МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Методические указания

для проведения практических заняний по дисциплине «Математика» для иностранных слушателей подготовительного отделения

Одесса-2014

Методические указания для проведения практических заняний по дисциплине «Математика» для иностранных слушателей подготовительного отделения

/Аркатов Ю.Н., Расторгуева Т. Е., Ткаченко Н.А., Хохлова О.П. – Одесса, ОГЭКУ, 2014. - с.90/

Содержание

Введение

Настоящее методическое пособие предназначено для проведения практических занятий по математике со студентами иностранцами, обучающихся на подготовительном отделении.

По каждой теме курса элементарной математики приведена необходимая справочная информация – формулы, определения основных понятий и алгоритмы решения типовых задач. Кроме того, подробно рассмотрены примеры решения типовых заданий. В первых темах пособия (арифметика, алгебраические выражения, функции) акцент сделан на работе с «языковыми конструкциями», используемыми в математике.

Для каждой из тем приведены контрольные задания разного уровня сложности.

1. Арифметика.
Справочная информация
1.1. Математические знаки и числовые выражения

1. Математические знаки

1.1 «$>$» - это знак «больше»;
$a > b$ - читать: «*a* больше *b*»;
1.2 «$>$» - это знак «меньше»;
$a < b$ - читать: «*a* меньше *b*»;
1.3 «$\geq$» - это знак «больше или равно»;
$m \geq n$ - читать: «*m* больше или равно *n*»;
1.4 «$\leq$» - это знак «меньше или равно»;
$m \leq n$ - читать: «*m*меньше или равно *n*»;
1.5 «$\neq$» - это знак «не равно»;
$c \neq d$ - читать «*c* не равно *d*»;
1.6 «$\approx$» - это знак «приближенно равно»;
$\alpha \approx \beta$ - читать: «альфа приближенно равно бета»;
1.7 «$\in$» - это знак «принадлежать»;
$\gamma \in N$ - читать «гамма принадлежит *N*».

2. Знаки арифметических действий

2.1 «+» - это знак плюс;
это действие (операция) сложения; читать: «*a* плюс *b*»;
«$a + b$»
это сумма двух чисел; сумма *a* и *b*;
2.2 «$\cdot$» - это знак умножения;
это действие умножения; читать: «*a* умножить на *b*»;
«$a \cdot b$»
это произведение двух чисел; произведение*a* на *b*;
2.3 «-» - это знак минус;
это действие (операция) вычитания; читать «*a*-*b*»
«$a - b$»
это разность двух чисел;
2.4 «$:$» - это знак деления;
это действие (операция) деления; читать «*a* разделить на *b*»;
«$a : b$» это отношение двух чисел; отношение*a* и *b*;
это частное двух чисел *a* и *b*.

3. Скобки в числовых выражениях

3.1 $(...);[...];\{...\}$ - это скобки;
$(...)$ - это круглые скобки;

$[...]$ - это квадратные скобки;

$\{...\}$ - это фигурные скобки.

3.2 $(a+b)$ - читать: «в круглых скобках: *a* плюс *b*»;

$[a-b]$ - читать: «в квадратных скобках*a* минус *b*»;

$\{m \cdot n\}$ - читать: «в фигурных скобках: *m* умножить на *n*».

Пример. $15 \cdot 20 + 100 : (73 + 27)$ - это числовое выражение. Читать: «пятнадцать умножить на двадцать; плюс, сто разделить на круглую скобку; в круглых скобках: семьдесят три плюс двадцать семь».

Замечание. В числовом выражении действия надо делать в определенном порядке.Если скобок нет, тогда первые действия – это умножение и деление (слева-направо), вторые действия – это сложение и вычитание.Если в числовом выражении есть скобки, тогда начинать надо делать действия в скобках.

4. Арифметические действия

4.1 Сумма – это результат действия сложения:

$$a + b = c,$$

число *c* – это сумма; числа *a* и *b* – это слагаемые.

4.2 Произведение – это результат действия умножения:

$$a \cdot b = c,$$

число *c* – это произведение; число *a* и *b* – это сомножители.

4.3 Разность – это результат действия вычитания:

$$a - b = c,$$

число *c* – это разность; число *a* – это уменьшаемое, *b* – это вычитаемое.

4.4 Частное – это результат действия деления:

$$a : b = c,$$

число *c* – это частное; *a* – это делимое, *b* – это делитель.

1.2. Цифры и целые числа

1. Целые и натуральные числа

1.1 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ - это цифры (знаки).

1.2 $N = \{1,...,9,10,...,99,100,...,999,1000,...,9999,...\}$ - это натуральные числа;

$Z = \{0;1;-1;2;-2;3;-3;...\}$ - это целые числа.

1.3 Если a_n (читать «*a* энное») – это цифры, то

$$A = \pm a_n a_{n-1} ... a_3 a_2 a_1 \qquad (1)$$

- формула целого числа А.

1.4 Цифра a_1 - это количествоединиц в целом числе (1); цифра a_2 - это количество десятков в целом числе (1); a_3 - это количество сотен; a_4 - количество тысяч.

n - это количество цифр (знаков) в целом числе (1).

Если $n=1$, то число $A=a_1$ - однозначное; если $n=2$, то $A=a_2a_1$ - двузначное число; если $A=a_3a_2a_1$ - трехзначное число; если $A=a_4a_3a_2a_1$ - четырехзначное число.

2. Деление целых чисел. Остаток

2.1. Если $a:b=c$ и $c \in Z$ - результат целое число, тогда будем говорить – это деление безостатка.

2.2. Если $a:b=c$ и $c \notin Z$ - результат не целое число, тогда будем говорить – это деление с остатком.

2.3. Целое число $c=\pm a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0$ делится без остатка:

A) на 2, если a_0 делится на 2 без остатка;

B) на 3, если $a_0+a_1+...+a_n$ делится на 3 без остатка;

C) на 5, если $a_0=0$ или $a_0=5$.

2.4. Четное число – это целое число, которое делится на 2 без остатка.

Нечетное число – это целое число, которое делится на 2 с остатком.

2.5. Простое число – это число, которое делится с остатком на любое число (кроме 1 и этого числа).

1.3. Признаки делимости. Виды чисел. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.

Если натуральное числоA разделить на натуральное число B, тогда результат (частное) может быть с остатком или без остатка (остаток равен нулю, см. 1.2, замечание 10,11). Например, если 125 : 5, то получится 25 и остаток равен нулю (деление без остатка или нацело); если 125 : 2, то получится 62 и остаток равен одному.

1. Признак деления натурального числа на число два без остатка.

Натуральное число $C=a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0$делится на число 2 без остатка, если последняя цифра этого числа a_0, делится на 2 без остатка.

Пример 1. Почему число 3303578 делится на число 2 без остатка?
Ответ. Число 3303578 делится на число 2 без остатка потому, что последняя цифра этого числа 8 делится на 2 без остатка.

Замечания:

1. Число, которое делится на 2 *без остатка*, называется *чётным*.
2. Число, которое делится на 2 *с остатка*, называется *нечётным*.

Пример 2. Почему число 137 нечётное?
Ответ. Число 137 нечётное потому, что число 137 делится на два с остатком (последняя цифра 7 делится на два с остатком).

2. Признак деления натурального числа на число три без остатка.

Натуральное число $C = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ делится на 3 без остатка, если сумма всех цифра этого числа:

$$a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 \qquad (3)$$

делится на 3 без остатка.

Пример 3. Найдите сумму цифр числа 84325.
Ответ. Сумма цифр числа 84325 это: 8+4+3+2+5=22.
Пример 4. Число 100002 делится на три с остатком или без остатка?
Ответ. Сумма цифр числа 100005 это: 1+0+0+0+0+5=6. Число 6 делится на 3 без остатка, поэтому число 100005 делится на три без остатка.

3. **Признак деления натурального числа на число пять без остатка.**

Натуральное числоCделится на число 5 без остатка, если последняя цифра этого числа: a_0, является цифрой 5 или 0.

Пример 5. Число 1870 делится на пять с остатком или без остатка?
Ответ. Последняя цифра 0, поэтому число 1870 делится на пять без остатка.

4. **Простое число.**

Натуральное число $C = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$, которое делится без остатка только на 1 и на числоC, а на все другие натуральные числа делится с остатком, называется *простым числом*.

Замечания:

1. Примерами простых чисел являются числа:
1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
2. Если натуральное число не является простым, то оно называется *составным* числом.

Пример 4. Почему число 17 простое?

Ответ. Число 17 простое потому, что это число делится без остатка только на 1 и 17. На числа 2, 3, 4, …, 15, 16 число 17 делится с остатком.

5. Разложение на множители.

Если натуральное число написано как произведение нескольких чисел, тогда это значит, что натуральное число *разложили на множители.*
Например, если число 30 написать так: $30 = 2 \cdot 15$, то это значит, что число 30 разложили на множители 2 и 15.
Замечание: Если натуральное число разложили на множители и все множители - *простые числа,* то это значит, что натуральное число *разложили на простые множители.*

Пример 1. Напишите разложение на простые множители числа 30.
Решение. Число 30 делится на два без остатка (почему ?), поэтому можно написать так: $30 = 2 \cdot 15$. Число 15 делится на три без остатка, поэтому можно написать: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Все множители - это простые числа. Это разложение на простые множители.

Замечание: Почему результат $30 = 2 \cdot 15$ неправильный? Потому, что число 15 непростое, а составное. Результат $30 = 2 \cdot 15$ это разложение на множители 2 и 15.
Замечание: Для разложения числа на простые множители надо использовать правило или *алгоритм*. Алгоритм - это правило, которое даёт ответ на вопрос: «Что надо сделать, чтобы решить задачу?».

Алгоритм 1. Разложение на множители составного числа.
Чтобы разложить число C на простые множители надо:
1. Проверить деление числа C на число 2 без остатка (смотрите признак делимости на 2). Если делится, тогда записать это число так:
$C = 2 \cdot A$.
Если не делится на 2, тогда проверить, деление числа С на число 3 без остатка (смотрите признак делимости на 3). Если делится, тогда записать это число так:
$C = 3 \cdot B$.
2. Повторить всё для числа A или B.

Пример 2. Разложите число 60 на простые множители.
Решение.
$60 = 2 \cdot 30$; $30 = 2 \cdot 15 \rightarrow 60 = 2 \cdot 2 \cdot 15$;
$15 = 3 \cdot 5 \rightarrow 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
Ответ: $60 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

6. **Общий делитель и наибольший общий делитель (НОД).**

Общий делитель чисел A и B – это число D, на которое делится числа A и B без остатка (A : D) и (B : D).

Наибольший общий делитель (НОД) – это наибольшее число, на которое делится числаA и B без остатка.

Замечание: Если число D - это НОД для чисел A иB, то будем записывать это так: $D = \text{НОД}(A, B)$.

Пример 3. Найдите НОД (18, 12).
Решение. Разложим каждое число на простые множители:
18 = 2 · 3 · 3; 12 = 2 · 2 · 3.
НОД (18, 20) = 6 – это наибольшее число, на которое делятся числа 12 и 18.

7. **Общее кратное и наименьшее общее кратное (НОК).**

Общее кратное чиселA и B – это число K, которое делится на число A и B без остатка.

Наименьшее общее кратное (НОК) – это наименьшее число, которое делится на числаA и B без остатка.

Замечание. Если числоK - это НОК для чисел A и B, то будем записывать это так: K=НОК (A, B).

Пример 3. Найдите НОК (18, 12, 30).
Решение. Разложим каждое число на простые множители:

18 = 2 · 3 · 3; 12 = 2 · 2 · 3; 30 = 2 · 3 · 5.

Прибавим к первому произведению 2 · 3 · 3 новые простые числа:
НОК (18, 12, 30) = (2· 3· 3) · (2) · (5) = 180.

1.4. Обыкновенные дроби. Десятичные дроби. Арифметические действия над десятичными и обыкновенными дробями

1. **Обыкновенная дробь.**

Обыкновенная дробь – это число, которое записывается так $\frac{a}{b}$. Число $a \in Z$ (множество целых чисел) – это *числитель* дроби, число $b \in N$ (множество натуральных чисел) – это *знаменатель* дроби; $\frac{\dots}{\dots}$ - дробная черта.

Замечания:

1. Целые числа можно рассматривать как обыкновенные дроби с знаменателем равным единице. Например, целое число 33 можно написать как $\frac{33}{1}$.
2. Если числитель дроби $\frac{a}{b}$ больше знаменателя $(a>b)$, то дробь называется *неправильной*. Например, дробь $\frac{7}{5}$ (семь пятых) – неправильная, потому что числитель 7 больше знаменателя $5:7>5$.
3. Если числитель дроби $\frac{a}{b}$ меньше знаменателя $(a<b)$, то дробь называется *правильной*.
4. Неправильную дробь $\frac{a}{b}$ можно написать в виде суммы:

$$\frac{a}{b}=c+\frac{m}{b}, \tag{1}$$

где $c\in Z$ - *целая часть* дроби $\frac{a}{b}$; $\frac{m}{b}$ - правильная дробь $(m<b)$; число m - это остаток от деления числителя*a* на знаменатель *b*.

4. Формулу (1) можно записать так:

$$\frac{a}{b}=c+\frac{m}{b}=c\frac{m}{b}. \tag{2}$$

Дробь $c\frac{m}{b}$ называется *смешанной дробью*.

Пример 1. Напишите неправильную дробь $\frac{17}{4}$ в виде смешанной дроби.

Решение. Разделим $17:4$. Целая часть равна 4, остаток – 1. Напишем результат: $17:4=4+\frac{1}{4}=4\frac{1}{4}$.

2. Основное свойство дроби.

Числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на число, не равное нулю:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a:c}{b:c}, c\neq 0. \tag{3}$$

Замечания:

1. *Сократить дробь* - это значит числитель и знаменатель дроби разделить на одно число.

2. Дробь сокращают, если числитель и знаменатель имеет общий целый множитель. Например, если у дроби $\frac{6}{8}$ числитель и знаменатель разложить на множители: $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, то число 2 – это общий множитель. Поэтому, дробь $\frac{6}{8}$ можно сократить на $2: \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Пример 2. Сократите дробь $\frac{15}{25}$ на 5.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на 5:
$\frac{15}{25} = \frac{15:5}{25:5} = \frac{3}{5}$.

3. Обратная дробь

Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ поменять местами: $\frac{a}{b}$, то дробь $\frac{b}{a}$ называется *обратной* для дроби $\frac{a}{b}$.

Замечание. Если числоa написать как дробь: $\frac{a}{1}$, то число обратное для числа a это дробь - это $\frac{1}{a}$.

Пример 3. Напишите дробь обратную для дроби $\frac{5}{2}$. **Ответ:** $\frac{2}{5}$

Алгоритм 1. Правило сложения и вычитание дробей

Чтобы найти сумму (разность) двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (например, $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ и $\frac{a}{b} = \frac{2}{9}$): $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ надо:

1. найти наименьшее общее кратное знаменателей всех дробей:
$n = HOK\left(a,b\right)$;

   число n называется *наименьшим общим знаменателем;*
2. разделить число n на знаменатель каждой дроби:

$$n : b = b_1,\ n : d = d_1;$$

   числа a_1 и b_1 называются *дополнительными множителями*;
3. записать дополнительные множители для каждой дроби:

$$\frac{a^{(b_1}}{b}+\frac{c^{(d_1}}{d}$$

вычислить число m:

$$a\cdot b_1+c\cdot d_1=m;$$

4. записать результат:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot b_1+c\cdot d_1}{n}.$$

Пример 1. Выполните действие сложения (вычитания) трёх дробей: $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\frac{1}{4}$.

Решение. Результатом выполнения действий является дробь $\frac{m}{n}$:

$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\frac{1}{4}=\frac{m}{n}$.

Чтобы найти числитель m и знаменатель n *неизвестной* дроби $\frac{m}{n}$ надо:

1. найти наименьшее общее кратное знаменателей всех дробей:
$n=HOK\left(6,9,4\right)=36$;
   (число 36 - это *наименьший общий знаменатель*)
2. разделить наименьший общий знаменатель на знаменатель каждой дроби:
$36:6=6,\quad 36:9=4,\quad 36:4=9$;
   (числа 6, 4, 9 - это *дополнительные множители*)
3. записать дополнительные множители для каждой дроби:
$\frac{5^{(6}}{6}+\frac{2^{(4}}{9}-\frac{1^{(9}}{4}$
 и вычислить числитель m:
$m=5\cdot 6+2\cdot 4-1\cdot 9=29$;
4. записать результат:
$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\frac{1}{4}=\frac{29}{36}$.

Пример 2. Выполните действия: $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}-\frac{1}{5}$.

Решение.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}-\frac{1}{5}=\left[HOK\left(12,18,5\right)=180\right]=\frac{5^{(15}}{12}+\frac{7^{(10}}{18}-\frac{1^{(36}}{5}=\frac{5\cdot 15+7\cdot 10-1\cdot 36}{180}=$$
$$=\frac{109}{180}.$$

Алгоритм 2. Правило умножения дробей

Чтобы умножить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{m}{n}$ надо умножить их числители и знаменатели:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\cdot m}{b\cdot n}. \qquad (1)$$

Пример 2. Выполните действия: $\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{8}$.

Решение. $\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{8}=\frac{5\cdot 7}{12\cdot 8}=\frac{35}{96}$.

Алгоритм 3. Правило деления дробей

Чтобы разделить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{m}{n}$ надо первую дробь умножить на дробь обратную второй дроби

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}=\frac{a\cdot n}{b\cdot m}. \qquad (2)$$

Пример 3. Выполните действия: $\frac{5}{12}:\frac{7}{8}$.

Решение. $\frac{5}{12}:\frac{7}{8}=\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{7}=\frac{5\cdot 8}{12\cdot 7}=\frac{40}{84}$.

4.Десятичная дробь.

Десятичная дробь это положительное или отрицательное число:

$$\pm a_m a_{m-1}...a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}...a_{-n}..., \qquad (1)$$

в котором знаки a_i это цифры: $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Замечания:

1. Цифры до запятой: $a_m a_{m-1}...a_1 a_0$ это *целая часть*десятичной дроби.

2. Цифры после запятой: $a_{-1}a_{-2}...a_{-n}$ это *дробная часть* десятичной дроби. Например, в десятичной дроби 237,67 целая часть это 237, а дробная часть это 67.
3. Цифра a_{-1} называется *десятой частью числа* (читается - десятая); цифра a_{-2} называется *сотой частью числа* (читается – сотая); цифра a_{-3} называется *тысячной частью числа* (читается – тысячная). Например, десятичная дробь 237,671 читается так: двести тридцать семь целых и 671 *тысячная*; десятичная дробь 237,67 читается так: двести тридцать семь целых и 67 *сотых*; десятичная дробь 237,6 читается так: двести тридцать семь целых и 6 *десятых*.

5. Конечная десятичная дробь

Если дробная часть десятичной дроби содержит *конечноеколичество цифр*:

$$\pm a_m a_{m-1}...a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}...a_{-n}, \tag{2}$$

то десятичная дробь называется *конечной.*

Замечания:

1. Если *дробная часть десятичной дроби равна нулю*, то есть $a_{-1}=0, a_{-2}=0,..., a_{-n}=0,...$, то десятичная дробь – это целое число.
2. Конечную десятичную дробь всегда можно записать в виде обыкновенной дроби:

$$a_m a_{m-1}...a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}...a_{-n} = \frac{a}{b}. \tag{3}$$

Поэтому, конечная десятичная дробь является *рациональным числом*. Например, десятичная дробь 1,25 это рациональное число, потому что $1,25=\frac{5}{4}$.

Пример 1. Напишите обыкновенную дробь $\frac{60}{240}$ в виде десятичной дроби.

Ответ: 0,25

6. Бесконечная десятичная дробь.

Если *дробная часть десятичной дроби содержит бесконечноеколичество цифр*:

$$a_m a_{m-1}...a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}...a_{-n} \cdot ..., \tag{4}$$

то десятичная дробь называется бес*конечной.*

Замечания:

1. Три точки в формуле (4) – это символ бесконечной дроби. Например, десятичная дробь 137,25 это конечная дробь, а десятичная дробь 137,25… это бесконечная дробь.
2. Бесконечную десятичную дробь нельзя записать как обыкновенную дробь:

$$\pm a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} \dots \neq \frac{m}{n}. \qquad (5)$$

3. Если в *дробной части десятичной дроби группа цифр повторяется (*например, в дроби 1,252525... цифры 25 повторяются), то эта дробь называется *периодической*. Например, дробь 1,252525… это периодическая дробь. Периодическая дробь это всегда бесконечная дробь. Цифры, которые повторяются, называются *периодом дроби*. Например, в дроби 1,252525… период дроби это 25. Записывается это так: 1,252525… = 1,(25).

Пример 2. Напишите обыкновенную дробь $\frac{5}{15}$ в виде десятичной дроби.

Ответ: 0,(3)

1.5. Операция возведение в степень и её свойства

1. Операция возведения в степень.

Если над числом b выполнить операцию возведения в степень a, то записывается это так:

$$b^a = c, \qquad (1)$$

c – это результат возведения в степень. Число b – это *основание*; число а – это *показатель степени*, то есть: $b \xrightarrow{\exp_a} \exp_b a = b^a$.

Замечания:

1. Если показатель степени 2, то пишем x^2, читаем: «x во второй степени», или «x в квадрате», или «квадрат x».
2. Если показатель степени 3, то пишем x^3, читаем: «x в третьей степени», или «x в кубе», или «куб x».
3. Если показатель степени 4, то пишем x^4, читаем: «x в четвертой степени», или «x в степени четыре».
4. Любое число $x \neq 0$ в нулевой степени равно 1:

$$\boxed{x^0 = 1,\ x \neq 0.}$$

Например, $(3{,}14)^0 = 1$ или $2^0 = 1$.

5. Любое число $x \neq 0$ в первой степени равно этому числу:

$$\boxed{x^1 = x.}$$

Например, $(3{,}14)^1 = 3{,}14$ или $2^1 = 2$.

6. Если $x^b = c$ и показатель степени b это натуральное число ($b \in N$), то результат c можно вычислить по правилу:

$$\boxed{c = x^b = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{b}.}$$

Например, $1{,}5^3 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}375$.

7. Можно изменить знак показателя степени по правилу:

$$\boxed{x^b = \frac{1}{x^{-b}}.}$$

Например, $a^5 = \dfrac{1}{a^{-5}}$ или $x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$.

8. Если $x^b = c$ и показатель степени b это обыкновенная дробь: $b = \dfrac{m}{n}$, тогда для обозначения действия возведения в степень используется следующее обозначение:

$$\boxed{x^b = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.}$$

Например, $25^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25^2}$.

9. Если степени x^a и x^b имеют одинаковые основания, то:

$$\boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}.}$$

Например, $3^4 \cdot 3^{-2} = 3^{4+(-2)} = 3^2 = 9$.

10. Если степени x^a и x^b имеют одинаковые основания, то:

$$\boxed{x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}.}$$

Например, $5^6 : 5^4 = 5^{6-4} = 5^2 = 25$.

11. Если степень $c = x^b$ надо возвести в степень: $c^a = \left(x^b\right)^a$, то:

$$\boxed{\left(x^b\right)^a = x^{b \cdot a}.}$$

Например, $\left(3^2\right)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6 = 729$.

12. Если степени x^a и y^a имеют одинаковые показатели степени, то:

$$\boxed{x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a.}$$

Например, $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$.

13. Если степени x^a и y^a имеют одинаковые показатели степени, то:

$$\boxed{x^a : y^a = \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a.}$$

Например, $4^3 : 5^3 = \dfrac{4^3}{5^3} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^3$.

2. Операция потенцирования.

Если над числом b выполняется операция *потенцирования* по основанию a, то записывается это так:

$$a^b = c, \tag{2}$$

то есть $b \xrightarrow{\exp_a} \exp_a b = a^b$, c – это результат потенцирования.

Замечания.

1. Основание a должно быть положительным (a>0) и не равным единице ($a \neq 1$).
2. Результат потенцирования – это всегда положительное число: c>0.

