МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних робіт та СРС з дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології" (розділ „Аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними: метод характеристик") для аспірантів II року денної форми навчання

Галузь знань: „Природничі науки"

"Затверджено"
на засіданні науково-технічної ради
протокол №____ від ________ 2011 р.
Голова ради ________Тучковенко Ю.С.

"Затверджено"
на засіданні кафедри
"Фізики атмосфери та кліматології"
протокол №_____ від ___________ 2011 р.
Зав. кафедрою__________С.М.Степаненко

Одеса 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних робіт та СРС з дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології” (розділ „Аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними: метод характеристик”) для аспірантів ІІ року денної форми навчання

Галузь знань: „Природничі науки”

Одеса 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт та СРС з дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології” (розділ „Аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними: метод характеристик”) для аспірантів ІІ року денної форми навчання

Галузь знань: „Природничі науки”

“Затверджено”
на засіданні науково-технічної ради
протокол №____ від ________ 2011 р.
Голова ради ________Тучковенко Ю.С.

Одеса 2011

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт та СРС з дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології” (розділ „Аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними: метод характеристик”) для аспірантів II року навчання денної форми навчання

Укладачі: доц, Казаков О.Л., ас. Хоменко І.А.

Підп. до друку	Формат	Папір
Умовн. друк. арк.	Тираж	Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

Зміст

1 ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Мета та задачі дисципліни

Дисципліна «Математичне моделювання в гідрометеорології та екології» є нормативною навчальною дисципліною для аспірантів II року навчання, що належить до циклу науково–природничих дисциплін та спрямована на підвищення наукової кваліфікації аспірантів, які проводять дисертаційні дослідження за науковими спеціальностями „Метеорологія”, „Кліматологія”, „Гідрологія”, „Океанологія” та „Конструктивна географія”.

Засвоєння основних її положень базується на знаннях та вміннях, здобутих з дисциплін „Вища математика”, „Фізика”, „Обчислювальна математика” та „Статистичні методи обробки інформації”.

Основною метою дисципліни є систематичне викладення:

1) принципів побудови математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують у спрощеному або повному вигляді динаміку різноманітних природних систем,

а також,

2) точних, так званих, аналітичних, та різноманітних наближених методів розв’язання отриманих диференціальних рівнянь.

Курс заснований на об’єднанні фізичних міркувань з математичним аналізом.

Головним завданням дисципліни є формування у студентів загальної системи знань з фізичних механізмів, які відбуваються в атмо-, гідро-, літо-, кріо- і біосферах, а також придбання практичних навичок щодо застосування математичних методів для опису цих фізичних механізмів та реалізації отриманих моделей на ПК.

Здобуті знання повинні забезпечувати створення цілісної системи знань та вмінь, які дозволяють аспірантам застосовувати в своїх дослідженнях точні та різноманітні наближені методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Методичні вказівки поділено на п’яти розділів. Перший розділ знайомить студента зі змістом дисципліни, організацією навчального процесу та знаннями і вміннями, які він мусить придбати під час вивчення курсу.

Другий – четвертий розділи містять теми, які охоплюють практичну частину, що присвячено одному з основних аналітичних методів розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними, – методу характеристик. При засвоєнні цього методу аспірант навчається безпомилково визначати тип диференціального рівняння з частинними похідними, що у подальшому знадобиться при застосуванні будь-яких методів розв'язання, оскільки для кожного типу диференціального рівняння і в аналітичних, і в чисельних методах використовуються свої техніки розв'язання, окрім того, приведення диференціального рівняння з частинними похідними, допомагає не тільки отримати точний розв'язок, але і зробити більш глибокий фізичний аналіз поставленої задачі.

П'ятий розділ, тема якого тісно примикає до попередньої, присвячено спрощенню групи молодших похідних для рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами. Основну увагу цього розділу зосереджено на подальшому спрощенні диференціального рівняння, вже приведеного до канонічного вигляду.

До кожної теми надаються рекомендації по вивченню теми, приклади розв'язання типових задач, контрольні питання для ліпшого засвоєння матеріалу студентом, а також завдання, виконання яких дозволить студентам проконтролювати ступінь засвоєння ними матеріалу.

Шостий розділ присвячено організації контролю знань та вмінь.

1.2 Зміст практичної частини дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології"

Тема 1. Основні аналітичні (точні) методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними. Канонічна форма. Метод характеристик. Спрощення групи молодших похідних для рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами. Ряди Фур'є. Швидке перетворення Фур'є. Метод Фур'є та його застосування до розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів. Застосування спеціальних функцій до розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Тема 2. Основні чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Метод скінченних різниць. Метод скінченних елементів: базисні (пробні) функції. Основні відомості про спектральні методи.

Тема 3. Чисельні схеми та їх властивості.

Точність чисельного розв'язку. Апроксимація та узгодженість. Стійкість, нестійкість та жорсткі рівняння. Коректність, стійкість та збіжність скінченнорізницевих схем. Методи побудови скінченнорізницевих схем. Явні, неявні та напівнеявні схеми. Аналіз обчислювальної стійкості: критерій

Фрідріха-Куранта-Лєві, прямий метод, метод Неймана. Обчислювальна в'язкість. Обчислювальні моди.

Тема 4. Застосування методів обчислювальної математики для розв'язання різних типів скінченнорізницевих рівнянь.

Ітераційні методи розв'язання (точкові та блочні): метод одночасних зміщень, метод послідовних зміщень, метод послідовної верхньої релаксації. Схеми інтегрування методом розщеплення.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

1. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 660 с.
4. Хоменко Г.В., Хохлов В.М. Гідродинамічні методи прогнозу погоди. – Одеса: Екологія, 2008. – 340 с.
5. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Изд-во "МИР", 1982. – 236 с.

1.3 Перелік знань та вмінь та організація навчального процесу

В результаті вивчення дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології" аспірант повинен

знати:

1) основні принципи та підходи до побудови математичних моделей різноманітних фізичних процесів, що відбуваються в різних оболонках Землі;

2) правила постановки коректної математичної задачі;

3) основні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними (точні, асимптотичні, чисельні, наближені аналітичні) та межі їх застосовності;

4) основні типи чисельних схем та які саме типи застосовуються до різних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними;

5) властивості чисельних схем (коректність, стійкість та збіжність);

6) методи обчислювальної математики, які використовуються при розв'язанні різних типів скінченнорізницевих рівнянь;

вміти:

1) використовувати отримані теоретичні знання при аналізі фізичних процесів з єдиних науково-методичних позицій;

2) використовуючи математичний апарат для опису фізичних процесів, сформулювати коректну математичну задачу;

3) використовуючи отримані знання з методів розв'язання рівнянь математичної фізики, підібрати метод розв'язання і довести доцільність свого вибору;

4) розписати рівняння математичної фізики у скінченнорізницевій формі та підібрати чисельну схему для його розв'язання таким чином, щоб вона була коректною, стійкою та збіжною;

5) підібрати метод розв'язання отриманої системи лінійних рівнянь.

При вивченні дисципліни студент знайомиться з відповідними розділами в навчальній літературі та власних конспектах лекцій, при необхідності та за вказівкою викладача доповнюють рукопис конспектуванням.

Контроль самостійної роботи студента протягом всього часу вивчення дисципліни здійснюється методом модульно–рейтингового контролю. Він передбачає виконання контрольних заходів з трьох теоретичних і трьох практичних модулів.

