МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання

контрольних робіт з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів І року денної форми навчання

Спеціальність – туризм

Одеса 2018

Методичні вказівки до СРС та виконання контрольних робіт з дисципліни "Вища математика" для студентів I року денної форми навчання. Спеціальність – туризм.

Одеса, ОДЕКУ, 2018р., 31 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю.., д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц.., Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц.

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ЗМІСТ

I	ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА……………………………………………...		4
	1.1	Передмова………………………………………………..	4
	1.2	Зміст дисципліни………………………………………..	5
	1.2.1	Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії.…..…	5
	1.2.2	Вступ до математичного аналізу ……………………….....	5
	1.2.3	Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних…………………………………………………	6
	1.2.4	Інтегральне числення функції однієї змінної …………..….	6
	1.2.5	Диференціальні рівняння………..…………………………...	6
	1.2.6	Ряди………………………………………………………….	7
	1.2.7	Теорія імовірності та математична статистика……..………	7
	1.3	Перелік навчальної та методичної літератури………………	8
II	МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ…………………………………….....		9
	2.1	Загальні поради. ………………………………………………	9
	2.2	Методичні вказівки до розв’язання задач та типові приклади завдань модульного контролю……………..……	9
	2.2.1	Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії …...…	9
	2.2.2	Вступ до математичного аналізу ……………………….....	15
	2.2.3	Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних…………………………………………………	16
	2.2.4	Інтегральне числення функції однієї змінної …………..….	18
	2.2.5	Диференціальні рівняння………..…………………………...	21
	2.2.6	Ряди………………………………………………………….	24
	2.2.7	Теорія імовірності та математична статистика……..………	27

I ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальності туризм . Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язуванні задач і аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язуванні задач даної дисципліни.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен

знати основні визначення, положення та теореми лінійної і векторної алгебри, диференціального і інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних;

вміти використовувати теоретичні знання та навички при розв'язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики щодо розв'язання прикладних математичних задач.

1.2 Зміст дисципліни

1.2.1 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення. Алгебраїчні доповнення і мінори. Визначники n-го порядку. Системи координат на прямій, площині і у просторі. Вектори. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Напрямні косинуси і довжина вектора. Скалярний добуток векторів і його властивості. Довжина вектора і кут між двома векторами в координатній формі. Умова ортогональності двох векторів. Механічний зміст скалярного добутку. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Умова колінеарності двох векторів. Мішаний добуток трьох векторів.

Матриці, дії над ними. Поняття та обчислення оберненої матриці. Ранг матриці. Власні вектори та власні значення матриці.

Системи двох і трьох лінійних рівнянь. Матричний запис системи лінійних рівнянь. Правило Крамера. Система n лінійних рівнянь з m невідомими. Метод Гаусса. Поняття лінійного (векторного) простору. Вектор як елемент лінійного простору. Лінійні оператори.

Рівняння ліній на площині. Різні форми рівняння прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, їхні геометричні властивості і рівняння. Технічні додатки геометричних властивостей кривих. Рівняння площини і прямої в просторі. Кут між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою і площиною. Рівняння поверхні в просторі. Циліндричні поверхні, сфера. Конуси. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Полярні координати на площині. Циліндричні і сферичні координати в просторі.

1.2.2 Вступ до математичного аналізу

Основні елементарні функції, їх властивості і графіки. Складні і зворотні функції, їх графіки

Числові послідовності, їх роль в обчислювальних процесах. Границя функції у точці. Границя функції на нескінченності. Нескінченно малі в точці функції, їхні властивості. Порівняння нескінченно малих. Теореми про границі. Визначні границі.

Безперервність функцій у точці. Безперервність основних елементарних функцій. Властивості функцій, безперервних на відрізку: обмеженість, існування найбільшого і найменшого значень, існування проміжних значень.

1.2.3 Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних

Поняття функції, диференційованої у точці. Диференціал функції. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст у різних задачах. Правило здобування похідної і диференціалу. Похідна складеної і оберненої функції. Інваріантність форми I-го диференціалу. Диференціювання функцій, заданих параметрично. Точки екстремуму функцій. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, їх застосування. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Похідна і диференціали вищих порядків. Розвинення функцій по формулі Тейлора. Умови монотонності функції. Екстремуми функції, необхідна та достатні умови. Відшукання найбільшого і найменшого значень функцій, диференційованої на відрізку. Дослідження опуклості функції. Точки перегину. Асимптоти графіку функції. Поняття про асимптотичне розкладання. Загальна схема дослідження функцій і побудова її графіка.

Функції багатьох змінних. Область визначення. Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку. Скалярне поле. Фізичний зміст його характеристик. Похідна за напрямком у точці. Градієнт функції у точці.

1.2.4 Інтегральне числення функцій однієї змінної

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця основних первісних. Безпосереднє інтегрування функцій. Інтегрування частинами та підстановкою. Інтегрування раціональних дробів за допомогою розкладання на найпростіші дроби. Тригонометричні підстановки і метод «раціоналізації» інтегралів.

Задачі, що призводять до поняття визначеного інтегралу Найпростіші властивості визначеного інтегралу, теорема про середнє. Похідна від інтегралу за верхньою границею. Формула Ньютона-Лейбниця. Геометричний зміст визначеного інтегралу. Обчислення інтеграла за допомогою інтегрування частинами і заміни змінної. Обчислення інтеграла за допомогою застосування формули Тейлора. Наближене обчислення інтегралів за формулами трапецій і Симпсона.

Невласні інтеграли. Основні властивості, ознаки збіжності, абсолютна і умовна збіжність. Наближене обчислення невласних інтегралів.

1.2.5 Диференціальні рівняння

Звичайні диференціальні рівняння (ДР). Основні типи ДР 1-го порядку. Основні типи ДР вищих порядків. ДР, що припускають пониження порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні ДР 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Системи лінійних ДР 1-го порядку.

1.2.6 Ряди

Числові ряди. Збіжність і суми рядів. Небхідна умова збіжності. Дії з рядами. Методи дослідження збіжності рядів.

Функціональні ряди, область збіжності, методи її визначення, степеневі ряди. Розкладання функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

Ряди Фур'є. Розкладання функцій у тригонометричні ряди Фур'є. Застосування тригонометричних рядів Фур'є в наближених обчисленнях

1.2.7 Теорія імовірності та математична статистика

Предмет теорії імовірності. Поняття випадкової події. Класифікація подій. Простір елементарних подій. Операції над подіями та відносини між ними. Алгебра подій. Класичне і геометричне визначення імовірності. Визначення умовної імовірності. Незалежність подій, імовірність добутку подій. Теорема про повну імовірність, формули Байсеа. Послідовність незалежних іспитів, схема Бернуллі.