3. Свойства операции возведения в степень и потенцирования.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

1.6. Отношения. Пропорции. Проценты

1. Отношение двух чисел

Отношением двух чисел a и b называется обыкновенная дробь, которая записывается в виде: $\frac{a}{b}$. Числа a и b называются *членами отношения*.

Замечания:

1. Величина $\frac{a}{b}$ это:
   - отношение двух чисел a и b;
   - отношение числаa к числу b;
   - деление числаa на число b;
   - обыкновенная дробь.
2. Если выполнить действие деления $\frac{a}{b}=c$, то число cназывается результатом отношения чисел a и b. Например, $\frac{27}{9}$ - это отношение числа 27 к числу 9; $\frac{27}{9}=3$ - отношение числа 27 к числу 9 равно 3.
3. Если $\frac{a}{b}=c$, то:

$$\boxed{\frac{a}{b}=c \Rightarrow a=b\cdot c}. \qquad (1)$$

Если $c>1$, то это значит, что *число а больше числа* b***в*** *с раз.*
Если $c<1$, то это значит, что *число а меньше числа* b***в*** *с раз.*
Если $a=b+c$, то это значит, что *число а больше числа* b***на*** *с.*
Если $a=b-c$, то это значит, что *число а меньше числа* b***на*** *с.*

4. Если $\frac{a}{b}=c$, то:

$$\boxed{\frac{a}{b}=c \Rightarrow b=a:c}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найдите отношение числа 7 к числу 2.

Решение. Отношение числа 7 к числу 2 это дробь $\frac{7}{2}$. Выполним действие деления: $\frac{7}{2}=3{,}5$. Отношение числа 7 к числу 2 равно 3,5.

Число7 больше числа 2 в 3,5 раза.

5. Если результат отношения известен, а один из членов отношения неизвестный, то его можно найти с помощью формул (1) или (2).

Пример 2. Отношение числа 12 к неизвестному числу x равно 3. Найдите это число.

Решение. По условию задачи: $\frac{12}{x}=3$. Используем формулу (2): $x=12:3=4$. Неизвестный член отношения равен 4.

Пример 3. Отношение числа неизвестного числа x к числу 5 равно 0,25. Найдите это число.

Решение. По условию задачи: $\frac{x}{5}=0,25$. Используем формулу (1): $x=0,25\cdot 5=1,25$. Неизвестный член отношения равен 1,25.

1. Число a увеличить на b 2. К числуa прибавить число b 3. Числоa сложить с числом b	$a+b$
4. Числоa увеличить в b раз 5. Числоa умножить на числом b	$a\cdot b$
6. Числоa уменьшить на b 7. От числаa вычесть число b 8. От числoa отнять с число b	$a-b$
9. Числоa уменьшить на b 10. Числоa разделить с числом b	$a:b$

2. Пропорция

Пропорция – это равенство двух отношений:

$a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Замечания

1. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то читаем: «a относится кb как c относится к d»
2. Величины (числа) a, b, c, d - это *члены отношения*.
3. a и d называются *крайние члены пропорции*; b и cназываются*средние члены попорции*.

3. Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c. \qquad (1)$$

Замечания

1. Если один из членов пропорции – неизвестный, то формула (1) помогает найти его. Например, в пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

- a - неизвестный член пропорции, тогда

$$a\cdot d=b\cdot c\Rightarrow a=\frac{b\cdot c}{d}; \qquad (2)$$

- b - неизвестный член пропорции, тогда

$$a\cdot d=b\cdot c\Rightarrow b=\frac{a\cdot d}{c}; \qquad (3)$$

- c - неизвестный член пропорции, тогда

$$a\cdot d=b\cdot c\Rightarrow c=\frac{a\cdot d}{b}; \qquad (4)$$

- d - неизвестный член пропорции, тогда

$$a\cdot d=b\cdot c\Rightarrow d=\frac{b\cdot c}{a}; \qquad (5)$$

2. *Решить пропорцию* – значит найти неизвестный член пропорции.

Пример 1. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{x}{5}=\frac{3}{2}$.

Решение. Применим формулу (2): $\frac{x}{5}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{5\cdot 3}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5$.

Пример 2. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{0{,}1}{x}=\frac{5}{105}$.

Решение. Применим формулу (3):
$\frac{0{,}1}{x}=\frac{5}{105}\Rightarrow x=\frac{0{,}1\cdot 105}{5}=\frac{10{,}5}{5}=2{,}1.$

Пример 3. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{2{,}1}{4}=\frac{6{,}3}{x}$.

Решение. Применим формулу (5):
$\frac{2{,}1}{4}=\frac{6{,}3}{x}\Rightarrow x=\frac{4\cdot 6{,}3}{2{,}1}=\frac{25{,}2}{2{,}1}=12.$

Пример 4. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{0{,}5}{8}=\frac{x}{6{,}4}$.

Решение. Применим формулу (4):
$\frac{0{,}5}{8}=\frac{x}{6{,}4}\Rightarrow x=\frac{0{,}5\cdot 6{,}4}{8}=\frac{32}{8}=0{,}4$.

3. Процент

Один процент (1%) - это одна сотая $\left(\frac{1}{100}\right)$ часть числа.

Замечание

1. ЕслиA - это число, а B - это часть этого числа, то «измерить» эту часть можно с помощью отношения: $\frac{B}{A}$.
2. Если $p=\frac{B}{A}<1$, то числоB меньше числа A (см. рисунок 1). Например, если $p=\frac{1}{2}$, то числоB меньше числа A в два раза или число B - это *половина* числа A; если $p=\frac{1}{3}$, то число B меньше числа A в три раза или число B - это *треть* числа A; если $p=\frac{1}{4}$, то число B меньше числа A в четыре раза или число B - это *четверть* числа A.
3. Удобно записывать это отношение в виде процентного отношения: $\frac{B}{A}\cdot 100\%$. Например, если числоB - это *половина* числа A, то число Bсоставляет $\frac{1}{2}\cdot 100\% = 50\%$ (пятьдесят процентов) от числа A (см. таблицу 1).

Таблица 1

10% от числа – это $\frac{1}{10}$ часть числа
20% от числа – это $\frac{1}{5}$ часть числа
25% от числа – это $\frac{1}{4}$ часть числа
50% от числа – это $\frac{1}{2}$ часть числа
75% от числа – это $\frac{3}{4}$ часть числа

4. Если $p=\frac{B}{A}>1$, то числоB больше числа A (см. рисунок 2). Например, если отношение $p=2$, то числоB больше числа A в два раза или процентное отношение равно $2\cdot 100\% = 200\%$.

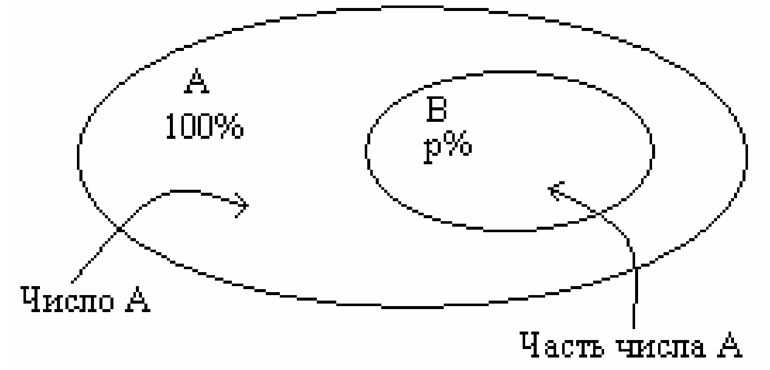


Рис. 1

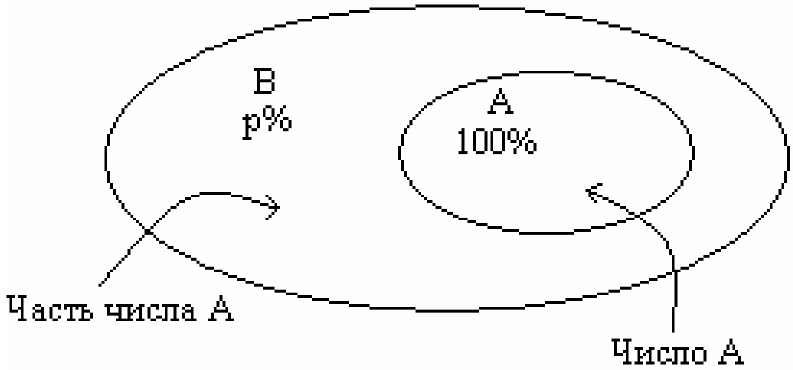


Рис. 2

4.Основные типы задач на проценты.

Существует три типа задач на проценты. Далее будем использовать следующие обозначения: A - число, B - часть числа, p% - процентное отношение числаB к числу A.

Задача первого типа: заданы числаA и B, найти p.

Нахождение процентного отношения двух чисел.

Пример 1. Найдите процентное отношение чисел 36 и 90 (или «Сколько процентов составляет число 36 от числа 90 ?»).

Решение. Отношение чисел равно $\frac{36}{90} = 0,4$, процентное отношение:

$\frac{36}{90} \cdot 100\% = 40\%$.

Пример 2. Найдите процентное отношение чисел 90 и 36 (или «Сколько процентов составляет число 90 от числа 36 ?»).

Решение. Отношение чисел равно $\frac{90}{36} = 2,5$, процентное отношение:

$\frac{90}{36} \cdot 100\% = 250\%$.

Задача второго типа: заданы B и p, найти A.

Нахождение числа, если известна часть числа и его процент от неизвестного числа.

Пример 3. Найдите число, если его 24% равны 0,06. **Решение.** Число 0,06 - это 24%, а неизвестное число x - это 100%. Составим пропорцию: $\frac{0,06}{24}=\frac{x}{100}$. Найдём неизвестный член пропорции (смотри раздел 3.2, формула (4)): $x=\frac{0,06\cdot 100}{24}=0,25$.

Задача третьего типа: заданы A и p, найти B.
Нахождение части числа, если известен его процент от числа.

Пример 4. Найдите число, если его процентное отношение к числу 40 составляет 70% . **Решение.** Неизвестное число x - это 70%, а число 40 - это 100%. Составим пропорцию: $\frac{x}{70}=\frac{40}{100}$. Найдём неизвестный член пропорции (смотри раздел 3.2, формула (2)): $x=\frac{40\cdot 70}{100}=28$.

Контрольные вопросы и задания.

1. **Прочитайте**:

1.1 $235\neq 2350$;	1.4 $299\approx 300$;
1.2 $g<137$;	1.5 $a\in N$;
1.3 $h\geq 95$;	1.6 $b\in Z$.

2. **Напишите:**

2.1 разность чисел: сто тридцать пять и семьдесят восемь;

2.2 произведение чисел: триста три и двадцать три;

2.3 частное чисел: двести сорок один и тридцать три;

2.4 сумму трех чисел: двадцать тысяч один, пятьдесят восемь и тысяча.

3. **Прочитайте числовые выражения:**

А) $735:3\cdot 2+(804:4-11)$;

B) $\left[1040-5\cdot\left(638-530\right)\right]\cdot 2;$

C) $\left(305-200\right):3+\left(4\cdot 101-204\right):100.$

4. Определите порядок действий в числовых выражениях A), B), C).

5. Выполните действия A), B), C).

6. **Напишите**:

A) сумму чисел: семьсот пять и четыреста восемьдесят семь;

B) произведение чисел: три тысячи пятьсот шестьдесят один и двести тридцать пять;

C) разность чисел: девятьсот три и семьдесят семь;

D) частное чисел: четыреста пять и триста восемьдесят один.

7. **Напишите:**

1. разность чисел (B) и (E);
2. отношение чисел (D) и (A);
3. сумму чисел (C) и (B);
4. произведение чисел (D) и (E);
5. отношение суммы чисел (A) и (B) к числу (E);
6. произведение разности чисел (D) и (C) на сумму чисел (E) и (A).

8. **Найдите:**

1. произведение чисел (A) и (E);
2. разность чисел (C) и (D);
3. произведение разности чисел (C) и (B) на сумму чисел (A) и (E).

(A) двести пять; (B) пятьсот восемьдесят семь; (C) девятьсот тридцать четыре; (D) две тысячи семьдесят пять; (E) триста семь.

9. **Прочитайте и напишите** словами целые числа:

A) 732; B) 103; C) -900; D) 78; E) 2647; F) 3075; G) -4806.

10. В каких числах A) - G):

- семь десятков;
- восемь сотен;
- две тысячи;
- нет десятков.

11. Напишите числа:

- три тысячи один;
- двести тридцать пять;
- минус семьсот;
- восемь тысяч девятьсот пять;
- минус триста тридцать три.

12. Какие числа A) - G):

- двузначные;
- четырехзначные;
- однозначные;
- трехзначные.

13. Какие из чисел (A) – (D) делятся без остатка

1. на 2;
2. на 3;
3. на 5;

A) 1101; B) 3990; C) 705; D) 86014.

14. Найдите остаток

1. $735+15:3$;
2. $(8032-17\cdot4):8$

15. Напишите все простые числа больше шести, но меньше двадцати пяти.

16. Напишите самое простое двухзначное простое число.

17. Напишите самое маленькое простое трехзначное число.

18. Напишите: Почему 17 – это простое число;

Почему 18 – это четное число;

Почему 19 – это нечетное число.

19. Найдите остаток, если число 735 разделить на 12.

20. Почему число 37 нечётное?
Ответ: «Число 37 не чётное потому, что …»

21. Почему число 508 чётное?
Ответ: «Число 508 чётное потому, что …»

22. Почему число 70032 делится на три без остатка?
Ответ: «Число 70032 делится на 3, потому, что …»

23. Напишите все чётные числа больше 17 и меньше 25
24. Напишите чётное число, в котором восемь сотен пяти десятков и восьми единиц.
25. Почему число 23 простое?
Ответ: «Число 23 простое, потому, что …»
26. Почему число 28 составное?
Ответ: «Число 28 составное, потому, что …»
27. Напишите правильное продолжение утверждения
Варианты ответов:
A) Число 19320 делится **только** на 5, потому, что …
B) Число 19320 делится **только** на 2 и 5, потому, что …
C) Число 19320 делится на 2, 3 и 5, потому, что …
28. Напишите правильное продолжение утверждения:
Варианты ответов:
A) Число 19 простое, потому, что …
B) Число 19 составное, потому, что …
C) Число 19 не составное и не простое, только натуральное потому, что …
29. Напишите правильное продолжение утверждения:
Варианты ответов:
A) Число 193 простое, потому, что …
B) Число 193составное, потому, что …
C) Число 193 не составное и не простое, только натуральное потому, что …
30. Напишите правильный ответ до конца:
Варианты ответов:
A) Число 358 это чётное потому, что …
B) Число 358 это нечётное потому, что …
C) Число 358 это чётное и не нечётное число потому, что …
31. Напишите правильный ответ до конца:
Варианты ответов:
A) Число 11 простое, потому, что …
B) Число 11 составное, потому, что …
C) Число 11 не составное и не простое, **только** натуральное потому, что …
32. Напишите правильный ответ до конца:
Варианты ответов:
A) Число 195 простое, потому, что …
B) Число 195составное, потому, что …
C) Число 195 не составное и не простое, **только** натуральное потому, что …
33. Разложите на два любых множителя число 144.
34. Разложите на простые множители число 144.

35. Разложите на три любых множителя число 180.
36. Разложите на простые множители число 180.
37. Найдите:
38. НОК (28, 12);
39. НОК (12, 15);
40. НОК (28, 12, 15).
41. Найдите целую часть дроби:

А) $\frac{17}{5}$; Б) $\frac{175}{12}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $-\frac{37}{12}$.

42. Напишите неправильную дробь как смешанную дробь:

А) $\frac{57}{15}$; Б) $\frac{275}{121}$; В) $\frac{107}{15}$; Г) $-\frac{317}{12}$.

43. Напишите смешанную дробь как неправильную дробь:

А) $2\frac{7}{15}$; Б) $3\frac{75}{121}$; В) $1\frac{17}{25}$; Г) $-4\frac{1}{12}$.

47. Сократите дробь на целое число:

А) $\frac{50}{15}$; Б) $\frac{278}{111}$; В) $\frac{108}{15}$; Г) $-\frac{327}{12}$.

48. Выполните действия:

А) $\frac{17}{5}-\frac{1}{15}+\frac{2}{9}-\frac{27}{4}$; Б) $\frac{5}{12}+\frac{5}{18}-1$; В) $\frac{7}{25}+\frac{2}{15}+\frac{1}{10}$;

Г) $-2\frac{7}{12}+3\frac{1}{8}$; Д) $-2+\frac{3}{50}-1\frac{7}{20}$.

49. Вычислите:

А) $\frac{17}{5}:\frac{1}{15}+\frac{2}{9}$; Б) $\frac{1}{2}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{15}-1$; В) $\frac{7}{25}:\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{8}$.

50. Найдите целую часть дроби:

А) $\frac{17}{5}:\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{9}\right)\cdot 3$; Б) $\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{4}{15}-\left(1-\frac{3}{5}\right)$.

51. Напишите десятичную дробь:

A) одна тысяча триста пять целых и 27 сотых;
B) сто девять целых и три сотых;
C) восемьсот одна целая и восемь тысячных;
D) три целых и двадцать две десятых

52. Напишите дробь, у которой целая часть равна нулю, а дробная равна семи тысячным.
53. Напишите дробь, у которой целая часть равна нулю, а дробная равна семи сотым.
54. Напишите дробь, у которой целая часть равна нулю, а дробная равна семи десятым.

55. Напишите десятичную дробь, у которой дробная часть 37, а целая часть 875.

56. Напишите период дроби: 800,12727272… .

57. Вычислите сумму дробей: две целых, три сотых и восемь целых и три тысячных. Прочитайте эту дробь.

58. Вычислите произведение дробей: три целых, пять сотых и две целых и три десятых. Прочитайте эту дробь.

59. Какие десятичные дроби вы знаете?

60. Упростите выражение:

1) $\frac{3}{5}x^{-3}y^{5}\cdot\frac{5}{9}x^{4}y^{-7}$; 2) $0,2a^{12}b^{-9}\cdot 50a^{-10}b^{10}$; 3) $-0,3a^{10}b^{7}\cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $2x^{7}\cdot\left(-3x^{-2}y^{3}\right)^{3}$; 5) $\left(a^{2}b^{9}\right)^{-3}\cdot\left(-2a^{4}b^{10}\right)$.

61. Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $4mn^{2}p:\left(28m^{2}np^{6}\right)$; 2) $-30x^{5}y^{3}:\left(36x^{4}y^{8}\right)$; 3) $-63xy^{9}:\left(-72xy^{7}\right)$.

62. Вычислите:

А) $\left(\frac{1}{14}\right)^{-1}$; Б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$; В) $3^{2}\cdot 9^{-1}$; Г) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left((-2)^{-3}\right)^{-1}$;

Д) $(-0,7)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-0,25}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{-0,5}\cdot(0,1)^{-2}$.

63. Найдите результат отношения числаa к числу b, если:

1) $a=5,\ b=25$; 2) $a=121,\ b=11$; 3) $a=625,\ b=25$.

64. Результат отношения числаa к числу b равен c. Найдите член отношения a, если:

1) $c=5,\ b=25$; 2) $c=12,\ b=7$; 3) $c=3,\ b=25$.

65. Результат отношения числаa к числу b равен c. Найдите член отношения b, если:

1) $c=5,\ a=125$; 2) $c=12,\ a=1440$; 3) $c=3,\ a=252$.

66. Найдите неизвестный член пропорции:

А) $\frac{3x}{8}=\frac{27}{2}$; Б) $\frac{45}{9}=\frac{25}{2x+1}$; В) $\frac{7}{5x-2}=\frac{14}{52}$; Г) $2\frac{2}{3}:x=7,2$;

Д) $x:3\frac{1}{2}=4$; Е) $1,875=x:\frac{8}{15}$; Ж) $18,24:x=22,8$.

67. Решите пропорцию:

А) $\frac{31}{10}:\frac{93}{10}=x:\frac{7}{9}$; Б) $\frac{180}{8x}=\frac{75}{30}$; В) $\frac{16\cdot 21,25}{23-x}=\frac{17}{6}$;

С) $\frac{\left(6-\frac{9}{2}\right):0,003}{\left(\frac{61}{20}-2,65\right)\cdot 4:\frac{1}{5}}=\frac{x}{2}$.

68. Найдите:
А) 3% от числа 165; Б) 15% от числа 105; В) 3,2% от числа 16;

69. Найдите число, если
А) 45% его равны 200; Б) 140% его равны 182; В) 0,17% его равны 0,51.

70. Найдите процентное отношение чисел:
А) 2,5 к 50; Б) 0,75 к 1,2 ; В) 325 к 18.

2. Алгебраические выражения. Справочная информация.

2.1. Одночлены. Многочлены. Действия над одночленами и многочленами

1. Математическое выражение. Математическое выражение – это запись (формула), в которой используются числа, знаки действий, скобки, буквы и другие математические символы

Замечания:

1. Если математическое выражение состоит только из чисел, тогда оно называется *числовым выражением*. Например: $15\cdot 2\text{-}7+2^3$ – это числовое выражение.

2. Если в математическом выражении есть буквы, тогда это алгебраическое выражение. Например:

$$2x^3+3a-4 \qquad (1)$$

- это алгебраическое выражение; буквы x и a - это переменные. Если $x=1$, $a=2$, тогда: $2\cdot 1^3+3\cdot 2-4$ - это числовое выражение.

2. Одночлен. Алгебраическое выражение – одночлен – это произведение числа и натуральных степеней букв.

Пояснение. Например, $21a^2b^3$ - (читать: двадцать один «*а*» в квадрате «бэ» в кубе) это одночлен; $5a^{\frac{1}{2}}b^3$ - это не одночлен потому, что у буквы a дробная степень; $3a^2b^{-3}$ - это не одночлен потому, что у буквы b

отрицательная степень; $21+a^2b^3$ - это не одночлен потому, что это не произведение, а сумма.

Замечание:

1. Число в одночлене называется коэффициентом одночлена. Например, у одночлена $21a^2b^3$ коэффициент 21; a^2b^3 - это буквенное выражение.

2. Если первый множитель одночлена это число (коэффициент), а все другие множители – буквы, (которые не повторяются), то одночлен написан в стандартном виде. Например, $a^2\cdot 5\cdot b$ - этот одночлен написан не в стандартном виде – первый множитель a^2, а число (коэффициент) – второй множитель. Если этот одночлен написать так: $5a^2b$ или $5ba^2$, тогда он написан в стандартном виде.

Одночлен $21a^2\cdot b\cdot a^3$ написан не в стандартном виде потому, что буква*a* повторяется. Если этот многочлен написать так: $21ba^5$ или $21a^5b$, тогда он написан в стандартном виде.

3. Если два одночлена имеют одинаковые буквенные выражения (степени букв тоже одинаковые), тогда эти два одночлена называются подобными. Например, $8x^3a^2y^4$ и $3a^2x^3y^4$ - подобные одночлены потому, что у них буквенное выражение одинаковое $(x^3a^2y^4)$ и $(a^2x^3y^4)$, и степени каждой буквы одинаковые: у буквы a – степень 2; у буквы x – степень 3; у буквы y – степень 4.

Одночлены $3ax$ и $5a^2x$ - не подобные потому, что буквенное выражение одинаковое, но степени разные.

4. Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех букв. Например, степень одночлена $21a^2b^3$ равна: $2+3=5$.

5. Виды многочленов по степеням:
- многочлен первой степени: $5x+4y-9$;
- многочлен второй степени: $6a^2-7b+ab$;
- многочлен третьей степени: $2x^2y+y^3-5$; и т.д.

6. Многочлен степени n от переменной x:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n.$$

3. Многочлен. *Многочлен* – это сумма (разность) одночленов.

