МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Розділ «Комплексні числа та дії з ними»)
для студентів 1 року денної форми навчання усіх спеціальностей

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від _______ Голова групи__________Чугай А.В.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ______ Голова групи________Герасимов О.І.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ______ Голова групи_________Губанова О.Р.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ____ Голова групи_______Шакірзанова Ж.Р.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від _____ Голова групи_________Павленко О.П.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від _____ Голова групи________Мещеряков В.І.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №_____від _____ Голова групи___________Шекк П.В.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ______ Голова групи__________Смірнова К.В.

«Затверджено»
на засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №___від ______ Зав. кафедри ________ Глушков О.В.

Одеса 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Комплексні числа та дії з ними»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

Одеса 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Комплексні числа та дії з ними»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

"Узгоджено"
на факультеті магістерської підготовки

Одеса 2020

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни “Вища математика“ (розділ «Комплексні числа та дії з ними») для студентів 1 року денної форми навчання усіх спеціальностей.

Одеса, ОДЕКУ, 2020 р., 28 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц
Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н.,проф.,Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц

ЗМІСТ

I ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальностей екологія, туризм, науки про Землю, комп'ютерні науки тощо. Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні задач і аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни.

В результаті вивчення цього розділу студент повинен:

знати – основні визначення, теореми, форми запису комплексних чисел, правила виконання алгебраїчних дій над ними у різних формах, геометричний сенс комплексних чисел, їхнє застосування у різних розділах вищої математики, фізики;

вміти – використовувати теоретичні знання та навички при виконанні різноманітних практичних задач, у яких застосовується математичний апарат комплексних чисел, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

1.2 Зміст розділу

Множина комплексних чисел (КЧ). Зв'язок із іншими числовими множинами.

Алгебраїчна форма запису комплексних чисел. Дії над КЧ в алгебраїчній формі.

Тригонометрична форма запису комплексних чисел . Дії над КЧ у тригонометричній формі.

Показникова форма запису комплексних чисел. Дії над КЧ у показниковій формі.

Зв'язок між формами запису комплексних чисел. Формула Ейлера.

Застосування комплексних чисел .

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2. М. «Высшая школа», 1986.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1976.
3. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М., “Наука”, 1971.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., “Наука”, 1972.
7. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.3. –Одеса, 2016.
8. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.
9. Бараненков Г. С. (и др.) Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Демидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.
10. Бугров Я. С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., «Наука», 1981.
11. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.
13. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв’язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною. Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт та індивідуальних завдань, що оцінюються згідно з робочою програмою. Всі роботи повинні виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що дана дисципліна є засвоєною студентом.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми. Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі, які наведені у конспекті лекцій з дисципліни. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних та індивідуальних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв’язання типових задач.

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач

Література: [1], гл.III, §8, [2], гл.XVII, §1-6, [3], гл.IV, §1-3, вправи 1-6, 21-25, 38-42, 50-53, 59-62, 65-69, 73, 74, 83; §5,6,7, вправи 137, 138, 144-146, 150, 172, 176, 177; §9(2), вправи 264, 265, 268, 269, 271, [4], гл.XI, §1-5; гл.XII, §1.

Довідковий матеріал

Комплексне число (в алгебраїчній формі)- вираз $z = x + iy$, де x, y – дійсні числа; i – *уявна одиниця*, $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$. Числа x і y називаються відповідно *дійсною і уявною частинами* комплексного числа z. Позначаються $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$. *Множина всіх комплексних чисел* позначається C. Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне, у якого $y = 0$. Таким чином, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C. Комплексне число $z = iy = 0 + iy$, $y \neq 0$, називається *чисто уявним*. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються *рівними*, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини. Комплексне число *дорівнює нулю* $z = 0$, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Для комплексних чисел не існують поняття "більше", "менше". Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, називаються *комплексно спряженими*. Очевидно, що $\bar{\bar{z}} = z$.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції <u>додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня</u> здійснюються за правилами дій над багаточленами з врахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \ \ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) .$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) .$$

Добуток двох комплексно спряжених чисел $z = x + iy$ і $\overline{z} = x - iy$ є дійсним числом: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Натуральні степені уявної одиниці:

$$i^{4k} = 1, \ i^{4k+1} = i, \ i^{4k+2} = -1, \ i^{4k+3} = -i .$$

При піднесенні комплексного числа до натурального степеня можна застосовувати відомі з елементарної математики формули скороченого множення.

