МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Обчислення площ та об'ємів за допомогою кратних інтегралів»)
для студентів І курсу денної форми навчання
Спеціальність: Комп'ютерні науки

Затверджено
На засіданні групи забезпеченості спеціальності
Протокол №____ від ______Голова групи Мещеряков В.І.

Затверджено
На засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №____________ від _______________
Завідуючий кафедрою Глущков О.В._________

Одеса-2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Обчислення площ та об'ємів за допомогою кратних та криволінійних інтегралів»)
для студентів I курсу денної форми навчання
Спеціальність: Комп'ютерні науки

Затверджено
На засіданні групи забезпеченості спеціальності
Протокол №____ від ______Голова групи Мещеряков В.І.

Затверджено
На засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №____________ від _______________
Завідуючий кафедрою Глущков О.В.________

Одеса-2020

Методичні вказівки для виконання практичних робіт для студентів I курсу денної форми навчання по вивченню дисципліни «Вища математика» розділ «Обчислення площ та об’ємів за допомогою кратних та криволінійних інтегралів». Спеціальність: комп’ютерні науки.

Укладачі: Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф., кафедри вищої та прикладної математики

Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц.,кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

«Вища математика» є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки. Розділ спрямован на вивчення основних положень інтегрального числення, узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні задач у науково-практичній діяльності. Курс взагалом та розділ окремо, відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Інтегрування вищих навчальних закладів України до міжнародного освітнього простору зумовлює необхідність розробки та втілення у практику навчального процесу заходів, спрямованих на підвищення якості вищої освіти.

Мета вивчення розділу дисципліни «Вища математика» Кратні та криволінійні інтеграли відносяться до одного з основних розділів фундаментального циклу вищої математики, який базується на вивченні основних положень диференціального та інтегрального обчислення, та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково- практичній діяльності.

Завдання розділу «Обчислення площ та об'ємів за допомогою кратних інтегралів» - навчити студентів: використовувати вивчені методи вирішення задач, аналізувати отримані результати математичних обчислень. Вивчення розділу базується на використанні теоретичних та практичних знань, отриманих студентами у загально - освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. «Обчислення площ та об'ємів за допомогою кратних інтегралів» - один з найважливіших розділів курсу «Вища математика». Вивчення методів розв'язання задач по обчисленню площ та об'ємів, дає можливість застосовувати ці навички для постановки та розв'язку практичних задач у науково - практичній діяльності. Вивчення цього розділу базується на теоретичних та практичних знаннях курсу диференціального та інтегрального обчислення функції однієї та багатьох змінних. Вивчення матеріалу розділу базується на основі теоретичного матеріалу, який викладається на лекціях, на практичних заняттях, самоперевірках та модульного контролю.

В результаті студент повинен:

- знати основні методи обчислення двократних та трьохкратних інтегралів, криволінійних інтегралів, знаходити площі та об'єми поверхонь;
- вміти використовувати отримані знання при розв'язанні конкретних задач, застосовувати ці знання для подальшого вивчення дисциплін професійно-орієнтованого циклу, а також наукової роботи.

1.Програма розділу «Кратні та криволінійні інтеграли »

Поняття та існування подвійного інтеграла, його геометричний та механічний зміст. Властивості та обчислення подвійного інтеграла. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Поняття і існування потрійного інтеграла, його геометричний і механічний зміст. Властивості та обчислення потрійного інтеграла. Обчислення потрійних інтегралів у різних системах координат. Застосування подвійних та потрійних інтегралів до різноманітних задач .

Криволінійний інтеграл першого роду, його геометричний і фізичний зміст. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду. Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його властивості та обчислення. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду. Формула Гріна.

Після вивчення розділу “Обчисдення площ та об’ємів за допомогою кратних та криволінійних інтегралів ” студент повинен:

засвоїти базові знання - поняття та властивості подвійного інтеграла, потрійного інтеграла, криволінійних інтегралів першого та другого роду;

вміти використовувати базові знання та вміння при обчисленні кратних та криволінійних інтегралів, засвоїти навички обчислень за допомогою кратних та криволінійних інтегралів

2. ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ТА МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

При вивченні цього розділу дисципліни використовується така навчальна та методична література:

ЛІТЕРАТУРА:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. М.: Наука, 1978.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2. – М.: “Высшая школа”, 1986.
3. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Вища шк., 1987.
4. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969.
5. Г.М. Фихтенгольц «Основи математического анализа» М., «Наука», 1968.
6. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2013.

3. Загальні рекомендації студенту по вивченню розділу.

Основною формою навчання студента є аудиторна та самостійна робота над навчальним матеріалом. За допомогою методичних вказівок, студент має можливість побачити та розв'язати приклади типових завдань завдання роботи. Також досить цікавим є те, що вказівки містять опорний конспект до теми "Обчислення площ та об'ємів за допомогою кратних та криволінійних інтегралів", та короткий довідник модуля. Це все подано в доступній, розгорнутій формі і стане у нагоді студентам. Матеріал методичних вказівок дозволяє виробити практичні навички в обчисленнях площ та об'ємів за допомогою кратних та криволінійних інтегралів.

Модульні роботи на протязі навчального семестру (ОМ). Підсумки роботи студентів за досліджуваним розділом підводять виконані та зараховані модульні роботи (теоретичні та практичні) Роботи повинні виконуватися самостійно, тобто бути гарантією того, що даний розділ є засвоєний студентом.

Студент повинний виконувати завдання по варіантах, номер якого збігається з останньою цифрою його номера залікової книжки (шифру).

4. Основні поняття та розв'язання типових завдань практичної роботи

4.1 Подвійні інтеграли

Розглянемо на площині XOYдеяку область D, обмежену простим кусково-гладким контуром L, і функцію *f(x,y)*, визначену в *D*. Розіб'ємо область *D (Рис.1)* довільною сіткою на *n* елементарних частин D_i (*i* = 1; 2; 3; ..; *n*), кожна з яких має площу ΔS_i. Об'єднання всіх частин D_i має давати область *D* , а сусідні частини перетинаються лише по границях

В кожній елементарній області D_i беремо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ та складаємо інтегральну суму функції *f(x,y)* по області *D:*

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \quad (1)$$

Очевидна аналогія утвореної інтегральної суми з інтегральною сумою для визначеного інтеграла (по Ріману) $\int_b^a f(x)dx$.

Позначимо через λ_i діаметр елементарної області D_i, тобто найбільшу відстань між двома точками контура D_i, та нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i$. Розбиття на області D_i робимо так, щоб при збільшенні кількості елементарних областей $(n \to \infty)$ виконувалася умова $\lambda \to 0$.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$I = \lim_{n \to \infty (\lambda \to 0)} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i, \quad (2)$$

що не залежить від способу розбиття області *D* на елементарні частини D_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i) \in D_i$, то число I називається подвійним інтегралом функції $f(x, y)$ по області D і позначається:

$$I = \iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dxdy. \quad (3)$$

Область D називають *областю інтегрування*,x, y – *змінними інтегрування*; підінтегральна функція $f(x, y)$називається *інтегровною* по області D у випадку скінченного значення I.

