МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для самостійної роботи та виконання
контрольної роботи (частина 1) з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

(частина дисципліни «Вища математика»)

для студентів III курсу (інтегровані) заочно-дистанційної
форми навчання

Напрям підготовки: Комп'ютерні науки та інформаційні технології

Одеса-2017

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів III курсу (інтегровані) заочно-дистанційної форми навчання з вивчення частини дисципліни «Вища математика» та виконання контрольної роботи (частина 1). Напрями підготовки: комп'ютерні науки та інформаційні технології.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф., Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц., Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н., доц. кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

«Вища математика та математичні методи дослідження операцій» є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки, яка спрямована на вивчення основних положень диференціального і інтегрального числення, функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Вона відображує нові вимоги, що ставляться до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для розв'язання прикладних задач.

Мета вивчення частини дисципліни «Вища математика» - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання частини дисципліни «Вища математика» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Вивчення курсу базується на використанні теоретичних та практичних знань, отриманих студентами у загально - освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни. Після вивчення розділу студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – математичну символіку, основні визначення, основні теореми, передбачені програмою; вміти – влучно і стисло виражати математичну думку під час розв'язання конкретних задач, самостійно розв'язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

1. ПРОГРАМА ЧАСТИНИ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

1.1 Аналіз функції однієї змінної

Основні елементарні функції, їх властивості і графіки. Складні і зворотні функції. Границя функції в точці. Границя функції нескінченності. Обмеженість функції, яка має границю. Односторонні границі функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції і їх властивості. Арифметичні теореми про границі. Дві важливі границі. Неперервність функції. Властивості функції, безперервних на відрізку.

1.2 Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

Означення похідної, геометричний її зміст. Правила та методи диференціювання функцій. Похідна складної функції. Таблиця похідних. Диференціал функції, геометричний зміст його. Основні теореми диференціального числення. Похідні та диференціали вищого порядку. Правило Лопіталя. Повне дослідження функції: умови монотонності функції; екстремуми функції, необхідна та достатні умови; дослідження опуклості функції; точки перегину; асимптоти функцій. Поняття функції багатьох змінних. Частинні похідні та повний диференціал функції. Частинні похідні та диференціали вищого порядку.

1.3 Інтегральне числення функції однієї змінної

Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування функцій. Визначений інтеграл. Його геометричний та фізичній зміст. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона- Лейбниця. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Формула інтегрування частинами.
Невласні інтеграли.

1.4 Кратні і криволінійні інтеграли

Поняття, геометричний зміст та властивості подвійних інтегралів. Обчислення подвійних інтегралів у різних системах координат. Криволінійні інтеграли 1 та 2 роду, їх властивості і обчислення.

1.5 Числові та функціональні ряди

Числові ряди. Основні поняття, властивості збіжних рядів. Ознаки збіжності. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності. Розклад періодичних, парних і непарних функцій в ряд Фур'є. Ряди Тейлора і Маклорена.

1.6 Диференціальні рівняння

Основні поняття (розв'язок, загальний і частинний розв'язок, загальний інтеграл диференціальних рівнянь). Задача Коші. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними; однорідні рівняння; лінійні рівняння; рівняння Бернуллі. Однорідні та неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Теорема про структуру загального розв'язку.

1.7 Теорія функції комплексної змінної

Комплексні числа в різних формах. Дії над комплексними числами. Функції комплексної змінної. Границя і неперервність функції. Похідна. Поняття функції аналітичної в області. Умови Коші - Рімана. Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Ряд Лорана.

2. ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ТА МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

При вивченні цих розділів використовується така навчальна та методична література:

Основна:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1,2. М.: Наука, 1978.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1. – М.: “Высшая школа”, 1986.
3. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.1. –Одеса, 2013.
4. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2014.
5. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова література:

6. Фихтенгольц В.М. Основы математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1964.
7. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Т.1. – М.: Наука, 1986.
8. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.

3. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

3.1. Загальні поради.

1. Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми дисципліни за допомогою наведеної у пункті 2 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми.
2. Коли зміст теми засвоєно, треба відповісти на "запитання до самоперевірки", що наведені у пп.5.1.-5.4. Якщо виникають труднощі - зверніться ще раз до конспекту лекцій або до іншої наведеної у п.2 літератури та знайдіть відповіді на свої запитання.
3. Якщо попередні пункти виконано, переходіть до виконання завдань контрольної роботи, що відповідає вивченій темі (див. п.6), використовуючи розв’язання типових задач, які наводяться у пп.5.1.-5.4.
4. Якщо виникли питання, на які Ви не в змозі відповісти самостійно, звертайтесь за консультацією до викладача за електронною адресою кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ (e-mail: math@odeku.edu.ua).

3.2 Загальні рекомендації студентам заочної форми навчання до виконання контрольної роботи

Основною формою навчання студента-заочника є заочна, самостійна робота над навчальним матеріалом, що складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по навчальній та методичній літературі, розв’язування задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт. Під час заліково-екзаменаційної сесії проводяться лекційні та практичні заняття згідно навчальному плану. Крім того, студент має можливість звертатися по допомогу до викладача з запитаннями для одержання усної чи письмової консультації. Вказівки студенту по поточній роботі даються так само в процесі рецензування контрольних робіт. Однак студент повинний пам'ятати, що тільки при систематичній і завзятій самостійній роботі допомога викладачів університету виявиться досить ефективною. Завершальним етапом вивчення матеріалу ІІІ-го курсу дисципліни «Вища математика та математичні методи дослідження операцій» є здача іспиту відповідно до навчального плану.