Ділення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$ виконується так: 1) треба чисельник і знаменник дробу z_1/z_2 домножити на число $\overline{z}_2$, спряжене до знаменника z_2; 2) врахувати, що $i^2 = -1$, і звести подібні; 3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі.

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} .$$

Для комплексних чисел залишаються справедливими всі теореми, правила, формули, що виведені для дійсних чисел на основі цих властивостей.

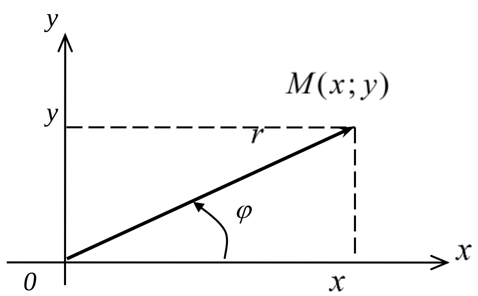

Рис.1

Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа

Якщо на площині введено прямокутну

декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність. C називається *комплексною площиною*. Якщо на комплексній площині (рис. 1) ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M(x;y)$, що зображує комплексне число $z = x + iy$ можна задати полярними координатами $M(r;\varphi)$. Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається *модулем* комплексного числа z і позначається $|z| = r$. Очевидно, що $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $Arg\, z = \varphi$. Аргумент φ, як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (довільного числа повних обертів Отже, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Головне значення аргументу визначається за формулою: $\arg z = arctg\,(y/x)$. Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю $r = |0| = 0$, а аргумент φ довільний.

Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Оскільки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Це *тригонометрична форма* комплексного числа. Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ \varphi = arctg\,(y/x)$$

Якщо звернутись до *основної формули Ейлера*

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi\,,$$

то від тригонометричної форми можна перейти до *показникової форми* комплексного числа

$$z=re^{i\varphi}\,.$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\ \text{і}\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\ –$$

два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$z_1z_2=r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big);\quad z_1z_2=r_1r_2\,e^{(\varphi_1+\varphi_2)i}\,;$$

Якщо ж до того $z_2\neq 0$, то їх частка:

$$\frac{z_1}{z_2}==\frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big);\ \frac{z_1}{z_2}==\frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}\ ;$$

Натуральним степенем z^n комплексного числа z називається (перша формула Муавра):

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

Коренем n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається (друга формула Муавра):

$$\sqrt[n]{z}==\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де $k=0,1,2,\ldots,n-1$;

Приклади розв’язання задач

Приклад №1.

Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z = 3(2-3i)(2-i)-(3-i)^3+5(4-5i):(3+4i).$$

Розв’язання.

Виконуємо дії як над багаточленами:

$$z = 3(2-3i)(2-i)-(3-i)^3+5(4-5i):(3+4i) = 3(4-2i-$$

$$-6i+3i^2)-27+27i-9i^2+i^3+5\cdot\frac{(4-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$$

$$=3(4-2i-6i-3)-27+27i+9-i+5\cdot\frac{12-16i-15i+20i^2}{9-16i^2} =$$

$$=3(1-8i)-18+26i+5\cdot\frac{12-16i-15i-20}{9+16} =$$

$$=3-24i-18+26i+\frac{-8-31i}{5} = -15+2i+\frac{-8-31i}{5} =$$

$$=(-75+10i-8-31i)/5 = (-83-21i)/5 = -83/5 - i\cdot(21/5).$$

Відповідь: $z = -\frac{83}{5}-\frac{21}{5}i$

Приклад №2.

Довести тотожність:

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx = \sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x \Big/ \sin\frac{x}{2}.$$

Розв’язання.

Перейдемо до експонент, скористаємося формулою часткової суми геометричної прогресії, потім від експонент повернемось до тригонометричних функцій:

$$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\operatorname{Re}\left(e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{inx}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{e^{ix}\left(e^{inx}-1\right)}{e^{ix}-1}=\operatorname{Re}\frac{e^{ix}e^{inx/2}\left(e^{inx/2}-e^{-inx/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)}=$$

$$=\operatorname{Re}\left(e^{i(n+1)x/2}\cdot\frac{e^{inx/2}-e^{-inx/2}}{2i}\cdot\frac{2i}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}e^{i(n+1)x/2}\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big/\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\Big/\sin\frac{x}{2}.$$

Приклад №3.

