МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання

контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Теорія імовірностей»)
для студентів 1 року денної форми навчання
усіх спеціальностей

“Узгоджено”
Декан факультету магістерської підготовки
_______________Боровська Г.О.

“Узгоджено”
Декан факультету комп’ютерних наук,
управління та адміністрування ___________
Коваленко Л.Б.

“Узгоджено”
Декан природоохоронного факультету __________
Чугай А.В

“Узгоджено”
Директор гідрометеорологічного інституту
____
Овчарук В.А.

“Затверджено”
на засіданні кафедри вищої та
прикладної математики
Протокол №___від __________
Завідувач кафедри ____________
Глушков О.В.

Одеса 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання

контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Теорія імовірностей»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

Одеса 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання

контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Теорія імовірностей»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

"Узгоджено"
на факультеті магістерської
підготовки

Одеса 2019

Методичні вказівки до СРС та виконання контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни “Вища математика“ (розділ «Теорія імовірностей») для студентів 1 року денної форми навчання усіх спеціальностей.

Одеса, ОДЕКУ, 2019 р., 28 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц

ЗМІСТ

І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Дисципліна «Вища математика» - одна з основних у фундаментальному циклі підготовки фахівців зі спеціальностей екологія, комп'ютерні науки, науки про землю, тощо. Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються відповідними освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні математичних задач та аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загальноосвітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати отримані знання при розв'язанні математичних задач .

В результаті вивчення цього розділу студент повинен:

знати – основні визначення, теореми, формули для обчислення імовірності випадкових подій, числових характеристик випадкових величин, як дискретних, так і безперервних, функції розподілу випадкових величин, числових характеристик системи випадкових величин, основні поняття та означення математичної статистики;

вміти – використовувати теоретичні знання та навики при обчисленні імовірностей складних подій, складати закони розподілу дискретних випадкових величин, обчислювати математичне сподівання та дисперсію дискретних та безперервних випадкових величин, кореляційний момент та коефіцієнт корреляції системи випадкових величин, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Після вивчення розділу студенти виконують практичний та теоретичний модулі.

1.2 Зміст розділу

1.Елементи комбінаторики.

2.Випадкові події, дії над ними. Означення імовірності. Теореми додавання та множення імовірностей. Формули повної імовірності, Бейєса. Випробування Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.

3.Випадкові величини та їхні види. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закон розподілу імовірностей дискретної випадкової величини. Біноміальний , геометричний, гіпергеометричний розподіли. Числові характеристики дискретних випадкових величин. Функція розподілу імовірностей випадкової величини. Щільність розподілу імовірностей неперервної випадкової величини. Нормальний, показниковий, рівномірний розподіли. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

4.Система двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції. Умовний закон розподілу.

5.Елементи математичної статистики.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2. М. «Высшая школа», 1986.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1976.
3. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.
5. Гмурман В. Е. Теория імовірностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1972.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории імовірностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.
7. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Серга І.М., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.3. –Одеса, 2016.
8. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.
9. Гнеденко В. В. Курс теории імовірностей. — М.: Наука, 1965.
11. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.
13. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Навчання студента- це насамперед робота з навчальним матеріалом, що складається з вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв'язання типових задач, самоперевірки, виконання контрольних робіт та індивідуальних завдань. Також студенти прослуховують лекції та відвідують практичні заняття. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною.

Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт та індивідуальних завдань, що оцінюються згідно з робочою програмою. Всі роботи повинні виконуватися самостійно і слугувати гарантією того, що дана дисципліна засвоєна студентом.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми.

Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних та індивідуальних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв'язання типових задач.

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач

Література: [1], гл.V, §1-18, [2], гл.XX, §1-30, [5], ч. I, гл. I-V, ч. II, гл. VI-XIV, ч. III, гл. XV, XVI, [6], ч.1, гл.I, §1, гл.II, §1-4, гл.III, §1,2, ч.2, гл.IV, §1,3, гл. VI, §1-6, гл.8, §1-4 , [7], р.1, с.8-78 .

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

Із восьми чоловіків і шести жінок потрібно утворити таку комісію, щоб до її складу входило два чоловіки і три жінки. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

Нехай C_8^2 - кількість способів утворення чоловічої частини комісії, C_6^3 - кількість способів утворення жіночої частини комісії. За правилом добутку: $C_8^2 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 6!} \cdot \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 3!} = \frac{7\cdot 8}{2} \cdot \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 560$ - способів утворення комісії.