В зв’язку зі збільшенням інтенсивності навчання підсилюється значення дистанційної форми навчання, що обумовлює структуру і зміст даних методичних вказівок. Попередні підсумки роботи студента підводить контрольна робота, мета якої – допомога в засвоєнні матеріалу та перевірка того, наскільки успішно студенти опанували курс дисципліни "Вища математика та математичні методи дослідження операцій ". Робота повинна виконуватися самостійно і бути деякою мірою і гарантією того, що даний розділ засвоєний студентом.

Контрольна робота має вигляд індивідуальних завдань.

Номер варіанту відповідає останній цифрі шифру залікової книжки студента. Кожен варіант контрольної роботи містить практичні завдання відповідно до представлених в змістових модулях темах курсу.

Контрольна робота з дисципліни складається з двох частин: перша частина з "Вищої математики" (див. п.6) та друга з "Математичних методів дослідження операцій " (див. методичні вказівки для самостійної роботи студентів та виконання контрольної роботи (частина 2)).

Структура контрольної роботи має вигляд окремих блоків. Тематика контрольних завдань з першої частини дисципліни представлена у табл. 3.1.

Оформлення контрольної роботи здійснюється на комп'ютері в текстовому редакторі "Microsoft Word" з використанням редактора формул. На титульному аркуші, як звичайно, вказуються варіант контрольної роботи і відомості про студента. Завдання та розв'язання в контрольній роботі формулюються безпосередньо перед відповіддю. Виконані завдання певного блоку надсилаються викладачеві в строки, зазначені в табл.3.1 по електронній пошті (e-mail: math@odeku.edu.ua) у електронному вигляді.

У міжсесійний період провідним викладачем проводяться консультації на кафедрі згідно з розкладом. Консультації також можна отримати по скайпу, вайберу, телефону або письмово, по електронній пошті, чітко виклавши суть питання, що викликало ускладнення при виконанні контрольної роботи.

При перевірці самостійної роботи в міжсесійний період використовуються елементи дистанційної форми контролю вивчення частини дисципліни за блоками змістовних модулів, терміни виконання яких наведені у таблиці 3.1.

По закінченні виконання усіх блоків роботи та отримання позитивних відгуків на них від викладача на кафедру вищої та прикладної математики на перевірку надається електронний варіант роботи (відправити по електронній пошті або принести на флешці) та роздрукований титульний аркуш, на якому вказуються: дата отримання завдання, дати поетапного виконання КР, дата надання КР на перевірку та оформлення титульного аркуша, варіант та відомості про студента (ПІБ, номер залікової книжки, курс, спеціальність, домашня адреса).

Таблиця 3.1 – Терміни перевірки контрольної роботи з частини дисципліни «Вища математика » у міжсесійний період.

Змістовний модуль	Блок	Строк контролю
1. Аналіз функції однієї змінної. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінної.	Елементарні функції та їх основні властивості. Границя та неперервність функції. Похідна, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Диференціал функції. Застосування похідної. Поняття функції багатьох змінних. Частинні похідні та повний диференціал функції. *Завдання 1-40*	1-5 листопада
2. Інтегральне числення функції однієї змінної. Кратні і криволінійні інтеграли	Первісна. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування: заміна змінної, інтегрування частинами. Інтегрування різних класів функцій. Визначений інтеграл. Його геометричний та фізичний зміст. Властивості та обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона–Лейбниця. Заміна змінних та інтегрування частинами. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії, механіки і фізики. Невласні інтеграли. Поняття, геометричний зміст та властивості подвійних інтегралів. Обчислення подвійних інтегралів у різних системах координат. Криволінійні інтеграли 1 та 2 роду, їх властивості і обчислення. *Завдання 41-70*	1-5 січня
3. Ряди	Числові ряди. Додатні ряди й основні ознаки їх збіжності. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена. Ряди Фур’є для періодичних функцій. Ряди Фур’є для парних і непарних функцій. *Завдання 71-100*	1-5 березня

4. Звичайні диференціальні рівняння. Теорія функцій комплексної змінної	Основні типи диференціальних рівнянь І-го порядку та засоби їх розв’язання. Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференц. рівняння, що розв’язуються пониженням порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Комплексні числа в різних формах. Дії над комплексними числами. Функція комплексної змінної. Границя і неперервність функції. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коши-Рімана. Аналітичність функції. Інтеграл ФКП. *Завдання 101-140*	1-5 травня

Нижче наводиться таблиця 3.2 номерів завдань, що входять у першу частину контрольної роботи, та балів, якими вони оцінюються.

Студент повинен виконати контрольні завдання за варіантом, номер якого збігається з останньою цифрою його навчального номера (шифру).

Таблиця 3.2 – Номери завдань варіанта першої частини контрольної роботи та розподіл балів за виконання завдань і блоків.

