МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Розділ «Елементи математичної статистики»)
для студентів 1 року денної форми навчання усіх спеціальностей

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від _______ Голова групи__________Чугай А.В.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ______ Голова групи________Герасимов О.І.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ______ Голова групи_________Губанова О.Р.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ____ Голова групи_______Шакірзанова Ж.Р.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від _____ Голова групи_________Павленко О.П.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від _____ Голова групи________Мещеряков В.І.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №_____від _____ Голова групи___________Шекк П.В.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол №___від ______ Голова групи__________Смірнова К.В.

«Затверджено»
на засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №___від ______ Зав. кафедри ________ Глушков О.В.

Одеса 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для

практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Елементи математичної статистики»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

Одеса 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для

практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Елементи математичної статистики»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

"Узгоджено"
на факультеті магістерської підготовки

Одеса 2020

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни “Вища математика“ (розділ «Елементи математичної статистики») для студентів 1 року денної форми навчання усіх спеціальностей.

Одеса, ОДЕКУ, 2020 р., 28 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Вітавецька Л.А., к.ф.-м.н., доц, Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц

ЗМІСТ

I ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальностей екологія, туризм, науки про Землю, комп'ютерні науки тощо. Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні задач і аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни.

В результаті вивчення цього розділу студент повинен:

знати – основні означення (генеральна сукупність, вибірка, вибіркове середнє, довірчий інтервал, критерії згоди, корреляція і т.с., основні теореми, основні статистичні методи та їхнє застосування у різних галузях науки;

вміти – використовувати теоретичні знання та навички при виконанні різноманітних практичних задач, у яких застосовується математична статистика, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

1.2 Зміст розділу

Основні відомості з математичної статистики.

Головна сукупність і вибірка.

Варіаційний ряд. Гістограма, емпірична функція розподілу, вибіркова середня і дисперсія.

Розподіли Стьюдента та хі-квадрат. Критерій Пірсона.

Метод найменших квадратів. Статистичне моделювання.

Статистичні оцінки генеральної середньої. Похибка оцінки.

Довірча імовірність і довірчий інтервал. Визначення необхідного обсягу вибірки.

Поняття про критерії згоди. Перевірка гіпотез про рівність середніх.

Вибір критерію для перевірки статистичної гіпотези.

Функціональна залежність і регресія. Криві регресії, їхні властивості.

Визначення параметрів нелінійних рівнянь регресій методом найменших квадратів безпосередньо і за допомогою лінеаризуючих замін змінних.

Визначення параметрів лінійної регресії методом найменших квадратів.

Коефіцієнт кореляції, кореляційне відношення, їхні властивості й оцінки.

Елементи теорії випадкових процесів. Ланцюги Маркова. Імовірності переходу. Обчислення граничних імовірностей.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1972.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.

3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Є. Функции комплексного переменного.Операционное нечисленне. Теория устойчивости. М., Наука, 1965.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2. М. «Высшая школа», 1986.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1976.

6. Под. ред. Свешникова А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. -М., Наука, 1970.

7. Р.Шторм Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. -М., «Мир», 1970.

8. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю.,

Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.3. –Одеса, 2016.

9. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.

10. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М., «Высш. школа», 1972.

11. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

12. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

13. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

14. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв'язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною. Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт та індивідуальних завдань, що оцінюються згідно з робочою програмою. Всі роботи повинні виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що дана дисципліна є засвоєною студентом.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми. Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі, які наведені у конспекті лекцій з дисципліни. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних та індивідуальних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв'язання типових задач.