Приклад 2.

На складі є 10 кінескопів, з яких 4 виготовлені мінським заводом. Навмання беруть 3 кінескопи. Обчислити імовірність того, що всі узяті кінескопи виявляться мінськими.

Розв'язання.

Шукана імовірність визначається класичною формулою: P(A)=$\frac{m}{n}$, де m= C_4^3- число наслідків, що сприяють появі кінескопа Мінського заводу, n= - C_{10}^3 - число всіх можливих елементарних подій. Тому шукана імовірність дорівнює: P(A)=C^3_4/ C^3_{10}=4/120=1/3.

Приклад 3.

Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючі пристрої, імовірності спрацьовування яких при аварії рівні відповідно 0,6 і 0,9. Знайти імовірність того, що при аварії спрацює: I) тільки один пристрій; 2) обидва пристрої.

Розв'язання.

Позначимо через С подію, імовірність якої потрібно обчислити, а через А и В - події, що полягають в спрацьовуванні першого і другого пристрою відповідно. Тоді $P(A)=0{,}8$ і $P(B)=0{,}9$ за умовою задачі.

1) Подію С, що полягає в тому, що при аварії спрацює тільки один пристрій, можна представити у вигляді С= $A\overline{B}+\overline{A}B$, де події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ є протилежними A та B відповідно, причому $P(\overline{A})=1-P(A)$, $P(\overline{B})=1-P(B)$. Шукана імовірність обчислюється так:

$$P(C)=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=$$

$$=0.8*0.1+0.2.*0.9=0.26.$$

2) Подію C, яка полягає в тому, що при аварії спрацюють обидва пристрою, можна записати у вигляді $C=AB$, і тоді шукана імовірність

$$P(C)=P(AB)=P(A)P(B)=0{,}8*0{,}9=0{,}72.$$

Приклад 4.

В партії з 100 виробів є 5 бракованих. Обирається 8 виробів з цієї партії. Знайти імовірність того, що серед них є 2 бракованих вироби.

Розв'язання.

Число елементарних ісходів дорівнює числу способів, якими можливо обрати 8 елементів з 100 елементів. Порядок елементів у групі не має значення, тому кількість всіх рівноможливих ісходів $N=C_{100}^{8}$.

Підрахуємо число ісходів, сприятливих для події А – серед взятих 8 виробів буде рівно 2 браковані вироби. 2 бракованих вироби можна взяти з

5 бракованих C_5^2 способами, а інші 6 виробів, які повинні бути стандартними, можна взяти з 95 стандартних виробів C_{95}^6 способами. Кожну групу 1 типу (2 бракованих вироби) об'єднаємо з будь-якою групою 2 типу (6 стандартних виробів). Отримаємо: $N(A) = C_5^2 \cdot C_{95}^6$ Тоді $P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{95}^6}{C_{100}^8}$.

Приклад 5.

З шести карток з літерами Л, І, Т, Е, Р, А обираємо навмання у визначеному порядку чотири. Знайти імовірність того, що при цьому отримаємо слово «ТІРЕ».

Розв'язання.

Оскільки елементарні результати відрізняються один від одного не тільки елементами, але й їх порядком, то $N = A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Події А – при вказаній процедурі отримаємо слово «ТІРЕ» - сприяє лише один результат. Тому P(A)=1/360.

Приклад 6.

Телефонний номер складається з 5 цифр. Знайти імовірність того, що усі цифри різні (кожна цифра може мати 10 значень).

Розв'язання.

Складаємо групу з 5 цифр, при чому цифри не обов'язково різні. На першому місці може стояти будь-яка цифра, на другому – теж будь-яка і т.д. Кожну цифру на першому місці можна комбінувати з кожною цифрою на другому місці і т.д. Отже, кількість всіх рівноможливих результатів $N=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=10^5$. Події А – у навмання взятому 5-значному номері всі цифри будуть різними – сприяють стільки ісходів, скільки розміщень можливо скласти з 10 елементів по 5 (враховуючи той факт, що телефонний номер характеризується порядком розміщення цифр, якщо вони різні). Тому $N(A)=A_{10}^{5}$; $P(A)=\frac{A_{10}^{5}}{10^{5}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^{5}}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10^{4}}$

Приклад 7.