варіанти		Номери завдань для виконання												
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112	122	132
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103	113	123	133
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124	134
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	135
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106	116	126	136
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117	127	137
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118	128	138
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119	129	139
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Бали за викон. завдань	3	3	4	3	4	3	4	4	3	5	6	2	3	3
	1 блок				2 блок			3 блок			4 блок			
Бали за викон. блоків	13				11			12			14			
	Загальна сума балів 50													

4. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТА

4.1 Система контролю знань та вмінь

При самостійному вивченні дисципліни «Вища математика» контроль знань та вмінь студентів-заочників здійснюється за допомогою системи контролюючих заходів *поточного* та *підсумкового* контролю.

Поточний контроль здійснюється на протязі навчального року за формами: перевірка контрольної роботи, яку студенти виконують у міжсесійний період (ОМ), перевірка знань та вмінь студентів під час аудиторних занять протягом заліково-екзаменаційної сесії шляхом усного опитування та написання контрольної роботи (ОЗЕ).

Підсумковий контроль (ОПК) здійснюється у формі письмового іспиту. Термін проведення контролюючих заходів визначається графіком заочної форми навчання.

Загальну максимальну кількість балів, яку студент має змогу отримати за контрольну роботу у міжсесійний період (ОМ), складає 100 балів: 50 балів за першу частину дисципліни "Вища математика" та 50 балів за другу частину дисципліни " Математичні методи дослідження операцій ".

Зарахована контрольна робота свідчить про те, що студент отримав за результатами перевірки не менше ніж 60% за кожну частину роботи.

Студенти, які не отримали за кожну частину контрольної роботи мінімальної кількості балів, повинні виконати інший варіант цієї частини контрольної роботи, який представляється викладачем, або виправити помилки попереднього варіанту та отримати відповідну кількість балів для допуску до іспиту.

Контрольна робота, яку студенти виконують під час аудиторних занять, включає теоретичну та практичну частини, які охоплюють основні питання розділу дисципліни. Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за цей вид роботи складає 60 балів. Також за усне опитування студент може отримати 40 балів. Таким чином, загальна максимальна оцінка під час аудиторних занять складає 100 балів.

Студент вважається допущеним до іспиту (ОПК) з дисципліни, якщо він виконав всі види робіт поточного контролю, передбачені робочою навчальною програмою дисципліни і набрав за накопичувальною системою суму балів не менше 50% від максимально можливої за дисципліну, своєчасно виконав міжсесійну контрольну роботу.

4.2 Форми контролю знань та вмінь студентів

4.2.1 Поточний контроль

Поточний контроль здійснюється за такими формами:

- перевірка міжсесійної контрольної роботи із застосуванням дистанційної форми контролю (див. п. 3.2);
- перевірка аудиторної контрольної роботи, яку студент виконує під час аудиторних практичних занять;
- усне опитування під час аудиторних практичних занять.

Усі три форми оцінюються з розрахунку 100%- максимум. Студент має допуск до іспиту у випадку отримання не менш за 50% за кожну форму контролю.

4.2.2 Підсумковий контроль

Підсумковий контроль здійснюється під час іспиту, який оцінюється згідно відповідної інструкції. Іспит проводиться тільки у письмовій формі за білетами , які розробляються викладачами та затверджуються у встановленому порядку. Екзаменаційний білет формується у вигляді тестових завдань закритого типу, які потребують від студента вибору правильних відповідей з запропонованих у запитанні. Кількість тестових завдань в кожному білеті дорівнює 20. Кожна правильна відповідь оцінюється в 5 балів. Загальна екзаменаційна оцінка еквівалентна відсотку правильних відповідей із загального обсягу питань екзаменаційного білету.

Накопичена підсумкова оцінка (ПО) засвоєння студентами заочної форми навчальної дисципліни розраховується, як:

$$ПО = 0,5ОПК+0,25(ОЗЕ+ОМ).$$

Таким чином студент може отримати максимально 100 балів (%).

Якісна оцінка є такою:

- 90-100 балів – «відмінно»;
- 74-89 балів – «добре»;
- 60-73 балів – «задовільно»;
- менше 60 балів – «незадовільно».

Одержана накопичена підсумкова оцінка виставляється викладачем у відомість обліку успішності встановленого зразка.

5. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (ЧАСТИНА 1)

5.1 Теми «Аналіз функції однієї змінної», «Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінної» (табл. 3.1, Блок №1)

Література: [3] гл. II-III ; [4] гл. I; [8] гл. VII, § 3-12; гл. IX, § 1-6; гл. X, § 2-14

Питання для самоперевірки:

1. Визначення границі послідовності, границі функції.
2. Нескінченно мала і нескінченно велика функції та їх властивості.
3. Основні теореми про границі функцій.
4. Перша і друга чудові границі.
5. Безперервна функція в точці і на відрізку.
6. Визначення похідної. Який її механічний і геометричний зміст?
7. Правила обчислення похідної двох функцій.
8. Формула диференціювання складної функції.
9. Визначення диференціалу функції.
10. Таблиця похідних функцій.
11. Похідна та диференціали вищих порядків.
12. Поняття функції багатьох змінних, область визначення.
13. Частинні похідні та повний диференціал функції.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+5}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\frac{-1-1}{-1-5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x-3}-1\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5}{x-3}(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{10x+5}{x-3}}=e^{10}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = tg(\ln x^2)$.

