

Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Флорко Т.О., Серга І.М.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Флорко Т.О., Серга І.М.

Конспект лекцій по курсу

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Одеса – 2012

ББК 22.193

Г31

УДК 519.69075.8)

Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Флорко Т.О., Серга І.М.

Вища математика/ Конспект лекцій. – Одеса, 2012. – 88с.

Викладені питання лінійної алгебри, аналітичної геометрії, теорії границь, диференціального та інтегрального числення функції однієї та багатьох змінних, теорії диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики, а також рівнянь математичної фізики та теорії обчислень.

Для студентів та аспірантів напрямку підготовки «екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування», (спеціалізація – агроекологія) природоохоронного факультету.

Друкується за рішенням Методичної ради Одеського державного екологічного університету (протокол № від).

© Одеський державний екологічний університет, 2012

© Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Флорко Т.О., Серга І.М., 2012

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	6
1.1 Векторна алгебра	6
1.1.1 Поняття вектора та його позначення	6
1.1.2 Дії над векторами.....	8
1.2 Поняття матриці.....	12
1.2.1 Визначники та його властивості	12
1.2.2 Матриці та дії над ними	14
АНАЛІЗ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	17
2.1 Границя функції	17
2.1.1 Функція однієї змінної.....	17
2.1.2 Поняття границі в точці та на нескінченності.....	18
2.1.3 Односторонні границі.....	19
2.1.4 Дві важливі границі.....	20
2.1.5 Арифметичні теореми про границі функції	23
2.1.6 Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Їх властивості	24
2.2 Неперервність функції	26
2.2.1 Неперервність функції в точці та на відрізку	26
2.2.2 Класифікація точок розриву функції	28
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	29
3.1 Похідна та диференціал функції.....	29
3.1.1 Поняття та зміст похідної.....	29
3.1.2 Похідні елементарних функцій та правила диференціювання функцій	30
3.1.3 Похідна оберненої та складної функції	32
3.1.4 Диференціал функції, його геометричний зміст	33
3.1.5 Похідні та диференціали вищих порядків	35
3.2 Застосування диференціального числення.....	36
3.2.1 Основні теореми диференціального числення.....	36
3.2.2 Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя	41
3.2.3 Інтервали монотонності і екстремуми функції	41
3.2.4 Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину	43
3.2.5 Асимптоти графіка функції	44
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	45
4.1 Невизначений інтеграл.....	45
4.1.1 Первісна функції та невизначений інтеграл, їх властивості.....	45

4.1.2	Основні методи інтегрування	47
4.2	Визначений інтеграл.....	49
4.2.1	Визначений інтеграл. Умови існування визначеного інтеграла.....	49
4.2.2	Геометричний зміст та властивості визначеного інтеграла	51
4.2.3	Обчислення визначеного інтеграла	54
4.2.4	Невласні інтеграли	56
	ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	58
5.1	Основні поняття.....	58
5.2	Найпростіші диференціальні рівняння.....	58
5.2.1	ДР з відокремлюваними змінними.....	58
5.2.2	Однорідні ДР першого порядку	59
5.2.3	Лінійні ДР першого порядку	60
5.3	Диференційні рівня II порядку.....	62
5.3.1	Диференційні рівня II порядку, що допускають пониження порядку.....	62
5.3.2	Лінійне однорідне диференційне рівняння (ЛОДР) II-го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	64
5.3.3	Лінійні неоднорідні ДР II-го порядку.....	66
	КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.....	70
6.1	Подвійний і потрійний інтеграли, їх властивості.....	70
6.2	Властивості подвійних інтегралів.....	71
6.3	Потрійний інтеграл.....	72
6.4	Геометричне значення подвійного інтеграла.....	73
6.5	Обчислення подвійного інтеграла в Декартових координатах шляхом зведення його до повторного.....	73
6.6	Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах...	76
	ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА.....	79
7.1	Види випадкових подій дії над ними.....	79
7.2	Елементи комбінаторики.....	81
7.3	Різні означення ймовірності.....	83
7.4	Умовні ймовірності. Теореми додавання та множення ймовірностей	84
7.5	Формула повної ймовірності. Формули Байєса.....	86
	ЛІТЕРАТУРА.....	88

ПЕРЕДМОВА

У сучасних умовах існує значна потреба у фахівцях з екології (агроекології), охорони навколишнього середовища тощо. Підготовка висококваліфікованих фахівців, включає як базовий елемент вивчення фундаментальних математичних дисциплін, зокрема, вищої математики.

Вища математика відноситься до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціального і інтегрального обчислення, теорії диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики, рівнянь математичної фізики та обчислювальної математики тощо, узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності, зокрема, формування навиків у застосуванні основних методів вищої та обчислювальної математики при вирішенні різноманітних задач у галузях екології та агроекології тощо, навиків творчого дослідження і математичного моделювання відповідних задач.

Завдання дисципліни “Вища математика” навчити студентів:

- правильно використовувати вивчені методи при розв’язанні задач;
- правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – основні визначення, положення та теореми математичного аналізу, диференціального і інтегрального обчислення, теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності тощо; вміти – використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, в теорії звичайних диференціальних рівнянь, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до рішення прикладних задач.

Отримані у процесі вивчення вищої математики знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Векторна алгебра

1.1.1 Поняття вектора та його позначення

Величина, для повної характеристики якої достатньо одного числа, називається скаляром. Це температура, маса, густина, робота сили. Два скаляри однакового розміру рівні, якщо рівні їх значення. Багато фізичних понять, таких, як швидкість і прискорення тіла, зовнішня сила, прикладена до тіла, електричні та магнітні поля і багато інших несуть у собі інформацію як про числове значення того чи іншого поняття, так і про напрям (у просторі), що асоціюється з цим поняттям. Для повного визначення таких понять (властивостей) потрібні 3 числа (скаляра). Такі поняття зручно позначати одним символом. Вони мають назву векторів.

Вектор - це спрямований відрізок, напрямок якого збігається з напрямом векторної величини, а довжина у вибраному масштабі дорівнює числовому значенню векторної величини (довжина, модуль, абсолютне значення), що цей вектор зображає. У векторі важливі дві його точки: початок вектора A і кінець вектора B . Початок вектора A має назву точки прикладення вектора. Цей вектор можна позначити $\overrightarrow{AB}$ чи просто $\vec{a}$, а величину вектора - $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Два вектори вважаються **рівними**, якщо вони паралельні, мають один і той же напрям і однакоvu довжину (кут між ними дорівнює нулю).

Роль нуля в алгебрі векторів грає **нульовий вектор**, тобто вектор, довжина якого дорівнює нулю і його напрям не визначений (напрямок можна вибрати довільно). Усі нульові вектори вважаються рівними.

Два вектори називають **колінеарними** ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори називають **компланарними**, якщо вони лежать у одній площині або у паралельних площинах.

Антипаралельні (антиспрямовані) вектори мають одну й ту ж довжину та спрямовані у протилежні сторони (кут між ними дорівнює 180°). Такі вектори рівні за винятком знака.

Важливими поняттями є поняття орта вектора та орта осі. **Орт вектора** $\vec{a}$ - це вектор $\vec{a}^0$, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$. Таким чином, вектор $\vec{a}$ можна записати так $\vec{a} = \vec{a}^0 |\vec{a}|$. Аналогічно визначають орт осі – вектор з довжиною 1, напрям якого співпадає з напрямом осі.

Розглянемо поняття **лінійної залежності та незалежності векторів**. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно залежними** векторами, якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не всі рівні нулю, такі що справедлива рівність $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$. Якщо ця рівність можлива лише при умові, що $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дорівнюють нулю, то вектори є **лінійно незалежними**. Необхідною та достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Необхідною та достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

Векторний базис трьохвимірного простору – це сукупність трьох лінійно незалежних векторів у просторі. Якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис трьохвимірного простору, то будь-який вектор $\vec{d}$ простору представляється у вигляді лінійної комбінації векторів заданого базису: $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$. Числа α, β, γ – координати вектора $\vec{d}$ у даному базисі. Зазвичай у тривимірному просторі вибирають ортонормований базис, що складається з трьох одиничних взаємно ортогональних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, які є ортами вісей OX, OY, OZ прямокутної системи координат, а будь-який вектор $\vec{a}$ представляють в координатній формі:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.1)$$

де a_x, a_y, a_z – прямокутні координати вектора $\vec{a}$.

Координати **радіуса-вектора** $\overrightarrow{AB}$, що з'єднує точку A, що має назву початку координат, і деяку точку простору B, мають назву координат точки B. Якщо точка A має координати (a_x, a_y, a_z) , а точка B – координати (b_x, b_y, b_z) , то вектор $\overrightarrow{AB}$ буде мати координати $(b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$, вектор $\overrightarrow{BA} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$. Тобто координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат кінця і початку вектора.

Важливим є поняття проекції вектора. Нехай задана деяка вісь – пряма з одиничним вектором $\vec{e}$, що лежить на ній та задає додатний напрям на прямій. **Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь** називають число $\text{Пр}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{e}$. Проекціями вектора $\vec{a} (a_x, a_y, a_z)$ на координатні осі OX, OY, OZ є координати a_x, a_y, a_z .

1.1.2 Дії над векторами

У алгебрі векторів визначені операції додавання, віднімання та множення. Поняття ділення на вектор не існує.

Додаванням деяких векторів, наприклад, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 1.1), називається вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, по величині та напрямку рівний замикаючої $\overline{OM}$ просторової ламаної лінії, побудованої на даних векторах.

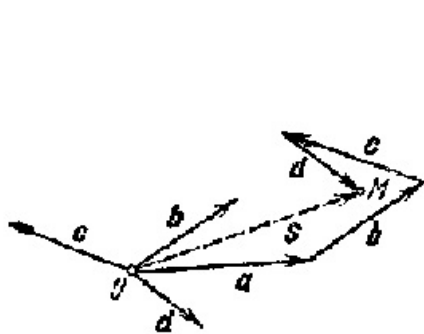


Рис. 1.1

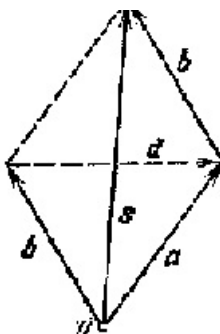


Рис. 1.2

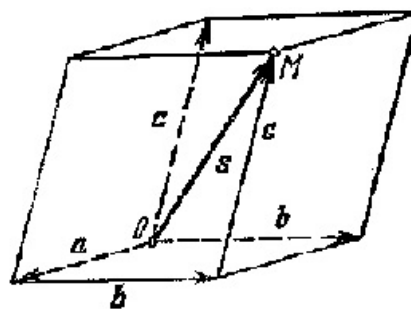


Рис. 1.3

Для випадку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.2) їх сумою $\vec{s}$ є діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах, що виходить із загальної точки прикладання їх (правило паралелограма). Так як в трикутнику довжина одного боку не перевищує суми довжин двох інших сторін, то з рис. 1.2 маємо

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

тобто модуль суми двох векторів не перевищує суми модулів цих векторів.

Для випадку трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 1.3) їх сумою $\vec{s}$ є діагональ $\overline{OM}$ паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (правило паралелепіпеда).

Легко перевірити, що для векторного додавання справедливі наступні властивості:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативність),
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативність),
- 3) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ (присутність нульового елемента),
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ (присутність протилежного елемента).

Під **різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.4) розуміється вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$.

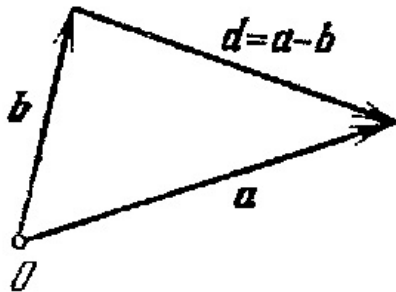


Рис. 1.4

Зазначимо, що в паралелограмі, побудованому на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, їх різницею є відповідно спрямована друга діагональ паралелограма.

Справедливо наступне правило віднімання:
 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Множенням вектора $\vec{a}$ на скаляр k називається вектор $\vec{b} = k\vec{a} = \vec{a}k$, що має довжину $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, напрямок якого:

1) збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $k > 0$; 2) протилежно йому, якщо $k < 0$; 3) довільно, якщо $k = 0$. Ця векторна операція володіє наступними властивостями:

- 1) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (дистрибутивність відносно додавання векторів),
- 2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (дистрибутивність відносно додавання чисел),
- 3) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ (асоціативність),
- 4) $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$, $0\vec{a} = 0$.

Визначимо дії над векторами, що задані своїми координатами. Нехай дані два вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Тоді:

а) рівність векторів означає рівність відповідних координат:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z;$$

б) колінеарність векторів означає пропорційність відповідних координат:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z;$$

в) лінійні операції над векторами означають лінійні операції над координатами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z);$$

г) довжина вектора обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

д) напрям вектора $\vec{a}$ може бути заданий за допомогою напрямних косинусів (косинусів кутів між вектором та додатними напрямними вісей координат):

$$\cos \alpha = a_x / |\vec{a}|, \quad \cos \beta = a_y / |\vec{a}|, \quad \cos \gamma = a_z / |\vec{a}|.$$

Напрямні косинуси задовольняють співвідношенню:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

е) координати орта $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ обчислюються за формулою:

$$\vec{a}^0 = (a_x / |\vec{a}|, a_y / |\vec{a}|, a_z / |\vec{a}|) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

При множенні векторів можна одержати як скаляр, так і вектор. Тому у алгебрі векторів існують два різних добутки векторів: скалярний добуток ($\vec{a} \cdot \vec{b}$ чи $(\vec{a}, \vec{b})$), результатом якого є скаляр (число), і векторний добуток ($(\vec{a} \times \vec{b})$ чи $[\vec{a}, \vec{b}]$), результатом якого є новий вектор.

Під **скалярним добутком** двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміється число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто визначається як $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$, де θ - це кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що не перебільшує π .

Якщо хоча б один з векторів нульовий, то скалярний добуток дорівнює нулю. З парності косинуса випливає комутативність скалярного добутку: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то або $|\vec{a}| = 0$, або $|\vec{b}| = 0$, або $\theta = \pi/2$. В останньому випадку вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні). Це рівняння є умовою ортогональності двох векторів.

Скалярний добуток векторів у координатній формі дорівнює сумі попарних добутків їх проекцій:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad (1.2)$$

Знаючи модулі векторів та їх скалярний добуток, можна визначити кут між векторами: $\cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b} / |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Основні властивості скалярного добутку векторів:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (комутативність),
- 2) $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$ (асоціативність відносно множення на число),
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ (дистрибутивність відносно додавання векторів),

Скалярний добуток може бути як додатним числом (якщо кут між векторами гострий), так і від'ємним (якщо кут між векторами тупий).