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач

Довідковий матеріал

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. При цьому статистичними даними називаються дані про число об'єктів в якій-небудь більш-менш поширеній сукупності, які мають ті або інші ознаки. Г*енеральною сукупністю* називається сукупність всіх однорідних об'єктів, з яких проводиться вибірка. *Вибірковою сукупністю* (або вибіркою) називається сукупність випадково відібраних однорідних об'єктів. Розмістивши результати вибірки x_1, x_2 , ... ,x_n в порядку зростання і записавши частоти n_i, з якими зустрічаються ці значення, дістанемо *варіаційний*, або *статистичний*, ряд у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоти	n_1	n_2	…	n_k

На основі такого ряду можна побудувати статистичну функцію розподілу $F_n^*(x)=\sum_{x_i<X}\frac{n(x_i)}{n}$. Для вибіркової сукупності обчислюють числові характеристики — вибіркові випадкові функції: вибіркову середню $\overline{X}$, вибіркову дисперсію S^2, статистичні моменти розподілу тощо. $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i$, $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2 n_i$. Початкові і центральні статистичні моменти розподілу обчислюють відповідно за такими формулами: $\nu_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$ і $\mu_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. Статистичний кореляційний момент $K_{XY}^*= =\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_i-\overline{x})(y_j-\overline{y})n_{ij}$ і вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{xy}=\frac{K_{xy}^*}{s_x\cdot s_y}$.

Ланцюгами Маркова називають послідовність іспитів, в кожному з котрих система набуває один з k станів повної групи, при чому умовна імовірність $p_{ij}(s)$ того, що в “s” іспиті система буде знаходитись у стані j при умові, що у “s-1” іспиті система знаходитись у стані i, не залежить від результатів інших, раніше виконаних іспитів.

Імовірностю переходу або перехідною імовірностю p_{ij} називають умовну імовірність того, що із стану i, в котрий система попала внаслідок будь-якого іспита, в результаті наступного іспиту система перейде в стан j. У визначенні p_{ij} перший індекс означає номер попереднього, а другий – номер наступного стана. Матриця переходу системи є матрицею, яка містить всі переходні імовірності системи: p_{ij}. Якщо відомі перехідні імовірності p_{ij}., тоді можливе знаходження p_{ij}.(n) переходу системи із стану “i” у стан “j” за “n” кроків.

Рівність Маркова: $p_{ij}(n)=\sum\limits_{r=1}^{k} p_{ir}(m)p_{rj}(n-m)$

Приклади розв'язання задач

Приклад №1.

У цеху встановлено п'ять верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_{x}\left|F(x)-F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що виконується біноміальний закон розподілу з $p=\frac{1}{3}$. Обчислити $\bar{x}$ і s^2.

Розв'язання.

На основі вибіркових даних складемо статистичний ряд

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою

$$F_n^*(x)=\sum_{x_i<x}\frac{n(x_i)}{n}:$$

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4<x\le 5;\\ 1, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$$

Щоб визначити $\max\limits_{x}\left|F(x)-F_n^*(x)\right|$, знайдемо функцію розподілу за біноміальним законом з $n=5$ і $p=\frac{1}{3}$.

Обчислимо ймовірності за формулою Бернуллі:

$$P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

$$P(X=0)=\frac{32}{243};\quad P(X=1)=\frac{80}{243};\quad P(X=2)=\frac{80}{243};\quad P(X=3)=\frac{40}{243};$$

$$P(X=4)=\frac{10}{243};\quad P(X=5)=\frac{1}{243}.$$

Теоретична функція розподілу згідно з формулою $F(x)=\sum\limits_{x_i<x} p(x_i)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0; \\ \frac{32}{243}, & \text{якщо } 0<x\le 1; \\ \frac{112}{243}, & \text{якщо } 1<x\le 2; \\ \frac{192}{243}, & \text{якщо } 2<x\le 3; \\ \frac{232}{243}, & \text{якщо } 3<x\le 4; \\ \frac{242}{243}, & \text{якщо } 4<x\le 5; \\ 1, & \text{якщо } x>5. \end{cases}$$

Визначимо модуль максимальної різниці значень теоретичної та статистичної функцій розподілу:

$$\max_{x}\left|F(x)-F_n^*(x)\right|=$$

$$=\max\left|0-0;\frac{32}{243}-\frac{1}{5};\frac{112}{243}-\frac{12}{25};\frac{192}{243}-\frac{19}{25};\frac{232}{243}-\frac{23}{25};\frac{242}{243}-\frac{24}{25};1-1\right|=\frac{83}{1215}.$$

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i=\frac{1}{25}(7+14+12+4+5)=1{,}68.$$

Дисперсію визначимо за формулою $s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$. Знайдемо середнє значення квадрата x: $\overline{x^2} = \frac{1}{25}(7 + 28 + 36 + 16 + 25) = 4{,}48.$ Отже, $s^2 = 4{,}48 - (1{,}68)^2 = 1{,}6576.$. Згідно з гіпотезою про закон розподілу теоретичні числові характеристики $MX \approx 1{,}67;\ DX \approx 1{,}11.$ Бачимо, що значення математичного сподівання і вибіркового середнього різняться мало, тоді як між теоретичною і вибірковою дисперсією різниця значна.

