n$  незалежними змінними має вигляд

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.31)$$

Припустимо, що коефіцієнти цього рівняння  $a_{ik}, b_i, c$  – сталі, при цьому будемо вважати, що  $a_{ik} = a_{ki}$ . Перш, ніж почати розв'язання такого рівняння, необхідно перетворити його до більш простого вигляду за допомогою заміни змінних. Позначимо символічно другі похідні  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$  як добуток змінних  $\xi_i \xi_k$ ,

а перші  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  – як  $\xi_i$ . Тоді першій сумі в рівнянні (4.31) можна поставити у

відповідність квадратичну форму  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k$ , яку методами лінійної алгебри

можна звести до канонічного вигляду, тобто відповідною заміною змінних можна домогтися, щоб у канонічному вигляді коефіцієнти були б рівні "+1" або "-1". Якщо заміну змінних виконувати за допомогою перетворення

$\xi_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \eta_j$ , де  $\omega_{ij}$  – сталі, то квадратична форма набуває вигляду

$$F = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k = \sum_{r=1}^n \varepsilon_r \eta_r^2, \text{ де } \varepsilon_r = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}.$$

Дійсно,

$$F = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \eta_j \sum_{r=1}^n \omega_{kr} \eta_r = \sum_{i,r=1}^n \eta_j \eta_r \left( \sum_{j,k=1}^n a_{ik} \omega_{ij} \omega_{kr} \right)$$

(змінимо порядок підсумовування).

Вираз у круглих дужках відіграє роль коефіцієнтів, які дорівнюють 0, якщо  $j \neq r$ , оскільки квадратична форма повинна бути зведена до канонічного вигляду. Тому маємо

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \omega_{ij} \omega_{kr} = 0, \quad \text{при } j \neq r$$

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \omega_{ir} \omega_{kr} = \varepsilon_r.$$

Повернемося знову до вихідного рівняння (4.31). Зробимо заміну змінних таким чином

$$y_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ji} x_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.32)$$

де  $\{\omega_{ji}\}$  – матриця перетворення.

Знайдемо  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ , припускаючи, що  $u$  є функцією від  $y$ , тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_i}.$$

Визначимо  $\frac{\partial y_r}{\partial x_i}$ , з огляду на те, що

$$y_r = \sum_{j=1}^n \omega_{jr} x_j, \quad \frac{\partial y_r}{\partial x_i} = \omega_{ir},$$

тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_r} \omega_{ir}. \quad (4.33)$$

Знайдемо другу похідну

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{r,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_j} \omega_{ir} \omega_{kj}. \quad (4.34)$$

Підставимо знайдені вирази (4.33) і (4.34) для похідних у рівняння (4.31)

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \sum_{r,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_j} \omega_{ir} \omega_{kj} + \sum_{i=1}^n b_i \sum_{r=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_r} \omega_{ir} + cu - g(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Позначимо

$$J = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{r=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_r} \omega_{ir} + cu - g(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

тоді

$$\sum_{r,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_r \partial y_j} \cdot \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \omega_{ir} \omega_{kj} + J = 0.$$

Коефіцієнти перетворення (4.32) такі, що члени, які містять мішані похідні, зникають. У результаті одержуємо

$$\sum_{r=1}^n \varepsilon_r \frac{\partial^2 u}{\partial y_r^2} + J = 0$$

або у розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_p^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{p+q}^2} + J = 0. \quad (4.35)$$

Отримане рівняння називається *канонічним*.

Сума індексів  $p + q$  дорівнює рангу матриці квадратичної форми, складеної з коефіцієнтів  $a_{ij}$  при похідних другого порядку. Очевидно, що  $p + q \leq n$ .

Кожне лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами характеризується такими арифметичними ознаками:

1. Число  $n$  визначає кількість змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
2. Числа  $p$  і  $q$  збігаються з кількістю додатних і від'ємних коефіцієнтів при квадратах у зведеній до канонічного вигляду квадратичній формі, утвореній коефіцієнтами при других похідних.