Пояснения.Например, $5x^4y^2+3x-2y^5$ (читать: пять «икс» в четвёртой степени «игрек» в квадрате «плюс» три «икс» «минус» два «игрек» в пятой степени) – это многочлен потому, что это сумма (разность) трёх одночленов: $5x^4y^2$, $3x$ и $2y^5$.

Замечания:

1. Если многочлен состоит из двух одночленов, то он называется двучленом. Например, $(3x-2y^5)$ - это двучлен.

2. Если многочлен состоит из трех одночленов, то он называется трёхчленом. Например, $(5x^4y^2+3x-2y^5)$ - это трёхчлен.

3. Многочлен написан в стандартном виде, если все одночлены многочлена написаны в стандартном виде.

4. Степень многочлена. *Степень многочлена* – это наибольшая (самая большая) из степеней одночленов, из которых состоит многочлен.

Пояснения. Чтобы найти степень многочлена $2a2^b-5a^4+3ab-7{,}2b^3a^2$ надо найти степени всех одночленов:

$$2a^2b \to 2+1=3$$
$$5a^4 \to 4$$
$$3ab \to 1+1=2$$
$$7{,}2b^3a^2 \to 3+2=5$$

Наибольшая степень одночлена: $\max(3;4;2;5)=5$ поэтому степень многочлена равна пяти.

5. Умножение одночлена на одночлен.

Чтобы умножить одночлен на одночлен надо:

1. умножить коэффициенты одночленов;
2. Написать одночлен в стандартном виде (смотрите замечание 2 к определению 2, в 4.1, стр. 45).

Пример 1. Умножьте одночлен $7a^3bx$ на одночлен $5ac^2$.

Решение. $\left(7a^3bx\right)\cdot\left(5ac^2\right)=(7\cdot5)\cdot\left(a^3\cdot a\right)\cdot b\cdot x\cdot c^2=35a^4bxc^2$.

Пример 2. Умножьте одночлен $\left(-m^3\cdot n^2\cdot a\right)$ на одночлен $\left(8an^3\right)$.

Решение. $\left(-m^3n^2a\right)\cdot\left(8an^3\right)=(-1\cdot8)\cdot\left(n^2\cdot n^3\right)\cdot(a\cdot a)\cdot m^3=-8n^5a^2m^3$.

6. ***Умножение многочлена на одночлен*** .

Чтобы умножить одночлен на многочлен надо:

1. одночлен умножить на каждый одночлен многочлена;
2. написать многочлен в стандартном виде.

Пример 3. Умножьте двучлен $\left(3a^2+4b^3\right)$ на одночлен $5ab$.

Решение.

$5ab\cdot\left(3a^2+4b^3\right)=5ab\cdot 3a^2+5ab\cdot 4b^3=(5\cdot 3)a\cdot\left(b\cdot b^3\right)=15a^3b+20ab^4$.

7. Подобные члены. Подобные члены – это одночлены, которые имеют одинаковое буквенное выражение.

Замечания. Буквенные выражения одинаковые, если у них:
1. одинаковые буквы (переменные);
2. буквы имеют одинаковые степени.

Пример 4. Какие одночлены – это подобные одночлены:
1) $5a^2b$; 2) $5ab$; 3) $-4a^2b$; 4) $5a^2$; 5) $3ba$.

Решение. Первый одночлен ($5a^2b$) имеет буквенное выражение $\left(a^2b\right)$. Второй одночлен – (ab). Буквы одинаковые, степени буквы a разные, поэтому – это не подобные одночлены. В третьем одночлене буквенное выражение - $\left(a^2b\right)$, поэтому первый и третий одночлены – это подобные одночлены. Подобными будут второй и пятый одночлены.

8. Умножение многочлена на многочлен. Чтобы умножить многочлен на многочлен надо:
1. каждый одночлен первого многочлена умножить на второй многочлен;
2. привести подобные числа.

Пример 5. Умножьте многочлен $\left(2a+3x^2\right)$ на многочлен $\left(5x^2-4a+3\right)$.

Решение.

$\left(2a+3x^2\right)\cdot\left(5x^2-4a+3\right)=2a\cdot\left(5x^2-4a+3\right)+3x^2\cdot\left(5x^2-4a+3\right)=$

$=10ax^2-8a^2+6a+15x^4-12x^2a+9x^2=-2x^2a-8a^2+6a+15x^4+9x^2$.

9. Приведение подобных одночленов. Привести подобные одночлены – это значит написать новый одночлен, у которого:
1. буквенное выражение такое же как у подобных одночленов;
2. коэффициент равен сумме коэффициентов подобных одночленов.

Пример 5. Приведите подобные члены:

$5x^2z-zx^2-3x^2z+2zx^2$.

Решение. Буквенное выражение у этих подобных членов - $\left(x^2z\right)$; у третьего – 2. Поэтому,

$$5x^2z - zx^2 - 3x^2z + 2zx^2 = \left(5 + (-1) + (-3) + 2\right)x^2z.$$

$$5x^2z - zx^2 - 3x^2z + 2zx^2 + 3x^2z$$

Пример 6. Раскройте скобки (2ab+b^2)+(3a^2-b^2+4ab)-(2a+b^2-ab).
Решение. (2ab+b^2)+(3a^2-b^2+4ab)-(2a+b^2-ab)=[Раскрываем скобки.Если перед скобками стоит знак «-», то знак каждого члена надо изменить на противоположный]= =2ab+b^2+3a^2-b^2+4ab-2a-b^2+ab=[Приводим подобные члены]=7ab-2a+3a^2-b^2.

10. **Разложение многочленов на множители.** Разложить многочлен на множители – это значит записать его как произведение одночленов и многочленов.

Пример 7. Разложите на множители $ab + ac$.
Решение. $ab + ac = a \cdot \left(b + c\right)$.

11. Способы разложения многочленов на множители:

1. Вынесение общего множителя за скобки.

а)

$$10x^2y + 20x^3y^2 + 5xy = \left[5xy - \textit{это общий множитель}\right] = 5xy(2x + 4x^2y + 1)$$

Общий множитель можно вынести за скобки.

б) $a(x-y) - b(y-x) = a(x-y) + b(x-y) = (x-y)(a+b)$.

2. Способ группировки.

а) $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = \left[\begin{array}{l}\textit{Группируем первый и второй члены, третий}\\ \textit{и четвертый члены}\end{array}\right] =$

$$= (x^3 - 3x^2) + (5x - 15) = x^2(x-3) + 5(x-3) = (x-3)(x^2+5).$$

б)

$$5y + 3x - 15 - xy = (5y - 15) - (xy - 3x) = 5(y-3) - x(y-3) = (y-3)(5-x).$$

3. Использование (применение) формул сокращенного умножения.

12. Формулы сокращенного умножения.

1.	Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$
2.	Квадрат суммы (полный квадрат)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3.	Квадрат разн ости (полный квадрат)	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4.	Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right)$
5.	Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right)$
6.	Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7.	Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

а) $(x+3)^2 - 16 = \left[\textit{Применяем формулу разности квадратов}\right] =$
$= (x+3-4)\cdot(x+3+4) = (x+7)\cdot(x-1).$

б) $6x^2 + 24xy + 24y^2 = \left[\textit{Выносим за скобки } 6\right] = 6(x2 + 4x + 4) =$
$= \left[\textit{Это формула квадрата суммы}\right] = 6(x+2)^2.$

Замечания:

1. Умножить число на 2 – это удвоить число.
   $2ab$ – *удвоенное произведение* чисел a и b.
2. Умножить число на 3 – это утроить число.
   $3ab$ – *утроенное произведение* чисел a и b.
3. Умножить на 4 – учетверить, на 5 – упятерить, на 10 – удесятерить и так далее.

2.2. Дробно - рациональные выражения, действия над ними

1. **Рациональная дробь.** Рациональная дробь (дробное рациональное выражение или алгебраическая дробь) – это дробь, числитель и знаменатель которой многочлены.

Замечания:

1. Рациональная дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow A = 0,\ B \neq 0;$$

2. Можно изменять знаки числителя и знаменателя рациональной дроби:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B},\ \text{например: } \frac{2x-3}{x-1}=\frac{3-2x}{1-x}=-\frac{3-2x}{x-1}=-\frac{2x-3}{1-x}.$$

3. Сложение (вычитание) рациональных дробей.
Чтобы выполнить действие сложения (вычитания) нескольких рациональных дробей надо:

1. разложить знаменатели дробей на множители;
2. записать наименьший общий множитель;
3. найти дополнительные множители для каждой дроби;
4. выполнить умножение числителей дробей на дополнительные множители;
5. записать результат.

Замечание. Умножение и деление рациональных дробей выполняется так же как умножение и деление обыкновенных дробей.

Пример 1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}\right):\frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}.$$

Решение.

1) $$\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}=\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}+$$

$$+\frac{3a-2}{3a^2-1}=\frac{(3a+2)\left(3a^2-1\right)-\left(18a^3-a-9\right)+(3a-2)\left(3a^2+1\right)}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}=$$

$$\frac{9a^3-3a+6a^2-2-18a^3+a+9a^3+3a-6a^2-2}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}=\frac{a+5}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)};$$

2) $$\frac{a+5}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}:\frac{a^2+10+25}{9a^4-1}=\frac{a+5}{(3a+1)\left(3a^2+1\right)}\cdot\frac{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}{(a+5)^2}=$$

$$=\frac{1}{a+5}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен коэффициент одночлена:

1.1. $a^5 \cdot 41 \cdot b^2 \cdot x^3$

Варианты ответов: A) 5; B) 2; C) 4; D) 41; E) 3.

1.2. $-a^3 x \cdot m^2$

Варианты ответов: A) 3; B) 1; C) 2; D) -1; E) 0.

1.3. $-6x^2 \cdot y \cdot b$

Варианты ответов: A) 6; B) 2; C) -6; D) 1; E) 0.

2. Чему равно буквенное выражение одночлена: $3ab^3x$

Варианты ответов: A) 3; B) ab^3; C) ab^3x; D) x; E) буквенного выражения нет.

3. Чему равна степень одночлена:

3.1. $a^5 \cdot 4 \cdot b^2 \cdot x^3$

Варианты ответов: A) 5; B) 10; C) 4; D) 2; E) 3.

3.2. a^3xm^2

Варианты ответов: A) 3; B) 2; C) 1; D) 6; E) 0.

3.3. $27ab^3x$

Варианты ответов: A) 5; B) 27; C) 3; D) 1; E) 0.

4. Напишите одночлен в стандартном виде:

4.1. $5a^2b^3a^3c$

Варианты ответов: A) $a^2b^3a^3c \cdot 5$; B) $5abc$; C) $5b^3ca^5$; D) a^5b^3c;

E) $5a^5$.

4.2. $b^2 \cdot 5 \cdot c \cdot b$

Варианты ответов: A) $5b^3c$; B) bc; C) 5; D) $5bc$; E) b^3c.

5. Определите, какие одночлены являются подобными.

5.1. 1) $a^3 \cdot b \cdot c^2$; 2) $-4a^3c^2$; 3) $8abc$; 4) a^3c^2.

Варианты ответов: A) все одночлены подобны; B) первый и третий; C) подобных нет; D) второй и четвертый; E) второй и третий.

6. Найдите степень многочлена:

5.1. $3x^2y + 4a^5 - 7a^3b^3 + 9b^4$

Варианты ответов: A) 3; B) 5; C) 4; D) 1; E) 6.

5.2. $-a^2x + ax^2 + 4a^3 - 5x^3$

Варианты ответов: A) 3; B) 2; C) 4; D) -5; E) это не многочлен.

7. Упростите выражение:

1) $(5x - 7y)(5x + 7y) + (7x - 5y)(7x + 5y)$;

2) $(x+4)^2 - (x-2)\ (x+2)$;

3) $\left(8a-3b\right)\left(8a+3b\right)-\left(6a-5b\right)^2$.

8. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{n-8}-\frac{n}{n^2-64}\right):\frac{8n}{n^2-16n+64}-\frac{2}{n+8}$

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right)$

3) $\frac{1}{3b-1}-\frac{27b^3-3b}{9b^2+1}\cdot\left(\frac{3b}{9b^2-6b+1}-\frac{1}{9b^2-1}\right)$

3. Функция. Уравнения. Неравенства. Справочная информация

3.1. Функция: основные понятия и их определения

1. **Функция** – это переменная величина (например, y), которая получается из другой переменной величины (например, x). Переменная величина y получается из переменной величины x с помощью математических операций (действий) f:

$$x \xrightarrow{f} y \text{ или } y=f\left(x\right).$$

Читать: $y=f\left(x\right)$ - «игрек» равно (равен) «эф» от «икс». $y=f\left(x\right)$ - эта *формула* показывает, что задана функция. Например, $y=2x^3-1$, функция задана формулой: «игрек» равно два «икс» в кубе минус один; $y=x^2-5x^4$ - функция задана формулой: «игрек» равно «икс» в квадрате минус пять икс в четвёртой степени.

Задать функцию – это значит определить способ вычисления значений переменной величины y (функции). Если функция задана формулой $y=f\left(x\right)$, то значение функции, например, в точке $x=a$ записывается так: $y\big|_{x=a}=f\left(a\right)$.

2. **Переменная величина**x называется *независимой переменной* или *аргументом*; переменная величина y называется*зависимой переменной* или *функцией*.

3. **Координаты точки**P на координатной плоскости – это два числа, например x_P и y_P: положительные, отрицательные или ноль. Если P

- это имя точки, числа x_p и y_p - это координаты точки *P*, то писать будем так: $P\left(x_p; y_p\right)$.

4. **Абсцисса и ордината**. Положение точки $P(x; y)$ на координатной плоскости определяется двумя координатами (числами) *x* и *y*. Координата *x* называется *абсциссой точки P*, координата *y* называется *ординатой точкиP*.

Алгоритм (правило) 1. *Изображение точки* $P\left(x_p; y_p\right)$ *в прямоугольной системе координат.*

Чтобы нарисовать точку $P\left(x_p; y_p\right)$ в прямоугольной системе координат надо:

1. на оси абсцисс (ось *OX*) нарисовать точку $A\left(x_p\right)$;
2. на оси ординат (ось *OY*) нарисовать точку $B\left(y_p\right)$;
3. из точки *A* нарисовать перпендикуляр к оси абсцисс (ось *OX*);
4. из точки *B* нарисовать перпендикуляр к оси ординат (ось *OY*);
5. точка пересечения этих перпендикуляров – это точка $P\left(x_p; y_p\right)$.

5. *Таблица функции* – это значения аргумента $x_1, x_2, ... x_n$ и значения функции $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ... y_n = f(x_n)$, которые написаны так: первая строка таблицы это - значения аргумента x, вторая строка это - значения функции:

Таблица 1.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Если у функции $y = f(x)$ есть таблица, то будет говорить, что функция задана таблично или таблицей.

Пример. Функция f задана таким образом: $f(x) = x + 7$, если $x \le -1$, и $f(x) = 2$,если $x > 1$. Найдите значения функции f, соответствующие аргументам: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

Решение. 1) Так как $-2 \le -1$, то значение функции вычисляется по формуле $f(x) = x + 7$. Следовательно, $f(-2) = -2 + 7 = 5$.

2) Так как $-1 \le -1$, то $f(-1) = -1 + 7 = 6$.

3) Так как $1 > -1$, то $f(1) = 2$.

Заметим, что для задания данной функции используют форму записи с помощью фигурной скобки:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & \text{если } x \le -1, \\ 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Пример. Функции заданы формулами $y = 4x + 1$ и $y = 2x - 7$. При каком значении аргумента эти функции принимают равные значения?

Решение.Чтобы найти искомое значение аргумента, решим уравнение $4x + 1 = 2x - 7$.

Имеем: $4x - 2x = -7 - 1$; $\Rightarrow x = -4$. **Ответ.** $x = -4$

Пример. Функция задана формулой $y = f(x)$. Что надо сделать, чтобы узнать: точка $A(a_1; a_2)$ находится (принадлежит) на графику этой функция или нет?

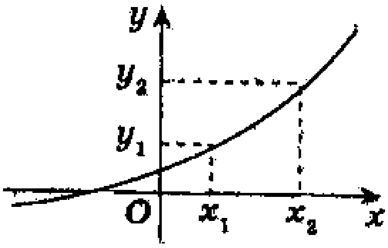
Ответ. Надо подставить координаты точки A в формулу $y = f(x)$, тогда если $a_2 = f(a_1)$ - точкаAнаходится (принадлежит) на графике этой функции; если $a_2 \ne f(a_1)$ - точки A не принадлежат графику функции.

Пример. Функция задана формулой $y = 5x + 2$. Найдите значения аргумента, при котором значение функции равно 12.

Решение. Подставим в формулу $y = 5x + 2$вместоy число 12, получаем уравнение $5x + 2 = 12$, откуда $x = 2$. **Ответ:** 2.

6. Функция называется **возрастающей** на интервале $x \in (x_1; x_2)$, если на этом интервале аргумент x увеличивается $(x_2 > x_1)$ и значения функции $y = f(x)$ увеличиваются$(f(x_2) > f(x_1))$. Если аргумент увеличивается $(x_2 > x_1)$, а значения функция уменьшаются $(f(x_2) < f(x_1))$, то функция называется *убывающей*.

Пояснения. На рисунке 1, изображён график возрастающей функции $y = f(x)$, а на рисунке 2 график убывающей функции.



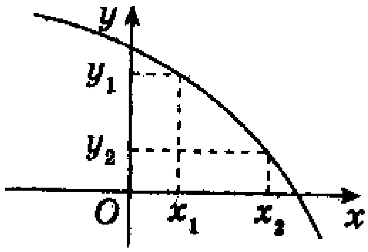


Рис.1 Рис. 2

7. **Нули функции** $y = f(x)$ - это значения аргумента x, при которых значение функции равно нулю: $y = 0$. Геометрически – это точки, в которых график функции $y = f(x)$ пересекает координатную ось OX (ось абсцисс).

Замечания:

1. Если график функции $y = f(x)$ пересекает координатную ось OX (ось абсцисс), то значение функции в этой точке равно нулю:
$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \qquad (1)$$
2. Если график функции $\mathrm{y = f(x)}$ пересекает координатную ось OY (ось ординат), то значение аргумента в этой точке равно нулю:
$$y = 0 \Rightarrow y = f(0) \qquad (2)$$

8. **Знакопостоянная функция.**Если на интервале $(a,\ b)$ функция не изменяет знака, то есть функция только больше нуля $(y > 0)$ или только меньше нуля $(y < 0)$, то на этом интервале *функция знакопостоянна*(имеет постоянный знак).

9. **Значение аргумента и значение функции.** Если аргумент x функции $f(x)$ равен числу a: $x = a$, то числоa называется значением аргумента. Число $f(a)$ - называется значением функции в точке $x = a$.

Пример 1. Найдите значение функции $y = 3x^2 + 1$, если значение аргумента $x = -2$.

Решение. Подставим в формулу $y = 3x^2 + 1$ значение аргумента $x = -2$: $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 1 = 13$.

10. **Область определения функции** $y = f(x)$ - это множество всех значений аргумента x (независимой переменной), для которых функция определена. Область определения функции обозначается так: $D(y)$ или $D(f)$.

Пример. Напишите ООФ:

А) $y = x^2 + 1$; В) $y = \dfrac{4x}{x-2}$; С) $y = \sqrt{x-3}$

Решение.

А) $D(f) = R$ - все действительные числа или можно написать так: $x \in (-\infty;\infty)$;

В) $D(f): \left[\begin{array}{l} x \notin R; \\ x \neq 2; \end{array}\right.$ - все действительные числа кроме числа 2. Ответ можно написать так: $x \in (-\infty;2) \cup (2;\infty)$;

С) $D(f): x \geq 3$ или $D(f): x \geq 3$.

11. **Область значений функции** $y = f(x)$ - это множество всех значений y (зависимой переменной). ОЗФ $y = f(x)$ обозначается так: $E(y)$ или $E(f)$.

3.2. Линейная функция

1. ***Линейная функция.*** Функция называется *линейной*, если она определяется формулой: $y = kx + b$, (1)

где x - аргумент; k и b - коэффициенты (числа).

Замечания:

1. Коэффициент k - это угловой коэффициент; коэффициент b - это свободный член.

2. Область определения линейной функции:

$$D(y): x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$D(y)$ линейной функции определяется формулой (2) потому, что значение функции y можно вычислить при любом значении аргумента x.

2. График линейной функции. *График линейной функции* (1) – это всегда прямая линия (см. рис. 1).

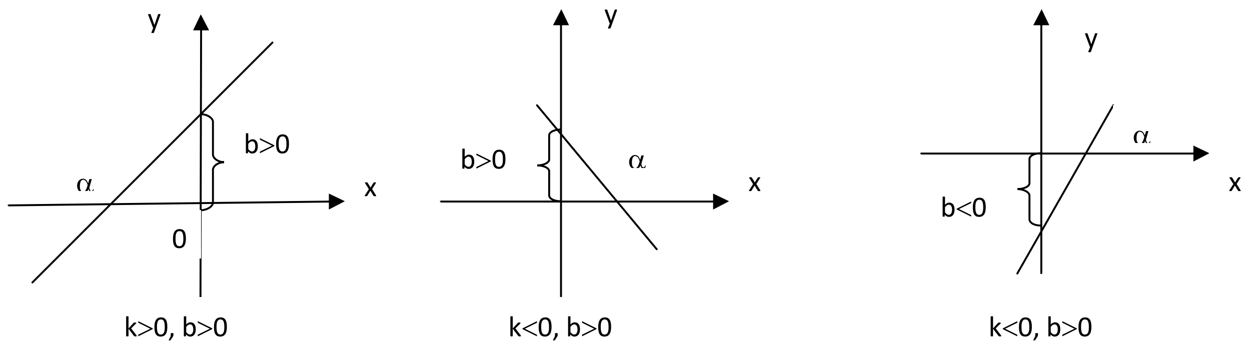


Рис.1

Замечания:

1. α называется углом наклона прямой линии.

2. Через две точки можно провести (нарисовать) только одну прямую линию.

Алгоритм 1. ***Построение графика линейной функции*** $y = kx + b$.

Чтобы нарисовать график линейной функции $y = kx + b$ надо:

1. Вычислить значение функции в точке $x = x_1$:

$$y_1 = f\left(x_1\right) = kx_1 + b$$

Точка $A\left(x_1; y_1\right)$ - это точка на графике функции.

2. Вычислить значение функции в точке $x = x_2$:

$$y_2 = f\left(x_2\right) = kx_2 + b$$

Точка $B\left(x_2; y_2\right)$ - это точка на графике функции.

3. График функции $y = kx + b$ проходит через две точки*A* и *B*.

Нарисовать точки*A* и *B* на координатной плоскости.

4. Провести прямую через эти две точки.

Пример. Нарисуйте график функции $y = 3x - 4$.
Решение.

1. Вычислим значение функции в точке $x=1$:
$y_1 = f(1) = 3\cdot 1 - 4 = -1$.

Первая точка*A* имеет координаты (1; -1).

2. Вычислим значение функции в точке $x=3$:
$y_2 = f(3) = 3\cdot 3 - 4 = 5$.

Вторая точка*B* имеет координаты (3; 5).

3. Нарисуем точки*A* и *B* (см. рис. 1а).
4. Проведем прямую через точки*A* и *B*.

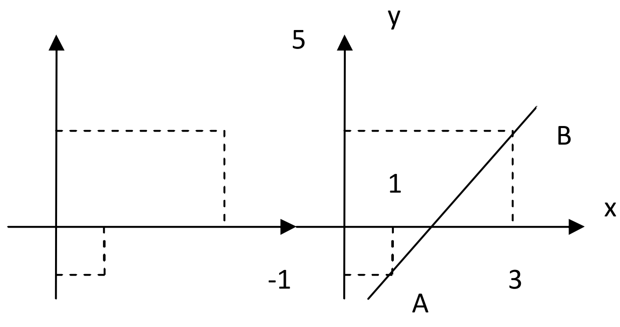


Рис. 1а Рис. 1б

Алгоритм 2. ***Определение координат точки пересечения прямой линии с осью OX.***
Чтобы найти координаты точки $A(x_A; y_A)$ - пересечения графика прямой линии

$$y = kx + b \tag{4}$$

с осью *OX*, надо:

1. подставить (написать) $y=0$ в форуме (4):

$$kx + b = 0; \tag{5}$$

2. найти неизвестную величину *x*:

$$x = -\frac{b}{k}; \tag{6}$$

3.написать результат:

$$A\left(-\frac{b}{k}; 0\right). \tag{7}$$

Пример. Найдите координаты точки пересечения прямой линии $y = 8x - 16$ с осью *OX*.

