

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Методичні вказівки  
до самостійної роботи студентів та виконання  
контрольних робіт  
з дисципліни

**“ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ  
СЕРЕДОВИЩ”**

для магістрів 2-го року денної форми навчання  
Спеціальність 103 "Науки про Землю", ОНР «Гідрологія»(120кр)

“Затверджено”  
на засіданні методичної комісії  
гідрометеорологічного інституту  
Протокол №\_\_ від\_\_\_\_\_  
Голова метод.комісії

Овчарук В.А

“Затверджено”  
на засіданні кафедри вищої та  
прикладної математики  
Протокол №\_\_ від\_\_\_\_\_  
Завідувач кафедри  
Глушков О.В.

Одеса 2019

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Методичні вказівки  
до самостійної роботи студентів та виконання  
контрольних робіт  
з дисципліни

**“ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ  
СЕРЕДОВИЩ”**

для магістрів 2-го року денної форми навчання  
Спеціальність 103 "Науки про Землю", ОНР «Гідрологія»(120кр)

Одеса 2019

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Методичні вказівки  
до самостійної роботи студентів та виконання  
контрольних робіт  
з дисципліни

**“ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ  
СЕРЕДОВИЩ”**

для магістрів 2-го року денної форми навчання  
Спеціальність 103 "Науки про Землю", ОНР «Гідрологія»(120кр)

«“Затверджено”  
на засіданні методичної комісії  
гідрометеорологічного інституту  
Протокол №\_\_ від\_\_\_\_\_»

Одеса 2019

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання контрольних робіт з дисципліни “Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ для магістрів 2-го року денної форми навчання  
Спеціальність 103 "Науки про Землю", ОНР «Гідрологія»(120кр)

/ Укладачі:

Глушков О.В., д.ф.-м.наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики; Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.наук, професор, Серга І.М., к.ф.-м.наук, доцент Одеса, ОДЕКУ, 2019р., 30 с., укр. мова

Відповідальний редактор:

Глушков О.В., д.ф.-м.наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА.....                                                                                                                        | 4  |
| 1.1 Передмова .....                                                                                                                            | 4  |
| 1.2 Зміст дисципліни .....                                                                                                                     | 4  |
| 1.3 Перелік навчальної та методичної літератури .....                                                                                          | 5  |
| 2.1 Порядок виконання модульної контрольної роботи .....                                                                                       | 7  |
| 2.2 Повчання по вивченню тем „Обчислювальні методи звичайних диференціальних рівнянь. Обчислювальні методи розв’язку нелінійних рівнянь” ..... | 7  |
| 2.2.1 Обчислювальні методи звичайних диференціальних рівнянь .....                                                                             | 7  |
| 2.2.2 Повчання по вивченню теми „Обчислювальні методи розв’язку систем лінійних рівнянь” .....                                                 | 9  |
| 2.2.3 Повчання по вивченню теми «Обчислювальні методи розв’язку нелінійних рівнянь» .....                                                      | 11 |
| 4. Метод Ньютона .....                                                                                                                         | 12 |
| 2.2.4 Повчання по вивченню теми „Метод кінцевих різниць” .....                                                                                 | 14 |
| Таблиця. Розв’язок задачі.....                                                                                                                 | 17 |
| 3 Перелік завдань для підготовки до модульної контрольної роботи.....                                                                          | 18 |
| .III. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ .....                                                                                                | 24 |

# І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

## 1.1 Передмова

Дисципліна “ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ” є однією з дисциплін фундаментального циклу у підготовці магістрів зі спеціальності “Науки про Землю”. Тут розглядаються проблеми наближеного розв’язку математичних моделей різноманітних задач гідрології та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів для розв’язування практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

**Метою методичних вказівок** до самостійної роботи магістрів та виконанню контрольної роботи з дисципліни “Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ” є навчити магістрів спроможності будувати алгоритми математичних моделей для рішення виникаючих проблем у гідрології, засвоєння основних обчислювальних методів розв’язання моделей та аналіз отриманих результатів.

В результаті вивчення дисципліни магістр одержує базові знання, використовуючи які він повинен:

знати основні математичні моделі та обчислювальні методи розв’язання задач гідрології;

вміти використовувати отримані знання при розв’язанні конкретних гідрологічних задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Отримані у процесі вивчення дисципліни знання повинні допомогти майбутнім науковцям створювати математичні моделі які були розглянуті у курсах: Гідродинамічні методи прогнозу погоди, Хвильові процеси.

## 1.2 Зміст дисципліни

### 1. ВСТУП ДО ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕТОДІВ.

Етапи розв’язку прикладних задач за допомогою обчислювальних методів. Джерела виникнення помилок. Загальна помилка розв’язку задач за допомогою обчислювальних методів. Правила наближених обчислень при додаванні, відніманні, множенні та діленні наближених чисел. Помилка при обчисленні функції однієї та багатьох змінних.

### 2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗКУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку. Метод Ейлера, метод Рунге-Кутта розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Застосування методів до розв’язку систем

диференціальних рівнянь першого порядку. Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку. Метод кінцевих різниць. Одержання кінцево-різницевої формули.

### **3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.**

Визначення, позначення, загальні відомості. Метод Гаусса розв'язку систем лінійних рівнянь. Модифікація методу Гауса з вибором головного елемента. Застосування методу Гауса до обчислення визначника матриці та до обчислення оберненої матриці. Застосування методу простої ітерації до розв'язку систем лінійних рівнянь. Метод Зейделя розв'язку систем.

### **4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.**

Постановка задачі. Відділення коренів рівняння. Умови відділення коренів. Графічний метод відділення коренів рівняння. Метод перебору. Методи розв'язку нелінійних рівнянь: метод половинного розподілу, метод хорд, метод дотичних (Ньютона), метод хорд і дотичних, метод простої ітерації. Помилки методів.

### **5. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.**

Метод кінцевих різниць розв'язку крайової задачі для рівняння коливання струни. Метод кінцевих різниць розв'язку крайової задачі теплопровідності. Метод кінцевих різниць розв'язку задачі Дирихле для рівняння Лапласа.