Геометричний зміст подвійного інтеграла: Якщо функція $f(x, y) > 0$, то

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy$$

де V – об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y) \ge 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D , а твірні паралельні осі Oz.

4.2 Основні властивості подвійних інтегралів

Наведемо властивості подвійних інтегралів, що найчастіше зустрічаються в застосуваннях. Вони легко доводяться, виходячи з означення (2).

1. $\iint_D [C_1 f_1(x,y) \pm C_2 f_2(x,y)]dxdy = C_1 \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm$
$\pm C_2 \iint_D f_2(x,y)dxdy$, $C_1, C_2 - const$;

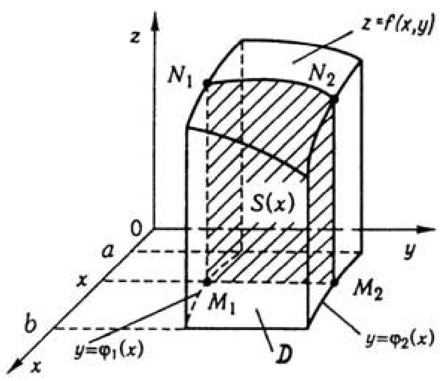
2. Якщо $f(x,y) \geq g(x,y)$ в області D, то
$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy$;

3. Якщо $D = D_1 \cup D_2 \quad (D_1 + D_2)$, області D_1 та D_2 не перетинаються, то
$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$
(адитивність по області інтегрування);

4. Нехай в області D виконуються умови: $m \leq f(x,y) \leq M$. Тоді:
$mS \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS$,
де S – площа області D;

5. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то існує точка $M_0(x_0,y_0) \in D$ така, що виконується умова:
$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \cdot S$,
звідки $f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy$ –*середнє* значення функції $f(x,y)$ в області D, S – площа області D.

Означення подвійного інтеграла одночасно дає і спосіб його обчислення. Однак цей спосіб досить складний, тому розглянемо інший, який зводиться до обчислення так званого повторного інтеграла двох визначених інтегралів.



Якщо $f(x,y) \geq 0$ для $(x,y) \in D$, то подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ виражає об’єм циліндричного тіла з основою D, обмеженого поверхнею $z = f(x,y)$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , а напрямною є межа області D (рис. 2). Обчислимо цей об’єм за допомогою методу паралельних

Рис.2 перерізів $V=\int_a^b S(x)dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x=a$ та $x=b$ – рівняння площин, що обмежують задане тіло.

Спочатку розглянемо випадок, коли область D обмежена прямими $x=a$, $x=b$, де $a<b$, та неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $x\in[a;b]$ (рис. 3.).

Провівши через точку (x;0;0) ($a<x<b$), перпендикулярну до осі Ox площину, дістанемо у перерізі криволінійну трапецію $M_1N_1N_2M_2$, яка перетне область D по прямій M_1M_2. Точку M_1 називатимемо точкою входу в область D, а точку M_2 – точкою виходу з неї. Їх ординати позначимо відповідно $y_{вх}, y_{вих}$. Тоді $y_{вх}=\varphi_1(x)$, $y_{вих}=\varphi_2(x)$. Визначена таким чином область називається правильною в напрямі осі Oy.

Правильна область в напрямі осі Oy зображена на рис.3, а правильна область в напрямі осі Ox – на рис. 4.

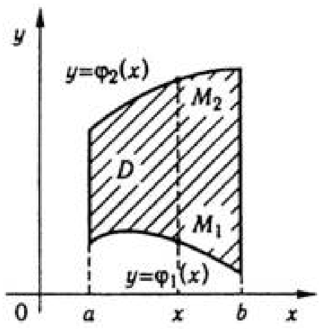


Рис. 3

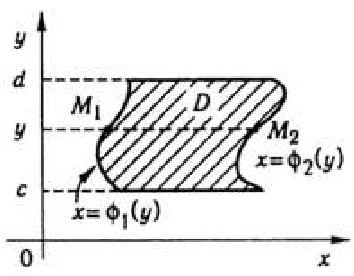


Рис. 4

Площа $S(x)$ трапеції $M_1N_1N_2M_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x)=\int_{y_{вх}}^{y_{вих}} f(x,y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\ .$$

Тоді отримаємо

$$V=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx\,.$$

Оскільки об’єм V циліндричного тіла дорівнює подвійному інтегралу $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, то маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (3)$$

Праву частину формули (3) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області D. У повторному інтегралі (3) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число – значення подвійного інтеграла.

Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x=\phi_1(y), x=\phi_2(y)$ і двома прямими $y=c, y=d$ $(c<d)$, причому $\phi_1(y)\le\phi_2(y)$ для всіх $y\in[c; d]$, то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (4)$$

У формулі (4) внутрішнім є інтеграл по змінній x. Обчислюючи його в межах від $\phi_1(y)$ до $\phi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, одержимо значення подвійного інтеграла. Визначена таким чином область D є правильна в напрямі осі Ox.

Якщо область інтегрування D є прямокутником, обмеженим прямими $x=a, x=b, y=c, y=d$ $(a<b, c<d)$, то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \qquad (5)$$

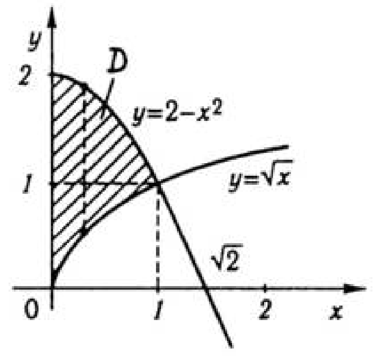
Для зведення подвійного інтеграла до повторного потрібно побудувати область інтегрування D, а потім визначити порядок інтегрування.

Приклад . Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. Маємо повторний інтеграл, записаний за формулою (3). Будуємо область D, враховуючи межі інтегрування. Вона обмежена лініями: $y = \varphi_1(x) = \sqrt{x}, \; y = \varphi_2(x) = 2 - x^2, \; x = 0, \; x = 1.$

Тому проекцією цієї області на вісь *Ox* є відрізок [0;1] (рис. 5). Якщо функція неперервна у заданій області D, то можна змінити порядок інтегрування і записати повторний інтеграл за формулою (4). Проекцією області *D* на вісь *Oy* є відрізок [0; 2]. Зліва область *D* обмежена прямою $\phi_1 = 0$, а справа – кривою



$$\phi_2(y) = \begin{cases} y^2, \; 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{2-y}\,, \; 1 \le y \le 2. \end{cases}$$

Рис. 5

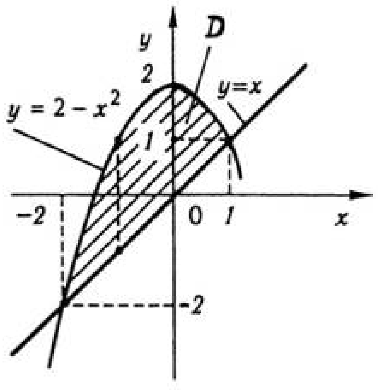
Тому маємо

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx.$$

Отже, при зміні порядку інтегрування іноді область *D* доводиться розбивати на дві (D_1 *і* D_2)або більше областей.