Класифікація цих рівнянь виконується таким чином:

1. Якщо  $q = 0$  й  $p = n$ , тобто у канонічному рівнянні немає від'ємних і нульових коефіцієнтів, то рівняння (1.33), а отже, й (1.37) називаються рівняннями *еліптичного* типу.
2. Якщо  $q < 0$ ,  $p > 0$ ,  $p + q = n$ , тобто нульових коефіцієнтів немає, то рівняння називається рівнянням *гіперболічного* типу.
3. Якщо  $p + q < n$ , то рівняння називається рівнянням *параболічного* типу.

Застосуємо цю класифікацію до розглянутих раніше рівнянь: хвильового, теплопровідності й Пуассона.



Рівняння коливань струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t).$$

Тут  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ , отже це рівняння *гіперболічного* типу.

Рівняння коливань мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t).$$

У цьому рівнянні  $n = 3$ ,  $p = 2$ ,  $q = 1$ , тобто також маємо рівняння *гіперболічного* типу.

Рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z, t);$$

$n = 4$ ,  $p = 3$ ,  $q = 0$ , отже, це рівняння *параболічного* типу.

Рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x, y, z);$$

$n = 3$ ,  $p = 3$ ,  $q = 0$ , тобто це рівняння *еліптичного* типу.

#### 4.9 Проблеми математичної фізики для обмеженої області.

##### Загальна схема застосування методу Фур'є

Кожна задача математичної фізики ставиться як задача розв'язку деякого рівняння у частинних похідних при певних додаткових умовах, які в більшості випадків диктуються фізичними властивостями системи.

Крайова задача повинна бути поставлена так, щоб:

- 1) розв'язок існував,
- 2) розв'язок був єдиним,
- 3) розв'язок був стійким.

Вимога стійкості розв'язку пояснюється тим, що в основі визначення фізичних величин лежить процес вимірювання, який завжди пов'язаний з деякою похибкою. Очевидно, з похибкою визначаються й дані задачі, у тому числі і крайові умови можуть наближено моделювати реальні умови. Тому виникає запитання: як похибка у даних крайової задачі впливає на її розв'язок? Очевидно, якщо незначні зміни початкових даних приведуть до незначної зміни розв'язку крайової задачі, то отриманий розв'язок можна вважати стійким, що правильно відбиває фізичний процес. У протилежному випадку знайдений розв'язок не можна вважати задовільним.

Якщо поставлена задача задовольняє вимоги 1–3, то її називають коректно поставленою проблемою.

Будемо розглядати процес, що описується однією функцією  $u$  ( $u$  – температура або відхилення при коливанні і т.ін., тобто  $u$  є функцією, що характеризує задане поле). Нехай  $u$  задовольняє таке диференціальне рівняння

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + g(x, y, z, t). \quad (4.36)$$

Оператор  $L$  не містить змінної за часом  $t$ . Будемо вважати, що

розглянутий процес відбувається в скінченій області  $\Omega$ , яка обмежена поверхнею  $\partial\Omega$  (рис. 4.7).

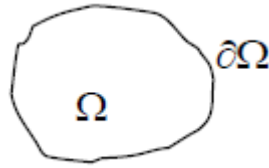


Рис.4.7

У цьому випадку, щоб знайти частинний розв'язок рівняння, необхідно визначити додаткові умови, які складаються з початкових умов, а також умов на межі області, тобто крайових умов. Припустимо, що крайові умови однорідні. Тоді залежно від фізичного змісту умов на межі, вони задаються у одним з таких виглядів:

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{або} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda u + \mu \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Якщо  $\alpha \neq 0$  в рівнянні (4.36), то початкові умови для цього рівняння визначаються у вигляді

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z). \quad (4.37)$$

Якщо ж  $\alpha = 0$ , то початковою умовою для такого рівняння буде таке:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

Розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} = L[w] \quad (4.38)$$

з однорідними крайовими умовами

$$\Lambda_k[w] \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (4.39)$$

Очевидно, що одним з розв'язків, який задовольняє рівняння (4.38) і крайові умови (4.39), є тривіальний, тобто  $w = 0$ . Будемо шукати нетривіальний (ненульовий) розв'язок. Для цього скористаємося методом Фур'є.