Зобразити на комплексній площині і подати в тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1=-\sqrt{3}+i\,;\;\; z_2=2-2i\,;\;\; z_3=2i\,;\;\; z_4=-2\,;\;\; z_5=-2-i\,.$$

Розв'язання.

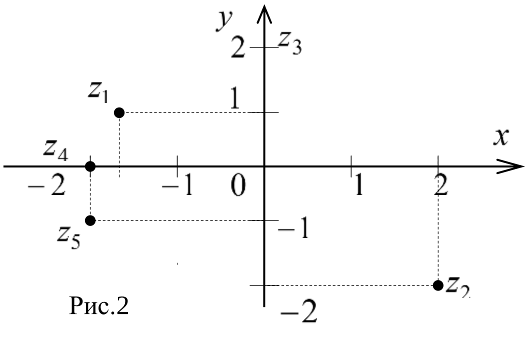

Рис.2

Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис.2). Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з даних чисел та запишемо їх у тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{z_1=-\sqrt{3}+i}:\;\; x_1=-\sqrt{3};\;\; y_1=1;\;\; |z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2\,;$$

$$\arg z_1=\operatorname{arctg}\left(y_1/x_1\right)+\pi,\;\; x_1<0, y_1\ge 0\,;$$

$$\arg z_1=\operatorname{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right)+\pi=-\pi/6+\pi=5\pi/6\,;$$

$$z_1 = 2\left(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)\right); \quad z_1 = 2e^{i(5\pi/6)}$$

$\underline{z_2 = 2 - 2i}$: $\quad x_2 = 2; \quad y_2 = -2; \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\sqrt{2}$;

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}(y_2/x_2), \; x_2 > 0; \; \arg z_2 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4;$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right); \quad z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{-i(-\pi/4)}.$$

$\underline{z_3 = 2i}$: $\quad x_3 = 0; \quad y_3 = 2; \quad |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2$;

$$\arg z_3 = \pi/2, \; x = 0; \; y > 0; \; z_3 = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right); \quad z_3 = 2e^{i(\pi/2)}.$$

$\underline{z_4 = -2}$: $\quad x_4 = -2; \quad y_4 = 0; \quad |z_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = 2$;

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg}(y_4/x_4) + \pi, \; x_4 < 0, y_4 \ge 0;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi; \quad z_4 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right); \quad z_4 = 2e^{i\pi}.$$

$\underline{z_5 = -2 - i}$: $\quad x_5 = -2; \quad y_5 = -1; \quad |z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5}$;

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(y_5/x_5) - \pi, \; x_5 < 0, y_5 < 0; \; \arg z_5 = \operatorname{arctg}(1/2) - \pi;$$

$$z_5 = \sqrt{5}\, e^{i(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi)}; \; z_5 = \sqrt{5}\left(\cos(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi) + i\sin(\operatorname{arctg}(1/2) - \pi)\right).$$

Приклад №4.

Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3} - i\right)^{40}$.

Розв'язання.

Запишемо число $\sqrt{3} - i$ в тригонометричній формі

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)\right).$$

За першою формулою Муавра

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{40}=\left(2\left(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)\right)\right)^{40}=$$

$$=2^{40}\left(\cos(-20\pi/3)+i\sin(-20\pi/3)\right)=2^{40}\left(\cos(-6\pi-2\pi/3)+\right.$$

$$\left.+i\sin(-6\pi-2\pi/3)\right)=2^{40}\left(\cos(-2\pi/3)+i\sin(-2\pi/3)\right)=$$

$$=2^{40}\left(-1/2+i\cdot\sqrt{3}/2\right)=-2^{39}+i\cdot 2^{39}\sqrt{3}\,.$$

Приклад №5.

Знайти всі значення кореня:

а) $\sqrt{-9i}$; б) $\sqrt[3]{i-1}$.

Розв'язання.