Вибірковий розподіл має два значення з найбільшою частотою, розподіл двомодальний, медіана розподілу $m_e = 2$. Розмах варіації R = 5 – 0 = 5.

Приклад №2.

Зроблена вибірка 10 валиків з валиків, оброблених на верстаті. Відхилення X розміру діаметрів валиків від норми має нормальний закон розподілу. У вибраних валиків ці відхилення дорівнюють: 2, 1, -2, 3, 2, 4, -1, 5, 3, 4. Відомо, що середнє квадратичне відхилення випадкової величини X дорівнює 3. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання випадкової величини: X з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

Розв'язання.

Задамо вибірку у вигляді таблиці розподілу частот:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Об'єм вибірки n = 10. Знайдемо вибіркову середню:

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} xini}{n} = \frac{-4+1+4+6+8+5}{10} = \frac{20}{10} = 2.$$

Надійним інтервалом з надійністю γ для математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини X з відомим середнім квадратичним відхиленням σ є інтервал $\left(\bar{x}в - t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}в + t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, де t –

розв’язок рівняння 2A (t)=γ , (Φ(x)- функція Лапласа). Маємо 2Φ(t)=0,95, Φ(t)=0,475. З таблиці знаходимо t=1,96. $t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$=1,96× $\frac{3}{\sqrt{10}}$=$\frac{5,88}{3,16} \approx 1,86$.

Відповідь: Шуканий інтервал: 2-1,86<a<2+1,86; 0,16<x<3,86.

Приклад №3.

Розглянемо задачу, яка зводиться до відшукання такого інтервалу (його називають *довірчим*), що із заданою імовірністю γ=0.95 (її називають *надійністю)* покриває оцінюваний параметр.

Розв’язання.

При надійності γ=0.95 довірчий інтервал для оцінки математичного чекання нормального розподілу (по вибірковій середній $\bar{x}$ вибірки обсягу n , при відомому середньому квадратичному відхиленні σ) знаходять за формулою $\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Якщо довірчий інтервал знайдений, то з надійністю 0.95 можна вважати, що оцінюваний параметр укладений у цьому інтервалі.

Приклад №4.

Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$ =10,43, обсяг вибірки (число спостережень) n= 100 і середнє квадратичне відхилення σ= 5.

Розв’язання.

Визначимо кінці довірчого інтервалу

$$\bar{x} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10{,}43 - 1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}} = 9{,}45.$$

$$\bar{x} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10.43 + 1{,}96\frac{5}{\sqrt{100}} = 11.41.$$

Таким чином, довірчий інтервал для оцінки математичного чекання:

$$9{,}45 < a < 11{,}41.$$

Приклад №5.

Зроблено перевірку 500 деталей на відхилення розміру від нормального (у сотих частках міліметра). Результати перевірки зведені в статистичний ряд

X_i; X_{i+1}	-8; -6	-6; -4	-4; -2	-2; 0	0; 2	2; 4	4; 6	6; 8
N_i	6	25	72	133	120	88	46	10

Потрібно:

1) Оцінити з надійністю $\gamma = 0{,}95$ математичне чекання випадкової величини відхилення розміру від нормального.

2) Знайти оцінки коефіцієнта асиметрії й ексцесу випадкової величини відхилення розміру від нормального.

Розв'язання.