Головна ідея методу Фур'є полягає в тому, щоб відокремити змінні та звести диференціальне рівняння з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь. З цією метою розв'язок подамо у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від часу, а інша тільки від координат точки:

$$w(x, y, z, t) = T(t) \cdot v(x, y, z). \quad (4.40)$$

Підставимо (4.40) у рівняння (4.38). тоді

$$v(x, y, z) (\alpha T''(t) + \beta T'(t)) = T(t) L[v].$$

Виконаємо відокремлення змінних

$$\frac{\alpha T'' + \beta T'}{T} = \frac{L[v]}{v} = \lambda.$$

У правій частині останньої рівності функція не залежить від часу, а в лівій – від координат. Така рівність справедлива тільки в тому разі, якщо кожна з частин дорівнює одній і тій же сталій величині, яку позначимо  $\lambda$ . Тоді одержимо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} L[v] = \lambda v; \\ \alpha T'' + \beta T' - \lambda T = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Оператор  $\Lambda_k$  крайових умов від часу не залежить. Тоді крайові умови з урахуванням (4.40) запишуться як

$$T\Lambda_k[v]\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (k=1,2,\dots,r).$$

Останню рівність можна скоротити на  $T$ , тому що  $T \neq 0$  (оскільки шукаємо ненульовий розв'язок), тоді

$$L[v] = \lambda v, \quad (4.42)$$

$$\Lambda_k[v] = 0 \quad (k=1,2,\dots,r) \quad (4.43)$$

і крім того

$$\alpha T'' + \beta T' - \lambda T = 0. \quad (4.44)$$

Таким чином, розв'язання вихідної задачі зведено до розв'язання двох задач (4.42)–(4.43) і (4.44). Задачу (4.42)–(4.43) називають задачею на власні значення. Якщо  $\lambda$  обирати довільно, то, власне кажучи, задача (4.42)–(4.43)

може мати тільки тривіальний розв'язок. Але існують такі  $\lambda$  (дискретні), при яких рівняння (4.42) має нетривіальний розв'язок. Такі значення  $\lambda$  називаються власними значеннями (власними числами) оператора  $L$  при крайових умовах (4.43), а відповідні до них нетривіальні розв'язки рівняння (4.42) – власними функціями оператора  $L$ . Якщо одному значенню  $\lambda$  відповідає декілька лінійно незалежних власних функцій, то таке  $\lambda$  називається кратним.

Усі власні значення можна перенумерувати так, щоб модуль наступного був не менше модуля попереднього власного значення. Кожному власному значенню  $\lambda_k$  відповідає власна функція  $v_k$ :  $\lambda_1$  відповідає  $v_1$ ,  $\lambda_2$  –  $v_2$  і т.д. Набір функцій  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$  можна розглядати як базис простору, за допомогою якого можна розвинути в ряд інші функції.

Власні функції оператора  $L$  при розглянутих крайових умовах відіграють роль базису, за яким можуть бути розвинені інші функції, які присутні у постановці крайової задачі. Звичайно, є і такі задачі, де кінцевою метою є знаходження власних чисел  $\lambda_k$ . Це, наприклад, задачі квантової механіки й теорії коливань.

*Визначення.* Сукупність усіх власних значень  $\lambda_k$  диференціального оператора  $L$  при даних крайових умовах називають *спектром* цього оператора  $L$  при заданих крайових умовах.