Решение. $y = 0 \Rightarrow 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{8} = 2$.

Ответ: (2; 0).

Алгоритм 3. ***Определение координат точки пересечения прямой линии с осью OY***.

Чтобы найти координаты точки $B(x_B;y_B)$ - пересечение графика прямой линии (4) с осью OY надо:

1. в формуле (4) подставить *x=0*:

$$y = k \cdot 0 + b$$

2. записать результат: $B(0;b)$.

Замечания:

1. Если точка $A(x_A;y_A)$ - это точки пересечения с осью *OX*, тогда $y_A = 0$, то есть: $A(x_A;0)$.
2. Если точка $B(x_B;y_B)$ - это точка пересечения с осью *OY*, тогда $x_B = 0$, то есть: $B(0;y_B)$.

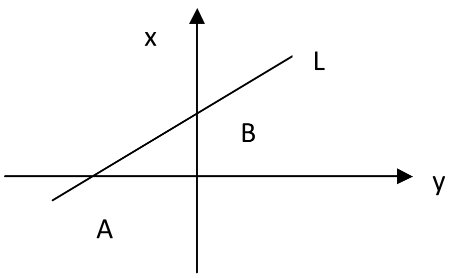


Рис. 2

Пример. Найдите координаты точки пересечения прямой линии $y = 8x - 16$ с осью OY.

Решение. $x = 0 \Rightarrow y = 8 \cdot 0 - 16 = 16$.

Ответ: (0; 16)

3.3. Квадратичная функция

1. Аналитическое определение квадратичной функции.Квадратичная функция – это функция, которая определяется формулой:

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

где x – аргумент; a, b, c – параметры (постоянные числа) или коэффициенты квадратичной функции. Формула (1) – это стандартная форма записи квадратичной функции.

Пример1. Запишите квадратичную функцию в стандартном виде:

А) $y=-5+3x^2-x$; В) $y=-2+x(x-3)$

Ответ: А) $y=3x^2-x-5$; В) $y=x^2-3x-2$

Пример 2. Запишите в стандартном виде и найдите параметры квадратичной функции:

А) $2-x-3x^2$; В) $y=-1+x^2$

Ответы: А) $a=-3$; $b=-1$; $c=2$; В) $a=1$; $b=0$; $c=-1$.

2. Парабола. График квадратичной функции (1) – это линия, которая называется параболой.

1. Если a>0, то ветви параболы направлены вверх, еслиa<0 – вниз.
2. ТочкиA и B – это точки пересечения параболы с осью OX (осью абсцисс).
3. Точки С – это точка пересечения параболы с осью OY (ось ординат).
4. Область определения $D(y)$ квадратичной функции – все действительные числа: $x\in R$ или $x\in(-\infty;\infty)$.
5. Область значений $E(y)$ квадратичной функции:
   - еслиa>0, то $y\in\left[-\dfrac{b^2-4ac}{4a};\infty\right)$;
   - еслиa<0, то $y\in\left(-\infty;-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right]$
6. Если значения аргумента x увеличиваются от $(-\infty)$ до $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ (точка S), то значения функции уменьшаются от$(+\infty)$ до $\left(-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

   Будем говорить, что от $(-\infty)$ до $\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ квадратичная функция – убывающая. Обозначается так: $(\searrow)$.

7. Если значения аргумента x увеличиваются от $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ до $(+\infty)$, то значения функции увеличиваются от $\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ до $(+\infty)$. Будем говорить, что от $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ до $(+\infty)$ квадратичная функция – возрастающая. Обозначается так: $(\nearrow)$.

8. Если $a>0$ и $x=-\frac{b}{2a}$, тогда $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (точки D). Если $x\neq-\frac{b}{2a}$, тогда $y>-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Значение $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ - самое маленькое значение функции. Будем говорить, что точки D – это точка минимума квадратичной функции; $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ - это минимальное значение функции. Обозначать будем так: $x_{\min}=-\frac{b}{2a}$, $y_{\min}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ($a>0$).

9. Еслиa<0 и $x=-\frac{b}{2a}$, тогда $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (точка M). Если $x\neq-\frac{b}{2a}$, тогда $y<-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Значение $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ - самое большое значение функции. Будем говорить, что точка M – это точка максимума; $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ - это максимальное значение функции. Обозначать будем так:

$$x_{\min}=-\frac{b}{2a},\ y_{\min}=-\frac{b^2-4ac}{4a}\quad (a<0\ ).$$

3.4. Линейные уравнения

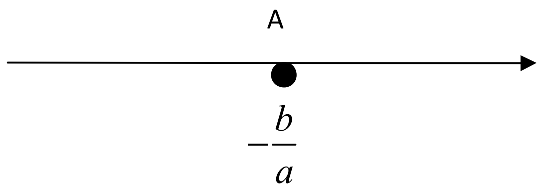
1. Линейное уравнение. *Линейное уравнение* – это равенство:

$$ax+b=0, \tag{1}$$

в котором x – это неизвестная величина, $a \neq 0$ и b – это параметры (коэффициенты) уравнения.

Замечания:

1. В линейном уравнении неизвестная величина имеет первую степень, то есть: $ax^1 + b = 0$. Например, уравнение $2x - 8 = 0$ - это линейное, а $2x^2 - 8 = 0$ - это нелинейное уравнение, потому что неизвестная величина x имеет вторую степень – x^2.
2. Формула (1) – это стандартная форма записи линейного уравнения. Например, уравнение $2x - 6 = 2$ - это линейное уравнение, которое написано в нестандартной форме. Если это уравнение написать так: $2x - 6 = 2 \Rightarrow 2x - 8 = 0$,то это уравнение написано в стандартной форме.
3. Решить уравнение – это значит найти числовое значение неизвестной величины.
4. Решение линейного уравнения (1) можно найти по формуле:
$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b - b = -b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a}. \qquad (2)$$
5. Геометрическое решение линейного уравнения - это точки на числовой оси.



Точка А – это изображение решения уравнения (1).

Пример 1. Найдите решение уравнения:

$2(x-1) + 3 = -x - 5$

Решение. Напишем уравнение в стандартном виде (1):

$2(x-1) + 3 = -x - 5 \Rightarrow 2x - 2 + 3 = -x - 5 \Rightarrow$

$$2x + x + 1 + 5 = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3; \\ b = 6. \end{array}\right.$$

Используем формулу (2):

$$x = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

3.3. Квадратные уравнения

1. Квадратное уравнение. *Квадратное уравнение* – это равенство:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

в котором x – это неизвестная величина; a, b, c – это параметры уравнения и $a \neq 0$.

Замечания:

1. Формула (1) – это стандартный вид квадратного уравнения. Например, уравнение $2x^2 - 3x = -2$ - квадратное, но записано не в стандартном виде; $2x^2 - 3x + 2 = 0$ - это стандартный вид квадратного уравнения.
2. Если разделить левую и правую части уравнения (1) на параметры a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\Big|\cdot\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow,$$

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (2)$$

$$p = \frac{b}{a},\ q = \frac{c}{a}, \qquad (3)$$

то квадратное уравнение (2) называется *приведенным*.

12. **Дискриминант квадратичного уравнения.** *Дискриминант* – это характеристика квадратичного уравнения, которая для уравнения (1) определяется формулой:

$$D = b^2 - 4ac, \qquad (4)$$

а для приведенного уравнения (2) формулой

$$D = p^2 - 4q. \qquad (5)$$

Замечание. Дискриминант квадратного уравнения может быть положительным ($D > 0$), отрицательным ($D < 0$) и равным нулю ($D = 0$).

13. **Формула для корней квадратного уравнения.** *Решение (корни) квадратного уравнения* (1) можно найти с помощью формулы:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \qquad (6)$$

где D – дискриминант уравнения (1) (формула (4)).

Замечания:

1. Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет два разных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \qquad (7)$$

2. Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет два одинаковых корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}. \qquad (8)$$

В этом случае (D = 0) будем говорить, что уравнение имеет один корень.

3. Если $D < 0$, то у уравнения (1) нет корней.
4. Если квадратное уравнение приведенное (формула(2)), то формулу для корней можно написать так:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \tag{9}$$

где D – дискриминант уравнения (формула (5)).

Пример. Решите квадратное уравнение: $-4x^2 + 8x = 3$

Решение. Напишем уравнение в стандартном виде (1) и найдем параметры этого уравнения:

$-4x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow a = -4;\ b = 8;\ c = -3.$

Найдем дискриминант уравнения (формула (4)):

$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3) = 64 - 48 = 16 > 0$.

Уравнение имеет два разных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-8 \pm 4}{-8} = \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-8+4}{-8} = \dfrac{-4}{-8} = \dfrac{1}{2}; \\ x2 = \dfrac{-8-4}{-8} = \dfrac{-12}{-8} = \dfrac{3}{2}. \end{array} \right.$$

Теорема 1. Если квадратное уравнение (1) имеет два корня x_1 и x_2, то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{10}$$

Замечания:

1. Если квадратное уравнение приведенное (формула (2)), то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \tag{11}$$

2. Теорема 1 называется теоремой Виетта.

Пример. Напишите приведенное квадратное уравнение, если его корни известны: $x_1 = -3;\ x_2 = 4$.

Решение. Надо написать уравнение: $x^2 + px + q = 0$, параметры p и q - неизвестны. Используем теорему Виета (формула (11)):

$$\begin{cases} -3+4=-p \\ -3\cdot 4=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1, \\ q=-12. \end{cases}$$

Ответ: $x^2-x-12=0\sqrt{b^2-4ac}$.

Проверим результат – найдем корни этого уравнения (формулы (5) и (9)):

$$D=(-1)^2-4\cdot(-12)=49;\ x1,2=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\left[\begin{array}{l} x_1=-3; \\ x_2=4, \end{array}\right.$$

3.6. Системы уравнений

1. Уравнение с двумя неизвестными. *Уравнение с двумя неизвестными* – это уравнение, которое в общем виде записывается так: $f(x,y)=0$, где x и y - неизвестные величины.

Замечания:

1. *Решением уравнения с двумя неизвестными* является пара чисел: $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, $\mathrm{y}=\mathrm{b}$. Если числа a и b - это решение уравнения (1), то должно иметь место тождество:

$$f(a,b)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0.$$

Записывать решение уравнения (1) будем так: (a,b).

2. Общий вид линейного уравнения с двумя неизвестными имеет вид:

$$Ax+By+C=0\ , \qquad (1)$$

где A,B и C - это коэффициенты уравнения. Линейное уравнение с двумя неизвестными (1) имеет бесконечно много решений.

Пример. Найдите решение уравнения: $15\mathrm{x}+3\mathrm{y}=9$.

Решение. Выразим неизвестную y через x:

$15x+3y=9 \Rightarrow y=3-5x$.

Зададим произвольное значение величины x. Например, $\mathrm{x}=1$. Подставим это значение x в последнее равенство и найдём y: $\mathrm{y}=3-5\cdot 1=-2$.

Решение уравнения: $(1;-2)$.

1. Система двух уравнений с двумя неизвестными.

Система двух уравнений с двумя неизвестными – это два уравнения $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$ и $\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$, которые объединены вместе с помощью фигурной скобки и в общем виде эта система записывается так:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases} \qquad (2)$$

где x и y - неизвестные величины.

Замечания:

1. Решением системы (2) являются общие решения двух уравнений. Если общих решений нет, то система не имеет решения.
2. Если оба уравнения в системе (2) линейные, то система называется линейной и записывается так:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1, \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2. \end{cases} \quad (3)$$

3. Линейная система (3) всегда имеет единственное решение, если выполняется условие:

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Алгоритм 1. *Решение системы уравнений (3) методом подстановки*
Если система (3) имеет решение, то, чтобы это решение найти, надо:
1. выбрать одно уравнение и выразить одну неизвестную величину через другую; например, из первого уравнения выразим переменную x через y:

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \;\Rightarrow\; x = \frac{-a_{12} \cdot y + b_1}{a_{11}}.$$

2. подставить полученное выражение для x во второе уравнение.

3.7. Линейные неравенства

1. Линейное неравенство. *Линейное неравенство* – это неравенства, которые в стандартном виде записываются так:

$$ax + b > 0, \quad (3)$$

$$ax + b < 0, \quad (4)$$

$$ax + b \geq 0, \quad (5)$$

$$ax + b \leq 0. \quad (6)$$

a и b - это параметры; x – неизвестная величина. (3) и (4) – это строгие линейные неравенства; (5) и (6) – это нестрогие линейные неравенства.

Замечания.

1. Решение линейного неравенства – это множество значений неизвестной величины.
2. Еслиa> 0, то решение неравенства (3) можно написать так:

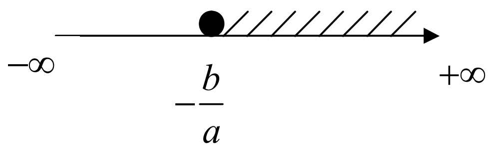
$$ax + b > 0 \Rightarrow ax + b - b > 0 - b \Rightarrow ax > -b \Rightarrow \frac{ax}{a} > \frac{-b}{a} \Rightarrow x > -\frac{b}{a}. \quad (7)$$

Точка $x = -\frac{b}{a}$ - не принадлежит решению неравенства.

Пример. Решите неравенство: $3x + 9 > 0$.

Решение. $3x + 9 > 0 \Rightarrow 3x > -9 \Rightarrow x > -\frac{9}{3} \Rightarrow x > -3$.

3. Геометрически решение линейного неравенства (3) – это часть числовой оси.



● - это символ – точка $\left(-\frac{b}{a}\right)$ не принадлежит решению. Формулу (7) можно написать так:

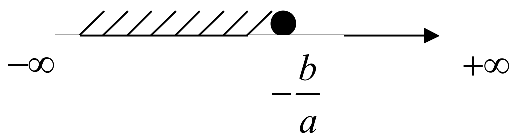
$x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{b}{a};\infty\right)$

4. Еслиa<0, то решение неравенства (3) можно написать так:

$$ax+b>0 \Rightarrow ax+b-b>-b \Rightarrow ax>-b \Rightarrow \frac{ax}{a}<\frac{-b}{a} \Rightarrow x<-\frac{b}{a}. \qquad (8)$$

Знак неравенства надо изменить, еслиa<0.

$x<-\frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$



3.8. Квадратные неравенства

1. Стандартный вид квадратного неравенства

В стандартном виде (форме) квадратное неравенство записывается так:

$$\left[\begin{array}{ll} ax^2+bx+c>0, & (1) \\ ax^2+bx+c\geq 0, & (2) \\ ax^2+bx+c<0, & (3) \\ ax^2+bx+c\leq 0. & (4) \end{array}\right.$$

a, b, c – параметры; x – неизвестная величина; (1) и (3) – строгие неравенства; (2) и (4) – нестрогие неравенства.

Замечания

1. Решение неравенств (1) – (4) удобно находить с помощью графика («графически») квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$.

2. Напомним, что график квадратичной функции – это парабола;

если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх;

если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз;

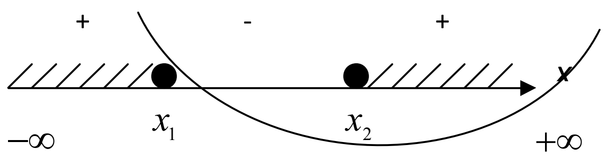
если $D>0$, то парабола пересекает ось OX в двух точках с абсциссами $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$;

если $D<0$, то парабола не пересекает ось OX;

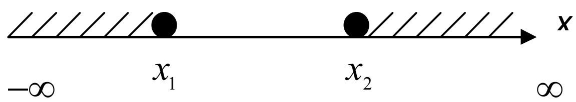
если $D=0$, то парабола касается оси OX в точке с абсциссой $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

1. Графическое решение неравенств (1) – (4).

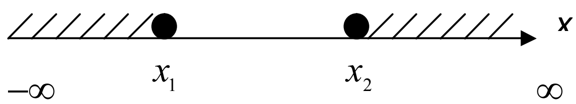
I. $a>0,\ D>0$



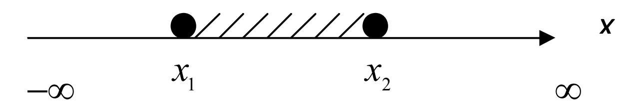
(1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$



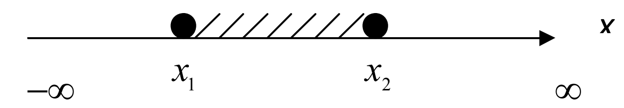
(2) $ax^2+bx+c\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$



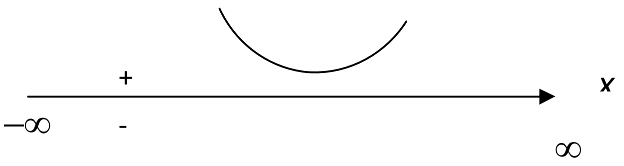
(3) $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(x_1;x_2)$



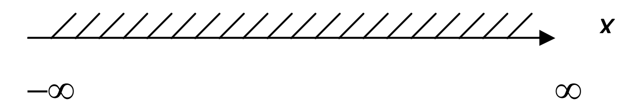
(4) $ax^2+bx+c\le 0 \Rightarrow x\in[x_1;x_2]$



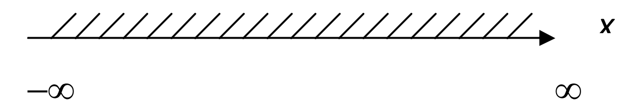
II. $a>0,\ D<0$



(1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x\in(-\infty;\infty)$ или $x\in R$



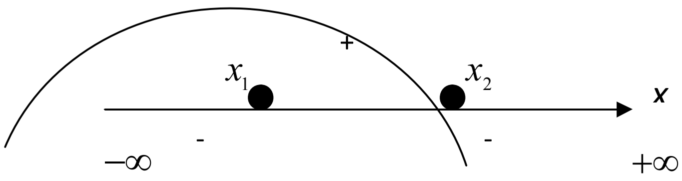
(2) $ax^2+bx+c\ge 0 \Rightarrow x\in(-\infty;\infty)$ или $x\in R$



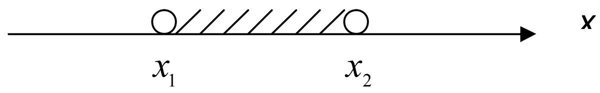
(3) $ax^2+bx+c<0,\ x\in\varnothing$ - решения нет.

(4) $ax^2+bx+c\le 0,\ x\in\varnothing$ - решения нет.

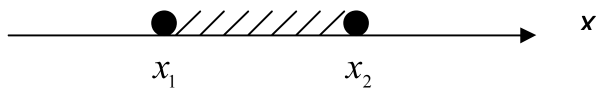
III. $a<0,\ D>0$



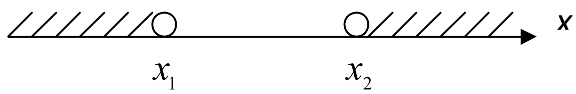
(1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x\in(x_1;x_2)$



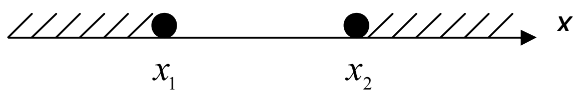
(2) $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow x\in[x_1;x_2]$



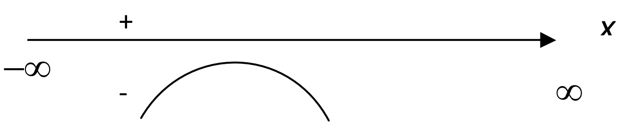
(3) $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$



(4) $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$



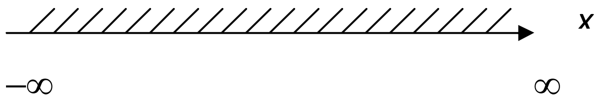
IV. $a<0$, $D<0$



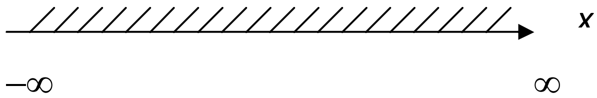
(1) $ax^2+bx+c>0$, $x\in\varnothing$ - решения нет.

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$, $x\in\varnothing$ - решения нет.

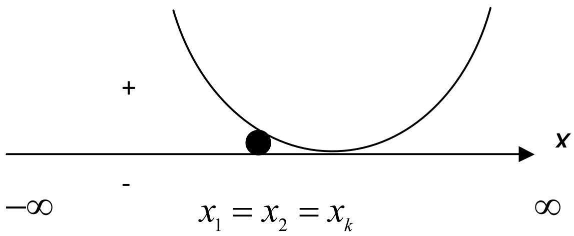
(3) $ax^2+bx+c<0$, $x\in R$



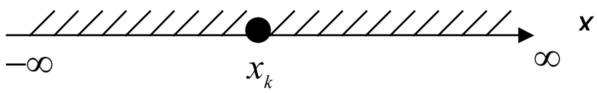
(4) $ax^2 + bx + c \le 0$, $x \in R$



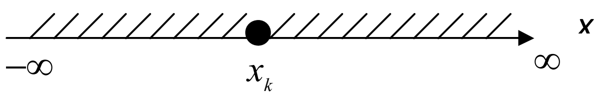
V. $a > 0$, $D = 0$



(1) $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_k) \cup (x_k; \infty)$

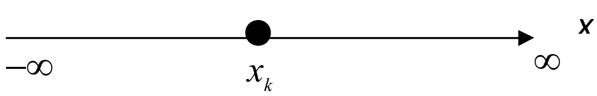


(2) $ax^2 + bx + c \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \infty)$

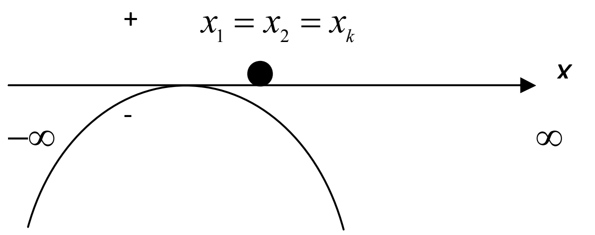


(3) $ax^2 + bx + c < 0$, $x \notin \varnothing$

(4) $ax^2 + bx + c \le 0$, $x = x_k$

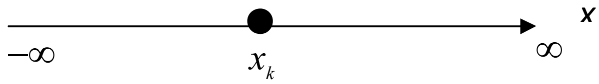


VI. $a < 0$, $D = 0$

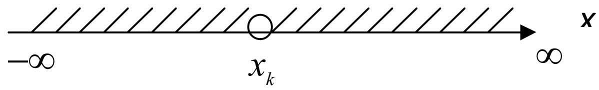


(1) $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \notin \varnothing$

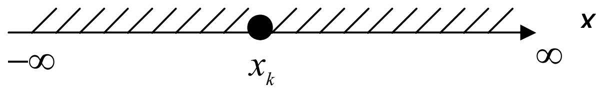
(2) $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x = x_k$



(3) $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; x_k\right) \cup \left(x_k; \infty\right)$



(4) $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; \infty\right)$



Пример. Решите неравенство: $-2x^2 + 5x + 2 \leq 0$

Решение. Найдем параметры и вычислим дискриминант (формула (4), занятие 24):

$$a = -2;\ b = 5;\ c = 2;$$

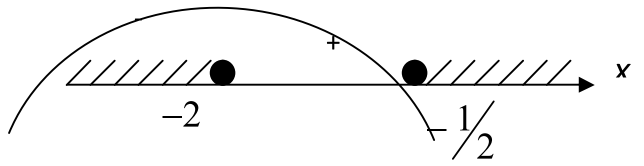
$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot \left(-2\right) \cdot 2 = 9$$

$$a < 0,\ D > 0 \text{ - смотрите III.}$$

Ветви параболы $y = -2x^2 + 5x + 2$ направлены вниз, и она пересекает ось OX в точках:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm 3}{-4} = \left[\begin{array}{l} x_1 = -2; \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ можно написать, используя вариант III, уравнение (4):



$x \in (-\infty;-2] \cup \left[-\frac{1}{2};\infty\right)$

Пример. Решите неравенство: $-x^2+3x-10 \le 0$.

