МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання

контрольної роботи з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Розділ: Вища математика

для студентів I курсу заочної форми навчання

Спеціальність: комп'ютерні науки.

Одеса-2018

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів I курсу заочної форми навчання по вивченню дисципліни «Вища математика та математичні методи дослідження операцій», розділ «Вища математика» та виконанню контрольної роботи. Спеціальність: комп'ютерні науки

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф., Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц., Буяджи В.В., к.ф.-м.н., доц. кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки, гідрологія, метеорологія, екологія тощо, яка спрямована на вивчення основних положень диференціального і інтегрального числення, функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Вона відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета вивчення дисципліни - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни «Вища математика та математичні методи дослідження операцій» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Вивчення курсу базується на використанні теоретичних та практичних знань, отриманих студентами у загально - освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни. Після вивчення розділу студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – математичну символіку, основні визначення, основні теореми, передбачені програмою; вміти – влучно і стисло виражати математичну думку під час розв'язання конкретних задач, самостійно розв'язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

1. ПРОГРАМА РОЗДІЛУ « ВИЩА МАТЕМАТИКА»

1.1 Аналіз функції однієї змінної

Основні елементарні функції, їх властивості і графіки. Складні і зворотні функції. Границя функції в точці. Границя функції нескінченності. Обмеженість функції, яка має границю. Односторонні границі функції. Нескінченно малі та нескінченно великі функції і їх властивості. Арифметичні теореми про границі. Дві важливі границі. Неперервність функції. Властивості функції, безперервних на відрізку.

1.2 Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

Означення похідної, геометричний її зміст. Правила та методи диференціювання функцій. Похідна складної функції. Таблиця похідних. Диференціал функції, геометричний зміст його. Основні теореми диференціального числення. Похідні та диференціали вищого порядку. Правило Лопіталя. Повне дослідження функції: умови монотонності функції; екстремуми функції, необхідна та достатні умови; дослідження опуклості функції; точки перегину; асимптоти функцій. Поняття функції багатьох змінних. Частинні похідні та повний диференціал функції. Частинні похідні та диференціали вищого порядку.

1.3 Інтегральне числення функції однієї змінної

Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування функцій. Визначений інтеграл. Його геометричний та фізичній зміст. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона- Лейбниця. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Формула інтегрування частинами.
Невласні інтеграли.

1.4 Кратні і криволінійні інтеграли

Поняття, геометричний зміст та властивості подвійних інтегралів. Обчислення подвійних інтегралів у різних системах координат. Криволінійні інтеграли 1 та 2 роду, їх властивості і обчислення.

1.5 Числові та функціональні ряди

Числові ряди. Основні поняття, властивості збіжних рядів. Ознаки збіжності. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності. Розклад періодичних, парних і непарних функцій в ряд Фур'є. Ряди Тейлора і Маклорена.

1.6 Диференціальні рівняння

Основні поняття (розв'язок, загальний і частинний розв'язок, загальний інтеграл диференціальних рівнянь). Задача Коші. Найпростіші диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними; однорідні рівняння; лінійні рівняння; рівняння Бернуллі. Однорідні та неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Теорема про структуру загального розв'язку.

1.7 Теорія функції комплексної змінної

Комплексні числа в різних формах. Дії над комплексними числами. Функції комплексної змінної. Границя і неперервність функції. Похідна. Поняття функції аналітичної в області. Умови Коші - Рімана. Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Ряд Лорана.

2. ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ТА МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

При вивченні цих розділів дисципліни використовується така навчальна та методична література:

Основна:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1,2. М.: Наука, 1978.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1. – М.: “Высшая школа”, 1986.
3. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.1. –Одеса, 2013.
4. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2014.
5. Глушков О.В., Сербов М.Г., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Флорко Т.О. "Прикладна математика".-Одеса: Екологія. 2007.
6. Глушков О.В., Кругляк Ю.О., Чернякова Ю.Г., "Конспект лекцій лінійна алгебра." -Одеса, ТЕС, 2004. -117с
7. Глушков О.В., Амбросов С.В, Вітавецька Л.А., Лобода А.В., "Конспект лекцій математичне програмування." -Одеса, ТЕС. 2003- 95С.

Додаткова література:

8. Фихтенгольц В.М. Основы математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1964.
9. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Т.1. – М.: Наука, 1986.
10. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.

1. ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РОБОТІ НАД ДИСЦИПЛІНОЮ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Основною формою навчання студента-заочника є заочна - дистанційна, самостійна робота над навчальним матеріалом, що складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по навчальній та методичній літературі, розв’язування задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт. Під час заліково-екзаменаційної сесії проводяться лекційні та практичні заняття згідно навчальному плану. Крім того, студент має можливість звертатися по допомогу до викладача з запитаннями для одержання усної чи письмової консультації. Вказівки студенту по поточній роботі даються так само в процесі рецензування контрольних робіт. Однак студент повинний пам'ятати, що тільки при систематичній і завзятій самостійній роботі допомога викладачів університету виявиться досить ефективною. Завершальним етапом вивчення матеріалу III-го курсу дисципліни «Вища математика» є здача іспиту відповідно до навчального плану.

Контрольна робота у міжсесійний період (ОМ). Попередні підсумки роботи студентів за досліджуваним курсом підводить контрольна робота. Робота повинна виконуватися самостійно і служити деякою мірою і бути гарантією того, що даний розділ є засвоєний студентом.

Нижче наводиться таблиця номерів задач, що входять у контрольну роботу. Студент повинний виконувати контрольні завдання по варіантах, номер якого збігається з останньою цифрою його номера залікової книжки (шифру).

Таблиця 3.1 Номера задач.

Варіант											
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103	113
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106	116
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117

8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

2. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТА

4.1 Система контролю знань та вмінь

При самостійному вивченні дисципліни «Вища математика» контроль знань та вмінь студентів-заочників здійснюється за допомогою системи контролюючих заходів *поточного* та *підсумкового* контролю.

Поточний контроль здійснюється на протязі навчального року за формами: перевірка контрольної роботи, яку студенти виконують у міжсесійний період (ОМ), перевірка знань та вмінь студентів під час аудиторних занять протягом заліково-екзаменаційної сесії шляхом усного опитування та написання контрольної роботи (ОЗЕ).

Підсумковий контроль (ОПК) здійснюється у формі письмового іспиту. Термін проведення контролюючих заходів визначається графіком заочної форми навчання.

Загальну максимальну кількість балів, яку студент має змогу отримати за контрольну роботу у міжсесійний період (ОМ), складає 100 балів. Зарахована контрольна робота свідчить про те, що студент отримав за результатами перевірки не менше ніж 60% за роботу.

Студенти, які не отримали за контрольну роботу мінімальної кількості балів, повинні виконати інший варіант контрольної роботи, який представляється викладачем, або виправити помилки попереднього варіанту та отримати відповідну кількість балів для допуску до іспиту.

Контрольна робота, яку студенти виконують під час аудиторних занять, включає теоретичну та практичну частини, які охоплюють основні питання розділу дисципліни. Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за цей вид роботи складає 60 балів. Також за усне опитування студент може отримати 40 балів. Таким чином, загальна максимальна оцінка під час аудиторних занять складає 100 балів.

Студент вважається допущеним до іспиту (ОПК) з дисципліни, якщо він виконав всі види робіт поточного контролю, передбачені робочою навчальною програмою дисципліни і набрав за накопичувальною системою суму балів не менше 50% від максимально можливої за дисципліну, своєчасно виконав міжсесійну контрольну роботу.

Іспит проводиться тільки у письмовій формі за білетами , які розробляються викладачами та затверджуються у встановленому порядку. Екзаменаційний білет формується у вигляді тестових завдань закритого типу, які потребують від студента вибору правильних відповідей з запропонованих у запитанні. Кількість тестових завдань в кожному білеті дорівнює 20. Кожна правильна відповідь оцінюється в 5 балів. Загальна екзаменаційна оцінка еквівалентна відсотку правильних відповідей із загального обсягу питань екзаменаційного білету.

Накопичена підсумкова оцінка (ПО) засвоєння студентами заочної форми навчальної дисципліни розраховується, як:

$$ПО = 0{,}5ОПК+0{,}25(ОЗЕ+ОМ).$$

Таким чином студент може отримати максимально 100 балів (%).

Якісна оцінка є такою:

- 90-100 балів – «відмінно»;
- 74-89 балів – «добре»;
- 60-73 балів – «задовільно»;
- менше 60 балів – «незадовільно».