Зафіксуємо деяке власне значення  $\lambda_k$ , якому відповідає власна функція  $v_k(x, y, z)$ . Підставимо це значення у рівняння (4.44)

$$\alpha T'' + \beta T' - \lambda_k T = 0. \quad (4.45)$$

Знайдемо частинні розв'язки цього рівняння  $e^{s_k' t}$  й  $e^{s_k'' t}$ . Тоді загальний розв'язок рівняння (4.45) запишеться, як

$$T_k = A_k e^{s_k' t} + B_k e^{s_k'' t}.$$

Власні значення  $\lambda_k$  утворюють нескінченну множину. Складемо ряд

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k e^{s'_k t} + B_k e^{s''_k t}) \cdot v_k. \quad (4.46)$$

У випадку збіжності цей ряд буде розв'язком однорідного рівняння (4.38) при заданих крайових умовах (4.39). Ряд (4.46) можна буде розглядати як розв'язок вихідної задачі, якщо його можна буде потрібне число раз диференціювати, тобто ряд буде рівномірно збіжним. Тому коефіцієнти  $A_k$  та  $B_k$  повинні спадати досить швидко при  $k \rightarrow \infty$ . Припустимо, що ряд (4.46) задовольняє необхідні умови. Оберемо коефіцієнти  $A_k$  та  $B_k$  так, щоб розв'язок (4.46) задовольняв початкові умови.

Нехай початкові умови для рівняння (4.38) мають вигляд:

$$\begin{cases} w|_{t=0} = \phi(x, y, z), \\ \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases} \quad (4.47)$$

Тоді

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \cdot v_k(x, y, z), \quad (4.48)$$

$$\psi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k s'_k + B_k s''_k) \cdot v_k(x, y, z). \quad (4.49)$$

Будемо вважати, що функції  $\phi(x, y, z)$  та  $\psi(x, y, z)$  можуть бути розвинені в ряди за власними функціями, а саме

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x, y, z), \quad (4.50)$$

$$\psi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x, y, z). \quad (4.51)$$

Тоді, використовуючи рівності (4.48)–(4.51), одержуємо, що

$$\begin{cases} A_k + B_k = a_k \\ A_k s'_k + B_k s''_k = b_k \end{cases}, \text{ де } s'_k \neq s''_k.$$

У випадку  $s'_k = s''_k$  мали б інші частинні розв'язки, а не  $e^{s'_k t}$  й  $e^{s''_k t}$ . З останньої системи визначаються коефіцієнти  $A_k$  й  $B_k$ , а отже, і розв'язок  $W$ .

Таким чином, розв'язання вихідної задачі зведено до послідовного розв'язання задачі (4.42)–(4.43), а потім розв'язання рівняння (4.44). Відзначимо, що головним моментом при використанні методу Фур'є є відшукування власних функцій, які виступають в ролі базису для розвинення в ряди всіх необхідних функцій та розв'язків. Тому більш детально зупинимосся на властивостях власних функцій та власних значень.

#### 4.10 Загальна схема розв'язання неоднорідного рівняння методом Фур'є

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = L[u] + g(x, y, z, t) \quad (4.52)$$

з однорідними крайовими умовами



$$\Lambda_i[u]\big|_{\partial\Omega} = 0$$

і неоднорідними початковими умовами

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

Будемо вважати, що нам відомі всі власні функції оператора  $L$ . Функцію  $g(x, y, z, t)$ , що знаходиться в правій частині диференціального рівняння (4.52), розвинемо в ряд за власними функціями оператора  $L$ .

$$g(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) v_k(x, y, z). \quad (4.53)$$

Змінну  $t$  розглядаємо при цьому як параметр, тобто розв'язок  $u(x, y, z, t)$  будемо шукати у вигляді ряду

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(x, y, z). \quad (4.54)$$

При цьому, оскільки  $v_k(x, y, z)$  є власними функціями оператора  $L$  при крайових умовах  $\Lambda_i$ , то при будь-якому обранні  $u_k(t)$  крайові умови будуть виконуватися. Однак ці функції необхідно обрати так, щоб виконувалися й початкові умови. Тому розвинемо в ряд за власними функціями функції  $\varphi$  та  $\psi$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) v_k(x, y, z), \\ \psi(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(0) v_k(x, y, z). \end{aligned}$$

Зрозуміло, що коефіцієнти цього розвинення можна визначити таким чином:

$$u_k(0) = \iiint_{\Omega} \varphi(x, y, z) v_k(x, y, z) dV / \iiint_{\Omega} v_k^2(x, y, z) dV, \quad (4.55)$$

$$u'_k(0) = \iiint_{\Omega} \psi(x, y, z) v_k(x, y, z) dV / \iiint_{\Omega} v_k^2(x, y, z) dV. \quad (4.56)$$

Якщо система власних функцій  $\{v_i\}$  ортонормована, то

$$\|v_k\| = \iiint_V v_k^2 dV = 1$$

і вигляд (4.55), (4.56) спрощується.