Векторним добутком ненульових та неколінеарних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, що позначається символами $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$ та відповідає трьом умовам: 1) модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на синус кута між ними: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$; 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) впорядкована трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - права.

З непарності синуса впливає антикомутація співмножників у векторному добутку: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Векторний добуток вважають рівним нулю, якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ дорівнює нулю, або якщо вони колінеарні.

Векторний добуток векторів у координатній формі обчислюється за допомогою визначника 3-го порядку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x). \quad (1.3)$$

За допомогою векторного добутку можна знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Згадайте з шкільної геометрії, що площа паралелограма дорівнює добутку довжин сусідніх сторін на синус кута між ними. Тобто площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають число, що позначається символом $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ і дорівнює скалярному добутку векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ і вектора $\vec{c}$: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}$.

Мішаний добуток має наступні основні властивості: 1) мішаний добуток не змінюється при циклічному перестановці його співмножників, тобто $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$; 2) при перестановці двох сусідніх множників мішаний добуток змінює знак на протилежний, тобто $\vec{a}(\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$; 3) необхідною та достатньою умовою компланарності

трьох ненульових векторів є рівність нулю їх мішаного добутку: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є компланарні, якщо $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = 0$.

Обчислення мішаного добутку у координатній формі робиться за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - c_y b_z) - a_y(b_x c_z - c_x b_z) + a_z(b_x c_y - c_x b_y). \quad (1.4)$$

У мішаному добутку вектор $(\vec{a} \times \vec{b})$ множиться скалярно на вектор $\vec{c}$. У підсумку виходить скаляр $|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi$, де $|\vec{a} \times \vec{b}|$ є площа основи паралелепіпеда, що побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як його твірних, а $|\vec{c}| \cos \varphi$ є висота паралелепіпеда. Таким чином, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком плюс, якщо ці вектори утворюють праву трійку, і зі знаком мінус, якщо вони утворюють ліву трійку.

1.2 Поняття матриці

1.2.1 Визначники та його властивості

Розрізняють визначники другого, третього і високих порядків. Визначник другого порядку :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Тут ліворуч – позначення визначника другого порядку, праворуч його значення. Велечини a_{ij} - елементи визначника. Рядки та стовпці визначника називаються рядами. Перший індекс позначає номер рядка, а другий - номер стовпчика, в яких розташований елемент.

Визначник третього порядку :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\
- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Визначник n -го порядку позначають так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Він має n^2 елементів і $n!$ членів. Тому обчислення визначників більш ніж третього порядку зводиться до обчислення визначника третього або другого порядку з допомогою наступних **властивостей визначників**:

- визначник не змінюється, якщо до елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на одне і теж число;
- якщо у визначнику n -го порядку всі елементи, крім одного, якого-небудь ряду дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку цього відмінного від нуля елемента і його алгебраїчного доповнення;
- визначник не змінюється при транспонуванні матриці;
- якщо елементи якого-небудь рядка є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких елементи відповідного рядка дорівнюють першим доданкам, у другому-другим;
- визначник, рядок якого цілком складається з нулів, дорівнює нулю;
- визначник з двома однаковими рядками дорівнює нулю;
- визначник з двома пропорційними рядками дорівнює нулю;
- визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядку на їх алгебраїчні доповнення ;
- сума добутків елементів будь-якого рядку на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядку дорівнює нулю.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елементу визначника n -го порядку називається добуток $(-1)^{i+j}$ і визначника $(n-1)$ -го порядку, одержуваного з вихідного визначника викреслюванням i -й строки та j -го стовпчика.

1.2.2 Матриці та дії над ними

Матрицею називається прямокутна таблиця, що заповнена деякими математичними об'єктами, наприклад, числами, векторами, функціями, похідними, інтегралами, операторами і т.і. Будемо розглядати матриці з елементами з поля дійсних чисел. Якщо матриця має m рядків та n стовпців, то говорять, що матриця має розмір $m \times n$. Таким чином, матриця (розміру $m \times n$) записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Матриці, що мають одне й те ж число n рядків та стовпців, називають **квадратними**. Квадратні матриці, що мають всі елементи рівні нулю, крім елементів головної діагоналі, тобто елементів у позиціях $(1,1)$, $(2,2)$, ..., (n,n) , називають **діагональними**. Діагональна матриця, елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною** та позначається E_n . Матриця, що складається лише з нулів, називається **нульовою**. Матрицю, що складається з одного рядка, часто називають **вектором**, а з одного стовпця – **вектор-стовпцем**. Дві матриці вважають **рівними**, якщо вони мають однаковий розмір і усі їх відповідні елементи рівні.

Матрицю $A = \{a_{ij}\}$ можна **транспонувати**, тобто замінити рядки стовпцями, а стовпці – відповідними рядками, тоді отримаємо так звану **транспоновану** матрицю $A^T = \{a_{ji}\}$.

Дві матриці $A = \{a_{ij}\}$ та $B = \{b_{ij}\}$ одного і того ж розміру $m \times n$ можна додавати, їх **сумою** буде матриця того ж розміру $C = \{c_{ij}\}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, тобто щоб отримати суму двох матриць, достатньо додати відповідні елементи цих матриць, що знаходяться на однакових позиціях.

Розглянемо матрицю $A = \{a_{ij}\}$ розміром $m \times n$ та матрицю $B = \{b_{ij}\}$ розміром $n \times k$. Кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Для матриць, що мають таку властивість і тільки для таких матриць, можна ввести дію **множення матриці на матрицю**, у результаті чого дістанемо матрицю $C = \{c_{ij}\}$ розміром $m \times k$, де

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \text{ Наприклад, множення матриць другого порядку:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Також матрицю можна **помножити на число**, для цього необхідно помножити на це число кожний елемент матриці.

Наведемо **властивості дій над матрицями**:

- 1) $(A+B)+C=A+(B+C)$;
- 2) $A+B=B+A$;
- 3) $A+0=A$, де 0- матриця, що складається з нулів;
- 4) $A+(-A)=0$, де $-A$ - протилежна матриця;
- 5) $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$. та $c(A_1+A_2)=cA_1+cA_2$, де c_1, c_2, c – числа;
- 6) $1 \cdot A = A$;
- 7) $(AB)C=A(BC)$;
- 8) $(cA)B=A(cB)=cAB$;
- 9) $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$;
- 10) $AB \neq BA$; 11) $AE_n = A$.

Важливим поняттям матричного числення є поняття оберненої матриці. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A , якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. Рівність $AA^{-1} = A^{-1}A$ показує, що кількість рядків та стовпців матриці A повинно бути однаковим. Таким чином, обернена матриця має сенс тільки для квадратних матриць. Не кожна матриця має обернену, але якщо вона існує, то тільки одна. Обернена матриця для квадратної матриці n -го порядку (1.5) може бути знайдена за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

де $|A|$ - визначник матриці A , а $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - алгебраїчні доповнення елементів визначника $|A|$. Потрібно запам'ятати, що алгебраїчні доповнення до зворотної матриці записують не по рядках, а по стовпцях.

Міномом M_{ij} для матриці називається визначник матриці, що складається з елементів, що знаходяться на перетині деяких обраних i рядків та j стовпців.

Також для матриці існує таке поняття, як ранг. **Рангом** матриці A називається найбільше таке число r , що в матриці A міститься невиражена матриця B порядку r . Ранг матриці дорівнює найбільшому порядку мінорів, що відрізняються від нуля.

Приклад. Знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів

$$a_{12}, a_{31} \text{ матриці } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 17, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -17;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 0 = 2, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 2.$$

РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1 Границя функції

2.1.1 Функція однієї змінної

Нехай дано дві змінні величини з областями зміни x і y з областями зміни X і Y . Припустимо, що змінної x може бути задано довільне значення з області X без будь-яких обмежень. Тоді змінна y є функцією змінної x , якщо по деякому правилу або закону кожному значенню x з X відповідає одне певне значення y з Y .

В цьому випадку змінна x є незалежна змінна або аргумент функції, а змінна y - залежна змінна або функція. Область зміни аргументу x - це область визначення функції, а область зміни змінної y - область зміни функції. Функціональну залежність між змінної x і y позначають так: $y = f(x)$ або $y = g(x)$ і т.і. Як випливає з визначення функції, задати функцію - це означає, задати область її визначення, область її зміни і закон, за яким з даного значення аргументу знаходять відповідне значення функції. Є засоби задання функції - аналітичний і графічний.

Аналітичний - найбільш зручний і розповсюджений спосіб завдання функції. При цьому способі функція задається формулою, в якій зазначено, які дії і в якій послідовності потрібно зробити над значеннями аргументу, щоб отримати відповідні значення функції. Наприклад, $y = \sin x^2$, $y = 2x^3$, $y = e^x$, $y = \ln(x + 5)$. Під областю визначення функції мається на увазі безліч значень аргументу, при яких всі дії зазначені у формулі здійсненні. Наприклад, функція $y = \sqrt{1 - x^2}$ визначена тільки на сегменті $[-1, 1]$, так як квадратний корінь не існує з від'ємних чисел в області дійсних чисел.

При графічному засобі задання функція задається графіком в деякій системі координат. Графік функції в прямокутній системі координат $ХОУ$ - це безліч точок на площині $ХОУ$, абсцисами яких є значення аргументу, а ординатами - відповідні їм значення функції. Звичайно графік функції являє собою криву лінію. Будь-яка лінія на координатній площині $ХОУ$ зображує деяку функцію - а саме ту, значення якої дорівнює ординатам точок лінії при значеннях аргументу, які дорівнюють абсцисам цих точок.

2.1.2 Поняття границі в точці та на нескінченності

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X і точка x є граничною точкою множини X . Виберемо із X послідовність точок, відмінних від x_0 : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, збіжну до x_0 . Значення функції в точках цієї послідовності також утворюють числову послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$.

Означення границі функції за Гейне. Число A називається границею функції $f(x)$ у точці x_0 (або при $x \rightarrow x_0$), якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності значень аргументу x , відмінних від x_0 , відповідна послідовність значень функції збігається до числа A .

Символічно це записують так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 . Число A називається границею функції $f(x)$ у точці x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх x , що задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

Означення границі функції за Гейне і за Коші еквівалентні.

Дійсно, нехай $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ згідно з Гейне. Покажемо, що в цьому випадку для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх x , що задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, тобто що $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ згідно з означенням Коші.

Припустимо протилежне. Нехай існує ε_0 таке, що для довільного $\delta > 0$ існує точка $x \neq x_0$, для якої з умови $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$. Розглянемо послідовність $\{\delta_n\}$, де $\delta_n = \frac{1}{n}$. Виберемо точки x_n такі, що

$$|x_n - x_0| < \delta_n, \quad x_n \neq x_0 \quad (2.1)$$

і

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0. \quad (2.2)$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, але за нерівністю (2.2) $A \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, що суперечить умові, тобто що $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ згідно з Гейне.

Нехай тепер $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ згідно з Коші. Покажемо, що $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

і згідно з Гейне.

Отже, нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що із нерівності $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Виберемо довільну послідовність точок $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, збіжну до x_0 ($x_n \neq x_0$). Тоді для значення $\delta > 0$, відповідного ε , знайдеться такий номер N , що для всіх $n > N$ виконуватимуться нерівності $|x_n - x_0| < \delta$ і разом із тим $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Оскільки вибір $\varepsilon > 0$ був довільним, то це означає, що для довільної послідовності $\{x_n\}$ із умови $x_n \rightarrow x_0$ випливає умова $f(x_n) \rightarrow A$, тобто що $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ за Гейне.

Еквівалентність означень границі функції за Гейне і за Коші дає можливість використовувати будь-яке із них залежно від того, яке є більш зручним для розв'язування тієї чи іншої задачі.

Границя функції на нескінченності. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ значень аргументу відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ значень функції збігається до числа A . Символічно це записують так: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$, елементи x_n якої додатні (від'ємні), відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ значень функції збігається до числа A . Символічно це записують так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$).

2.1.3 Односторонні границі

Число A називається **границею функції $f(x)$ у точці x_0 справа**, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, елементи якої більші x_0 , відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A .

Число A називається **границею функції $f(x)$ у точці x_0 зліва**, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, елементи якої менші x_0 , відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A .

Число A називається **границею функції $f(x)$ у точці x_0 справа**,

якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умові $x_0 < x < x_0 + \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A називається **границею функції $f(x)$ у точці x_0 зліва**, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умові $x_0 - \delta < x < x_0$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символічно односторонні границі записують так: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ та $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \right)$.

Теорема. Функція $f(x)$ має в точці x_0 границю тоді й тільки тоді, коли в цій точці існує як права, так і ліва границя та ці границі рівні між собою. У цьому випадку границя функції дорівнює одностороннім границям.

Доведення. Нехай у точці x_0 існують односторонні границі функції $f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$. Тоді, згідно з означенням односторонніх границь, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, такі, що для всіх x , які задовольняють умову $(x_0 - \delta_1 < x < x_0)$, і для всіх x , котрі задовольняють умові $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Виберемо $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тоді для всіх x , що задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, виконуватиметься нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. З іншого боку, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то в точці x_0 існують односторонні границі $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

2.1.4 Дві важливі границі

Перша визначна границя. Покажемо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Розглянемо у колі радіуса r гострий кут BOC , хорду AC і дотичну до кола в точці C (рис. 2.1). Для площ трикутників AOC , BOC та колового сектора AOC виконуються нерівності

$$S_{\triangle AOC} < S_{\text{сект.}AOC} < S_{\triangle BOC}.$$

Отже, $\frac{1}{2}r^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}r^2 \cdot x < \frac{1}{2}r^2 \cdot \operatorname{tg} x$. Звідки $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Розділивши ці нерівності на $\sin x$ ($\sin x \neq 0$, оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$),

одержимо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Із останніх нерівностей випливає

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Помноживши всі частини на (-1) та

додавши 1, матимемо

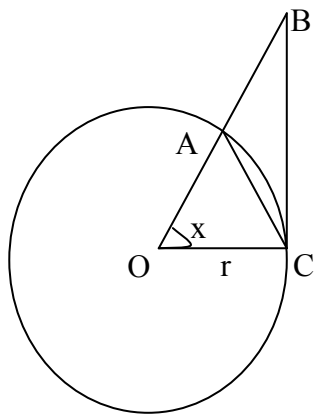


Рис.2.1

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Оскільки $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \left(\frac{x^2}{4} \right) = \frac{x^2}{2}$,

$$\text{то } 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{2} x^2.$$

Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Нерівність

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon \quad \text{або} \quad \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$$

справджується, як тільки $\frac{1}{2} x^2 < \varepsilon$, тобто $0 < x < \sqrt{2\varepsilon}$. Таким чином, для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють умові $0 < x < \delta$, виконується нерівність $\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$.