Розв'язання. За правилом визначення похідної складної функції маємо:

$$y' = \left(tg(\ln x^2)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\left(\ln x^2\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)} \cdot \frac{1}{x^2}\left(x^2\right)' =$$

$$\frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{\cos^2\left(\ln x^2\right)x}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x(t) = \ln ctgt \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо:

$$x_t' = \frac{1}{ctgt} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -\frac{1}{\sin t \cos t}, \quad y_t' = -2\cos^{-3} t \cdot \left(-\sin t\right) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

тоді

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{2\sin t \sin t \cos t}{\cos^3 t} = -2tg^2 t.$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції $z = 3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)_x' = 3y^2\left(x^2\right)' + 15y^3 \cdot \left(\sin x\right)' = 6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)_x' = 3x^2\left(y^2\right)' + 15\sin x \cdot \left(y^3\right)' = 6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)_x' = 6y^2 - 15y^3 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x\right)_y' = 6x^2 + 90y\sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)' = 12yx + 45y^2 \cdot \cos x.$$

5.2 Теми «Інтегральне числення функції однієї змінної», «Кратні і криволінійні інтеграли» (табл. 3.1, Блок №2)

Література: [3] гл. IV ; [4] гл. III; [8] гл. XIII, § 1-8; гл. XIV, § 1-8; гл. XXIII, гл. XXIV, § 1-7;

Питання для самоперевірки:

1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу.
2. Властивості невизначеного інтегралу.
3. Таблиця невизначених інтегралів.
4. Поняття та властивості визначеного інтегралу.
5. Геометричний зміст визначеного інтегралу.
6. Методи заміни змінної в невизначеному та визначеному інтегралах.
7. Інтегрування за частинами в невизначеному та визначеному інтегралах.
8. Фізичні застосування визначеного інтеграла.
9. Означення подвійного інтеграла. Який його геометричний зміст?
10. Як звести подвійний інтеграл до повторного у декартовій системі координат?
11. Що називається криволінійним інтегралом I та II роду? Чим вони відрізняються?
12. Обчислення криволінійних інтегралів I та II роду.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл: $\int e^{x^2+6x}(x+3)dx$.

Розв'язання. Якщо позначити $U = x^2+6x$, то $dU = (2x+6)dx = 2(x+3)dx$, вихідний інтеграл відразу набере табличного вигляду:

$$\int e^{x^2+6}(x+3)dx = \begin{vmatrix} U = x^2+6x \\ dU = 2(x+3)dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int e^U dU = \frac{1}{2}e^U + C = \frac{1}{2}e^{x^2+6x} + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл: $\int (x+5)\sin x dx$.

Розв'язання.

Інтеграл береться з використанням формули інтегрування за частинами:

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Позначимо $U = x+5$; $dV = \sin x dx$, тоді $dU = dx$; $V = -\cos x$.

Маємо

$$\int (x+5)\sin x dx = -(x+5)\cos x + \int \cos x dx = -(x+5)\cos x + \sin x + C.$$

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_D (1+x-y)\,dx\,dy$, якщо область D, обмежена лініями $y=x,\ y=2-x^2$.

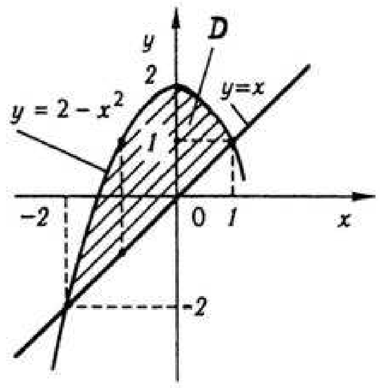

Рис.5.1

Розв'язання. Побудуємо область D. Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2. \end{cases}$$

Звідси $x_1=1,\ x_2=-2,\ y_1=1,\ y_2=-2$ (рис. 5.1). Оскільки область D правильна в напрямі осі Oy, то подвійний інтеграл дорівнює:

$$\iint\limits_D (1+x-y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} (1+x-y)\,dy = \int\limits_{-2}^{1} \left(y+xy-\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^{2-x^2} dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(2-x^2+x\left(2-x^2\right)-\frac{\left(2-x^2\right)^2}{2}-x-x^2+\frac{x^2}{2} \right) dx = \int\limits_{-2}^{1} \left(x-x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{2\cdot 5}+\frac{x^3}{2\cdot 3} \right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-\frac{4}{2}+\frac{16}{4}-\frac{32}{2\cdot 5}+\frac{8}{2\cdot 3}=\frac{9}{20}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_L xydx+\left(x^2+y\right)dy$, якщо L: дуга параболи $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ між точками $A(0;1)$ і $B(2;3)$.

Розв'язання. Зведемо обчислення криволінійного інтеграла до визначеного, покладаючи $y=\dfrac{x^2}{2}+1,\ y'=x,\ 0\le x\le 2$. Тоді за формулою

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)\,dy =$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)\,y'(x) \Big)dx,$$

маємо:

$$\int\limits_L xydx+\left(x^2+y\right)dy = \int\limits_0^2 \left(x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)+\left(x^2+\frac{x^2}{2}+1\right)x \right)dx = \int\limits_0^2 \left(2x^3+2x\right)dx = 12\,.$$

5.3 Тема «Ряди» (табл. 3.1, Блок №3)

Література: [1] гл. XVI, § 1-16; гл. XVII, § 2-7; [2] гл. III, § 1-8; [4] гл.V; [8] гл. XXI, § 1-19

Питаня для самоперевірки:

1. Що називається числовим рядом, сумою ряду? Який ряд називають збіжним?
2. У чому полягає необхідна ознака збіжності? Для чого її використовують?
3. Вкажіть еталонні ряди та їхні властивості.
4. Сформулюйте I та II теореми порівняння.
5. Сформулюйте ознаки збіжності Даламбера та Коші.
6. Знакозмінні ряди. Поняття абсолютної та умовної збіжності рядів.
7. Ознака Лейбниця для знакозмінного ряду.
8. Функціональні та степеневі ряди. Радіус збіжності степеневого ряду.
9. Ряди Тейлора і Маклорена.
10. Ряди Фур'є для періодичних функцій.
11. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)}$.