Підставимо вираз (4.54) замість  $u$  і (4.53) замість  $g(x, y, z, t)$  у рівняння (4.52), тоді одержимо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha u''_k(t) + \beta u'_k(t)\} v_k(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t) v_k(x, y, z) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) v_k(x, y, z)$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha u''_k(t) + \beta u'_k(t) - \lambda_k u_k(t) - g_k(t)\} v_k(x, y, z) = 0.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на  $v_i$  й проінтегруємо (тобто помножимо скалярно), тоді одержимо

$$\alpha u''_i(t) + \beta u'_i(t) - \lambda_i u_i(t) - g_i(t) = 0.$$

Отримане рівняння є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з початковими умовами (4.55) і (4.56). Визначивши розв'язок цього рівняння, практично вирішимо вихідну задачу.

#### 4.11 Розв'язок задачі теплопровідності з теплообміном на кінцях

Будемо розглядати рівняння теплопровідності для стрижня

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.57)$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4.58)$$

Крайові умови запишемо з припущення, що на обох кінцях існує теплообмін. У точці  $x = 0$  ця умова має вигляд

$$\left( u - h \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.59)$$

на правому кінці, тобто якщо  $x = l$

$$\left( u + H \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (4.60)$$

Умова (4.60) випливає з такого: на основі закону Ньютона швидкість зміни

температури на правому кінці пропорційна різниці температур стрижня й навколишнього середовища  $\upsilon$ :

$$u'_x(l,t) = -H[u(l,t) - \upsilon],$$

де  $H$  – число, яке пропорційне до коефіцієнта теплообміну. Вважаючи, що  $\upsilon(t) \equiv 0$ , одержимо звідси вираз (1.62). Аналогічно одержимо умову (4.59).

Розв'язок рівняння (4.57) подамо відповідно до методу Фур'є у вигляді

$$u(x,t) = T(t)W(x)$$

Тоді, після підстановки  $u(x,t)$  у рівняння (1.59) та відокремлення змінних, отримаємо рівність

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{W''(x)}{W(x)} = -\lambda$$

Звідки маємо два рівняння відносно  $W(x)$  та  $T(t)$  відповідно.

$$W'' + \lambda W = 0, \quad T' + \lambda a^2 T = 0.$$

Для  $W(x)$  з урахуванням (1.61), (1.62) одержуємо:

$$W'' = -\lambda W;$$

$$(W - hW')\Big|_{x=0} = 0; \tag{4.61}$$

$$(W + HW')\Big|_{x=l} = 0. \tag{4.62}$$

Перевіримо самоспряженість оператора  $\frac{d^2}{dx^2}$  при даних крайових умовах, тобто покажемо, що

$$\int_0^l W_1 W_2'' dx = \int_0^l W_2 W_1'' dx. \quad (4.63)$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_0^l W_1 W_2'' dx = W_1 W_2' \Big|_0^l - \int_0^l W_1' W_2' dx = W_1 W_2' \Big|_0^l - W_1' W_2 \Big|_0^l + \int_0^l W_2 W_1'' dx.$$

Але на основі (4.61) і (4.62) маємо

$$\begin{aligned} W_1 W_2' \Big|_0^l - W_1' W_2 \Big|_0^l &= -H W_1'(l) W_2'(l) - h W_1'(0) W_2'(0) + \\ &+ H W_1'(l) W_2'(l) + h W_1'(0) W_2'(0) = 0, \end{aligned}$$

тобто рівність (4.63) доведено.