Випадкові дискретні величини. Ряд розподілу. Функції розподілу випадкової величини та її властивості. Неперервні та дискретні розподіли. Приклади розподілів: нормальний, пуасонівський, біноміальний, рівномірний, показниковий. Сумісний розподіл декількох випадкових величин. Коефіцієнт кореляції.Закон великих чисел.

Основні відомості з математичної статистики. Головна сукупність і вибірка. Розподіли Стьюдента та хі-квадрат. Критерій Пірсона. Математичне очікування, дисперсія, моменти, мода, медіана випадкової величини. Метод найменших квадратів. Статистичне моделювання.

Поняття про перевірку статистичних гіпотез. Поняття про критерії згоди. Перевірка гіпотез про рівність часток і середніх. Вибір критерію для перевірки статистичної гіпотези.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. О.В.Глушков, Ю.О.Кругляк, Ю.Г. Чернякова. Лінійна алгебра. Конспект лекцій.- Одесса, ОДЕКУ, «ТЭС»-2004.
2. Сборник задач по математике для ВТУЗов: Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- М.: Наука, 1986.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М. «Высшая школа», 1986.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч. 1, 2. М., «Наука», 1976.
5. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В.,Лобода А.В., Середенко С.С. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.1. –Одеса, 2011.
6. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2014.
7. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969, 1973.
8. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.
9. Бараненков Г. С. (и др.) Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Демидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.
10. Бугров Я. С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., «Наука», 1981.
11. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

12. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1972.
13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.
14. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.
15. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., «Наука», 1984.
16. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв'язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною. Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт, що оцінюється згідно з робочою програмою. Вся робота повинна виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що дана дисципліна є засвоєною студентом.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми. Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі, які наведені у конспекті лекцій з дисципліни. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв'язання типових задач.

Далі переходьте до вивчення наступної теми .

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач та типові завдання модульного контролю

2.2.1 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Література: [1,§5-7],[2,гл.1, §1-3],[3,гл.2],[4,гл.2], [1,§3],[2,гл.5, §1,3,5].

Приклад 1. Дані точки: A(3;-1;2); B(2;3;2); C(5;0;-4); D(-1;2;1).
Знайти кут між векторами AB та AB-2CD

Розв"язання. Знайдемо координати векторів. Для цього від кінцевих координат відіймемо початкові:

$\overrightarrow{AB}(2-3;3-(-1);2-2)$; $\overrightarrow{AB}(-1;4;0)$; $\overrightarrow{CD}(-1-5;2-0);1-(-4))$; $\overrightarrow{CD}(-6;2;5)$; $2\overrightarrow{CD}(-12;4;10)$; $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}(-1-(-12);4-4;0-10)$; $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}(11;0;-10)$

Тепер знайдемо скалярний добуток цих векторів, користуючись формулою: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$

$$(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AB}=11\cdot(-1)+0\cdot 4+(-10)\cdot 0=-11$$

Обчислимо довжини векторів, що перемножуються:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+0^2}=\sqrt{17}\,;\ |\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}|=\sqrt{11^2+0^2+(-10)^2}=\sqrt{221}$$

Кут між векторами знайдемо за формулою: $\varphi=\arccos(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|})$

$$\varphi=\arccos(\frac{\overrightarrow{AB-2CD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB-2CD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|})=\arccos(\frac{-11}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{221}})$$

Відповідь: $\varphi=\arccos(\frac{-11}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{221}})$

Приклад 2. Знайти одиничний вектор, що колінеарний до вектора AC x BC

Розв”язання. Обчислимо координати векторів AC та BC:

$\overrightarrow{AC}(5-3;0-(-1);-4-2)$; $\overrightarrow{AC}(2;1;-6)$; $\overrightarrow{BC}(5-2;0-3;-4-2)$; $\overrightarrow{BC}(3;-3;-6)$

Знайдемо векторний добуток AC x BC за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix};\qquad \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -6\\ 3 & -3 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & -6\\ -3 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -6\\ 3 & -6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-24\vec{i}-6\vec{j}-9\vec{k}$$

Нормуємо цей вектор, для цього потрібно обчислити його довжину:

$$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-24)^2+(-6)^2+(-9)^2}=\sqrt{693}$$

Координати орта обчислимо за формулою:

$$\vec{a}_o(\frac{x_a}{|\vec{a}|};\frac{y_a}{|\vec{a}|};\frac{z_a}{|\vec{a}|});\qquad (\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC})_o(\frac{-24}{\sqrt{693}};\frac{-6}{\sqrt{693}};\frac{-9}{\sqrt{693}})$$

Відповідь: $(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC})_o(\frac{-24}{\sqrt{693}};\frac{-6}{\sqrt{693}};\frac{-9}{\sqrt{693}})$

Приклад 3. Знайти об”єм паралелепипеду, що побудований на векторах BC, BD, BA

Розв”язання. Обчислимо координати векторів BC,BD та BA:

$\overrightarrow{BC}(3;-3;-6)$; $\overrightarrow{BD}(-1-2;2-3;1-2)$; $\overrightarrow{BD}(-3;-1;-1)$; $\overrightarrow{AB}(-1;4;0)$; $\overrightarrow{BA}(1;-4;0)$

Об”єм паралелепипеду, що побудований на цих векторах, чисельно дорівнює модулю їх мішаного добутку, який обчислюється за формулою:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix};\qquad V_{пар}=\left|\ \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{BA}\ \right|=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -72 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}=$$

$$=|-69-18|=|-87|=87$$

Відповідь: $V_{пар}=87$ ед.^{3}

Приклад 4. Знайти значення матричного многочлена: $D = -2B^2+B+2E_3$.

Розв"язання.

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 & -4 & -16 \\ -4 & 40 & 14 \\ -16 & 14 & 12 \end{pmatrix};\ -2B^2=\begin{pmatrix} -80 & 8 & 32 \\ 8 & -80 & -28 \\ 32 & -28 & -24 \end{pmatrix};\ 2E_3=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D=-2B^2+B+2E_3=\begin{pmatrix} -80 & 8 & 32 \\ 8 & -80 & -28 \\ 32 & -28 & -24 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -72 & 8 & 30 \\ 8 & -72 & -26 \\ 30 & -26 & -20 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $D=\begin{pmatrix} -72 & 8 & 30 \\ 8 & -72 & -26 \\ 30 & -26 & -20 \end{pmatrix}$

Приклад 5. Знайти розв"язок даної СЛАР А)за правилом Крамера, Б) методом Гаусса та В)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x+y+z=7. \\ x-2y+z=4 \end{cases}$$

Розв"язання. А)Обчислимо визначник системи та переконаємось, що він не дорівнює нулю:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2+2+3+1+4-3=9\neq 0$$