Решение.Рассмотрим функцию $y=-x^2+3x-10$, $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Графиком данной функции является парабола, ветки которой направлены вниз. Найдем нули функции:

$-x^2+3x-10=0$; $x^2-3x+10=0$. $D=(-3)2-4\cdot 1\cdot 10=-40<0$.

Следовательно, функция $y=-x^2+3x-10$ нулей не имеет. Данная функция имеет отрицательные значения на всей числовой прямой. Следовательно, $-x^2+3x-10 \le 0$, если $x \in (-\infty;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;+\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $x^2>4$.

Решение: $x^2-4>0$.

Рассмотрим функцию $y=x^2-4$, $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Графиком данной функции является парабола, ветки которой направлены вверх. Найдем нули функции: $x^2-4=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Следовательно, $x^2-4>0$, если $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

3.9. Системы неравенств

1. **Системы линейных неравенств.** *Системы линейных неравенств* – это системы вида:

$$\begin{cases} a_1x>b_1, \\ a_2x>b_2, \end{cases} \begin{cases} a_1x>b_1, \\ a_2x<b_2, \end{cases} \begin{cases} a_1x<b_1, \\ a_2x<b_2, \end{cases} \begin{cases} a_1x<b_1, \\ a_2x<b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Замечания:

1. Системы неравенств (1) – это системы с одной неизвестной x.

2. Системы неравенств (1) – это строгие неравенства. На месте знаков > и < могут быть знаки ≥ и ≤. Тогда неравенства будут нестрогие.
3. Чтобы решить систему неравенств (1) надо:
   - решить каждое неравенство;
   - на одной числовой оси нарисовать их решения;
   - найти общее решение.
4. Общее решение системы – это часть числовой оси, где решения неравенств пересекаются («штриховки пересекаются»).

Пример. Найдите решение системы неравенств:

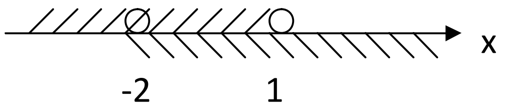
$$\begin{cases} 5x-4<x, \\ -2x-3<1. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое неравенство:

$5x-4<x \Rightarrow 4x<4 \Rightarrow x<1,$

$-2x-3<1 \Rightarrow -2x<4 \Rightarrow x>-2.$

Нарисуем эти решения на одной числовой оси:



«Штриховки пересекаются», когда $\begin{cases} x<1, \\ x>-2 \end{cases}$ - это общее решение. Можно написать его так: $x \in (-2;1)$, или так $-2<x<1$.

Алгоритм 1. ***Решение неравенств вида*** $f(x)\cdot g(x)>0$.

Чтобы решить неравенство

$$f(x)\cdot g(x)>0 \tag{2}$$

надо:

1. Заменить его системами неравенств:

$$f(x)\cdot g(x)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0; \end{cases} \end{array}\right. \tag{3}$$

2. Решить каждую систему;
3. Объединить их решения.

Пример. Решите неравенство: $(2x-5)(4-x)>0$.

Решение. Заменим неравенство системами неравенств и решим их:

$$\begin{cases} 2x-5>0, \\ 4-x>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>5, \\ -x<-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>25, \\ x<4, \end{cases} \Rightarrow x>4$$

$$\begin{cases} 2x-5<0, \\ 4-x<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<5, \\ -x<-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2,5, \\ x>4. \end{cases} \Rightarrow x \notin \varnothing$$

$$\left[\begin{array}{l} x>4, \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \Rightarrow x>4.$$

2. **Двойное неравенство.** *Двойное неравенство* – это неравенство вида:

$$f(x)<g(x)<h(x). \tag{4}$$

Алгоритм 2. ***Решение двойных неравенств*** (4).

Чтобы решить неравенство (4), надо:

1. Заменить его системой неравенств:

$$\begin{cases} g(x)<h(x), \\ g(x)>f(x). \end{cases}$$

2. Решить систему.

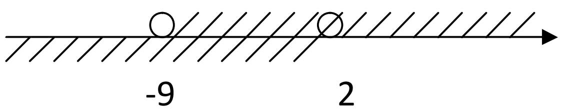
Пример. Решите двойное неравенство: $4x-9<5x<14-2x$

Решение. Заменим двойное неравенство системой неравенств:

$$\begin{cases} 5x>4x-9, \\ 5x<14-2x. \end{cases}$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 5x>4x-9, \\ 5x<14-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-9, \\ 7x<14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-9, \\ x<2. \end{cases}$$



$x \in (-9;2)$

3. **Дробные неравенства.** *Дробные неравенства* – это неравенства вида:

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0. \tag{5}$$

Замечания:

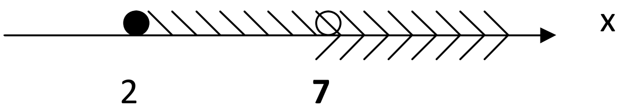
1. Неравенство (5) и неравенство (2) *равносильны*, то есть они имеют одинаковые решения.
2. Алгоритм решения неравенства (5) такой же, как алгоритм решения неравенства (2) (см. алгоритм 1).
3. Если неравенство (5) нестрогое, то есть:

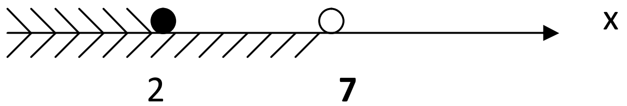
$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \qquad (6)$$

тогда $g(x) \neq 0$.

Пример. Решение неравенства $\dfrac{x-2}{x-7} \geq 0$.

Решение. Заменим дробное неравенство системами уравнений:





$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-7 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ x-7 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x < 7 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы: $x > 7$ или $x \in (7;\infty)$; второй: $x \leq 2$ или $x \in (-\infty;2]$.

Решение дробного неравенства можно записать так:

$\left[\begin{array}{l} x > 7 \\ x \leq 2 \end{array}\right.$ или $x \in (-\infty;2) \cup (7;\infty)$.

3.10. Показательная и логарифмическая функция.Уравнения и неравенства

1. **Показательное уравнение.***Показательное уравнение* – это уравнение, в котором неизвестная величина находится в показате степени.

Замечание. Далее будет рассматриваться только простейшее показательное уравнение вида:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0. \qquad (2)$$

2. **Область допустимых значений неизвестной (переменной) величины в показательном уравнении (2).***Область допустимых*

значений (ОДЗ) неизвестной величины в уравнении $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ - это область определения функций $f(x)$ и $g(x)$: $\text{ОДЗ} = \begin{cases} \mathrm{D(f)} \\ \mathrm{D(g)} \end{cases}$.

Пример. Найдите ОДЗ уравнения $3^{\frac{1}{x}} = 3^{2x-4}$.

Решение. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x - 4$.

$$\text{ОДЗ}=\begin{cases} \mathrm{D(f)}: \mathrm{x} \in (-\infty, \infty) / 0, \quad (\mathrm{x} \neq 0), \\ \mathrm{D(g(x))}: \mathrm{x} \in (-\infty, \infty), \end{cases} \Rightarrow \mathrm{x} \in (-\infty, \infty) / 0$$

Неизвестная величина x может принимать все числовые кроме нуля: $x \neq 0$. Потому, что при $x = 0$ выражение $\frac{1}{x}$ не имеет смысла или неопределенно, то есть ОДЗ: $x \neq 0$.

Алгоритм 1. ***Решение показательного уравнения*** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Чтобы решить уравнение (2) надо:

1. написать ОДЗ уравнения (2);
2. перейти от уравнения (2) к уравнению:
$$f(x) = g(x); \tag{3}$$
3. решить уравнение (3);
4. решение уравнения (3) – это решение и уравнения (1).

Замечание: Если $a = 1$, то x – любое число из ОДЗ.

Алгоритм 2. ***Решение показательного неравенства***

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}. \tag{4}$$

Чтобы решить неравенство (4) надо:

1. написать ОДЗ неравенства (4);
2. перейти от неравенства (4) к неравенству
$$f(x) > g(x), \tag{5}$$
если $a > 1$, и
$$f(x) < g(x), \tag{6}$$
если $a < 1$;
3. решить неравенство (5) или (6);
4. решение неравенства (5) или (6) – это решение и неравенства (4).

Пример. Решите уравнение: $3^{x^2 - 4x} = 3^{x-6}$.

Решение. ОДЗ этого уравнения: $x \in R$.

$3^{x^2-4x} = 3^{x-6} \Rightarrow x^2 - 4x = x - 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решим полученное квадратное уравнение:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = 3.$

Решением показательного уравнения будут эти же числа.

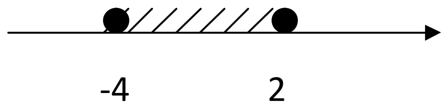
Пример. Решите неравенство: $0,7^{8-x^2} \le 0,7^{2x}$.

Решение. Найдем ОДЗ этого неравенства: $x \in R$.

$0,7^{8-x^2} \le 0,7^{2x} \Rightarrow 8 - x^2 \ge 2x \left(0,7 < 1_{6}^{D}\right)$

Решим полученное квадратное неравенство:

$x^2 + 2x - 8 \le 0$, $\quad x_1 = -4;\ x_2 = 2$



Ответ: $x \in [-4;2]$

Замечание. Если показательное уравнение не имеет вида (2), его надо записать (привести) к этому виду (если это возможно).

Пример. Решите уравнение: $3^{x+2} - 3^x = 72$.

Решение. Выносим за скобки общий множитель 3^x.

$3^x\left(3^2 - 1\right) = 72$. При вынесении за скобки 3^x мы делим каждый член на 3^x по формуле $a^m : a^n = a^{m-n}$. Получаем $3^x \cdot 8 = 72 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Пример 4. Решить уравнение: $2^{x-4} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 704$.

Решение. $2^{x-7}\left(2^3 + 2^2 - 1\right) = 704 \Rightarrow 2^{x-7} \cdot 11 = 704 \Rightarrow 2^{x-7} = 704 : 11 \Rightarrow$

$2^{x-7} = 64 \Rightarrow 2x - 7 = 2^6 \Rightarrow x - 7 = 6 \Rightarrow x = 13$.

Приклад. Решите уравнение: $5^{x+2} - 5^{x+2} = 3^{x+1} + 3^{x+1}$.

Решение. $5^{x+2} - 5^{x+1} = 3^{x+1} + 3^{x+2} \Rightarrow 5^{x+1}(5-1) = 3^{x+1}(1+3) \Rightarrow$

$4 \cdot 5^{x+1} = 3^{x+1} \cdot 4$;

$5^{x+1} = 3^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^0 \Rightarrow x + 1 = 0;\ x = -1$.

Пример. Решите уравнение: $\left(\sqrt{3}\right)^{x^2-5x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Приводим обе части уравнения к основанию 3:

$$\left(3^{0,5}\right)^{x^2-5x}=\left(3^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow 3^{0,5\left(x^2-5x\right)}=3^{-2}.$$

Получаем квадратное уравнение: $0,5\left(x^2-5x\right)=-2\Rightarrow x^2-5x+4=0$.

Корни этого уравнения: $x_1=1,\ x_2=4$.

Пример. Решите неравенство: $\left(\sqrt{3}\right)x^2-5x<\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Используя решение примера 6, получаем квадратное неравенство $x^2-5x+4<0$ или $(x-1)(x-4)<0$ (основание $a=3>1$, поэтому знак неравенства не изменяется).

Ответ: $x\in(1;4)$.

Пример. Решите неравенство: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\frac{256}{81}}\geq\left(\frac{16}{9}\right)^{-1}$.

Решение. В этом неравенстве нужно найти ОДЗ: по определению корня $x\in N,\ x\neq 1$. Приводим степени к основанию $\frac{3}{4}$.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\left(\frac{4}{3}\right)^4}\geq\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{x}}\geq\left(\frac{3}{4}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{4}{x}}\geq\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Основание $a=\frac{3}{4}<1$, поэтому знак неравенства нужно изменить: $x-1-\frac{4}{x}\leq 2$. Решаем это неравенство: $x-1-\frac{4}{x}-2\leq 0\Rightarrow\frac{x^2-3x-4}{x}\leq 0$.

Знаменатель неравенства можно не писать по ОДЗ: . Решение неравенства: $-1\leq x\leq 4$, но по ОДЗ: $x\in N,\ x\neq 1$. Значит, решениями могут быть только числа 2, 3, 4.

Ответ: $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4$.

3. **Логарифмическая функция.** *Логарифмическая функция* – это функция, которая определяется формулой:

$$y=\log_a x, \qquad (1)$$

где x – это аргумент; a – основание логарифма, параметр функции.

Замечания:

1. Область определения логарифмической функции:

$$D(y)=(0;\infty)\ \text{или}\ x>0. \qquad (2)$$

2. Область значений логарифмической функции:
$$E(y)=(-\infty;\infty) \text{ или } y \in R. \qquad (3)$$
3. Логарифмическая функция – монотонная, то есть: если $a>1$, то функция – возрастающая $(\nearrow)$, если $a<1$, то функция – убывающая (см. рис. 1, 2).

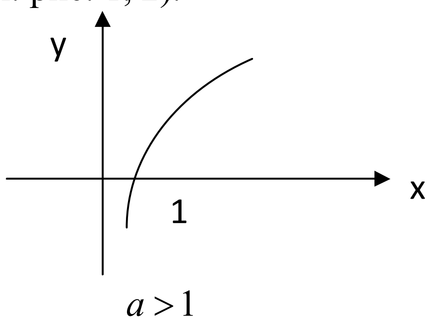


Рис. 1

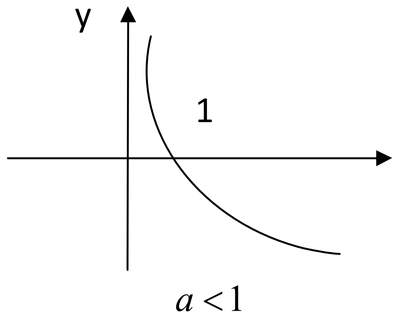


Рис. 2

4. Логарифмическая функция пересекает ось OX в точке $x=1$. Ось OY – она не пересекает.
5. В логарифмической функции над аргументом x выполняется операция логарифмирования.

4. Логарифмическое уравнение (неравенство). Если над неизвестной величиной выполняется операция логарифмирования, то уравнение (неравенство) называется *логарифмическим*.

Замечания:
1. Над неизвестной величиной могут выполнятся и другие операции.
2. Неизвестная величина может находится и в основании логарифма.

Пример 1. Какие из уравнений являются логарифмическими?

A) $x+\log_2 5=10$; B) $\dfrac{(x+1)^2}{\log_3 4}=1$; C) $2\log_2(x+4)=3x^2+x+1$;

D) $4x+1=\log_x 5$.

Ответ. C и D.

Пример 2. Какие из неравенств являются логарифмическими?

A) $x^2-4>\log_3 7$; B) $\log_4 x>5$; C) $\log_{3x} 8>1+x$; D) $81<\log_x 3$.

Ответ. B, C и D.

5. Простейшие типы логарифмических уравнений и неравенств.

Простейшими будем называть следующие типы уравнений (неравенств):
$$\log_{\alpha(x)} f(x)=\log_{\alpha(x)} g(x), \qquad (1)$$

$$\log_{\alpha(x)} f(x) > \log_{\alpha(x)} g(x), \tag{1a}$$

$$\log_{\alpha(x)} f(x) = A, \tag{2}$$

$$\log_{\alpha(x)} f(x) > A, \tag{2a}$$

$$\log_a f(x) = \log_b h(x), \tag{3}$$

$$\log_a f(x) > \log_b h(x). \tag{3a}$$

Алгоритм 1. ***Решение уравнения*** $\log_{\alpha(x)} f(x) = \log_{\alpha(x)} g(x)$**.**

1. Найдите ОДЗ уравнение:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \alpha(x) > 0, \\ \alpha(x) \neq 1. \end{cases} \tag{4}$$

2. Пропотенцируйте равенство (1) по основанию $\alpha(x)$:

$$\log_{\alpha(x)} f(x) = \log_{\alpha(x)} g(x) \Rightarrow \alpha(x)^{\log_{\alpha(x)} f(x)} = \alpha(x)^{\log_{\alpha(x)} g(x)} \Rightarrow \tag{5}$$
$$f(x) = g(x)$$

3. Решите уравнение (5).
4. Сравните решение уравнения (5) с решением системы (4) и запишите результат.

Замечания:

1. Уравнение (2) можно решить, если использовать определение логарифма, то есть:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = A \Rightarrow f(x) = \varphi(x)^A. \tag{6}$$

2. Уравнение (3) – это частный случай уравнение (1):

$$\log_a f(x) = \log_b h(x) \Rightarrow \log_a f(x) = \frac{\log_a h(x)}{\log_a b} \Rightarrow \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \log_a f(x) = \log_a h(x)^{\frac{1}{\log_a b}}$$

Если сравнить (7) с (1), то:

$a = \alpha(x);\ g(x) = h(x)^{\frac{1}{\log_a b}}$

3. При потенцировании неравенства по основанию меньше 1 надо изменить знак неравенства на противоположный, то есть:

$$\log_{\alpha(x)} f(x) > \log_{\alpha(x)} g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha(x) > 1, f(x) > g(x), \\ \alpha(x) < 1, f(x) < g(x).\end{array}\right. \quad (8)$$

4. Для решения логарифмических уравнений и неравенств используются определение логарифма $\log_a b = c \Rightarrow b = a^c$, свойства логарифмов и свойства логарифмической функции.

Уравнение	Неравенство	
$\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$	$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) = \varphi(x) \end{cases}$ ОДЗ	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) > \varphi(x) \end{cases}$ ОДЗ	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}$ ОДЗ
	Знак неравенства **не изменяется** (функция возрастает).	Знак неравенства **изменяется** (функция убывает).
$\log_2 x = \log_2 3$ $x = 3$. ОДЗ: $x > 0$	$\log_2 x < \log_2 3$ $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3$	$\log_2 x < \log_2 3$ $\begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3$

Пример. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1$.

Решение.

1. Найдём ОДЗ уравнения: $2x+1>0$; $2x>-1$; $x>-\frac{1}{2}$ - область допустимых значений переменной *x*.
2. Используем определение логарифма:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1 \Rightarrow 2x+1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow 2x+1 = 3 \Rightarrow 2x = 3-1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

3. Сравним решение с ОДЗ: $x = 1 > -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \in ОДЗ$.

Пример 2. Решите уравнение: $\log_2(x-1) + \log_2(3x-2) = 2$.

Решение. $\log_2(x-1)(3x-2) = 2$;

$$\begin{cases}(x-1)(3x-2)=4,\\ x-1>0,\\ 3x-2>0;\end{cases} \begin{cases}3x^2-5x+2-4=0,\\ x>1,\\ x>\dfrac{2}{3};\end{cases} \begin{cases}3x^2-5x-2=0,\\ x>1;\end{cases}$$

$D=25+24=49;$

$x_1=\dfrac{5+7}{6}=2;\ x_2=\dfrac{5-7}{6}=-\dfrac{1}{3}<1.$

Ответ. $\mathrm{x}=2$.

Примеры. Решите уравнение: $\log_x\left(x^2-3x+6\right)=2$.

Решение. В этом уравнении лучше сделать проверку решений, чем находить ОДЗ. Записываем уравнение без знака логарифма: $x^2-3x+6=x^2$; $-3x+6=0$; $x=2$. Проверка: $\log_2\left(2^2-3\cdot 2+6\right)=2$, $\log_2 4=2\Rightarrow 2=2$. Проверка дает верный результат. **Ответ**: $x=2$.

Контрольные вопросы и задания.

1. Напишите формулу:

1)«игрек» равно два «икс».

2) «игрек» равно пять «икс» плюс три.

3)«игрек» равно «икс» в квадрате

4) «игрек» равно «икс» во второй степени.

5) «игрек» равно «икс» в кубе или

6) «игрек» равно «икс» втретей степени.

7) «игрек» равно «икс» в пятой степени.

8) «игрек» равно один минус «икс» в квадрате.

2. Напишите формулу:

1. «игрек» равно пять минус три «икс» в квадрате;
2. «игрек» равен корень квадратный из пяти «икс» в квадрате;
3. «игрек» равен шесть целых и три сотых «икс» плюс корень
4. кубический из пяти «икс» в пятой степени;
5. «игрек» равно три плюс (открыть круглую скобку) пятнадцать «икс» в квадрате минус один (закрыть круглую скобку) в пятой степени.

3. Прочтите формулу:

1) $y=15x+3$;

2) $y=5x^2+3x$;

3) $y=\sqrt{x+3}$;

4) $y=\sqrt[3]{x^2+5}$;

5) $y=\dfrac{x}{1+3x^2}$.

4. Вычислите значение функции:

1) «игрек» равно минус две целых и пять десятых, минус два «икс» в квадрате в точке икс равно пять;

2) «игрек» равен корень квадратный из пяти «икс» в квадрате плюс четыре в точке три.

5. Изобразите на числовой оси числа:

1) три;
2) три целых и восемь десятых;
3) одна вторая;
4) три вторых;
5) минус две целых и пять десятых;
6) минус две целых и пять сотых.

6. В каком квадранте находится точка *P*:

1) $P(-2;7)$;
2) $P(-4;-1)$;
3) $P(12;34)$;
4) $P(0,02;-1,4)$;
5) $P(0,02;-1,4)$;
6) $P(0;-0,08)$.

7. Нарисуйте точки *P* в прямоугольной системе координат:

1) $P(-4;-1)$;
2) $P(-2;-3)$;
3) $P(2;3)$;
4) $P(2;-4)$;
5) $P(3;0)$;
6) $P(0;-1)$.

8. Напишите продолжение предложения:
1) Формула $y=f(x)$ показывает, что … .
2) Величина x в формуле $y=f(x)$ называется … .
3) Величина y в формуле $y=f(x)$ называется … .
4) Прямоугольная система координат – это … .

5) Координатная плоскость – это … .

9. Постройте таблицу значений функции $y = 4x - x^2$ в точках: $x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3$.

10. Постройте приближенно («по точкам») график функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

11. Проверьте точки A, B, C, D принадлежат графику функции $y = f(x)$ или нет, если: $y = \sqrt{25 - x^2}$; $A(3;0)$; $B(-3;4)$; $C(5;0)$; $D(0;5)$

12. Найдите координаты точки, если:

    i. x – координата равна 5 и $y = \dfrac{2x}{x+5}$;

    ii. x – координата равна (-1) и $y = \dfrac{5x}{x^2 - 1}$;

    iii. x – координата равна 0 и $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$.

13. Прочитайте следующую запись, укажите аргумент функции и зависимую переменную:

    1) $s(t) = 70t$; 3) $V(a) = a^3$;

    2) $y(x) = -2x + 4$; 4) $f(x) = x^2 - 4$.

14. Функция задана формулой $y = 10x + 1$. Найдите значение y, если:

    1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\dfrac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

15. Функция задана формулой $y = -\dfrac{1}{6}x + 2$. Найдите:

    a. значение функции для значений аргумента, равных: 12; -6; 0,2;
    b. значение аргумента, при котором значение функции равно: 4; 3; 0; -1.

16. Функция задана формулой $f(x) = 3 - 4x$. Верно ли равенство:

    1) $f(-2) = -5$; 3) $f(0) - 1$;

    2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$; 4) $f(-1) = 7$?

17. Функция задана формулой $f(x) = 2x - 1$.