а) Запишемо підкореневе число $-9i$ в тригонометричній формі

$$-9i=9\left(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)\right).$$

За другою формулою Муавра

$$\sqrt{-9i}=\sqrt{9\left(\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)\right)}=$$

$$=\sqrt{9}\left(\cos\frac{-\pi/2+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\pi/2+2\pi k}{2}\right)=$$

$$=3\left(\cos(-\pi/4+\pi k)+i\sin(-\pi/4+\pi k)\right)\text{ , де } k=0,1.$$

При $k=0$: $\sqrt{-9i}=3\left(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)\right)==3\sqrt{2}/2-i\cdot 3\sqrt{2}/2$.

При $k=1$: $\sqrt{-9i}=3\left(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right)==-3\sqrt{2}/2+i\cdot 3\sqrt{2}/2$.

б) Запишемо підкореневе число $i-1$ в тригонометричній формі

$$i-1=\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right).$$

За другою формулою Муавра

$$\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right), \text{ де } k=0,1,2\,.$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos(\pi/4+2\pi k/3)+i\sin(\pi/4+2\pi k/3)\right).$$

При $k=0$: $\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[6]{2}\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)$.

При $k=1$: $\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[6]{2}\left(\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)\right)$.

При $k=2$: $\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[6]{2}\left(\cos(19\pi/12)+i\sin(19\pi/12)\right)=$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos(-5\pi/12)+i\sin(-5\pi/12)\right).$$

Приклад №6. Розв’язати квадратне рівняння:

а) $4z^2+4z+5=0$; б) $z^2-4z+7-4i=0$; в) $z^2+2iz-1+2i=0$.

Розв’язання.

а) $D=4^2-4\cdot4\cdot5=-64$; $\sqrt{D}=\sqrt{-64}=8i$; $z_{1,2}=\dfrac{-4\pm8i}{2\cdot4}=-\dfrac{1}{2}\pm i$.

б) $D=(-4)^2-4\cdot1\cdot(7-4i)=-12+16i=4(-3+4i)$;

$$\sqrt{D}=\sqrt{4(-3+4i)}=2\sqrt{(1+4i+4i^2)}=2\sqrt{(1+2i)^2}=$$

$$= 2(1+2i); \quad z_{1,2} = \frac{4 \pm 2(1+2i)}{2} = 2 \pm (1+2i) \; ; \; z_1 = 3+2i \; ; \; z_2 = 1-2i \, .$$

в) $D = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+2i) = -8i$; $\sqrt{D} = \sqrt{-8i} =$

$$= \sqrt{8\left(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\right)} = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) +\right.$$

$$\left. + i\sin(-\pi/4)\right) = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 - i\left(\sqrt{2}/2\right)\right) = 2 - 2i \;;$$

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm (2-2i)}{2} = -i \pm (1-i) \; ; \; z_1 = 1-2i \, ; \; z_2 = -1.$$

2.3 Питання для самоперевірки

1. Загальний вигляд комплексного числа у алгебраїчнчй формі.

2. Які алгебраїчні дії зручно виконувати над КЧ у алгебраїчній формі?

3. Як саме виконуються арифметичні дії над КЧ у алгебраїчній формі?

4. Що таке комплексно-спряжені числа? Які їхні властивості?

5. Зображення КЧ на комплексній площині.

6. Загальний вигляд комплексного числа у тригонометричнчій формі

7. Які алгебраїчні дії зручно виконувати над КЧ у тригонометричнчій формі?

8. Як саме виконуються алгебрїчні дії над КЧ у тригонометричнчій формі?

9. Загальний вигляд комплексного числа у показниковій формі

10. Які алгебраїчні дії зручно виконувати над КЧ у показниковій формі?

11. Як саме виконуються алгебрїчні дії над КЧ у показниковій формі?

12. Яким чином здійснюється перетворення КЧ з однієї форми запису у іншу?