Згідно з правилом Крамера, складемо визначники $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$,замінюючи стовпці вихідного визначника на стовпець правих частин:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3+14+12+4+6-21=18;;\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=14-4+3+7-8-3=9;$$

$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=8-6+21-3+28-12=36;$ За формулами Крамера,

$x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta};y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta};z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}.$ Тому $x=\dfrac{18}{9}=2;y=\dfrac{9}{9}=1;z=\dfrac{36}{9}=4.$

Відповідь: $x=2;y=1;z=4.$

Б) Для зручності поміняємо місцями 1 та 2 рівняння. Маємо:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Відіймемо від 2 рядка 1-й, помножений на 2, та від 3 рядка 1-й:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ y - 3z = -11 \\ -3y + = -3 \end{cases}$$

Поміняємо місцями 2 та 3 стовпці та отримаємо систему трикутного вигляду, з якої дуже зручно визначати невідомі, ідучи по "сходинкам" знизу догори.

$$\begin{cases} x + z + y = 7 \\ -3z + y = -11 \\ -3y = -3 \end{cases}$$

З 3-го рівняння маємо y=1; Підставимо це у 2-е рівняння та знайдемо z: -3z+1=-11; -3z=-12; z=4; Підставимо це у 1-е рівняння та знайдемо x: x+4+1=7; x=2.

Відповідь: $x = 2; y = 1; z = 4.$

В) З пункту А) пам"ятаємо, що визначник системи $\Delta = 9 \neq 0$, тому обернена матриця існує. Знайдемо її методом приєднаної матриці. Для цього випишемо алгебраїчні мінори елементів матриці системи:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7;\ A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

Приєднана матриця: $A_{пр} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$; а обернена : $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A_{пр} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$;

Стовпець невідомих

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9-7+16 \\ 0+21-12 \\ -9+49-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Відповідь: $x = 2; y = 1; z = 4.$

Приклад 6. Написати рівняння прямої у відрізках на осях, якщо вона проходить через точку М (2;3) та паралельна до прямої 3x+2y-1=0.

Розв"язання. Оскільки паралельні прямі мають один і той же нормальний вектор, шукана пряма має рівняння 3x+2y+C=0, де С поки що невідомо, але може бути знайдено з умови, що координати точки М(2;3) задовольняють рівнянню прямої: 3*2+2*3+C=0; C=-12;

Отже, рівняння прямої 3x+2y-12=0. Перетворимо його до вигляду у відрізках на осях. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 12 та перенесемо вільний член праворуч: 3x+2y-12=0.|:12 ; x/4+y/6=1;

Відповідь: x/4+y/6=1;

Приклад 7. Знайти кут між прямими y=x-8 та x/2-y/7=1.

Розв"язання. Кут між прямими на площині обчислюється за формулою:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|;$$

тут прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами. З першого рівняння бачимо, що $K_1=1$; Друге рівняння помножимо на 7 та виділимо у у ліву частину: $y=\frac{7}{2}x-7$; Тому $K_2=\frac{7}{2}$; $tg\varphi=\left|\frac{\frac{7}{2}-1}{1+1\cdot\frac{7}{2}}\right|=\left|\frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{2}}\right|=\frac{5}{9}$;**Відповідь:** $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{5}{9}$

Приклад 8. Написати рівняння площини, що проходить через точки

A (2;-1;3); B (0;-2;5); C (1;1;1).

Розв"язання. Рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Підставимо координати точок A,B,C:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 0-2 & -2+1 & 5-3 \\ 1-2 & 1+1 & 1-3 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0;$$

Розкриємо визначник розкладом по першому рядку:

-2(x-2)-4(y+1)-3(z-3)=0; -2x-4y-3z+9=0.

Відповідь: -2x-4y-3z+9=0.

Приклади завдань модульної контрольної роботи №1

Варіант 1

1) Дані точки: A(1;2;1); B(3;0;-4); C(-2;3;5); D(2;1;-1). а) Знайти кут між векторами AB та CD; б) Обчислити площу трикутника BCD; в) Перевірити, чи належать точки A,B,C,D до однієї площини.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти $D = -2B^2+B+2E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а)за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x+y+z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

Варіант 2

1) Дані точки: A(2;5;-1);B(4;1;-2);C(3;3;1);D(4;-1;-2). а)Чи є серед векторів AB,CD,AD взаємно перпендикулярні? б)Чи є серед векторів AC,BD,BA колінеарні? в)Чи утворюють вектори BA,BC,BD праву трійку.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти $D = B^2+2B+3E_3$.

3) Знайти розв"язок СЛАР а) за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 5x+2y-3z=1 \\ x-y-z=-3 \\ 3x+3y+2z=8 \end{cases}$$

Варіант 3

1) Дані точки: A(3;-1;-2);B(2;3;4);C(5;0;-1);D(-1;2;1). а) Знайти $Пр_{AB}$ CD; б) Обчислити площу паралелограма, що побудований на векторах BC та BA; в) Перевірити компланарність векторів AC, BC,AD.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти $D = -B^2+3B-E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а)за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} x-y+4z=1 \\ 3x+2y-z=13 \\ 2x+y-2z=8 \end{cases}$$

Варіант 4

1) Дані точки: A(4;0;2); B(3;-1;1); C(2;5;-4); D(5;-3;-1). а) Знайти значення виразу: (3AB-2CД)(AC+2BD); б) Знайти одиничний вектор, перпендикулярний до векторів AB та AD; в) Знайти об"єм паралелепіпеду, що побудований на векторах AB, AC, AD.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти $D = 3B^{2-}B+E_3$.

3) Знайти розв'язок СЛАР а)за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 3x-6y+z=1 \\ 2x+y-2z=3 \\ 4x-3y-z=4 \end{cases}$$

Варіант 5

1) Дані точки: A(1;2;3); B(-1;3;2); C(7;-3;5); D(0;1;1). а) Знайти кут між векторами AB та CD; б) Обчислити площу трикутника BCD ; в) Знайти об"єм тетраедра ABCD.

2) Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. а) Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$; б) Знайти $D = 2B^{2-4}B-2E_3$.

3) Знайти розв"язок СЛАР а) за правилом Крамера; б)методом Гаусса; в)засобами матричного числення.

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=1 \\ 3x-y+2z=-1 \\ x+3y+4z=3 \end{cases}$$

2.2.2 Вступ до математичного аналізу

Література: [4]] гл. II, §1-10; гл. III, §1-19; гл. V, §1-7; гл. X, §1-10; [5] гл. XI, гл. XIII; [10] гл. IV, § 1-7; гл. XIII, § 1-2; гл. XIV, § 1-7

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+3x-2}{3x^3-4x+5}$.