18. Найдите $f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(-0{,}5)$, $f(3{,}2)$.
19. Найдите значение x, при котором $f(x)=7, f(x)=-9, f(x)=0$, $f(x)=-2{,}4$.
20. Верно ли равенство: $f(5)=9$, $f(0{,}3)=0{,}4$, $f(-3)=-7$?
21. Функция задана формулой $y=x(x+8)$. Заполните таблицу соответственных значений x и y:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

22. Задайте формулой функцию, если значения функции:
23. противоположны соответственным значениям аргумента;
24. равны утроенным соответственным значениям аргумента;
25. на 4 больше квадратов соответственных значений аргумента.
26. Задайте формулой функцию, если значения функции:

1. на 3 меньше соответственных значений аргумента;
2. на 5 больше удвоенного значения соответственного аргумента.

27. Функция задана формулой $y=0{,}2x-5$. Заполните таблицу соответственных значений x и y:

x	4		-1,5		-3
y		2		-1,4	

28. Даны функции $g(x)=\dfrac{20}{x}-3$ и $h(x)=8-3x$. Сравните:

1) $g(1)$ и $h(1)$; 2) $g(5)$ и $h(2)$; 3) $g(-2)$ и $h(6)$.

29. Найдите значения функции $y=\begin{cases}-2x+4, \text{ если } x>0,\\ 0{,}1x-5, \text{ если x} \le 0;\end{cases}$

соответствующие аргументам:
1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) -8.

30. Функции заданы формулами $y=x^2-8x$ и $y=4-8x$. При каких значениях аргумента эти функции принимают равные значения?
31. Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x=x_1$:

i. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$, $x_1=0$.

Варианты ответов: A) 0; B) функция не определена в этой точке;

C) 5; D) 1; E) 15.

ii. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-1}$, $x_1=1$.

Варианты ответов: A) 0; B) функция не определена в этой точке;

C) 5; D) 1; E) 15.

3) $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-1}$, $x=-1$.

Варианты ответов: A) 0; B) функция не определена в этой точке;

C) 5; D) 1; E) 15.

32. Найдите $D(f)$ для функции $f(x)$:

i. $f(x)=x-3$.

Варианты ответов: A) $x\in R$; B) $x\geq 3$; C) $x>3$; D) $x>\dfrac{1}{3}$; E) $\left[\begin{array}{l} x\in R \\ x\neq 3 \end{array}\right.$.

ii. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$.

Варианты ответов: A) $x\in R$; B) $x\geq 3$; C) $x>3$; D) $x>\dfrac{1}{3}$; E) $\left[\begin{array}{l} x\in R \\ x\neq 3 \end{array}\right.$.

iii. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

Варианты ответов: A) $x\in R$; B) $x\geq 3$; C) $x>3$; D) $x>\dfrac{1}{3}$; E) $\left[\begin{array}{l} x\in R \\ x\neq 3 \end{array}\right.$.

iv. $f(x)=\sqrt{x-3}$.

Варианты ответов: A) $x\in R$; B) $x\geq 3$; C) $x>3$; D) $x>\dfrac{1}{3}$; E) $\left[\begin{array}{l} x\in R \\ x\neq 3 \end{array}\right.$.

v. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$.

Варианты ответов: A) $x\in R$; B) $x\geq 3$; C) $x>3$; D) $x>\dfrac{1}{3}$; E) $\left[\begin{array}{l} x\in R \\ x\neq 3 \end{array}\right.$.

33. Какие точки принадлежат графику функции $y = 5x - 3$?
A) P (-2; 16); B) M (-3; 12); C) K (4; 17).

34. Найдите угловой коэффициент прямой линии:

2.1. $2y = 1 - 4x$

Варианты ответа: A) 2; B) 1; C) 4; D) -2; E) -4.

2.2. $3(y - 1) = 6(x + 4)$

Варианты ответа: A) 6; B) 24; C) 2; D) 3; E) 0.

2.3. $2 - 8x = 4(y + 3)$

Варианты ответа: A) -8; B) 2; C) -2; D) 4; E) 0.

2.4. $3(y - 2) = 15$

Варианты ответа: A) 3; B) -2; C) -6; D) 0; E) 15.

35. Найдите координаты точкиA на прямой $y = -2x + 4$, если x – координата этой точки равна 5.

Варианты ответа: A) A (5; 4;) B) A (5; -6;) C) A (0; 5;) D) A (5; -2;) E) такой точки не существует.

36. Найдите координаты точкиB на прямой $y = 8x - 1$, если y – координата этой точки равна 15.

Варианты ответа: A) B (15; 119;) B) B (2; 15;) C) B (-1; 15;) D) B (0; 15;)
E) B (8; 15;).

37. Функция $y = kx + b$ называется …
38. В формуле $y = 2x + 3$ число 2 называется …
39. В формуле $y = 2x + 3$ число 3 называется …
40. График линейной функции $y = kx + b$ - это …
41. Докажите, что точки A (2; - 4;) принадлежит или не принадлежит прямой линии $y = -3x + 2$.
42. Найдите координаты точки В на прямой $y = 4x - 5$, если x координата этой точки равна 3.
43. Найдите координаты точки С на прямой $y = 6x - 2$, если y координата этой точки равна 0.
44. Найдите угловой коэффициент и свободный член прямой линии $4y - 3x = 2(y - 5x)$.

Найдите координаты точки пересечения прямой линии $y = -7x - 21$ с осью OX.

45. Как называется функция:

A) ; B) ; C) .

46. Напишите параметры квадратичной функции:

A) ; B) ; C) .

47. Найдите координаты точки минимума или максимума параболы:

A) ; B) .

48. Найдите координаты точки пересечения параболы с осью OY.

49. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{5}x = 3$; 2) $5x + 4 = 0$; 3) $9x - 2(x - 3{,}5) = 2x - 1{,}5$; 4) $\frac{x-1}{5} - \frac{2x}{3} = 4$;

5) $x(3 + x) = 0$; 6) $(x+2)(x-5) = 0$; 7) $2x = 3x^2$; 8) $8x + 2ax - 3a^2 = 0$;

9) $3(y+1) - \frac{10-y}{2} = \frac{4y+11}{5} + 12$.

50. Решите неравенства:

1) $5x + 4 < 0$; 2) $4(3+x) > 10$; 3) $-4(x+2) < 3(x-5)$; 4) $4x - 7 > 0$;

5) $0{,}4x \geq 2$; 6) $3 - 2x < 12 - 5x$; 7) $2x - 3 < 7(1+x)$; 8) $5 - 4x \leq 0$;

9) $3x - 5 < 2(1-x)$; 10) $x + 4 - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3}$.

51. Напишите параметры квадратичных уравнений:

1.1. $-3x + 5x^2 - 1 = 0$.

1.2. $4x - 5 = x^2$.

1.3. $1 - x^2 = x$.

1.4. $x^2 = -7x$.

1.5. $4x^2 = 5$.

52. Запишите квадратные уравнения в стандартном виде:

2.1. $(x-2)(x+2) = 0$.

2.2. $(1-3x)(-x+5) = 1$.

2.3. $(x+2)(3-5x) = x(4-2x)$.

53. Запишите квадратичные уравнения в приведенном виде:

3.1. $3x^2 - 9x + 15 = 0$.

3.2. $-x^2 + x + 1 = 0$.

3.3. $5x + 3 = -7x^2$.

54. Найдите дискриминант квадратного уравнения:

4.1. $-3x^2 + 8x - 2 = 0$.

4.2. $3x = 1 - x^2$.

4.3. $-(3+2x)(x-1) = x^2 + 4x - 1$.

4.4. $-x^2 = -2x(x-1) - 1$.

55. Найдите корни квадратного уравнения:

5.1. $x^2 - 9x + 8 = 0$.

5.2. $4x^2 = 5x$.

5.3. $x^2 + 10x + 25 = 0$.

5.4. $x^2 + x + 1 = 0$.

56. Напишите приведенное квадратное уравнение, если известны корни этого уравнения:

6.1. $x_1 = -5;\ x_2 = 5$; 6.2. $x_1 = 0;\ x_2 = -3$; 6.3. $x_1 = 4;\ x_2 = 4$.

Сделайте проверку.

57. Решите неравенство:

1) $x^2 - 4x + 3 > 0$; 4) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$;

2) $x^2 + x + 1 \geq 0$; 5) $x - x^2 < 0$;

3) $x^2 - x + 1 < 0$; 6) $x^2 + 25x \geq 0$.

58. Найдите целые решения неравенства:

$-4x^2 + 3x + 1 \geq 0$.

59. Решите неравенства:

1) $(x-11)(x-3) < 0$; 2) $x^2 - 2x - 3 > 0$;

3) $9x^2 - 25 > 0$; 4) $2x - 3 < 7(1+x)$;

5) $2x^2 - 3x - 2 > 0$; 6) $x(x-1)(x-3) < 0$;

7) $x(x-4)(x+4) < 0$; 8) $x^2 - 4 \leq 0$;

9) $\dfrac{x+2}{x-5} < 0$; 10) $\dfrac{2x-1}{x+2} \geq 0$;

11) $\dfrac{3x-1}{3x+1} + \dfrac{x-3}{x+3} \geq 2$; 12) $\dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} \geq 2$;

60. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} x - 3 < 2x - 3, \\ 4x + 5 > 10 - x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9 + 2x \leq 3x + 7, \\ x - 2 > 2x - 5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-5)^2 - 15 \geq (x-3)(x-4) - 50, \\ 4(x+7) - 16 \geq 2 - x. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{x+1,7}{3} \geq \dfrac{3x+1}{5}, \\ \dfrac{x+2}{4} - \dfrac{x+8}{5} < \dfrac{3x-1}{10}. \end{cases}$

61. Найдите сумму целых решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} 3x - 5 < 23 - 4x, \\ 7x - 9 \leq 9x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-5) + 28, \\ 4(x+1) \leq 3x + 5. \end{cases}$

Дана функция $f(x) = 4x^2 - 9x + 5$. Найдите все значения x, при которых: а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \leq 0$.

62. Найдите все значения a, при которых уравнения $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ не имеет корней.

63. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x \le 1-3(x+2), \\ 2x > 4-(x+7). \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{4} < \dfrac{x-1}{3}, \\ 3(x-5)+1 > 0. \end{cases}$

64. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1)+16, \\ 4(2+x) < 3x+8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x > 3-\dfrac{13x-2}{11}, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7) < \dfrac{3x-20}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+4}{3} \le \dfrac{x-1}{4}-2, \\ 1{,}5x-2{,}5 \le x; \end{cases}$ 4) $-2 < \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| < 1.$

65. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ 3x-5y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y=18, \\ x+2y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+2y=34{,}5, \\ 2x-2y=12{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x-y=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=35; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y^2=16, \\ x+5y=10; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2-y=14, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x-y=1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{5x+9y}{3}=\dfrac{2x+3y}{2}, \\ \dfrac{x-3y}{2}=\dfrac{2x-3y}{3}; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{y-a}=\dfrac{b}{c}, \\ \dfrac{x-b}{y-c}=\dfrac{a+b}{a+c}. \end{cases}$

66. Решите уравнения:

1) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 8$; 2) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{2-3x} = \left(\dfrac{49}{16}\right)^{-2}$; 3) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^x \cdot \left(\dfrac{125}{64}\right)^{x-1} = \dfrac{4}{5}$;

4) $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0$; 5) $6\cdot 3^{x+1} - 5\cdot 3^x = 39$;

6) $4^{x-3} - 3\cdot 4^{x-4} + 2\cdot 4^{x-5} = 96$.

67. Решите неравенства:

а) $2x > 4$; б) $2^{x+1} < 2$; в) $2^{2x-3} \ge 2$; г) $4^x \le 0{,}25$; д) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \dfrac{1}{8}$;

е) $0{,}1^x \le 0{,}01$; ж) $0{,}01^{2x} > 0{,}1$; з) $3^{x+1} < 9$; и) $\left(\dfrac{1}{27}\right) < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;

к) $\left(\dfrac{1}{3^x}\right) > \dfrac{1}{9}$; л) $2^{x+1} \le 16$; м) $4^x \ge 8$.

68. Какое число больше?

А) $\log_3 5$ или $\log_3 7$; С) $\log_3 7$ или $\log_5 7$;

B) $\log_{0,5} 4$ или $\log_{0,5} 5$;   D) $\log_{0,3} 5$ или $\log_{0,3} 5$.

69. Определить знак числа:

A) $\log_{0,7} 2$; B) $\log_3 0,5$; C) $\log_{0,1} 0,5$; D) $\log_5 3$; E) $\log_2 1$.

70. Нарисуйте график функции:

A) $y = \log_{0,2} x$; B) $y = \log_3 x$

71. Решите неравенства:

а) $\log_2 x > 2$; б) $\log_2 2x \geq 3$; в) $\log_{0,5} x < 2$; г) $\log_3 2x < 1$;

д) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$; е) $\log_{\frac{1}{3}} 3x \leq -1$.

72. Напишите формулу функции:

1. “эф” от “икс” равно: пять “икс” плюс три;
2. “эф” от “икс” равно: три целых и четыредесятых“икс” минус две сотых;
3. “фи” от “икс” равно: два умножить, откройте круглую скобку, три “икс” плюс четыре, закройтекруглую скобку, минуспятьикс;
3. “фи” от “икс” равно: “икс” в квадрате, плюс “икс” в кубе, минус два;
4. “эф” от “те” равно: корень квадратный из “те” (корень “закрыть”), минус три “те” в куб.

73. Вычислите значение функции $f(x) = 0,4x + 1$, (если значение аргумента равно) минус три.

74. Вычислите значение функции $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, (если значение аргумента равно) равно двум.

75. Какие действия используются в формулах для функции: $f(x) = 3x - 1$;

a. $f(x) = x^2 + 4$;

b. $\varphi(t) = 1 - \sqrt{t}$;

c. $\varphi(t) = 3t + \sqrt{t^3}$.

78. Точка А принадлежит оси абсцисс. Что можно связать ее ординате и ее абсциссе?

79.Точка В принадлежит оси ординат. Что можно сказать о ее ординате и ее абсциссе? Найдите значение функции $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, если ее аргумент равент нулю. Найдите координаты точки пересечения графики функции $f(t) = \dfrac{x^2+9}{4x+3}$ с осью ординат.

80. Какие из указанных функций являются линейными:

$f(x) = x^2 + 1$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

$f(x) = 2x$; $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

$f(x) = 2x + 1$; $f(x) = \frac{x}{2}$.

81. Укажите угловой коэффициент и свободный член функции:

$f(x) = 3x + 2$; $f(x) = 0,25 - \frac{x}{2}$;

$f(x) = -4 + 5x$; $f(x) = -7,03$;

$f(x) = -1 - x$; $f(x) = \frac{5x}{7}$.

82. Напишите формулу линейной функции, у которой угловой коэффициент равен пяти, а свободный член равен трем

83. Напишите формулу линейной функции, у которой угловой коэффициент равен минус два, а свободный член равен нулю.

84. Напишите формулу линейной функции, у которой угловой коэффициент равен нулю, а свободный член минус три целых и пять десятых.

85. Вычислите значения линейной функции $f(x)$ с угловым коэффициентом равным четыреми свободным членом равным двум в точке с координатами минус один и плюс ноль целых пять десятых.

86. Нарисуйте график линейной функции $f(x)$:

$f(x) = -3x + 2$; $f(x) = -4$;

$f(x) = -x - 2$; $f(x) = 3$.

87. Какие точки принажлежат графику линейной функции $f(x) = -2x + 4$?

А (1; - 2);   В (0; - 2); С (- 2; 4); Д (2 ; 0);   Е (-2 ; 8).

88. Найдите координаты точки, которая принадлежит графику функции $f(x) = 3x + 9$, если ее ординаты равны:

1. минус два; 3. плюс четыре;   5. ноль.
2. минус один; 4. плюс два;

89. Найдите координаты точки, которая принадлежит графику функции $f(x) = -4x + 5$, если ее абсцисса равны:

1. минус пять;   2. ноль;   3. минус четыре;
4. плюс один;   5. минус ноль целых и пять десятых.

90. Нарисуйте графики двух линейных функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и найдите координаты точки их пересечения (графически)

a. $f(x) = 4x + 3$, $\varphi(x) = 3x - 1$; 3. . $f(x) = -4$; $\varphi(x) = x$

b. $f(x) = -x + 2$, $\varphi(x) = -2x + 5$;   4. . $f(x) = -3$; $\varphi(x) = 4$

91. Нарисуйте график функции $f(x)$ и найдите координаты точки пересечения графика с осью О$У$ и с осью ОX.

1. $f(x) = -8x + 4$;   3. $f(x) = 1 + 2x$;
2. $f(x) = 5$;   4. $f(x) = 4$.

4. Элементы геометрии

Справочная информация

4.1. Треугольники

1. **Угол.** Угол – это геометрическая фигура (рис.1), образованная двумя лучами ОА и ОВ (*стороны угла*), исходящими из одной точки О (*вершина угла*).

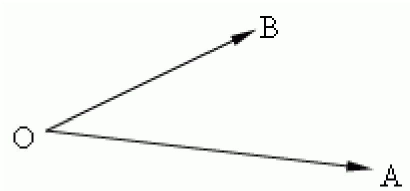


Рис. 1

Угол обозначается символом ∠ и тремя буквами, обозначающими концы лучей и вершину угла: ∠ AOB (причём, буква вершины – средняя).

2. **Градусная система измерения углов.** Единицей измерения является *градус* – это поворот луча на 1 / 360 полного оборота.Таким образом, полный оборот луча равен 360º. Угол в 90° (рис.2) называется *прямым*; угол, меньший, чем 90° (рис.3), называется *острым*; угол, больший, чем 90° (рис.4),называется *тупым*.

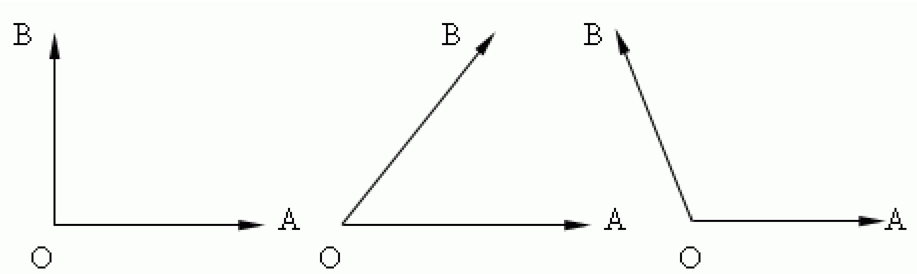


Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

Треугольник. Треугольник – это многоугольник с тремя сторонами (или тремя углами). Если все три угла острые (рис.20), то это *остроугольный треугольник*. Если один из углов прямой (∠ C, рис.21), то это *прямоугольный треугольник*; стороны *a, b*, образующие прямой угол, называются *катетами*; сторона *c*, противоположная прямому углу, называется *гипотенузой*. Если один изуглов тупой (∠ B, рис.22), то это *тупоугольный треугольник.*

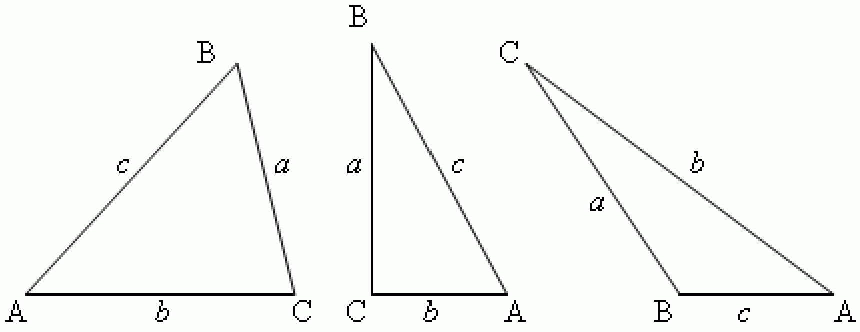


Рис. 20 Рис. 21 Рис. 22

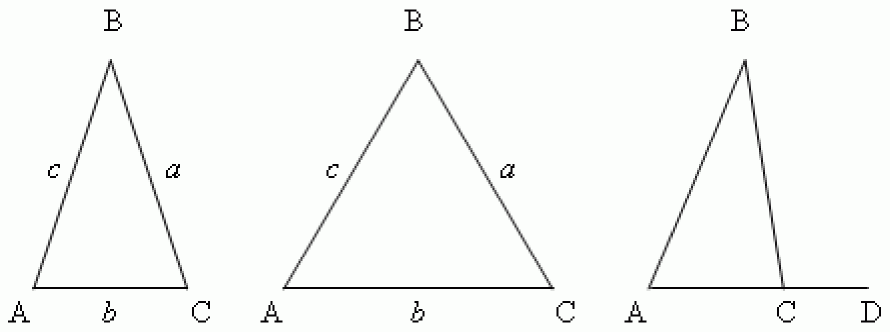


Рис. 23 Рис. 24 Рис. 25

Треугольник ABC (рис.23) - *равнобедренный*, если *две* его стороны равны ($a = c$); эти равные стороны называются *боковыми*, третья сторона называется *основанием* треугольника. Треугольник ABC (рис.24) – *равносторонний*, если *все* его стороны равны ($a = b = c$). В общем случае($a \neq b \neq c$)имеем *неравносторонний* треугольник.

3. Высота треугольника - это *перпендикуляр, опущенный из любой вершины на противоположную сторону* (или её продолжение). Эта сторона называется *основанием треугольника*. *Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке*, называемой *ортоцентром* треугольника.Ортоцентр остроугольного треугольника (точка O, рис.26) расположен внутри треугольника, а ортоцентр тупоугольного треугольника (точка O, рис.27) – снаружи; ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.

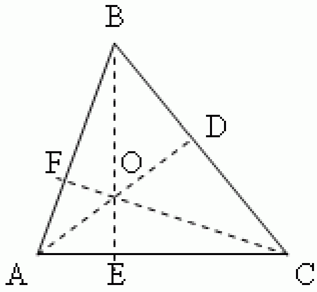


Рис. 26

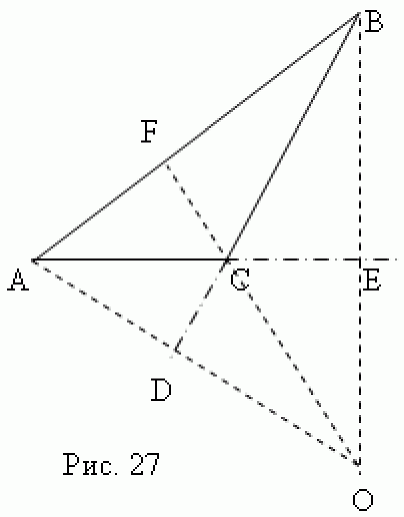


Рис. 27

Медиана – это *отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три медианы треугольника* (AD, BE,CF, рис.28) *пересекаются в одной точке* O, всегда лежащей внутри треугольника и являющейся его *центром тяжести. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.*

Биссектриса – это *отрезок биссектрисы угла от вершины до точки пересечения с противоположной стороной. Три биссектрисы треугольника* (AD, BE, CF, рис.29) *пересекаются в одной точке* O, всегда лежащей внутри треугольника и являющейся *центром вписанного круга* (см. раздел «Вписанные и описанные многоугольники»).

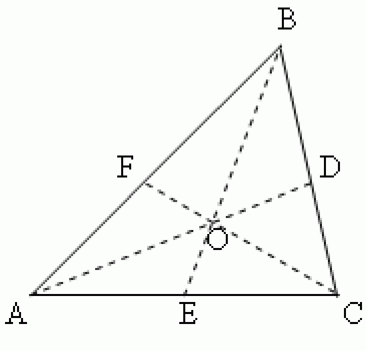


Рис. 28

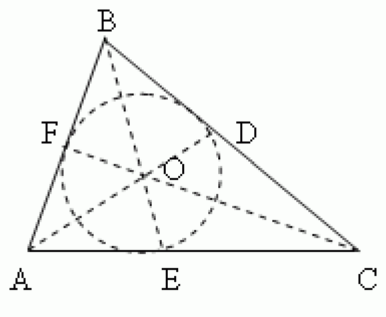


Рис. 29

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

4.2. Четырехугольники

1. **Четырехугольник** .Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки - сторонами четырехугольника.