2 ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ. ЇХ ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА

Диференціальні рівняння у частинних похідних другого і більш високого порядків часто зустрічаються в різних областях математики, фізики, механіки, хімії, біології та багатьох інших прикладних науках.

Розглядатимемо методи розв'язання задач, які дозволяють математичне формулювання у вигляді диференціальних рівнянь та деяких додаткових умов (початкових та граничних). Основні теоретичні методи умовно можна поділити на чотири класи:

1. точні методи;
2. асимптотичні методи (методи збурень);
3. чисельні методи;
4. наближені аналітичні методи.

Ця класифікація досить зручна, оскільки заснована на використанні ряду характерних рис та відзначальних ознак кожного класу. Важливо відзначити, що більшість фахівців зазвичай добре володіють тільки методами одного класу (ця обставина часто призводить до недооцінки можливостей інших методів).

Зауваження 1. При розв'язанні конкретних задач нерідко доводиться використовувати поєднання декількох методів різних класів.

Зауваження 2. Деякі методи залежно від їх конкретної реалізації при рішенні різних задач можна віднести як до чисельних, так і до наближених аналітичних методів (наприклад, різні модифікації методу Галеркина).

1. Точні методи

Відмітні ознаки.

Дозволяють одержувати точні розв'язки.

В процесі розв'язання не допускаються спрощення.

Основні достоїнства точних розв'язків.

Формують фізичні уявлення про дані явища і процеси.

Наочно демонструють і дозволяють розібратися в механізмі складних нелінійних ефектів.

Широко використовуються як тестові задачі для всіх інших методів.

Дозволяють планувати експерименти для визначення емпіричних параметрів.

Точні розв'язки звичайно неважко перевірити шляхом підстановки їх в дані рівняння (при цьому немає необхідності знати метод отримання розв'язків).

<u>Основні недоліки точних методів.</u>

Мають обмежену область застосовності (часто не дозволяють отримати шуканий результат).

Іноді приводять до розв’язків складного вигляду, які незручно використовувати на практиці.

<u>Більш докладна інформація.</u>

Під точними методами розуміють математичні методи, при використанні яких в процесі розв’язання не допускаються які-небудь спрощення даних задач. Ці методи дозволяють одержувати точні рішення у вигляді аналітичних формул, інтегралів або рядів.

Точні розв’язки диференціальних рівнянь математичної фізики завжди відігравали і продовжують відігравати величезну роль у формуванні правильного розуміння якісних особливостей багатьох явищ і процесів в різних областях природознавства. Точні розв’язки нелінійних рівнянь наочно демонструють і дозволяють розібратися в механізмі таких складних нелінійних ефектів, як просторова локалізація процесів переносу, множинність або відсутність стаціонарних станів за певних умов, існування режимів із загостренням тощо.

Прості розв’язки широко використовуються для ілюстрації теоретичного матеріалу (по теорії тепло– і масопереносу, гідродинаміці, газовій динаміці, теорії хвиль, нелінійній оптиці і ін.).

Точні розв’язки типу хвилі, що біжить, і автомодельні розв’язки часто є асимптотиками істотно більш широких класів розв’язків, відповідних іншим початковим і граничним умовам. Вказана властивість дозволяє робити висновки загального характеру і прогнозувати динаміку різних явищ і процесів.

Навіть ті частинні точні розв’язки диференціальних рівнянь, які не мають ясного фізичного сенсу, можуть бути використані як «тестові задачі» при перевірці коректності і оцінці точності різних чисельних, асимптотичних і наближених аналітичних методів. Крім того, допускаючи точні розв’язання, модельні рівняння і задачі слугують основою для розробки нових чисельних, асимптотичних і наближених методів, які, у свою чергу, дозволяють досліджувати вже складніші задачі, що не мають точного аналітичного рішення.

Точні методи і розв’язки необхідні також для розробки і вдосконалення відповідних розділів комп'ютерних програм, призначених для аналітичних обчислень (системи MATHEMATICA, MAPLE і ін.)

Важливо відзначити, що багато рівнянь прикладної і теоретичної фізики, хімії і біології містять емпіричні параметри або емпіричні функції. Точні рішення дозволяють планувати експеримент для визначення цих параметрів або функцій шляхом штучного створення відповідних (граничних і початкових) умов.

Точні методи найчастіше застосовують:

1. для розв'язання лінійних задач, що описуються рівняннями з частинними похідними в областях з простою геометрією (найбільшу користь вони приносять при дослідженні лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами);
2. для розв'язання задач, описуваних лінійними і нелінійними рівняннями з частинними похідними першого порядку.

Найпоширенішими методами, що використовуються для вирішення лінійних задач математичної фізики, є метод розділення змінних, метод інтегральних перетворень (Лапласа, Фур'є, Мелліна тощо), метод, заснований на функціях Гріна, і метод характеристик. Для розв'язання задач, описуваних рівняннями з частинними похідними першого порядку, звичайно використовуються метод характеристик і метод розділення змінних.

Найпростішим методом розв'язку нелінійних задач математичної фізики і механіки є метод подібності, що дозволяє ввести автомодельні змінні, які дають можливість перейти від складних рівнянь з приватними похідними до звичайних диференціальних рівнянь.

Для переважної більшості задач, описуваних рівняннями з частинними похідними, не вдається знайти точний аналітичний розв'язок (сказане справедливо і для істотно більш простих трансцендентних рівнянь). Основні причини, що утрудняють отримання точних розв'язків, зумовлені, як правило, нелінійністю рівнянь або граничних умов, залежністю коефіцієнтів рівнянь від координат, складною формою меж тощо. Тому для отримання необхідної інформації про досліджуване явище або процес доводиться удаватися до різного роду спрощенням в математичному формулюванні відповідної задачі, до різних наближень і апроксимацій, чисельних методів або до тих і інших одночасно.

Диференціальні рівняння, як правило, мають нескінченну множину розв'язків. Це пов'язано з появою в процесі інтегрування сталих, при будь-яких значеннях яких розв'язок задовольняє вихідному рівнянню.

Розв'язання задач математичної фізики пов'язано з находженням залежностей від координат та часу певних фізичних величин, які безумовно повинні задовольняти вимогам однозначності, скінченності та неперервності. Іншими словами, будь-яка задача математичної фізики передбачає пошук єдиного розв'язку (якщо воно взагалі існує). Тому математичне формулювання фізичної задачі окрім основних диференціальних рівнянь, що описують шукані функції всередині розглядуваної області, має містити додаткові рівняння (диференціальні або алгебраїчні), які описують шукані функції на межах розглядуваної області в будь-якій момент часу (межові або крайові умови) та в усіх внутрішніх точках області в початковий момент часу (початкові умови). Диференціальне рівняння разом з відповідними крайовими (і початковими) умовами називається крайовою задачею математичної фізики.

Приклад 1.

Хвильове рівняння $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b^2 U + A$, яке описує коливальні процеси у суцільному середовищі, з нульовими початковими умовами $U(0,t) = 0$ та межовими умовами $U(l,t) = B$, де U – шукана функція, t – час, a, b, A та B – сталі, є *прикладом крайової задачі*.

Припустимо, що необхідно розв'язати певну задачу, що описується рівняннями математичної фізики, для деякої області D. Прикладом такої задачі може бути рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, яке описує різноманітні стаціонарні процеси. Тоді для находження єдиного розв'язку маємо задати межові умови, тобто виразити шукані змінні на межі S області D через деякі рівняння.