## **1.3 Перелік навчальної та методичної літератури**

### ***Основна:***

1. Глушков О.В., Шпінарева І.М., Амбросов С.В. Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Конспект лекцій. - Одеса, ОДЕКУ, "ТЭС"-2004. – 111С.
2. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Лобода А.В., Свинаренко А.А., Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Спеціальні розділи. - Одеса: Екологія, 2007.-126С.
3. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Лобода А.В., Свинаренко А.А., Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. - Одеса: Екологія, 2008.-152С.
4. [www.library-odeku.16mb.com](http://www.library-odeku.16mb.com)

### ***Додаткова:***

5. Березин І.С., Жидков Н.П. Методы вычислений М.: Наука, 1972.

6. Волков Е.А. Численные методы.- М.: Наука,1982.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука,1980.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы.- М.: Просвещение,1990.
9. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.-М.: Наука,1972.
- 10.Глушков О.В., Сербов М.Г., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Флорко Т.О., Прикладна математика .- Одеса: Екологія, 2009.-132С.
- 11.Данко П.Е., Попов А.Г., Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II.– М.: Высшая школа, 1974.



## II ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІНОЇ РОБОТИ магістра.

### 2.1 Порядок виконання модульної контрольної роботи

Мета модульної контрольної роботи - перевірити, наскільки успішно магістр засвоїв курс дисципліни "Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ".

Модульна контрольна робота має вигляд завдань за темами які вказані у табл.1, відповідно до змістовного модуля..

Таблиця 1

| Змістовний модуль | Перелік тем для підготовки до написання роботи                                                                                                                                                   |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ЗМ ПІ             | Обчислювальні методи звичайних диференціальних рівнянь.<br>Обчислювальні методи розв'язку нелінійних рівнянь<br>Обчислювальні методи розв'язку систем лінійних рівнянь<br>Метод кінцевих різниць |

### 2.2 Повчання по вивченню тем „Обчислювальні методи звичайних диференціальних рівнянь. Обчислювальні методи розв'язку нелінійних рівнянь”

#### 2.2.1 Обчислювальні методи звичайних диференціальних рівнянь

**Основна література:** [1, §4.1-4.6].

Ця тема знайомить студентів з методами розв'язування звичайних диференціальних рівнянь методом Ейлера, модифікованим методом Ейлера, методом Рунге-Кутта.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Вміти знайти наближене значення диференціального рівняння за формулами: Ейлера, модифікованим методом Ейлера, методом Рунге-Кутта ([1], стор. 69-71).
2. Визначати й порівнювати оцінки похибки для різних формул ([1], стор. 77).

**Додаткова література:** [9, Гл.8, §5, 11, Гл.9, §4].

**Питання для самоперевірки:**

1. В чому полягає відмінність однокрокових методів від багатокрокових, явних від неявних?
2. За яких значень коефіцієнтів формули Рунге-Куты можна отримати метод Ейлера та його модифікації?
3. Чим визначається похибка методів?
4. В який спосіб пов'язані похідні функції та її розділені різниці?
5. При розв'язку яких задач використовуються чисельні методи розв'язку звичайних диференціальних рівнянь?

**Приклади практичних завдань.**

Приклад 1. Методом Ейлера знайти розв'язок диференціального рівняння  $y' = y - x$ , яке відповідає початковій умові  $y(0) = 1.5$ , на відрізку  $[0,1]$ .

Порівняти отримані значення з точним розв'язком  $y(x) = 0.5e^x + x + 1$ .

Для цього, задавши в якості кроку значення  $h = 0.2$  розіб'ємо відрізок  $[0,1]$  точками  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0.2$ ;  $x_2 = 0.4$ ;  $x_3 = 0.6$ ;  $x_4 = 0.8$ ;  $x_5 = 1$ ; на п'ять частин та використовуючи розрахункову формулу Ейлера, знайдемо наближене рішення задачі Коші в цих точках:

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + h \cdot (y_0 - x_0) = 1.5 + 0.2 \cdot (1.5 - 0) = 1.5 + 0.2 \cdot 1.5 = 1.8; \\y_2 &= y_1 + h \cdot (y_1 - x_1) = 1.8 + 0.2 \cdot (1.8 - 0.2) = 1.8 + 0.2 \cdot 1.6 = 2.12; \\y_3 &= y_2 + h \cdot (y_2 - x_2) = 2.12 + 0.2 \cdot (2.12 - 0.4) = 2.12 + 0.2 \cdot 1.72 = 2.464; \\y_4 &= y_3 + h \cdot (y_3 - x_3) = 2.464 + 0.2 \cdot (2.464 - 0.6) = 2.464 + 0.2 \cdot 1.864 = 2.8368; \\y_5 &= y_4 + h \cdot (y_4 - x_4) = 2.8368 + 0.2 \cdot (2.8368 - 0.8) = 2.8368 + 0.2 \cdot 2.0368 = 3.24416;\end{aligned}$$

Далі, обчислимо значення точного рішення в зазначених точках:

$$\begin{aligned}y(x_1) &= 0.5e^{x_1} + x_1 + 1 = 0.5 \cdot 1.2214 + 0.2 + 1 = 1.8107; \\y(x_2) &= 0.5e^{x_2} + x_2 + 1 = 0.5 \cdot 1.49182 + 0.4 + 1 = 2.14591; \\y(x_3) &= 0.5e^{x_3} + x_3 + 1 = 0.5 \cdot 1.82212 + 0.6 + 1 = 2.51106; \\y(x_4) &= 0.5e^{x_4} + x_4 + 1 = 0.5 \cdot 2.22554 + 0.8 + 1 = 2.91277; \\y(x_5) &= 0.5e^{x_5} + x_5 + 1 = 0.5 \cdot 2.71828 + 1 + 1 = 3.35914;\end{aligned}$$

Порівнюючи тепер отримані значення бачимо, що істотним недоліком методу Ейлера є занадто велика похибка, яка, як не важко помітити, має тенденцію накопичуватися, тобто, чим далі ми йдемо від початкової точки  $x_0 = 0$ , тим більшою стає розбіжність між наближеним і точним розв'язком. Відмітимо, що саме тому метод Ейлера на практиці використовується дуже рідко, а якщо і використовується, то лише як базис для побудови більш складних методів.