Розв'язання. Ряд розбігається, оскільки для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-5n^2}{n^2+n-2}=-5\neq 0.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Розв'язання. За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

тобто ряд збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Запишемо $u_n = \frac{1}{n!}$ і $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, застосуємо ознаку Даламбера:

$\lim\limits_{n->\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n->\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n->\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$ => ряд збігається.

Приклад 4. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$.

Розв'язання. У нас

$$|a_n| = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}.$$

Маємо

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n \cdot 2}{n \cdot 2^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Звідки $-2 < x+1 < 2$ або $-3 < x < 1$. Тобто наш ряд збіжний в інтервалі $(-3; 1)$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу збіжності. При $x = -3$ одержимо числовий ряд: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ Це гармонійний ряд, який завжди розбіжний.

При $x = 1$ одержимо числовий знакозмінний ряд: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + (-1)\frac{1}{n} + ...,$ який досліджуємо на збіжність за ознакою Лейбниця:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > ...;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{n} = 0.$

Ознака Лейбниця виконується, тому ряд умовно збіжний. Отже, область збіжності даного ряду є : $-3 < x \le 1$.

Приклад 5. Розвинути у ряд Фур'є функцію з періодом 2π, що на інтервалі $-\pi < x < \pi$ задана виразом $f(x) = |x|$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ парна, тому $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Ряд Фур'є для даної функції записується у вигляді

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots \right).$$

5.4 Теми «Звичайні диференціальні рівняння», «Теорія функцій комплексної змінної» (табл. 3.1, Блок №4)

Література: [1] гл.XII, § 2-9; § 17, §20 -23; гл.XVI, § 1-5; [2] гл.IV, § 1-5; [4] гл. II ; [8] гл. XVI, § 1-5; гл. XXII, § 1-7; § 12-13

Питання для самоперевірки:

1. Поняття диференціального рівняння, його порядок та загальний розв'язок.
2. Рівняння з відокремлюваними змінними та їх розв'язок.
3. Однорідні рівняння першого порядку та їх розв'язок.
4. Лінійні рівняння і рівняння Бернуллі, та їх розв'язок.
5. Рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку.
6. Однорідні та неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
7. Поняття комплексного числа. Комплексні числа в різних формах.
8. Модуль та аргумент комплексного числа.
9. Дії над комплексними числами в різних формах.
10. Поняття функції комплексної змінної.
11. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші - Рімана.
12. Поняття функції аналітичної в області.
13. Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості.
14. Розкладання функції комплексної змінної в ряд Лорана.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти загальний розв`язок однорідного диференціального рівняння $(x-y)dy=(x+y)dx.$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$ Розділимо чисельник і знаменник правої частини на x :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Покладемо $t=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xt\Rightarrow\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}.$

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t+x\frac{dt}{dx}=\frac{1+t^2}{1-t}.$

Відокремлюємо змінні: $\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}.$

Звідки

$$arctgt - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln|x| + C \text{ або } arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2}) = \ln|x| + C.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв`язок лінійного диференціального рівняння $y' - 2xy = 2x^3$.

Розв’язання. Робимо заміну: $y = u \cdot v, \quad y' = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}.$

Підставляємо в рівняння: $\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \frac{du}{dx} = 2x^3. \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи: $\frac{dv}{v} = 2xdx; \Rightarrow \ln|v| = x^2; \Rightarrow v = e^{x^2}$.

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dx}e^{x^2} = 2x^3; \Rightarrow du = 2x^3e^{-x^2}dx; \Rightarrow$$

$$u = \int 2x^3e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = -\int te^t dt = \begin{bmatrix} \text{за частинами:} \\ \mathrm{u = t;\ dv = e^t}dt \\ du = dt; v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= -te^t + \int e^t dt = -te^t + e^t + C = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C.$$

Шуканий розв`язок

$$y = u \cdot v = (x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C)e^{x^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0.$

Розв’язання. Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0 \Rightarrow$ $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i$ - комплексні корені.

Загальний розв`язок $y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).$

Приклад 4. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 9y' + 14y = 0.$

Розв’язання. Характеристичне рівняння: $k^2 - 9k + 14 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 7$ - дійсні та нерівні корені.

Загальний розв`язок $y = C_1e^{2x} + C_2e^{7x}.$

Приклад 5. Перевірити на умови Коші - Рімана функцію $f(z) = x^2 - y^2 - x + i\,(2xy - y)$ і знайти її похідну $f'(2+i)$.

Розв'язання.

Маємо дійсну та уявну частину: $u = x^2 - y^2 - x$; $v = 2xy - y$.