Якщо область D являє собою деякий об'єм в тривимірному просторі, то межа S є замкненою поверхнею в цьому просторі, що обмежує цей об'єм. Якщо область D являє собою деяку поверхню в двовимірному просторі, то межа S є замкненим контуром в цьому просторі, що обмежує цю поверхню. І, в решті решт, якщо область D являє собою деякий відрізок в одновимірному просторі, то межа S є двома точками на межах цього відрізку.

По вигляду рівнянь, що задають межові умови, розрізняють межові умови першого роду (умови Діріхле), другого роду (умови Неймана) та третього роду.

Якщо функція має задовольняти крайовій умові $U\big|_S = f_1(\vec{x})$, де $\vec{x}$ – координати певної точки межі S, а f_1 – задана функція, то кажуть, що необхідно розв'язати відповідно внутрішню або зовнішню задачу Діріхле.

Якщо крайові умови мають вигляд $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = f_2(\vec{x})$, де $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S$ є похідна по зовнішній нормалі до межі S області D, де f_2 – задана функція, то кажуть, що вимагається розв'язати задачу Неймана (внутрішню або зовнішню).

Якщо крайові умови записують у формі

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}+\alpha\left(\vec{x},t\right)U\right)\Bigg|_S=f_3\left(\vec{x}\right), \text{ де } \alpha\left(\vec{x},t\right),\ f_3 \text{ – задані функції,}$$

то це є третя крайова задача для рівняння Лапласа, яка є більш загальним випадком задач Діріхле та Неймана.

Якщо будь-яка з функцій – f_1, f_2 або f_3 – тотожньо дорівнює нулю, то відповідна умова є однорідною.

Слід зазначити, що кількість межових умов для кожної змінної визначається максимальним порядком похідної по координатах в диференціальних рівняннях: для рівнянь першого порядку – одна межова умова, для рівнянь другого порядку – дві, для рівнянь третього порядку – три тощо.

Для знаходження єдиного розв’язку в задачах, що описують нестаціонарні процеси, тобто фізичні процеси, що змінюються з часом, окрім межових умов необхідно задавати ще і початкові умови, які визначають значення змінних або їх градієнтів в усіх внутрішніх точках області D, включаючи межу S ($D \setminus S$), в початковий момент часу. Це так звана змішана задача. Якщо при цьому на межі просторової (плоскої) області було задано значення шуканої функції $U\left(\vec{x},0\right)=F_1\left(\vec{x}\right)$, де $\vec{x}\in D\setminus S$, то кажуть, що була поставлена перша змішана задача.

Якщо як крайова умова було задано значення похідної від шуканої функції у напрямку зовнішньої нормалі до межі $\dfrac{\partial U\left(\vec{x},0\right)}{\partial t}=F_2\left(\vec{x}\right)$, де $\vec{x}\in D\setminus S$, то кажуть, що розв'язується друга змішана задача.

Якщо було задано лінійну залежність між значеннями функції на межі і її похідної по нормалі $\beta\left(\vec{x}\right)\dfrac{\partial U\left(\vec{x},0\right)}{\partial t}+\delta\left(\vec{x}\right)U\left(\vec{x},t\right)=F_3\left(\vec{x}\right)$, де $\vec{x}\in D\setminus S$, то це - третя змішана задача.

Якщо, як додаткові, задані тільки початкові умови, то кажуть, що вимагається розв’язати задачу Коші. Як правило, в цьому випадку область зміни просторових змінних нескінченна. Така задача може бути поставлена для хвильового рівняння і рівняння теплопровідності.

Приклад 2.

Диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку $\frac{\partial U}{\partial x} + x\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, що задовольняє граничним умовам $U = \sin y$, $-\infty < y < \infty$ при $x = 0$, є *прикладом задачі Коші*.

Приклад 3.

Задача про поширення тепла на нескінченній прямій (рівняння теплопровідності) $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з межовими – $-\infty < x < \infty,\ t > 0$ – та початковими – $U\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right)$ – умовами, є *прикладом задачі Коші*.

Приклад 4.

Задача про поширення тепла (рівняння теплопровідності) $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з межовими – $0 < x < 1,\ t > 0$, $U\big|_{x=0} = 0$, $U\big|_{x=1} = 0$ – та початковими – $U\big|_{t=0} = \sin 2\pi x$ – умовами, є *прикладом першої змішаної задачі*.

3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ: КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ПРИВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК У РОЗВ'ЯЗАННІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

3.1 Загальні поняття

Диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку з однією шуканою функцією u від двох незалежних змінних x, y має вигляд:

$$\Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{3.1}$$

де x, y – незалежні змінні, а u – функція цих змінних.

Аналогічно записують рівняння для більшого числа незалежних змінних. Зазвичай частинні похідні позначають $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv u_{xy}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u_{yy}$. Таким чином, рівняння (1) набуває вигляд:

$$\Phi\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = 0, \tag{3.2}$$

або

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \qquad (3.3)^1$$

де A, B, C, D, E, F та G – коефіцієнти, що у загальному випадку можуть бути функціями $x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$.

Порядок диференціального рівняння у частинних похідних визначається порядком похідної, яка має найвищий порядок у рівнянні.

Приклад 1.

Диференціальне рівняння $u_t = au_{xxy}$, де a є визначена постійна величина, є рівнянням третього порядку. А рівняння (3.3) є рівнянням другого порядку.

[1] Далі буде зрозумілим, чому у рівнянні (3.3) коефіцієнт B є подвоєним.

Покажемо, що рівняння вищого порядку можна привести до рівняння більш низького порядку

Приклад 2.

Диференціальне рівняння $w_{xx} + w_{yy} = w_{xz}$ можна записати як $u_x + v_y = u_z$, де $u = w_x, \quad v = w_y$.

Приклад 3.

Рівняння мілкої води

$$\left.\begin{aligned} u_t &= -gh_x \\ h_t &= -Hu_x \end{aligned}\right\}$$

можна переписати у вигляді:

$$u_{tt} = -c^2 u_{xx}, \quad \text{де} \quad c = \sqrt{gH}$$

Порядок диференціального рівняння має важливе значення через кількість граничних умов, що мають доповнювати рівняння для коректної постановки задачі, та класифікацію рівнянь в канонічній або стандартній формі.

Диференціальне рівняння з частинними похідними є лінійним, якщо для оператора $L(\ )$ виконується твердження:

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

де α та β є константи. Це правило є універсальним.

За допомогою нелінійності в рівнянні враховуються зворотні зв’язки.

Оскільки лінійні рівняння завжди мають аналітичні розв’язки, то складні системи зазвичай намагаються лінеаризувати для кращого розуміння їх фізичного змісту, принаймні в околі тієї точки або області, де лінеаризація має місце.

Приклад 4.

Оператор $L(u)=u_{xx}+u_{yy}$ є лінійним, оскільки $L(\alpha u)=\dfrac{\partial^2 \alpha u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \alpha u}{\partial y^2}=\alpha\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\alpha L(u)$.

Приклад 5.

Оператор $L(u)=uu_{xx}$ є нелінійним, оскільки $L(\alpha u)=\alpha u\dfrac{\partial^2 \alpha u}{\partial x^2}=\alpha^2\left(u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\alpha^2 L(u)\neq \alpha L(u)$.

Приклад 6.

Рівняння $u_t+cu_x=0$, де $c>0\,\&\,const$ є лінійним, оскільки $L(\alpha u)=\dfrac{\partial \alpha u}{\partial t}+c\dfrac{\partial \alpha u}{\partial x}=\alpha\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\alpha L(u)$.