В учня є двадцять зошитів. Серед них – п'ять у лінійку, а решта – в клітинку. Яка ймовірність того, що серед шести випадково вибраних зошитів два будуть у клітинку?

Розв'язання.

Нехай подія A – серед шести вибраних зошитів два будуть у клітинку. Тоді чотири зошити будуть у лінійку. Оскільки учень має 20-5=15 зошитів у клітинку, то сприяють настанню події A число випадків $m=C_{15}^{2}\cdot C_{5}^{4}$. Обрати шість зошитів серед двадцяти можна $n=C_{20}^{6}$ способами. Тому ймовірність настання події A дорівнює:

$$P(A)=\frac{C_{15}^{2}\cdot C_{5}^{4}}{C_{20}^{6}}=\frac{105\cdot 5}{38760}\approx 0{,}0135.$$

Приклад 8.

Ймовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що її розв'яже Остап – 0,7. Знайти ймовірність того, що задачу не розв'яже жоден учень.

Розв'язання.

Ймовірність того, що Оленка не розв'яже задачу, дорівнює 1-0,8=0,2; ймовірність того, що Остап не розв'яже задачу, дорівнює 1-0,7=0,3; ймовірність того, що задачу не розв'яжуть ані Оленка, ані Остап, дорівнює 0,2·0,3=0,06.

Приклад 9.

У токаря є тринадцять конусних і сімнадцять циліндричних деталей. Він навмання взяв одну деталь, а потім іншу. Знайти ймовірність того, що перша деталь конусна, а друга – циліндрична.

Розв’язання.

Нехай подія *A* – перша деталь конусна, подія *B* - друга деталь циліндрична. Ймовірність того, що перша деталь конусна $P(A)=\frac{13}{30}$. Імовірність того, що друга деталь циліндрична, обчислимо за умови, що перша взята деталь є конусною: $P(B/A)=\frac{17}{29}$. Тоді шукана ймовірність $P(A i\ B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{13}{30}\cdot\frac{17}{29}=\frac{221}{870}$.

Приклад 10.

30% приладів збирає фахівець високої кваліфікації і 70% -середньої кваліфікації. Надійність роботи приладу, зібраного фахівцем високої кваліфікації - 0,9, надійність приладу, зібраного фахівцем середньої кваліфікації - 0,8. Взятий прилад виявився надійним. Знайти ймовірність того, що прилад зібраний фахівцем високої кваліфікації.

Розв’язання.

Нехай *A* – безвідмовна робота приладу. До перевірки приладу можливі такі гіпотези:

B_1 – прилад зібраний фахівцем високої кваліфікації,

B_2 – прилад зібраний фахівцем середньої кваліфікації.

Ймовірності цих гіпотез відповідно: $P(B_1)=0,3$ і $P(B_2)=0,7$. Умовні ймовірності подій $P(A/B_1)=0,9$ і $P(A/B_2)=0,8$. Визачимо ймовірності гіпотез B_1 і B_2 при умові, що подія *A* відбулася. За формулою Байєса маємо:

$$P(B_1/A)=\frac{0,3\cdot 0,9}{0,3\cdot 0,9+0,7\cdot 0,8}=\frac{0,27}{0,83}=0,325,$$

$$P(B_1/A)=\frac{0,7\cdot 0,8}{0,3\cdot 0,9+0,7\cdot 0,8}=\frac{0,56}{0,83}=0,675.$$

Приклад 11.

Гральну кістку кидають 16 разів. Знайти імовірність того, що 5 разів з´явиться число кратне трьом.

Розв'язання.

Випробування – це кидання гральної кістки. Випробування незалежні. Подія А – це поява числа, кратного трьом.

1) n=16, к=5. для того. щоб знайти p=P(A), використаємо класичне визначення імовірності

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}$$

Випробування має 6 результатів (при одному киданні гральної кістки обов´язково випаде одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6), з них 2 результати (випадення 3 або 6) сприятливі для А.

Отже, $p=P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, а q=1- p=$\frac{2}{3}$. Шукана імовірність

$$P_{16,5}=C_{16}^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\approx 0{,}2\ .$$

Приклад 12.

Знайти ймовірність того, що в навмання обраній родині, яка має 5 дітей, буде дві дівчинки і три хлопчика. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,7.

Розв'язання.