4.2 Перевірка самостійної роботи студента дистанційною формою контролю

При перевірці самостійної роботи в міжсесійний період використовуються елементи дистанційної форми контролю, тобто в таблиці 4.1 наведені терміни контролю вивчення дисципліни за блоками змістовних модулів.

Таблиця 4.1 – Терміни перевірки контрольної роботи у міжсесійний період.

Змістовний модуль	Блок	Строк контролю
1. Аналіз функції однієї змінної. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінної.	Елементарні функції та їх основні властивості. Границя та неперервність функції. *Завдання 1-10*	1-5 жовтня
	Похідна, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Диференціал функції. Застосування похідної. Поняття функції багатьох змінних. Частинні похідні та повний диференціал функції. *Завдання 11-40*	1-5 листопада

2. Інтегральне числення функції однієї змінної. Кратні і криволінійні інтеграли	Первісна. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування: заміна змінної, інтегрування частинами. Інтегрування різних класів функцій. Визначений інтеграл. Його геометричний та фізичний зміст. Властивості та обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона–Лейбниця. Заміна змінних та інтегрування частинами. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії, механіки і фізики. Невласні інтеграли. Поняття, геометричний зміст та властивості подвійних інтегралів. Обчислення подвійних інтегралів у різних системах координат. Криволінійні інтеграли 1 та 2 роду, їх властивості і обчислення. *Завдання 41-70*	1-5 грудня
3. Ряди	Числові ряди. Додатні ряди та основні ознаки їх збіжності. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена. Ряди Фур'є для періодичних функцій. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій. *Завдання 71-90*	1-5 лютого
4. Звичайні диференціальні рівняння.	Основні типи диференціальних рівнянь І-го порядку та засоби їх розв'язання. Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференц. рівняння, що розв'язуються пониженням порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами. *Завдання 91-100*	1-5 березня
5. Теорія функцій комплексної змінної	Комплексні числа в різних формах. Дії над комплексними числами. Функція комплексної змінної. Границя і неперервність функції. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коши-Рімана.Аналітичність функції. Інтеграл ФКП. *Завдання 101-120*	1-5 квітня

5. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

5.1 Питання для самоперевірки

Література: [3] гл. II-IV ; [4] гл. I-III, гл.V; [7] гл. VII, § 3-12; гл. IX, § 1-6; гл. X, § 2-12; гл. XIII, § 1-8; гл. XIII, гл. XIV

1. Визначення границі послідовності, границі функції.
2. Нескінченно мала та нескінченно велика функції та їх властивості.
3. Основні теореми про границі функцій.
4. Перша та друга чудові границі.
5. Безперервна функція в точці і на відрізку.
6. Визначення похідної. Який її механічний і геометричний зміст?
7. Правила обчислення похідної двох функцій.
8. Формула диференціювання складної функції.
9. Визначення диференціалу функції.
10. Таблиця похідних функцій.
11. Похідна та диференціали вищих порядків.
12. Поняття функції багатьох змінних, область визначення.
13. Частинні похідні та повний диференціал функції.
14. Первісна, невизначений та визначений інтеграл, властивості.
15. Геометричний зміст визначеного інтегралу.
16. Таблиця невизначених інтегралів.
17. Методи заміни перемінної та за частинами в невизначеному інтегралі.
18. Методи заміни перемінної та за частинами в визначеному інтегралі.
19. Фізичні застосування визначеного інтеграла.
20. Подвійні інтеграли, обчислення та властивості.
21. Визначення криволінійних інтегралів, їхні основні властивості й обчислення.
22. Числові ряди. Додатні ряди та основні ознаки їх збіжності.
23. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди.
24. Функціональні та степеневі ряди. Радіус збіжності степеневого ряду.
25. Ряди Тейлора і Маклорена.
26. Ряди Фур'є для періодичних функцій.
27. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій.
28. Рівняння з відокремлюваними змінними та їх розв'язок.
29. Однорідні рівняння першого порядку та їх розв'язок.
30. Лінійні рівняння та рівняння Бернуллі, та їх розв'язок.
31. Однорідні та неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
32. Комплексні числа в різних формах.
33. Дії над комплексними числами.
34. Функції комплексної змінної.
34. Похідна функції комплексної змінної. Умови Коші - Рімана.
35. Поняття функції аналітичної в області.
36. Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості.