Це означає, що 1 є правою границею функції $\frac{\sin x}{x}$, тобто $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Оскільки функція $\frac{\sin x}{x}$ парна, то і $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Приклад. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 8 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 8 \cdot 1 \cdot 1 = 8.$$

Теорема: Змінна величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$ має границю, яка укладена між 2 та 3.

Другою визначною границею називається границя, яка має вигляд:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Доведемо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Нехай $x > 1$. Покладемо $[x] = n$. Тоді $x = n + \alpha$, де $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 1$.

Оскільки $n \leq x < n + 1$, то $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. Отже,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (2.3)$$

Якщо $x \rightarrow \infty$, то і $n \rightarrow \infty$. При цьому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Враховуючи співвідношення (2.3), маємо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Нехай тепер $x < -1$ і $x = -y$. Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Враховуючи обидва випадки, одержуємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Приклади.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^3 = e^3;$$

2)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{(x-1)+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^4 = e^4.\end{aligned}$$

2.1.5 Арифметичні теореми про границі функцій

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ має границю в точці x_0 , то ця границя єдина.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають у точці x_0 границі, то функції $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$) у точці x_0 також мають границі, причому:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/\varphi(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).\end{aligned}$$

Теорема 3. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, визначені в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , мають у точці x_0 границі, й такі, що в околі точки x_0 $f(x) \leq \varphi(x)$. Тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.

Теорема 4 . Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ визначені в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , функції $f(x)$, $g(x)$ мають у точці x_0 границю, рівну A , тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$. Нехай, крім того, виконується нерівність $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$. Тоді функція $\varphi(x)$ у точці x_0 має границю, рівну A , тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$.

Зауваження. Наведені вище теореми про границі мають місце і для випадків $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

2.1.6 Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Їх властивості

Нескінченно малі функції. Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою в точці $x = x_0$ (або при $x \rightarrow x_0$), якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Аналогічно означаються нескінченно малі функції при $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +x_0, x \rightarrow -x_0$.

Виходячи з означень границі функції за Гейне і за Коші, можна навести наступні рівносильні означення нескінченно малої функції.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою в точці x_0** , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$ значень аргументу x , відмінних від x_0 , відповідна послідовність $\{\alpha(x_n)\}$ є нескінченно малою.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою в точці x_0** , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$ виконується для всіх x , які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$.

Теорема . Число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція в точці x_0 .

Нескінченно малі функції мають такі властивості:

1) алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих у точці x_0 функцій є нескінченно малою в точці x_0 функцією;

2) добуток скінченного числа нескінченно малих у точці x_0 функцій, а також добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є нескінченно малою в точці x_0 функцією.

Ці властивості мають місце також для нескінченно малих функцій при $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +x_0, x \rightarrow -x_0$.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0 функції. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорять, що $\alpha(x)$ в околі точки x_0 є нескінченно малою вищого порядку порівняно з $\beta(x)$, і пишуть $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, де C - const, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$

називаються нескінченно малими одного порядку в околі точки x_0 .

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0$, де C - const, k - додатне число, то функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою порядку k відносно нескінченно малої функції $\beta(x)$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq C$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються непорівнянними в околі точки x_0 .

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними нескінченно малими в околі точки x_0 . У цьому випадку пишуть $\alpha(x) \approx \beta(x)$.

Теорема. Якщо $\alpha(x) \approx \alpha_1(x)$ та $\beta(x) \approx \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$ й існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причому:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Нескінченно великі функції. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x)| > A$. Означення нескінченно великої в точці x_0 функції можна дати мовою послідовностей.

Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою в точці x_0** , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ значень функції є нескінченно великою. Символічно це записують так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ і говорять, що функція $f(x)$ у точці x_0 має нескінченну границю.

Якщо при $x_n \rightarrow x_0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$), то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

Аналогічно означенням границі на нескінченності та скінченних односторонніх границь визначаються нескінченні границі. При цьому використовуються відповідні позначення, наприклад:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty.$$

Теорема. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці x_0 функція, причому в околі точки x_0 $\alpha(x) \neq 0$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ у точці x_0 – нескінченно велика. І навпаки, якщо функція $f(x)$ – нескінченно велика в точці x_0 , то функція $\frac{1}{f(x)}$ у точці x_0 – нескінченно мала.

2.2 Неперервність функції

2.2.1 Неперервність функції в точці та на відрізку

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Наведемо означення неперервності функції, які ґрунтуються на означеннях границі функції за Гейне і за Коші.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ значень збігається до $f(x_0)$.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 справа (зліва), якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$.

Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 , якщо вона неперервна в цій точці як справа, так і зліва.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо

нескінченно малому приростові аргумента в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

Розглянуте поняття неперервності функції є локальною (місцевою) властивістю. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу (a, b) , то говорять, що вона неперервна на інтервалі (a, b) . Якщо при цьому в точці a функція неперервна справа, а в точці b – неперервна зліва, то говорять, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$.

Теорема. Якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0 , то функції $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ($\varphi(x_0) \neq 0$) у точці x_0 також неперервні.

Розглянемо основні властивості неперервних функцій.

Перша теорема Больцано-Коші (теорема про обернення функції в нуль). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях значення функції мають різні знаки. Тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = 0$.

Друга теорема Больцано-Коші (теорема про проміжне значення). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення $f(a) = A$, $f(b) = B$, де $A \neq B$. Тоді для будь-якого числа $C \in (A, B)$ існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = C$.

Перша теорема Вейєрштраса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Друга теорема Вейєрштраса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх точних меж, тобто існують такі точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, що $f(x_1) = \sup_{[a, b]} f(x)$, $f(x_2) = \inf_{[a, b]} f(x)$.

2.2.2 Класифікація точок розриву функції

Точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$, якщо функція $f(x)$ у точці x_0 не є неперервною.

Точки розриву класифікують наступним чином.

Розриви першого роду. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну ліву й скінченну праву границю і вони рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, але відмінні від значення функції $f(x)$ в точці x_0 або значення $f(x_0)$ не існує, то точка x_0 називається точкою усувного розриву функції $f(x)$.

Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченну границю справа і скінченну границю зліва й $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$ зі скінченним стрибком.

Розриви другого роду. Точка x_0 називається точкою розриву другого роду функції $f(x)$, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь або хоча б одна з односторонніх границь є нескінченною.

Кусково-неперервні функції. Функція $f(x)$ називається кусково-неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках $[a, b]$, за винятком, можливо, скінченного числа точок, у яких має розрив 1-го роду і, крім того, має односторонні границі в точках a та b .

РОЗДІЛ 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Похідна та диференціал функції

3.1.1 Поняття та зміст похідної

Нехай в деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$. Виберемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо x_0 приросту Δx такого, що $x + \Delta x \in X$.

Зазначимо, що Δx може бути як додатним, так і від'ємним. При цьому функція одержить приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Нехай в точці x_0 існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x_0 позначають так: $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$. Отже, за означенням:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Механічний зміст похідної впливає із задачі про миттєву швидкість, а саме: похідна від пройденого шляху $s(t)$ по часу t дорівнює миттєвій швидкості $v(t)$ в момент часу t , тобто $v(t) = s'(t)$.

Геометричний зміст похідної розкривається у задачі про дотичну: похідна $f'(x_0)$, якщо вона існує, дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з координатами $x_0, y_0 = f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається диференційованою в точці x_0 , якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (3.2)$$

де A - деяке число, не залежне від Δx , а $\alpha(\Delta x)$ - нескінченно мала функція при $\Delta x \rightarrow 0$, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Зв'язок між диференційованістю функції $y = f(x)$ в точці x_0 і існуванням похідної даної функції в цій точці установлюється наступною теоремою.

Теорема. Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційована в точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінчену похідну.

Зв'язок між диференційованістю і неперервністю функції розкривається в наступній теоремі.

Теорема . Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 , то вона в цій точці неперервна.

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ в кожній точці деякого проміжку має скінчену похідну, то на цьому проміжку вона неперервна.

Зауваження. Неперервність функції в даній точці не є достатньою умовою її диференційованості. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але в цій точці вона не диференційована.

3.1.2 Похідні елементарних функцій та правила диференціювання функцій

Похідна сталої функції. Похідна функції $y = C$, де $C - const$ при $x \in X$ виражається формулою $y' = 0$.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Похідна показникової функції $y = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$), $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Похідна тригонометричної функції $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

Аналогічно доводяться похідні інших функцій. Далі, наведемо таблицю основних похідних елементарних функцій (Табл. 3.1).

Таблиця 3.1 - Похідні функцій

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\ln x$	$1/x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$1/1+x^2$
e^x	e^x	$\operatorname{arcctg} x$	$-1/1+x^2$

Далі розглянемо правила диференціювання функцій. Нехай функції $U = U(x)$, $V = V(x)$ та $W = W(x)$ визначені і такі, що є диференційованими на деякому загальному інтервалі.

Похідна суми. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій, що диференціюються, дорівнює такій же алгебраїчній сумі похідних цих функцій, тобто:

$$(U + V - W)' = U' + V' - W'.$$

Похідна добутку. Похідна добутку двох функцій, що диференціюються, дорівнює добутку похідної першого співмножника на другий співмножник плюс добуток першого співмножника на похідну другого, тобто

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'.$$

Наслідок. Постійник множник можна виносити за знак похідної, тобто

$$(C \cdot U)' = C \cdot (U)'.$$

Похідна ділення. Якщо чисельник і знаменник дробі – функції, що диференціюються, і знаменник не звертається в нуль, то похідна дробі дорівнює також дробі, чисельник якої є різниця добутків знаменника дробі на похідну чисельника і чисельника дробі на похідну знаменника, а знаменник є квадрат колишнього знаменника. Тобто

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$$

Наслідки. Якщо C - постійна, тоді $\left(\frac{U}{C}\right)' = \frac{U'}{C}$, $\left(\frac{C}{U}\right)' = -\frac{C}{U^2}$.

3.1.3 Похідна оберненої та складної функції

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена до неї функція $x = \varphi(y)$ у точці $y_0 = f(x_0)$ має похідну і $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доведення. Надамо значенню $y = y_0$ деякий приріст $\Delta y \neq 0$. Тоді функція $x = \varphi(y)$ одержить відповідний приріст Δx . Оскільки $\Delta y \neq 0$, то за однозначністю функції $y = f(x)$, $\Delta x \neq 0$. Отже, $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}$.

Якщо $\Delta y \rightarrow 0$, то за неперервністю функції $y = f(x)$ $\Delta x \rightarrow 0$. Звідси маємо

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Приклад. Розглянемо функцію $y = \arcsin x, x \in (-1; 1)$. За означенням функції $x = \sin y$.

Згідно теореми про похідну оберненої функції:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Розглянемо деяку складну функцію $y = f[\varphi(x)]$. Якщо у ланцюзі функціональних залежностей $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$ аргумент x є останнім, то ми будемо називати його незалежною змінною. Будемо припускати, що функція $y = f(U)$ визначена і диференціюєма в інтервалі (A, B) , функція $U = \varphi(x)$ визначена і диференціюєма в інтервалі (a, b) . Тоді функція $y = f[\varphi(x)]$ свідомо буде визначена і безперервна в інтервалі (a, b) .

Теорема. Якщо $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$ - функції, що диференціюються від своїх аргументів, тоді похідна складної функції $y = f[\varphi(x)]$ існує і дорівнює похідної даної функції y по проміжному аргументу U , помноженої на похідну самого проміжного аргументу U по незалежній змінній x , тобто $y'_x = y'_U \cdot U'_x$.

Наприклад, похідна функції $y = (\sin 2x)^2$ буде $y' = 2(\sin 2x) \cdot \cos 2x \cdot 2$.

3.1.4 Диференціал функції, його геометричний зміст

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 . Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

де $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Отже, доданок $A\Delta x$ є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від Δx .

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від Δx .

Диференціал функції позначається так: $dy = A\Delta x$.

Враховуючи, що $A = f'(x_0)$, маємо $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Диференціалом незалежної змінної x називається її приріст: $dx = \Delta x$.

Отже, $dy = f'(x_0) \cdot dx$.

Із останньої формули випливає, що похідну $f'(x_0)$ можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \quad (3.3)$$

Диференціал функції має наступний **геометричний зміст**. Нехай точка M (рис. 3.1) на графіку функції $y = f(x)$ має координати (x_0, y_0) , де $y_0 = f(x_0)$. Пряма MP - дотична до графіка функції в точці M . Тоді приріст Δy в точці x_0 , який відповідає приросту Δx аргументу, рівний величині відрізка NQ .

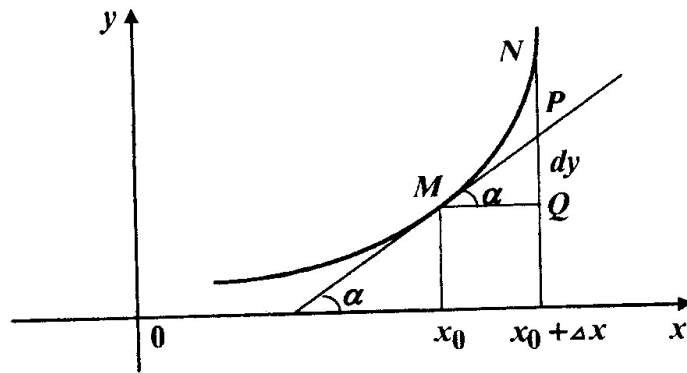


Рис. 3.1 – Геометричний зміст диференціала

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{MQ}$ і $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, то, враховуючи, що $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, маємо: диференціал dy функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 , тобто дорівнює величині відрізка PQ .

Оскільки диференціал dy функції $y = f(x)$ є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності, тобто $dy = \Delta y$.

Якщо функції $u = u(x), v = v(x)$ диференційовані, то мають місце наступні формули:

$$d(Cu) = C \cdot du, \text{ де } C - \text{const};$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(u \cdot v) = u dv + v du;$$

$$d(u/v) = (u dv - v du) / v^2.$$

Нехай тепер маємо складну функцію $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, де $f(u), \varphi(x)$ диференційовані функції в точках x_0 і $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді $dy = (f(\varphi(x)))'_x dx$.

Так як $(f(\varphi(x)))'_x = f'_u(u_0) \cdot u'_x$, то $dy = f'_u(u_0) \cdot u'_x dx$.

Оскільки $u'_x dx = du$, то маємо $dy = f'_u(u_0) \cdot du$.

Таким чином, якщо функція складна, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають інваріантністю форми диференціалу.

3.1.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$ сама є деякою функцією аргументу x . Отже, можна ставити питання про існування похідної від функції $f'(x)$. Цю похідну називають похідною другого порядку, або другою похідною. Її позначають y'' або $f''(x)$. Отже, $y'' = (y')'$.

Похідна першого порядку від похідної другого порядку називається третьою похідною, або похідною третього порядку і т. д.