Розв'язання. $$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2+3x-2}{3x^3-4x+5}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\frac{x^3}{x^3}-5\frac{x^2}{x^3}+3\frac{x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{3\frac{x^3}{x^3}-4\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\frac{4}{3}$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$

Розв'язання. Для розкриття невизначеності використовуємо першу чудову границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$.

Маємо $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\bullet\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{2}.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+5}$.

Розв'язання: $$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+5}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-5)}=\frac{-1-1}{-1-5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Приклад 4 . Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}$.

Розв'язання: $$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x-3}-1\right)^{2x+1}=$$

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5}{x-3}\cdot(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{10x+5}{x-3}}==e^{10}$$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №2

Варіант №1.

Обчислити границі

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{4x}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$

Варіант №2

Обчислити границі.

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+4}\right)^{1-2x}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot tgx}{1-\cos4x}$ 4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{5x^3+3x^2-2x}$

Варіант №3

Обчислити границі.

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$ 2. $\lim\limits_{x\to1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$ 3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+3}{3x^2+1}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Варіант №4

Обчислити границі.

1. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{2x^3+1}}{\arcsin(5x^3)}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{2\arcsin^2 2x}$

Варіант №5

Обчислити границі.

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{4x-3}\right)^{4x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg3x}{6x}$

2.2.3 Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних

Література. : [2] гл. II, § 1—8, гл. III, § 2-24; [3] гл. III, § 1—4, гл. IV,§ 1-7; [4]. гл. II, § 1—5, [5], гл. II, § 1-4; гл. III, § 1-2;

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=(\sin x+4)^3$

Розв'язання. Для обчислення похідної скористаємося правилом обчислення похідної складної функції, а потім суми двох функцій sinx+4:

$$y'=3(\sin x+4)^2(\sin x+4)'=3(\sin x+4)^2\cos x$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=tg(\ln x^2)$.

Розв'язання: За правилом обчислення похідної складної функції маємо:

$$y'=\left(tg(\ln x^2)\right)'=\frac{1}{\cos^2(\ln x^2)}\left(\ln x^2\right)'=\frac{1}{\cos^2(\ln x^2)}\cdot\frac{1}{x^2}\left(x^2\right)'=$$

$$\frac{1}{\cos^2(\ln x^2)}\frac{1}{x^2}\cdot2x=\frac{2}{\cos^2(\ln x^2)x}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції y'_x : $\begin{cases} x(t)=\ln ctgt \\ y(t)=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо $x'_t=\dfrac{1}{ctgt}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 t}\right)=-\dfrac{1}{\sin t\cos t}$;

$y'_t=-2\cos^{-3}t(-\sin t)=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}$. Тоді $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2\sin t\sin t\cos t}{\cos^3 t}=-2\,tg^2 t$.

Приклад 4. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції $z = 3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3$

Розв'язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)'_x = 3y^2\left(x^2\right)' + 15y^3 \cdot (\sin x)' = 6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2y^2 + 15\sin x \cdot y^3\right)'_x = 3x^2\left(y^2\right)' + 15\sin x \cdot \left(y^3\right)' = 6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)'_x = 6y^2 - 15y^3 \cdot \sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(6x^2y + 45y^2 \cdot \sin x\right)'_y = 6x^2 + 90y\sin x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(6y^2x + 15y^3 \cdot \cos x\right)'_y = 12yx + 45y^2 \cdot \cos x$$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №3

Варіант № 1

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2}{1 - \cos 4x}$:

Знайти похідну:2) $y = \left(\ln x + 7x^2\right) \cdot \sqrt{x}$ 3) $y = \ln\left(tg\dfrac{4}{x}\right)$ 4) $y = e^{\arcsin 2x}$ 5) $y = arctg\,\dfrac{1}{\sin x}$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z = 4x^3+3x^2y+5xy^2-y^3$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

Варіант № 2

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

Знайти похідну:2) $y = \dfrac{4x + 2}{5x - 3}$ 3) $y = \cos^3(2x + 5)$ 4) $y = arctg\,\sqrt{2x + 1}$ 5) $y = x \cdot \arccos x^2$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z = x \cdot \sin(x + y)$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z = 5x^4 - 6x^2y + 10xy^2 - 3$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = \ln(x^2 + 1)$.

Варіант № 3

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot ctg 7x$

Знайти похідну: 2) $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ 3) $y = \ln^3(2x + 1)$ 4) $y = x^3 \cdot \ell^{\cos 5x}$ **5)** $y = arctg\,\sqrt{2x + 1}$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z = y^{\ln x}$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z = 6x^3y^2-4x\sin y+4$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y = x + e^{-x}$.

Варіант № 4

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$

Знайти похідну:2) $y=\left(e^{\sin x}-1\right)^2$ 3) $y=x^3\cdot\arccos x$ 4) $y=\dfrac{\cos 4x-1}{3-\sin 4x}$ 5) $y=\frac{1}{3}tg^3(2x)$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z=\arcsin(xy)$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z = 4x^2y^3 - 3xy +10$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$;

Варіант № 5

Обчислити по правилу Лопіталя: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$

Знайти похідну: 2) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ 3) $y=arcctg\, e^{2x}$ 4) $y=\ln^4(\sin 2x)$ 5) $y=x\cdot\arcsin 2^x$

Знайти частинні похідні I порядку: 6) $z=tg(3x+5y)$

Знайти частинні похідні II порядку: 7) $z=5x^2y-6xy+10x^5y^2+4$

Дослідити функцію та побудувати її графік 8) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$;

2.2.4 Інтегральне числення функції однієї змінної

Література: [1] гл. XVI- XVII; [2] гл.XVII; [5] гл. IV, [6] гл.XV, [7] гл.III.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$.

Розв'язання. Приводимо інтеграл до табличного заміною:

$U=4+\ln x;\ dU=\dfrac{1}{x}dx.$ Тоді $I=\left|\begin{array}{l}U=4+\ln x\\ dU=\dfrac{1}{4}dx\end{array}\right|=\int\sqrt{U}\ dU=\dfrac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{(4+\ln x)^3}+C$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int x^2\sin x\ dx$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу інтегрування врозпріб:

$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$ Тоді $I=\left|\begin{array}{l}u=x^2;\ du=2xdu\\ dv=\sin xdx;\ v=-\cos x\end{array}\right|=-x^2\cos x+\int 2x\cos xdx$

Для обчислення отриманого інтеграла формулу інтегрування врозпріб потрібно застосувати ще раз. Позначимо:

$$\int x\cos xdx\left|\begin{array}{l}u=x;\ du=dx\\ dv=\sin xdx;\ v=\sin x\end{array}\right|=x\sin x-\int\sin dx=x\sin x+\cos x+C$$

Підставляючи, маємо $I=-x^2\cos x+x\sin x+\cos x+C$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}$.