Оскільки обсяг вибірки $n = 500$ досить великий, а середнє квадратичне відхилення σ ознаки X невідомо, то з великим ступенем довіри в якості σ може бути узята оцінка середнього квадратичного відхилення ознаки X. І тоді, в якості наближеного довірчого інтервалу математичного чекання випадкової величини X можна брати інтервал з кінцями:

$$C_1 = \bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}, \quad C_2 = \bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

де t_γ – значення аргументу функції Лапласа. За результатами вибірки знайдемо вибіркове середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\, x_i = \frac{1}{500}\left(6(-7) + 25\cdot(-5) + 72\cdot(-3) + 133\cdot(-1) + \right.$$

$$\left. + 120\cdot 1 + 88\cdot 3 + 46\cdot 5 + 10\cdot 7\right) \approx 0{,}336.$$

Тут x_i – середина i-го інтервалу (i = 1,2,..,k). Вибіркову дисперсію $\left(\sigma^*\right)^2$ визначимо за формулою

$$\left(\sigma^*\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{500}\left[6\left(-7-0{,}336\right)^2+25\left(-5-0{,}336\right)^2+\right.$$

$$+72\left(-3-0{,}336\right)^2+133\left(-1-0{,}336\right)^2+120\left(1-0{,}336\right)^2+88\left(3-0{,}336\right)^2+$$

$$\left.+46\left(5-0{,}336\right)^2+10\left(7-0{,}336\right)^2\right]\approx 8{,}404$$

Тоді вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma^*=\sqrt{8{,}404}\approx 2{,}9$. Знайдемо t_γ зі співвідношення 2Ф(t) = 0,95. Одержимо Ф(t) = 0,475. По таблиці функції Лапласа обчислимо t_γ = 1,96. Підставивши t_γ = 1,96, $\bar{x}=0{,}336$, $\sigma^*=2{,}900$ і n = 500 у формули, одержимо шуканий довірчий інтервал для математичного чекання випадкової величини X відхилення розміру від номінального.

$$0{,}336-1{,}96\frac{2{,}9}{\sqrt{500}}<M\left[X\right]<0{,}336+1{,}96\frac{2{,}9}{\sqrt{500}}.$$

$$0{,}0818<M\left[X\right]<0{,}5902.$$

Оцінку для коефіцієнта асиметрії знайдемо за формулою

$$A_s^*(X)=\frac{1}{n\left(\sigma^*\right)^3}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^3=\frac{1}{500\cdot 2{,}9^3}\left[6\left(-7-0{,}336\right)^3+\right.$$

$$+25\left(-5-0{,}336\right)^3+72\left(-3-0{,}336\right)^3+133\left(-1-0{,}336\right)^3+88\left(3-0{,}336\right)^3+$$

$$\left.+46\left(5-0{,}336\right)^3+10\left(7-0{,}336\right)^3\right]=0{,}0138.$$

Оцінку для ексцесу – за формулою

$$E_x^*(X)=\frac{1}{n\left(\sigma^*\right)^4}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^4-3=-0{,}371.$$

Приклад №6.

Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії *Y* на *X* і оцінити тісноту лінійного зв'язку *Y* та *X*, за даними кореляційної таблиці

Y X	10	20	30	40	50	n_x
10	5	7				5
20	7	20				27
30		23	30	10		63
40			47	11	9	67
50			2	20	7	29
60			6	3		9
n_y	12	43	49	47	19	200

Розв'язання.

Рівняння прямої лінії регресії *Y* на *X* має вигляд

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}).$$

Маємо:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_{x_i} x_i = \frac{1}{200}\left(5\cdot 10 + 27\cdot 20 + 63\cdot 30 + 67\cdot 40 + 29\cdot 50 + 9\cdot 60\right) = 3675\ ;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_{y_j} y_j = \frac{1}{200}\cdot\left(12\cdot 10 + 43\cdot 20 + 49\cdot 30 + 47\cdot 40 + 19\cdot 50\right) = 309\ ;$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_{x_i}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{200}\cdot\left(5\cdot 26\cdot 75^2 + 27\cdot 1675^2 + 63\cdot 675^2 + \right.$$

$$\left. + 67\cdot 325^2 + 29\cdot 1325^2 + 9\cdot 2325^2\right) = 12344\ ; \qquad \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \approx 11{,}11.$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_{y_j}\left(y_j - \bar{y}\right)^2 = \frac{1}{200}\left(12\cdot 209^2 + 43\cdot 109^2 + 7909^2 + \right.$$