### 2.2.2 Повчання по вивченню теми „Обчислювальні методи розв’язку систем лінійних рівнянь”

**Основна література:** [1, §6.2-6.4].

Ця тема знайомить магістрів з методами розв’язування систем лінійних рівнянь методами Гауса, ітерації, методом Зейделя.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Вміти розв’язати систему рівнянь різними методами([1], стор. 52-56).
2. Вміти визначити коли процес ітерації для системи збігається ([1], стор. 54-55).

**Додаткова література:** [9, Гл.3, §2,4,10].

**Питання для самоперевірки:**

1. Як перетворити систему до вигляду, зручного для ітерації:
2. Як розв’язати систему методом простої ітерації з точністю 0.01.
3. Як перевірити виконання достатньої умови збіжності.
4. Як зробити ітерації за методом Зейделя,

**Приклади практичних завдань.**

Приклад 1. Використовуючи алгоритм методу Зейделя, знайти розв’язок наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з точністю  $\varepsilon = 0,1$ :

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -9 \\ 3x_2 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Для цього, як і у випадку методу простої ітерації, на першому кроці, запишемо задану систему у зручному для ітерації вигляду, тобто розв’яжемо її відносно невідомих, які стоять на головній діагоналі. В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 20 - 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ x_2 = 9 - 3x_1 + 2x_3 \\ x_3 = -0.9 - 0.5x_1 + 0.7x_2 \\ x_4 = -0.2 + 0.6x_2 \end{cases}$$

Далі, взявши за початкове наближення коренів систем значення  $x_1^{(0)} = 20, x_2^{(0)} = 9, x_3^{(0)} = -0.9, x_4^{(0)} = -0.2$  та скориставшись формулами, отримаємо перші наближені значення для шуканих коренів:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0.5 \cdot 1.3 - 0.3 \cdot (-0.9) + 0.4 \cdot (-0.2) = 1.54$$

Після цього, при обчисленні  $x_2^{(1)}$ , використовуємо вже отримане значення  $x_1^{(1)}$ :

$$x_2^{(1)} = 1.3 - 0.4 \cdot 1.54 + 0.3 \cdot (-0.9) = 0.41$$

При обчисленні  $x_3^{(1)}$ , використовуємо вже отримані значення  $x_1^{(1)}$  і  $x_2^{(1)}$ :

$$x_3^{(1)} = -0.9 - 0.5 \cdot 1.54 + 0.7 \cdot 0.41 = -1.38$$

При обчисленні  $x_4^{(1)}$  використовуємо вже отримані значення  $x_1^{(1)}$ ,  $x_2^{(1)}$  та  $x_3^{(1)}$ :

$$x_4^{(1)} = -0.2 + 0.6 \cdot 0.41 = 0.05$$

Після цього, перевіряємо критерій закінчення ітераційного процесу, тобто знаходимо максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів  $x^{(1)}$  та  $x^{(0)}$ . В нашому випадку дане максимальне значення являється більшим від заданого значення  $\varepsilon = |0.41 - 1.3| = 0.89 > 0.1$ , тому продовжуємо ітераційний процес далі.

Аналогічно обчислюємо наступні наближення. Отримуємо наступні результати обчислень:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 2 - 0.5 \cdot 0.41 - 0.3 \cdot (-1.38) + 0.4 \cdot 0.05 = 2.23 \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.4 \cdot 2.23 + 0.3 \cdot (-1.38) = -0.01 \\ x_3^{(2)} = -0.9 - 0.5 \cdot 2.23 + 0.7 \cdot (-0.01) = -2.02 \\ x_4^{(2)} = -0.2 + 0.6 \cdot (-0.01) = -0.21 \end{cases}$$

$$\max_i |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = |2.23 - 1.54| = 0.69 > 0.1$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 2 - 0.5 \cdot (-0.01) - 0.3 \cdot (-2.02) + 0.4 \cdot (-0.21) = 2.53 \\ x_2^{(3)} = 1.3 - 0.4 \cdot 2.53 + 0.3 \cdot (-2.02) = -0.32 \\ x_3^{(3)} = -0.9 - 0.5 \cdot 2.53 + 0.7 \cdot (-0.32) = -2.39 \\ x_4^{(3)} = -0.2 + 0.6 \cdot (-0.32) = 0.39 \end{cases}$$

$$\max_i |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = |0.39 - (-0.21)| = 0.6 > 0.1$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 2 - 0.5 \cdot (-0.32) - 0.3 \cdot (-2.39) + 0.4 \cdot 0.39 = 3.03 \\ x_2^{(4)} = 1.3 - 0.4 \cdot 3.03 + 0.3 \cdot (-2.39) = -0.63 \\ x_3^{(4)} = -0.9 - 0.5 \cdot 3.03 + 0.7 \cdot (-0.63) = -2.86 \\ x_4^{(4)} = -0.2 + 0.6 \cdot (-0.63) = -0.58 \end{cases}$$

$$\max_i |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| = |-0.58 - 0.39| = 0.97 > 0.1$$

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = 2 - 0.5 \cdot (-0.63) - 0.3 \cdot (-2.86) + 0.4 \cdot (-0.58) = 2.94 \\ x_2^{(5)} = 1.3 - 0.4 \cdot 2.94 + 0.3 \cdot (-2.86) = -0.73 \\ x_3^{(5)} = -0.9 - 0.5 \cdot 2.94 + 0.7 \cdot (-0.73) = -2.88 \\ x_4^{(5)} = -0.2 + 0.6 \cdot (-0.73) = -0.64 \end{cases}$$

$$\max_i |x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| = |-0.73 - (-0.63)| = 0.1 \leq 0.1$$

### 2.2.3 Повчання по вивченню теми «Обчислювальні методи розв'язку нелінійних рівнянь»

**Основна література:** [1, §4.3-4.7].

Ця тема знайомить магістрів з методами розв'язування нелінійних рівнянь методом хорд, методом дотичних.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Вміти визначити інтервал якому належить єдиний дійсний корінь нелінійного рівняння ([1], стор. 82-89).
2. Вміти розв'язати рівняння методом хорд та методом дотичних, обчисливши корінь з заданою точністю ([1], стор. 92-95).