Розв'язання. Враховуючи ірраціональність, позначимо $x+3=t^6$; $dx=6t^5dt$

; $I=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=6\int dt-6\int\frac{dt}{1+t^2}=6t-6arctgt+C=$

$=6\sqrt[6]{x+3}-6arctg\sqrt{x+3}+C.$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої $x=3\cos^3 t$; $y=3\sin^3 t$.

Розв'язання. Формула обчислення площі плоскої фігури, обмеженої кривою в параметричній формі $S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$, де $y=\psi(t)$, $x=\varphi'(t)$.

У нашому випадку $\varphi'(t)=3\cdot3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-9\cos^2 t\sin t$.

$$\frac{1}{4}S=-\int_0^{\pi/2}3\sin^3 t\cdot(-9)\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\ dt=27\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t\ dt=$$

$$=27\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos2t}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+\cos2t}{2}\right)dt=\frac{27}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos2t+\cos^2 2t\right)\cdot\left(1+\cos2t\right)dt=$$

$$=\frac{27}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos2t-\cos^2 2t+\cos^3 2t\right)dt=$$

$$=\frac{27}{8}t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\frac{t}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos4t}{2}dt+\frac{27}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 2t\right)\cdot\cos2t\ dt=$$

$$=\frac{27}{8}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{27}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{27}{8}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{27}{32}\pi.$$

Приклад 5. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$; x=0, y=0.

Розв'язання. Використовуємо формули:

$$X_c=\frac{M_y}{M};\quad Y_c=\frac{M_x}{M};$$

$$M=\int_a^b\gamma(y_b-y_n)dx;\qquad M_y=\int_a^b\gamma(y_b-y_n)dx;$$

У нашому випадку $y_b = (2-\sqrt{2})^2$; $Y_m = 0$ границі інтегрування a=0, b=4, $\gamma = 1$ (однорідна фігура). $M = \int\limits_0^4 (2-\sqrt{õ})^2 dx = \int\limits_0^4 (4-4\sqrt{õ}+x)dx = (4x - 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2})|_0^4 = 8/3$

Обчислимо статистичний момент щодо осі OY.

$$M_y = \int\limits_0^4 x(2-\sqrt{2})^2 = \int\limits_0^4 (4x - 2x^{2/3} + x^2)dx =$$

$$(4\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^3}{3})|_0^4 = 32/15$$

$x_c = \frac{32}{15} : 8/3 = 4/5$; $y_c = x_c = 4/5$ – координати центра ваги розглянутої фігури.

Приклади завдань модульної контрольної роботи №4

Варіант № 1

Обчислити : 1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-4}}dx$; 2) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3}dx$; 3) $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$;

Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями: $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$

Варіант № 2

Обчислити: 1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}dx$; 2) $\int x3^x dx$; 3) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями: $4y = x^2$; $y = 2$

Варіант № 3

Обчислити : 1) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}}dx$; 2) $\int \frac{5x^2}{5-2x^3}dx$; 3) $\int x\cos 5x dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями: $x^2 - 4y - 16 = 0; y = 0$

Варіант № 4

Обчислити : 1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; 2) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;4) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями: $y = \sqrt{4-x^2}; y = 0; y \le 0$

Варіант № 5

Обчислити: 1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; 2) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$; 3) $\int \frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями: $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$

2.2.5 Диференціальні рівняння

Література: [1] гл. VIII ; [2] гл. XV, [5] гл.I, [6] гл. XIV, [7], т.2, гл. IV

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''=\dfrac{y'}{x}+x$.

Розв’язання. Рівняння не містить y і належить до типу $y'=f(x,y')$. Тому зробимо заміну $y'=p$ і $y''=p'$. Приходимо до лінійного рівняння першого порядку $p'=-\dfrac{1}{x}p=x$. Вирішимо його, використавши підстановку $p=uv.$ $p'=u'v+v'u$. Рівняння приводиться до вигляду $u'v+v'u-\dfrac{1}{x}uv=x.$ За методом Бернуллі одержуємо два рівняння з роздільними змінними: $v'-\dfrac{1}{x}v=0$ і $u'v=x$ З першого $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v}{x};\ \dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{x};$ $\ln y=\ln x;$ і $y=x.$ Підставимо значення v у друге рівняння й інтегруємо його: $u'x=x$ або $u'=1$, звідкіля $u=x+c$. Таким чином, ми знайшли $p=x(x+c)=x^2+cx.$ Замінюючи $p=\dfrac{dy}{dx}$ й інтегруючи це рівняння, одержимо остаточний розв’язок $\dfrac{dy}{dx}=x^2+cx;\ dy=(x^2+cx)dx;\ y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{cx^2}{2}+c_1$.

Приклад 2. Знайти частинний розв’язок рівняння $y''-2y'=e^x(x^2+x-3),$ що задовольняє умовам $y|_{x=0}=2; y'|_{x=0}=2$.

Розв’язання. Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y''-2y'=0.$ Частинний розв’язок цього рівняння шукаємо у вигляді $y=e^{kx}.$ Підставляючи цей розв’язок у рівняння і скорочуючи на e^{kx}, приходимо до характеристичного рівняння $k^2-2k=0$, звідкіля $k_1=0,\ k_2=2$. Маємо два частинних розв’язки $y_1=e^{ox}=1$ і $y_2=e^{2x}$. Ця система фундаментальна, тому що $\dfrac{y_1}{y_2}\neq const$. Тому на їхній основі будуємо загальний розв’язок однорідного рівняння $\overline{y}=c_1+c_2e^{2x}$. Оскільки права частина заданого рівняння має вигляд $e^{\alpha x}p_n(x)$, частинний розв’язок шукаємо у подібній формі $(k_1\neq\alpha;\ k_2\neq\alpha)$: $y=l^x(ax^2+bx+c),\ y'=e^x(ax^2+bx+c)+c^x(2ax+b);$ $y''=e^x(ax^2+bx+c)+2e^x(2ax+b)+2ue^x.$

Підставляємо ці значення в задане рівняння і приходимо до тотожності (яку попередньо скоротимо на $e^x\neq 0$): $-ax^2-bx+2a-c=x^2+x-3$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч, приходимо до системи рівнянь для визначення *a, b* і *c:* $-a=1;-b=1;\ 2a-c=-3,$ звідкіля $a=-1;\ b=-1;\ c=1,$ і частинний розв’язок набере вигляду: $y = e^x(-x^2 - x + 1)$. Складаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння : $y = c_1 + c_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1)$. Визначаємо c_1 і c_2 з початкових умов: $y' = 2c^2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) - e^x(x + 1)$;

$$\begin{matrix} y|_{x=0} = 2 = c_1 + c_2 + 1 \\ y'|_{x=0} = 2 = 2c_2 + 1 - 1 \end{matrix} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 = 2 \end{cases}.$$