Отже, ми довели, що власні значення  $\lambda$  цієї задачі дійсні. Легко переконатися, що вони додатні. Дійсно, запишемо рівність

$$\lambda W = -W''.$$

Помножимо скалярно на  $W$  обидві частини цієї рівності. Тоді одержимо

$$\lambda \int_0^l W^2 dx = - \int_0^l W W'' dx.$$

Обчислимо праву частину:

$$-\int_0^l W W'' dx = -W W' \Big|_0^l + \int_0^l W'^2 dx = H W'^2(l) + h W'^2(0) + \int_0^l W'^2 dx.$$

Таким чином,

$$\lambda \int_0^l W^2 dx > 0,$$

а значить  $\lambda > 0$ . Тому загальний розв'язок рівняння  $W'' + \lambda W = 0$  має вигляд

$$W = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

або

$$W = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Звідси

$$W' = -\mu A \sin \mu x + \mu B \cos \mu x.$$

Використовуючи крайові умови (4.61) і (4.62), одержимо

$$\begin{cases} A - \mu h B = 0 \\ A \cos \mu l + B \sin \mu l + H(-\mu A \sin \mu l + \mu B \cos \mu l) = 0. \end{cases}$$

Це однорідна система відносно  $A$  і  $B$ . Вона має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли дорівнює нулю її визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu h \\ \cos \mu l - \mu H \sin \mu l & \sin \mu l + H \mu \cos \mu l \end{vmatrix} = 0. \quad (4.64)$$

Звідси визначимо  $\mu$ . Без обмеження загальності покладемо для зручності  $B = 1$ , тоді знайдемо  $A$ .

Перепишемо рівняння (4.64) так:

$$\sin \mu l + H \mu \cos \mu l + \mu h \cos \mu l - \mu^2 h H \sin \mu l = 0,$$

або, поклавши  $z = \mu l$ , знаходимо

$$\frac{h + H}{l} z \cos z - \left( \frac{hH}{l^2} z^2 - 1 \right) \sin z = 0. \quad (4.65)$$

Відомо, що власні значення  $\lambda$  даної задачі дійсні та додатні. Однак, ліва частина рівняння (4.65) непарна, і виходить, якщо  $z$  – корінь, то й  $-z$  – корінь. Покажемо безпосередньо, що всі корені рівняння (4.65) дійсні. Нехай для визначеності  $h = 0$ ,  $H > 0$  (це означає, що ліворуч підтримується нульова температура, а праворуч здійснюється теплообмін). Але, якщо  $h = 0$ , то  $A = 0$ , а значить

$$W = B \sin \mu x \quad (4.66)$$

Рівняння (4.65) у цьому випадку набуде вигляду

$$\frac{H}{l} z \cos z + \sin z = 0, \quad (4.67)$$

тобто

$$\operatorname{tg} z = -\frac{H}{l} z.$$

Це рівняння розв'язується графічним шляхом.

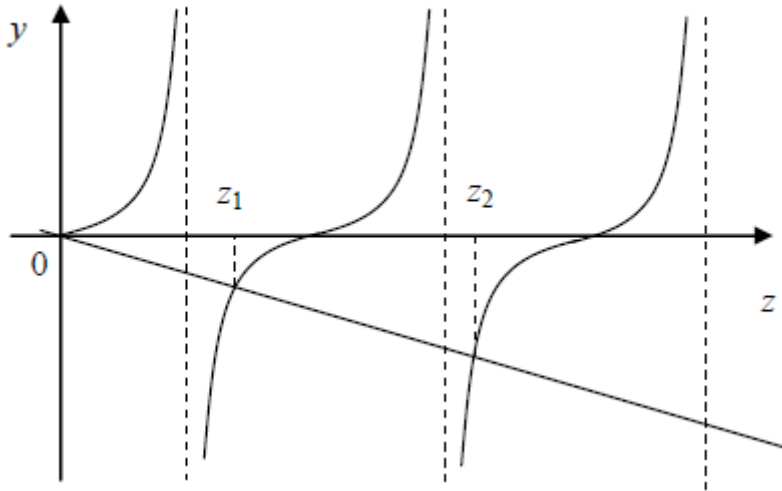


Рис.4.8

Легко бачити (рис.4.8), що воно має незліченну множину коренів  $z_1, z_2, z_3 \dots$

При цьому, чим більше  $n$ , тим ближче  $z_n$  до абсциси асимптоти. Іншими словами, при будь-якому  $n$

$$z_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} + \varepsilon_n,$$

де  $\varepsilon_n > 0$  при всіх  $n$ .