**Додаткова література:** [9, Гл.9, §4, 11, Гл.9, §5].

#### ***Питання для самоперевірки:***

1. Як знайти приблизні значення дійсних коренів даного рівняння з будь якою заданою точністю?
2. Як відділити корінь рівняння?
3. Які методи послідовного наближення Ви знаєте?
4. У чому полягає метод хорд? Алгоритм його використання.
5. Метод дотичних. Алгоритм його використання.
6. Метод хорд

Якщо  $f(b) \cdot f'(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$   
 $(x_0 = a)$

Якщо  $f(a) \cdot f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то  $x_{n+1} = a - \frac{f(a)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a)$  ( $x_0 = b$ )

#### 7. Метод дотичних (метод Ньютона)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Якщо  $f(a) \cdot f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то ( $x_0 = a$ ). Якщо  $f(b) \cdot f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то ( $x_0 = b$ )

#### 8. Комбінований метод хорд і дотичних

Нехай  $x_{n+1}, \hat{x}_{n+1}$  – наближені значення кореня по недостатці і надлишку

Якщо  $f(a) \cdot f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то ( $x_0 = a, \hat{x}_0 = b$ )

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \hat{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\hat{x}_n) - f(x_n)}(\hat{x}_n - x_n)$$

Якщо  $f(b) \cdot f''(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то ( $x_0 = a, \hat{x}_0 = b$ )

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\hat{x}_n) - f(x_n)}(\hat{x}_n - x_n) \quad \hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n - \frac{f(\hat{x}_n)}{f'(\hat{x}_n)}$$

### 4. Метод Ньютона

Метод Ньютона застосовується до розв'язування задачі (1), де  $f(x)$  є неперервно-диференційованою функцією. На початку обчислень вибирається початкове наближення  $x_0$ . Наступні наближення обчислюються за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad f'(x_n) \neq 0. \quad (23)$$

З геометричної точки зору  $x_{n+1}$  є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої  $y = f(x)$  в точці  $(x_n, f(x_n))$  з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних.

**Теорема 2.** Якщо  $f(x) \in C^2[a, b]$ ,  $f(a)f(b) < 0$ , а  $f''(x)$  не змінює знака на  $[a, b]$ , то виходячи з початкового наближення  $x_0 \in [a, b]$ , що задовольняє умові  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ , можна обчислити методом Ньютона єдиний корінь  $x_*$  рівняння (1) з будь-якою степінною точністю.

**Теорема 3.** Нехай  $x_*$  – простий дійсний корінь рівняння (1) і  $f(x) \in C^2(S)$ , де  $S = \{x : |x - x_*| \leq \delta\}$ ,

$$0 < m_1 = \min_{x \in S} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in S} |f''(x)|, \quad (24)$$

причому

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1. \quad (25)$$

Тоді для  $x_0 \in S$  метод Ньютона збігається, причому для похибки справедлива оцінка

$$|x_n - x_*| \leq q^{2^n - 1} |x_0 - x_*|. \quad (26)$$

З оцінки (26) видно, що метод Ньютона має квадратичну збіжність, тобто похибка на  $(n+1)$ -й ітерації пропорційна квадрату похибки на  $n$ -й ітерації.

Модифікований метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

дозволяє не обчислювати похідну  $f'(x)$  на кожній ітерації, а отже і позбутися можливого ділення на нуль. Однак цей алгоритм має тільки лінійну збіжність.

Кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв'язку задачі (1) з точністю  $\varepsilon$  задовольняє нерівності

$$n \geq \left\lceil \log_2 \left( \frac{\ln(|x_0 - x_*|/\varepsilon)}{\ln(1/q)} \right) + 1 \right\rceil + 1. \quad (28)$$

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$x + \sin x - 1 = 0 \quad (29)$$

методом ділення проміжку навпіл з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо проміжок, де рівняння має єдиний корінь. Оскільки похідна функції  $f(x) = x + \sin x - 1$  не змінює знак, то корінь у рівнянні (29) буде один. Легко бачити, що  $f(0) = -1 < 0$ , а

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ . Отже корінь належить проміжку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Виберемо

$a_0 = 0$ ,  $b_0 = \frac{\pi}{2}$ . Згідно з формулою (6), отримаємо, що для знаходження

кореня з точністю  $10^{-4}$  необхідно провести 13 ітерацій. Відповідні значення  $x_n$  наведені в табл. 1.

Табл.1

| $n$ | $x_n$       | $f(x_n)$    |
|-----|-------------|-------------|
| 0   | 0785398E+00 | 0492505E+00 |
| 1   | 0392699E+00 | 0224617E+00 |
| 2   | 0589049E+00 | 0144619E+00 |
| 3   | 0490874E+00 | 0377294E-01 |
| 4   | 0539961E+00 | 0540639E-01 |
| 5   | 0515418E+00 | 0831580E-02 |
| 6   | 0503146E+00 | 0146705E-01 |

|    |             |             |
|----|-------------|-------------|
| 7  | 0509282E+00 | 0316819E-02 |
| 8  | 0512350E+00 | 0257611E-02 |
| 9  | 0510816E+00 | 0295467E-03 |
| 10 | 0511583E+00 | 0114046E-02 |
| 11 | 0511199E+00 | 0422535E-03 |
| 12 | 0511007E+00 | 0635430E-04 |
| 13 | 0510911E+00 | 0116016E-03 |

## 2.2.4 Повчання по вивченню теми „Метод кінцевих різниць”

**Основна література:** [1, §8.1-8.3].

Ця тема відкриває магістрам математичну ідею дискретизації. Під дискретизацією розуміється деяка апроксимувальна процедура, при якій безупинна область замінюється сіткою з окремих точок і в цих конкретних точках області знаходимо невідомі фізичні змінні. Частинні похідні при такому підході можуть апроксимуватися за допомогою кінцевих різниць багатьма способами, деякі з цих апроксимацій представлені в таблиці, яка представлена нижче. Усі вони отримані шляхом розкладання відповідних функцій у ряд Тейлора.