Якщо визначена похідна $(n-1)$ -го порядку функції $y = f(x)$, то похідною n -го порядку називається перша похідна похідної $(n-1)$ -го порядку, тобто $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Похідні, починаючи з похідної другого порядку, називаються похідними вищих порядків.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в кожній точці x деякого проміжку X . Її диференціал першого порядку $dy = f'(x)dx$ є функцією двох змінних: аргументу x і диференціала dx . Нехай $f'(x)$ також диференційована в кожній точці x деякого проміжку X . Будемо розглядати у виразі $dy = f'(x)dx$ диференціал dx як постійний множник. Тоді

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx dx = f''(x)(dx)^2.$$

Диференціал $d(dy)$ називається диференціалом другого порядку і позначається d^2y . Отже, $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Диференціал $d(d^{n-1}y)$ від диференціала $d^{n-1}y$, взятий при постійному dx називається диференціалом n -го порядку функції $y = f(x)$ і позначається $d^n y$.

Методом математичної індукції можна встановити, що
 $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Із останньої формули випливає, що $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{(dx)^n}$, або

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

3.2. Застосування диференціального числення

3.2.1 Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і в деякій точці $x_0 \in (a,b)$ має найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона рівна нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай для визначеності функція $f(x)$ в точці x_0 приймає найбільше значення, тобто для всіх $f(x) \leq f(x_0)$ для всіх $x \in (a,b)$.

За означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

причому ця границя не залежить від того, як x буде прямувати до x_0 . Якщо $x \rightarrow x_0$ і $x > x_0$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, а тому

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Якщо $x \rightarrow x_0$ і $x < x_0$, то $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Отже,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Звідси випливає, що $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно розглядається випадок, коли в точці $x_0 \in (a,b)$ функція $f(x)$ досягає найменшого значення.

Обернення в нуль похідної в точці x_0 , означає, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсциссою x_0 паралельна осі Ox (рис. 3.2).

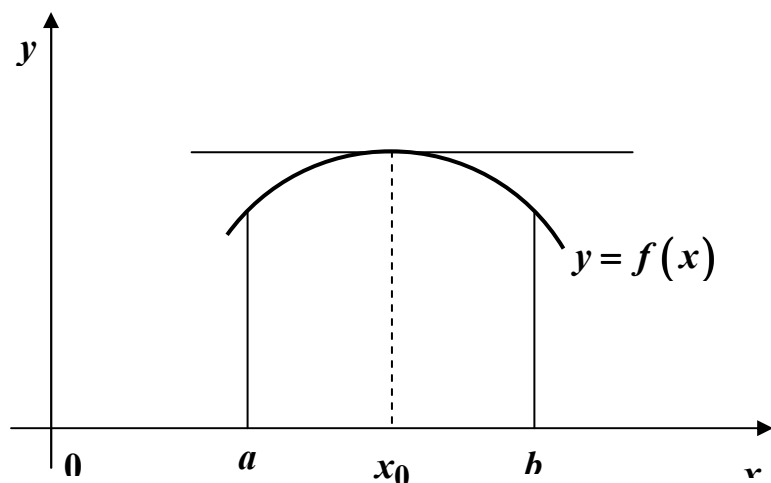


Рис. 3.2 – Дотична в точці x_0

Зауваження. Теорема Ферма справедлива, коли $x_0 \in (a, b)$, і неправильна, коли замість інтервалу (a, b) розглядати відрізок $[a, b]$. Наприклад, функція $y = x$ на відрізку $[0, 1]$ приймає найменше значення в точці $x = 0$, а найбільше в точці $x = 1$. Проте в жодній із цих точок похідна в нуль не обертається.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і вона:

- 1) неперервна в кожній точці відрізка $[a, b]$.
- 2) диференційована на інтервалі (a, b) .
- 3) на кінцях відрізка $[a, b]$ приймає рівні значення $f(a) = f(b)$,

то існує точка $C \in (a, b)$ така, що $f'(C) = 0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то за другою теоремою Вейерштрасса існують точки $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$, в яких функція приймає найменше m і найбільше M значення, тобто $f(x_1) = m$; $f(x_2) = M$ і $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Якщо $m = M$, то функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ приймає постійне значення, оскільки $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Тому $f'(x) = 0$ в будь-якій точці інтервалу (a, b) .

Якщо $m < M$, то принаймні одне із значень m або M функція приймає у деякій точці $C \in (a, b)$, тобто на кінцях відрізка $[a, b]$ (оскільки $f(a) = f(b)$).

Так як функція $f(x)$ диференційована в точці $C \in (a, b)$, то за теоремою Ферма $f'(C) = 0$.

Із теореми Ролля випливає, що для функції $f(x)$ неперервної на відрізку $[a, b]$, диференційованої на інтервалі (a, b) і такої, що $f(a) = f(b)$, існує точка $C \in (a, b)$ така, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(C, f(C))$ паралельна осі Ox (рис. 3.3).

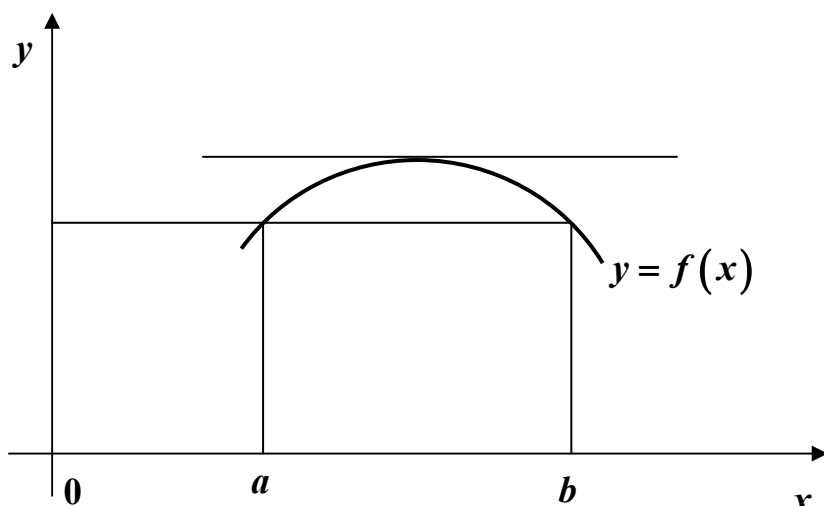


Рис. 3.3 – Функція, яка визначена на відрізку $[a, b]$

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і вона:

- 1) неперервна в кожній точці відрізка $[a, b]$,
- 2) диференційована на інтервалі (a, b) , то існує точка $C \in (a, b)$ така, що

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Ця функція визначена на відрізку $[a, b]$ і задовольняє всім умовам теореми Ролля. Дійсно,

1) оскільки $f(x)$ і $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ неперервні функції на відрізку $[a, b]$, то і функція $F(x)$ також неперервна на $[a, b]$.

2) функція $F(x)$ диференційована на інтервалі (a, b) :

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3) на кінцях відрізка $[a, b]$ функція $F(x)$ має рівні значення

$$F(a) = F(b) = 0.$$

За теоремою Ролля існує точка $C \in (a, b)$ така, що $F'(C) = 0$, тобто

$$f'(C) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Звідси маємо

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ задовольняє умовам теореми Лагранжа, то із останньої формули одержуємо

$$f(b) - f(a) = f'(C) \cdot (b - a) \quad a < c < b.$$

Ця формула називається формулою скінчених приростів або формулою Лагранжа. Якщо в цій формулі покласти $a = x$, $b = x + \Delta x$, то одержимо

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x, \text{ де } 0 < \theta < 1.$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа полягає в наступному. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Лагранжа, то існує точка $C \in (a, b)$ така, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(C, f(C))$ паралельна хорді, проведеній через точки $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Наслідки з теореми Лагранжа.

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, має похідну $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, то на відрізку $[a, b]$ $f(x)$ стала.

Враховуючи, що похідна від сталої функції дорівнює нулю, що було встановлено раніше, і сформульований щойно наслідок, можна сформулювати критерій сталості диференційованої на заданому проміжку функції.

Для того, щоб функція $f(x)$, диференційована на проміжку (a,b) , була сталою, необхідно і достатньо, щоб її похідна $f'(x)$ була рівною нулю в усіх точках цього проміжку.

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на проміжку (a,b) і при будь-якому $x \in (a,b)$ $f'(x) = \varphi'(x)$, то функція $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ є сталою, тобто $F(x) = C$, де $C - const$.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$:

- 1) неперервні на відрізку $[a,b]$,
- 2) диференційовані на інтервалі (a,b) , і $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$,

то існує точка $C \in (a,b)$ така, що $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}$.

Доведення. Побудуємо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Легко перевірити, що ця функція задовольняє всім умовам теореми Ролля: $F(x)$ неперервна на $[a,b]$, диференційована на (a,b) і $F(a) = F(b)$. Отже, за теоремою Ролля існує точка $C \in (a,b)$ така, що $F'(C) = 0$. Оскільки

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x),$$

то

$$f'(C) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(C) = 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}.$$

Одержана формула називається формулою Коші або узагальненою формулою скінчених приростів.

Зауваження. У формулі Коші $g(b) - g(a) \neq 0$ тому, що за умови $g(b) = g(a)$, згідно з теоремою Ролля існувала б точка $C \in (a, b)$ така, що $g'(C) = 0$, що суперечить умові $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

3.2.2 Розкриття невизначеностей. Правило Лопітала

Теорема 1 (правило Лопітала). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $(a, b]$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Нехай, крім того, в проміжку $(a, b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$, то існує й границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$.

Теорема 1 справджується й тоді, коли $x \rightarrow \pm\infty$.

Теорема 2 (правило Лопітала). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $(a, b]$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ і в проміжку $(a, b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$, то існує й границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$.

Теорема 2 має місце також, коли $x \rightarrow \pm\infty$.

Правило Лопітала дає можливість розкривати невизначеності типу $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$.

Правило Лопітала можна застосовувати при розкритті невизначеностей вигляду $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \cdot \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+0} (-x) = 0$.

3.2.3 Інтервали монотонності і екстремуми функції

Функція $f(x)$ називається **зростаючою (спадаючою)** на деякому інтервалі (a, b) , якщо для будь-яких точок x_1 та x_2 з цього інтервалу з нерівності $x_1 < x_2$ слід нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема . Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b) і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a,b) , то функція $f(x)$ зростає (спадає).

Точка x_0 називається **точкою локального максимуму (мінімуму)** функції $f(x)$, якщо існує δ -окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) для будь-якої відмінної від x_0 точки $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. При цьому саме значення $f(x_0)$ називається локальним максимумом (мінімумом) функції $f(x)$. Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються точками екстремуму або екстремальними точками функції $f(x)$.

Необхідна умова існування екстремуму функції. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, то існує окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому значення $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Отже, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ диференційована, то $f'(x_0) = 0$.

Зазначимо, що коли функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$, то або $f'(x_0) > 0$, тобто функція зростає, або $f'(x_0) < 0$ і функція спадає. Звідси випливає, що функція $f(x)$ може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна $f'(x)$ рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції $f(x)$ рівна нулю, називаються стаціонарними. Стаціонарні точки й точки, в яких функція $f(x)$ визначена, але її похідна $f'(x)$ не існує називаються критичними.

Достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема. Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, $f(x)$ неперервна в точці x_0 і має похідну $f'(x)$ в усіх точках околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ за виключенням, можливо самої точки x_0 . Тоді

1) якщо $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

2) якщо $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

3) якщо $f'(x)$ в околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ має один і той же знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Теорема . Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$ і в цій точці

існує похідна другого порядку $f''(x) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$, а якщо $f''(x) < 0$, то – максимуму.

3.2.3 Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і в кожній точці цього інтервалу має скінчену похідну. Тоді в кожній точці $M(x, f(x))$ графіка цієї функції можна провести дотичну, не паралельну осі Oy . Крива, яка є графіком цієї функції, називається гладкою.

Якщо крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, розміщена не нижче будь-якої дотичної на інтервалі (a, b) , то вона називається вгнутою догори або просто **вгнутою на цьому інтервалі** (рис. 3.4).

Якщо крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, розміщена не вище будь-якої дотичної на інтервалі (a, b) , то вона називається вгнутою донизу або просто **опуклою на цьому інтервалі** (рис. 3.5).

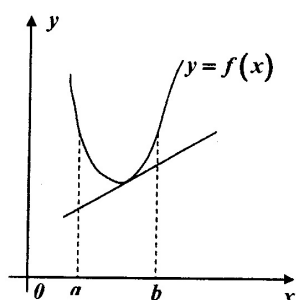


Рис. - 3.4

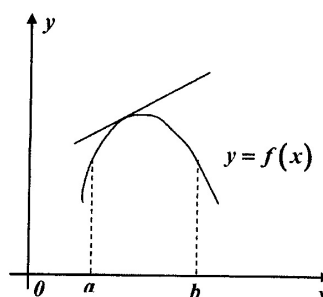


Рис. - 3.5

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ називається **точкою перегину** гладкої кривої $y = f(x)$, якщо існує δ -окіл точки x_0 такий, що в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ крива $y = f(x)$ має опуклість різних напрямків.

Необхідна умова існування точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Якщо на інтервалі (a, b) $f''(x) \neq 0$, то графік функції $y = f(x)$ точок перегину на цьому інтервалі не має. Таким чином, точка $M_0(x_0, f(x_0))$, де $x_0 \in (a, b)$ може бути точкою перегину графіка функції $y = f(x)$ лише в тому випадку, коли $f''(x_0) = 0$.

Достатня умова існування точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Нехай точка $M_0(x_0, f(x_0))$ така, що $f''(x_0) = 0$ й існує таке δ ,

що в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ друга похідна $f''(x)$ має різні знаки. Тоді точка $M_o(x_o, f(x_o))$ є точкою перегину. Дійсно, за вказаних умов у інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ крива $y = f(x)$ має опуклість різних напрямків. Отже, точка $M_o(x_o, f(x_o))$ є точкою перегину цієї кривої.

3.2.5 Асимптоти графіка функції

Пряма L називається **асимптотою кривої** $y = f(x)$, якщо відстань від точки M кривої до прямої L при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Із наведеного означення випливає, що асимптоти можуть існувати лише у тих кривих, які мають як завгодно віддалені точки, тобто у “нескінчених” кривих. Надалі розрізнятимемо похилі і вертикальні асимптоти. До похилих асимптот належать також і горизонтальні асимптоти.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ визначена на нескінченості і існують границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x) = b$, то пряма $y = k \cdot x + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Аналогічно, якщо існують границі

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k \cdot x) = b,$$

то пряма $y = k \cdot x + b$ є **похилою асимптотою кривої** $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = b$, то пряма $y = b$ є **горизонтальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Те ж стосується і випадку $x \rightarrow -\infty$.

Зауваження. Якщо границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ або $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k \cdot x)$ не існують, у цьому випадку графік функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ асимптот не має. Аналогічно у випадку $x \rightarrow -\infty$.