2.4 Типові приклади контрольних завдань

Варіант №1

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -7 + 4i$; $z_2 = 5 - 6i$; $z_3 = 4 - 3i$; $z_4 = \dfrac{103}{25} - \left(\dfrac{4}{25} + \sqrt{3}\right)i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{-8}$

3. Піднести до степеня: $(1+i)^{12}$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах та зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1+i}$

Варіант №2

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 5 - 3i$; $z_2 = 2 + 4i$; $z_3 = 6 - 4i$; $z_4 = -\dfrac{49}{26} + \left(\dfrac{15}{26} + \sqrt{3}\right)i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{i}$

3. Піднести до степеня: $(1+i)^{12}$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{4}{1 + i\sqrt{3}}$

Варіант №3

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -4 - 5i$; $z_3 = 3 - 2i$; $z_4 = \sqrt{3} - \dfrac{2}{13} - \dfrac{23}{13}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1}$

3. Піднести до степеня: $(1-i)^{8}$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = \frac{2\sqrt{2}}{1+i}$

Варіант №4

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 4 + 7i$; $z_2 = 6 + 5i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = -\frac{11}{13} - \left(\frac{10}{13} + \sqrt{3}\right)i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1+i}$

3. Піднести до степеня: $(2+3i)^6$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z = -\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$

Варіант №5

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 2 - 7i$; $z_2 = 4 + 6i$; $z_3 = 5 + 2i$; $z_4 = \frac{94}{29} + \frac{3}{29}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-16}$

3. Піднести до степеня: $(1-i)^8$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z = -\frac{4}{1 - i\sqrt{3}}$

Варіант №6

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 5 - 4i$; $z_3 = 2 + 3i$; $z_4 = \frac{11}{13} + \frac{3}{13}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[6]{1/2}$

3. Піднести до степеня: $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z = -\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$

Варіант №7

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = -7 + i$; $z_3 = 2 + 5i$; $z_4 = -\frac{7}{29} + \frac{3}{29}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{(2-i)}$

3. Піднести до степеня: $(2+i)^7$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{3\sqrt{2}}{1+i}$

Варіант №8

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=2+7i$; $z_2=-1+6i$; $z_3=5-i$; $z_4=\dfrac{7}{26}-\dfrac{5}{26}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{8-i}$

3. Піднести до степеня: $(1+3i)^7$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$

Варіант №9

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=-3-7i$; $z_2=2-6i$; $z_3=5+i$; $z_4=\dfrac{21}{26}+\dfrac{11}{26}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{1+2i}$

3. Піднести до степеня: $(-1-i)^6$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{2\sqrt{2}}{2-i}$

Варіант №10

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=7+i$; $z_2=-1-i$; $z_3=3+2i$; $z_4=\dfrac{11}{13}+\dfrac{7}{13}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1+i}$

3. Піднести до степеня: $(2-i)^5$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{4\sqrt{2}}{1-i}$

Варіант №11

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1 = -3-3i$; $z_2 = 7+2i$; $z_3 = 2+6i$; $z_4 = -\frac{31}{40} - \frac{29}{40}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{1-i}$

3. Піднести до степеня: $(1+7i)^8$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \frac{\sqrt{2}}{2-2i}$

Варіант №12

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -4+3i$; $z_2 = 7-5i$; $z_3 = -3-3i$; $z_4 = -\frac{17}{18} - \frac{11}{18}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{5-2i}$

3. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{2} - i\right)^2$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = -\frac{6}{1 - i\sqrt{2}}$

Варіант №13

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -7-8i$; $z_2 = 4-10i$; $z_3 = 2-3i$; $z_4 = -\frac{7}{13} + \frac{5}{13}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{2+3i}$

3. Піднести до степеня: $\left(8 + i\sqrt{2}\right)^3$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \frac{2\sqrt{2}}{2 - i\sqrt{2}}$

Варіант №14

1. Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -6-5i$; $z_2 = 3+4i$; $z_3 = -1+7i$; $z_4 = \frac{3}{50} - \frac{7}{50}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1+8i}$

3. Піднести до степеня: $(2-7i)^3$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \frac{3\sqrt{2}}{1+i}$

Варіант №15

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -8 + 2i$; $z_2 = -2 + 7i$; $z_3 = -3 + i$; $z_4 = -\dfrac{3}{10} - \dfrac{9}{10}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1 - 2i}$

3. Піднести до степеня: $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^5$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 - i}$