2. **Параллелограммом** называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.

3. **Ромб** - параллелограмм, у которого все стороны равны.

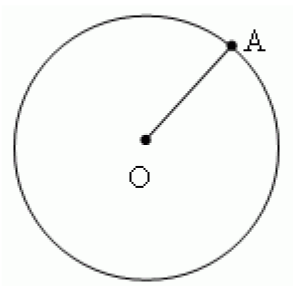
4. **Прямоугольник** - параллелограмм, у которого все углы прямые.

5. **Квадрат** - прямоугольник, у которого все стороны равны.

6. **Трапецией** называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны. Параллельные стороны называются основаниями трапеции. Две другие стороны называются боковыми сторонами. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобокой.

4.3. Окружность

1. **Окружность** – это геометрическое место точек (т.е. множество всех точек) на плоскости,равноудалённых от одной точки,называемой центром окружности.



2. **Радиус**.Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо её точкой, называется радиусом и обозначается ***r***или ***R***.

3. **Круг.** Частьплоскости, ограниченная окружностью, называется кругом. Часть окружности называется *дугой.* Прямая PQ, пр

оходящая через точки M и N окружности (рис.39), называется *секущей,* а её отрезок MN, лежащий внутри окружности - *хордой.*

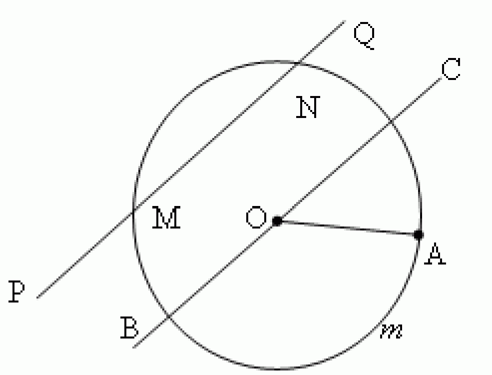


Рис. 39

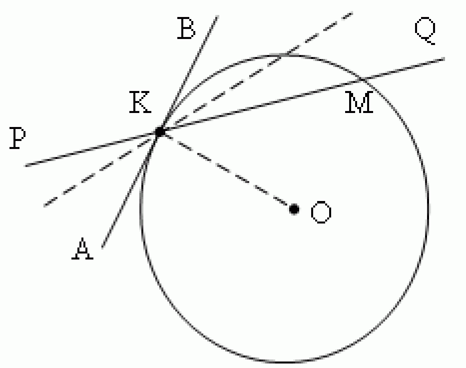


Рис.40

Хорда, проходящая через центр круга (например, BC, рис.39), называется *диаметром* и обозначается d или D. Диаметр – это наибольшая хорда, равная двум радиусам ($d = 2\,r$).

4. Градусная мера. Здесь единицей измерения является *градус* (обозначение)– это поворот луча на 1 / 360 часть одного полного оборота. Таким образом, полный оборот луча равен 360°. Один градус состоит из 60 *минут* (их обозначение ‘); одна минута – соответственно из 60 *секунд* (обозначаются “).

5. Радианная мера. Длина дуги l, радиус r и соответствующий центральный угол α связаны соотношением:

$$\alpha = l\,/\,r$$

Радианная мера измерения угла есть отношение длины дуги, проведенной произвольным радиусом и заключённой между сторонами этого угла, к радиусу дуги.

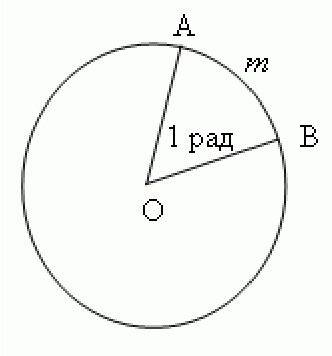


Рис. 1

$$1\ \text{рад} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57°,2958 \approx 57°17'45".$$

Обратно,

$$1° = \frac{2\pi}{360°} \approx 0.017453\ \text{рад}.$$

Таблица значений наиболее часто встречающихся углов

в градусах и радианах:

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

6. Длина окружности. Длину окружности C можно вычислить по формуле: $C = 2\pi r$

r - радиус окружности.

4.4. Площади геометрических фигур

1. **Формула площади треугольника по стороне и высоте**
Площадь треугольника равна половине произведения длины стороны треугольника на длину проведенной к этой стороне высоты

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

2. **Формула площади треугольника по трем сторонам (*формула Герона)***

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

3. **Формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними**
Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон умноженного на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

4. **Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу описанной окружности**

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

5. **Формула площади треугольника по трем сторонам и радиусу вписанной окружности**

Площадь треугольника равна произведения полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.

$$S = pr$$

где S - площадь треугольника a, b, c - длины сторон треугольника,h - высота треугольника,γ - угол между сторонами a и b,r - радиус вписанной окружности,R - радиус описанной окружности.

6. **Формула площади квадрата по длине стороны**
   Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны.

$$S = a^2$$

7. **Формула площади квадрата по длине диагонали**
   Площадь квадрата равна половине квадрата длины его диагонали.

$$S = \frac{1}{2} \cdot d^2$$

где S - Площадь квадрата,a - длина стороны квадрата,d - длина диагонали квадрата.

8. **Площадь прямоугольника** равна произведению длин двух его смежных сторон

$$S = a \cdot b$$

где S - Площадь прямоугольника, a, b - длины сторон прямоугольника.

9. **Формула площади параллелограмма по длине стороны и высоте**
   Площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны и длины опущенной на эту сторону высоты.

$$S = a \cdot h$$

10. **Формула площади параллелограмма по двум сторонам и углу между ними**
    Площадь параллелограмма равна произведению длин его сторон умноженному на синус угла между ними.

$$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

11. Формула площади параллелограмма по двум диагоналям и углу между ними
Площадь параллелограмма равна половине произведения длин его диагоналей умноженному на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$$

где S - Площадь параллелограмма,a, b - длины сторон параллелограмма,h - длина высоты параллелограмма,d_1, d_2 - длины диагоналей параллелограмма,α - угол между сторонами параллелограмма,γ - угол между диагоналями параллелограмма.

12. Формула площади ромба по длине стороны и высоте
Площадь ромба равна произведению длины его стороны и длины опущенной на эту сторону высоты.

$$S = a \cdot h$$

13. Формула площади ромба по длине стороны и углу.
Площадь ромба равна произведению квадрата длины его стороны и синуса угла между сторонами ромба.

$$S = a^2 \cdot \sin \alpha$$

2

где S - Площадь ромба,a - длина стороны ромба,h - длина высоты ромба,α - угол между сторонами ромба.

14.Площадь трапеции по длинам оснований a ,b и высоте h :

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

5. Элементы дифференциального исчисления

Справочная информация

5.1. Вычисление производной простой функции

1. Простая функция. Если в определении функции $f(x)$ используется только одна операция, то такую функцию будем называть простой.
Например,

а) $f(x) = x^2$ - в определении этой функции используется только одна операция – возведение в квадрат: $f = \{\exp 2\}$.

б) $f(x) = 2^x$ - в определении этой функции используется только одна операция – потенцирование по основанию 2: $f=\{\exp_2\}$.

в) $f(x)=\sqrt{x}$ - в определении этой функции используется только одна операция – извлечение корня второй степени (квадратного): $f=\{\sqrt{\ }\}$.

2. Таблица производных простых функций.В таблице 1(Приложение 1) приведены результаты вычисленийпроизводных простых функций.

5.2. Вычисление производной сложной функции: «правило последнего действия»

1. Сложная функция. Если в определении функции $y=f(x)$ используется более одной операции, то такая функция называется сложной. Операции выполняются в определенном порядке. Если каждую операцию обозначать буквой L_i, где $i=1,2,3...,n$, то сложную функцию $y=f(x)$ символически можно записать так:

$$y=f(x)\Rightarrow y=L_n\left(L_{n-1}\left(...L_2\left(L_1(x)\right)\right)\right).$$

Например, в функции $y=f(x)=\sqrt{x^2+1}$ выполняются три операции:

$L_1=x^2="exp2"$ - операция возведения в степень два;

$L_2="+"$ - операция сложения;

$L_3="\sqrt{\ }"$ - операция извлечения корня квадратного.

Причем выполняются они в следующем порядке: первой выполняется операция L_1, второй - L_2 и последней – операция L_3. Поэтому, функцию $f(x)$ символически можно записать так:

$$y=f(x)=\sqrt{x^2+1}=L_3\left(L_2\left(L_1(x)\right)\right).$$

Тогда, функцию $y=f(x)$ можно записать так: $y=L_1\left(L_2\left(L_3(x)\right)\right)$.

2. Сложная функция с выделенной последней операцией.

Если сложную функцию $y=f(x)$ записать так:

(1) $$y=f(x)=L_n\left(L_{n-1}\left(...L_2\left(L_1(x)\right)\right)\right),$$

тогда последним действием (операцией) является действие L_n. Если все операции $L_1,L_2,...,L_{n-1}$ обозначить через u, тогда сложную функцию $y=f(x)$ можно записать так:

(2) $$y = f(x) = L_n\left(u(x)\right).$$

Такую форму записи сложной функции будем называть сложной функцией с выделенной последней операцией. Например, запишем функцию $y = \sqrt{x^2 + 1}$ с выделенной последней операцией:

$$y = \sqrt{u(x)}; u(x) = x^2 + 1.$$

Если в определении сложной функции $y = f(x)$ последней операцией является какая-либо арифметическая операция (сложение, умножение, вычитание, деление), то выделяя эту операцию, будем записывать функцию $y = f(x)$ так:

$$y = f(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = u(x) + v(x); (a) \\ y = v(x) \cdot v(x); (б) \\ y = u(x) - v(x); (в) \\ y = \dfrac{u(x)}{v(x)}. (г) \end{array}\right.$$

Например:

$$1. y = x^2 + \sin 5x \Rightarrow y = u(x) + v(x); \left[\begin{array}{l} u(x) = x^2; \\ v(x) = \sin 5x; \end{array}\right.$$

$$2. y = tgx \cdot \ln 3x \Rightarrow y = u(x) \cdot v(x); \left[\begin{array}{l} u = tgx; \\ v(x) = \ln 3x; \end{array}\right.$$

$$3. y = 2^{4x} - arctg 7x \Rightarrow y = u(x) - v(x); \left[\begin{array}{l} u(x) = 2^{4x}; \\ v(x) = arctg 7x; \end{array}\right.$$

$$4. y = \frac{(x+1)^3}{\cos 4x} \Rightarrow y = \frac{u(x)}{v(x)}; \left[\begin{array}{l} u = (x+1)^3; \\ v(x) = \cos 4x; \end{array}\right.$$

Пример 1. Запишите функцию $f(x) = \left(\cos\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^4$ с выделенной последней операцией.

Решение. Заданная функция определяется с помощью четырех операций: сложения, извлечения корня квадратного, операции «косинус» и операции возведения в четвертую степень. Порядок выполнения этих операций следующий: первая (L_1) - «извлечение корня квадратного»;

вторая (L_2) - «сложение»;

третья (L_3) - «косинус»;

четвертая (L_4) - возведение в четвертую степень.

Поэтому, заданную функцию символически можно записать так

$$f(x) = \left(\cos\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^4 = L_4\left(L_3\left(L_2\left(L_1(x)\right)\right)\right) = \left(u(x)\right)^4,$$

где

$$u(x) = L_3\left(L_2\left(L_1(x)\right)\right) = \cos\left(1+\sqrt{x}\right).$$

5. Вычисление производной сложной функции: «правило последнего действия».

Если в сложной функции $y = f(x)$ выделить последнюю операцию Ln (действие) и записать функцию так:

$$y = f(x) = L_n(u(x))$$

(см. формулу (2) в (4)), тогда для производной функции $y = f(x)$ имеет место формула:

(3) $$y' = f(x) = L_1'(u) \cdot u'(x)$$

Пример 2. Найдите первую производную функции $y = \sin\left(x^2\right)$.

Решение.

1. Запишем эту функцию с выделенной последней операцией: $y = \sin u$, где $u = x^2$. Последняя операция – это "sin". Тогда, применяя формулу (3), получим:

$$y' = \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = (\sin u)' \cdot \left(x^2\right)'.$$

2. Каждая из функций: $\sin u$ и x^2 является простой, т.к. над аргументом u выполняется одна операция "sin", а над аргументом x выполняется одна операция $\exp_x 2$ - возведение в квадрат. Используя таблицу 1, получим:

$$(\sin u)' = \cos u, \left(x^2\right)' = 2x \Rightarrow \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2.$$

3. Алгоритм вычисления производной сложной функции.

Если $y = f(x)$ - сложная функция, то для вычисления производной функции y' надо:

1. Записать эту функцию с выделенной последней операцией:

(4) $$y = f(x) = L_n(u(x)),$$

где Ln - это последняя операция (действие), а $u(x)$ - это все другие операции.

2. Применить формулу (3):

(5) $$y' = L_1'(u) \cdot u'(x).$$

Функция $L_1(u)$ - всегда простая – над аргументом u выполняется одна операция L_1, поэтому значение производной $L_1'(u)$ можно найти в табл. 1.

3. Записать выражение для $L_1'(u)$ с помощью таблицы 1.

4. Если $u(x)$ - это простая функция, то с помощью таблицы 1 записать выражение для $u'(x)$ и тогда формула (5) – ответ.

5. Если $u(x)$ - это сложная функция, тогда надо записать эту функцию с выделенной последней операцией:

$$u(x) = L_2(v(x)),$$

где L_2 - это последняя операция, а $v(x)$ - все другие операции.

6. Применить формулу (3):

$$u'(x) = L_2'(v) \cdot v'(x)$$

7. Если $L_2(v)$ - это простая операция.

5.3. Монотонность функции

Если с увеличением аргумента x от a к b значения функции $y = f(x)$ или только увеличиваются, или только уменьшается на интервале $(a;b)$, то функция $f(x)$ является монотонной на этом интервале. В первом случае функция $f(x)$ монотонно возрастает; во втором, - монотонно убывает.

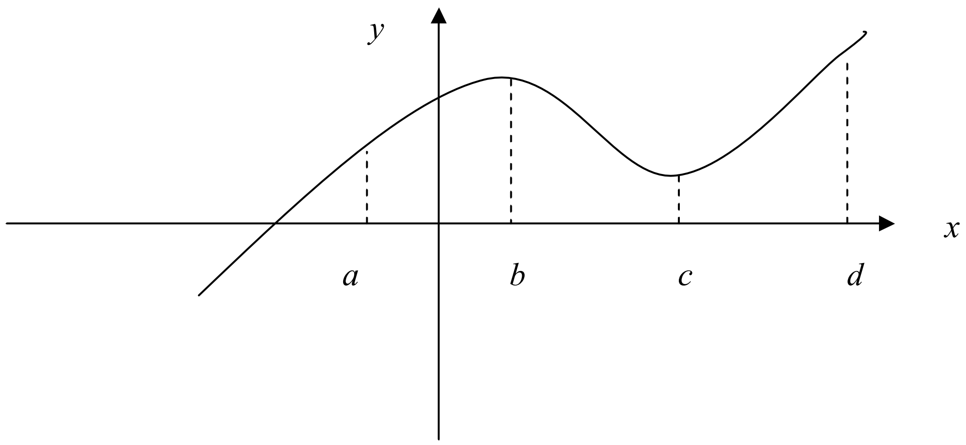


рис. 1

Например, на рисунке 1, функция монотонно возрастает на интервалах: $(a;b)$ и $(c;d)$; а на интервале $(b;c)$ функция монотонно убывает.

Условие монотонности функции. Для того, чтобы найти интервал, на которых функция $f(x)$ являетсямонотонной, надорешитьнеравенства: $f'(x) > 0,$ или $f'(x) < 0.$

В случае (1) решениянеравенстваопределяютзначенияаргумента, на которыхфункция $f(x)$ монотонно возрастает. Обозначается так: $(\nearrow)$. В случае (2) – значения x, на которыхфункция монотонно убывает. Обозначается: $(\searrow)$.

Пример.Найдитеотрезкимонотонностифункции $f\left(x\right)=\frac{1}{3}\cdot x^3-2x^2+1$.

Решение. Используянеравенство (1), найдемотрезки монотонного возрастанияфункции:

$$\left(\nearrow\right)\Rightarrow f\left(x\right)>0\Rightarrow\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+1\right)'>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x>0\Rightarrow\left[\begin{matrix}x<0\\x>2\end{matrix}\right.\Rightarrow x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(2;\infty\right)$$

При всехостальныхзначениях x функциябудет монотонно убывать:

$\left(\searrow\right)\Rightarrow x\in\left(0;2\right)$. Неравенство (2) можно не решать.

5.4. Точки экстремума

1.Критические точки функции.Значенияаргумента x, при которыхвыполняетсяравенство: $f'\left(x\right)=0$

азываются *критическими точками первого типа* функции.

Пример.Найдитекритические точки первого типа функций:

2.1. $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3$; 2.2. $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+x-2$

Решение.

2.1 Используемопределениекритическихточекпервого типа:

$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3\right)'=0\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{matrix}x_1=0;\\x_2=1;\\x_3=-1.\end{matrix}\right.$$

Функция (2.1) имеет три критические точки первого типа:

$x_1=0, x_2=1, x_3=-1$.

2.2 $f'(x)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3+x-2\right)'=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x \in \varnothing$.

Управление (3) для функции (2.2) не имеетрешений, поэтому у этойфункциикритическихточекпервого типа нет.

Критические точки второго типа определяются следующим условием:

(4) $$f''(x)=0.$$

Пример.Найдитекритические точки второго типа функций (2.1) и (2.2) изпримера 2.

Решение.

(2.1) $f''(x)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3\right)''=0 \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3\right)'\right)'=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x^3-x\right)'=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_4=\frac{1}{\sqrt{3}}; \\ x_5=-\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

Функция (2.1) имеетдвекритические точки второго типа: $x_4=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_5=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2.2
$$f''(x)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3+x-2\right)''=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\left(\frac{1}{3}x^3+x-2\right)'\right)'=\left(x^2+1\right)'=2x=0 \Rightarrow x_6=0$$

Функция (2.2) имеет одну критическую точку второго типа: $x_6=0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Укажите правильный вариант утверждения: «Если $x1$ критическая точка первого типа функции $y = f(x)$, то …»
   Варианты ответа: 1) $f(x1) = 0$; 2) $f'(x1) = 0$; 3) $f''(x1) = 0$; 4) $f'(x1) > 0$; 5) $f'(x1) < 0$, 6) $f(x1) = 0$ и $f'(x1) = 0$.
2. Укажите правильный вариант утверждения: «Если $x1$ критическая точка второго типа функции $y = f(x)$, то …»
   Варианты ответа: 1) $f(x1) = 0$; 2) $f'(x1) = 0$; 3) $f''(x1) = 0$; 4) $f'(x1) > 0$; 5) $f'(x1) < 0$, 6) $f(x1) = 0$ и $f'(x1) = 0$.
3. Укажите правильный вариант утверждения: «Если $x1$ точка максимума функции $y = f(x)$, то …»
   Варианты ответа: 1) $f(x1) = 0$; 2) $f'(x1) = 0$; 3) $f''(x1) = 0$;
   4) $f(x1) = 0$ и $f'(x1) = 0$;
   5) $f'(x1) = 0$ и $f''(x1) > 0$; 6) $f'(x1) = 0$ и $f''(x1) < 0$.
4. Укажите правильный вариант утверждения: «Если $x1$ точка минимума функции $y = f(x)$, то …»
   Варианты ответа: 1) $f(x1) = 0$; 2) $f'(x1) = 0$; 3) $f''(x1) = 0$;
   4) $f(x1) = 0$ и $f'(x1) = 0$; 5) $f'(x1) = 0$ и $f''(x1) > 0$; 6) $f'(x1) = 0$ и $f''(x1) < 0$.
5. Укажите правильный вариант утверждения: «Если $x1$ точка перегиба функции $y = f(x)$, то …»
   Варианты ответа: 1) $f(x1) = 0$; 2) $f'(x1) = 0$; 3) $f''(x1) = 0$; 4) $f'(x1) > 0$; 5) $f'(x1) < 0$, 6) $f(x1) = 0$ и $f'(x1) = 0$.
6. Найдите критические точки первого типа функции $y(x)$, если её производная задана:
   1) $y' = x2 – 4x$; 2) $y' = x2 – 4$; 3) $y' = x2 + 4$.
7. Найдите точки экстремума функции $y(x)$, если известны её критические точки I типа и y':
   1) $x1 = 0, x2 = 1, y' = 12x2(x - 1)$.
   2) $x1 = 0, x2 = -2, y' = x (x + 2)2$.
8. Найдите критические точки второго типа функции $y(x)$, если задана y'':
   1) $y'' = x2 – 9$;
   2)$y'' = (x - 5)(x2 + 4)$.
   3) $y'' = x2 + 25$.
9. Найдите точки перегиба функции, если известны её критические.точки II типа и y'':
   $x1 = 0, x2 = 4, y'' = 2x(x - 4)2$.
   $x1 = -2, y'' = (x2+1) (x + 2)2$

10. Найдите интервалы монотонного убывания функции $y(x)$, если задана y': $y' = 4x2 - 8x$.
$y' = x2 – 16$.
$y' = x2 + 4$.
$y' = x3 + 4x2$.
11. Найдите интервалы монотонного возрастания функции $y (x)$, если задана y': $y' = 3x2 - 6x$.
Найдите интервалы монотонного возрастания функции $y (x)$, если задана y': $y' = x2 – 25$
Найдите интервалы монотонного возрастания функции $y (x)$, если задана y': $y' = x2 + 9$.
Найдите интервалы монотонного возрастания функции $y (x)$, если задана y': $y' = x3 - 5x2$.
12. Найдите интервалы выпуклости функции $y(x)$, если задана y'': $y'' = (x + 2) (x2 + 1)$.
Найдите интервалы выпуклости функции $y(x)$, если задана y'': $y'' = 2x2 – 2$.
Найдите интервалы выпуклости функции $y(x)$, если задана y'': $y'' = 3x2 + 27$.
Найдите интервалы выпуклости функции $y(x)$, если задана y'': $y'' = x3 - x2$.
13. Найдите интервалы выгнутости функции $y (x)$, если задана y'':
1) $y'' = (x - 1) (x2 + 4)$; 2) $y'' = 2x2 – 8$; 3) $y'' = 2x2 + 32$; 4) $y'' = x3 - 7x2$.
Найдите интервалы выгнутости функции $y (x)$, если задана y'': $y'' = (x - 1) (x2 + 4)$.
Найдите интервалы выгнутости функции $y (x)$, если задана y'': $y'' = 2x2 – 8$.
Найдите интервалы выгнутости функции $y (x)$, если задана y'': $y'' = 2x2 + 32$.
14. Найдите критические точки I типа функции $y(x)$: $y = (x - 2)(x -3)4$.
Найдите критические точки I типа функции $y(x)$: $y = (x - 3)5(x + 4)$.
Найдите критические точки I типа функции $y(x)$: $y = x2 (x-1)5$
15. Найдите критические точки II типа функции $y(x)$: $y = (x + 2)(x - 4)3$.
Найдите критические точки II типа функции $y(x)$: $y = (x +5)6(x + 1)$.
Найдите критические точки II типа функции $y(x)$: $y = x (x+3)4$.
16. Найдите точку минимума функции $y(x)$: $y = (3x4/4) – 9x3 + 5$.
Найдите точку минимума функции $y(x)$: $y = (3x5/5) – (9x4/4) + 1$.