Приклад. Обчислити $\iint_D (1 + x - y)dxdy$, якщо область D, обмежена лініями $y = x, \; y = 2 - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо область D . Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь



$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; y_1 = 1, \; y_2 = -2$ (рис. 6).

Рис. 6

Оскільки область D правильна в напрямі осі Oy, то подвійний інтеграл обчислюється за формулою (3):

$$\iint_D (1+x-y)\,dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2}(1+x-y)\,dy = \int_{-2}^{1}\left(y+xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x}^{2-x^2} dx =$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2+x\left(2-x^2\right)-\frac{\left(2-x^2\right)^2}{2}-x-x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(x-x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{2\cdot 5}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-\frac{4}{2}+\frac{16}{4}-\frac{32}{2\cdot 5}+\frac{8}{2\cdot 3}=\frac{9}{20}.$$

4.3 Заміна змінних у подвійних інтегралах

Обчислення подвійних інтегралів $\iint_D f(x,y)dxdy$ в декартовій системі координат буває складним як через специфіку підінтегральної функції *f(x,y)*, так і області інтегрування *D*. В цих випадках для спрощення обчислення застосовують заміну змінних у подвійних інтегралах.

Розглянемо неперервно диференційовні функції (заміну, відображення):

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \qquad (1)$$

які взаємно однозначно відображають область $D_1(u,v)$в область $D(x,y)$. Це означає, що існує обернене до (1) неперервно диференційовне відображення

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases} \qquad (2)$$

яке однозначно відображає область $D(x,y)$ в область $D_1(u,v)$. Таким чином відображення (заміни) (2) і (1) кожній точці $M(x,y) \in D$ ставлять у відповідність єдину точку $M_1(u,v) \in D_1$ і навпаки.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1. Заміни (1) та (2) взаємно однозначно відображають область $D(x,y)$ в область $D_1(u,v)$;

2. Функції заміни (1) мають в області D_1 неперервні частинні похідні і

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

в області $D_1(u, v)$;

3. Функція *f(x,y)* є неперервною в області *D*.

Тоді справедливий перехід до нових змінних у подвійному інтегралі:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv\,. \qquad (4)$$

Визначник $J(u, v)$ в (3) називається *визначником Якобі, або якобіаном.*

В подвійних інтегралах часто застосовується перехід до полярної системи координат. Як відомо, декартові координати (x, y) зв'язані з полярними координатами (ρ, φ) такими умовами:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot cos\varphi, \\ y = \rho \cdot sin\varphi. \end{cases} \qquad (5)$$

Тоді:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} cos\varphi & -\rho \cdot sin\varphi \\ sin\varphi & \rho \cdot cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = \rho\,.$$

Отже:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(\rho\cos\varphi,\ \rho sin\varphi)\rho d\rho d\varphi\,. \qquad (6)$$

Зауваження:

Полярну систему координат зручно використовувати у випадках, коли функція *f(x,y)* або границя області D містять вирази $x^2 + y^2$.

Перетворення подвійного інтеграла від прямокутних координат *x, y* до полярних координат ρ,φ, пов'язаним з прямокутними координатами співвідношеннями $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$,здійснюється за формулою

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi\,.$$

Якщо область *D* обмежена лініями $\rho = \rho_1(\varphi), \rho = \rho_2(\varphi), \varphi = \alpha, \varphi = \beta$ (причому $\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$), де $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ – неперервні функції на відрізку $[\alpha\,;\beta]$, тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho, \qquad ()$$

де спочатку обчислюється інтеграл $\int^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$, у якому φ вважається сталою.

4.5 Деякі механічні застосування подвійних інтегралів

1. Маса матеріальної пластини з поверхневою густиною $\gamma'\Upsilon(x,y)$, що має форму області *D* в площині XOY, як ми вже говорили раніше обчислюється через подвійний інтеграл:

$m = \iint_D {}'\Upsilon\gamma(x,y)dxdy$;

2. Статичні моменти такої пластини відносно осей OX та OY (див. відповідні означення теоретичної механіки) можна представити у вигляді:

$M_x = \iint_D y'\Upsilon \cdot \gamma(x,y)dxdy$,

$M_y = \iint_D x'\Upsilon \cdot \gamma(x,y)dxdy$;

3. Координати $x_ц$ та $y_ц$ центра мас пластини, з урахуванням попередніх позначень, обчислюються за формулами:

$x_ц = \frac{M_y}{m}$, $y_ц = \frac{M_x}{m}$.

Приклад .

Обчислити площу області *D*, обмеженої лініями

$y = x^2,\ y = \frac{x^2}{4},\ y = 1,\ y = 4.$

► З рис. 12 видно, що задана область є правильною у напрямку осі OX. Отже:

$S_D = \iint_D dxdy = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx = \int_1^4 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})dy =$

$= \frac{2}{3} y^{3/2}|_1^4 = \frac{14}{3}$ (кв. од.) .◄

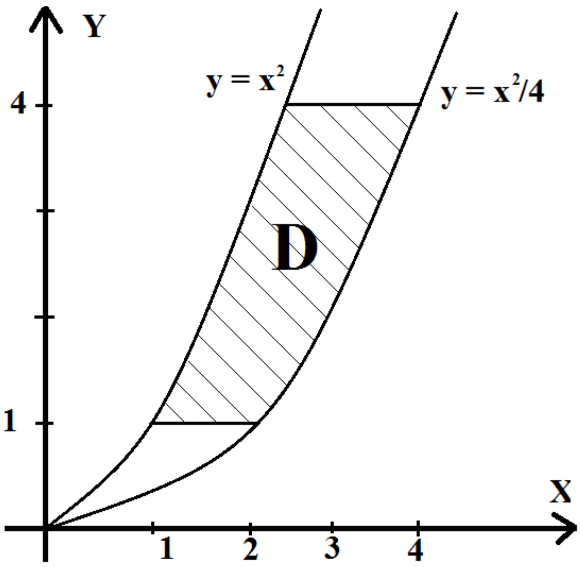


Рис. 12

Приклад . Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

► Виходячи з формули площі області D в декартовій системі координат $S_D=\iint_D dx\,dy$ і рівняння еліпса, обчислення зручніше провести в узагальненій системі координат : $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, $J(\rho,\varphi)=ab\rho$. Враховуючи форму еліпса (Рис. 13), очевидно що для внутрішньої його частини справедливі умови: $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1$.