Звертаючись тепер до функції (4.66), запишемо її так:

$$W_n = \sin \frac{z_n x}{l}.$$



На основі загальної теорії власні функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_0^l \sin \frac{z_n x}{l} \sin \frac{z_m x}{l} dx = 0, \quad m \neq n.$$

Для  $T(t)$  маємо

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n a^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

з урахуванням  $\lambda = \mu^2 = \left(\frac{z}{l}\right)^2$

$$T_n(t) = e^{-z_n^2 \frac{a^2 t}{l^2}}.$$

Розв'язок вихідної задачі, відповідно до загальної теорії методу Фур'є, шукаємо у вигляді ряду

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-z_n^2 \frac{a^2 t}{l^2}} \sin \frac{z_n x}{l}$$

Він збігається досить швидко завдяки множникам  $e^{-z_n^2 \frac{a^2 t}{l^2}}$ .

З початкової умови одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{z_n x}{l} = \varphi(x).$$

Функція  $\varphi(x)$  розвинена в ряд за синусами, отже,

$$A_n = \frac{1}{\int_0^l \sin^2 \frac{z_n x}{l} dx} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{z_n x}{l} dx.$$

#### 4.12 Розв'язання рівняння коливання струни методом Фур'є

Метод розділення змінних ( або метод Фур'є), який ми розглянемо, є типовим для розв'язання багатьох задач математичної фізики. Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.68)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x). \quad (4.70)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4.71)$$

Будемо шукати частинний розв'язок рівняння (4.68), який не тотожний до нуля і який задовольняє граничні умови (4.69), у вигляді добутку двох функцій  $X(x)$  і  $T(t)$ , з яких перша залежить тільки від  $x$ , а друга тільки від  $t$ :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.72)$$

Підставляючи в рівняння (4.68), отримаємо:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

і, розділивши члени рівності на  $a^2 XT$ :

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \quad (4.73)$$

В лівій частині цієї рівності стоїть функція, яка не залежить від  $x$ , праворуч – функція, яка не залежить від  $t$ . Рівність (4.73) можлива тільки у тому випадку, коли ліва та права частини не залежать ані від  $x$ , ані від  $t$ , тобто вони дорівнюють сталому числу. Позначимо його через  $-\lambda$ , де  $\lambda > 0$  (пізніше розглянемо випадок, коли  $\lambda < 0$ ). Отже,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

З цих рівностей отримаємо два рівняння:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (4.74)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (4.75)$$

Загальні розв'язки цих рівнянь будуть:

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (4.76)$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t, \quad (4.77)$$

де  $A, B, C, D$  – довільні сталі.

Підставляючи вирази  $X(x)$  і  $T(t)$  у рівність (4.72), отримаємо:

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x) (C \cos a \sqrt{\lambda} t + D \sin a \sqrt{\lambda} t)$$

Підшукаємо тепер сталі  $A$  і  $B$  так, щоб задовольнялися умови (4.69). Оскільки  $T(t) \neq 0$  (у супротивному випадку буде  $u(x, t) \equiv 0$ , що суперечить поставленій умові), тоді функція  $X(x)$  повинна задовольняти умови (4.69), тобто повинно бути  $X(x) = 0$ ,  $X(l) = 0$ . Підставляючи значення  $x = 0$  і  $x = l$  в рівність (4.76), на основі (4.69) отримаємо:

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \quad 0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l.$$

З першого рівняння знаходимо  $A = 0$ . З другого випливає:

$$B \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

$B \neq 0$ , оскільки у супротивному випадку було б  $X \equiv 0$  і  $u \equiv 0$ , що суперечить умові. Отже, повинно бути

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

звідки

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(ми не беремо значення  $n = 0$ , тому що в цьому випадку було б  $X \equiv 0$  і  $u \equiv 0$ ).