$$+47\cdot 91^2+191^2\Big)=10619\,;\quad \sigma_y=\sqrt{\sigma_y^2}\approx 10{,}303\,.$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=1}^{m}n_j\,x_i\,y_j=\big(5\cdot 10\cdot 10+7\cdot 20\cdot 10+20\cdot 20\cdot 20+23\cdot 20\cdot 30+$$

$$+30\cdot 30\cdot 30+10\cdot 30\cdot 40+47\cdot 40\cdot 30+11\cdot 40\cdot 40+9\cdot 40\cdot 50+2\cdot 50\cdot 30+$$

$$+20\cdot 50\cdot 40+7\cdot 60\cdot 50+6\cdot 60\cdot 40+3\cdot 60\cdot 50\big)=1193\,.$$

Знайдемо вибірковий коефіцієнт кореляції r_b;

$$r_b=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{1193-3675\cdot 309}{11{,}11\cdot 10{,}303}=0{,}5017\,.$$

Підставляючи знайдені значення у формулу, одержимо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X $\bar{y}_x-30{,}9=0{,}5017$, чи $\bar{y}_x=0{,}4653\,x+13{,}8018$. Оскільки вибірковий коефіцієнт кореляції r_b досить великий. $\left(r_b=0{,}5017\right)$, то лінійна кореляційна залежність досить тісна.

Приклад №7.

Задана матриця переходу:$P_1=\begin{pmatrix}0{,}4\ldots 0{,}6\\ 0{,}3\ldots 0{,}7\end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу $P_2=\begin{pmatrix}p_{11}(2)\ldots p_{12}(2)\\ p_{21}(2)\ldots p_{22}(2)\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Використаємо формулу $P_2=P_1^2$: $P_2=\begin{pmatrix}0{,}4\ldots 0{,}6\\ 0{,}3\ldots 0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}4\ldots 0{,}6\\ 0{,}3\ldots 0{,}7\end{pmatrix}$.

Перемноживши матриці, отримаємо: $P_2=\begin{pmatrix}0{,}34\ldots 0{,}66\\ 0{,}33\ldots 0{,}67\end{pmatrix}$.

2.3 Питання для самоперевірки

1. Що називається: генеральною сукупністю об'єктів; вибіркою; обсягом сукупності?

2. Що таке частота варіанти; відносна частота варіанти?

3. Що називається: статистичною залежністю; кореляційною залежністю?

4. Яка кореляційна залежність називається лінійною, а яка нелінійною?

5. Що таке кореляційна таблиця?

6. Що називається умовною середньої; рівнянням регресії; лінією регресії?

7. Як знаходиться рівняння прямої лінії регресії?

8. Що називається коефіцієнтом регресії та коефіцієнтом кореляції?

9. Як оцінити тісноту лінійної кореляційної залежності?

10. Які властивості має коефіцієнт кореляції?

11. Що називається кореляційним відношенням?

12. Якувластивість має кореляційне відношення?

13. Як визначається криволінійна кореляція?

14. Що називається множинною кореляцією?

15. Які властивості має емпірична функція розподілу?

2.4 Типові приклади контрольних завдань

Завдання модульного контролю № 1

Варіант №1

1. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); а= 10, σ =4, α =2, β = 13.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,17	36	6

Варіант №2

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 9, σ =5, α =2, β = 14.

2.Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,16	49	7

Варіант №3

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 8, σ =1, α =4, β = 9.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,15	64	8

Варіант №4

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 7, σ =2, α =3, β = 10.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,14	81	9

Варіант №5

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 6, σ =3, α =2, β = 12.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,13	100	10

Варіант №6

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 5, σ =1, α =1, β = 12.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,12	121	11

Варіант №7

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 4, σ =5, α =2, β = 11.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,11	144	12

Варіант №8

1. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 3, σ =2, α =3, β = 10.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання а нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,10	169	13

Варіант №9

1. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); а= 2, σ =5, α =4, β = 9.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання а нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,09	196	14

Варіант №10

1. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти імовірність улучення цієї величини в заданий інтервал (α; β); а= 2, σ =4, α =6, β = 10.

2. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання а нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірковий середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,08	225	15

Завдання модульного контролю № 2

Завдання 1. При іспитах n=50 елементів після двох годин часу фіксувалося число відмовлень, що відбулися, і результати цих іспитів приведені нижче. Потрібно:

1) знайти значення емпіричної функції розподілу для фіксованого елемента часу;

2) оцінити імовірність безвідмовної роботи для t_0=8 год.;

3) оцінити імовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від t=6 год. до $t+t_0$=10 год. за умови, що елемент проробив безвідмовно 6 годин;

4) знайти середній час роботи елемента до відмовлення.

Варіант №1

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	3	4	7	8	8	8	6	5	1

Варіант №2

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	4	6	7	8	8	7	6	7

Варіант №3

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	3	5	9	6	9	8	4	2

Варіант №4

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	4	6	10	14	5	5	4	0

Варіант №5

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	4	4	7	9	10	6	5	3

Варіант №6

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	5	5	7	11	10	4	4	3

Варіант №7

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	3	4	9	6	9	5	7	6

Варіант №8

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	4	5	6	12	11	5	3	2

Варіант №9

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	6	7	6	10	8	5	4	3

Варіант №10

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	4	4	5	6	19	6	3	3	0

Завдання 2. Проведено перевірку 300 деталей відхилення розмірів від номінального (у сотих частках міліметра). Результати перевірки зведені в статистичний ряд. Потрібно:

1) оцінити з надійністю 0,975 математичне чекання випадкової величини відхилення розміру від номінального;

2) знайти оцінки коефіцієнта асиметрії й ексцесу випадкової величини відхилення розміру від номінального.

Варіант №1

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	3	17	70	120	72	16	2

Варіант №2

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	16	72	119	71	17	3

Варіант №3

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	4	16	71	131	70	16	2

Варіант №4

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	17	74	118	69	18	2

Варіант №5

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	3	16	73	120	70	15	3

Варіант №6

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	16	75	122	68	14	3

Варіант №7

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	18	66	125	73	15	1

Варіант №8

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	1	19	68	123	71	16	2

Варіант №9

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	19	65	124	70	17	3

Варіант №10

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	1	20	69	117	73	18	2

Завдання модульного контролю № 3

Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії У на Х за даними, приведеними у кореляційній таблиці, і оцінити тісноту зв’язку У з Х.

Варіант №1

Y X	1	6	11	16	21	26
10	2	4				
20		3	5			
30			5	35	5	
40			2	8	17	
50				4	7	3

Варіант №2

Y X	2	7	12	17	22	27
15	2	4				

25		3	5			
35			5	30	10	
45			7	10	8	
55				5	5	3

Варіант №3

Y X	3	8	13	18	23	28
20	4	1				
25		6	4			
30			2	50	2	
35			1	9	7	
40				4	3	7

Варіант №4

Y X	4	9	14	19	24	29
20	1	5				
30		5	3			
40			3	40	12	
50			2	10	5	
60				3	4	7

Варіант №5

Y X	6	10	15	20	25	30
25	3	5				
30		4	4			
35			7	35	8	
40			2	10	8	
45				5	6	3

Варіант №6

Y X	6	11	16	21	26	31
30	2	4				
40		6	3			
50			6	35	4	
60			2	8	6	
70				14	7	3

Варіант №7

Y X	7	12	17	22	27	30
35	3	4				
40		6	3			
45			6	35	2	
50			12	8	6	
55				4	7	4

Варіант №8

Y X	8	13	18	23	28	33
40	3	3				
50		5	4			
60			40	2	8	
70			5	10	6	
80				4	7	3

Варіант №9

Y X	9	14	19	24	29	34
45	2	6				
50		5	3			
55			7	40	2	
60			4	9	6	
65				4	7	5

Варіант №10

Y X	10	15	20	25	30	35
50	5	1				
60		6	2			
70			5	40	5	
80			2	8	7	
90				4	7	8