Ймовірність народження хлопчика $p=0{,}7$, тоді ймовірність народження дівчинки дорівнює $q=1-0{,}7=0{,}3$. Тоді ймовірність того, що серед п'яти дітей буде три хлопчики, за формулою Бернуллі дорівнює:

$$P_{3,5}=C_5^3p^3q^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}(0{,}7)^3(0{,}3)^2=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2}\cdot 0{,}343\cdot 0{,}09=0{,}309.$$

Приклад 13.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею .

Обчислити $M(X)$, $D(X)$, σ (X).

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Розв'язання.

Згідно з відповідними формулами для обчислення математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення маємо:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}1=$$
$$=-0{,}4-0{,}4+0{,}3+0{,}4+0{,}4+0{,}6=0{,}9;$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{6} x_i{}^2 p_i =16\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2+16\cdot 0{,}1+36\cdot 0{,}1=$$
$$=1{,}6+0{,}8+0{,}3+0{,}8+1{,}6+3{,}6=8{,}7;$$
$$D(X)=8{,}7-(0{,}9)^2=8{,}7-0{,}81=7{,}89;$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7{,}89}\approx 2{,}8.$$

Приклад 14.

Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1<x_2$. Знайти закон розподілу величини X , якщо відомі імовірність P_1= 0,6 можливого значення X, математичне сподівання M(X)=1,4 і дисперсія D(X)=0.24.

Розв'язання.

Сума імовірностей усіх можливих значень X дорівнює одиниці, тому імовірність p_2 того, що X набуде значення x_2, дорівнює 1-0,6=0.4. Запишемо закон розподілу:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

Для визначення x_1 і x_2 складемо два рівняння. Перше рівняння з урахуванням однієї з умов задачі, а саме M(X) =1,4, можна записати у вигляді

$$M(X)=\sum_{i=1}^{2} x_i p_i \quad ,$$

або

$$0.6x_1+0.4x_2=1{,}4.$$

Беручи до уваги, що за умовою D(X) = 0,24 і використовуючи формулу для визначення дисперсії

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X),$$

запишемо друге рівняння:

$$0.24 = 0.6\, x_1{}^2 + 0,4\, x_2{}^{2\,=}\, \text{I}.4^2,$$

або

$$0.6x_1{}^2 + 0,4x_2{}^2 = 2.2.$$

Значення x_1 і x_2 одержимо з розв’язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4 \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2 \end{cases}$$

В результаті розв’язання системи одержимо:

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 2 \text{ і } x_1 = 1.8,\ x_2 = 0.8.$$

За умовою $x_1 < x_2$. Тому умову задачі задовольняє тільки перший розв’язок. Таким чином, шуканий закон розподілу

X	1	2
p	0,6	0,4

Приклад 15.

Безперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(X) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 3 \\ 0,0625(x-3)^2 \quad при \quad 3 < x \le 7 \\ 1 \quad при \quad x \ge 7 \end{cases}$$

Потрібно знайти щільність імовірності f(x), а також математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X.

Розв’язання.

Знаходимо щільність імовірності (диференціальну функцію розподілу):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 3 \\ 0,125(x-3)^2 \quad при \quad 3 < x \le 7 \\ 0 \quad при \quad x \ge 7 \end{cases}$$

Математичне сподівання безперервної випадкової величини з щільністю імовірності f(x), заданої на інтервалі (a,b), обчислюється за формулою:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

або в нашому випадку

$$M(X)=\int_a^b x*0{,}125(x-3)dx=0{,}125\int_3^7 (x^2-3x)dx=0{,}125\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_3^7=5{,}67$$

Дисперсія безперервної випадкової величини обчислюється так:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X),\quad D(X)=\int_a^b x^2*0{,}125(x-3)dx-5{,}67^2=0{,}851$$

Таким чином, числові характеристики заданої випадкової величини X :

M(X)=5.67 і D(X)=0.851.

2.3 Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте аксіоми теорії імовірності та наслідки з них.
2. Сформулюйте класичне визначення імовірності. В чому є різниця між імовірністю та відносною частотою?
3. Сформулюйте теореми додавання імовірностей для сумісних та несумісних подій.
4. Сформулюйте теореми множення імовірностей для незалежних та залежних подій.
5. Що таке умовна імовірність та яким чином вона обчислюється?
6. Як обчислити імовірність появи хоча б однієї події?
7. Наведить формулу повної імовірності та умови її застосування.
8. Наведіть формулу Байєса, та умови її застосування.
9. Що таке повторні незалежні випробування? Наведіть формулу Бернуллі.
10. У яких випадках застосовуються локальна теорема Лапласа та асимптотична формула Пуассона?
11. Сформулюйте закон великих чисел.
12. Дайте визначення випадкової величини та її властивостей.