5.2 Розв’язання типових завдань контрольної роботи

Розглянемо типові приклади.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+5}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\frac{-1-1}{-1-5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x-3}-1\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5}{x-3}(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{10x+5}{x-3}}=e^{10}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=tg(\ln x^2)$.

Розв’язання. По правилу визначення похідної складної функції маємо:

$$y'=\left(tg(\ln x^2)\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\left(\ln x^2\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\left(x^2\right)'=$$

$$\frac{1}{\cos^2\left(\ln x^2\right)}\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{\cos^2\left(\ln x^2\right)x}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції, заданої параметрично: $\begin{cases}x(t)=\ln ctgt\\ y(t)=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}$.

Розв’язання. Знаходимо:

$$x'_t=\frac{1}{ctgt}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)=-\frac{1}{\sin t\cos t},\quad y'_t=-2\cos^{-3}t\cdot\left(-\sin t\right)=\frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin t \sin t \cos t}{\cos^3 t} = -2tg^2 t.$$

Приклад 5. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції $z = 3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)'_x = 3y^2\left(x^2\right)' + 15y^3 \cdot (\sin x)' = 6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)'_x = 3x^2\left(y^2\right)' + 15\sin x \cdot \left(y^3\right)' = 6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)'_x = 6y^2 - 15y^3 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x\right)'_y = 6x^2 + 90y\sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)' = 12yx + 45y^2 \cdot \cos x.$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл: $\int e^{x^2+6x}(x+3)dx$.

Розв'язання. Якщо позначити $U = x^2 + 6x$, то $dU = (2x+6)dx = 2(x+3)dx$, вихідний інтеграл відразу прийме табличний вигляд:

$$\int e^{x^2+6}(x+3)dx = \left| \begin{matrix} U = x^2 + 6x \\ dU = 2(x+3)dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int e^U dU = \frac{1}{2}e^U + C = \frac{1}{2}e^{x^2+6x} + C.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл: $\int (x+5)\sin x dx$.

Розв'язання.

Інтеграл береться з використанням формули інтегрування за частинами:

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Позначимо $U = x + 5$; $dV = \sin x dx$, тоді $dU = dx$; $V = -\cos x$.

Маємо

$$\int (x+5)\sin x dx = -(x+5)\cos x + \int \cos x dx = -(x+5)\cos x + \sin x + C.$$

Приклад 8. Обчислити $\iint\limits_D (1 + x - y)\,dx\,dy$, якщо область D, обмежена лініями $y = x,\ y = 2 - x^2$.

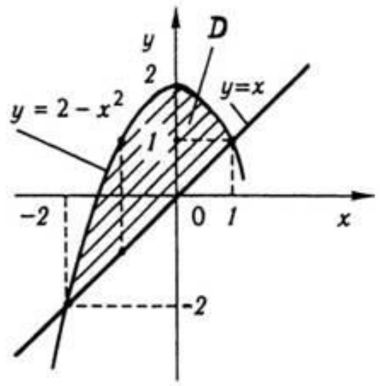

Рис.5.1

Розв’язання. Побудуємо область D. Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ y_1 = 1,\ y_2 = -2$ (рис. 5.1). Оскільки область D правильна в напрямі осі Oy, то подвійний інтеграл дорівнює:

$$\iint_D (1 + x - y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (1 + x - y)\,dy = \int_{-2}^{1} \left(y + xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 + x\left(2 - x^2\right) - \frac{\left(2 - x^2\right)^2}{2} - x - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^{1} \left(x - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{x^3}{2\cdot 3} \right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{32}{2\cdot 5} + \frac{8}{2\cdot 3} = \frac{9}{20}.$$

Приклад 9. Знайти загальний розв`язок однорідного диференціального рівняння $(x - y)dy = (x + y)dx.$

Розв’язання.

Запишемо це рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}.$ Розділимо чисельник і знаменник правої частини на x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Покладемо $t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = xt \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx}.$

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t + x\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1 + t^2}{1 - t}.$

Відокремлюємо змінні: $\dfrac{1 - t}{1 + t^2}dt = \dfrac{dx}{x}.$

Звідки

$$arctgt-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)=\ln|x|+C \text{ або } arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{y^2}{x^2})=\ln|x|+C.$$

Приклад 10. Знайти загальний розв`язок лінійного диференціального рівняння $y'-2xy=2x^3$.