Таблиця. Деякі різницеві схеми і відповідні їм члени похибки апроксимації.

| Похідна                                | Різницева апроксимація                                                                                              | Головні члени                                                                                                                |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$     | $\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z}$ (уперед)                                                            | $-\frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{(\Delta z)^2}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$     |
|                                        | $\frac{\Phi(z) - \Phi(z - \Delta z)}{\Delta z}$ (назад)                                                             | $+\frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{(\Delta z)^2}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$     |
|                                        | $\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z - \Delta z)}{2\Delta z}$ (Центральна)                                            | $-\frac{(\Delta z)^2}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$                                                               |
| $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ | $\frac{\Phi(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2\Phi(x, t + \Delta t) + \Phi(x - \Delta x, t + \Delta t)}{(\Delta x)^2}$ | $-\frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - (\Delta t) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial t}$ |
|                                        |                                                                                                                     | $\frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial t^2}$                                                   |
|                                        | $\frac{\Phi(x + \Delta x, t) - 2\Phi(x, t) + \Phi(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}$                                  | $-\frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}$                                                              |

Причому  $z$  може означати змінні  $x$ ,  $y$  чи  $t$ .



При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Засвоїти метод сіток для рівнянь гіперболічного типу (хвильове рівняння) ([1], стор. 79-80).
2. Засвоїти метод сіток для рівнянь параболічного типу (рівняння теплопровідності) ([1], стор. 81-82).
3. Вміти визначати початкові й граничні умови ([1], стор. 79-82).

**Додаткова література:** [10, Гл.10, §6-7].

***Питання для самоперевірки:***

1. Яка ідея лежить в основі методу сітки?
2. Як розв'язати рівняння гіперболічного типу методом сітки ?
3. Які значення повинна мати  $\alpha$ , щоби різницеві відношення у змішаній задачі коливанні струни були стійкими?
4. Які є способи обчислення функції на двох початкових шарах?
5. Як розв'язати рівняння параболічного типу методом сітки?

Як впливає вибір

6. 2. кроків по осях  $x, t$  на стійкість різницевого рівняння в задачі теплопровідності?
7. Яким чином виглядає формула кінцево-різницевого рівняння для рівняння параболічного типу?
8. При якому  $\sigma$  рівняння дає більш високу точність розв'язку задачі теплопровідності?

**Приклади практичних завдань.**

**Приклад 1.** Знайти розв'язок задачі для рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

за початковими умовами  $u(x,0)=0, 2x(1-x) \sin \pi x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ ,

і граничними умовами:  $u(0,t)=u(1,t)=0$

Розв'язок . Побудуємо в напівсмузі  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 0.35$  квадратну сітку з кроком  $h=l=0,05$  і знайдемо значення функції  $u_{ij}$  у кожному вузлі сітки.

З огляду на те, що  $u(0,t)=u(1,t)=0$ , будемо мати  $u_{0j}=0$ ,  $u_{1,j}=0$  ( $j=0,1,2,\dots,10$ )  
Значення  $u(x,t)$  на двох початкових шарах знайдемо другим способом :

$$u_{i0}=f_i, \quad u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+l\Phi_i$$

Всі обчислення виконуються в робочій таблиці.

Порядок заповнення таблиці:

1) Обчислюємо значення  $u_{i0}=f(x_i)=0,2x_i(1-x_i) \sin \pi x_i$  при  $x_i=ih$  і записуємо в перший рядок (він відповідає значенню  $t_0=0$ ) У першому стовпці таблиці (він відповідає значенню  $x_0=0$ ) записуємо граничні значення  $u_{0j}=0$ .

2) За формулою знаходимо  $u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+l\Phi_i$ , т.к.  $\Phi_i=0$ , то  $u_{i1}=0,5(f_{i+1}+f_{i-1})$ , ( $i=0,1,2,\dots,10$ ), використовуючи значення  $u_{i0}$  з першого рядка. Результати записуємо в другий рядок табл.2.

3) Обчислюємо значення  $u_{ij}$  на наступних кроках за формулою

$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1}$ , т.щ.  $\alpha=l/h=1$ . При  $j=2$  одержуємо:

$$u_{12}=u_{21}+u_{01}-u_{10}=0,0065+0-0,0015=0,0050,$$

$$u_{22}=u_{31}+u_{11}-u_{20}=0,0122+0,0028-0,0056=0,0094,$$

$$u_{10,2}=u_{11,1}+u_{91}-u_{19,0}=0,0478+0,0478-0,0500=0,0456.$$

Обчислення при  $j=3,\dots,10$  проводяться аналогічно.

В останньому рядку таблиці, яка представлена нижче, приведені значення точного розв'язку при  $t=0,5$ .