Приклад 7.

Рівняння $u_t+uu_x=0$ є нелінійним, оскільки $L(\alpha u)=\dfrac{\partial \alpha u}{\partial t}+\alpha u\dfrac{\partial \alpha u}{\partial x}=\alpha\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha u\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\neq \alpha L(u)$.

Тобто з наведених прикладів можна бачити, що **лінійними є рівняння**, в яких **коефіцієнти при старших похідних є функціями тільки** x, y.

Приклад 8.

Рівняння (3.3) є лінійним відносно старших похідних, або просто лінійним, якщо коефіцієнти A,B,C є функціями тільки x, y.

Якщо коефіцієнти A,B,C рівняння (3) не залежать від x, y, то таке рівняння являє собою лінійне рівняння з постійними коефіцієнтами.

Якщо функція u входить будь-яким чином в коефіцієнти при старших похідних,то такі рівняння називають *квазілінійними рівняннями* на відміну від тих, які не містять добутки функції u та її похідних.

Сума частинних розв'язків лінійного рівняння також задовольняє цьому рівнянню, що є несправедливим по відношенню до нелінійного рівняння.

Диференціальне рівняння у частинних похідних є однорідним, якщо вільний член, що являє собою функцію від x, y, дорівнює нулю.

<u>*Приклад 8.*</u>

Рівняння (3.3) є однорідним, якщо коефіцієнт G дорівнює нулю.

3.2 Диференціальні рівняння у частинних похідних першого порядку

3.2.1 Поняття про характеристики

Зазвичай будь-яку функцію представляють за допомогою прямокутної декартової системи координат. В цій системі будь-яка функція $y = f(x)$ буде постійною, якщо $x = const$. Проте не для будь-якої функції таке зображення є доцільним.

<u>*Приклад 1.*</u>

Припустімо, що ми маємо функцію двох змінних $f(x,y) = \sin(x - y^2)$. Ця функція змінюється, якщо x та y змінюються незалежно одна від одної. Проте, $f(x,y) = const$ на лініях $x - y^2 = const$ (див. рис. 3.1).

а) б)

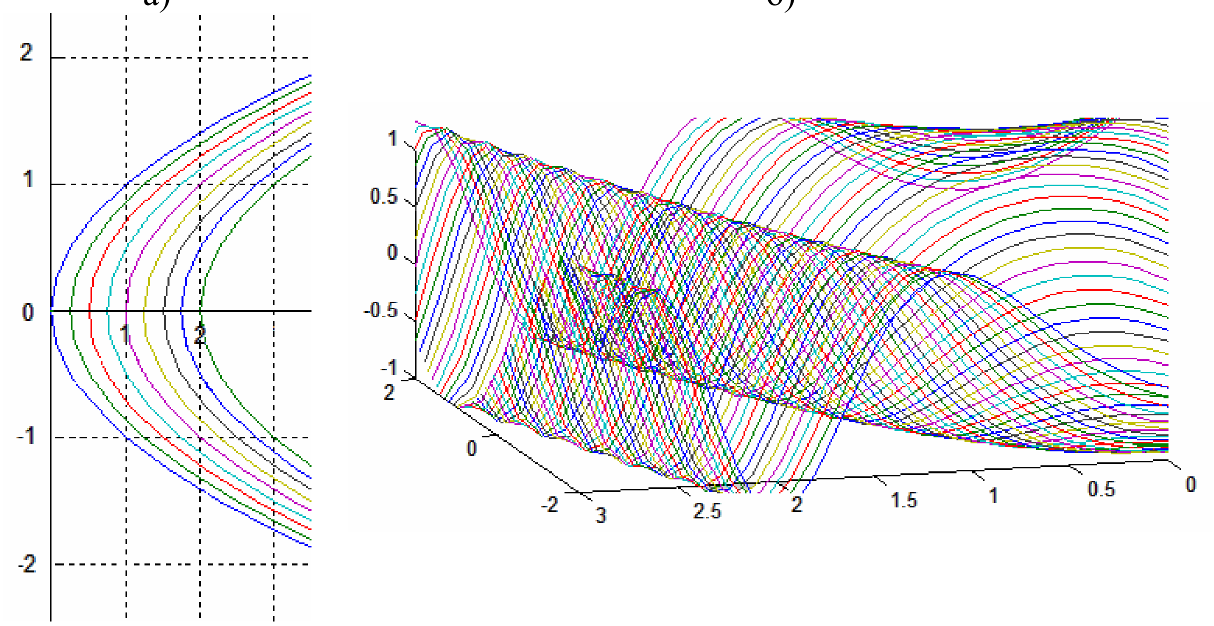

Рисунок 3.1. На кожній з характеристик (а) функція $f(x,y) = \sin(x - y^2)$ приймає постійне значення (б).

Загально прийнятні осі у декартовій системі координат та паралельні їм лінії ($x = const$ та $y = const$) прості та зручні для зображення функцій. Проте, цілком зрозуміло, що зображення функціональної залежності у спеціальних координатах $x - y^2 = const$ та $\sin\left(x - y^2\right) = const$, надає більше інформації про функцію.

Сутністю нашого підходу до розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних є знаходження саме таких спеціальних координат, які отримали назву характеристик.

3.2.2 Лінійні однорідні рівняння

Розглянемо рівняння

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y = 0, \tag{3.4}$$

де коефіцієнти A і B вважаються неперервними функціями в області $\mathbb{D}$, в якій існує функція $u(x,y)$. Будемо шукати розв'язання рівняння у вигляді функції, яка є залежною від x та $\xi = \xi(x,y)$, тобто $u(x,y) \equiv U\left[x, \xi(x,y)\right]$. Зазначимо, що, якщо покласти, що $\xi = y$, то повернемось до початкової задачі.

Необхідно виразити похідні u_x та u_y через похідні за новими змінними, тоді

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}, \tag{3.5}$$ [2]

таким чином, рівняння (4) набуває вигляду

$$A(x,y)\left(U_x + U_\xi \xi_x\right) + B(x,y)U_\xi \xi_y = 0. \tag{3.6}$$

або

$$A(x,y)U_x + U_\xi\left[A(x,y)\xi_x + B(x,y)U_\xi \xi_y\right] = 0. \tag{3.7}$$

---

[2] У виразах (3.5) перехід від позначення u до іншого позначення функції U обумовлений тим, що функція u, яку виражено x та $\xi = \xi(x,y)$, набуває іншого вигляду.

Обираємо $\xi(x,y)$ таким чином, $A(x,y)\xi_x + B(x,y)U_\xi \xi_y = 0$. Тоді отримуємо рівняння $A(x,y)U_x = 0$, оскільки $A(x,y) \neq 0$ в області $\mathbb{D}$, то

$$U_x = 0 \text{ або } U = F(\xi), \text{ тобто } u(x,y) = U\left[\xi(x,y)\right], \tag{3.8}$$

де F є довільна функція, її вигляд визначається крайовими умовами. Вираз (8) представляє загальний розв'язок рівняння (3.7), що залежить від однієї змінної $\xi(x,y)$[3]. Функція $\xi(x,y)$ є повністю визначеною, якщо покласти, що $\xi(x,y) = const$. Це означає, що $\xi(x,y)$ є неявною функцією, для якої виконується умова

$$\xi_x + \frac{dy}{dx}\xi_y = 0 \text{ або } \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_y}{\xi_x} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}. \tag{3.9}$$

Рівняння (3.9) називають характеристичним для рівняння (3.4), а його інтеграл – характеристикою. Отже, ми отримали розв'язок рівняння (3.4) $u = const$ на лініях $y' = B/A$. Після інтегрування рівняння (3.9) отримуємо характеристики $\xi(x,y) = const$ (ця константа є довільною постійною інтегрування), і тоді $u = F(\xi)$ шуканий загальний розв'язок.