Розв’язання. Робимо заміну: $y=u\cdot v,\quad y'=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}.$

Підставляємо в рівняння: $\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}-2xuv=2x^3.$

Покладемо

$$\begin{cases}\frac{dv}{dx}-2xv=0\\ \frac{du}{dx}=2x^3.\end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи: $\frac{dv}{v}=2xdx;\Rightarrow \ln|v|=x^2;\Rightarrow v=e^{x^2}.$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dx}e^{x^2}=2x^3;\Rightarrow du=2x^3e^{-x^2}dx;\Rightarrow$$

$$u=\int 2x^3e^{-x^2}dx=\begin{bmatrix} t=-x^2\\ dt=-2xdx\end{bmatrix}=-\int te^t dt=\begin{bmatrix}\text{за частинами:}\\ \mathrm{u=t;\ dv=e^t}dt\\ du=dt; v=e^t\end{bmatrix}=$$

$$=-te^t+\int e^t dt=-te^t+e^t+C=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C.$$

Шуканий розв`язок

$$y=u\cdot v=(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C)e^{x^2}=x^2+1+Ce^{x^2}.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y''-4y'+20y=0.$

Розв’язання. Характеристичне рівняння: $k^2-4k+20=0\Rightarrow$ $k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-20}=2\pm 4i$ - комплексні корені.

Загальний розв`язок $y=e^{2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x).$

Приклад 12. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y''-9y'+14y=0.$

Розв’язання. Характеристичне рівняння: $k^2-9k+14=0\Rightarrow$ $k_1=2, k_2=7$ - дійсні та нерівні корені.

Загальний розв`язок $y=C_1e^{2x}+C_2e^{7x}.$

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряди з додатними членами:

$$\sum_{n=i}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}=\frac{3(3)!}{1^5}+\frac{3^2(4)!}{2^5}+\frac{3^3(5)!}{3^5}+\ldots+\frac{3^n(n+2)!}{n^5}+\ldots$$

Для дос лідження ряду на збіжність застосуємо ознаку Д’Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^5}\cdot\frac{n^5}{3^n(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\cdot\frac{(n+2)!\cdot(n+3)}{(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\cdot(n+3)= \text{З}$$

$$=3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\cdot\lim_{n\to\infty}(n+3)=\infty$$

начить ряд розбігається.

Приклад 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}=\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4\cdot 2}\right)^6+\left(\frac{4}{4\cdot 3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{u}+\frac{1}{u}}{\frac{4n}{u}}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{4}\right)^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}<1$$

Значить ряд збігається

Приклад 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}=\left(\frac{2}{2}\right)^1+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(\frac{4}{6}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0<1$$

Ряд збігається.

Приклад 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}=\frac{1}{1+9}+\frac{1}{4+9}+\frac{1}{9+9}+\ldots+\frac{1}{n^2+9}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+9}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2+9}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_1^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$$

Інтеграл збігається, а значить збігається і ряд.

Приклад 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{3n+1}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо необхідну ознаку збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}\neq 0$. Значить даний ряд розбігається.

Приклад 18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{15}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\ldots$

Для дослідження ряду на збіжність застосуємо ознаку порівняння, записану у графічній формі:

Нехай дано два знакододатних ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ збігаються чи розбігаються одночасно. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Цей ряд називається гармонічним. Він розбігається.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}\cdot\dfrac{n}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{1-\frac{1}{n^2}}}=1\neq 0$. Значить даний ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ теж розбігається.

6. ПЕРЕЛІК ЗАВДАНЬ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1-10. Знайти границю функції.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^7-3x^2+5}{1-x^2+2x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{3x+16}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-3}\right)^{2x}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+4x^2+1}{7x^5-x^3+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{8-x}-\sqrt{4+x}}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{5+x}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{11}-11x^5-5}{5-x-7x^{11}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+5x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{6}{x}}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+7x+1}{2-x+9x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+2}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x+5}\right)^{3x+2}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+5}{7x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}{2x^2+5x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^x$;

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x+8x^7}{14x^7-x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-3x-28}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{\arcsin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{3x}}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-8x^3+7}{2x^4+5x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 7x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{2-x}}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^9+9}{3+x^7+7x^9}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-4x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 tg2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$;

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-17x^2}{6x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{7x+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\mathrm{tg}5x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^{x-2}$