Із означення асимптоти кривої $y = f(x)$ випливає, що пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою**, якщо принаймні одна з границь $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

РОЗДІЛ 4 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 Невизначений інтеграл

4.1.1 Первісна функції та невизначений інтеграл, їх властивості

Однією із основних задач диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Різноманітні питання математичного аналізу і його застосувань приводять до оберненої задачі: для даної функції $f(x)$ знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої рівна $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Відтворення функції за відомою її похідною – одна із основних задач інтегрального числення.

Функція $F(x)$ називається **первісною для функції $f(x)$** , на деякому проміжку X , якщо для усіх значень $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то й функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною для функції $f(x)$, оскільки $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

Нехай первісною функції $f(x)$ на проміжку X , крім функції $F(x)$, є функція $\Phi(x)$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$. Розглянемо різницю $\Phi(x) - F(x)$. Обчислимо похідну цієї різниці.

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отже, згідно з теоремою Лагранжа $\Phi(x) - F(x) = C$. Звідси маємо: $\Phi(x) = F(x) + C$. Таким чином, множина первісних функції $f(x)$ на проміжку X , вичерпується функціями виду $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна із первісних функції $f(x)$.

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називається **невизначеним інтегралом функції $f(x)$** на цьому проміжку і позначається $\int f(x) dx$.

Невизначений інтеграл інакше називають інтегралом Ньютона - Лейбніца.

Якщо $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, то за означенням

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Знак $\int$ називається знаком невизначеного інтеграла, $f(x)$ –

підінтегральною функцією, а $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Операцію знаходження невизначеного інтеграла від функції називають інтегруванням цієї функції.

Розглянемо **основні властивості невизначеного інтеграла**:

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної постійної.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто, якщо

$$k = \text{const} \neq 0, \text{ то } \int k f(x)dx = k \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) невизначених інтегралів від кожної функції, тобто

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Безпосередньо із означення визначеного інтеграла випливають наступні формули, котрі утворюють таблицю основних інтегралів (Табл. 4.1).

Таблиця- 4.1 Основні інтеграли

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	x	$\text{ctg } x$	$\ln \sin x $
x^n	$x^{n+1}/n+1$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$
$1/x$	$\ln x$	$1/\sqrt{a^2-x^2}$	$\arcsin(x/a)$
a^x	$a^x/\ln a$	$1/1+x^2$	$\text{arctg } x$
e^x	e^x	$1/a^2+x^2$	$(1/a)\text{arctg}(x/a)$

$\sin x$	$-\cos x$	$1/\cos^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\cos x$	$\sin x$	$1/\sin^2 x$	$-\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg} x$	$-(\ln \cos x)$	$1/\sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} $

4.1.2. Основні методи інтегрування

Для обчислення інтегралу необхідно, якщо це можливо, користуючись тими або іншими методами, привести його до табличному інтегралу і таким чином знайти потрібний результат. Найбільш важливими методами інтегрування є: 1) метод розкладання; 2) метод підстановки і 3) метод інтегрування частинами.

1. **Метод розкладання.** Обчислення інтегралів за допомогою безпосереднього використання таблиці основних інтегралів та властивості $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ називається методом розкладання.

Приклади.

$$1. \int \left(3 \sin x + 5x^2 - \frac{1}{x} + 6 \right) dx = -3 \cos x + \frac{5x^3}{3} - \ln|x| + 6x + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

$$3. \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$$

2. **Метод підстановки.**

В основі методу підстановки (методу заміни змінної) лежить формула диференціювання складної функції. Якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$, то для довільної диференційованої на проміжку (α, β) функції $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t) \in (a, b)$, якщо $t \in (\alpha, \beta)$ маємо:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Таким чином, $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, тобто

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$$

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $\int \sin^6 x \cos x dx$.

Розв'язування. Покладемо $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Тоді

$$\int \sin^6 x \cos x dx = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

2. Обчислити інтеграл $\int e^{x^2} x dx$.

Розв'язування. Покладемо $t = x^2$, $dt = 2x dx$, $x dx = \frac{1}{2} dt$.

$$\text{Отже, } \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

3. Метод інтегрування частинами.

Нехай функції $U(x)$ і $V(x)$ визначені й диференційовані на деякому проміжку X . Тоді $d(UV) = U dV + V dU$.

Звідси маємо $U dV = d(UV) - V dU$.

Припустимо, що інтеграл $\int V dU$ існує. Тоді $\int U dV = \int d(UV) - \int V dU$.

Оскільки $\int d(UV) = UV + C$, то маємо:

$$\int U dV = UV - \int V dU. \quad (4.1)$$

Довільну сталу C включає в себе інтеграл $\int V dU$.

Формула (4.1) називається формулою інтегрування частинами.

За цією формулою обчислюються, зокрема інтеграли виду

$$1) \int P_n(x) \sin \alpha x dx, \int P_n(x) \cos \alpha x dx, \int P_n(x) e^{\alpha x} dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня відносно x , $\alpha \neq 0$. Тут слід прийняти $u = P_n(x)$.

$$2) \int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx, \int P_n(x) \arctg x dx, \\ \int P_n(x) \text{arcctg} x dx, \int P_n(x) \ln x dx.$$

Тут також $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня відносно x . У цих інтегралах $dv = P_n(x) dx$.

Приклади.

$$1) \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x dx \\ du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

2)

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx \\ du = dx/(1+x^2), \quad v = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln|1+x^2| + C.$$

4.2 Визначений інтеграл

4.2.1 Визначений інтеграл. Умови існування визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a; b]$, де $a \leq b$, задано функцію $y = f(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n довільних частин так, щоб:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ називатимемо T – розбиттям відрізка $[a; b]$ на частини. На кожному частинному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, виберемо довільно по одній точці $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Точки c_k називають проміжними. Нехай λ — найбільша довжина серед довжин частинних відрізків, тобто:

$$\lambda = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Зрозуміло, що для різних T – розбиттів відрізка $[a; b]$ число λ , взагалі кажучи, буде різним. Отже, λ залежить від T : $\lambda = \lambda(T)$. Надалі розглядатимемо тільки такі розбиття, для яких $\lambda(T) \rightarrow 0$.

Побудуємо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \cdot \Delta x_k. \quad (4.2)$$

Суму (4.2) називають інтегральною сумою функції $f(x)$, побудовану на відрізку $[a; b]$ для даного T – розбиття.

Границя інтегральної суми, якщо вона існує, називається **визначеним інтегралом функції $f(x)$** на відрізку $[a; b]$ і позначається:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

При цьому число a називається нижньою межею інтегрування, b – верхньою межею; $f(x)$ називається підінтегральною функцією; $f(x)dx$ — підінтегральним виразом; відрізок $[a; b]$ — проміжком інтегрування.

Отже, згідно з попередніми означеннями, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є границя (якщо вона існує!) інтегральної суми, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \cdot \Delta x_k \quad (4.3)$$

Якщо визначений інтеграл функції $y = f(x)$ існує, то така функція називається інтегрованою на відрізку $[a; b]$. Проте не всяка функція, задана на відрізку $[a; b]$, є інтегрованою на ньому. Так, якщо $f(x)$ не є обмеженою на відрізку $[a; b]$, то вона не інтегровна на цьому відрізку. Інакше кажучи, обмеженість функції на відрізку є необхідною умовою її інтегровності. Проте не всяка обмежена функція є інтегрованою.

Щоб сформулювати критерій інтегровності функції на заданому відрізку, введемо до розгляду так звані суми Дарбу. Нехай на відрізку $[a; b]$ задана обмежена функція $f(x)$. Тоді для будь – якого T – розбиття відрізка $[a; b]$ ця функція є обмеженою і на будь – якому частинному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, а отже, множина значень функції, які вона набуває на кожному з відрізків $[x_k; x_{k+1}]$, має точну нижню і точну верхню межі. Нехай :

$$\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x) = m_k, \quad \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x) = M_k$$

(для неперервної функції m_k і M_k збігаються відповідно з найменшим і найбільшим значенням функції $f(x)$). Побудуємо такі суми:

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k.$$

Суми $\underline{S}$ і $\overline{S}$ називаються відповідно нижньою і верхньою сумами Дарбу. Зрозуміло, що суми Дарбу залежать від T – розбиття $\underline{S} = \underline{S}(T)$, $\overline{S} = \overline{S}(T)$ і не залежать від вибору проміжних точок c_k .

Теорема 1. (критерій інтегровності). Для того щоб обмежена на відріжку $[a; b]$ функція $f(x)$ була інтегровною на цьому відріжку, необхідно і достатньо, щоб справджувалося співвідношення:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S} - \underline{S}) = 0. \quad (4.4)$$

Теорема 2. Будь – яка неперервна на відріжку $[a; b]$ функція $f(x)$ є інтегровною на цьому відріжку.

4.2.2 Геометричний зміст та властивості визначеного інтеграла

Розглянемо площу $S(x)$ змінної криволінійної трапеції, обмежену зверху безперервною кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), знизу віссю Ox , зліва нерухомою вертикаллю $x = a$, а праворуч рухомою вертикаллю $x = X$ ($a \leq x \leq b$) (рис. 4.1).

Нехай x отримує приріст $\Delta x > 0$. Тоді площа зміниться на величину ΔS . Покладемо $m = \min_{x_i \leq x \leq x_i + \Delta x} f(x)$ і $M = \max_{x_i \leq x \leq x_i + \Delta x} f(x)$. Порівнюючи площу ΔS з площами прямокутників з загальною основою Δx і висотами m і M , матимемо $m \Delta x \leq \Delta S \leq M \Delta x$. Звідки $m \leq \Delta S / \Delta x \leq M$.

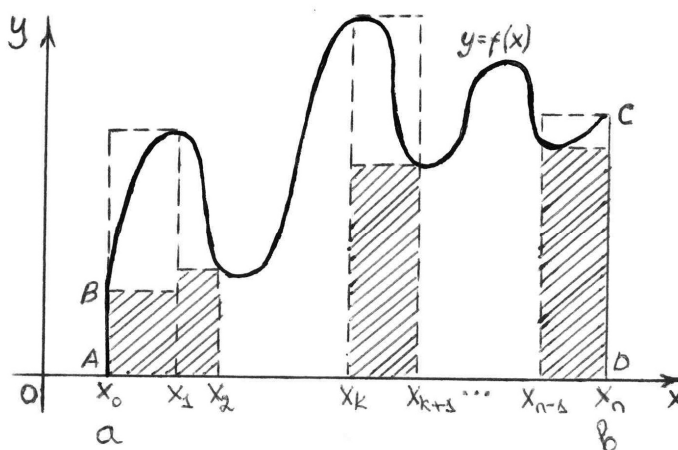


Рисунок 4.1 – Площа криволінійної трапеції

Нехай тепер $\Delta x \rightarrow +0$. Тоді в силу безперервності функції $f(x)$ маємо $m \rightarrow f(x)$ і $M \rightarrow f(x)$. Звідки на підставі теореми про границю

проміжної змінної отримуємо $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. Аналогічно, при $\Delta x \rightarrow -0$

маємо $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. Отже, існує границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx} = f(x)$.

Таким чином, похідна площі змінної криволінійної трапеції для будь-якого значення аргументу $X=x$ дорівнює її кінцевій ординаті $y=f(x)$. З останньої формули отримаємо

$$dS = f(x)dx. \quad (4.5)$$

Нехай S - повна площа криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y=f(x)$, віссю Ox та двома вертикалями $x=a$ і $x=b$. Інтегруючи рівність (4.5) в межах від a до b і враховуючи, що $S(a)=0$, отримаємо

$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad (4.6)$$

Таким чином, визначений інтеграл (4.6) від безперервної невід'ємної функції при $a \leq b$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (геометричний зміст визначеного інтеграла).

Сформулюємо **властивості визначеного інтеграла** для неперервної функції.

1. Нехай функція $f(x)$ задана і неперервна на відрізку $[a; b]$, тоді існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ і справджується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Для будь-якої функції $f(x)$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Сталу величину можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$$

4. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ - неперервні функції на відрізку $[a; b]$, тоді вірно:

$$\int_a^b (f(x)dx + \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$5. \text{ Якщо } a \leq c \leq b, \text{ тоді } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$ і для кожного $x \in [a; b]$ справджується нерівність $f(x) \leq \varphi(x)$, то справджується

$$\text{також нерівність: } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку є інтегрованою функція $|f(x)|$, і справджується нерівність:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

8. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є парною

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

9. Якщо $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є непарною $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

10. Якщо $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$, тоді справджується рівність:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a),$$

де m і M – найменше та найбільше значення функції на відрізку $[a; b]$.

11. **Теорема (про середнє значення визначеного інтеграла).** Визначений інтеграл від безперервної функції дорівнює добутку довжини проміжку інтегрування на значення підінтегральної функції при деякому проміжному значенню аргументу, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a), \quad c \in [a, b].$$

4.2.3 Обчислення визначеного інтеграла

1. Формула Ньютона – Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$, то вона інтегрована і на відрізку $[a; x]$, де x - будь-яке значення із $[a; b]$. Замінивши верхню границю b визначеного інтеграла змінною x , отримаємо інтеграл з змінною верхньою границею:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad (4.7)$$

який є функцію від x (t - щоб уникнути плутанини, змінна інтегрування позначена іншою буквою).

Якщо $f(x)$ безперервна в точці $t = x$, то в цієї точці функція $\Phi(x)$ має похідну, яка дорівнює $f(x)$:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \quad (4.8)$$

З рівняння (4.8) маємо, що інтеграл $\Phi(x)$ в (4.7) є первісною для функції $f(x)$, тобто

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad (4.9)$$

де $F(x)$ - будь-яка первісна функції $f(x)$, C - деяка стала. Сталу C знаходимо, вважаючи в (4.9) $x = a$ і використовуючи властивість 2:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a).$$

Звідки з рівняння (4.9) маємо:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Вважаючи далі $x=b$, отримаємо основну формулу інтегрального обчислення (Ньютона – Лейбніца):

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (4.10)$$

Приклад. $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$

2. Заміна змінної у визначеному інтегралі. При вивченні невизначеного інтеграла ми розглянули один з найбільш ефективних методів інтегрування функцій — метод підстановки. Цим методом користуються також при обчисленні визначених інтегралів. Проте для визначеного інтеграла треба цей метод обґрунтувати.

Теорема. Нехай виконуються умови: 1) $f(x)$ неперервна функція на відрізку $[a; b]$; 2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і значення функції $x = \varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a; b]$ при $t \in [\alpha; \beta]$. Тоді справджується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \quad (4.11)$$

Якщо при знаходженні невизначеного інтеграла методом підстановки у первісній функції ми від змінної t поверталися до змінної x , то при обчисленні визначеного інтеграла робити таку заміну немає потреби. Якщо вдається обчислити інтеграл, який міститься у правій частині формули (4.11), то цим самим обчислено і інтеграл лівої частини формули (4.11).