13. Як визначаються математичне сподівання, дисперсія та інші моменти дискретної випадкової величини?
14. Як визначаються математичне сподівання, дисперсія та інші моменти безперервної випадкової величини?
15. Сформулюйте означення та властивості функції розподілу випадкової величини.
16. Сформулюйте означення та властивості щільності розподілу випадкової величини.
17. Дайте характеристику для таких розподілів: нормальне, пуассонівське, біноміальне, рівномірне, показникове, геометричне, гіпергеометричне.
18. Дайте означення системи двох випадкових величин. Які її числові характеристики і яким чином вони обчислюються?

2.4 Типові завдання модульної контрольної роботи

ВАРІАНТ 1

1. Знайти імовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде число очок, більше за 4.

2. У туриста 10 однакових консервних бляшанок, серед яких 3 бляшанки - тушонка та 7 бляшанок - риба. Під час дощу етикетки відклеїлись. Знайти імовірність того, що дві навмання відкриті бляшанки відрізняються вмістом.

3. У ящику 10 стандартних, 15 нестандартних та 3 браковані деталі. Знайти імовірність того, що витягнута навмання деталь буде стандартною або бракованою.

4. Робітник отримав дві коробки деталей заводу №2 та три коробки заводу №1. Імовірність того, що деталь завода №1 стандартна - 0,8, завода №2 стандартна - 0,9. Робітник витягує з навмання взятої коробки стандартну деталь. Знайти імовірність того, що вона виготовлена заводом №1.

5. З партії, що містить 10 виробів, серед яких 3 дефектних, обрані випадковим чином 3 вироби для перевірки їхньої якості. Побудувати ряд

розподілу випадкового числа X дефектних виробів, що містяться у вибірці. Знайти M(X), D(X).

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X), D(X).

$$F(X)=\begin{cases}0, x\le 0\\ x^2, 0<x\le 1\\ 1, x>1\end{cases}$$

ВАРІАНТ 2

1. В урні 6 чорних та 5 білих куль. Навмання витягуються 4 кулі. Знайти імовірність того, що всі вони виявляться чорними.

2. В колоді 36 карт. Знайти імовірність того, що навмання витягнута карта – «туз».

3. З чисел 11, 12, 13, 14, 15 обираються одне за одним два числа. Знайти імовірність того, що обидва рази обране непарне число.

4. У піраміді 5 гвинтівок, три з яких з оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець поцілить у мишень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця імовірність дорівнює 0,7. Знайти імовірність того, що у мишень буде поцілено, якщо стрілець зробить один постріл з навмання взятої гвинтівки.

5. Побудувати ряд розподілу випадкового числа влучень м'ячем у корзину при трьох кидках, якщо імовірність влучення м'ячем у корзину при одному кидку p=0,3. Знайти D(X) та M(X).

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X), D(X).

$$F(X)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{6}, 1<x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$

ВАРІАНТ 3

1. Стрілець має 70 набоїв, з яких 5 - з осічкою. Яка імовірність того, що узяті навмання два набої виявляться з осічкою?

2. Знайти імовірність того, що обране випадковим чином число до 99 ділиться на 5.

3. У 1-й коробці 2 білих, 6 червоних та 4 синіх кулі. У 2-й - 1 біла, 2 червоних та 3 синіх кулі. З кожної коробки навмання обирають по одній кулі. Знайти імовірність того, що серед обраних куль немає білих.

4. У групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів та 4 бігуна. Імовірність виконати кваліфікаційну норму така: для лижника - 0,9, для велосипедиста 0.8, для бігуна - 0,75. Знайти імовірність того, що спортсмен, обраний навмання, виконає кваліфікаційну норму.

5. Чому дорівнює середнє число влучень м’ячем у корзину при чотирьох кидках, якщо імовірність влучення у одному кидку дорівнює 0,4?
6. Щільність імовірності випадкової величини X задана виразом f(x). Знайти a, M(X), D(X).

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ ax^2, 0 \le x \le 2 \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 4

1. 4 білета у театр розігруються між 5-ма хлопчиками та 7-ма дівчатами. Знайти імовірність того, що в театр підуть 2 хлопчика та 2 дівчинки.