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+5x-7x^3}{5x^3+2x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{8x}$;

11-20. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ для заданих функцій а), б), в) і похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ – для функції г) :

11. а) $y=\ln\cos x+0.5\mathrm{tg}^2 x$; б) $y=(x^2+1)^{\mathrm{arctg}x}$;

в) $(x-y)e^x=e^y$; г) $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

12. а) $y=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2}$; б) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$;

в) $y=\mathrm{ctg}(xy)$; г) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{t-1}; \\ y=\dfrac{t^2}{t-1},\ t\neq 1 \end{cases}$

13. а) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{x-1}{x+2}+0.5\ln(x^2+1)$; б) $y=(x^2+1)^{\cos x}$;

в) $\sqrt{y}-\sqrt[3]{x}=2$;

г) $\begin{cases} x=e^{y} \\ y=e^{t}\cos t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

14. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$;

б) $y=(\arcsin x)^{0.5x}$;

в) $\cos y=x-y$;

г) $\begin{cases} x=a\sin 2t; \\ y=b\cos 2t,\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

15. а) $y=e^{2x^2}(3+2x^2+2x^4)$;

б) $y=(\mathrm{tg}\sqrt{x})^{2x}$;

в) $3y=\sin(x-y)$;

г) $\begin{cases} x=t+\mathrm{arctg}t; \\ y=\ln(1+t^2),\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

16. а) $y=\dfrac{2}{\mathrm{ctg}x-1}+\ln\mathrm{tg}x$;

б) $y=(x-5)^{\sin 3x}$;

в) $x-y=e^{x+y}$;

г) $\begin{cases} x=t^3-1 \\ y=\dfrac{1}{3}(t^2-1),\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

17. а) $y=(\arccos\dfrac{1}{x})^3+\sqrt{x^2-1}$;

б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln 2x}$;

в) $y^2=x\sin y$;

г) $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\ln 2t,\ t\in(0,\infty). \end{cases}$

18. а) $y=\mathrm{arcctg}x-\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

б) $y=(x^3+1)^{\mathrm{ctg}2x}$

в) $e^{y}\sin y=\cos x$;

г) $\begin{cases} x=a\arccos t; \\ y=e^{\sqrt{1-t^2}},\ t\in[-1,1]. \end{cases}$

19. а) $y=(x^2+4)\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}$;

б) $y=(\sin 2x)^{\sqrt{x}}$;

в) $\ln y+y/x=2$;

г) $\begin{cases} x=3e^{-t}; \\ y=e^{2t},\ t\in(0,\infty) \end{cases}$

20. а) $y=4\sqrt{x^2-4}-(\arcsin\dfrac{2}{x})^2$;

б) $y=(\ln 3x)^{2/3}$;

в) $\cos(xy)-3x=0$;

г) $\begin{cases} x=2\mathrm{ctg}t; \\ y=\ln\sin t,\ t\in(0,\pi). \end{cases}$

21-30. Досліджувати методами диференціального числення функцію $y = f(x)$; використовуючи результати дослідження, побудувати її графік:

21. $y = x + \frac{x}{2}$; **26.** $y = x + \frac{4}{x^2}$;

22. $y = \frac{x^2}{x \ \ +1}$; **27.** $y = \frac{x}{2 - x^2}$;

23. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; **28.** $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

24. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$; **29.** $y = \frac{x}{(x+1)^2}$;

25. $y = \frac{(x-1)^2}{x}$; **30.** $y = x - \frac{1}{x}$.

31-40. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції:

31. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; **36.** $z = \sin^2(ax + by)$;

32. $z = x \cdot \sin(x + y)$; **37.** $z = xy + \frac{x}{y}$;

33. $z = \frac{\cos x^2}{y}$; **38.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

34. $z = y^{\ln x}$; **39.** $z = \sqrt{2xy + y^3}$;

35. $z = \ln(x + y^2)$; **40.** $z = \frac{x}{y^2}$;

41-50. Обчислити невизначений інтеграл:

41. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 4}} dx$; б) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$; в) $\int \frac{x}{x^2 - 7x + 13} dx$;

42. а) $\int x 3^x dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$; в) $\int \frac{x+2}{x^2 - 8x + 15} dx$;

43. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}}dx$; б) $\int x\cos 5x dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$;

44. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; б) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$;

45. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$; в) $\int \frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$;