3.2.3 Квазілінійні рівняння

Розглянемо рівняння

$$A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u). \tag{3.10}$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (3.10) у вигляді $u(x,y) = U\left[x,\xi(x,y)\right]$. Отже, отримаємо

$$A(x,y,U)U_x + U_\xi\left[A(x,y,U)\xi_x + B(x,y,U)U_\xi \xi_y\right] = C(x,y,U). \tag{3.11}$$

---

[3] В звичайних диференціальних рівняннях при інтегруванні з'являється довільна константа, яка у диференціальних рівняннях з частинними похідними набуває вигляду функції.

На характеристиках $\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y,U)}{A(x,y,U)}$ маємо

$$A(x,y,U)U_x=C(x,y,U). \qquad (3.12)$$

Звідси отримуємо систему з двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y,U)}{A(x,y,U)} \quad \text{і} \quad \frac{dU}{dx}=\frac{C(x,y,U)}{A(x,y,U)}. \qquad (3.14)$$

Для квазілінійних рівнянь вже не сама функція $U\left[x,\xi(x,y)\right]$ буде постійною на характеристиках, а загальний інтеграл другого рівняння з системи (3.14).

3.3 Приклади розв'язання типових задач

Задача № 1.

Умова. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних $yu_x+x^2u_y=0$.

Розв'язання задачі.

Коефіцієнти цього рівняння $A=y$ та $B=x^2$.

Характеристики визначаються розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$y'=\frac{B}{A}=\frac{x^2}{y}, \text{ де } y\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=\frac{1}{3}x^3+const,$$

або $\xi(x,y)=3y^2-2x^3=const$, яке представляє собою характеристику.

Отже, загальний розв'язок є

$$u(x,y)=F\left(3y^2-2x^3\right),$$

де F є довільна функція.

Перевірка задачі.

Перевіримо правильність отриманого результату. Якщо F є диференційована функція, то $u_x = -6x^2 F'(\xi)$ і $u_y = 6yF'(\xi)$, отже

$$yu_x + x^2 u_y == -6yx^2 F'(\xi) + 6yx^2 F'(\xi) = 0.$$

Задача № 2.

Умова. Знайти розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних $u_x + xu_y = 0$, яке задовольняє граничним умовам $u = \sin y$, $-\infty < y < +\infty$ для $x = 0$.

Розв'язання задачі.

Коефіцієнти цього рівняння $A = 1$ та $B = x$.

Характеристики визначаються розв'язком звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2}x^2 = const.$$

Отже, загальний розв'язок є

$$u(x, y) = F\left(y - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Застосуємо граничні умови для $x = 0$ $u = \sin y$, таким чином шуканий розв'язок є

$$u(x, y) = \sin\left(y - \frac{1}{2}x^2\right).$$

Задача № 3.

Умова. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних $xu_x + uu_y = u$, яке задовольняє граничним умовам $u = \frac{1}{2}y$, для $x = 1$.

Розв'язання задачі.

Коефіцієнти цього рівняння $A = x$, $B = u$ і $C = u$.

Отже, розв’язок рівняння визначатиметься системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u}{x} \quad \text{і} \quad \frac{dU}{dx}=\frac{u}{x} \qquad\qquad x\neq 0.$$

Звідси отримуємо

$$\ln|u|=\ln|x|+const \quad \text{або} \quad u=Dx$$

і тоді $\dfrac{dy}{dx}=D$ або $y=Dx+E \quad \Rightarrow \quad y=u+E$, де D і E – довільні константи. Таким чином, на характеристиках $y-u=E$ є незмінною функція $\dfrac{u}{x}=D$. Отже, загальний розв’язок запишемо у вигляді

$$\frac{u}{x}=F\left(y-u\right) \quad \Rightarrow \quad u=xF\left(y-u\right), \tag{15}$$

де F – довільна функція.

В загальному вигляді цей розв’язок є неявним для $u\left(x,y\right)$.

Підставивши у рівняння (15) граничні умови $x=1$, а $u=\dfrac{1}{2}y$, отримаємо $\dfrac{1}{2}y=F\left(\dfrac{1}{2}y\right)$. Отже,

$$u=x\left(y-u\right) \quad \text{або} \quad u=\frac{xy}{1+x}.$$

3.4 Контрольні запитання до теми

1. Чим відрізняються диференціальні рівняння у частинних похідних від звичайних диференціальних рівнянь?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Дайте визначення лінійних, квазілінійних, нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних?
4. Як можна перевірити рівняння на лінійність (нелінійність)?

5. Що враховує нелінійність?
6. Чому важливо розглядати лінійні диференціальні рівняння?
7. Дайте визначення однорідному диференціальному рівнянню у частинних похідних.
8. Дайте визначення характеристикам.
9. За якими рівняннями отримуємо розв'язок лінійного (квазілінійного) диференціального рівняння у частинних похідних першого порядку?
10. У чому різниця отримання розв'язань для лінійних та квазілінійних рівнянь?

3.5 Задачі для самостійного розв'язання

Знайдіть загальний розв'язок таких диференціальних рівнянь у частинних похідних:

1. $3u_x + 2xu_y = x$;
2. $u_x + 2u_y = u$;
3. $u_t + uu_x = 0$.

Знайдіть розв'язок таких диференціальних рівнянь у частинних похідних, які задовольняють умовам:

1. $u_x + u_y = u^2$, $u = x$ для $y = -x$;
2. $u_t + uu_x = 0$, $u = \tanh x$ для $y = 0$. Знайдіть розв'язок цього рівняння для інших граничних умов $\forall t \in [0, \infty)$ та $\forall x \in (-\infty, \infty)$.

4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо метод характеристик для диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \tag{4.1}$$

або

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \Phi\left(u_x, u_y, u, x, y\right) = 0, \tag{4.2}$$

де $\Phi\left(u_x, u_y, u, x, y\right) = Du_x + Eu_y + Fu + G$.

Існує три стандартних типи диференціальних рівнянь у частинних похідних:

1. гіперболічний;
2. параболічний;
3. еліптичний.

Для диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку тип рівняння визначається знаком виразу $B^2 - AC$:

$B^2 - AC > 0$, то таке рівняння є рівнянням гіперболічного типу,

$B^2 - AC = 0$, то рівняння є рівнянням параболічного типу,

$B^2 - AC < 0$, то рівняння є рівнянням еліптичного типу.

Зазначимо, що тільки похідні найвищого порядку визначають тип рівняння.

Приклад 1.

Розглянемо хвильове рівняння $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, в якому $A = 1$, $B = 0$ і $C = -c^2$. Вираз $B^2 - AC = 0 - \left(-c^2\right)\cdot 1 = c^2 > 0$, отже рівняння є гіперболічного типу.

Приклад 2.

Розглянемо рівняння дифузії $u_t = cu_{xx}$, в якому $A = c$, $B = 0$ і $C = 0$. Вираз $B^2 - AC = 0 - c \cdot 0 = 0$, отже рівняння є параболічного типу.

Приклад 3.

Розглянемо рівняння Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, в якому $A = 1$, $B = 0$ і $C = 1$. Вираз $B^2 - AC = 0 - 1 = -1 < 0$, отже рівняння є еліптичного типу.