2. Кинуті дві гральні кістки. Знайти імовірність того, що сума отриманихих очок більша за 9.

3. Для сигналізації про аварію встановлені 3 працюючих незалежно пристрої. Імовірність того, що при аварії спрацює 1-й пристрій, дорівнює 0,9, що спрацює 2-й пристрій - 0,95, що спрацює 3-й - 0,85. Знайти імовірність того, що при аварії спрацює хоча б один пристрій.

4. У першому ящику 15 деталей, з яких 10 стандартних, у другому ящику 20 деталей, з яких 18 стандартних, у третьому ящику - 10 деталей, з яких 6 стандартних. Навмання витягнута деталь з навмання обраного ящика виявилась нестандартной. Знайти імовірність того, що ця деталь з другого ящика.

5. Проводяться послідовні незалежні випробування 5 пристроїв на надійність. Кожний наступний пристрій випробовується лише у тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу випадкового числа випробованих пристроїв, якщо імовірність витримати випробування для кожного з них дорівнює 0,9. Знайти M(X), D(X).

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X) ,D(X).

$$F(X)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9}, 0<x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$

ВАРІАНТ 5

1. У корзині 5 білих та 8 чорних куль. Навмання витягуються 4 кулі. Знайти імовірність того, що серед них будуть 2 білих та 2 чорних.

2. Знайти імовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде число очок кратне 2-м.

3. Серед 20 білетів на іспиті два студенти знают 5 білетів. Перший студент витягнув «щасливий» білет. Яка імовірність у другого студента витягнути «щасливий» білет?

4. У двох корзинах лежать іграшки. У першій - 10 кубиків та 2 м'ячика, у другій – 8 кубиків та 5 м'ячиків. З першої корзини навмання взята іграшка і перекладена до другої. Знайти імовірність того, що навмання витягнута іграшка з другої корзини - кубик.

5. Навмання обирається натуральне число, не більше 10. X – число натуральних дільників обраного числа. Знайдіть закон розподілу X та імовірність події $x\le 2$.

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X), D(X).

$$F(X)=\begin{cases}0, x\le 2\\ (x-2)^2, 2<x\le 3\\ 1, x>3\end{cases}$$

ВАРІАНТ 6

1. У першому ящику знаходяться жетони з номерами від 1 до 5, а у другому - з номерами від 6 до 10. З кожного ящика витягнули по жетону. Яка імовірність того, що сума номерів цих жетонів дорівнює 11?

2. У вазі 4 червоних та 7 рожевих троянд. Навмання беруть дві троянди. Знайти імовірність того, що обидві будуть одного кольору.

3. У корзині 10 кубиків та 4 м'ячика. Дитина одну за одною бере дві іграшки. Знайти імовірність, що першим був кубик, а другим – м'ячик.

4. В класі 30 дітей. Імовірність отримати на контрольній «добре» для 12 учнів 0,9, для 8 учнів - 0,7, для 10 учнів - 0,5. Обраний навмання учень отримав на контрольній «добре». Знайти імовірність того, що він обраний з 10-ти учнів.

5. Знайти закон розподілу імовірностей числа гербів при двох кидках правильної монети. Знайти M(X), D(X).

6. Задана функція розподілу випадкової величини X. Знайти щільність імовірності, M(X) та D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, 1 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 7

1. Об'єкт атакують 10 літаків противника, серед яких 4 винищувача. Було збито 7 літаків. Знайти імовірність того, що серед збитих літаків два винищувача.

2. В колоді 36 карт. Навмання береться одна карта. Знайти імовірність того, що це буде «дама» чорної масті.

3. З чисел 16, 17, 18, 19, 20 обирають одне за одним два числа. Знайти імовірність того, що обидва рази будуть обрані парні числа.

4. У телевизійному ательє є 4 кінескопи. Імовірності того, що кінескоп витримає гарантійний термін відповідно дорівнюють 0,8, 0,85, 0,9, 0,95. Знайти імовірність того, що взятий навмання кінескоп витримає гарантійний термін.

5. У партії з 6 деталей 3 стандартних. Навмання відібрали 3 деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних. Знайти D(X) та M(X).

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X).Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X) та D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{36x^2}{\pi^2}, 0 < x \le \dfrac{\pi}{6} \\ 1, x > \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

ВАРІАНТ 8

1. У вазі 8 червоних та 2 зелених яблука. Знайти імовірність того, що серед трьох взятих яблук буде 2 зелених.