46. а) $\int x^2e^{3x}dx$; б) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}dx$;

47. а) $\int \frac{x+arctgx}{1+x^2}dx$; б) $\int x\ln(x^2+1)dx$; в) $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6}dx$;

48. а) $\int e^{3-5x}dx$; б) $\int \frac{x}{(1+x^2)arctgx}dx$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$;

49. а) $\int x\sin x\cos x dx$; б) $\int \frac{x^2}{x^3-81}dx$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+7}}dx$;

50. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}dx$; б) $\int \arcsin x dx$; в) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$;

51-60. Використовуючи визначений інтеграл, вирішити задачі:

51. Стиск пружини пропорційно прикладеній силі. Обчислити роботу сили при стиску пружини на 0,08 м, якщо для стиску її на 0,01 м потрібно сила в 5 Н.

52. Визначити тиск води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого дорівнює 4 м і розташоване на поверхні води, а вершина знаходиться на глибині 4 м.

53. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що її верхня основа b=50 м, висота 20 м і верхня основа збігається з рівнем води.

54. Знайти роботу, необхідну для того, що б викачати воду з циліндричної цистерни, що має радіус основи 2 м, а висоту 3 м.

55. Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати воду з конічної судини, зверненого вершиною вниз, радіус основи якого дорівнює R, а висота H.

56. Яку роботу треба затратити, щоб тіло масою m підняти з поверхні Землі на висоту h, якщо сила притягнення тіла Землею $F = K\frac{mM}{r^2}2$.

57. Обчислити силу тиску рідини на вертикальну стінку у формі половини еліпса з осями 2a і 2b, занурену в рідину (питома вага $\gamma = I$) так, що верхня границя пластини збігається з поверхнею рідини.

58. Знайти роботу необхідну для того, щоб викачати воду з корита, яке має форму напівциліндру, $R = 2$ м, довжина $l = 6$ м.

59. Знайти кількість тепла, яке виділяється синусоїдальним струмом $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ у провіднику з опором R с періодом струму $T = 2\pi/\omega$, якщо відомо, що при постійному струмі кількість теплоти, яка виділяється за час t, визначається формулою $Q = 0.24I^2Rt$.

60. Циліндр із рухливим поршнем діаметра $D = 0{,}2$ м і довжині $l = 0.8$ м заповнені парою при тиску $P = 10$ кг/см^2. Яку роботу треба затратити, що б при незмінній температурі обсяг пари зменшити в 2 рази?

61-70. Обчислити подвійний інтеграл:

61. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

62. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

63. $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

64. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

65. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

66. $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

67. $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

68. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

69. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

70. $\iint\limits_D \left(5xy^2+7x^2y^4\right)dx\,dy$; де область D, обмежена графіками $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$.

71-80. Дослідити збіжність рядів:

71. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)}$

72. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(4n-3)\cdot 8^n}$

73. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n\cdot(n+1)^2}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

74. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\cdot(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n+1}\cdot(x+2)^n$

75. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^3\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2+n^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

76. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-2n^2-1}{3n+3-4n^2}\right)^{4n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\,(n+1)\cdot(n+2)}$

77. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n+1)}$

78. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^4-9}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

79. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

80. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n5^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$

81-90. Розвинути в ряд Фур'є функцію:

81. $f(x) = x$, на інтервалі $(-\pi < x < \pi)$;

82. за синусами $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}x$ на інтервалі $(0 < x < \pi)$;

83. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ x, & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$;

84. $f(x) = x^2$ на відрізку $[-\pi; \pi]$;

85. за косинусами $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$;

86. $f(x) = \cos ax$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

87. $f(x) = \sin ax$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

88. $f(x) = x \cdot (7 - x)$ за синусами в інтервалі (0; 7).

89. $f(x) = x - 1$ на відрізку [1; 2].

90. $f(x) = x$ за синусами на відрізку [0; 2] .