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y\ ;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1.$$

Умови Коші – Рімана виконуються: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, тому функція аналітична і її похідна дорівнює $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i = (2x-1) + 2yi$. А в заданій точці: $f'(2+i) = (2\cdot 2 - 1) + 2\cdot 1\cdot i = 3 + 2i.$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$, де $f(z) = x^2 + iy^2$, AB- відрізок прямої, що об'єднує точки $A = 1 + i$ та $B = 2 + 3i$.

Розв'язання. Маємо $u = x^2$, $v = y^2$. Тому

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} x^2dx - y^2dy + i\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy\ .$$

Перший інтеграл визначається як визначений інтеграл

$$\int\limits_{AB} x^2dx - y^2dy = \int\limits_1^2 x^2dx - \int\limits_1^3 y^2dy = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^3 = \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Для обчислення другого інтеграла знайдемо рівняння прямої AB:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{2-1} \ \Rightarrow\ y = 2x - 1.$$

Звідки $d\,y = 2dx$ і

$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_1^2 \left[(2x-1)^2 + 2x^2\right]dx = \int\limits_1^2 \left(6x^2 - 4x + 1\right)dx =$$
$$= \left(2x^3 - 2x^2 + x\right)\Big|_1^2 = 9.$$

Отже, $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\frac{19}{3} + 9i.$

6. ПЕРЕЛІК ЗАВДАНЬ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (ЧАСТИНА 1)

Блок №1

1-10. Знайти границю функції.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7-3x^2+5}{1-x^2+2x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\ 2x}{1-\cos 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-3}\right)^{2x}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+4x^2+1}{7x^5-x^3+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{5+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x^2}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{11}-11x^5-5}{5-x\ \ -7x^{11}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{6}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+7x+1}{2-x+9x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+5}{7x^2+x\ \ +4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{x}$;

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x+8x^7}{14x^7-x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{\arcsin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{3x}}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-8x^3+7}{2x^4+5x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 7x}{\sin^2 x}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^9+9}{3+x^7+7x^9}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-4x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 tg 2x}{\sin 3x}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-17x^2}{6x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}5x}{\sin^2 x}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+5x\ \ -7x^3}{5x^3+2x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{8x}$;

11-20. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ для заданих функцій а), б) і похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – для функції в) :

11. а) $y=\ln\cos x+0.5\operatorname{tg}^2 x;$ б) $y=(x^2+1)^{\operatorname{arctg}x};$ в) $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

12. а) $y=\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2};$ б) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}};$ в) $\begin{cases} x=\frac{t}{t-1}; \\ y=\frac{t^2}{t-1},\ t\neq 1 \end{cases}$

13. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+2}+0.5\ln(x^2+1);$ б) $y=(x^2+1)^{\cos x};$ в) $\begin{cases} x=e^y \\ y=e^t\cos t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

14. а) $y=\ln\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1};$ б) $y=(\arcsin x)^{0.5x};$ в) $\begin{cases} x=a\sin 2t; \\ y=b\cos 2t,\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

15. а) $y=e^{2x^2}(3+2x^2+2x^4);$ б) $y=(\operatorname{tg}\sqrt{x})^{2x};$ в) $\begin{cases} x=t+\operatorname{arctg}t; \\ y=\ln(1+t^2),\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

16. а) $y=\frac{2}{\operatorname{ctg}x-1}+\ln\operatorname{tg}x;$ б) $y=(x-5)^{\sin 3x};$ в) $\begin{cases} x=t^3-1 \\ y=\frac{1}{3}(t^2-1),\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

17. а) $y=(\arccos\frac{1}{x})^3+\sqrt{x^2-1};$ б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln 2x};$ в) $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\ln 2t,\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

18. а) $y=\operatorname{arcctg}x-\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$ б) $y=(x^3+1)^{\operatorname{ctg}2x};$ в) $\begin{cases} x=a\arccos t; \\ y=e^{\sqrt{1-t^2}},\ t\in[-1,1]. \end{cases}$

19. а) $y=(x^2+4)\operatorname{arctg}\frac{x}{2};$ б) $y=(\sin 2x)^{\sqrt{x}};$ в) $\begin{cases} x=3e^{-t}; \\ y=e^{2t},\ t\in(0,\infty) \end{cases}$

20. а) $y=4\sqrt{x^2-4}-(\arcsin\frac{2}{x})^2;$ б) $y=(\ln 3x)^{2/3};$ в) $\begin{cases} x=2\operatorname{ctg}t; \\ y=\ln\sin t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

21-30. Досліджувати методами диференціального числення функцію $y=f(x)$; використовуючи результати дослідження, побудувати її графік:

21. $y=x+\frac{x}{2};$ **26.** $y=x+\frac{4}{x^2};$

22. $y=\frac{x^2}{x\ \ +1}$; **27.** $y=\frac{x}{2-x^2}$;

23. $y=\frac{x}{x^2+1}$; **28.** $y=x^4-2x^2+3$;

24. $y=\frac{x^2-1}{x^2-4}$; **29.** $y=\frac{x}{(x+1)^2}$;

25. $y=\frac{(x-1)^2}{x}$; **30.** $y=x-\frac{1}{x}$.