17. Найдите точку максимума функции y(x): y = (9x4/4) – 27x3 + 2.
    Найдите точку максимума функции y(x): y = (x5/5) – (3x4/4) + 5.
18. Найдите интервалы монотонного возрастания функции y(x):
    y = (x - 1)(x -7)4.
    Найдите интервалы монотонного возрастания функции y(x):
    y = (x + 3)5(x + 2).
    Найдите интервалы монотонного возрастания функции y(x):
    y = x2 (x-4)5.
19. Найдите интервалы монотонного убывания функции y(x):
    y = (x + 2)(x -5)4.
    Найдите интервалы монотонного убывания функции y(x):
    y = (x - 4)5(x + 1).
    Найдите интервалы монотонного убывания функции y(x): y = x2 (x+3)5
20. Найдите наибольшее значение функции y = (2x4/4) – (18x2) + 5 на интервале [-1; 1].
    Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y(x) в точке x0; y = 2x4 - x3 , x0 = 1.
21. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции y(x) в точке x0:
    1) y = (1-x)3 , x0 = 2.
    2)x0; y = cos4x, x0 = π/8.
22. Напишите уравнение касательной к графику функции y(x) в точке x0:
    1) y = -4x4 + 3x , x0 = 0.
    2) y = (2-x)4 , x0 = 1; 3) y = sin4x, x0 = π/4.
    3) y = sin4x, x0 = π/4.

6. Элементы интегрального исчисления

Справочная информация

6.1. Операция неопределённого интегрирования

1. Первообразная функция. Функция $\Phi(x)$ называется *первообразнойфункцией* для заданной функции $\varphi(x)$, если имеет место равенство:

(1) $$\varphi(x)dx = d\Phi(x)$$

или, так как, $d\Phi(x) = \Phi'(x)dx$, то:

(2) $$\Phi'(x)=\varphi(x)$$

Замечание:

1. Если функции $\varphi(x)$ простая, то восстановление её первообразной возможно с помощью таблицы производных или таблицы дифференциалов (см. приложение, таблицы 1 и 2).

Пример 1. Найдите функцию $\Phi(x)$, если $d\Phi(x)=e^{2x}dx$.

Решение. Так как $d\Phi(x)=\Phi'(x)dx$, то $\Phi'(x)=e^{2x}$. Из таблицы производных 1.1 следует (формула 5а), что в качестве $\Phi(x)$ надо взять функцию $\frac{1}{2}e^{2x}$.

Пример 2. Найдите первообразную функцию для функции $y=\cos x$.

Решение. Формула (2) здесь имеет вид: $\Phi'(x)=\cos x$, где $\Phi(x)$ - первообразная функция для функции $\cos x$. Чтобы её определить надо в таблице 1 или 2 найти функцию, производная которой равна $\cos x$ (см. формула № 7). Таким образом, первообразной функцией для функции $y=\cos x$, является функция $\Phi(x)=\sin x$.

Отметим, что решением рассмотренной в примере 2 задачи является также, например, функция $\Phi(x)=\sin x+4$ и вообще любая функция вида: $\Phi(x)=\sin x+C$, где C- произвольна постоянная (независящая от x) величина. Для того, чтобы убедится в том, что функция $\Phi(x)=\sin x+C$ является первообразной функцией для функции $y=\cos x$ проверим выполнимость формулы (2):

$$(\sin x+C)'\overset{?}{=}(\cos x)'\Rightarrow(\sin x)'+(C)'\overset{?}{=}(\cos x)'\Rightarrow$$

$$\cos x=\cos x.$$

Знак вопроса над первыми двумя равенствами указывают на то, что справедливость этих равенств проверяется. Можно сказать, что *задача о нахождении первообразной функции для заданной функции имеет бесконечно много решений.*

Пример 3. Найдите первообразную функцию для функции, дифференциал которой равен: $5x^4dx$

Решение. По условию задачи первообразная функция $\Phi(x)$удовлетворяет равенству: $d\Phi(x)=5x^4dx$ (см.формулу 1.2.1). Из таблицы 1.2 (формула 2) следует, что $\left(x^5\right)'=5x^4$. Поэтому, первообразной функцией будет функция x^5.

2. **Операция неопределённого интегрирования**

Операция неопределённого интегрирования:

1. выполняется над дифференциальным выражением $\varphi(x)dx$;
2. обозначается символом $\int$, читается – *интеграл*;
3. результатом её выполнения является *множество функций* $\Phi(x)+C$:

(3) $$\int\varphi(x)dx=\Phi(x)+C,$$

которое называется *неопределённым интегралом,* а каждый элемент этого множества является *первообразной функцией* для функции $\varphi(x)$;

4. C – произвольная*постоянная интегрирования*, которая не зависит от *переменной интегрирования* x, в частности - это число;
5. дифференциальное выражение $\varphi(x)dx$ называется *подинтегральным выражением*, а $\varphi(x)$ - *подинтегральной функцией*.

Замечание.

1. Если над функцией $\int\varphi(x)dx$ выполнить операцию дифференцирования, то имеет место формула:

(4) $$d\left(\int\varphi(x)dx\right)=\varphi(x)dx.$$

Формулу (4) можно записать так:

(5) $$\left(\int\varphi(x)dx\right)'=\varphi(x).$$

Пример 4.Найдите дифференциал функции f(x), если $f(x)=\int\ln(1+x^2)dx$. **Ответ**: $df(x)=\ln(1+x^2)dx$.

Пример 5.Найдите производную функции f(x), если $f(x)=\int\ln(1+x^2)dx$. **Ответ**: $f'(x)=\ln(1+x^2)$.

2. Если операция неопределённого интегрирования выполняется над дифференциальным выражением вида: $\Phi'(x)dx$, то имеет место формула:

(6) $$\int \Phi'(x)dx = \Phi(x) + C.$$

Формулу (6) можно записать так:

(7) $$\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C.$$

3. Из формул (4) и (7) видно, что последовательное применение двух операций $\int$ и d оставляет неизменным величину, на которую они действуют. В первом случае (4) это дифференциальное выражение $\varphi(x)dx$, над которым сначала выполняется операция неопределённого интегрирования, а затем – операция дифференцирования. Во втором случае (7) это функция $\Phi(x)$, над которой последовательно выполняются операции дифференцирования и затем интегрирования. Так как последней является неоднозначная операция интегрирования, то функцией $\Phi(x)$ «сохраняется с точностью до постоянной величины C». Таким образом, операции $\int$ и dкак бы «уничтожают» друг друга, оставляя объект, на который они действуют, неизменным. То есть, *операция неопределённого интегрирования является обратной для операции дифференцирования.*

Пример 6.Выполните интегрирование: $\int d\left(\sin\left(\ln x\right)\right)$.

Ответ: $\int d(\sin(\ln x)) = \sin(\ln x) + C$.

Пример 7.Выполните интегрирование: $\int\left((\mathrm{arctg}(1+x^4))\right)' dx$.

Ответ: $\int\left((\mathrm{arctg}(1+x^4))\right)' dx = (\mathrm{arctg}(1+x^4) + C$.

Пример 8.Выполните интегрирование: $\int 8x^7dx$.

Решение. Запишем подынтегральное выражение $8x^7dx$ с помощью таблицы дифференциалов (формула № 1) в виде дифференциала функции: $8x^7dx = d\left(x^8\right)$. Тогда, $\int 8x^7dx = \int d\left(x^8\right) = x^8 + C$.

6.2. Табличное интегрирование

Решение задачи, связанной с выполнением операции неопределённого интегрирования $\int f(x)dx$, не имеет общего алгоритма решения. То есть, нельзя для произвольной функции $f(x)$указать последовательность действий, которые надо выполнить, чтобы найти множество первообразных функций $F(x)+C$для функции $f(x)$. Более того, результат операции интегрирования не всегда существует в том смысле, что на множестве элементарных функций может и не быть первообразной функции $F(x)$для функции $f(x)$. Так, например, «не вычисляемыми» являются интегралы:

$\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int e^{x^2}dx$.

Только для некоторых типов функций $f(x)$можно построить алгоритмы вычисления неопределённых интегралов от этих функций.

Далее будут рассмотрены только такие неопределённые интегралы, вычисление которых связано с реализацией стандартных схем (алгоритмов) их вычисления.

Замечания:

1. Начинать процедуру интегрирования следует с анализа структуры подынтегральной функции, определения её типа.
2. Перечислим те стандартные ситуации, которые будут обсуждаться далее в связи с выполнением операции неопределённого интегрирования.

- Подынтегральная функция $f(x)$является «табличной», то есть структура функции $f(x)$такова, что результат её интегрирования приведен в таблице 2. В этих таблицах собраны наиболее простые и часто встречающиеся интегралы.
- Подынтегральная функция $f(x)$ «близка к табличной функции». Это значит, что с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и используя свойства неопределённого интеграла можно привести интеграл к «табличному виду».

Контрольные вопросы и задания

1. Операция «неопределённого интегрирования» по переменной x выполняется над:

Варианты ответов: 1) любыми числами; 2) любым дифференциальным выражением вида f(y) dx; 3) любым дифференциальным выражением вида f(x, t)dy; 4) только монотонно возрастающими функциями f(x);
5) любым дифференциальным выражением вида f(x, y) dx + g(x, y) dy.

2. Вычислите с помощью таблицы НИ:

$$1)\ \int \frac{1}{9-(x+2)^2}dx;$$

$$2)\ \int \frac{1}{x^2+2x+8}dx;\quad 3)\int \frac{1}{3x+10}dx;\quad 4)\int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx$$

3. Запишите выражение для производной функции f(x):

$f(x)=\int cos^7 x\,dx$

4. Запишите выражение для дифференциала функции *f(x),* если

$f(x)=\int ln(cos\,x)dx$.

Варианты ответов: 1) $ln(cosx)dx$; 2) $\frac{1}{cosx}\cdot sin\,xdx$; 3) $\int\frac{1}{cosx}\cdot sin\,xdx$;

4) $sin\,x$; 5) $ln(sin\,x)$

5. Укажите правильный результат для выражения d (∫exp(x2)dx), используя определения операций интегрирования и дифференцирования:

Варианты ответов: 1) exp(x2)dx; 2) exp(x2); 3) exp(x2) + C; 4) (exp(x2))′; 5) d(exp(x2)).

6. Укажите правильное продолжение утверждения: «Операция неопределённого интегрирования по переменной *x* выполняется над …»:

Варианты ответов: 1) только над любыми числами; 2) любым дифференциальным выражением вида *f(y)dx*; 3) любым дифференциальным выражением вида *f(x)dy*; 4) только над монотонно возрастающими функциями *f(x);* 5) любым дифференциальным выражением вида *f(x, y) dx + g(x, y) dy*.

7. Запишите выражение для производной функции*f(x),* если
$f(x)=\int ln(cos\,x)dx$ (x) .

Варианты ответов: 1) $f'(x)=\ln(\cos x)$; 2) $f'(x)=\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x$;

3) $f'(x)=\int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x dx$; 4) $\sin x$; 5) $f'(x)=\ln(\sin x)$

8. Укажите правильное продолжение утверждения: «Результатом вычисления НИ $\int f(x)dx$ является …»:

Варианты ответов: 1) только положительное число; 2) только одна функция; 3) множество функций; 4) только любое действительное число; 5) дифференциальное выражение.

9. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то имеет место равенство:

Варианты ответов: 1) f′(x) = F(x); 2) f (x) dx = dF(x); 3) f′(x) = F′(x); 4) f (x) - F(x) = C; 5) df (x) = dF(x).

7. Элементы векторной алгебры

Справочная информация

7.1. Координаты вектора, модуль вектора

1. **Координаты вектора.** Вектор это совокупность чисел $(a_1,\dots,a_n)$, которые называются *координатами вектора* $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$. Задать вектор *аналитически* это значит задать координаты вектора.
2. **Формула вычисления координат вектора по координатам точек его начала и конца.** Если известны координаты точек $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по формуле:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

$$\left(\overrightarrow{AB}\right)_x=x_2-x_1,\ \left(\overrightarrow{AB}\right)_y=y_2-y_1,\ \left(\overrightarrow{AB}\right)_z=z_2-z_1$$

3. **Модуль вектора**. *Модуль вектора* $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ – это число, которое обозначается $\left|\vec{a}\right|$ и вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

С геометрической точки зрения модуль вектора $\overline{AB}$ - это длина отрезка AB.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

7.2. Действия над векторами

1. **Сложение векторов.** Суммой двух векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ называется *вектор* $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, координаты которого определяются равенствами:

$$c_1=a_1+b_1,\quad c_2=a_2+b_2,\quad c_3=a_3+b_3.$$

2. **Умножением векторов**. Произведением числа λ на вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ называется вектор $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)=\lambda\cdot\vec{a}$, координаты которого определяются формулами:

$$b_1=\lambda a_1,\qquad b_2=\lambda a_2,\qquad b_1=\lambda a_1.$$

Для операций сложения векторов и умножение на число имеет место формула: $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}+\ldots\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}+\ldots$

3. **Скалярное произведение**. *Скалярным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется *скаляр* (число) λ, которое обозначается: $\lambda=\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\lambda=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ и вычисляется по формуле:

$$\lambda=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3.$$

4. **Инвариантная форма записи скалярного произведения.** *Скалярное произведение* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ может быть вычислено по формуле: $\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|cos\,\beta$,

где $\left|\vec{a}\right|$ и $\left|\vec{b}\right|$ - модули векторов, а β - угол между ними. Такая форма записи называется *инвариантной*.

5. **Формула вычисления угла между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$cos\,\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

6. **Формула вычисления проекции вектора** $\vec{c}$ **на вектор** $\vec{a}$.

$$Пр_{\vec{a}}\vec{c}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|}$$

7.3. Коллинеарность и ортогональность векторов

1. **Коллинеарные вектора**. Если координаты двух векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, пропорциональны, то есть:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

то эти вектора называются *коллинеарными***.** Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\,||\,\vec{b}$. *С геометрической точки зрения* коллинеарность векторов соответствует тому, что они лежат или на одной прямой, или на параллельных прямых.

2. **Ортогональные вектора**. Если координаты двух векторов $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, удовлетворяют условию:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,$$

то они называются *ортогональными*. Ортогональность двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\perp\vec{b}$. *С геометрической точки зрения* ортогональность векторов соответствует тому, что они лежат на взаимно перпендикулярных прямых.

Контрольные вопросы и задания

1. Если координаты точки А(-3, 4), то расстояние от А до оси OY равно:

Варианты ответов: 1) 3; 2) -3; 3) 4; 4) -4; 5) $(3^2 + 4^2)^{1/2} = 5$.

2. Если координаты точки А(-3, 4), то расстояние от А до оси OX равно:

Варианты ответов: 1) 3; 2) -3; 3) 4; 4) -4; 5) $(3^2 + 4^2)^{1/2} = 5$.

3. Если координаты точки А(-3, 4), то расстояние от А до оси OX равно:

Варианты ответов: 1) 3; 2) -3; 3) 4; 4) -4; 5) $(3^2 + 4^2)^{1/2} = 5$.

4. Вектор перпендикулярен оси OY. Его модуль равен 3. Укажите возможный вариант значений его координат.

*Варианты ответов:*1) (3; 3); 2) (3; 0); 3) (0; 3); 4) (0; -3); 5) (-3;-3).

5. Напишите координаты точки, расположенной на отрицательной части оси OX на расстоянии 4 от начала координат.

*Варианты ответов:*1) (4; -4); 2) (-4; 0); 3) (0; 4); 4) (4; 0); 5) (0; -4).

6. Координаты точек: $A_1(-2; 3)$ и $B_1(2; -2)$, тогда координаты вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ равны:

Варианты ответов: 1) (4; 5); 2) (-4; 0); 3) (5; 0); 4) (4; -5); 5) (-4; 5).

7. Найдите расстояние между точками A (-2; 3) и B (-2; 4).

Варианты ответов: 1) 4; 2) 2; 3) -1; 4) 3; 5) 1.

8. Найдите координаты середины отрезка AB, если
A(-5; 3) и B(5; -1).

Варианты ответов: 1) (5; 1); 2) (0; 2); 3) (10; 2); 4) (-1; 5); 5) (3; 5).

9. Найдите модуль вектора $\vec{a}=(-2;-1;2)$.

Варианты ответов: 1) 5; 2) -2+(-1)+2=-1; 3) $|-2+(-1)+2|=1$; 4) 3; 5) (2; 1; 2).

10. Вектор параллелен оси OX. Его модуль равен 15. Укажите возможный вариант значений его координат.

Варианты ответов: 1) $\vec{a}$ = (15; 15); 2) $\vec{a}$ = (-15; 0);
3) $\vec{a}$ = (0; 15); 4) $\vec{a}$ = (0; -15); 5) $\vec{a}$ = (-15;-15).

11. Вектор, модуль которого равен 4, параллелен оси OY и совпадает с ней по направлению. Найдите его координаты.

Варианты ответов:
1) $\vec{a}$ = (4; -4); 2) $\vec{a}$ = (4; 0); 3) $\vec{a}$ = (0; 4);
4) $\vec{a}$ = (-4; 0); 5) $\vec{a}$ = (-4; -4); 6) $\vec{a}$ = (0; -4).

12. Вектор перпендикулярен оси OX. Его модуль равен 7. Укажите возможный вариант значений его координат.

Варианты ответов: 1) $\vec{a}$ = (7; 7); 2) $\vec{a}$ = (-7; 0);
3) $\vec{a}$ = (7; 0); 4) $\vec{a}$ = (0; -7); 5) $\vec{a}$ = (-7;-7).

13. Известно, что вектор $\vec{a}$ перпендикулярен оси OY и $|\vec{a}|=3$. Укажите возможный вариант значений его координат.

Варианты ответов: 1) $\vec{a}$ = (3; 3); 2) $\vec{a}$ = (3; 0);
3) $\vec{a}$ = (0; 3); 4) $\vec{a}$ = (0; -3); 5) $\vec{a}$ = (-3;-3).

14. Укажите правильное продолжение утверждения: «Если вектор $\vec{a}$ задан в прямоугольной декартовой системе координат, то…»

a) проекция вектора $\vec{a}=(3;0;4)$ на ось OX равна:

Варианты ответов: 1) 0; 2) 3+4=7; 3) $3^2+4^2=25$; 4) 3; 5) 4.

b) проекция вектора $\vec{a}=(-3;7;-4)$ на ось OY равна:

Варианты ответов: 1) 3; 2) 14; 3) -7; 4) -3; 5) 7.

15. Проверьте выполняется ли условие:

a) коллинеарности для векторов $\vec{b}=(1;-1;2)$ и $\vec{c}=(2;2;4)$;

b) ортогональности для векторов $\vec{b}=(2;-1;2)$, $\vec{c}=(2;4;1)$.

16. При каком значении $\alpha \neq 0$ вектора $\vec{b}=(\alpha;-2\alpha)$ и $\vec{a}=(\alpha;2)$ ортогональны.

17. Укажите правильное продолжение утверждения: «Если $\vec{a}=2\vec{b}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ …»:

Варианты ответов:

1) ортогональны; 2) не коллинеарные; 3) сонапрвленные;

4) произвольно направлены по отношению друг к другу;

5) противоположно направленные.

18. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{b}=(1;-2)$; $\vec{a}=(0;-4)$.

19. Укажите правильное продолжение утверждения: «Если $\vec{a}=-5\vec{b}$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ …»

Варианты ответов:

1) ортогональны; 2) не коллинеарные; 3) сонапрвленные;

4) произвольно направлены по отношению друг к другу;

5) противоположно направленные.

20. Проверти, выполняется ли условие коллинеарности векторов $\vec{b}$ = (1, -1,2), $\vec{c}$ = (2,2,4).

21. Проверти, выполняется ли условие ортогональности векторов $\vec{b}$ = (2, -1,2), $\vec{c}$ = (2,4,1)

22. Определите, при каком значении α ≠ 0 вектора $\vec{b}$ = (α, -2α) и $\vec{a}$ = (α, 2) ортогональны.

23. Найдите на оси OX точку C такую, чтобы угол ABC был прямой, если A(-2; 3) и B(2; -2) .

24. Найдите на оси OX точку C такую, чтобы угол ABC был прямой, если A(4; 3) и B(-3; -2) .

25. Найдите на оси ОХ точку С такую, чтобы точки А, В и С лежали на одной прямой, если А(-2; 3) и В(2; -2)

26. Найдите на оси ОХ точку С такую, чтобы угол АВС был прямой, если А(4; 3) и В(-3; -2) .

Таблица производных простой функции $y = f(x)$

1.	$(C)' = 0$
2.	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
2.1	$\left(x^2\right)' = 2x$
2.2	$\left(x^3\right)' = 3x^2$
3.	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}$
3.1	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
3.2	$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
4.	$\left(\sqrt[k]{x^m}\right)' = \left(x^{\frac{m}{k}}\right)' = \frac{m}{k}x^{\frac{m}{k}-1}$
4.1	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.2	$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
5.	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

5.1	$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
6.	$\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
6.1	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$
7.	$\left(\sin x\right)' = \cos x$
8.	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
9.	$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\left(\cos x\right)^{2}}$
10.	$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\left(\sin x\right)^{2}}$
11.	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12.	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$
13.	$\left(\mathrm{arc\,tg}x\right)' = \frac{1}{1+x^{2}}$
14.	$\left(\mathrm{arc\,ctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$

Табл. 1

Таблица неопределённых интегралов

1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}, \qquad n \neq -1$
2.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert$
3.	$\int s^x dx = \frac{1}{\ln s} \cdot s^x$
4.	$\int e^x dx = e^x$
5.	$\int \sin x \, dx = -\cos x$
6.	$\int \cos x \, dx = \sin x$
7.	$\int \mathrm{tg} x \, dx = -\ln\lvert \cos x \rvert$
8.	$\int \mathrm{ctg} x \, dx = \ln\lvert \sin x \rvert$
9.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x$
10.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x$
11.	$\int \frac{1}{x^2 + c} dx = \frac{1}{\sqrt{-4c}} \ln\left\lvert \frac{x - \sqrt{-c}}{x + \sqrt{-c}} \right\rvert,$ $c < 0$
12.	$\int \frac{1}{x^2 + c} dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \mathrm{arctg} \frac{x}{\sqrt{c}}, \qquad c > 0,$
13.	$\int \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \arcsin \frac{x}{c}$
14.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}} dx = \ln\left\lvert 2x + 2\sqrt{x^2 + c} \right\rvert$
15.	$\int \ln x dx = x \ln x - x$

Табл. 2

Литература

1. Саенко С.Л. Математика (для студентов-иностранцев). Одесса: ОПИ, 2001.Ч.1, 2-220 с.
2. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 8 класу./ За редакцією З.І. Слепкань. – Тернопіль: Підручник і посібник, 2006.-323 с.
3. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 8 класу./ За редакцією З.І. Слепкань. – Тернопіль: Підручник і посібник, 2005.-256 с.
4. Шкіль М.І., ті інші. Алгебра і початок аналізу. Підручник для 10 класу загальноосвіт. Навч. Закладів – К.: Зодіак – ЕКО, 2006. – 272 с.
5. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра: Учебник для 8 классов общеобразовательных учебных заведений – Пер. с укр. – Х.: Гимназия 2008. – 256 с.
6. Мерзляк. Алгебра: підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів – Х.: Гімназія – 2008.
7. Роганін О.М., Каплун О.І. Математика: Практичний довідник. - Харків ФОП Співак Т.К., 2009.-416 с.
8. Роганин А.Н. Алгебра и начало анализа в опреелениях, таблицах и схемах. 7-11 классы – 5.е изд. – Харков: Веста: Издательство «Ранок», 2009. – 112 с.

Методические указания

для проведения практических заняний по дисциплине «Математика» для иностранных слушателей подготовительного отделения

Составители:

доцент кафедры довузовской подготовки Аркатов Ю.Н.

доцент кафедры довузовской подготовки Расторгуева Т.Е.

методист по ОГЕКУ Ткаченко Н.А.

ст. лаборант кафедры довузовской подготовки Хохлова О.П.

Подп.к печати	Формат 60x84/16	Бумага офис.
Условн.печ.л.	Тираж	Зам №

Напечатано с готового оригинал-макета

Одесский государственный экологический университет

65016, Одесса, ул. Львовская, 15