Приклад 4.

Класифікація деяких рівнянь може залежати від значення коефіцієнта. Розглянемо рівняння $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, в якому $A = y$, $B = 0$ і $C = 1$. Якщо $y > 0$, то $B^2 - AC = 0 - 1 \cdot y = -y < 0$, отже рівняння буде рівнянням еліптичного типу; якщо $y < 0$, то $B^2 - AC = 0 - 1 \cdot y = -y > 0$, отже рівняння перетворюється на рівняння гіперболічного типу.

4.1 Три канонічні або стандартні форми диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку

Кожна форма лінійного диференціального рівняння у частинних похідних (4.1), має канонічну або стандартну форму:

для рівнянь гіперболічного типу:

$$u_{xx} - u_{yy} = \Phi\left(u_x, u_y, u, x, y\right), \text{ або } u_{xy} = \Phi\left(u_x, u_y, u, x, y\right); \qquad (4.3)$$

для рівнянь параболічного типу:

$$u_{xx} = \Phi\left(u_x, u_y, u, x, y\right); \qquad (4.4)$$

для рівнянь еліптичного типу:

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi\left(u_x, u_y, u, x, y\right). \qquad (4.5)$$

В канонічній формі, принаймні одна з других похідних відсутня і всі коефіцієнти при других похідних по модулю дорівнюють одиниці.

Приклад 5.

Рівняння $u_{xx}+u_{yy}=0$ та $u_t=cu_{xx}$ вже представлено у канонічній формі.

$u_{xx}+u_{yy}=0$ – це канонічна форма рівнянь еліптичного типу, де права частина $\Phi\left(u_x,u_y,u,x,y\right)=0$,

$u_t=cu_{xx}$, або $u_{xx}=\dfrac{u_t}{c}$ – це канонічна форма рівнянь параболічного типу, де права частина $\Phi\left(u_x,u_y,u,x,y\right)=\dfrac{u_t}{c}$.

Зазвичай диференціальні рівняння у частинних похідних не можна представити у канонічній формі в незалежних змінних x,y. Для того, щоб їх представити у канонічній формі, необхідно перейти до нових змінних, які як правило позначають через ξ та η.

4.2 Канонічне перетворення

Застосуємо канонічне перетворення або перетворення змінних для рівняння (4.1).

Введемо нові змінні $\xi=\xi\left(x,y\right)$, $\eta=\eta\left(x,y\right)$, отже диференціальне рівняння буде представлено вже не в координатах $\left(x,y\right)$, а в координатах $\left(\xi,\eta\right)$.

Враховуючи, що $u\left(x,y\right)=u\left(\xi\left(x,y\right),\eta\left(x,y\right)\right)$, і застосовуючи ланцюгове правило диференціювання, отримаємо

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x;\qquad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y;\tag{4.6}$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx};\tag{4.7}$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy};\tag{4.8}$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.\tag{4.9}$$

Підставивши вирази для похідних (4.6)–(4.9) у рівняння (4.2), будемо мати:

$$\overline{A}u_{\xi\xi}+2\overline{B}u_{\xi\eta}+\overline{C}u_{\eta\eta}=\overline{\Phi}\left(u_{\xi},u_{\eta},u,\xi,\eta\right), \tag{4.10}$$

де $\overline{A}=A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2$,

$$\overline{B}=A\xi_x\eta_x+B\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+C\xi_y\eta_y, \tag{4.11}$$

$\overline{C}=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2$.

З виразу (4.11) можна отримати, що

$$B^2-AC=\left(\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}\right)\left(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x\right)^2. \tag{4.12}$$

Зазначимо, що вираз $\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}$ має той самий знак, що і B^2-AC, оскільки вираз $\left(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x\right)^2$ завжди більший за нуль і не повинен дорівнювати нулю. Це дуже важливий висновок, оскільки означає, що тільки коефіцієнти при других похідних мають значення і що диференціальне рівняння лишається інваріантним до перетворення змінних.

Зазначимо, що в (4.12) $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \eta_x\\ \xi_y & \eta_y\end{vmatrix}=\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_y$ являє собою якобіан перетворення і тому не може дорівнювати нулю.

З іншого боку, якщо $\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_y=0$, то таке перетворення координат не буде однозначним, іншими словами, перетворення стає сингулярним.

Умову $\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_y\neq 0$ необхідно перевіряти при перетворенні координат для будь-якого диференціального рівняння з частинними похідними.

Оберемо змінні ξ і η таким чином, щоб коефіцієнт $\overline{A}$ дорівнював нулю. Розглянемо рівняння з частинними похідними першого порядку

$$Az_x^2+2Bz_xz_y+Cz_y^2=0. \tag{4.13}$$

Покладемо, що $z=\varphi(x,y)$ – будь-який частинний розв'язок цього рівняння. Якщо покласти $\xi=\varphi(x,y)$, то коефіцієнт $\overline{A}$ буде дорівнювати нулю. Таким чином, задача про вибір нових незалежних змінних пов'язана з розв'язком рівняння (4.13).

Доведемо наступні леми.

1. Якщо $z=\varphi(x,y)$ є частинним розв'язком рівняння

$$Az_x^2+2Bz_xz_y+Cz_y^2=0, \tag{4.14}$$

то співвідношення $\varphi(x,y)=const$ являє собою повний інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$Ady^2+2Bdydx+Cdx^2=0. \tag{4.15}$$

2. Якщо $\varphi(x,y)=const$ являє собою повний інтеграл звичайного диференціального рівняння (4.15), то функція $z=\varphi(x,y)$ задовольняє рівнянню (4.13).

Доведемо першу лему. В умові леми дано, що функція $z=\varphi(x,y)$ задовольняє рівнянню (4.13), тобто рівність

$$A\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+C=0 \tag{4.16}$$

є тотожністю, оскільки задовольняє всім x,y в тій області, де розв'язок заданий. Співвідношення $\varphi(x,y)=const$ є повним інтегралом рівняння (4.15), якщо y, визначене як явна функція x зі співвідношення $\varphi(x,y)=const$, задовольняє рівнянню (4.15).

Покладемо, що $y=f(x,const)$ є такою функцією, тоді

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right]_{y=f(x,const)}, \tag{4.17}$$

де дужки та індекс $y=f(x,const)$ показують, що в правій частині рівності (4.16) змінну y потрібно замінити на $f(x,const)$. Звідси випливає, що $y=f(x,const)$ задовольняє рівнянню (4.14), оскільки

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=A\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2_{y=f(x,const)}-2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)_{y=f(x,const)}+C=0,$$

причому права частина дорівнює нулю при всіх значеннях x, y, а не тільки при $y=f(x,const)$.

Доведемо другу лему. Покладемо, що $\varphi(x,y)=const$ – повний інтеграл рівняння (4.15). Доведемо, що

$$A\varphi_x^2+2B\varphi_x\varphi_y+C\varphi_y^2=0, \tag{4.18}$$

для будь-якої точки (x,y). Хай (x_0,y_0) – будь-яка задана точка. Якщо довести, що в цій точці рівність (4.18) задовольняється, то звідси в силу довільності вибору точки (x_0,y_0) буде випливати, що рівність (4.18) є тотожністю і функція $\varphi(x,y)$ є розв'язком рівняння (4.18). Проведемо через точку (x_0,y_0) інтегральну криву рівняння (4.15), покладаючи, що $f(x_0,y_0)=(const)_0$ і розглядаючи криву $y=f\left(x,(const)_0\right)$. Очевидно, що $y_0=f\left(x_0,(const)_0\right)$. Для всіх точок цієї кривої маємо:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2B\frac{dy}{dx}+C=A\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2_{y=f\left(x,(const)_0\right)}-2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)_{y=f\left(x,(const)_0\right)}+C=0.$$

Покладаючи в останній рівності $x=x_0$, отримаємо:

$$A\varphi_x^2(x_0,y_0)+2B\varphi_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)+C\varphi_y^2(x_0,y_0)=0,$$

що і потрібно було довести.