Таблиця. Розв'язок задачі.

| $i$             | 0 | 1      | 2      | 3      | 4       | 5      | 6      | 7       | 8       | 9       | 10      |
|-----------------|---|--------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| $t_i \quad x_i$ | 0 | 0,05   | 0,10   | 0,15   | 0,20    | 0,25   | 0,30   | 0,35    | 0,40    | 0,45    | 0,50    |
| 0               | 0 | 0,0015 | 0,0056 | 0,0116 | 0,0188  | 0,0265 | 0,0340 | 0,0405  | 0,0457  | 0,0489  | 0,0500  |
| 0,05            | 0 | 0,0028 | 0,0065 | 0,0122 | 0,0190  | 0,0264 | 0,0335 | 0,0398  | 0,0447  | 0,0478  | 0,0489  |
| 0,10            | 0 | 0,0050 | 0,0094 | 0,0139 | 0,0198  | 0,0260 | 0,0322 | 0,0377  | 0,0419  | 0,0447  | 0,0456  |
| 0,15            | 0 | 0,0066 | 0,0124 | 0,0170 | 0,0209  | 0,0256 | 0,0302 | 0,0343  | 0,0377  | 0,0397  | 0,0405  |
| 0,20            | 0 | 0,0074 | 0,0142 | 0,0194 | 0,0228  | 0,0251 | 0,0277 | 0,0302  | 0,0321  | 0,0335  | 0,0338  |
| 0,25            | 0 | 0,0076 | 0,0144 | 0,0200 | 0,0236  | 0,0249 | 0,0251 | 0,0255  | 0,0260  | 0,0262  | 0,0265  |
| 0,30            | 0 | 0,0070 | 0,0134 | 0,0186 | 0,0221  | 0,0236 | 0,0227 | 0,0209  | 0,0196  | 0,0190  | 0,0186  |
| 0,35            | 0 | 0,0058 | 0,0112 | 0,0155 | 0,0186  | 0,0199 | 0,0194 | 0,0168  | 0,0139  | 0,0120  | 0,0115  |
| 0,40            | 0 | 0,0042 | 0,0079 | 0,0112 | 0,0133  | 0,0144 | 0,0140 | 0,0124  | 0,0092  | 0,0064  | 0,0054  |
| 0,45            | 0 | 0,0021 | 0,0042 | 0,0057 | 0,0070  | 0,0074 | 0,0074 | 0,0064  | 0,0042  | 0,0026  | 0,0013  |
| 0,50            | 0 | -      | -      | 0,0000 | -0,0002 | 0,0000 | -      | -0,0001 | -0,0002 | -0,0002 | -0,0002 |
| $u(x_i, 0,5)$   | 0 | 0      | 0      | 0      | 0       | 0      | 0      | 0       | 0       | 0       | 0       |

**Приклад 2.** Використовуючи різницеве рівняння  $u_{i,j+1}=(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})/2$ , знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = \sin \pi x \ (0 \leq x \leq 1) \text{ і } u(0, t)=u(1, t)=0 \ (0 \leq t \leq 0,025).$$

Розв'язок .

Виберемо по аргументу  $x$  крок  $h=0.1$ . Тому, що  $\sigma=1/2$  одержуємо по аргументу  $t$  крок  $l=h^2/2=0.005$ . Записуємо в робочу таблицю початкові і граничні значення. У силу симетрії задачі заповнюємо таблицю для  $0 \leq x \leq 0.5$ . Значення функції на першому шарі знаходимо, використовуючи значення на початковому шарі і граничні умови, за формулою

$$u_{i,j+1}=(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})/2 \text{ якщо } j=0:$$

$$u_{i,1}=(u_{i+1,0}+u_{i-1,0})/2$$

Таким чином , одержуємо

$$u_{1,1}=(u_{2,0}-u_{0,0})/2 = (0,5878 + 0)/2 = 0,2939,$$

$$u_{2,1}=(u_{3,0}-u_{1,0})/2 = (0,8090 + 0.3090)/2 = 0,5590 \text{ і т.д.}$$

Записуємо одержанні значення  $u_{i1}$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) у другий рядок у таблиці, яка представлена нижче. Після переходимо до обчислення значень на другому шарі за формулою  $u_{i,j+1}=(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})/2$  при  $j=1$  :

$$u_{i,2}=(u_{i+1,1}+u_{i-1,1})/2$$

Таким ж чином визначаємо послідовно значення  $u_{ij}$  при  $t=0.05; 0.010;0.015;0.020;0.025$

Таблиця. Розв'язок задачі

| i | X <sub>i</sub> | 0 | 0.1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0.5    |
|---|----------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|
|   | t <sub>j</sub> |   |        |        |        |        |        |
| 0 | 0              | 0 | 0,3090 | 0,5878 | 0,8090 | 0,9511 | 1,0000 |
| 1 | 0.005          | 0 | 0.2939 | 0,5590 | 0,7699 | 0,9045 | 0,9511 |
| 2 | 0.010          | 0 | 0,3795 | 0.5316 | 0,7318 | 0,8602 | 0.9045 |
| 3 | 0,015          | 0 | 0,2658 | 0.5056 | 0,6959 | 0.8182 | 0,8602 |
| 4 | 0,020          | 0 | 0,2528 | 0,4808 | 0,6619 | 0,7780 | 0,8182 |
| 5 | 0,025          | 0 | 0,2404 | 0,4574 | 0,6294 | 0,7400 | 0,7780 |

Продовження табл.

|                   |       |   |        |        |        |        |        |
|-------------------|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\bar{u}(x, t)$   | 0.025 | 0 | 0,2414 | 0,4593 | 0,6321 | 0,7431 | 0,7813 |
| $ \bar{u} - u _u$ | 0,025 | 0 | 0,0010 | 0.0019 | 0,0027 | 0,0031 | 0,0033 |

У двох останніх рядках таблиці наведенні значення точного розв'язку задачі  $\bar{u}(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$  і  $|\bar{u} - u|$  при  $t=0,025$ .

### 3 Перелік завдань для підготовки до модульної контрольної роботи

#### Варіант №1.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = x + (y/5)$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0)=1$  на відрізку  $[0;1]$  крок  $h=0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.
2. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції  $y$ .
3. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$   
 $2x^3 - 12x - 5 = 0$ .
4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:
 
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$
  - а) методом Гауса;
  - б) методом Жордана-Гауса;
  - в) методом Зейделя.
5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = x(\pi - x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \quad x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 8; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 10; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/2.$$

#### Варіант №2.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = x + x^2 + y$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0)=5$  на відрізку  $[0;1]$  крок  $h=0,2$ . Обчислення вести з

3-ма десят. знаками.

2. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції  $y$ .

3. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$   $x^3-3x+3=0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ x - y - z = -3 \\ 3x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Гауса з обранням головного елемента;

в) методом ітерацій.