2. Знайти імовірність того, що при підкиданні гральної кістки з'явиться число очок кратне 3.

3. В ящику 6 білих та 8 чорних куль. Одна за одною витягують дві кулі. Знайти імовірність того, що вони різних кольорів.

4. У двох коробках - лампи. У першій - 12 ламп, з них 1 нестандартна, у другій – 10 ламп, з них 1 нестандартна. З першої коробки навмання взята лампа і перекладена у другу. Знайти імовірність того, що навмання витягнута лампа з другої коробки буде нестандартною.

5. Гральна кістка кидається до першої появи шістки. Знайдіть закон розподілу випадкової величини X – «кількість кидків кістки» та імовірність події $X \leq 3$.

6. При якому значенні a функція f(x) буде щільністю імовірності? Визначивши a, знайти імовірність події $0<X<1/4$.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l} 0, x<0 \\ ax^3, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, x>1 \end{array}\right\}$$

ВАРІАНТ 9

1. На кожній з 9-ти однакових карток надрукована одна з букв: а, в, м, и, о, р, с, т. Знайти імовірність того, що на шести витягнутих та розташованих в одну лінію картках можна буде прочитати слово «монстр».

2. У коробці 4 кубика та 6 м'ячиків. Дитина бере іграшку. Знайти імовірність того, що це кубик.

3. Три стрільця незалежно один від одного стріляють по цілі. Імовірність улучення у ціль 1-м стрільцем 0,75, 2-м - 0,8, 3-м - 0,9. Знайти імовірність того, що у ціль влучить хоча б один стрілець.

4. Літак атакує одну з двох цілей. Імовірність того, що він буде збитий над 1-ю ціллю - 0,9, над другою - 0,8. Літак збитий. Знайти імовірність того, що це відбудеться над другою ціллю.

5. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в одному випробуванні дорівнює

0,2. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному випробуванні. Знайти M(X), D(X).

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X) D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le -2 \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{3}, -2 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 10

1. На шести жетонах написані цифри 1, 3, 5, 7, 9, 0. Жетони перемішані. Знайти імовірність того, що на витягнутих по одному і розташованих в одну лінію трьох жетонах можна буде побачити число «793».

2. Знайти імовірність того, що обране випадковим чином двозначне число ділиться на 3.

3. З урни, в якій 8 кольорових та 7 білих куль, витягнули кулю, подивилися колір і поклали назад. Після цього витягнули іншу кулю. Знайти імовірність того, що обидві кулі кольорові.

4. Продавець узяв на реалізацію 4 ящика конфет, виготовлених на Одеській кондитерській фабриці, і 3 ящика конфет «ROSHEN». Імовірність того, що «одеська» конфета без обгортки - 0,3, а «рошенівська» - 0,1. Продавець навмання бере конфету з навмання обраного ящика. Знайти імовірність того, що конфета без обгортки.

5. В партії з 10 деталей 8 стандартних. Навмання взято 2 деталиі Знайдіть закон розподілу випадкової величини - числа стандартних деталей у вибірці. Знайти M(X), D(x).

6.Задана щільність імовірності. Знайти а, M(X), D(X).

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ ax, 0 \le x \le \pi \\ 0, x > \pi \end{cases}$$

ВАРІАНТ 11

1. В коробці 8 конусів та 12 циліндрів. Знайти імовірність того, що серед 2-х навмання витягнутих фігур один циліндр.

2. Знайти імовірність того, що при двох підкиданнях монети хоча б один раз випаде «решка».

3. Мішень містить три області. Імовірність попадання стрільцем у 1-у область 0,45, у 2-у - 0,35, у 3-ю - 0,15. Яка імовірність того, що при одном пострілі стрілець влучить у 1-у або у 2-у область?

4. В групі спортсменів 10 лижників, 8 велосипедистів та 6 бігунів. Імовірність виконати кваліфікаційну норму для лижника - 0,9, для велосипедиста 0,8, для бігуна - 0,75. Спортсмен, обраний навмання, виконав кваліфікаційну норму. Знайти імовірність того, що це - велосипедист.

5. В урні є 4 кулі з номерами від 1 до 4. Витягнули 2 кулі. Випадкова величина X – сума номерів куль. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Знайти M(X), D(X).