З останньої рівності $c_2 = 1$. Тоді $c_1 = 0$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння, що задовольняє задані початкові умови, одержуємо у вигляді: $y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) = e^x(e^x - x^2 - x + 1)$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати в матричній формі дану систему і її розв'язок.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Розв'язання. Нагадаємо, що частинні розв'язки системи шукаються у вигляді $x_1 = \alpha_1 e^{kt}$ і $x_2 = \alpha_2 e^{kt}$. Після їхньої підстановки в задану систему і скорочення на e^{kt} одержуємо алгебраїчну систему

$$\begin{cases} (2-k)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Вона має нетривіальні (відмінні від нуля) розв'язки тільки в тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю. Записавши цю умову, ми одержуємо характеристичне рівняння для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник і одержуємо $(2-k\ )\ (4-k\ ) = 0$ чи $k^2 - 6k + 5 = 0$, звідки $k_1 = 1,\ k_2 = 5$. Підставляючи кожне зі знайдених значень k у систему алгебраїчних рівнянь, визначаємо значення α_1 і α_2, а значить і частинні розв'язки x_1 і x_2. Візьмемо $k_1 = i`$ і підставимо його в систему. Одержимо

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0 \\ 3a_1^{(1)} + 3a_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

(тут невідомі a_1 і a_2, що відповідають значенню k_1 позначені $a_1^{(1)}$ і $a_2^{(1)}$). Отримані рівняння залежні. Тому визначаємо (з точністю до сталого множника $a_1^{(1)}$ і $a_2^{(1)}$) з першого рівняння $a_1^{(1)} = 1$, $a_2^{(1)} = -1$ і одержуємо перші частинні розв'язки $x_1^{(1)} = e^t$ і $x_2^{(1)} = -e^t$. Візьмемо $k_1 = 1$ і підставимо його в систему. Одержимо

$$\begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0 \\ 3a_1^{(1)} - a_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку, з першого рівняння знайдемо $a_1^{(2)} = \frac{1}{3}a_2^{(2)}$ і, прийнявши $a_2^{(2)} = 3$, одержимо $a_1^{(2)} = 1$. Отже, другими частинними розв'язками будуть $x_1^{(2)} = e^{5t}$; $x_2^{(2)} = 5e^{5t}$. Помноживши $x_i^{(1)}$ на C_1, а $x_i^{(2)}$ на C_2 і додаючи відповідні розв'язки, знаходимо загальний розв'язок системи

$$x_1 = c_1 x_1^{(1)} + c_2 x_1^{(2)} = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$$
$$x_2 = c_1 x_2^{(1)} + c_2 x_2^{(2)} = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}$$

Запишемо в матричній формі задану систему і її розв'язок. Система:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & 3c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №5

Варіант № 1

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $yy'' + (y')^2 = 1$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задоволь-няє початковим умовам: $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x;\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Варіант № 2

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $(y')^2 + 2yy'' = 0$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3;\ y(0) = 4/3,\ y'(0) = 1/27$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Варіант № 3

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $xy'' = y'$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' + 4y = e^{-2x}; \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

Варіант № 4

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $y'' - 2ctg\, x \cdot y^1 = \sin^3 x$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Варіант № 5

1) Знайти загальний розв'язок ДУ: $y'' = y' + x$

2) Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам,. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 3$

3) Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

2.2.6 Ряди

Література: [1] гл. XVI- XVII; [2] гл.XVII; [5] гл. IV, [6] гл.XV, [7] гл.III.

Приклад 1.Дослідити збіжність числового ряду: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots + \frac{2n-1}{2n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності:
$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбігається за наслідком з необхідної ознаки.

Приклад 2. Дослідити збіжність числового ряду:

$$1+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{1+10n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+10n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+10n.}$$

Розв'язання. Порівнюючи даний ряд с гармонійним $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, за ознакою порівняння одержимо $\lim\limits_{n->\infty}\frac{u_n}{\tau_n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{1+10n}=\frac{1}{10}\neq 0.$ Отже, ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити збіжність числового ряду:

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Розв'язання. Запишемо $u_n=\frac{1}{n!}$ і $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, застосуємо ознаку Даламбера: $\lim\limits_{n->\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,\ =>$ ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити збіжність числового ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Розв'язання . $u_n=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. Застосуємо радикальну ознаку Коші.

$\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n->\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n+1}{2n-1}=1/2<1$, => ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити збіжність числового ряду: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_0^{\infty}f(n)dn=\int_0^{\infty}\frac{dn}{\sqrt{4n+1}}=1/4\lim_{N->\infty}\int_0^{N}(4n+1)^{-1/2}d(4n+1)=$$

$$=1/4\lim_{N->\infty}2\sqrt{4n+1}\Big|_0^N=1/2\lim_{N->\infty}\left(\sqrt{4N+1}-1\right)=\infty,=>$$

Невласний інтеграл розбігається, і тому вихідний ряд теж розбігається.

Приклад 6. Дослідити збіжність знакозмінного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$.

Розв'язання. Оскільки ряд знакозмінний, застосуємо ознаку Лейбниця.

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 1>1/3>1/5>\ldots>\frac{1}{2n-1}>\ldots \\ b)\lim\limits_{n->\infty}u_n=\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{2n-1}=0 \end{array}\right]=>\text{ ряд збігається.}$$

Встановимо тип збіжності, для чого розглянемо $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$, за ознакою порівняння з гармонійним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ одержимо

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}=1/2\neq 0$, =>, обидва ряди розбігаються. Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$ збігається умовно.

Приклад 7. Знайти область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{n-1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$

Розв'язання. а) Запишемо $a_n=2^{n-1}$, $a_{n+1}=2^n$, тоді $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}}{2^n}=1/2$, отже, $|x|<1/2$ або $-1/2<x<1/2$ – інтервал збіжності. Дослідимо збіжність ряду на кінцях знайденого інтервалу збіжності. При $x=1/2$ одержимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, що є розбіжним, а при $x=1/2$ одержимо числовий ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, що так само розбігається. Таким чином, область збіжності досліджуваного степеневого ряду має вигляд $-1/2<x<1/2$ або $x\in\left]-1/2;\,1/2\right[$.

б) Запишемо $a_n=1/n$, $a_{n+1}=1/(n+1)$, тоді $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, отже, $-1<x-2<1$, або $1<x<3$ – інтервал збіжності. Збіжність ряду на кінцях інтервалу: при $x=1$ одержимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$, що збігається умовно (ознака Лейбниця); при $x=3$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, що розбігається. Таким чином, область збіжності досліджуваного степеневого ряду є $1\le x<3$ або $x\in\left[1;\,3\right[$.