Варіант №16

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -5 + 8i$; $z_2 = -3 - 2i$; $z_3 = -4 - 6i$; $z_4 = -\dfrac{13}{52} - \dfrac{9}{52}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{7 + 2i}$

3. Піднести до степеня: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^2$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{\sqrt{2} + 2}{1 + i}$

Варіант №17

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 1 - 8i$; $z_2 = 9 + 3i$; $z_3 = 3 - 6i$; $z_4 = \dfrac{11}{45} + \dfrac{18}{45}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{1 + 3i}$

3. Піднести до степеня: $(3 - 7i)^8$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{4 + i}$

Варіант №18

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 7 - 2i$; $z_2 = -5 + 6i$; $z_3 = 3 - 2i$; $z_4 = \dfrac{7}{13} + \dfrac{3}{13}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{4 - 2i}$

3. Піднести до степеня: $(3 - i)^7$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{2}{\sqrt{2} - i}$

Варіант №19

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -1 - i$; $z_2 = 5 + 6i$; $z_3 = 1 - i$; $z_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{3i}$

3. Піднести до степеня: $\left(2 + i\sqrt{2}\right)^5$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{1}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

Варіант №20

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = -7 - 3i$; $z_3 = 7 - 2i$; $z_4 = \dfrac{18}{53} - \dfrac{21}{53} i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{2 - 2i}$

3. Піднести до степеня: $(1 + 3i)^{12}$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{1 - i}$

Варіант №21

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -6 - 2i$; $z_2 = 5 + i$; $z_3 = -4 + 2i$; $z_4 = -\dfrac{11}{20} - \dfrac{19}{20} i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-4}$

3. Піднести до степеня: $(1 + 3i)^5$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.
Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{\sqrt{2}}{1 - 2i}$

Варіант №22

1. Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -3 + 2i$; $z_2 = 7 - 6i$; $z_3 = 8 - i$; $z_4 = \dfrac{9}{65} + \dfrac{7}{65} i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$

3. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{2} + 7i\right)^4$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3i}$

Варіант №23

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=7+6i$; $z_2=-5-9i$; $z_3=-9+i$; $z_4=\dfrac{27}{82}-\dfrac{33}{82}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{-3+4i}$

3. Піднести до степеня: $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{2}{\sqrt{2}+i}$

Варіант №24

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=2+9i$; $z_2=-7-3i$; $z_3=-4+5i$; $z_4=-\dfrac{19}{41}-\dfrac{23}{41}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1-i}$

3. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{2-\sqrt{2}}{5-i}$

Варіант №25

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=-6-5i$; $z_2=-7-2i$; $z_3=3+6i$; $z_4=\dfrac{7}{45}+\dfrac{8}{45}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{i}$

3. Піднести до степеня: $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

4. Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+i}$

Варіант №26

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=3+7i$; $z_2=-6-6i$; $z_3=-5+7i$; $z_4=-\dfrac{9}{74}-\dfrac{7}{74}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-1}$

3. Піднести до степеня: $\left(1-i\sqrt{2}\right)^3$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1-2i}$

Варіант №27

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=2-5i$; $z_2=-7-4i$; $z_3=-4+2i$; $z_4=-\dfrac{1}{20}-\dfrac{3}{20}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{-8}$

3. Піднести до степеня: $\left(2-2\sqrt{2}\,i\right)^5$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+2i\sqrt{2}}$

Варіант №28

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=3+2i$; $z_2=-5+7i$; $z_3=6-i$; $z_4=-\dfrac{7}{37}-\dfrac{5}{37}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{1-i}$

3. Піднести до степеня: $\left(2+i\sqrt{3}\right)^3$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{\sqrt{3}}{1-i}$

Варіант №29

1. Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=-4-2i$; $z_2=5+6i$; $z_3=-5+2i$; $z_4=-\dfrac{9}{29}-\dfrac{11}{29}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt{-11-60i}$

3. Піднести до степеня: $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\dfrac{2}{\sqrt{2}+i}$

Варіант №30

1. Знайти комплексне число $z=\frac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=2-6i$; $z_2=-3-4i$; $z_3=7+i$; $z_4=-\frac{11}{50}-\frac{19}{50}i$

2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{1}$

3. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3}-i\right)^4$

4. Записати *z* в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити його на комплексній площині $z=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$