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \sin(\pi x/2); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 8; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 10; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/2.$$

### Варіант №3.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = x + y^2$ , що задовольняє початкові умови  $y(0) = 2$  на відрізку  $[0; 1]$  крок  $h = 0,2$ . Обчислення вести з трьома десят. знаками.

2. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції  $y$ .

3. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$   $2x^3 - 24x - 10 = 0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 13 \\ 2x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Жордана-Гауса;

в) методом ітерацій.

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = x(2-x); \quad u(0, t) = u(2, t) = 0;$$

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 10; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 8; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/6.$$

#### Варіант №4.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = y^2 + xy$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0) = 1$  на відрізку  $[0; 1]$  крок  $h = 0,2$ . Обчислення вести з трьома десят. знаками.

2. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції  $y$ .

3. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$   $x^3 + 9x - 2 = 0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Гауса з обранням головного елемента;

в) методом Зейделя.

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = x - x^2; \quad u(0, t) = u(1, t) = 0;$$
$$x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 8; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 12; \quad \alpha = h_1 / h_2 = 1/4.$$

#### Варіант №5.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = xy$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0) = 1$  на відрізку  $[0; 1]$  крок  $h = 0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десятковими знаками.

2. Використовуючи модифікований метод Ейлера знайти 2 значення функції  $y$ .

3. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$   $x^3 + 3x - 2 = 0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Гауса з обранням головного елемента;

в) методом ітерацій.

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=x(1-x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0; \quad x_i=ih_1, i=0, \dots, 8; \quad t_j=jh_2, j=0, \dots, 10; \quad \alpha = h_1/h_2=1/2.$$

### Варіант №6.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = y - x^2$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0)=1$  на відрізку  $[0;1]$  крок  $h=0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десятковими знаками.

2. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції  $y$ .

3. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$   $x^3 - 6x - 3 = 0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -5 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Жордана-Гауса;

в) методом Зейделя.

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \sin \pi x; \quad u(0, t) = u(1, t) = 0;$$

$$x_i = ih_1, i = 0, \dots, 8; \quad t_j = jh_2, j = 0, \dots, 12; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/6.$$

### Варіант №7.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = x^2 - y^2$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0)=2$  на відрізку  $[0;1]$  крок  $h=0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.

2. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції  $y$ .

3. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,01$ .  $x^3 - 12x + 6 = 0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 6 \\ 3x - 4y - 2z = -2 \end{cases}$$

- а) методом Гауса;  
 б) методом Зейделя;  
 в) методом Гауса з обранням головного елемента
5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \sin x; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \quad x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 10; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 8; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/2.$$

### Варіант №8.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = 2x + y^2$ , що задовольняє початковим умовам  $y_0(0) = 1$  на відрізку  $[0; 1]$  крок  $h = 0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.
2. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції  $y$ .
3. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до  $0,1$ .  
 $x^3 - 12x + 10 = 0$ .
4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

- а) методом Гауса;  
 б) методом ітерацій;  
 в) методом Жордана-Гауса.
5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \sin \pi x / 3; \quad u(0, t) = u(3, t) = 0;$$

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 12; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 8; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/6.$$

### Варіант №9.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = x^2 + 2y$ , що задовольняє початкові



умови  $y_0(0)=0,1$  на відрізку  $[0;1]$  крок  $h=0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.

2. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції  $y$ .

3. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до 0,1  $x^3-3x^2+2,5=0$ .

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 5 \\ 3x - 3y - 4z = -1 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Зейделя;

в) методом Гауса з обранням головного елемента;

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \sin \pi x; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 12; \quad t_j = jh_2, \quad j = 0, \dots, 10; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/3.$$

### Варіант №10.

1. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння  $y' = 0,3x + y^2$ , що задовольняє початкові умови  $y_0(0) = 0,4$  на відрізку  $[0;1]$  крок  $h = 0,2$ . Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.

2. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції  $y$ .

3. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до 0,1  $x^3 + 3x^2 - 3,5 = 0$

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

а) методом Гауса;

б) методом Гауса з обранням головного елемента;

в) методом ітерацій..

5. Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \sin x; \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0;$$

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, \dots, 15; \quad t_j = jh_2; \quad j = 0, \dots, 8; \quad \alpha = h_1/h_2 = 1/6.$$

### ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ

Методика модульного контролю з дисципліни "Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ" розроблена у відповідності з "Положенням про модульну систему організації навчання та контролю знань студентів", що затверджено Вченою радою ОДЕКУ.

В основі методики лежить розподіл програми навчального курсу на окремі блоки-модулі, що регламентує організацію поточного, семестрового та підсумкового контролю рівня набутих магістром знань та вмінь по цих модулях та виконання графіку навчального процесу по дисципліні "Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ".

**Методика проведення поточного контролю.** Для *денної форми навчання* інтегральна оцінка засвоєння студентами знань та вмінь по навчальній дисципліні складається з оцінок, одержаних по модулям. Ці оцінки відображують значимість кожного модуля з точки зору засвоєння студентами базових знань та вмінь; виконання графіку навчального процесу, тобто отримання оцінки по даному модулю у термін встановлений навчальним планом дисципліни.

Поточна максимальна сума балів за дисципліну, яку може набрати студент за семестр складає 100 балів. З них за теоретичну частину - 40 балів, за практичну частину – 60 балів.

**Теоретична частина** дисципліни складає 2 лекційних змістовних модуля, формою контролю для них є письмова контрольна робота та усне опитування (КР, УО). Розподіл балів за лекційними змістовними модулями та перелік базових знань та вмінь, які є необхідними для засвоєння дисципліни наводиться у таблиці 4.