Приклади завдань модульної контрольної роботи №6

Варіант № 1

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{e^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n-5}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n+1}x^n$;

Варіант № 2

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(2n)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^n$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3\sqrt{n}}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n}x^n$;

Варіант № 3

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$, $\alpha = const$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$;

Варіант № 4

Дослідити збіжність числового ряду: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}x^n$;

Варіант № 5

Дослідити збіжність числового ряду: 1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$;

Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{5n}$;

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$;

2.2.7 Теорія імовірності та математична статистика

Література:[2],п.1-4;[3],гл.1-3;[2],п.5-7;[3],гл.4-7;[2],п.8,9;[3],гл.8;[2],п.10-15;[3],гл.9-13.

Приклад 1. Прилад містить 7 елементів, з яких три зношені. При включенні приладу випадковим чином включаються три елементи. Знайти ймовірність того, що виявляться включеними два незношені елементи.

Розв'язання. Нехай подія А-{серед вімкнених елементів 2 незношені}. p(A)=$\frac{m}{n}$. n=C_7^3=$\frac{7!}{3!\times 4!} = \frac{5\times 6\times 7}{1\times 2\times 3} = 35$. m=$C_4^2 \times C_3^1 = \frac{4!}{2!\times 2!}\times\frac{3!}{1!\times 2!} = \frac{2\times 3\times 1\times 2\times 3}{2} = 18$. p(A)=$\frac{18}{35} \approx 0{,}51$.

Приклад 2. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,95, ця ймовірність для другого сигналізатора дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює: а) хоча б один сигналізатор; б) тільки один сигналізатор.

Розв'язання. A_1 - {подія, що полягає в тому, що при аварії спрацює перший сигналізатор}. $P(A_1)= 0,95$. $A_г$ - {подія, що полягає в тому, що при аварії спрацює другий сигналізатор}. $p(A_2) = 0,9$.

а) B - {при аварії спрацює хоча б один сигналізатор}. $B = A_1 + A_2$. Події A_1 і та A_2 сумісні. Тоді $p(B) = p\{A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \times A_2)$. Події $A1$та A_2 незалежні, тому $p(A_1A_2)=p(A_1) \times p(A_2)$. Отже, $p(B) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_x) \times p(A_2) = 0,95 + 0,9 - 0,95 \times 0,9 = 1,85 - 0.855 = 0,995$.

б) С - {при аварії спрацює тільки один сигналізатор}. $\overline{A}_i$- {при аварії не спрацює i-ий сигналізатор}. $(i = 1, 2)$. $C=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$. Доданки цієї суми є подіями несумісними, а множники є подіями незалежними. Тоді

$$p(C)=p(A_1\overline{A_2}) + p(\overline{A_1}A_2)=p(A_1) \times p(\overline{A_2})+p\overline{(A_1) \times p(A_2)}.\ p(A_1)=0,95,$$

$$p(\overline{A_1})=1 - p(A_1) = 1 - 0,95 = 0,05.\ p(A_2)=0,9, p(\overline{A_2})=1 - p(A_2)=1 - 0,9=0,1.$$

$$P(C)=0,95 \times 0,1 + 0,05 \times 0,9 = 0,095 + 0,045 = 0,14.$$

Приклад 3. Два верстати-автомати виготовляють однакові вироби, які попадають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата в два раза біль ніж продуктивність другого. Перший верстат-автомат виготовляє 60 % виробів вищого гатунку, а другий - 84 %. Знайти ймовірність того, що А) навмання взятий з конвеєра виріб вищого ґатунку, та того, що Б) він виготовлений на першому верстаті.

Розв'язання. A - {навмання взятий з конвеєра виріб має вищий гатунок}.
H_1- {навмання взятий з конвеєра виріб виготовлено на першому верстаті}.
H_2 - {навмання взятий з конвеєра виріб виготовлено на другому верстаті}.

А) Застосуємо формулу повної ймовірності:

$$p(A) = p(H_1) \times p(A/H_1) + p(H_2) \times p(A/H_2)$$

$$p(H_1) = \frac{2}{3},\ p(H_2) = \frac{1}{3}.\ p(A/H_1) = \frac{60}{100} = 0,6,\ p(A/H_2) = \frac{84}{100} = 0,84.$$

$$p(A)=\frac{2}{3} \times 0,6 + \frac{1}{3} \times 0,84 = \frac{1}{3} \times (1,2 + 0,84) \approx 0,68.$$

Б) Застосуємо формулу Байєса

$$p((H_1/A) = \frac{p(H_1) \times p(A/H_1)}{p(H_1) \times p(A/H_1) + p(H_2) \times p(A/H_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,6}{0,68} = \frac{0,4}{0,68} \approx 0,59.$$

Приклад 5. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному досліді.M[x],D[x],σ[x]-?

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину X - число елементів, що відмовили в одному досліді. X- дискретна випадкова величина. Вона може приймати такі значення: $X_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$. Ймовірності, з якими ці значення можуть прийматись випадковою величиною X можна знайти за формулою Бернуллі.

$p_1=p_3(0)=C_3^0 \times p^0 \times q^3, q = 1 - p,\ p = 0{,}1,\ q = 0{,}9. p_1=0{,}9^3=0{,}729.$

$p_2=p_3(1)=C_3^1 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2 = \frac{3!}{1!\times 2!} \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2 = 3 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2 = 0{,}243.$

$p_3=p_3(2)=C_3^2 \times (0{,}1)^2 \times 0{,}9 = \frac{3!}{2!\times 1!} \times (0{,}1)^2 \times 0{,}9 = 3 \times (0{,}1)^2 \times 0{,}9 = 0{,}027.$

$p_4=p_4(3)=C_3^3 \times (0{,}1)^3 \times (0{,}9)^0 = (0{,}1)^3 = 0{,}001.$

Випадкова величина X має біноміальний закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Математичне сподівання x знаходиться за формулою: $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$M[x]=0 \times 0{,}729 + 1 \times 0{,}243 + 2 \times 0{,}027 + 3 \times 0{,}001 = 0{,}3.$

Дисперсію дискретної випадкової величини x знайдемо за формулою:

$D[x]=M[x^2] - M^2[x]$; $M[x^2]=0^2 \times 0{,}729 + 1^2 \times 0{,}243 + 2^2 \times 0{,}027 + 3^2 \times 0{,}001 = 0{,}36$; $M^2[x]=0{,}3^2 = 0{,}09$; $D[x]=0{,}36 - 0{,}09=0{,}27.$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma[x] = \sqrt{D[x]}=\sqrt{0{,}27} \approx 0{,}52.$

Приклад 6. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0; \ x < 0 \\ \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\,; 0 \le x \le 2 \\ 1\ ; x > 2 \end{cases}$$

Знайти: a , щільність розподілу $f(x)$, M[x], D[x], ϭ[x] , $P(0< x < 1)$

$$f(x) = F(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ ax + \frac{1}{3}; 0 \le x \le 2 \\ 0; x > 2 \end{cases}$$

a знайдемо з властивостей щільності розподілу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;

$\int_0^2 (ax + \frac{1}{3})\,dx = 1$; $\left(\frac{ax^2}{2} + \frac{1}{3}x\right) = 1 \Rightarrow 2a + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$, т.ч.

$$F(x)=\begin{cases} 0; x < 0 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}; 0 \le x \le 2 \\ 0; x > 2 \end{cases}$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини знайдем за формулою $M[x]= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$;

$$M[x]=\int_0^2 x(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3})\,dx = \int_0^2 (\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x)\,dx = \left(\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^2\right) = \frac{8}{18} + \frac{4}{6} = \frac{10}{9}$$

Дисперсію неперервної випадкової величини знайдемо за формулою

$D[x]=M[x^2] - M^2[x]$; $M[x^2]= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$;

$$M[x^2]=\int_0^2 x^2\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3}\right)dx = (\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{9}) = \frac{2^4}{24} + \frac{2^4}{9} = \frac{14}{9}$$

$$D[x]= \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{14}{9} - \frac{100}{81} = \frac{26}{81};\ \delta[x]=\sqrt{\frac{26}{81}}=\frac{\sqrt{26}}{9}$$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $P(0 < x < 1)$ знайдемо за формулою: $(a < x < b) = \int_b^a f(x)\,dx$;

$$P(0 < x < 1)=\int_0^1 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right)dx = (\frac{1}{6} \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Приклади завдань модульної контрольної роботи №7

Варіант № 1

1. Найти вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика выпадет число очков больше 4.
2. У туриста 10 одинаковых консервных банок, среди которых 3 банки - тушенка и 7 банок - рыба. Во время дождя этикетки отклеились. Найти вероятность того, что две наугад открытые банки отличаются содержимым.
3. В ящике 10 стандартных, 15 нестандартных и 3 бракованные детали. Найти вероятность того, что вынутая наугад деталь окажется стандартной или бракованной.
4. Сборщик получил две коробки деталей завода №2 и три коробки завода №1. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна - 0,8, завода №2 стандартна - 0,9. Сборщик извлекает из наугад взятой коробки стандартную деталь. Найти вероятность того, что она изготовлена заводом №1.
5. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых имеется 3 дефектных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X дефектных изделий, содержащихся в выборке. Найти M(X), D(X).
6. Случайная величина X задана функцией распределения F(X). Найти плотность распределения вероятностей,M(X), D(X).

$$F(X)=\begin{Bmatrix}0, x\le 0\\ x^2, 0<x\le 1\\ 1, x>1\end{Bmatrix}$$

Варіант № 2

1. В урне черных и 5 белых шаров. Наугад извлекаются 4 шара. Найти вероятность, что все они окажутся черными.
2. В колоде 36 карт. Найти вероятность того, что наугад извлеченная карта – «туз».
3. Из чисел 11, 12, 13, 14, 15 выбираются одно за другим два числа. Найти вероятность того, что оба раза выбрано нечетное число.
4. В пирамиде 5 винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад взятой винтовки.
5. Построить ряд распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске p=0,3. Найти D(X) и M(X).
6. Случайная величина X задана функцией распределения F(X). Найти плотность распределения вероятностей,M(X), D(X).

$$F(X)=\begin{Bmatrix}0, x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{6}, 1<x\le 3\\ 1, x>3\end{Bmatrix}$$

Варіант № 3

1. Стрелок имеет 70 патронов, из которых 5 - с осечкой. Какова вероятность, что взятые наугад два патрона окажутся с осечкой?
2. Найти вероятность, что выбранное случайным образом число до 99 делится на 5.
3. В 1-й коробке 2 белых, 6 красных и 4 синих шара. Во 2-й - 1 белый, 2 красных и 3 синих шара. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару. Найти вероятность, что среди выбранных шаров нет белых.
4. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника - 0,9, для велосипедиста 0.8, для бегуна - 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит квалификационную норму.
5. Чему равно среднее число попаданий мячом в корзину при четырех бросках, если вероятность попадания в одном броске равна 0,4?
6. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением f(x). Найти a, M(X), D(X).

$$f(x)=\left.\begin{matrix} ax^2 \ \text{при } 0<x\le 2\\ 0 \ \text{при } x<0 \text{ или } x>2\end{matrix}\right\}$$

Варіант № 4

1. 4 билета в театр разыгрываются между 5-ю мальчиками и 7-ю девочками. Найти вероятность того, что в театр пойдут 2 мальчика и 2 девочки.
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков больше 9.
3. Для сигнализации об аварии установлены 3 независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает 1-е устройство равна 0,9, что сработает 2-е устройство - 0,95, что сработает 3-е - 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы одно устройство.
4. В первом ящике содержится 15 деталей, из которых 10 стандартных, во втором ящике 20 деталей, из которых 18 стандартных, в третьем ящике - 10 деталей, из которых 6 стандартных. Наугад извлеченная деталь из наугад извлеченного ящика оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что эта деталь из второго ящика.
5. Производятся последовательные независимые испытания 5 приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9. Найти M(X), D(X).
6. Случайная величина X задана функцией распределения F(X). Найти плотность распределения вероятностей,M(X) ,D(X).

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2/9, & 0<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

Варіант № 5

1. В корзине 5 белых и 8 черных шаров. Наугад извлекаются 4 шара. Найти вероятность того, что среди них будут 2 белых и 2 черных.
2. Найти вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика выпадет число очков кратное 2-м.
3. Среди 20 билетов на экзамене два студента знают 5 билетов. Первый студент вытащил «счастливый» билет. Какова вероятность у второго студента вытащить «счастливый» билет?
4. В двух корзинах имеются игрушки. В первой - 10 кубиков и 2 мячика, во второй – 8 кубиков и 5 мячиков. Из первой корзины наугад взята игрушка и переложена во вторую. Найти вероятность того, что наугад извлеченная игрушка из второй корзины кубик.
5. Наудачу выбирается натуральное число, не превосходящее 10. X – число натуральных делителей выбранного числа. Найдите закон распределения X и вероятность события x≤2.
6. Случайная величина X задана функцией распределения F(X). Найти плотность распределения вероятностей,M(X), D(X).

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ (x-2)^2, & 2<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$