Отже, ми одержали:

$$X = B \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (4.78)$$

Знайдені значення  $\lambda$  називаються *власними значеннями* для даної крайової задачі. Відповідні їм функції  $X(x)$  називаються *власними функціями*.

Якщо б ми брали замість  $-\lambda$  вираз  $+\lambda = k^2$ , то рівняння (4.74) набуло би вигляду:

$$X'' - k^2 X = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$X = A e^{kx} + B e^{-kx}.$$

Відмінний від нуля розв'язок в такій формі не може задовольняти граничні умови (4.69).

Знаючи  $\sqrt{\lambda}$ , та використовуючи рівність (4.77), можемо записати:

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.79)$$

Для кожного значення  $n$ , а відповідно для кожного  $\lambda$ , вирази (4.78) і (4.79) підставляємо в рівність (4.72) і отримуємо розв'язок рівняння (4.68), який задовольняє граничні умови (4.69). Цей розв'язок позначимо  $u_n(x, t)$ :

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left( C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \quad (4.80)$$

Для кожного значення  $n$  ми можемо брати свої сталі  $C$  і  $D$  і тому запишемо  $C_n$  і  $D_n$  ( стала  $B$  включена в  $C_n$  і  $D_n$ ). Оскільки рівняння (4.68) лінійне і однорідне, то сума розв'язків також є розв'язок, і тому функція, представлена рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

або

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (4.81)$$

також буде розв'язком диференціального рівняння (4.68), яке задовольняє умову (4.69). Очевидно, ряд (4.81) буде розв'язком рівняння (4.68) тільки в тому випадку, коли коефіцієнти  $C_n$  і  $D_n$  такі, що цей ряд збігається і збігаються ряди, одержані після двократного почленного диференціювання по  $x$  і по  $t$ . Розв'язок (1.83) повинен ще задовольняти початкові умови (4.70) і (4.71). Цього ми будемо домагатися шляхом підбору сталих  $C_n$  і  $D_n$ .

Підставляючи в рівність (4.81)  $t = 0$ , отримаємо:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (4.82)$$

Якщо функція  $f(x)$  така, що в інтервалі  $(0, l)$  її можна розкласти в ряд Фур'є, то умова (4.82) буде виконуватися, якщо покласти

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (4.83)$$

Далі, диференціюючи члени рівності (4.81) по  $t$  і підставляючи  $t = 0$ , отримаємо рівність:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Визначаємо коефіцієнти Фур'є цього ряду:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

або

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Отже, ми довели, що ряд (4.81), де коефіцієнти  $C_n$  і  $D_n$  визначені за формулами (4.82) і (4.83), якщо він допускає двократне почленне диференціювання, представляє функцію  $u(x, t)$ , яка є розв'язком рівняння (4.68) і задовольняє граничні і початкові умови (4.69)-(4.71).

Вирішуючи розглянуту задачу для хвильового рівняння іншим методом, можна довести, що ряд (4.81) є розв'язком і в тому випадку, коли він не допускає почленного диференціювання. При цьому функція  $f(x)$  повинна бути двічі диференційовною, а функція  $\varphi(x)$  - один раз диференційовною.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Т.1,2 – М.: «Наука», 1978.
2. М.І. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 720 с
3. Г.Л. Кулініч, Л.О. Максименко „Вища математика в 2-х книгах”. Київ, „Либідь”, 1994,554 с.
4. Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим В.М. та ін. Вища математика. Спеціальні розділи. Кн. 1, 2. – К.: Либідь, 2003.
5. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Ч.1,2. – К.: Техніка, 2000.
6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977.
7. Гнеденко В. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1965.
8. Фукс Б.А., Шабат Б.В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, «Наука», 1964
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1,2 – М.: «Высшая школа», 1986.
- 10.Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. ,Т.1,2 – М. «Наука», 1986.
- 11.Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. «Наука», 1972.
- 12.Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001.