6.Випадкова величина X задана функцією розподілу F(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X), D(X).

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, x < 3 \\ (x-3)^3, 3 \le x \le 4 \\ 1, x > 4 \end{array} \right\}$$

ВАРІАНТ 12

1. У мішечку 5 однакових кубиків. На усіх гранях кожного кубика написана одна з букв о, п, р, с, т. Знайти імовірність того, що на витягнутих по одному і розташованих в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово «спорт».

2. В правій кишені 3 монети по 25 коп. та 2 монети по 50 коп. В лівій кишені 4 монети по 25 коп. та 3 монети по 50 коп. З правої кишені переклали у ліву 50 коп. Знайти імовірність, що з лівої кишені навмання візьмуть 25 коп.

3. В 1-й урні 7 білих та 3 чорних кулі. У 2-й - 5 білих та 5 чорних куль, у

3-й – 4 білих та 6 чорних куль. З кожної урни навмання обирають по одній кулі. Знайти імовірність того, що серед обраних куль тільки одна біла.

4. Літак озброєний 3-ма ракетами. Імовірності того, що 1-я, 2-я та 3-я ракети влучать у деякий об’єкт, відповідно дорівнюють 0,75, 0,9 та 0,87. Навмання запускають одну з ракет. Знайти імовірність того, що об’єкт буде знищений.

5. Монету кидають, поки не випаде герб. Знайти закон розподілу імовірностей випадкової величини «кількість кидків до першої появи герба».

6. Показати, що f(x) може слугувати щільністю імовірності деякої випадкової величини X. Знайти M(X), D(X).

$$f(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \dfrac{1}{2x}, 1\le x\le e^2\\ 0, x>e^2\end{cases}$$

ВАРІАНТ 13

1. На чотирьох жетонах написані цифри 2, 4, 6, 8. Жетони перемішані. Знайти імовірність того, що на витягнутих по одному і розташованих в одну лінію жетонах можна буде побачити число 824.

2. У корзинці 4 червоних та 5 зелених яблук. Знайти імовірність того, що взяте навмання яблуко червоне.

3. В 1-й урні 7 білих та 3 чорних кулі, у 2-й урні 5 білих та 5 чорних куль, у 3-й урні 4 білих та 6 чорних куль. З кожної урни беруть по одній кулі. Знайти імовірність того, що серед обраних куль є хоча б одна біла.

4. В класі 30 учнів. Імовірність отримати на контрольній «незадовільно» для 12 учнів - 0,1; для 8 учнів – 0,3; для 10 учнів - 0,5. Обраний навмання учень отримав на контрольній «незадовільно». Знайти імовірність того, що він обраниз з 8-ми учнів.

5. З партії, що складається з 9 виробів, серед яких є 4 дефектних, обрані випадковим чином 3 вироби для перевірки їхньої якості. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X - кількості дефектних виробів, що містяться у вибірці. Знайти M(X), D(X).

6.Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X), D(X).

$$F(X)=\begin{cases}0, x\le\sqrt{2}\\ \dfrac{x^2}{2}, \sqrt{2}<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

ВАРІАНТ 14

1. Кинуті дві гральні кістки. Знайти імовірність того, що сума очок дорівнює 4.

2. Набираючи номер телефона, абонент забув одну цифру та набрав її навмання. Знайти імовірність того, що набрана вірна цифра.

3. Є 3 коробки, у кожній з яких 10 деталей. У 1-й коробці 8 пофарбованих деталей, у 2-й - 7 пофарбованих, у 3-й – 9 пофарбованих. З кожної коробки навмання беруть по одній деталі. Знайти імовірність того, що всі вони пофарбовані.

4. В правій кишені 3 монети по 25 коп. та 2 монети по 50 коп. В лівій кишені 4 монети по 25 коп. та 3 монети по 50 коп. З правої кишені переклали у ліву одну монету. Знайти імовірність, що з лівої кишені навмання візьмуть 25 коп.

5. Побудувати ряд розподілу випадкового числа влучень м'ячем у корзину при трьох кидках, якщо імовірність влучення м'ячем у корзину при одному кидку p=0,2. Знайти D(X) та M(X).

6. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірностей, M(X), D(X).

$$F(X)=\left\{\begin{array}{l} 0,\ x\le 1 \\ \dfrac{x^2-x}{2},1<x\le 2 \\ 1,\ x>2 \end{array}\right\}$$