31-40. Знайти частинні похідні другого порядку для функції:

31. $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; **36.** $z=\sin^2(ax+by)$;

32. $z=x\cdot\sin(x+y)$; **37.** $z=xy+\frac{x}{y}$;

33. $z=\frac{\cos x^2}{y}$; **38.** $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

34. $z=y^{\ln x}$; **39.** $z=\sqrt{2xy+y^3}$;

35. $z=\ln(x+y^2)$; **40.** $z=\frac{x}{y^2}$;

Блок №2

41-50. Обчислити невизначений інтеграл:

41. а) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3-4}}dx$; б) $\int\frac{\ln(2x+1)}{x^3}dx$;

42. а) $\int x3^x\,dx$; б) $\int\frac{x+2}{x^2-8x+15}dx$;

43. а) $\int\frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}}dx$; б) $\int x\cos 5x\,dx$;

44. а) $\int\frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+8x+20}$;

45. а) $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$; б) $\int \frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x} dx$;

46. а) $\int x^2 e^{3x} dx$; б) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x} dx$;

47. а) $\int \frac{x+\mathrm{arctg}x}{1+x^2} dx$; б) $\int x \ln(x^2+1) dx$;

48. а) $\int e^{3-5x} dx$; б) $\int \frac{x}{(1+x^2)\mathrm{arctg}x} dx$;

49. а) $\int x \sin x \cos x dx$; б) $\int \frac{x^2}{x^3-81} dx$;

50. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx$; б) $\int \arcsin x dx$;

51-60. Використовуючи визначений інтеграл, розв'язати задачі:

51. Стиск пружини пропорційно прикладеній силі. Обчислити роботу сили при стиску пружини на 0,08 м, якщо для стиску її на 0,01 м потрібна сила в 5 Н.
52. Визначити тиск води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого дорівнює 4 м і розташована на поверхні води, а вершина знаходиться на глибині 4 м.
53. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що її верхня основа b=50 м, висота 20 м і верхня основа збігається з рівнем води.
54. Знайти роботу, необхідну для того, що б викачати воду з циліндричної цистерни, що має радіус основи 2 м, а висоту 3 м.
55. Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати воду з конічної посудини, поверненої вершиною вниз, радіус основи якої дорівнює R, а висота H.
56. Яку роботу треба затратити, щоб тіло масою m підняти з поверхні Землі на висоту h, якщо сила притягання тіла Землею $F = K\frac{mM}{r^2}2$.
57. Обчислити силу тиску рідини на вертикальну стінку у формі половини еліпса з осями 2a і 2b, занурену в рідину (питома вага $\gamma = 1$) так, що верхня межа стінки збігається з поверхнею рідини.
58. Знайти роботу необхідну для того, щоб викачати воду з корита, яке має форму напівциліндра, $R = 2$ м, довжина $l = 6$ м.

59. Знайти кількість тепла, яке виділяється синусоїдальним струмом $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ у провіднику з опором R з періодом струму $T = 2\pi/\omega$, якщо відомо, що при постійному струмі кількість теплоти, яка виділяється за час t, визначається формулою $Q = 0.24 I^2 Rt$.

60. Циліндр із рухливим поршнем діаметром $D = 0{,}2$ м і довжиною $l = 0.8$ м заповнені парою при тиску $P = 10$ кг/см^2. Яку роботу треба затратити, що б при незмінній температурі обсяг пари зменшити в 2 рази?

61-70. Обчислити подвійний інтеграл:

61. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

62. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

63. $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

64. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

65. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

66. $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

67. $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

68. $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

69. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right) dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

70. $\iint\limits_D \left(5xy^2+7x^2y^4\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

Блок №3

71-80. Дослідити збіжність рядів:

71. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$; **76.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-2n^2-1}{3n+3-4n^2}\right)^{4n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)^3}$;

72. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$; **77.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)^2}$;

73. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n\cdot(n+1)^2}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$; **78.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^4-9}$;

74. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\cdot(n+2)}$; **79.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$;

75. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^3\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2+n^3}$; **80.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+1}}$;

81-90 . Знайти інтервал збіжності степеневого ряду.

81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)}$

82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$;

83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$;

84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-5)^n$

85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}x^n$;

86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n}x^n$;

88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n+1}\cdot(x+2)^n$

89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}x^n$;

91-100. Розвинути в ряд Фур'є функцію:

91. $f(x) = x^2 + 1$ на інтервалі $(-2, 2)$;

92. за синусами $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x$ на інтервалі $(0 < x < \pi)$;

93. $f(x) = \begin{cases} x+1, -\pi < x \le 0 \\ 0, 0 < x < \pi \end{cases}$;

94. $f(x) = x^2$ на відрізку $[-\pi; \pi]$;

95. $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi < x \le 0 \\ 2, 0 < x < \pi \end{cases}$

96. $f(x) = |x|$ на інтервалі $(-3, 3)$;

97. $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x \le 0 \\ 2x, 0 < x < \pi \end{cases}$;

98. $f(x) = x \cdot (7 - x)$ за синусами в інтервалі (0; 7).

99. $f(x) = x - 1$ на відрізку [1; 2].

100. $f(x) = x$ за косинусами на відрізку [0; 2] .