Отже, $S=\iint_D dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 ab\rho d\rho=ab\cdot(\varphi)\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^1=$

$=ab\,2\pi\frac{1}{2}=\pi ab.$ (кв. од.).◄

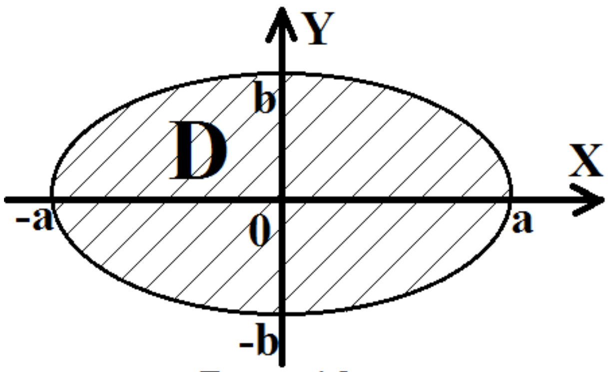


Рис. 13

Приклад . Обчислити об'єм циліндричного тіла, обмеженого поверхнями
$y=2x,\ y=-x,\ x=h,\ z=o,\ z=3x^2+y^2+2.$

► Рівняння $y=2x,\ y=-x,\ x=h$ задають площини в R^3, паралельні осі OZ. Ці площини, в сукупності, утворюють циліндричне тіло, обмежене знизу координатною площиною XOY ($z=o$), а зверху – еліптичним параболоїдом $z=3x^2+y^2+2$.

Основою циліндричного тіла є область D_{xy} в координатній площині XOY, яка зображена на рис. 14.

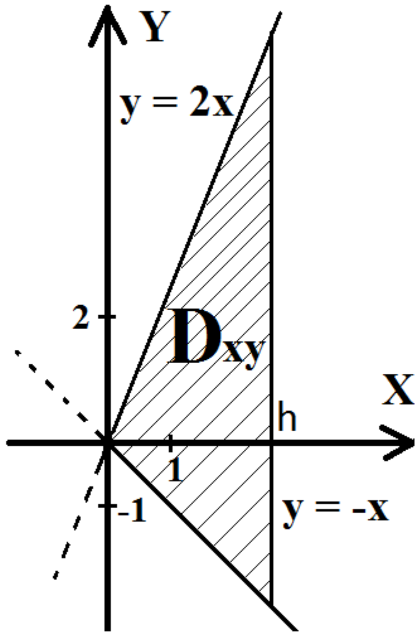


Рис. 14

Тоді:

$V=\iint_{D_{xy}}(3x^2+y^2+2)dxdy=\int_0^h dx\int_{-x}^{2x}(3x^2+y^2+2)dy=$

$=\int_0^h\left(3x^2(2x+x)+\frac{y^3}{3}|_{-x}^{2x}+\ 2(2x+x)\right)dx=\int_0^h(12x^3+6x)dx=$

$=3h^2(h^2+1)$.◄

Приклад . Знайти координати центра ваги матеріальної пластини D з густиною $\Upsilon\gamma(x,y)=xy^2$, обмеженої лініями
$y=\sqrt{3}x,\ y=0,\ x^2+y^2=R^2,$
при $x\geq 0.$

► Враховуючи задані умови, форму пластини D зобразимо на рис. 15.

Обчислення відповідних подвійних інтегралів проведемо в полярній системі координат. При цьому з рівняння $tg\varphi=\sqrt{3}$ (пряма $y=\sqrt{3}x$, Рис. 15) маємо гострий кут $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

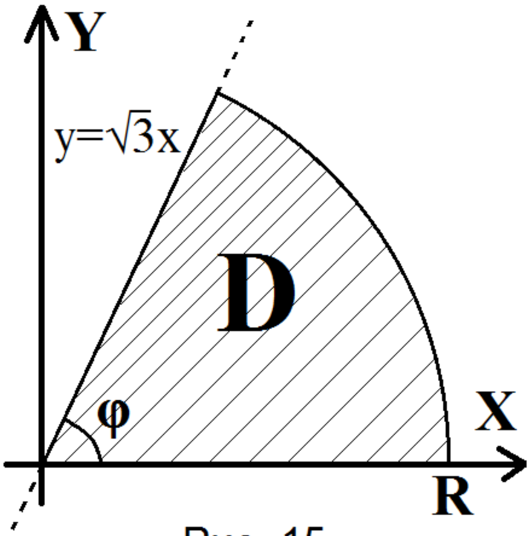


Рис. 15

Отже:

$$m = \iint_D xy^2dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ J = \rho \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R \rho cos\varphi \cdot \rho^2 sin^2\varphi \cdot \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^2\varphi\, cos\varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R = R^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{40};$$

$$M_x = \iint_D xy^3dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^3\varphi\, cos\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^6}{6}\Big|_0^R = R^6 \cdot \frac{3}{128}$$

;

$$M_y = \iint_D x^2y^2dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^2\varphi\, cos^2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{R^6}{6}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin^2 2\varphi}{4} d\varphi =$$

$$= \frac{R^6}{24}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-cos4\varphi}{2} d\varphi = \frac{R^6(8\pi+3\sqrt{3})}{1152}.$$

Тоді використовуючи наведені вище формули для координат центра мас пластини, будемо мати:

$$x_ц = \frac{M_y}{m} = \frac{R \cdot 5\sqrt{3}(8\pi+3\sqrt{3})}{432} \approx 0.61R,$$

$$y_ц = \frac{M_x}{m} = \frac{R \cdot 5\sqrt{3}}{16} \approx 0.54R. ◄$$

4.6 Потрійні інтеграли

Потрійні інтеграли є узагальненнями подвійних інтегралів з двовимірного простору R^2 на тривимірний простір R^3.

Розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$, яка визначена в скінченній області $G \subset R^3$. З допомогою сітки поверхонь розіб'ємо область G на n менших (елементарних) областей G_i $(i = 1,2, \ldots, n)$. Ці області не перетинаються і їх об'єднання складає область G ($\bigcup G_i = G$). Нехай об'єм кожної елементарної області G_i буде ΔV_i. Позначимо через λ найбільший діаметр $d(G_i)$ областей $G_1, G_2, \dots, G_n$, тобто

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(G_i).$$

За діаметр області G_i ми приймаємо відстань між двома найбільш віддаленими точками замкненої області G_i.

Виберемо в кожній елементарній області G_i довільну внутрішню точку $P_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму функції $f(x, y, z)$ по області G:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i \,. \qquad (1)$$

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i = I \,, \qquad (2)$$

що не залежить від способу розбиття області G на елементарні області G_i і не залежить від вибору точок $P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$, то число I називають потрійним інтегралом функції *f(x,y,z)* по області $G \subset R^3$ і позначають:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) dxdydz.$$

Тобто,

$$\iiint_G f(x, y, z) dxdydz = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\lambda \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i. \qquad (3)$$

Якщо скінченна границя (2) існує, то підінтегральну функцію $f(x, y, z)$ називають *інтегровною* в області G, x, y, z – *змінні інтегрування*, $dV = dxdydz$ – *елемент об'єму*.

Теорема. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в скінченній області $G \subset R^3$, то вона інтегровна в цій області G.

Слід нагадати, що неперервна в скінченній замкнутій області G функція $f(x, y, z)$ є обмеженою:

$$|f(x, y, z)| < M, \quad (x, y, z) \in G \,.$$

Зауваження:

1. При деяких додаткових умовах відносно функції $f(x, y, z)$ потрійний інтеграл (3) існує і для випадків, коли підінтегральна функція $f(x, y, z)$ має в скінченній області G розриви першого та другого родів;

2. Коли функція $f(x, y, z) \equiv \gamma(x, y, z)$ є об'ємною густиною матеріального тіла G, то $\gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$ дає наближене значення маси його частини G_i ($P_i(x_i, y_i, z_i) \in G_i$), а після утворення інтегральної суми і переходу до границі при $n \to \infty$ ($\lambda \to 0$)одержимо масу m цього тіла:

$$m = \iiint_G \gamma(x,y,z)dxdydz; \tag{4}$$

3. Якщо в попередній формулі покласти $\gamma(x,y,z) \equiv 1$, то отримаємо числове значення об'єму цього тіла:

$$V_G = \iiint_G dxdydz\,. \tag{5}$$

Властивості потрійних інтегралів

Із способу побудови інтегральних сум (1) і властивостей границі (2) випливають такі основні властивості потрійних інтегралів:

1. Лінійність:

$$\iiint_G (C_1 f_1(x,y,z) + C_2 f_2(x,y,z))dxdydz =$$
$$= C_1 \iiint_G f_1(x,y,z)dxdydz + C_2 \iiint_G f_2(x,y,z)dxdydz, \tag{6}$$

де C_1, C_2- дійсні сталі;

2. Адитивність по області інтегрування:

якщо $G = G_1 \cup G_2$, то

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dxdydz; \tag{7}$$

3. Теорема про середнє значення:

коли функція $f(x,y,z)$ неперервна в області інтегрування G, то існує точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in G$, для якої виконується умова:

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V_G.$$

Звідси,

$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V_G} \iiint_G f(x,y,z)dV$ *−середнє значення інтеграла* в області G,

V_G – об'єм області G.

4.7 Обчислення потрійних інтегралів у декартовій системі координат

Нехай область G має вигляд циліндричного тіла в напрямку осі OZ, яке зверху обмежене частиною поверхні $z = z_2(x,y)$, а знизу – частиною поверхні $z = z_1(x,y)$ і кожна з цих поверхонь однозначно проектується в область D_{xy} координатної площини XOY .

У цьому випадку після інтегрування по змінній z (x,y - постійні), потрійний інтеграл по області $G \subset R^3$, зводиться до подвійного інтеграла по області $D_{xy} \subset R^2$:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} [\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} [\Phi_1(x,y,z)|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)}]dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} [\Phi_1\big(x,y,z_2(x,y)\big) - \Phi_1(x,y,z_1(x,y))]dxdy.$$

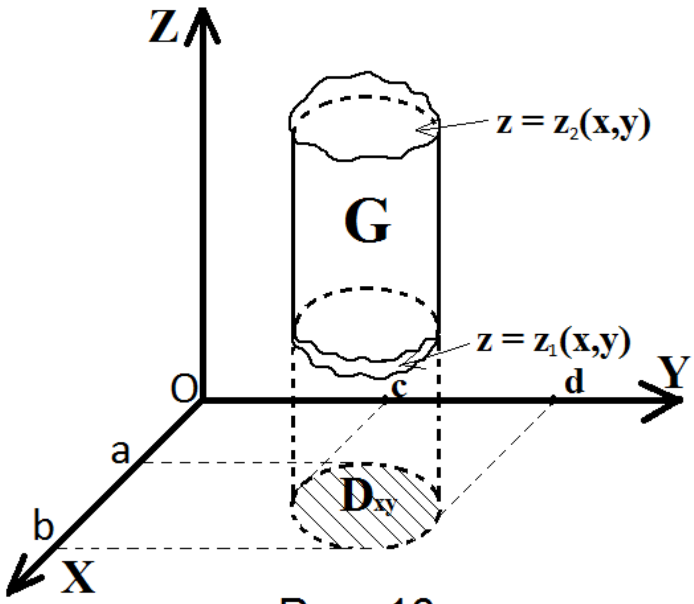


Рис. 16

Тут через $\Phi_1(x,y,z)$ позначено первісну $f(x,y,z)$ по змінній z, аргументи x,y при цьому вважаються постійними (параметрами).

Наступним кроком одержаний подвійний інтеграл зводиться до повторного з вибором послідовності інтегрування по змінних x та y в залежності від властивостей правильності відносно осей координат області D_{xy} .

Зауваження:

1. Циліндрична частина поверхні області G може бути відсутня;

2. Оскільки осі OX, OY, OZ в декартовій системі координат в загальному випадку рівноправні, то область G може мати аналогічне циліндричне розміщення відносно осі OX або OY. Тоді відповідним чином інтеграл $\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$ зводиться до подвійного інтеграла по області D_{yz}:

$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{yz}}[\dots]dydz$

при внутрішньому інтегруванні по змінній x (інші - постійні), або по області D_{xz}:

$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xz}}[\dots]dxdz$

при внутрішньому інтегруванні по змінній y (інші - постійні).

3. У найпростішому випадку область G є паралелепіпедом:

$a \le x \le b;\ c \le y \le d;\ l \le z \le k;$

тоді можна вибрати будь-який порядок інтегрування, наприклад:

$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^k f(x,y,z)dz$.

Приклад 1.

Обчислити $\iiint_G (y+z)dxdydz$, коли область G обмежена циліндричними поверхнями $y = e^x,\ y = x^e,\ x = 0$ та поверхнею $y = z^2$.

► Поверхні $y = e^x,\ y = x^e,\ x = 0$ паралельні осі OZ, область G зверху обмежується поверхнею $z = \sqrt{y}$, а знизу – поверхнею $z = -\sqrt{y}$ (вони містять вісь OX). Область D_{xy} (рис. 17) правильна і в напрямку осі OY, і в напрямку осі OX.

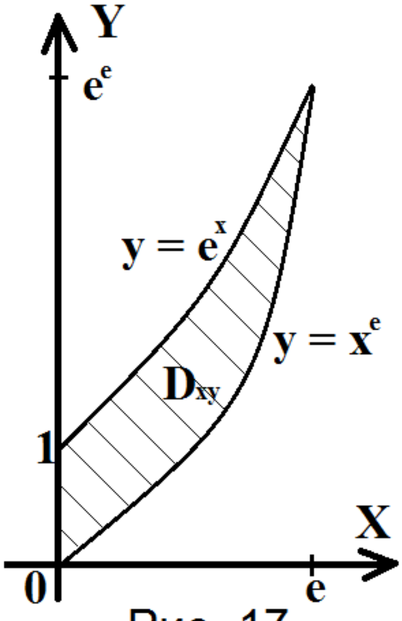


Рис. 17

Отже:

$\iiint_G (y+z)dxdydz = \iint_{D_{xy}}[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(y+z)dz]dxdy =$

$$= \int_0^e dx \int_{x^e}^{e^x} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y+z) dz = \int_0^e dx \int_{x^e}^{e^x} [\left(yz + \frac{z^2}{2}\right) \Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}] dy =$$

$$= \int_0^e dx \int_{x^e}^{e^x} 2y\sqrt{y}\, dy = 2 \int_0^e (\frac{2y^{5/2}}{5} \Big|_{x^e}^{e^x}) dx = \frac{4}{5} \int_0^e (e^{\frac{5x}{2}} - x^{\frac{5e}{2}}) dx =$$

$$= \frac{8(2\sqrt{e^{5e}} - 5e - 2)}{25(5e+2)}.$$

Приклад .

Обчислити $\iiint_G (xy+z) dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями: $z = 2y,\ y = 2\sqrt{z},\ z = 1,\ x = 0,\ x = y + z.$

► Поверхня $y = 2\sqrt{z}$ і площини $z = 2y,\ z = 1$ утворюють циліндричне тіло, бокова поверхня якого паралельна осі OX. Область G є частиною цього циліндра, обмеженого координатною площиною $x = 0$ (ZOY) і площиною $x = y + z$.

Спроектувавши циліндричну область G на координатну площину ZOY, одержимо область D_{yz} (рис. 18).

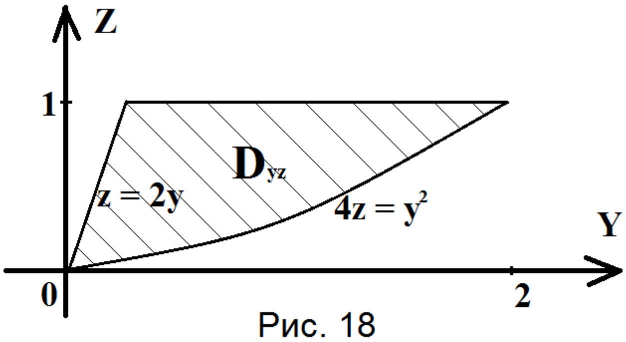


Рис. 18

Враховуючи паралельність осі OX бокової поверхні області G, будемо мати:

$$\iiint_G (xy+z) dxdydz = \iint_{D_{yz}} [\int_0^{y+z} (xy+z) dx] dzdy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{\frac{z}{2}}^{2\sqrt{z}} \left[\left(\frac{yx^2}{2} + zx\right)\Big|_0^{y+z}\right] dy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{\frac{z}{2}}^{2\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2}y^3 + y^2 z + \frac{1}{2}yz^2 + zy + z^2\right) dy =$$

$$= \int_0^1 [(\frac{y^4}{8} + \frac{y^3 z}{3} + \frac{y^2 z^2}{4} + \frac{y^2 z}{2} + z^2 y) \Big|_{\frac{z}{2}}^{2\sqrt{z}}] dz =$$

$$= \int_0^1 \left(4z^2 + \frac{3}{8}z^3 + \frac{14}{3}z^{5/2} + \frac{43}{384}z^4\right) dz = \frac{5257}{1920}.$$ ◄

4.8 Застосування потрійних інтегралів

1. *Об'єм області* $G \in R^3$. Як уже вказувалося раніше, об'єм області G обчислюється за формулою (5):

$V_G = \iiint_G dxdydz.$

2. *Маса матеріального тіла.* Використовуючи означення потрійного інтеграла, формулу (4) для обчислення маси матеріального тіла G з об'ємною густиною $\gamma(x, y, z)$:

$m = \iiint_G \gamma(x, y, z)dxdydz$

3. *Статичні моменти матеріального тіла* G відносно координатних площин (див. відповідні означення в теоретичній механіці) задаються формулами:

$M_{xy} = \iiint_G z\gamma(x, y, z)dxdydz$ (відносно площини XOY),

$M_{xz} = \iiint_G y\gamma(x, y, z)dxdydz$ (відносно площини XOZ),

$M_{yz} = \iiint_G x\gamma(x, y, z)dxdydz$ (відносно площини YOZ);

через $\gamma(x, y, z)$, як і раніше, позначаємо об'ємну густину тіла.

4. *Координати центра мас матеріального тіла* G, використовуючи попередні позначення:

$x_ц = \frac{M_{yz}}{m}$, $y_ц = \frac{M_{xz}}{m}$, $z_ц = \frac{M_{xy}}{m}$.

5. *Моменти інерції матеріального тіла* G відносно координатних площин:

$I_{xy} = \iiint_G z^2\gamma(x, y, z)dxdydz$ (відносно площини XOY),

$I_{xz} = \iiint_G y^2\gamma(x, y, z)dxdydz$ (відносно площини XOZ),

$I_{yz} = \iiint_G x^2\gamma(x, y, z)dxdydz$ (відносно площини YOZ).

Приклад .

Знайти координати центра ваги однорідного тіла G, обмеженого поверхнями конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ та параболоїда $z = 2 - x^2 - y^2$

► При обчисленні координат центра ваги однорідного тіла зручно брати густину цього тіла за одиницю ($\gamma(x, y, z) \equiv 1$).

Легко бачити, що поверхня конуса $z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0)$перетинається з поверхнею параболоїда $z = 2 - (x^2 + y^2)$ на поверхні площини $z = 1$ по колу $x^2 + y^2 = 1$, яке проектується на координатну площину XOY в коло $x^2 + y^2 = 1$ і породжує область D_{xy}: $x^2 + y^2 \leq 1$ (див. рис. 27).

З міркувань симетрії тіла G відносно осі OZ зрозуміло, що $x_ц = y_ц = 0$, а $z_ц = \frac{M_{xy}}{m}$ по приведеній вище формулі.

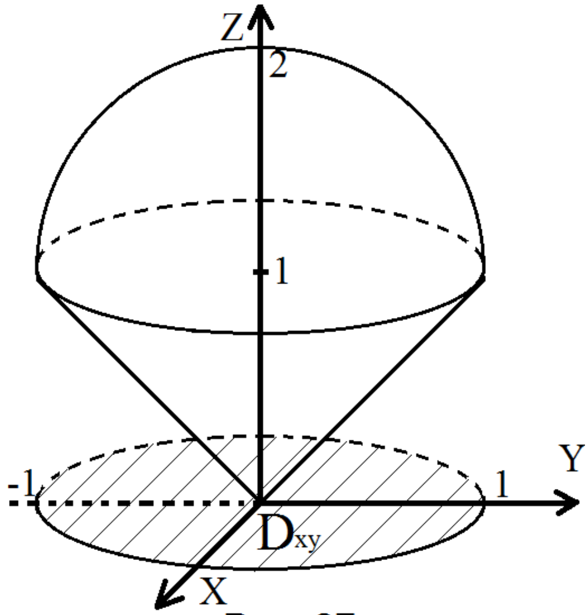


Рис. 27

При обчисленні m та M_{xy} використаємо циліндричну систему координат.

Маємо:

$$m = \iiint_G 1 \cdot dxdydz = \begin{vmatrix} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = z, \ I = \rho \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^{2-\rho^2} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho \left[z \Big|_\rho^{2-\rho^2} \right] d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho(2 - \rho^2 - \rho) d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{5\pi}{6};$$

$$M_{xy} = \iiint_G zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^{2-\rho^2} zdz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho [\frac{z^2}{2} \Big|_\rho^{2-\rho^2}] d\rho = \pi \int_0^1 \rho(4 - 5\rho^2 + \rho^4) d\rho = \frac{11\pi}{12}.$$

Отже:

$$z_ц = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{11\pi \cdot 6}{12 \cdot 5\pi} = \frac{11}{10}$$

і центр мас тіла має координати $(0; 0; \frac{11}{10})$.◄

Приклад .Обчислити об'єм прямого конуса з висотою $H > 0$, основою якого є еліпс з півосями a і b.

► Заданий конус можна описати рівнянням $z^2 = H^2(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ при $z \geq 0$ (рис. 28).

Очевидно, в перетині конічної поверхні площиною $z = H$ ми отримаємо еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ з півосями a і b.

Рівняння поверхні заданого конуса запишемо у вигляді $z = H\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ для $0 \leq z \leq H$. При обчисленні об'єму застосуємо узагальнену циліндричну систему координат. Отже,

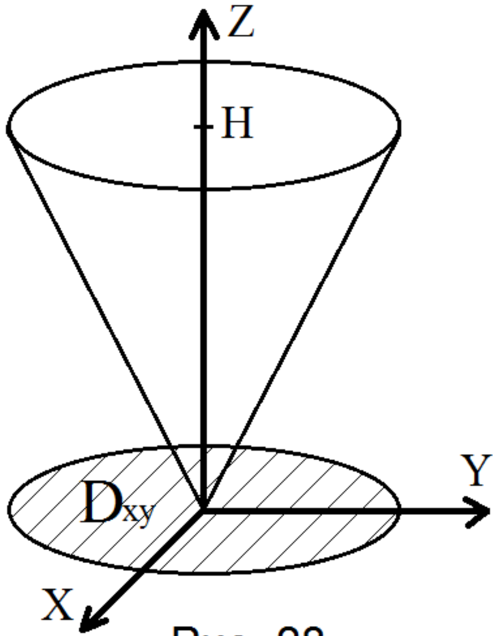


Рис. 28

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{H\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{H} dz = \left| \begin{array}{c} x = a\,\rho\cos\varphi\,, \\ y = b\,\rho\sin\varphi\,, J = ab\rho \\ z \equiv z, \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{H\rho}^{H} ab\,\rho\,dz = ab2\pi \int_0^1 \rho(H - H\rho)d\rho = 2\pi abH(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3})\Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi abH\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi abH\,.$$

Зауваження. При $a = b = R$ маємо прямий круговий конус і відому з середньої школи формулу

4.9 Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай на площині Oxy розміщена деяка крива AB, гладка або кусково-гладка (рис.8), і припустимо, що функція $z = f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій AB.

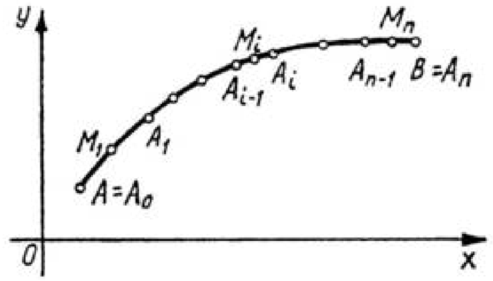


Рис. 8

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i, \qquad (1)$$

де Δl_i - довжина дуги $A_{i-1}A_i$. Сума (1) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y)$ по кривій AB.

Означення. Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають $\int\limits_{AB} f(x, y)dl$.

Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i . \qquad (2)$$

Якщо границя (2) існує, то функція $f(x,y)$ називається інтегрованою на кривій AB, крива AB – контуром інтегрування, A – початковою, а B – кінцевою точками інтегрування.

Криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтеграла за формулою:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{0}^{L} f\big(x(l), y(l)\big)dl, \qquad (3)$$

де L – довжина кривої AB. Формула (3) не тільки зводить криволінійний інтеграл до звичайного, але й доводить існування криволінійного інтеграла для функції $f(x,y)$, яка неперервна на кривій AB.

Хоча криволінійний інтеграл першого роду безпосередньо зводиться до визначеного, між цими поняттями існує наступна відмінність. В інтегральній сумі (12) величини Δl_i обов'язково додатні, незалежно від того, яку точку кривої AB ми рахуємо початковою, а яку – кінцевою, тобто

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{BA} f(x,y)\,dl,$$

у той час, як визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при перестановці меж інтегрування змінює знак.

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x)\geq 0$ представляє собою площу криволінійної трапеції , то криволінійний інтеграл $\int_{AB} f(x,y)dl$ при $f(x,y)\geq 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x,y)$ і паралельні осі Oz, а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy.

Якщо крива AB – матеріальна, тобто вздовж кривої розподілено з лінійною густиною $\gamma(x,y)$ деяку масу m, то

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\gamma(\xi,\eta_i)\Delta l_i = \int_{AB}\gamma(x,y)\,dl\ ,$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, де $x(t)$ і $y(t)$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ функції, а $f(x,y)$– функція неперервна вздовж цієї кривої, причому для визначеності будемо рахувати, що точці A відповідає значення $t=\alpha$, точці B – значення $t=\beta$. Тоді для будь-якої точки M, за правилом диференціювання інтеграла по верхній границі знаходимо

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt, \tag{4}$$

Здійснивши заміну змінної у визначеному інтегралі рівності (3), з урахуванням (4), одержимо

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt. \tag{5}$$

Зокрема, якщо крива AB явно задана одним із рівнянь $y=y(x)$, $x\in[a;b]$, або $x=x(y)$, $y\in[c;d]$, і відповідно функція $y(x)$ або $x(y)$ разом із похідною $y'(x)$ або $x'(y)$ неперервні відповідно

на відрізках $[a;\, b]$ або $[c;\, d\,]$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\int_{a}^{b} f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(t)\right)^2}dx. \tag{6}$$

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\int_{c}^{d} f\left(x(y),y\right)\sqrt{1+\left(x'(t)\right)^2}dy. \tag{7}$$

Якщо крива AB задана рівнянням у полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, то

$$dl=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi,$$

$$\int_{AB} f(x,y)dl=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi. \tag{8}$$

Поширимо поняття криволінійних інтегралів першого роду на просторові криві.

Розглянемо просторову криву AB, яку задано параметричними рівняннями $x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in[\alpha;\beta]$, де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, а функція $f(x,y,z)$ визначена і неперервна вздовж кривої AB. Внаслідок неперервності $x'(t), y'(t), z'(t)$ крива AB є гладкою і її нескінченно малі дуги еквівалентні до своїх хорд. Елементарну дугу dl з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами dx, dy, dz. Тоді

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

Таким чином, має місце повна аналогія з формулою (8). Тоді ясно, що

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t)) \qquad (x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\,dt. \qquad (9)$$

Приклад . Обчислити $\int_L (a+y^2)dl$, коли $L: y=ch\,x, -1\le x\le 1$.

► Маємо : $dl=\sqrt{1+sh^2x}dx=chx\,dx$.

Тоді

$\int_L (a+y^2)dl=\int_{-1}^{1}(a+ch^2x)chx\,dx=\int_{-1}^{1}(a+1+sh^2x)chx\,dx=$

$=(a+1)shx\Big|_{-1}^{1}+\frac{sh^3x}{3}\Big|_{-1}^{1}=2(a+1)sh1+\frac{2}{3}sh^3 1=$

$=\frac{2}{3}sh1(3a+3+sh^2 1)$.◄

Приклад . Обчислити масу дуги BAC еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ від точки $B(0;b)$ до точки $C(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{b\sqrt{2}}{2})$, при $a>b>0, x\ge 0$, з лінійною густиною $\gamma(x,y)=|xy|$.

При обчисленні маси m дуги BAC за формулою , скористаємося записом (представленням) еліпса в параметричній формі:

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

Менше значення параметра t вибираємо як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{2}=a\cos\alpha\,,\\ -\frac{b\sqrt{2}}{2}=b\sin\alpha,\end{cases}$$

а більше – з системи

$$\begin{cases} 0 = a\cos\beta, \\ b = b\sin\beta. \end{cases}$$

Очевидно, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Тоді

$$m = \int_l \gamma(x,y)dl = \int_{CAB} |xy| \sqrt{(x'_t)^2 + \left(y'_t\right)^2} dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ab|\cos t \sin t| \sqrt{a^2 sin^2 t + b^2 cos^2 t}\ dt =$$

$$= -ab\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos t \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)cos^2 t}\, dt +$$

$$+ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)cos^2 t} dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} z = a^2 - (a^2 - b^2)cos^2 t \\ dz = 2(a^2 - b^2)\cos t \sin t\ dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{-ab}{2(a^2-b^2)} \int_{\frac{a^2+b^2}{2}}^{b^2} \sqrt{z}\, dz + \frac{ab}{2\sqrt{a^2-b^2}} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{z}\, dz =$$

$$= \frac{ab\cdot 2}{2(a^2-b^2)\cdot 3} \left[-\sqrt{z^3} \Big|_{\frac{a^2+b^2}{2}}^{b^2} + \sqrt{z^3} \Big|_{b^2}^{a^2} \right] =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)} \left[a^3 - 2b^3 + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}{2\sqrt{2}} \right]. ◄$$

4.10 Криволінійні інтеграли II роду

Нехай функція $P(x,y)$ ($Q(x, y)$) визначена і обмежена на гладкій чи кусково- гладкій кривій AB у площині Oxy. На відміну від інтегралів першого роду крива AB розглядається як напрямна лінія.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] \equiv \quad (1)$$

$$\equiv \int_L P(\mathrm{x},\mathrm{y})dx + Q(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dy} -$$

так заведено позначати *криволінійний інтеграл II роду* (по координатах) вектора $\vec{F} = (P\,; Q)$, або, інакше, *лінійний інтеграл вектора* $\vec{F}$ (по дузі L).

Основні властивості криволінійних інтегралів II роду

1. Із способу побудови інтегральних сум (47) та наступного переходу до границі випливає залежність криволінійних інтегралів II роду він напрямку руху по дузі $L = AB$:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (1)$$

2. Якщо неперервна кусково-гладка крива L складається з декількох частин, наприклад, $L = AC + CB$, то справедлива властивість адитивності:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AC}(Pdx + Qdy) + \int_{CB}(Pdx + Qdy). \qquad (2)$$

Приклад . Обчислити роботу сили

$\vec{F} = z\bar{\imath} + x\bar{\jmath} + y\bar{k}$ по переміщенні матеріальної точки вздовж гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases} \text{для } 0 \le t \le \pi.$$

► Виходячи з формул при $P = z,\ Q = x,\ R = y$, маємо:

$$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_0^{\pi}[bt(-a\sin t) + a\cos t \cdot a\cos t + ab\sin t]dt =$$

$$= -ab\int_0^{\pi} t\,sint\,dt + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2t)dt + ab\int_0^{\pi}\sin t\,dt =$$

$$= -ab(-t\cos t + \sin t)\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi} - ab\cos t\ \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -ab\pi + \frac{a^2}{2}\pi + 2ab = \frac{\pi a^2}{2} - ab(\pi - 2)$$

5. Завдання для виконання практичного модуля:

Варіант №1

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

2. Обчислити $\int\limits_L \left(2y-6xy^3\right)dx+\left(2x-9x^2y^2\right)dy$; $L: \ x=\frac{1}{2}y^2$ від т.O (0; 0) до т.A (2; 2)

Варіант №2

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+48x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB} \left(\frac{x}{y}-2\right)dx-x^2y\,dy$, де AB – ломана ACB, A (2; 1), C (2; 4), B (3; 4).

Варіант №3

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(36x^2y^2-96x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB} xy\,dx+\frac{y}{x}dy$, де AB – ломана ACB, A (1; 2), C (5; 2), B (5; 4).

Варіант №4

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB} xy\,dx-x^2\,dy$; $y=\frac{1}{x}$ від т.A (1/2; 2) до т.B (1/3; 3).

Варіант №5

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB} (x-2y)dx-\frac{x}{y}dy$, де AB: $y=x^3$ від A (1; 1) до B (2; 4).

Варіант №6

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$.

2. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^3 ds$; $L: \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$.

Варіант №7

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(18x^2y^2+32x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,dy-(y-1)\,dx$; $AB: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, від А (1; 0) до В (0; 1).

Варіант №8

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(27x^2y^2+48x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$.

2. Обчислити $\int\limits_{L} y\,ds$; $L:\ y^2=2px$, відсічена параболою $x^2=2py$.

Варіант №9

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(4xy+3x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB}(1+x)\,dy+y\,dx$; $AB: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, від А (0; 2) до В (2; 0).

Варіант №10

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(12xy+9x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

2. Обчислити $\int\limits_{AB}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,ds$; $AB:\ y=2x$, від А (0; 0) до В (1; 2).

Варіант №11

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(8xy+9x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} -x\cos y\,dx+y\sin x\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (π; 2π).

Варіант №12

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(24xy+18x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} xy\,dx+(y-x)\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №13

1. Обчислити $\iint\limits_{D}\left(12xy+27x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L $\int\limits_{L} xy\,dx+(y-x)\,dy$ вздовж дуги параболи $y=x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №14

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(8\,x\,y+18\,x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L $\int\limits_L x\,y\,dx+\left(y-x\right)dy$ вздовж дуги параболи $y=x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №15

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}x\,y+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L $\int\limits_L x\,y\,dx+\left(y-x\right)dy$ вздовж дуги кубічної параболи $y=x^3$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №16

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}x\,y+9\,x^2y^2\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L 2\,x\,y\,dx+x^2\,dy$ вздовж дуги параболи $y=x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №17

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(24\,x\,y-48\,x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2\,x+y)\,dx-x^3\,dy$ вздовж дуги параболи $y=x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №18

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(6\,x\,y+24\,x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y\,dx-x\,dy$ вздовж еліпса $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$.

Варіант №19

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(4\,x\,y+16\,x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$ вздовж дуги кола $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

Варіант №20

1. Обчислити $\iint\limits_D \left(4\,x\,y+16\,x^3y^3\right)dx\,dy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (1; 0) та (0; 1)