91-100. Знайти розв'язок диференціальних рівнянь:

91. а) $x^3 y' + y = 7$; б) $(2xy + y)\,y' = 3 - y^2$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

92. а) $x \cdot \ln y \cdot y' = x^3 y$; б) $y' - \dfrac{1}{x} y = x^2$;

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

93. а) $y' = xy + e^x \cdot y$; б) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

в) $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 7$

94. а) $x\,y'\ln y - y = 0$; б) $y' - \frac{1}{x}y = x\ln x$;

в) $y'' - 6\,y' + 9\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

95. а) $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$; б) $(xy - x^2)dy = y^2 dx$;

в) $y'' + 4\,y' + 29\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$

96. а) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2+1}$; б) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$;

в) $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

97. а) $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,dy = 0$; б) $y' - \frac{1}{x}y = x^3 + 2$;

в) $y'' - 5\,y' + 6\,y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1/9$

98. а) $(y + xy)\,dx + (x - xy)dy = 0$; б) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;

в) $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

99. а) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$; б) $y\,dy + (x - 2y)\,dx = 0$;

в) $y'' + 2\,y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

100. а) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; б) $(y^2 - 3x^2)dy + 2\,xy\,dy = 0$;

в) $y'' - 3\,y' - 4\,y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 6$

101-110. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$; якщо:

101.

$z_1 = -7 + 4i$; $z_2 = 5 - 6i$; $z_3 = 4 - 3i$; $z_4 = \frac{103}{25} - \left(\frac{4}{25} + \sqrt{3}\right)i$

102.

$z_1 = 5 - 3i$; $z_2 = 2 + 4i$; $z_3 = 6 - 4i$; $z_4 = -\frac{49}{26} + \left(\frac{15}{26} + \sqrt{3}\right)i$

103.

$z_1 = 2+3i$; $z_2 = -4-5i$; $z_3 = 3-2i$; $z_4 = \sqrt{3} - \frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$

104.

$z_1 = 4+7i$; $z_2 = 6+5i$; $z_3 = 3+2i$; $z_4 = -\frac{11}{13} - \left(\frac{10}{13} + \sqrt{3}\right)i$

105.

$z_1 = 2-7i$; $z_2 = 4+6i$; $z_3 = 5+2i$; $z_4 = \frac{94}{29} + \frac{3}{29}i$

106.

$z_1 = 3-2i$; $z_2 = 5-4i$; $z_3 = 2+3i$; $z_4 = \frac{11}{13} + \frac{3}{13}i$

107.

$z_1 = 3-4i$; $z_2 = -7+i$; $z_3 = 2+5i$; $z_4 = -\frac{7}{29} + \frac{3}{29}i$

108.

$z_1 = 2+7i$; $z_2 = -1+6i$; $z_3 = 5-i$; $z_4 = \frac{7}{26} - \frac{5}{26}i$

109.

$z_1 = -3-7i$; $z_2 = 2-6i$; $z_3 = 5+i$; $z_4 = \frac{21}{26} + \frac{11}{26}i$

110.

$z_1 = 7+i$; $z_2 = -1-i$; $z_3 = 3+2i$; $z_4 = \frac{11}{13} + \frac{7}{13}i$

111-120. Перевірити умови Коші - Рімана і знайти похідну $f'(x+iy)$:

111. $f(z) = 3(1+z^2) + iz,\quad f'(4-i) = ?$

112. $f(z) = iz - 3z^2 + 5i,\quad f'(1+2i) = ?$

113. $f(z) = 3z^2 - 2iz + 5i,\quad f'(1-2i) = ?$

114. $f(z) = 3iz^2 + 5z + 4i,\quad f'\left(\frac{i}{3}\right) = ?$

115. $f(z) = z^2 - 2z + 3i,\quad f'(2i+1) = ?$

116. $f(z) = \frac{5}{z},\quad f'(i) = ?$

117. $f(z) = 3i(1-z)^2 + 3z,\quad f'(1-i) = ?$

118. $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi,\quad f'(i) = ?$

119. $f(z) = y + xi,\quad f'(2-i) = ?$

120. $f(z) = z^2 - 2z + 3i,\quad f'(2i+1) = ?$

Методичні вказівки
для самостійної роботи студентів
та виконання контрольної роботи з дисципліни
Вища Математика та
Математичні методи дослідження операцій
Розділ Вища математика
для студентів 1 курсу заочної форми навчання
напрям підготовки – комп’ютерні науки

Укладачі:
Глушков О.В., д.ф-м.н., проф.
Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф.,
Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц.,
Буяджи В.В., к.ф-м.н., доц.

Відповідальний редактор:
Глушков О.В., д.ф-м.н., проф.

Одеський Державний Екологічний Університет
65016, Одеса, вул. Львівська, 15, кімната 408 (головний корпус)