Блок №4

101-110. Знайти розв'язок диференціальних рівнянь:

101. а) $x^3 y' + y = 7$; б) $(2xy + y)\, y' = 3 - y^2$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

102. а) $x \cdot \ln y \cdot y' = x^3 y$; б) $y' - \frac{1}{x} y = x^2$;

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

103. а) $y' = xy + e^x \cdot y$; б) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;

в) $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 7$

104. а) $x\,y'\ln y - y = 0$; б) $y' - \frac{1}{x}y = x\ln x$;

в) $y'' - 6\,y' + 9\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

105. а) $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$; б) $(xy - x^2)dy = y^2 dx$;

в) $y'' + 4\,y' + 29\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$

106. а) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2+1}$; б) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$;

в) $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

107. а) $2x\sqrt{1-y^2}\;dx + y\,dy = 0$; б) $y' - \frac{1}{x}y = x^3 + 2$;

в) $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1/9$

108. а) $(y + xy)\,dx + (x - xy)dy = 0$; б) $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0$;

в) $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

109. а) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$; б) $y\,dy + (x - 2\,y)\,dx = 0$;

в) $y'' + 2\,y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

110. а) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; б) $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2\,xy\,dy = 0$;

в) $y'' - 3\,y' - 4\,y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 6$

111-120. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$; якщо:

111.

$z_1 = -7 + 4\,i$; $z_2 = 5 - 6\,i$; $z_3 = 4 - 3\,i$; $z_4 = \frac{103}{25} - \left(\frac{4}{25} + \sqrt{3}\right)i$

112.

$z_1 = 5 - 3\,i$; $z_2 = 2 + 4\,i$; $z_3 = 6 - 4\,i$; $z_4 = -\frac{49}{26} + \left(\frac{15}{26} + \sqrt{3}\right)i$

113.

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -4 - 5i$; $z_3 = 3 - 2i$; $z_4 = \sqrt{3} - \frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$

114.

$z_1 = 4 + 7i$; $z_2 = 6 + 5i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = -\frac{11}{13} - \left(\frac{10}{13} + \sqrt{3}\right)i$

115.

$z_1 = 2 - 7i$; $z_2 = 4 + 6i$; $z_3 = 5 + 2i$; $z_4 = \frac{94}{29} + \frac{3}{29}i$

116.

$z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 5 - 4i$; $z_3 = 2 + 3i$; $z_4 = \frac{11}{13} + \frac{3}{13}i$

117.

$z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = -7 + i$; $z_3 = 2 + 5i$; $z_4 = -\frac{7}{29} + \frac{3}{29}i$

118.

$z_1 = 2 + 7i$; $z_2 = -1 + 6i$; $z_3 = 5 - i$; $z_4 = \frac{7}{26} - \frac{5}{26}i$

119.

$z_1 = -3 - 7i$; $z_2 = 2 - 6i$; $z_3 = 5 + i$; $z_4 = \frac{21}{26} + \frac{11}{26}i$

120.

$z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1 - i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = \frac{11}{13} + \frac{7}{13}i$

121-130. Перевірити умови Коші - Рімана і знайти похідну $f'(x + iy)$:

121. $f(z) = 3(1 + z^2) + iz$, $f'(4 - i) = ?$

122. $f(z) = iz - 3z^2 + 5i$, $f'(1 + 2i) = ?$

123. $f(z) = 3z^2 - 2iz + 5i$, $f'(1 - 2i) = ?$

124. $f(z) = 3iz^2 + 5z + 4i$, $f'\left(\frac{i}{3}\right) = ?$

125. $f(z) = z^2 - 2z + 3i$, $f'(2i + 1) = ?$

126. $f(z) = \frac{5}{z}$, $f'(i) = ?$

127. $f(z) = 3i(1 - z)^2 + 3z$, $f'(1 - i) = ?$

128. $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$, $f'(i) = ?$

129. $f(z) = y + xi$, $f'(2 - i) = ?$

130. $f(z) = z^2 - 2z + 3i$, $f'(2i + 1) = ?$

131-140. Обчислити інтеграл:

131. $\int\limits_{AB} (2\bar{z} - 3z)dz$, якщо $z_A = -1$; $z_B = 2$.

132. $\int\limits_{AB} f(z)dz$ $f(z) = y - 5 - 2xi$, якщо $z_A = 2$; $z_B = -2i$.

133. $\int\limits_{AB} (3\bar{z} - 4i)\,dz$, якщо $z_A = -1 - i$; $z_B = i$.

134. $\int\limits_{AB} (4 - 2\bar{z})dz$, якщо $z_A = -2$; $z_B = 2 + i$.

135. $\int\limits_{AB} \left(x^2 + i\,2xy\right)dz$, якщо $z_A = i$; $z_B = 1 + 2i$.

136. $\int\limits_{AB} \left(3z^2 + 2z\right)dz$, якщо $z_A = -1 + i$; $z_B = 1 - i$.

137. $\int\limits_{AB} (z + 2)^2\,dz$, якщо $z_A = -2$; $z_B = -2 + i$.

138. $\int\limits_{AB} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$, якщо $z_A = i$; $z_B = 1 + i$.

139. $\int\limits_{AB} (3z + 2)^2\,dz$, якщо $z_A = -2$; $z_B = -2 + i$.

140. $\int\limits_{AB} \left(x^2 + i\,2xy\right)dz$, якщо $z_A = i$; $z_B = 1 + 2i$.

Методичні вказівки
для самостійної роботи та виконання
контрольної роботи (ч.1) з дисципліни
«Вища математика та математичні методи дослідження операцій»
(частина дисципліни «Вища математика»)

для студентів III курсу (інтегровані) заочної форми навчання
Напрям підготовки: Комп'ютерні науки та інформаційні технології

Укладачи: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф.,
Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф.,
Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц.,
Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н. доц.

Відп. ред: Глушков О.В., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета