

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Методичні вказівки**

**для самостійної роботи та виконання  
контрольної роботи з дисципліни**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**для студентів I курсу заочної та дистанційної форм навчання**

**Спеціальність – туризм**

**Одеса 2018**

Методичні вказівки до СРС та виконання контрольної роботи з дисципліни “Вища математика“ для студентів I курсу заочної та дистанційної форми навчання. Спеціальність – туризм.

Одеса, ОДЕКУ, 2018р., 32 с., укр. мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц., Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц.

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

## ЗМІСТ

<b>I</b>	<b>ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА.....</b>	<b>4</b>
1.1	Передмова.....	4
1.2	Зміст дисципліни.....	5
1.2.1	Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії ....	5
1.2.2	Введення в математичний аналіз .....	5
1.2.3	Диференціальне числення функції однієї змінної .....	6
1.2.4	Інтегральне числення функції однієї змінної .....	6
1.3	Перелік навчальної та методичної літератури.....	7
<b>II</b>	<b>ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА.....</b>	<b>7</b>
2.1	Загальні поради. ....	7
2.2	Загальні рекомендації студентам заочної форми навчання до виконання контрольної роботи .....	8
2.3	Повчання по вивченню теми „ Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії ” .....	11
2.4	Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №1 (табл.1, Блок №1, завдання 1-30)	16
2.5	Повчання по вивченню теми „ Введення в математичний аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної ” .....	19
2.6	Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №2 (табл.1, Блок №2, завдання 31-70)	21
2.7	Повчання по вивченню теми „ Інтегральне числення функції однієї змінної ” .....	25
2.8	Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №3 (табл.1, Блок №3, завдання 71-110)	28
<b>III</b>	<b>ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ.....</b>	<b>30</b>
3.1	Система контролю знань та вмінь.....	30
3.2	Форми контролю знань та вмінь студентів.....	31
3.2.1	Поточний контроль.....	31
3.2.2	Підсумковий контроль.....	32
3.3	Перелік базових знань та вмінь.....	32
.		

# I. ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

## 1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальності туризм . Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

**Мета вивчення дисципліни** – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

**Завдання дисципліни** “Вища математика” - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв’язанні задач й аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни “Вища математика” базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

**Мета методичних вказівок.** Роз’яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв’язанні задач даної дисципліни.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен

**знати** основні визначення, положення та теореми лінійної і векторної алгебри, диференціального і інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних;

**вміти** використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики щодо розв’язання прикладних математичних задач.

## 1.2 Зміст дисципліни

### 1.2.1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Системи координат на прямої, площині і просторі. Вектори. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Напрямлуючі косинуси і довжина вектора. Скалярний добуток векторів і його властивості. Довжина вектора і кут між двома векторами в координатній формі. Умова ортогональності двох векторів. Механічний зміст скалярного добутку. Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення. Алгебраїчні доповнення і мінори. Визначники  $n$ -го порядку. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Умова колінеарності двох векторів. Мішаний добуток трьох векторів.

Рівняння ліній на площині. Різні форми рівняння прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, їхні геометричні властивості і рівняння. Технічні додатки геометричних властивостей кривих. Рівняння площини і прямої в просторі. Кут між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою і площиною. Рівняння поверхні в просторі. Циліндричні поверхні, сфера. Конуси. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Геометричні властивості цих поверхонь, дослідження їхніх форм методом перетинів. Полярні координати на площині. Циліндричні і сферичні координати в просторі. Різні способи завдання ліній і поверхонь у просторі.

Матриці, дії над ними. Поняття оберненої матриці.

Системи двох і трьох лінійних рівнянь. Матричний запис системи лінійних рівнянь. Правило Крамера. Система  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими. Метод Гауса. Обчислення оберненої матриці методом Гаусса.

Поняття лінійного (векторного) простору. Вектор як елемент лінійного простору. Лінійні оператори.

### 1.2.2. Введення в математичний аналіз.

Основні елементарні функції, їх властивості і графіки.

Числові послідовності, їх роль в обчислювальних процесах. Границя числової послідовності. Існування границі монотонної обмеженої послідовності. Складні і зворотні функції, їх графіки.

Границя функції у точці. Границя функції на нескінченності. Теореми про границі. Визначні границі.

Безперервність функцій у точці. Безперервність основних елементарних функцій. Нескінченно малі в точці функції, їхні властивості. Порівняння нескінченно малих. Властивості функцій, безперервних на відріжку: обмеженість, існування найбільшого і найменшого значень, існування проміжних значень.

### **1.2.3. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних.**

Поняття функції, диференційованої у точці.

Диференціал функцій. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст у різних задачах. Правило здобування похідної і диференціалу. Похідна складеної і оберненої функції. Інваріантність форми диференціалу. Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Точка екстремуму функцій. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, їх застосування.

Похідна і диференціали вищих порядків. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей. Розвинення функцій по формулі Тейлора. Умови монотонності функції. Екстремуми функції, необхідна та достатні умови.

Відшукування найбільшого і найменшого значень функцій, диференційованої на відрізку. Дослідження опуклості функції. Точки перегину. Асимптоти графіку функції. Поняття про асимптотичне розкладання. Загальна схема дослідження функцій і побудова її графіка.

Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку.

### **1.2.4. Інтегральне числення функцій однієї змінної.**

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця основних первісних.

Безпосереднє інтегрування функцій. Інтегрування частинами та підстановкою. Приклади інтегрування раціональних функцій за допомогою розкладання на найпростіші дроби. Приклади тригонометричних підстановок і метод «раціоналізації» інтегралів. Приклади, коли первісні не можуть бути виражені елементарними функціями.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу Найпростіші властивості визначеного інтегралу, теорема про середнє.

Похідна від інтегралу по верхній границі. Формула Ньютона-Лейбниця. Геометричний зміст визначеного інтегралу.

Обчислення інтеграла за допомогою інтегрування частинами і заміни змінної. Обчислення інтеграла за допомогою застосування формули Тейлора.

Наближене обчислення інтегралів по формулах трапецій і Симпсона.

Невласні інтеграли. Основні властивості, ознаки збіжності, абсолютна і умовна збіжності. Наближене обчислення невластних інтегралів. Інтеграли, що залежать від параметра. Їхня безперервність, правило Лейбниця.

Поняття про невластні інтеграли, що залежать від параметра.

### 1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

#### *Основна:*

1. О.В.Глушков, Ю.О.Кругляк, Ю.Г. Чернякова. Лінійна алгебра. Конспект лекцій.- Одеса, ОДЕКУ, «ТЭС»-2004.
2. Сборник задач по математике для ВТУЗов: Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- М.: Наука, 1986.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М. «Высшая школа», 1986.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч. 1, 2. М., «Наука», 1976.
5. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Лобода А.В., Середенко С.С. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.1. -Одеса, 2011.
6. [www.library-odeku.16mb.com](http://www.library-odeku.16mb.com)

#### *Додаткова:*

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.
8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., «Наука», 1984.
9. Бакельман І.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М., «Просвещение», 1976.
10. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

## 2. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

### 2.1. Загальні поради.

1. Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми.
2. Коли зміст теми засвоєно, треба відповісти на "запитання до самоперевірки", що наведені наприкінці кожної теми. Якщо виникають труднощі - зверніться ще раз до конспекту лекцій або

до іншої наведеної у п. 1.3 літератури та знайдіть відповіді на свої запитання.

3. Якщо попередні пункти виконано, переходьте до виконання завдань контрольної роботи, що відповідає вивченій темі), використовуючи наведені розв'язання типових задач.
4. Далі переходьте до вивчення наступної теми .  
Якщо виникли питання, на які Ви не в змозі відповісти самостійно, звертайтеся за консультацією до викладача за електронною адресою кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ (e-mail: [math@odeku.edu.ua](mailto:math@odeku.edu.ua)) .

## **2.2 Загальні рекомендації студентам заочної форми навчання до виконання контрольної роботи**

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, що складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по підручниках, розв'язання задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт.

У допомогу заочникам університетом влаштовуються читання лекцій та практичні заняття.

Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації.

Вказівки студенту по поточній роботі даються також в процесі рецензування контрольних робіт.

Студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і завзятій самостійній роботі допомога університету виявиться досить ефективною.

Завершальним етапом вивчення окремих частин курсу вищої математики є складання заліків і іспитів відповідно до навчальних планів.

В зв'язку зі збільшенням інтенсивності навчання підсилюється значення дистанційної форми навчання, що обумовлює структуру і зміст даних методичних вказівок.

Попередні підсумки роботи студента підводить контрольна робота, мета якої – допомога в засвоєнні матеріалу та перевірка того, наскільки успішно студенти опанували курс дисципліни "Вища математика".

Робота повинна виконуватися самостійно і бути деякою мірою і гарантією того, що даний розділ засвоєний студентом.

Контрольна робота має вигляд індивідуальних завдань.

Номер варіанту відповідає останній цифрі шифру залікової книжки студента.



Кожен варіант контрольної роботи містить практичні завдання відповідно до представлених в змістовних модулях темах курсу.

Структура контрольної роботи має вигляд окремих блоків. Тематика контрольних завдань представлена у табл.1.

Оформлення контрольної роботи здійснюється на комп'ютері в текстовому редакторі "Microsoft Word" з використанням редактора формул.

Дані, що повинні бути відображені на титульному аркуші, вказані нижче.

Завдання та розв'язання в контрольній роботі формулюються безпосередньо перед відповіддю.

Виконані завдання кожного блоку надсилаються викладачеві в строки, зазначені в таблиці 1 електронною поштою (e-mail: **math@odeku.edu.ua**) у електронному вигляді.

У міжсесійний період провідним викладачем проводяться консультації на кафедрі згідно з розкладом.

Консультації також можна отримати по Скайпу, Вайберу, телефону або письмово, по електронній пошті, чітко виклавши суть питання, що викликало ускладнення при виконанні контрольної роботи.

При перевірці самостійної роботи в міжсесійний період використовуються елементи дистанційної форми контролю вивчення дисципліни за блоками змістовних модулів, терміни виконання яких наведені у таблиці 1.

По закінченні виконання усіх блоків роботи та отримання позитивних відгуків на них від викладача на кафедрі вищої та прикладної математики на перевірку надається електронний варіант роботи (відправити по електронній пошті або принести на флешці), який зберігається у електронній бібліотеці викладача на кафедрі.

Крім того, студент повинен надати на кафедрі роздрукований титульний аркуш, на якому вказуються: дата отримання завдання, дати поетапного виконання КР, дата надання КР на перевірку та оформлення титульного аркуша, варіант та відомості про студента (ПІБ, номер залікової книжки, курс, спеціальність, домашня адреса).

На оберненій стороні цього аркуша викладач пише рецензію на міжсесійну контрольну роботу та виставляє оцінку в балах, як вказано у таблиці 2.

**Таблиця 1** – Терміни перевірки контрольної роботи №1 у міжсесійний період.

Змістовний модуль	Блок	Строк контролю
<b>1 курс</b>		
1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія	Визначники. Властивості, засоби обчислення. Векторна алгебра. Скалярний, векторний та мішаний добуток. Матриці. Дії над матрицями. Системи лінійних рівнянь. Правило Крамера, матричний метод, метод Гаусса. Дослідження СЛАР на сумісність та визначеність. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Пряма та площина у просторі. Взаємне розташування. <i>Завдання 1-40</i>	1-5 листопада
2. Аналіз функції однієї змінної. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.	Елементарні функції та їх основні властивості. Границя та неперервність функції. Похідна, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Диференціал функції. Застосування похідної. Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку. <i>Завдання 41-70</i>	1-10 січня
3.Інтегральне числення функції однієї змінної	Первісна. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування: заміна змінної, інтегрування частинами. Інтегрування різних класів функцій. Визначений інтеграл. Його геометричний та фізичний зміст. Властивості та обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона–Лейбниця. Заміна змінних та інтегрування частинами. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії, механіки і фізики. Невласні інтеграли. <i>Завдання 71-110</i>	1-5 квітня

Нижче наводиться таблиця 2 номерів задач, що входять у контрольну роботу, та балів, якими вони оцінюються.

Студент повинен виконати контрольні завдання за варіантом, номер якого збігається з останньою цифрою його навчального номера (шифру).

**Таблиця 2** – Номери задач контрольної роботи згідно з варіантом та розподіл балів за виконання завдань та блоків.

Варіант	Номери завдань для виконання										
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Бали за викон. завдань	1 блок				2 блок			3 блок			
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10
Бали за викон. блоків	36				27			37			
Загальна сума 100 балів											

### 2.3 Повчання по вивченню теми «Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії»

*Література:* [2] гл. II, гл. III, [3] гл. II, § 1-3; гл. IV, § 1-7;  
[4] гл. II, § 1-10; [9] гл. I, § 2-3, § 7-12, гл. II, § 14-21;

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- вміти обчислити визначник 2 та 3 порядку

- вміти виконувати арифметичні дії з матрицями, знаходити обернену матрицю і ранг матриці.
- знати застосування скалярного, векторного та мішаного добутків
- вміти розв'язувати системи лінійних рівнянь
- знати різні види рівнянь прямої та площини
- вміти складати рівняння геометричних фігур..

### Питання для самоперевірки

1. Що таке визначник другого порядку?
2. Як позначають визначник n-го порядку?
3. Що називається мінором n-1 порядку визначника n-го порядку?
4. Що називається алгебраїчним доповненням?
5. Як знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера, методом Гаусса?
6. Що є матриця?
7. Що є рангом матриці, як його знайти?
8. Як помножити матрицю на матрицю?
9. Як знайти алгебраїчну суму двох матриць?
10. Що є оберненою матрицею? Як її знайти?
11. Що таке вектор? Довжина вектора?
12. Скалярний та векторний добутки векторів. Їх властивості.
13. Мішаний добуток. Його властивості.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад №1.** Дано два лінійних перетворення координат

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_3' = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = 5x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_2' + x_3' \end{cases}$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, що виражають  $X_1''$ ,  $X_2''$ ,  $X_3''$  через  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ .

*Розв'язання.*

Позначимо матрицю перетворення  $X$  в  $X'$  через  $A$ , а  $X'$  в  $X''$  через  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а  $X$ ,  $X'$ ,  $X''$  через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді перетворення  $X$  в  $X''$  буде мати вигляд:  $X'' = BAX$ , тобто

$$\begin{pmatrix} X''_1 \\ X''_2 \\ X''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 8 & -6 & 18 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

чи в іншій формі

$$\begin{cases} x''_1 = 2x_1 + 7x_2 - x_3 \\ x''_2 = 8x_1 - 6x_2 + 18x_3 \\ x''_3 = 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{cases}$$

**Приклад №2.** Знайти найбільше і найменше значення функції  $z = x^2 y(2 - x - y)$  в трикутнику, обмеженому лініями  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + y = 6$ .

*Розв'язання.* Знаходимо стаціонарні точки функції,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= xy(4 - 3x - 2y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2(2 - x - 2y), \end{aligned}$$

прирівнюючи частинні похідні до нуля. У середині області  $x > 0$ ,  $y > 0$  на  $x$  та  $y$  ми скорочуємо.

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$x = 1$ ;  $y = 1/2$  — розв'язки системи, координати критичної точки  $P(1, 1/2)$ .

Знайдемо значення функції в цій точці:  $z(1, 1/2) = 1 \cdot 1/2 \cdot (2 - 1 - 1/2) = 1/4$ . Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції в області потрібно дослідити функцію на межах області. У нашому випадку на межах  $x = 0$  і  $y = 0$  функція дорівнює нулю ( $z = 0$ ).

Знайдемо найбільше і найменше значення функції на стороні трикутника  $x + y = 6$ . На цій стороні  $y = 6 - x$ ,  $0 \leq x \leq 6$  і  $z = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4x^2(6-x)$

На кінцях інтервалу  $x = 0$  і  $x = 6$  значення функції  $z(0) = z(6)$ . Знайдемо стаціонарні точки функції на цій лінії:

$$z' = -48x + 12x^2 = 0; 12x(x-4) = 0; x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Залишається  $x = 4$ , тому що  $x = 0$ - гранична точка і нами вже розглянута.  $z(4) = -4 \cdot 16 \cdot (6-4) = -128$ ; при  $x = 4$ ;  $y = 2$ , тобто  $z(4; 2) = -128$

Очевидно, що найбільше і найменше значення функції варто шукати серед її значень у критичній точці Р, на сторонах трикутника й у його вершинах, тобто

$$z(1; 1/2) = 1/4 - \text{значення в точці Р};$$

$z = 0$  – на сторонах  $x = 0$  і  $y = 0$ , а також у вершинах трикутника;

$$z = -128 - \text{у точці } (4; 2) \text{ на стороні } x + y = 6.$$

Звідси випливає, що найбільшого значення  $z = 1/4$  функція досягає всередині області в точці  $P(1; 1/2)$ , а найменшого значення  $z = -128$  функція досягає в точці  $P_1(4; 2)$ , що лежить на лінії  $x + y = 6$ .

**Приклад № 3.** Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею А.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.*

Складемо характеристичне рівняння.

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & -5 \\ 2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ чи } \lambda^3 - 18\lambda^2 + 72\lambda = 0, \text{ звідкіля } \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = 12$$

Підставляючи по черзі власні числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  у систему

$$\begin{cases} (8-\lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + (5-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

знайдемо для  $\lambda = \lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

У цій системі третє рівняння збігається з другим, тому його можна опустити і розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Вона сумісна, і її розв'язок одержуємо за відомою методикою

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} \cdot k = 0; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \cdot k = -18k; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = -18k.$$

Таким чином, першим власним вектором буде  $x_1 = (0; 18; 18) \cdot k$ . Подібним чином знаходимо (для  $\lambda = 6$ )  $x_2 = (-6; 6; 3) \cdot k$  і (для  $\lambda = 12$ ),  $x_3 = (12; -12; 12) \cdot k = (1; -1; 1) \cdot k$ .

**Приклад № 4.** Нехай задані чотири координати вершини піраміди:  $A_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $A_3(x_3; y_3; z_3)$ ,  $A_4(x_4; y_4; z_4)$ .

*Розв'язання :*

Тоді:

1) довжина ребра  $A_1A_2$  обчислюється за формулою

$$A_1A_2 = |\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

2) кут між ребрами  $A_1A_2$  і  $A_1A_4$  визначаємо з формули

$$\cos\left(\widehat{A_1A_2, A_1A_4}\right) = \cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}},$$

де  $X_1 = x_2 - x_1$ ;  $Y_1 = y_2 - y_1$ ;  $Z_1 = z_2 - z_1$ ;  $X_2 = x_4 - x_1$ ;

$Y_2 = y_4 - y_1$ ;  $Z_2 = z_4 - z_1$ ;

3) рівняння грані  $A_1A_2A_3$  (тобто площини, що проходить через точки  $A_1, A_2, A_3$ ), має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

- 3) якщо рівняння з дії 3 привести до вигляду  $Ax + By + Cz + D = 0$ , то кут між площиною, що проходить через точки  $A_1, A_2, A_3$ , і прямою  $A_1A_4$  обчислюється за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|A(x_4 - x_1) + B(y_4 - y_1) + C(z_4 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2}};$$

- 5) площу грані  $A_1A_2A_3$  знайдемо, як половину модуля векторного добутку

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|;$$

- 6) об'єм піраміди  $A_1A_2A_3A_4$  визначається за формулою

$$V = \frac{1}{6} (\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4};$$

- 7) рівняння ребра  $A_1A_2$  є рівняння прямої, що проходить через ці точки  $A_1$  і  $A_2$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

- 8) щоб знайти рівняння висоти, опущеної з точки  $A_4$  на площину  $A_1A_2A_3$ , потрібно через точку  $A_4$  провести пряму, перпендикулярну площині  $Ax + By + Cz + D = 0$ , що проходить через три точки  $A_1, A_2, A_3$ , тобто скласти рівняння

$$\frac{x - x_4}{A} = \frac{y - y_4}{B} = \frac{z - z_4}{C}.$$



**2.4 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модулю №1 (табл.1, Блок №1, завдання 1-40)**

1-10. Дано два лінійних перетворення

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \\ x''_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \\ x''_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{cases}$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, що виражає  $X''_1$ ,  $X''_2$ ,  $X''_3$  через  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Вихідні дані наведені в таблицях 3;4

**Таблиця 3**

Номери задач	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
1	1	-1	-1	-1	4	7	8	1	-1
2	7	0	4	0	4	-9	3	1	0
3	4	3	5	6	7	1	9	1	8
4	0	2	0	-2	3	2	4	-1	5
5	3	-1	5	1	2	4	3	2	-1
6	4	3	8	6	9	1	2	1	8
7	4	3	2	-2	1	-1	3	1	1
8	1	-3	4	2	1	-5	-3	5	1
9	1	2	2	0	-3	1	2	0	3
10	3	0	5	1	1	1	0	3	-6

**Таблиця 4**

Номери задач	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$
1	9	3	5	2	0	3	0	1	-1
2	0	1	-6	3	0	7	1	1	-1
3	-1	3	-2	-4	1	2	3	-4	5
4	-3	0	1	0	2	1	0	-1	3
5	4	3	1	3	1	2	1	-2	1
6	-1	8	-2	-4	3	2	3	-8	5
7	1	-2	-1	3	1	2	1	2	2
8	4	5	-3	1	-1	-1	7	0	4
9	3	1	0	1	-2	-1	0	3	2
10	2	-1	-5	7	1	4	6	4	-7

11-20. Дано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} .$$

Довести її спільність і розв'язати двома способами: методом Гаусса і засобами матричного числення. Вихідні дані до задач наведені в таблиці 5.

**Таблиця 5.**

Номери задач	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
11	2	-3	4	3	-2	6	2	-3	-5	-4	-1	-13
12	4	3	-9	2	3	-5	1	8	-7	9	7	12
13	2	-4	1	1	-5	3	1	-1	1	3	-1	1
14	1	2	4	5	1	2	3	-1	1	31	20	10
15	5	-8	-2	3	-12	-5	2	-6	-1	-6	-4	0
16	2	5	-8	4	3	-9	2	3	-5	8	9	7
17	1	-2	-3	2	3	-1	3	-2	-5	6	20	6
18	3	5	-1	1	-4	2	1	3	-1	0	2	4
19	1	1	-1	8	3	-6	4	1	-3	1	2	3
20	7	-5	0	4	0	11	2	3	4	31	-43	-20

21-30. Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Дані до задач наведені в таблиці 6.

**Таблиця 6**

Номери задач	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
21	4	-5	7	1	-4	9	-4	0	5
22	2	-1	2	5	-3	3	-1	0	-2
23	0	1	0	-3	4	0	-2	1	2

24	2	-1	-1	0	-1	0	0	2	1
25	1	-3	3	-2	-6	13	-1	-4	8
26	5	6	3	-1	0	1	1	2	-1
27	4	-5	2	5	-7	3	6	-9	4
28	3	1	0	-4	-1	0	4	-8	-2
29	0	7	4	0	1	0	1	13	0
30	7	0	0	10	-19	10	12	-24	13

31-40. Дано координати вершин піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ .

Знайти: 1) довжину ребра  $A_2A_3$ ; 2) кут між ребрами  $A_1A_2$  і  $A_1A_4$ ; 3) рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ; 4) площа грані  $A_1A_2A_3$ ; 5) об'єм піраміди; 6) рівняння ребра  $A_1A_2$ ; 7) рівняння висоти, опущеної з вершини  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ .

Вихідні дані до задач наведені в таблиці 7

**Таблиця 7**

Номери задач	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
31	2; 1; 2	0; 0; 3	1; 2; 4	-1; 1; 3
32	3; 2; 1	0; 2; 0	2; 5; 3	0; 4; 0
33	-1; 4; 2	2; 0; 3	3; 1; 0	4; 0; 5
34	0; 3; 6	2; -3; 1	1; 2; 1	3; 2; 2
35	-1; 0; 2	0; 4; 0	2; 1; 3	2; 3; 1
36	-1; 1; 4	0; -5; -1	3; 1; 0;	2; 2; 5;
37	0; 1; -2;	2; 3; 4	5; 1; 1	3; 1; 4
37	-2; 1; 1	1; 4; 0	2; 4; 1	0; 2; 0
38	3; -1; 0	0; 0; 2	2; -1; 4	3; 1; 5
40	5; 1; 2	1; 0; 5	-2; 1; -3	-4; 0; 5

## 2.5 Повчання по вивченню теми «Аналіз функції однієї змінної.

**Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.»**

*Література:* [4] ] гл. II, §1-10; гл. III, §1-19; гл. V, §1-7; гл. X, §1-10; [5] гл. XI, гл. XIII; [10] гл. IV, § 1-7; гл. XIII, § 1-2; гл. XIV, § 1-7

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- знати означення границі функції в точці, основні теореми про границі
- вміти обчислювати границі
- знати означення похідної та таблицю похідних
- вміти використовувати різні правила та прийоми диференціювання для обчислення похідних та диференціалів
- знати застосування похідної
- вміти досліджувати функцію та будувати її графік..

### Питання для самоперевірки

- 1.Визначення границі послідовності, границі функції.
- 2.Нескінченно мала і нескінченно велика функції та їх властивості.
- 3.Основні теореми про границі функцій.
- 4.Перша та друга чудові границі.
- 5.Безперервна функція в точці і на відрізку.
- 6.Сформулюйте визначення похідної. Який її механічний і геометричний зміст?
- 7.Виведіть формули похідних суми, добутку, частки двох функцій.
- 8.Виведіть формулу диференціювання складної функції.
- 9.Виведіть формули диференціювання тригонометричної і логарифмічної функцій.
- 10.Сформулюйте правило логарифмічного диференціювання.
- 11.Виведіть формули диференціювання степеневі функції з будь-яким дійсним показником, показникової функції, складної показникової функції.
- 12.Доведіть теорему про похідну оберненої функції. Виведіть формули диференціювання обернених тригонометричних функцій.
- 13.Сформулюйте визначення диференціалу функції.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад № 1.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{3x^3 - 4x + 5}$ .

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{3x^3 - 4x + 5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \frac{x^3}{x^3} - 5 \frac{x^2}{x^3} + 3 \frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}{3 \frac{x^3}{x^3} - 4 \frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

**Приклад № 2.** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

*Розв'язання.*

Для розкриття невизначеності використовуємо першу чудову границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1.$$

$$\text{Маємо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}.$$

**Приклад № 3.** Знайти похідну функції  $y=(\sin x+4)^3$

*Розв'язання.*

Для обчислення похідної скористаємося спочатку правилом обчислення похідної складної степеневі функції, а потім суми двох функцій  $\sin x+4$ :

$$y' = 3(\sin x + 4)^2 (\sin x + 4)' = 3(\sin x + 4)^2 \cos x$$

**Приклад № 4.** Знайти похідну функції  $y'_x$  : 
$$\begin{cases} x(t) = \ln \operatorname{ctgt} \\ y(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

*Розв'язання.*

$$\text{Знайдемо } x'_t = \frac{1}{\operatorname{ctgt}} \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 t} \right) = -\frac{1}{\sin t \operatorname{cost}}; \quad y'_t = -2\cos^{-3} t (-\sin t) = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t}$$

$$\text{Тоді } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \sin t \sin t \operatorname{cost}}{\cos^3 t} = -2 \operatorname{tg}^2 t.$$

## 2.6 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №2 (табл.1, Блок №2, завдання 41-70)

41-50. Знайти границю функції.

$$41. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^7 - 3x^2 + 5}{1 - x^2 + 2x^7};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{3x^2 + 16} - 5};$$

- B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$ ;  
 42. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 4x^2 + 1}{7x^5 - x^3 + x^3}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x^2}$ ;  
 43. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{11} - 11x^5 - 5}{5 - x - 7x^{11}}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \cos x}$ ;  
 44. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 + 7x + 1}{2 - x + 9x^5}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$ ;  
 45. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 5}{7x^2 + x + 4}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x \sin 3x}$ ;  
 46. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + x + 8x^7}{14x^7 - x^3 + 1}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{\arcsin x}$ ;  
 47. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 8x^3 + 7}{2x^4 + 5x^2 - 1}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 7x}{\sin^2 x}$ ;  
 48. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^9 + 9}{3 + x^7 + 7x^9}$ ;  
 B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \tan^{-1} 2x}{\sin 3x}$ ;  
 49. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 17x^2}{6x^2 - x + 1}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-1}}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{4+x}}{x^2 - x - 2}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-4} \right)^{5+x}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{6x}{1-6x}}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+2}}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+7}{2x+5} \right)^{3x+2}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{10-x}}{2x^2 + 5x - 7}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x[\ln(x+4) - \ln x])$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x^2 - 3x - 28}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{x}{3x-4}}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{3x}{2-x}}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 - 4x - 5}$ ;  
 r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{7x + x^2}$ ;

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)[\ln(x-5) - \ln x];$$

$$50. а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7+5x-7x^3}{5x^3+2x^2-1};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{5x+1}{5x-1} \right)^{8x};$$

51–60. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$  для заданих функцій а), б), в) і похідну  $\frac{d^2y}{dx^2}$  – для функцій г).

$$51. а) y = \ln \cos x + 0.5 \operatorname{tg}^2 x;$$

$$б) y = (x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x};$$

$$в) (x-y)e^x = e^y;$$

$$г) \begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t, t \in (0, \pi). \end{cases}$$

$$52. а) y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 2};$$

$$б) y = (\ln x)^{\sqrt{x}};$$

$$в) y = \operatorname{ctg}(xy);$$

$$г) \begin{cases} x = \frac{t}{t-1}; \\ y = \frac{t^2}{t-1}, t \neq 1 \end{cases}$$

$$53. а) y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+2} + 0.5 \ln(x^2 + 1);$$

$$б) y = (x^2 + 1)^{\cos x};$$

$$в) \sqrt{y} - \sqrt[3]{x} = 2;$$

$$г) \begin{cases} x = e^y \\ y = e^t \cos t, t \in (0, \pi). \end{cases}$$

$$54. а) y = \ln \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1};$$

$$б) y = (\arcsin x)^{0.5x};$$

$$в) \cos y = x - y;$$

$$г) \begin{cases} x = a \sin 2t; \\ y = b \cos 2t, t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$55. а) y = e^{2x^2} (3 + 2x^2 + 2x^4);$$

$$б) y = (\operatorname{tg} \sqrt{x})^{2x};$$

$$в) 3y = \sin(x-y);$$

$$г) \begin{cases} x = t + \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1+t^2), t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$56. а) y = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - 1} + \ln \operatorname{tg} x;$$

$$б) y = (x-5)^{\sin 3x};$$

$$в) x - y = e^{x+y};$$

$$г) \begin{cases} x = t^3 - 1 \\ y = \frac{1}{3}(t^2 - 1), t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$57. \text{ a) } y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^3 + \sqrt{x^2 - 1};$$

$$\text{в) } y^2 = x \sin y;$$

$$58. \text{ a) } y = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$\text{в) } e^y \sin y = \cos x;$$

$$59. \text{ a) } y = (x^2 + 4) \operatorname{arctg} \frac{x}{2};$$

$$\text{в) } \ln y + y/x = 2;$$

$$60. \text{ a) } y = 4\sqrt{x^2 - 4} - \left(\arcsin \frac{2}{x}\right)^2;$$

$$\text{в) } \cos(xy) - 3x = 0;$$

$$\text{б) } y = (\sqrt{x})^{\ln 2x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln 2t, t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (x^3 + 1)^{\operatorname{ctg} 2x}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = a \operatorname{arccost}; \\ y = e^{\sqrt{1-t^2}}, t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\sin 2x)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = 3e^{-t}; \\ y = e^{2t}, t \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\ln 3x)^{2/3};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = 2 \operatorname{ctg} t; \\ y = \ln \sin t, t \in (0, \pi). \end{cases}$$

61–70. Дослідити методами диференціального числення функцію  $y = f(x)$ ; використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

$$61. \text{ a) } y = x + \frac{x}{2};$$

$$\text{б) } y = x + e^{-x}.$$

$$62. \text{ a) } y = \frac{x^2}{x+1};$$

$$\text{б) } y = \ln(x^2 - 4).$$

$$63. \text{ a) } y = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x - 1}{x}.$$

$$64. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } y = xe^{-x/2}.$$

$$65. \text{ a) } y = \frac{(x-1)^2}{x};$$

$$\text{б) } y = xe^x.$$

$$66. \text{ a) } y = x + \frac{4}{x^2};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

$$67. \text{ a) } y = \frac{x}{2-x^2};$$

$$\text{б) } y = \ln \frac{x}{x-1}.$$

$$68. \text{ a) } y = x^4 - 2x^2 + 3;$$

$$\text{б) } y = \ln(x^2 + 1).$$

$$69. \text{ a) } y = \frac{x}{(x+1)^2};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$70. \text{ a) } y = x - \frac{1}{x};$$

$$\text{б) } y = xe^{-x}.$$



## 2.7 Повчання по вивченню теми „Інтегральне числення функції однієї змінної”

*Література:* [1] гл. XVI- XVII; [2] гл. XVII; [5] гл. IV, [6] гл. XV, [7] гл. III.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- знати таблицю невизначених інтегралів та правила інтегрування
- знати властивості визначеного інтеграла
- вміти застосовувати заміну змінної та інтегрування частинами для обчислення інтегралів
- знати формулу Ньютона-Лейбниця
- вміти застосовувати визначений інтеграл для розв'язання фізичних та геометричних задач.

*Питання для самоперевірки*

1. Визначення первісної (невизначений інтеграл).
2. Таблиця невизначених інтегралів.
3. Методи заміни змінної в невизначеному інтегралі.
4. Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
5. Методи інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції та найпростіших ірраціональних виразів.
6. Викладіть правило інтегрування раціональних дробів.
7. Теорема існування й єдності визначеного інтеграла.
8. Властивості визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
9. Формула Ньютона-Лейбниця.
10. Визначення невластних інтегралів першого і другого роду.

*Приклади розв'язання задач*

**Приклад № 1.** Обчислити інтеграл  $I = \int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx$ .

*Розв'язання.*

Приводимо інтеграл до табличного заміною:  $U = 4 + \ln x$ ;  $dU = \frac{1}{x} dx$ .

$$\text{Тоді } I = \left| \begin{array}{l} U = 4 + \ln x \\ dU = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \sqrt{U} dU = \frac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(4 + \ln x)^3} + C.$$

**Приклад №2.** Обчислити інтеграл  $I = \int x^2 \sin x dx$ .

*Розв'язання.*

Інтеграл береться з використанням формули інтегрування вроздріб:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Застосовуємо формули інтегрування вроздріб:

$$I = \left| \begin{array}{l} u = x^2; du = 2x dx \\ dv = \sin x dx; v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$$

Для обчислення подібного інтеграла формули інтегрування вроздріб потрібно застосувати ще раз. Позначимо:

$$\int x \cos x dx \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \sin x dx; v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin dx = x \sin x + \cos x + C$$

Підставляючи, маємо  $I = -x^2 \cos x + x \sin x + \cos x + C$ .

**Приклад №3.** Обчислити інтеграл  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} \cdot (1 + \sqrt[3]{x+3})}$ .

*Розв'язання.*

Інтеграл містить ірраціональність. Позначимо  $x + 3 = t^6$ ;  $dx = 6t^5 dt$ ;

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x+3} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+3} + C. \end{aligned}$$

**Приклад №4** Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою  $x = 3 \cos^3 t$ ;  $y = 3 \sin^3 t$ .

*Розв'язання.*

Формула обчислення площі плоскої фігури, обмеженої кривою, заданою в параметричній формі  $S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$ , де  $y = \psi(t)$ ,  $x = \varphi(t)$ .

У нашому випадку  $\varphi'(t) = 3 \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -9 \cos^2 t \sin t$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= - \int_0^{\pi/2} 3 \sin^3 t \cdot (-9) \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt = 27 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt = \\ &= 27 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \cdot \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos 2t + \cos^2 2t) \cdot (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{27}{8} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \frac{t}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt + \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 2t) \cdot \cos 2t dt = \\
&= \frac{27}{8} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \cdot \frac{\sin^3 2t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{27}{32} \pi.
\end{aligned}$$

**Приклад №5.** Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ ;  $x=0$ ,  $y=0$ .

*Розв'язання.* Використовуємо формули:

$$X_c = \frac{M_y}{M}; \quad Y_c = \frac{M_x}{M};$$

$$M = \int_a^b \gamma(y_b - y_n) dx; \quad M_y = \int_a^b \gamma(y_b - y_n) x dx;$$

У нашому випадку  $y_b = (2 - \sqrt{x})^2$ ;  $Y_m = 0$  границі інтегрування  $a=0$ ,  $b=4$ ,  $\gamma = 1$  (однорідна фігура).

$$M = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 (4 - 4\sqrt{x} + x) dx = (4x - 4 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2}) \Big|_0^4 = 8/3$$

Обчислимо статистичний момент щодо осі ОУ.

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_0^4 x(2 - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 (4x - 2x^{2/3} + x^2) dx = \\
&= (4 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^3}{3}) \Big|_0^4 = 32/15
\end{aligned}$$

$x_c = \frac{32}{15} : 8/3 = 4/5$ ;  $y_c = x_c = 4/5$  – координати центра ваги розглянутої фігури.

## 2.8 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №3 (табл.1, Блок №3, завдання 71-110)

71–80. Обчислити невизначений інтеграл:

$$71. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 4}} dx; \quad \int \frac{\ln(2x + 1)}{x^3} dx; \quad \int \frac{x}{x^2 - 7x + 13} dx; \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1}} dx;$$

$$72. \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}} dx; \int x3^x dx; \int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}; \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}};$$

$$73. a) \int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}} dx; \int \frac{5x^2}{5-2x^3} dx; \int x \cos 5x dx; \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1};$$

$$74. \int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}; \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}; \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx;$$

$$75. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx; \int x \arcsin \frac{1}{x} dx; \int \frac{(x+3)}{x^3+x^2-2x} dx; \int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{(\sqrt{x}+4)\sqrt{x^3}} dx;$$

$$76. \int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x} dx; \int x^2 e^{3x} dx; \int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} dx; \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx;$$

$$77. \int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; \int x \ln(x^2+1) dx; \int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6} dx; \int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}} dx;$$

$$78. \int \frac{ax}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} dx; \int e^{3-5x} dx; \int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}} dx; \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx;$$

$$79. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; \int x \sin x \cos x dx; \int \frac{x^2}{x^4-81} dx; \int \frac{1}{3\cos x+4\sin x} dx;$$

$$80. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx; \int x^2 \sin 4x dx; \int \arcsin x dx; \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx;$$

81–90. Використовуючи поняття визначеного інтеграла, розв'язати задачі:

81. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди  
 $x = t - \sin t$ ;  $y = 1 - \cos t$

82. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею кривої  
 $x = 3t^2$ ;  $y = 3t - t^3$

83. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $r = 3 + \sin \varphi$

84. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою  
 $r = 3(1 + \cos \varphi)$  і окружністю  $r = 3 \cos \varphi$

85. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою  $r = 5(1 + \sin \varphi)$

86. Знайти площу фігури, обмеженої равником Паскаля

87. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою  $x = 5 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$

88. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $x = 4 \cos 3\varphi$  і  $r = 2$

89. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $r = 5 \sin 3\varphi$

90. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $r = 4 \cos 2\varphi$

91–100. Знайти координати центра ваги однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями:

91.  $y^2 = 4x; x^2 = 4y$

92.  $4y = x^2; y = 2$

93.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1; x = 0; y = 0; x \geq 0; y \geq 0$

94.  $x^2 + y^2 = 9; y = 0; (y \geq 0)$

95.  $x^2 + y^2 + 2x = 0; y = 0; (y \geq 0)$

96.  $x^2 = 4y - 16 = 0; y = 0$

97.  $y^2 = -x + 9; x = 0$

98.  $y = \sqrt{4 - x^2}; y = 0; y \leq 0$

99.  $y = x^2; y = 2 - x^2$

100.  $y = \ln x; y = 0; x = e$

У розв'язанні задач 101-110 використовувати визначений інтеграл.

101. Стиск пружини пропорційний прикладеній силі. Обчислити роботу сили при стиску пружини на 0,08 м, якщо для стиску її на 0,01 м потрібна сила в 5 Н.

102. Визначити тиск води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого дорівнює 4 м і розташована на поверхні води, а вершина знаходиться на глибині 4 м.

103. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що її верхня основа  $b=50$  м, висота 20 м і верхня основа збігається з рівнем води.

104. Знайти роботу, необхідну для того, щоб викачати воду з циліндричної цистерни, що має радіус основи 2 м, а висоту 3 м.

105. Обчислити роботу, яку необхідно витратити, щоб викачати воду з конічної посудини, поверненої вершиною вниз, радіус основи якої дорівнює  $R$ , а висота  $H$ .

106. Яку роботу треба витратити, щоб тіло масою  $m$  підняти з поверхні Землі на висоту  $h$ , якщо сила притягання тіла Землею  $F = K \frac{mM}{r^2}$ .

107. Обчислити силу тиску рідини на вертикальну стінку у формі половини еліпса з осями  $2a$  і  $2b$ , занурену в рідину (питома вага  $\gamma = I$ ) так, що верхня межа пластини збігається з поверхнею рідини.

108. Знайти роботу, необхідну для того, щоб викачати воду з корита, яке має форму напівциліндра,  $R = 2$  м, довжина  $l = 6$  м.

109. Знайти кількість тепла, яке виділяється синусоїдальним струмом  $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$  у провіднику з опором  $R$  і періодом струму  $T = 2\pi/\omega$ , якщо відомо, що при постійному струмі кількість теплоти, яка виділяється за час  $t$ , визначається формулою  $Q = 0.24I^2Rt$ .

110. Циліндр із рухливим поршнем діаметром  $D = 0,2$  м і довжиною  $l = 0.8$  м заповнений паром при тиску  $P = 10$  кг/см<sup>2</sup>. Яку роботу треба витратити, щоб при незмінній температурі об'єм пари зменшити в 2 рази?

### 3 ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТА

#### 3.1 Система контролю знань та вмінь

При самостійному вивченні дисципліни «Вища математика» контроль знань та вмінь студентів-заочників здійснюється за допомогою системи контролюючих заходів *поточного* та *підсумкового* контролю. Поточний контроль здійснюється на протязі навчального року за формами: перевірка контрольної роботи, яку студенти виконують у міжсесійний період (ОМ), перевірка знань та вмінь студентів під час аудиторних занять протягом заліково-екзаменаційної сесії шляхом усного опитування та написання контрольної роботи (ОЗЕ). Підсумковий контроль (ОПК) здійснюється у формі письмового іспиту. Термін проведення контролюючих заходів визначається графіком дистанційної форми навчання. Загальна максимальна кількість балів, яку студент має змогу отримати за контрольну роботу у міжсесійний період (ОМ), складає 100 балів. Зарахована контрольна робота свідчить про те, що студент отримав за результатами перевірки не менше ніж 60%. Студенти, які не отримали за контрольну роботу мінімальної необхідної кількості балів, повинні виконати інший варіант контрольної роботи, який представляється викладачем, або виправити помилки попереднього варіанту та отримати відповідну кількість балів для допуску до іспиту.

Контрольна робота, яку студенти виконують під час аудиторних занять, включає теоретичну та практичну частини, які охоплюють основні питання розділу дисципліни. Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за цей вид роботи складає 60 балів. Також за усне опитування студент може отримати до 40 балів. Таким чином, загальна максимальна оцінка під час аудиторних занять складає 100 балів.

Студент вважається допущеним до іспиту з дисципліни, якщо він виконав всі види робіт поточного контролю, передбачені робочою навчальною програмою дисципліни і набрав за накопичувальною системою суму балів не менше 50% від максимально можливої за дисципліну, при цьому своєчасно виконав міжсесійну контрольну роботу.

## **3.2 Форми контролю знань та вмінь студентів**

### **3.2.1 Поточний контроль**

Поточний контроль здійснюється за наступними формами:

- перевірка міжсесійної контрольної роботи із застосуванням дистанційної форми контролю (див. п. 2.2);
- перевірка аудиторної контрольної роботи, яку студент виконує під час аудиторних практичних занять;
- усне опитування під час аудиторних практичних занять.

Усі три форми оцінюються з розрахунку 100%- максимум. Студент має допуск до іспиту у випадку отримання не менш ніж 50% за кожну форму контролю.

### **3.2.2 Підсумковий контроль**

Підсумковий контроль здійснюється під час іспиту, який оцінюється згідно відповідної інструкції. Іспит проводиться тільки у письмовій формі за екзаменаційними білетами, які розробляються викладачами та затверджуються на засіданні кафедри у встановленому порядку. Екзаменаційний білет формується у вигляді тестових завдань закритого типу, які потребують від студента обрання правильних відповідей з запропонованих у запитанні. Кількість тестових завдань в кожному білеті дорівнює 20. Кожна правильна відповідь оцінюється у 5 балів. Загальна екзаменаційна оцінка еквівалентна відсотку правильних відповідей із загального обсягу питань екзаменаційного білету. Накопичена підсумкова оцінка (ПО) засвоєння студентами заочної форми навчальної дисципліни, що закінчується іспитом, розраховується так:

$$ПО = 0,5ОПК + 0,25(ОЗЕ + ОМ).$$

Таким чином студент може отримати максимально 100 балів (%).

Якісна оцінка є такою:

- 91-100 балів – «відмінно»;
- 76-90 балів – «добре»;
- 60-75 балів – «задовільно»;
- менше 60 балів – «незадовільно».

Таким чином, студент може отримати максимально 100 балів (%).

Одержана накопичена підсумкова оцінка виставляється викладачем у відомість обліку успішності встановленого зразка.

### 3.3 Перелік базових знань та вмінь

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен

#### **Знати :**

- основні визначення, положення та теореми
- введення до математичного аналізу,
- диференціального числення функцій однієї змінної,
- інтегрального числення невизначених інтегралів,
- інтегрального числення визначених інтегралів ,
- невластних інтегралів.

#### **Вміти:**

- використовувати теоретичні знання та навички при розв'язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до розв'язання прикладних математичних задач.