Таблиця 4

**Розподіл балів за лекційним змістовним модулем**

| Змістовний модуль | Перелік базових знань та вмінь                                                                                                                    | Форма контролю | Максимальна сума балів |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------|
| ЗМ-Л1             | Знати методи розв'язку звичайних диференціальних рівнянь, та обчислювальні методи розв'язку систем лінійних рівнянь.                              | УО<br>КР       | 20                     |
| ЗМ-Л2             | Знати методи розв'язку нелінійних рівнянь, та основні положення обчислювальних методів розв'язку крайових задач для рівнянь математичної фізики.. | УО<br>КР       | 20                     |

Максимальна сума балів за кожний лекційний змістовний модуль може бути зменшена на 15 % за несвоєчасне виконання індивідуального завдання або два бала може бути додані за активну участь в модулі «Наукова робота».

**Практична частина** дисципліни складається з одного практичного змістовного модуля та модуля індивідуального завдання. Формою контролю роботи студента на практичних заняттях є усне опитування під час проведення занять (УО), контрольна робота (КР) та контроль виконання індивідуального завдання. Розподіл балів за практичними змістовними модулями та перелік базових знань та вмінь для кожного з модуля, що необхідний для засвоєння дисципліни наводиться у таблиці 5.

Таблиця 5

**Розподіл балів за практичними змістовними модулями**

| Змістовний модуль | Перелік тем для підготовки до модульної роботи                                                                                                         | Форма контролю | Максимальна сума балів |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------|
| ЗМ-П1             | Наближене розв'язання диференціальних рівнянь першого та другого порядку за викладеними методами                                                       | УО             | 10                     |
|                   | Наближене розв'язання нелінійних рівнянь.                                                                                                              | КР             | 50                     |
|                   | Обчислювальні методи розв'язання систем лінійних рівнянь, наближені методи знаходження власних значень та власних векторів матриць.                    |                |                        |
|                   | Метод кінцевих різниць розв'язку крайової задачі для рівняння коливання струни. Метод кінцевих різниць розв'язку крайової задачі теплопровідності (ДЗ) |                |                        |

Сума балів, яку отримав студент за всіма змістовними модулями, формують інтегральну оцінку поточного контролю магістра з навчальної дисципліни. Вона є підставою для допуску магістра до семестрового іспиту.

Для денної форми навчання питання про допуск до семестрового іспиту регламентується таким чином: магістр вважається допущеним до підсумкового семестрового контролю з дисципліни, якщо він виконав усі види робіт, передбачені робочою навчальною програмою дисципліни і набрав за модульною системою суму балів не менше 50% від максимально можливої за практичну частину.

Магістр, який не має на початок заліково-екзаменаційної сесії заборгованості по дисципліні, складає письмовий іспит за затвердженим розкладом та процедурою, яка виписана у пп. 2.7-2.10 Положення про проведення підсумкового контролю знань студентів, причому загальний бал успішності з дисципліни є усередненим між кількісною оцінкою поточних контролюючих заходів та кількісною оцінкою, одержаною магістром на іспиті; якщо ж кількісна оцінка, одержана магістром на іспиті, менше 50% від максимально можливої, то загальний бал успішності дорівнює балу успішності на іспиті.

**Семестровий іспит** – це письмова форма підсумкового контролюючого заходу, який проводиться в період заліково-екзаменаційної сесії. Під час іспиту перевіряється засвоєння магістром теоретичного матеріалу(знань, що зазначені у програмі дисципліни) з навчальної дисципліни за семестр. Оцінка успішності виконання студентом цього заходу здійснюється у формі кількісної оцінки (бал успішності), тобто відсотку, який становить загальна сума балів, отриманих магістром за виконання окремих завдань (запитань) екзаменаційного білету (тесту) по відношенню до максимально можливої суми балів за цими завданнями.

На написання відповідей на запитання тесту магістру відводиться до 90 хвилин.

Магістр, який за підсумками іспиту отримав загальну кількісну оцінку менше 50% (від максимально можливої на екзамені) складає письмовий екзамен (комісію) по тестових завданнях, що розроблені на кафедрі вищої та прикладної математики.

Якщо магістр на день екзамену не ліквідував заборгованість з практичної частини навчальної дисципліни, він не допускається до екзамену.

Якщо магістр ліквідував заборгованість по практичній частині до дня екзамену, то він допускається викладачем до екзамену та отримує відповідну оцінку.

Ліквідація заборгованості по практичній частині дисципліни на протязі заліково-екзаменаційної сесії дає можливість отримати допуск до сесійного контролю, але **не змінює** загальний бал успішності, отриманий за підсумками поточного контролю.

Для проведення атестації магістрів комісією використовуються **тестові завдання та затверджена методика оцінювання результатів контролю**, які складені для ректорського контролю залишкових знань студентів (для нормативних дисциплін).

Якщо магістр отримав оцінку «незадовільно» на підсумковій атестації комісією, він відраховується з університету або залишається на повторне навчання на цьому курсі. Студенти, які навчаються за кредитно-модульною системою і отримали оцінку „F” за 7-ми бальною шкалою

ECTS, при бажанні продовжити навчання повинні вивчити навчальну дисципліну повторно.

**Критерії оцінювання письмового іспиту:** екзаменаційні білети складаються з 20 питань закритого типу з варіантами відповідей. Кожна правильна відповідь на питання оцінюється у 5 балів. Тестові питання складені на основі програми лекційного курсу.

**Базові нормативні знання**, які необхідні для забезпечення задовільної оцінки на підсумковому контролі є такими:

1. Знати кінцеві різниці, зв'язок кінцевих різниць з похідними.
2. Знати, як побудувати формули чисельного диференціювання за першою інтерполяційною формулою Ньютона.
3. Знати, як побудувати формули чисельного диференціювання за другою інтерполяційною формулою Ньютона.
4. Знати, як знайти наближене значення інтеграла за формулами: прямокутників, трапецій, Сімпсона.
5. Знати, як визначати й порівнювати оцінки похибки для різних квадратурних формул.
6. Знати ітераційні методи розв'язування нелінійних рівнянь
7. Знати метод сіток для рівнянь гіперболічного типу (хвильове рівняння).
8. Знати метод сіток для рівнянь параболічного типу (рівняння теплопровідності).
9. Знати, як визначати початкові й граничні умови.
10. Знати методи розв'язання нелінійних рівнянь.