Приклад. $\int_0^4 x \cdot \sqrt{x^2 + 9} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 + 9, dt = 2x dx \\ t = 9, t = 25 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_9^{25} \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} \Big|_9^{25} = \frac{98}{3}.$

3. Метод інтегрування частинами. При обчисленні визначених інтегралів часто користуються формулою інтегрування частинами:

$$\int_a^b U(x)dV(x) = (U(x) \cdot V(x)) \Big|_a^b - \int_a^b V(x)dU(x) \quad (4.12)$$

Виведемо цю формулу. Нехай функції $U(x)$ і $V(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні U' і V' .

Знайдемо похідну добутку:

$$\frac{d}{dx}(U \cdot V) = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx}. \quad (4.13)$$

Тоді функція $U \cdot V$ є первісною для функції у правій частині (4.13). Згідно з формулою Ньютона — Лейбніца:

$$\int_a^b \left(U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx} \right) dx = (UV) \Big|_a^b.$$

До інтеграла у лівій частині цієї рівності застосовуємо властивість 4 визначеного інтеграла і отримаємо:

$$\int_a^b U dV + \int_a^b V dU = (U \cdot V) \Big|_a^b.$$

Приклад.

$$\int_1^2 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \, du = dx/x \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - x \Big|_1^2 = \ln 4 - 1.$$

4.2.4 Невласні інтеграли

Невласним інтегралом 1-го роду називають інтеграл, в якому проміжок інтегрування не скінченний. Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \leq x < +\infty$. Тоді за визначенням вважають:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.14)$$

Якщо границя в (4.14) існує, то невластний інтеграл з нескінченною границею інтегрування називається збіжним і його значення визначається формулою (4.14); в іншому випадку рівність втрачає сенс, невластний інтеграл називається розбіжним і йому не приписується жодного числового значення.

Геометрично для функції $f(x) > 0$ на $[a, +\infty)$ невластний інтеграл

(4.14) являє собою площу криволінійної фігури, яка обмежена цією лінією $y = f(x)$, віссю Ox та вертикаллю $x = a$.

Нехай $F(x)$ - первісна функція для $y = f(x)$. Тоді на підставі формули (4.14) маємо:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)]$$

Так само можна визначити невластні інтеграли виду $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ та

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Невластним інтегралом 2-го роду називають інтеграл, в якому подінтегральна функція $y = f(x)$ визначена і неперервна не на всьому відрізку $[a, b]$.

Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \leq x < b$ і має точку розриву при $x = b$. Тоді відповідний невластний інтеграл від розривної функції визначається за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad (4.15)$$

і називають збіжним чи розбіжним в залежності від того, існує або не існує границя правої частини рівності (4.15).

Якщо функція $f(x)$ розривна тільки в точці $c \in (a, b)$, тоді невластний інтеграл визначається за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow +0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow -0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right).$$

РОЗДІЛ 5 ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

5.1 Основні поняття

Означення. **Звичайним диференціальним рівнянням** називається рівняння, що залежить від незалежної змінної x , шуканої функції і її похідних.

Символічно це записують так

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається **порядком цього рівняння**.

Наприклад:

а) - $x^2 y' + 5x y = y^2$ -диференціальне рівняння першого порядку.

б) - $y'' - 2y' + y - x^2 = 0$ -диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. **Розв'язком диференціального рівняння** називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду $y' = f(x)$.

Щоб його розв'язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C,$$

де C - довільна стала.

5.2 Найпростіші диференціальні рівняння

5.2.1 ДР з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \quad (5.1)$$

називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Якщо $y = \varphi(x)$ його розв'язок, то маємо тотожність

$$f_1(x)dx = f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Інтегруємо його

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx + C. \quad (5.2)$$

У правому інтегралі виконаємо заміну змінної, покладемо $y = \varphi(x)$,

тоді рівність (5.2) набуде вигляду $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$. Таким чином, щоб розв'язати рівняння (1), досить проінтегрувати обидві частини цієї рівності

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \quad \text{або} \quad F_1(x) = F_2(y) + C.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = 2^{x+y}$.

Дивлячись на те, що $y' = \frac{dy}{dx}$, запишемо його у вигляді

$$2^{-y} dy = 2^x dx. \text{ Беремо інтеграли } \int 2^{-y} dy = \int 2^x dx, \text{ або } -\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

5.2.2 Однорідні ДР першого порядку

Означення. Функція називається однорідною функцією k -го порядку, якщо $f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$.

Наприклад, $f(x, y) = 4x^3 + 7x^2y - 5xy^2 + 9y^3$ є однорідною функцією третього порядку, тут сумарний степінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y} - 5$ - однорідна нульового порядку.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x, y)dx = f_2(x, y)dy \tag{5.3}$$

називається диференціальним рівнянням з однорідними функціями, якщо $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ - однорідні функції того самого порядку або, якщо диференціальне рівняння (5.3) можна розв'язати відносно y' , тобто

$$y' = f(x, y), \tag{5.4}$$

то $f(x, y)$ - однорідна функція нульового порядку.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x-y)dy = (x+y)dx$.

Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на x : $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$.

Покладемо $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}$. Підставляючи все це в

рівняння, отримаємо $t + x \frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{1-t}$. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t^2} dt = \frac{dx}{x}. \quad \text{Звідки} \quad \arctgt - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) = \ln x + C \quad \text{або}$$

$$\arctg \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \ln x + C.$$

5.2.3 Лінійні ДР першого порядку

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x) \cdot y = q(x). \quad (5.4)$$

Зробимо підстановку: $y = u(x) \cdot v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні

функції. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$. Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x). \text{ Покладаючи } u \cdot \frac{dv}{dx} + p(x)uv = 0, u \neq 0.$$

Зауваження. Якщо поставити $u = 0$, отримаємо $y = 0$ й $y' = 0$.
Лінійне рівняння втратить зміст.

Маємо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \\ \frac{du}{dx} v = q(x). \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln v = -\int p(x)dx. \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане значення $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи, і знаходимо $u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$. Шуканий розв'язок

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - 2xy = 2x^3$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Робимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$. Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \frac{du}{dx} = 2x^3. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} \cdot e^{x^2} &= 2x^3 \Rightarrow du = 2x^3 dx \Rightarrow \\ u &= \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \left[\begin{matrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{matrix} \right] = - \int te^t dt = \left[\begin{matrix} u = t; dv = e^t dt \\ du = dt; v = e^t \end{matrix} \right] = \\ &= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

Шуканий розв'язок

$$y = u \cdot v = (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C) e^{x^2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}.$$

5.3 Диференційні рівняння II порядку

5.3.1 Диференційні рівняння II порядку, що допускають пониження порядку

У деяких випадках розв'язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

Диференціальне рівняння виду $y'' = f(x)$.

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1 - стала інтегрування. Шуканий розв'язок

$$y = \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв'язок: $y' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$,

$$y = \int \frac{1}{2} \sin 2x dx + C_1 x + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2.$$

Диференціальне рівняння, що не містить явно шукану функцію y .

$$y'' = f(x, y').$$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. А рівняння звелось до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1)$. Загальний розв'язок даного рівняння $y = \int p(x, C_1) dx + C_2$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

Покладемо $y' = p$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$$\frac{dp}{1+p^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} C_1 - \operatorname{arctg} x.$$

Звідси (у відповідності із формулою $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$),

$$p = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} \text{ або } y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}. \text{ Остаточно маємо}$$

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x} dx = -\frac{1}{C_1} \int dx + \left(C_1 + \frac{1}{C_1} \right) \int \frac{dx}{1 + C_1 x} = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1 + \frac{1}{C_1}}{C_1} \ln|1 + C_1 x| + C_2.$$

Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x .

$$y'' = f(y, y').$$

Покладаємо $y' = p(x)$, тоді $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$.

Підставляємо у вихідне рівняння $p \frac{dp}{dy} = f(y, p) \Rightarrow p = p(y, C_1)$ або

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1). \text{ Розділяємо змінні } \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = 2y y'$.

$$y' = p \Rightarrow y'' = p \frac{dp}{dx}. \text{ Підставляємо в рівняння } p \frac{dp}{dx} = 2yp \text{ або}$$

$$p \left(\frac{dp}{dx} - 2y \right) = 0.$$

$$1. \quad p = y' = 0 \Rightarrow y = C (\text{const}).$$

$$2. \quad \frac{dp}{dy} = 2y \Rightarrow dp = 2y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p = y^2 + C_1$$

$$a) \quad C_1 = 0, \text{ тоді } \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2};$$

б) $C_1 > 0$. Так як стала довільна, покладемо $C_1^2 = 0$, маємо

$$\frac{dy}{C_1^2 + y^2} = dx \Rightarrow x = \frac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{C_1} + C_2.$$

в) $C_1 < 0$. Якщо $(-C_1^2)$, маємо: $\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx$, а розв'язок

$$x = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{y - C_1}{y + C_1} + C_2.$$

5.3.2 Лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне диференціальне (ЛОДР) рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (5.5)$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв'язки рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$.

Тому що $e^{kx} \neq 0$, маємо

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (5.6)$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Воно являє собою квадратне рівняння відносно k . Корені квадратного рівняння

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \text{ Розглянемо три випадки:}$$

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні,

тому що відношення $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$. І загальний розв'язок

рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 9y' + 14y = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 9k + 14 = 0, k_1 = 2, k_2 = 7$.

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}$.

2. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p$. Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\frac{p}{2}$. Один частинний розв'язок $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Другий, лінійно

незалежний із цим, отримаємо із співвідношення $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx$.

Маємо

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв'язок рівняння $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \cdot x$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0, k_1 = k_2 = 4$.

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} x$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

У цьому випадку можна покласти $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$.

Теорема. Якщо розв'язком диференціального рівняння (5.5) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$, то розв'язками рівняння (5) будуть його дійсна $u(x)$ та уявна $v(x)$ частини.

Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (5.5)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \text{ і } v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$$

У відповідності із формулами Ейлера, записані вище розв'язки рівняння (5) подамо у вигляді $y_1 = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$, $y_2 = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$.

В силу доведеної теореми розв'язками рівняння (5.5) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. Вони лінійно незалежні $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} x \neq \operatorname{const}$.

Загальний розв'язок набуде вигляду

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0$,

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 20} = 2 \pm 4i.$$

Відповідь: $y = e^{2x} (C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x))$.

5.3.3 Лінійні неоднорідні ДР II-го порядку

ЛНДР II-го порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (5.7)$$

Теорема. (Структура загального розв'язку рівняння (5.7)). Загальний розв'язок рівняння (5.7) являє собою суму загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (5.8)$$

і деякого частинного розв'язку $y_{\text{ч}}$ неоднорідного рівняння (5.7)

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}.$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Нехай задане диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (5.9)$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (5.10)$$

де $P_n(x)$ - багаточлен n - го порядку.

Візьмемо функцію $y = Q(x)e^{\lambda x}$, де

$$Q(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

- багаточлен n - го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (5.9). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x). \quad (5.11)$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - багаточлен n - го порядку, то $Q'_n(x)$ - $(n-1)$ - го, а $Q''_n(x)$ - $(n-2)$ - го порядку.

а. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (5.11) є багаточлени n -го порядку. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_q = Q_n(x)e^{\lambda x}. \quad (5.12)$$

б. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (5.11) залишиться багаточлен n -го порядку, а в лівій - $(n-1)$ - го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Частинний розв'язок

$$y_q = xQ_n(x)e^{\lambda x}. \quad (5.13)$$

в. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (5.11) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0$. Частинний розв'язок

$$y_q = x^2Q_n(x)e^{\lambda x}. \quad (5.14)$$

Запишемо праву частину рівняння (5.9) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \quad (5.15)$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексні числа, що не є коренями

характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, наведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_u = U_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x). \quad (5.16)$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_u = x[U_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)]. \quad (5.17)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x). \quad (5.18)$$

Покажемо, що рівність (5.18) можна записати у вигляді (5.15). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n_1}(x)e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} = \\ &= \left[\frac{1}{2} P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i} Q_{n_2}(x) \right] e^{(\alpha + \beta i)x} + \left[\frac{1}{2} P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i} Q_{n_2}(x) \right] e^{(\alpha - \beta i)x}. \end{aligned}$$

Тут у кожній із квадратних дужок багаточлен степеня $n = \max(n_1, n_2)$.

Зауваження. Якщо $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = x + 2 + 9xe^{2x} + e^x \cos x. \quad (5.19)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - y' = 0. \quad (5.20)$$

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0, k_1 = 0, k_2 = 1$.

Загальний розв'язок рівняння (5.20)

$$y_{одн} = C_1 + C_2 e^x.$$

Подано праву частину рівняння (5.19) у вигляді

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

де $f_1(x) = x + 2$; $f_2(x) = 9xe^{2x}$; $f_3(x) = e^x \cos x$.

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.19).

$f_1(x) = x + 2$ можна записати в такому вигляді $f_1(x) = (x + 2)e^{0x}$. А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k = 0$, то розв'язок y_{q_1} шукаємо у вигляді $y_{q_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Знаходимо $y'_{q_1} = 2Ax + B$, $y''_{q_1} = 2A$ і підставляємо в рівняння $2A - 2Ax - B = x + 2$.

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left. \begin{array}{l} x \mid 2A = 1 \\ x^0 \mid 2A - B = 2 \end{array} \right\} \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -1. \quad y_{q_1} = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Частинний розв'язок

$$y_{q_2} = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow y'_{q_2} = [2Ax + (A + 2B)]e^{2x},$$

$$y''_{q_2} = [4Ax + (4A + 4B)]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (5.19)

$$[4Ax + (4A + 4B)]e^{2x} - [2Ax + (A + 2B)]e^{2x} = 9xe^{2x} \quad \text{або}$$

$$2Ax + (3A + 2B) = 9x.$$

$$\left. \begin{array}{l} x \mid 2A = 9 \\ x^0 \mid 3A + 2B = 0 \end{array} \right\} \quad A = 4.5, \quad B = -6.75. \quad y_{q_2} = (4.5x - 6.75)e^{2x}.$$

Частинний розв'язок

$$y_{q_3} = e^x (A \cos x + B \sin x) \Rightarrow$$

$$y'_{q_3} = e^x ((A + B) \cos x + (B - A) \sin x), \quad y''_{q_3} = [2B \cos x - 2A \sin x]e^x.$$

Підставляємо в рівняння (5.19)

$$[2B \cos x - 2A \sin x - (A + B) \cos x - (B - A) \sin x]e^x = e^x \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B - A) \cos x + (-A - B) \sin x = \cos x.$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \mid B - A = 1 \\ \sin x \mid -A - B = 0 \end{array} \right\} \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}. \quad y_{q_3} = \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^x.$$

Загальний розв'язок рівняння (5.19)

$$y = y_{одн} + y_q = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^2 - x + (4.5 - 6.75)e^{2x} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^x.$$

РОЗДІЛ 6 КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

6.1 Подвійний і потрійний інтеграли, їх властивості

Розглянемо в площині Oxy замкнуту область D , обмежену лінією L . Розіб'ємо цю область якими-небудь лініями на n частин $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (причому тими ж символами $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ позначатимемо і площі відповідних частин), а відповідні найбільші відстані між точками в кожній з цих частин позначимо $d_1, d_2, \dots, d_n$. Величину d_i називатимемо **максимальним діаметром** підобласті ΔS_i . Виберемо в кожній частині точку P_i (рис.6.1).

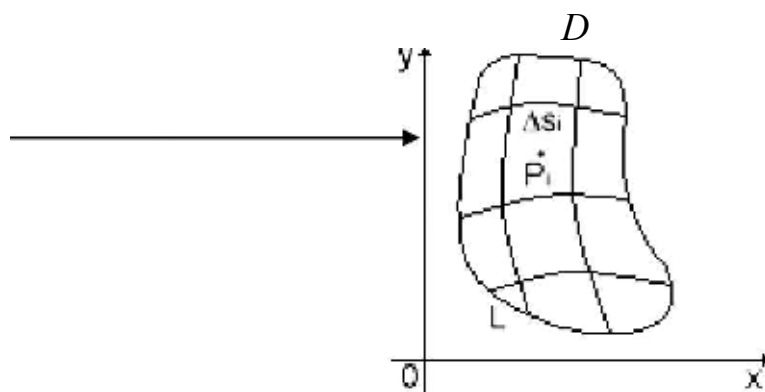


Рис. 6.1- Ділення області D на частини

Нехай в області D була задана функція $z = f(x, y)$. Позначимо через $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ значення цієї функції у вибраних точках і складемо суму добутків вигляду $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i. \quad (6.1)$$

Означення 1. Сума вигляду (6.1) називається інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ в області D .

Зауваження. З геометричної точки зору (при $f(x, y) \geq 0$) інтегральна сума (6.1) є сумою об'ємів циліндрів з основами ΔS_i і висотами $f(P_i)$.

Означення 2. Якщо існує одна і та ж границя інтегральних сум (6.1) при $n \rightarrow \infty$, незалежна ні від способу розбиття області D на частини, ні

від вибору точок P_i в них, то вона називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D і позначається

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i . \quad (6.2)$$

В цьому випадку функція $f(x, y)$ називається **інтегруємою** в області D , область D – **областю інтегрування**, x і y – змінними **інтегрування**, $dx dy = dS$ – **елементом площі**.

6.2 Властивості подвійних інтегралів

Частина властивостей подвійних інтегралів безпосередньо витікає з означення цього поняття і властивостей інтегральних сум, а саме:

1. Якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в D , то $k \cdot f(x, y)$, де $k = const$, теж інтегрується в цій області, причому

$$\iint_D k \cdot f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy . \quad (6.3)$$

2. Якщо в області D інтегруються функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$, то в цій області інтегруються і функції $f(x, y) \pm g(x, y)$, і при цьому

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy . \quad (6.4)$$

3. Якщо для тих, що інтегруються в області D функцій $f(x, y)$ і $g(x, y)$ виконується нерівність $f(x, y) \leq g(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy . \quad (6.5)$$

6.3 Потрійний інтеграл

Поняття потрійного (а надалі – *m-мірного*) інтеграла вводиться по аналогії з подвійним інтегралом.

Нехай в просторі була задана деяка область V , обмежена замкнутою поверхнею S . Задамо в цій замкнутій області безперервну функцію $f(x, y, z)$.

Потім розіб'ємо область V на довільні частини Δv_i , рахуючи об'єм кожної частини рівним Δv_i , і складемо інтегральну суму вигляду

$$\sum_V f(P_i) \Delta v_i, \quad (6.6)$$

де точка P_i належить Δv_i . Нехай ρ - найбільша відстань між двома точками будь-якої частини області V . Знайдемо границю інтегральної суми при необмеженому збільшенні числа елементів розбиття і за умовою, що кожний елементарний об'єм Δv_i стягується в точку, тобто максимальний діаметр кожної підобласті прагне до нуля.

Означення. Границя при $\rho \rightarrow 0$ інтегральних сум (6.6), незалежна від способу розбиття області V і вибору точок P_i в кожній підобласті цієї області, називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_V f(P_i) \Delta v_i. \quad (6.7)$$

Зауваження 1. Умова неперервності підінтегральної функції не є обов'язковою для існування кратного (подвійного, потрійного і т.д.) інтеграла, але дослідження питань, пов'язаних з інтегруванням перервних функцій, виходить за рамки нашого конспекту.

Зауваження 2. Всі сформульовані раніше властивості подвійного інтеграла можна розповсюдити на потрійний інтеграл.

Зауваження 3. Так само можна надати означення інтеграла будь-якої кратності, розглядаючи функцію n змінних, задану в замкнутій області n -мірного простору.

6.4 Геометричне значення подвійного інтеграла

Розглянемо тіло V , обмежене частиною поверхні, що задається рівнянням $z = f(x, y)$, проекцією D цієї поверхні на площину Oxy і бічною циліндровою поверхнею, отриманою з вертикальних утворюючих, з'єднуючих точки границі поверхні з їх проекціями (рис.6.2).

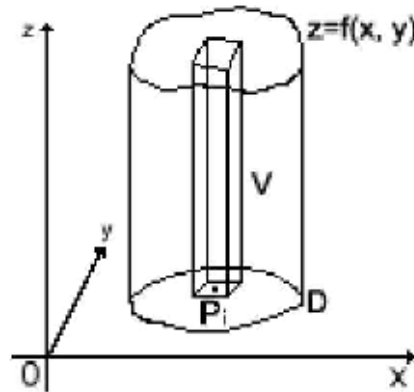


Рис.6.2- Розбиття об'єму тіла на циліндри

Шукатимемо об'єм цього тіла як границю суми об'ємів циліндрів, основами яких є частини ΔS_i області D , а висотами – відрізки довжиною $f(P_i)$, де точки P_i належать ΔS_i . Переходячи до границі при $\max \Delta S_i \rightarrow 0$, отримаємо, що

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (6.8)$$

тобто подвійний інтеграл є об'ємом так званого циліндроїда, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, а знизу – областю D .

6.5 Обчислення подвійного інтеграла в Декартових координатах шляхом зведення його до повторного

Розглянемо область D , обмежену лініями $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$), $x = a$, $x = b$, ($a < b$), де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ неперервні на $[a, b]$. Якщо будь-яка пряма, паралельна координатній осі Oy і проходячи через внутрішню точку області D , перетинає межу області двох точок N_1 і N_2

(рис 6.3), то таку **область** назовемо правильною у напрямку осі Oy . Аналогічно визначається область, правильна у напрямку осі Ox . Область, правильну у напрямку обох координатних осей, називатимемо просто правильною.

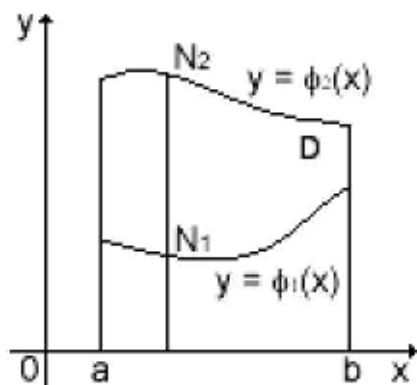


Рис. 6.3 – Область D

Нехай функція $f(x, y)$ безперервна в області D . Розглянемо вираз

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx, \quad (6.9)$$

який має назву **двократного інтеграла** від функції $f(x, y)$ по області D .

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл (що стоїть в дужках) по змінній y , вважаючи x постійним. В результаті вийде безперервна функція від x :

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy.$$

Отриману функцію проінтегруємо по x в межах від a до b . В результаті отримаємо число $I_D = \int_a^b \Phi(x) dx$.

Доведемо важливу властивість двократного інтеграла.

Теорема 1. Якщо область D , правильна у напрямі Oy , розбита на дві підобласті D_1 і D_2 прямою, паралельною осі Oy або осі Ox , то двократний інтеграл по області D буде рівний сумі таких же інтегралів по областях D_1 і D_2 :

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \quad (6.10)$$

Слідство. Таким же чином можна розбити область D на будь-яке число правильних областей. При цьому двократний інтеграл по області D буде рівний сумі інтегралів по часткових областях.

Зауваження. Найчастіша форма запису двократного інтеграла є

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y) dy. \quad (6.11)$$

Теорема 2. Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x, y)$ по правильній області D рівний двократному інтегралу від цієї функції по даній області, тобто

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (6.12)$$

Приклад 1. Обчислимо подвійний інтеграл від функції $z = x + y$ по області, що є трикутником з вершинами в точках $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ (рис.6.4).

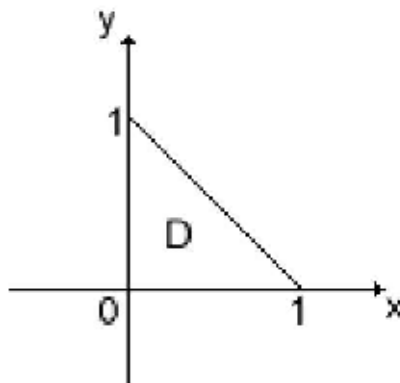


Рис.6.4

Тут $a = 0, b = 1, \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 1 - x$.

Тоді

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y) dx dy &= \int_a^b dx \int_0^{1-x} (x+y) dy = \int_0^1 dx \left(\left. xy + \frac{y^2}{2} \right|_0^{1-x} \right) = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6.6 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Введемо на площині криволінійну систему координат, яка має назву **полярна**. Вона складається з точки O (полюса) і що виходить з нього променя (полярної осі).

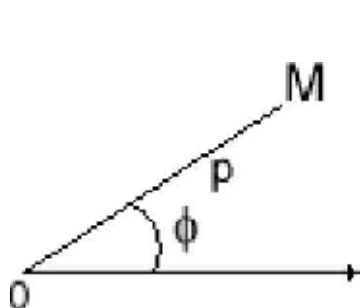


Рис. 6.5

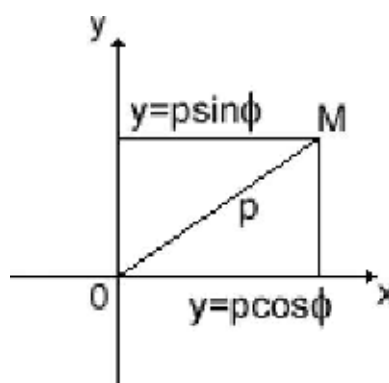


Рис.6.6

Координатами точки M в цій системі (рис.6.5) будуть довжина відрізка MO – полярний радіус ρ і кут φ між MO і полярною віссю: $M(\rho, \varphi)$. Відзначимо, що для всіх точок площини, окрім полюса, $\rho > 0$, а полярний кут φ вважатимемо додатним при вимірюванні його в напрямі проти годинникової стрілки і від'ємним – при вимірюванні в протилежному напрямку.

Зауваження. Якщо обмежити значення φ інтервалом $[0, 2\pi]$ або $[-\pi, \pi]$, то кожній точці площини відповідає єдина пара координат (ρ, φ) . В інших випадках можна вважати, що φ може приймати довільні значення, тобто полярний кут визначається з точністю до доданку, кратного 2π .

Зв'язок між полярними і Декартовими координатами точки M можна задати, якщо сумістити початок Декартової системи координат з полюсом, а додатню напіввісь Ox – з полярною віссю (рис. 6.6). Тоді $x = \rho \cos \varphi$,

$y = \rho \sin \varphi$. Звідси, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Приклад 2. Виведемо з використанням подвійного інтеграла формулу для площі круга радіусу R з центром на початку координат:

$$\iint_D d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \right) = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2.$$

Приклад 3. Обчислимо, використовуючи полярні координати, подвійний інтеграл

$$I = \iint_D (2x + y^3) dx dy,$$

де D – частина кругового сектора одиничного радіусу з центром на початку координат, розташована в 1-у квадранті.

Заданий інтеграл в полярних координатах $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ по вказаній

області D : $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (2\rho \cos \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} \rho^3 \Big|_0^1 \cos \varphi d\varphi - \\ &- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 \sin^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d \cos \varphi = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{15} \cos^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Перехід від подвійного інтеграла до повторного. Зміна порядку інтегрування. Перехід до полярних координат. Значення цих задач - навчитися швидко визначати параметри $a, b, \varphi_1(x), \varphi_2(x), c, d, \psi_1(y), \psi_2(y)$ (в Декартових координатах) і (в полярних координатах), необхідні для переходу від подвійного інтеграла до повторного. Приклади:

1. Нехай область $D = \{x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{x \geq 0, x^2 + y^2 \leq -2y\}$. Представити подвійний інтеграл по області D у вигляді повторних. Перейти до полярних координат.

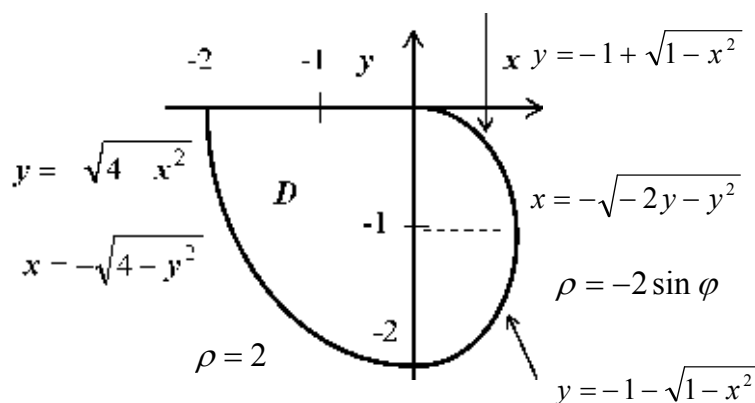


Рис. 6.7

Рішення: область була зображена на рис.6.7. Для лівої частини D : $-2 \leq x \leq 0$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 0$; для правої $0 \leq x \leq 1$, $-1-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq -1+\sqrt{1-x^2}$; - (рівняння правого півкола після виділення повних квадратів приймає вигляд $x^2 + (y+1)^2 = 1$), тому

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

D можна також описати нерівностями $-2 \leq y \leq 0$, $-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{-2y-y^2}$; тому

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^0 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

В полярних координатах рівняння лівої чверті кола має вигляд $r = 2$ для $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$ (можна взяти також відрізок $-\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$) правої чверті кола $r = -2 \sin \varphi$, $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$ (можна взяти відрізок $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$), тому:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_{r, \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^2 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \int_0^{-2 \sin \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

РОЗДІЛ 7 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

7.1 Види випадкових подій дії над ними

У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо *випадковими*. Зокрема, інформація, на основі якої розв'язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить *наближений, неточний, випадковий* характер. Наприклад, власник магазину не знає, скільки буде покупців, бізнесмен – яким буде завтра курс гривні, банкір – чи повернуть йому позику. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці закономірності вивчає теорія ймовірностей. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність.

Широко розповсюджене уявлення пов'язує невизначеність і, отже, ймовірність з такими ситуаціями як гра в кості, в рулетку, витягування карт з колоди і т.п. Саме потреба у розв'язуванні практичних задач, пов'язаних з азартними іграми, а також з питаннями страхування і демографії, якими в середині 17 ст. займалися такі відомі вчені як Гюйгенс, Паскаль, Ферма і Яків Бернуллі, обумовила виникнення теорії ймовірностей як самостійної науки.

Як і в кожній математичній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі *початкові, первісні* поняття, покладені в її основу.

Першим таким поняттям є поняття *випадкової події*. До нього приходимо так.

По-перше, під *подією* розуміємо таку *дію*, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

Приклади: 1) Першого вересня почалось навчання в ЛНУ ім. І.Франка (подія відбулась). 2) При киданні монети герб випаде зверху (може відбутись, може не відбутись). 3) Витягнути зелену кульку зі скриньки, яка містить 1 білу і 1 чорну кульку (неможлива подія).

По-друге, поняття випадкової події пов'язане з завданням *певного комплексу умов*.

Приклади комплексів умов:

1) На тверду плоску рівну поверхню кидається кубик правильної форми, виготовлений з однорідного матеріалу, з гранями, позначеними одним, двома, ..., шістьма очками.

2) Ведеться спостереження за певною частиною неба в зоряну ніч протягом деякого проміжку часу.

3) Серед населення якого-небудь населеного пункту вибирають

навмання 100 чол. Процес реалізації певного комплексу умов називається **експериментом**. Тепер можемо дати означення випадкової події. **Випадкова подія** – це подія, яка може відбутись або не відбутись в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов.

Приклади випадкових подій (в зв'язку з вищевказаними комплексами умов):

- 1) Випадання грані кубика з парною кількістю очок.
- 2) Поява комети.
- 3) Наявність хоча б 10-ти чоловік з вищою освітою серед вибраних ста чоловік.

Якщо під час кожної реалізації заданого комплексу умов подія *обов'язково* відбувається, то вона називається **вірогідною**.

Якщо ж в результаті експерименту подія *обов'язково* не відбудеться, то це - **неможлива** подія.

Очевидно, що після одноразового здійснення експерименту, ми не виявимо закономірностей, які властиві для конкретної випадкової події. Однак закономірності можна виявити, якщо здійснювати експеримент багаторазово в однакових умовах.

Наприклад, дані реєстрації народжувань дітей в невеликому населеному пункті за невеликий період часу не дають стійких співвідношень між кількістю народжених хлопчиків і дівчаток. Однак якщо зібрати статистичні дані по всій країні за тривалий період (кілька десятиріч) і проаналізувати їх, то виявиться певна закономірність: на кожну 1000 народжених припадає в середньому 515 хлопчиків.

Отже, другим з початкових понять теорії ймовірностей є поняття масовості явищ (подій).

Масові явища розглядаються як протилежність до одиничних і масовість може проявлятися: 1) в часі; 2) в просторі; 3) і в часі, і в просторі.

Тепер ми можемо остаточно сформулювати, що є *предметом* теорії ймовірностей. **Предметом теорії ймовірностей** є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій.

Статистичне означення ймовірності

Нехай деякий експеримент здійснюється n разів і при цьому в результаті m випробувань відбувається подія A . Відношення m/n називається *відносною частотою* появи події A в серії з n випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, для яких має місце властивість *стійкості частот*. Вона полягає в тому, що частота появи події A при великій кількості випробувань мало відрізняється від деякого числа.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота випадання герба буде мало відрізнятися від $\frac{1}{2}$. Частота народження хлопчика для великої кількості проаналізованих даних буде мало відрізнятися від 0,515.

Звідси, логічно міркуючи, отримуємо так зване *статистичне означення ймовірності*. *Ймовірністю* події називається *об'єктивно існуюча величина*, навколо якої групуються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо $P(A)$ - ймовірність події A .

Легко зрозуміти, що за значеннями відносних частот можна отримати лише наближене значення ймовірності, тому з точки зору математики таке означення є недосконалим.

Якщо формулювати досконале статистичне означення з точки зору математики, то можна сказати, що *ймовірністю події є границя*, до якої прямує відносна частота появи події при необмеженому зростанні кількості випробувань: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{n}$. Це означення належить німецькому математику Ріхарду Мізесу.

7.2 Елементи комбінаторики

Комбінаторика - розділ математики, предметом якого є теорія скінченних множин.

Множина - сукупність об'єктів довільної природи, які мають спільну для всіх них характеристичну властивість.

Приклади: множина всіх дійсних чисел; множина цілих чисел - нескінченні множини; множина цілих чисел від 1 до 100 - скінченна множина.

$A, B, C, \dots$ - множини; a, b, c - їх елементи. Нагадаємо, що, $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \emptyset$ - відповідно об'єднання, перетин, різниця множин і порожня множина. Позначимо: $N(A)$ - кількість елементів множини A . Якщо $N(A)=n$, то казатимемо, що A - n -множина.

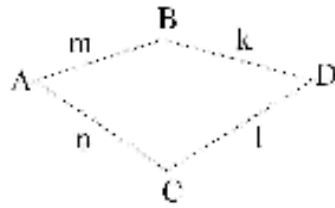
В основі комбінаторики лежать два елементарних правила – суми і добутку.

Сформулюємо **правило суми**.

$$N(A)=m, N(B)=n, A \cap B = \emptyset \Rightarrow N(A \cup B) = m + n.$$

Правило добутку (основне правило комбінаторики): якщо I-у дію можна здійснити n_1 способами, II-у, яка не залежить від першої, - n_2 способами, ..., k -ту, яка не залежить від усіх попередніх, - n_k способами, то першу, другу, дії *попередньо* можна здійснити $n_1 n_2 \dots n_k$ способами.

Приклад. Скількома способами можна потрапити з п. A до п. D якщо з A до B веде m доріг, з B до D – k доріг, з A до C – n доріг і з C до D – l доріг?



Розв'язання. За правилом добутку рух шляхом ABD можна здійснити mk способами, а шляхом ACD – nl способами. Згідно з правилом суми з A до D можна потрапити $mk + nl$ способами.

Розміщення, перестановки, комбінації

Означення. Нехай M – n – множина; $k \leq n, k \in N$. **Розміщенням** з n елементів по k називають будь-яку впорядковану k - підмножину множини M .

Кількість розміщень з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад. $M = \{1, 2, 3\}$; $n=3, k=2$; $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$. Справді, можливі розміщення такі: $(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2)$ – всього шість.

Означення. **Перестановкою** з n елементів називається розміщення з n елементів по n , тобто будь-яке впорядкування n -множини, яка складається з різних елементів.

Щоб задати перестановку з n елементів, досить якимось чином впорядкувати n -множину.

Кількість перестановок з n елементів обчислюють за формулою:

$$P_n = n! \quad \left(P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! \right).$$

Зокрема, $P_3 = 3! = 6$, в чому можна переконатися, повернувшись до прикладу про можливі впорядкування множини $M = \{1, 2, 3\}$.

Означення. Нехай M – n -множина; $k \leq n, k \in N$. **Комбінацією** з n елементів по k називають будь-яку k -підмножину множини M .

Кількість комбінацій з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад. $M=\{1,2,3\}$; $n=3$, $k=2$; $C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3$. Справді, можливі комбінації такі: $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ - всього три.

Числа C_n^k називають біномними коефіцієнтами, оскільки вони фігурують у відомій формулі бінома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Поклавши у ній $a = b = 1$, одержимо: $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$ - кількість підмножин n -множини.

7.3 Різні означення ймовірності

Класичне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій є скінченою множиною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, $N(\Omega) = N$, тобто є лише N можливих результатів випробування, отже, множина Ω є повною групою всіх попарно несумісних результатів випробування.

Вважатимемо додатково, що всі елементарні події *рівноможливі*, тобто з міркувань симетрії або якихось інших впливає, що нема об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш ймовірною порівняно з іншими. Наприклад, якщо експеримент полягає в одноразовому киданні грального кубика правильної форми, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі 6 результатів цього випробування природно вважати рівноможливими.

Класичне означення ймовірності формують для подій, які є підмножинами множини Ω . Якщо $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{N(A)}}\}$, де $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N(A)} \leq N$, $N(A) = 0, 1, 2, \dots, N$, то ймовірність події A визначають за формулою:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad (7.1)$$

де $N(A)$ - кількість елементів множини A .

Отже, **ймовірністю** події A називається відношення кількості

сприятливих для події A елементарних подій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.

Геометричні ймовірності

Означення. Геометричною ймовірністю події A називається відношення міри $\mu(A)$ до міри $\mu(\Omega)$, тобто $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Можна

показати, що геометрична ймовірність задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей.

Зауваження. За класичного означення ймовірності $P(A) = 0$ лише для $A = \emptyset$. За геометричного це не так. Справді, нехай Ω - плоска область, A - точка або лінія, розміщена в Ω . Тоді за формулою геометричної ймовірності $P(A) = 0$, хоча подія A є можливою - точка в разі її „кидання” на Ω може потрапити на A .

7.4 Умовні ймовірності. Теорема додавання та множення ймовірностей

Пояснимо спочатку на прикладі суть умовної ймовірності. Нехай двічі кидають гральний кубик. Простір елементарних подій складається з 36 елементів: $\Omega = \{(m,n): m,n = \overline{1,6}\}$. Розглянемо подію A - „сума очок після двох кидань рівна 5”, тоді $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Припустимо, що результат першого кидання -

випадання 3 очок (подія $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$). В такій ситуації ймовірність події A зміниться: сумарна кількість очок буде рівною 5 лише тоді, коли за другим разом випаде „2”, тобто в одному випадку з шести. Отже, ймовірність події A за умови, що відбулась подія B , $P(A/B) = 1/6$.

В загальному випадку (в умовах класичної схеми) міркуємо так. Якщо відбулась подія B , то здійснився один з $N(B)$ елементарних результатів. Серед них подія A з'являється $N(AB)$ разів. Тому

$$P(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{N(AB)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

У випадку загальної ймовірнісної моделі рівність

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \quad (7.2)$$

приймається за означення **умовної ймовірності**.

З цього означення випливають такі властивості умовної ймовірності:

- 1) $P(A/B) > 0$;
- 2) $P(\Omega/B) = 1$;
- 3) $P(B/B) = 1$;
- 4) $A_1 A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 + A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$.

Введемо поняття **незалежності** випадкових подій, яке в теорії ймовірностей відіграє дуже важливу роль. Нехай Ω - простір елементарних подій, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ - випадкові події.

Означення. Події A і B називаються **незалежними**, якщо

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Приклад. Монету кидають двічі. Нехай A - подія, яка полягає в тому, що за першим разом випав герб, B - подія, яка полягає в тому, що за другим разом випав герб. З'ясувати, чи будуть незалежними події A і B .

Розв'язання. Простором елементарних подій даного експерименту є множина $\Omega = \{ГГ, ЦЦ, ГЦ, ЦГ\}$. Тоді $A = \{ГГ, ГЦ\}$, $B = \{ГГ, ЦГ\}$, $AB = \{ГГ\}$ і $P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{4}$. Отже, $P(AB) = P(A)P(B)$, тому випадкові події A і B - незалежні.

Розглянемо найважливіші **властивості** ймовірностей для незалежних подій.

1. Якщо події A і B незалежні, то $P(A/B) = P(A)$ ($P(B) > 0$), $P(B/A) = P(B)$ ($P(A) > 0$). Доведення впливає безпосередньо з теореми множення.

2. Якщо події A і B незалежні, то незалежні також A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B , $\bar{A}$ і $\bar{B}$, де $\bar{A}$ і $\bar{B}$ - протилежні події, відповідно, подіям A і B .

Теорема додавання ймовірностей незалежних подій. Ймовірність появи однієї з двох незалежних подій, будь-якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Теорема додавання ймовірностей залежних подій. Ймовірність появи принаймі однієї з двох залежних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність спільної появи двох подій дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша подія вже настала.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

7.5 Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Припустимо, що подія A може відбуватися в різних умовах, яким відповідають попарно несумісні події $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу і які назвемо *гіпотезами*. Нехай відомі ймовірності $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ та умовні ймовірності $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$. Як знайти $P(A)$ в даній ситуації?

Теорема. Якщо $H_1, H_2, \dots, H_n$ - повна група попарно несумісних подій і $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$, то для будь-якої події A справедлива рівність:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \quad (7.4)$$

Доведення. Оскільки події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій, то $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$, і подію A можна записати так:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = H_1A + H_2A + \dots + H_nA,$$

де всі доданки у правій частині - попарно несумісні події. Використовуючи аксіому адитивності та теорему множення ймовірностей, маємо:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \sum_{i=1}^n P(H_iA) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i),$$

що й треба було довести.

Рівність (7.4) називають **формулою повної ймовірності**. Вона виражає ймовірність події A за умови, що відбулася одна і тільки одна з попарно несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$.

Якщо додатково припустити, що $P(A) > 0$, то за теоремою множення ймовірностей можемо записати:

$$P(AH_k) = P(A)P(H_k/A),$$

звідки

$$P(H_k / A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$$

або

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.5)$$

Формули (7.5) називаються **формулами Байєса** (формулами ймовірностей гіпотез). Їм можна дати таке тлумачення. Нехай подія A може відбуватись в різних умовах, щодо характеру яких можна зробити n припущень (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$. Ймовірності цих гіпотез $P(H_k)$ нам відомі, як і умовні ймовірності $P(A/H_k)$ події A за умови здійснення кожної гіпотези. Якщо в результаті експерименту подія A відбулась, то за формулами Байєса ми можемо переоцінити ймовірності кожної з гіпотез, знайшовши $P(H_k / A)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1984. - 416с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1971. - 432с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. –М.: “Наука”, 1976. – 315с.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: “Наука”, 1975
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: ”Наука”, 1971
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б. П., Краткий курс высшей математики. –М.: “Наука”, 1985. – 575с.
7. Кулініч Г.Л., Таран Є. Ю., Бурим В.М. та ін. Вища математика. Спеціальні розділи. Кн. 1,2. – К.: Либідь, 2003.
8. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Свинаренко А.А., Лобода А.В., Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Одесса: Екологія.-2007.
9. Глушков О.В., Чернякова Ю. Г., Вітавецька Л. А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю. В., Лобода А.В., Середенко С.С., Вища математика. Одесса: Екологія.-2011.
10. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Амбросов С. В., Свинаренко А.А., Ігнатенко Г.В. Теорія ймовірностей і математична статистика. Одесса: Екологія.-2011.