Рівняння (4.15) називають характеристичним для рівняння (4.1), а його інтеграли – характеристиками.

Покладаючи $\xi=\varphi(x,y)$, де $\varphi(x,y)=const$ є повний інтеграл рівняння (4.15), ми обертаємо на нуль коефіцієнт при $u_{\xi\xi}$. Якщо

$\psi(x,y)=const$ є іншим повним інтегралом рівняння (4.15), то, покладаючи, $\eta=\psi(x,y)$, ми обертаємо на нуль також і коефіцієнт при $u_{\eta\eta}$.

Рівняння (4.15) розпадається на два рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}. \tag{4.19}$$

Знак підкореневого виразу визначає тип рівняння (4.1).

Розглянемо область $\mathbb{D}$, в кожній точці якої рівняння (4.1) має один і той самий тип. Через кожну точку області $\mathbb{D}$ проходять дві характеристики, причому для рівнянь гіперболічного типу характеристики є дійсними та різні, для рівнянь еліптичного типу – комплексні, а для рівнянь параболічного типу обидві характеристики дійсні і співпадають між собою.

Розберемо кожний з цих випадків окремо:

1. Для рівнянь гіперболічного типу $B^2-AC>0$ і праві частини рівнянь (4.18) дійсні та різні. Повні інтеграли їх $\varphi(x,y)=const$ та $\psi(x,y)=const$ визначають дійсні сім'ї характеристик. Покладаючи $\xi=\varphi(x,y)$ і $\eta=\psi(x,y)$, приводимо рівняння (10) після ділення на коефіцієнт при $u_{\xi\eta}$ до вигляду $u_{\xi\eta}=\Phi(u_\xi,u_\eta,u,\xi,\eta)$.

   Для того щоб отримати іншу канонічну форму рівнянь гіперболічного типу, покладемо

   $$\xi=\alpha+\beta,\ \eta=\alpha-\beta,$$

   тобто

   $$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2},\ \beta=\frac{\xi-\eta}{2},$$

   де α і β – нові змінні. Тоді

   $$u_\xi=\frac{1}{2}(u_\alpha+u_\beta),\ u_\eta=\frac{1}{2}(u_\alpha-u_\beta),\ u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}).$$

   В результаті рівняння (10) приймає вигляд

   $$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi_1(u_\alpha,u_\beta,u,\alpha,\beta).$$

2. Для рівнянь параболічного типу $B^2 - AC = 0$ маємо один повний інтеграл рівняння (4.15): $\varphi(x, y) = const$. Покладемо в даному випадку $\xi = \varphi(x, y)$ і $\eta = \eta(x, y)$, де η – будь-яка функція, що не залежить від φ. При такому виборі змінних коефіцієнт

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0,$$

оскільки $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$, звідси випливає, що

$$\overline{B} = A\xi_x\eta_x + B\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + C\xi_y\eta_y = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0.$$

Після ділення коефіцієнтів рівняння (4.10) на коефіцієнт при $u_{\eta\eta}$ отримаємо канонічну форму для рівняння параболічного типу

$$u_{\eta\eta} = \Phi\left(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta\right).$$

3. Для рівнянь еліптичного типу $B^2 - AC < 0$ і праві частини рівнянь (4.19) комплексні. Покладемо, що $\varphi(x, y) = const$ є комплексним інтегралом рівняння (4.15). Тоді $\overline{\varphi}(x, y) = const$ – спряжена до φ функція, буде являти собою повний інтеграл рівняння (4.19). Перейдемо до комплексних змінних, покладаючи $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \overline{\varphi}(x, y)$. При цьому рівняння еліптичного типу приводять до такого самого вигляду, що і гіперболічного.
Для того щоб не мати справу з комплексними змінними, введемо нові змінні α і β вигляду

$$\alpha = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2}, \ \beta = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2},$$

так, що

$$\xi = \alpha + i\beta, \ \eta = \alpha - i\beta.$$

В цьому випадку

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2\right) -$$
$$-\left(A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2\right) + 2i\left(A\alpha_x\beta_x + B\left(\alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y\right) + C\alpha_y\beta_y\right) = 0$$

тобто

$\overline{A} = \overline{C}$ і $\overline{B} = 0$.

Рівняння (4.10) після ділення на коефіцієнт при $u_{\alpha\alpha}$ набуває вигляду

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \overline{\Phi}\left(u_\alpha, u_\beta, u, \alpha, \beta\right).$$

4.3 Методика приведення до канонічної форми рівнянь різних типів

<u>Задача.</u> Визначити тип рівняння

$$A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} +$$
$$+D(x,y)U_x + E(x,y)U_y + F(x,y)U = G(x,y) \qquad (4.20)$$

і привести його до канонічного вигляду.

1. Тип рівняння (4.11) визначається знаком виразу $B^2 - AC$:
- якщо $B^2 - AC > 0$ в деякій точці, то рівняння (4.20) називається рівнянням гіперболічного типу в цій точці;
- якщо $B^2 - AC < 0$ в деякій точці, то рівняння (4.20) називається рівнянням еліптичного типу в цій точці;
- якщо $B^2 - AC = 0$ в деякій точці, то рівняння (4.20) називається рівнянням параболічного типу в цій точці.

Рівняння (4.20) буде рівнянням гіперболічного, еліптичного, параболічного типу в області *D*, якщо воно гіперболічне, еліптичне або параболічне в кожній точці цієї області.

Рівняння (4.1) може змінювати свій тип при переході від однієї точки (області) до іншої.

Приклад 1.

Рівняння $yU_{xx}+U_{yy}=0$ є рівнянням еліптичного типу в точках (x,y), $y>0$; параболічного типу в точках $(x,0)$; і гіперболічного типу в точках (x,y), $y<0$.

2. Щоб привести рівняння до канонічної форми, необхідно:

- Визначити коефіцієнти $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$;
- Обчислити вираз B^2-AC;
- Зробити висновок про тип рівняння (4.1) (залежно від знака виразу B^2-AC);
- Записати рівняння характеристик:

$$A(x,y)dy^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)dx^2=0; \tag{4.21}$$

- Розв’язати рівняння (4.21). Для цього:
  а) розв’язати рівняння (4.21) як квадратне рівняння відносно *dy:*

$$dy=\frac{B(x,y)\pm\sqrt{B^2-AC}}{A(x,y)}dx; \tag{4.22}$$

б) знайти загальні інтеграли рівнянь (4.22) (характеристики рівняння (4.1)):

у випадку рівняння гіперболічного типу:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y)&=C_1,\\ \psi_1(x,y)&=C_2,\end{aligned} \tag{4.23}$$

у випадку рівняння параболічного типу:

$$\varphi_2(x,y)=C, \tag{4.24}$$

у випадку рівняння еліптичного типу:

$$\varphi_3(x,y)\pm i\psi_3(x,y)=C. \tag{4.25}$$

- Ввести нові (характеристичні) змінні ξ і η:

а) у випадку рівняння гіперболічного типу в якості ξ і η беруть загальні інтеграли (4.23) рівнянь (4.22), тобто

$$\xi = \varphi_1(x, y),$$
$$\eta = \psi_1(x, y);$$

б) у випадку рівняння параболічного типу в якості ξ беруть загальний інтеграл (4.24) рівняння (4.22), тобто $\xi = \varphi_2(x, y)$, в якості η беруть довільну, двічі диференціюється функцію ψ_2, що не виражається через $\varphi_2(x, y)$, тобто $\eta = \psi_2(x, y)$;

в) у випадку рівняння еліптичного типу в якості ξ і η беруть речовинну і уявну частину будь-якого із загальних інтегралів (4.25) рівнянь (4.22):

$$\xi = \mathrm{Re}\big(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)\big) = \varphi_3(x, y),$$
$$\eta = \mathrm{Im}\big(\varphi_3(x, y) + i\psi_3(x, y)\big) = \psi_3(x, y).$$

- Перерахувати всі похідні, що входять в рівняння (4.20), використовуючи правило диференціювання складної функції за формулами
- Підставити знайдені похідні в початкове рівняння (4.20) і привести подібні доданки. В результаті рівняння (4.20) прикмет один з наступних видів:

  а) у випадку рівняння гіперболічного типу:

$$U_{\xi\eta} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0;$$

  б) у випадку рівняння параболічного типу:

$$U_{\eta\eta} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0;$$

  в) у випадку рівняння еліптичного типу:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0.$$

4.4 Приклади розв’язання типових задач

Задача № 1.

Умова. Визначити тип рівняння

$$U_{xx} - 4U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = x^2 \tag{4.26}$$

і привести його до канонічного вигляду.

Розв’язання:

1. Визначаємо коефіцієнти $A = 1$, $B = -2$, $C = -21$.
2. Обчислюємо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 4 + 21 = 25.$$

3. $B^2 - AC = 25 > 0 \Rightarrow$ рівняння гіперболічного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 + 4dxdy - 21dx^2 = 0. \tag{4.27}$$

5. Розв’яжемо рівняння (4.27).
   а) розв’язуємо рівняння (4.27) як квадратне рівняння відносно dy:

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{1} dx;$$

$$dy = (-2 \pm 5)dx;$$

$$dy = -7dx, \qquad dy = 3dx. \tag{4.28}$$

   б) знайдемо загальні інтеграли рівнянь (4.28) (характеристики рівняння (4.27)):

$$y = -7x + C_1, \qquad y = 3x + C_2,$$
$$y + 7x = C_1, \qquad y - 3x = C_2.$$

6. Введемо характеристичні змінні:

$$\xi = y + 7x,$$
$$\eta = y - 3x.$$

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння.

Знайдемо спочатку

$$\begin{aligned} &\xi_x = 7, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0, \\ &\eta_x = -3, \eta_y = 1, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} 2 & U_x = 7U_\xi - 3U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \\ 1 & U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}, \\ -21 & U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}. \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.26) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{49 - 28 - 21\} + U_{\xi\eta}\{-42 - 16 - 42\} + U_{\eta\eta}\{9 + 12 - 21\} +$$
$$+ U_\xi\{14 - 3\} + U_\eta\{-6 - 3\} + 5U = \frac{(\xi - \eta)^2}{16}.$$

Або після ділення на –100 (коефіцієнт при $U_{\xi\eta}$):

$$U_{\xi\eta} - 0{,}11U_\xi + 0{,}09U_\eta - 0{,}05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600}.$$

<u>Відповідь.</u> Рівняння (4.26) є рівнянням гіперболічного типу у всій площині XOY. Канонічний вигляд $U_{\xi\eta} - 0{,}11U_\xi + 0{,}09U_\eta - 0{,}05U = -\dfrac{(\xi - \eta)^2}{1600}$, де $\xi = y + 7x, \quad \eta = y - 3x.$

Задача № 2.

Умова. Визначити тип рівняння

$$25U_{xx} - 10U_{xy} + U_{yy} + U_y + 2U = 5y + 2x \qquad (4.30)$$

і привести його до канонічної форми.

Розв’язання:

1. Визначимо коефіцієнти $A = 25$, $B = -5$, $C = 1$.
2. Обчислимо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 25 - 25 = 0.$$

3. $B^2 - AC = 0$, отже рівняння параболічного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0. \qquad (4.31)$$

5. Розв’яжемо рівняння (4.31). Для цього:
   а) розв’язуємо рівняння (4.31) як квадратне рівняння відносно dy. Проте в цьому випадку ліва частина рівняння є повним квадратом:

$$(5dy + dx)^2 = 0;$$

$$5dy = -dx. \qquad (4.32)$$

   б) маємо тільки одне рівняння характеристик (4.32). Знайдемо його загальний інтеграл (рівняння параболічного типу мають тільки одне сімейство речовинних характеристик):

$$5y = -x + C,$$
$$5y + x = C.$$

6. Введемо характеристичні змінні: одну із змінних ξ вводимо як і раніше

$$\xi = 5y + x,$$

а в якості η беруть довільну, двічі диференційовану функцію, що не виражається через ξ, припустимо, що $\eta = x$.

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння. Знайдемо спочатку

$$\xi_x = 1, \xi_y = 5, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$
$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} 0 & U_x = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_y = 5U_\xi, \\ 25 & U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ -10 & U_{xy} = 5U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, \\ 1 & U_{yy} = 25U_{\xi\xi}. \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.30) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{25 - 50 + 25\} + U_{\xi\eta}\{50 - 50\} + U_{\eta\eta}\{25\} +$$
$$+ U_\xi\{5\} + 2U = \xi + \eta.$$

Функцію, що стоїть в правій частині рівняння (4.30) необхідно також виразити через характеристичні змінні.

Після ділення на 25 (коефіцієнт при $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\eta\eta} + 0{,}2U_\xi + 0{,}08U = 0{,}4(\xi + \eta).$$

<u>Відповідь.</u> Рівняння (4.30) є рівнянням параболічного типу на всій площині XOY. Канонічний вигляд $U_{\eta\eta} + 0{,}2U_\xi + 0{,}08U = 0{,}4(\xi + \eta)$ де $\xi = 5y + x, \quad \eta = x.$

Задача № 3.

Умова. Визначити тип рівняння

$$U_{xx} + 4U_{yy} + U_x - 3U_y + U = x^2 \qquad (4.33)$$

і привести його до канонічної форми.

Розв’язання:

1. Визначимо коефіцієнти $A = 1$, $B = 0$, $C = 4$.
2. Обчислимо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$

3. $B^2 - AC = -4 < 0$, отже рівняння еліптичного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 + 4dx^2 = 0. \qquad (4.34)$$

5. Розв’яжемо рівняння (4.34). Для цього:
   а) розв’язуємо рівняння (4.34) як квадратне рівняння відносно dy: $dy = \pm 2idx$ (4.35);
   б) рівняння (4.35) – це пара комплексно-зв'язаних рівнянь. Вони мають пару комплексно-зв'язаних загальних інтегралів. (Рівняння еліптичного типу не мають дійсних характеристик)

$$\begin{aligned} &y = \pm 2xi + C, \\ &y \mp 2xi = C. \end{aligned} \qquad (4.36)$$

6. Введемо характеристичні змінні як речовинну і уявну частини одного із загальних інтегралів (4.36):

$$\xi = \mathrm{Re}(y + 2xi) = y,$$
$$\eta = \mathrm{Im}(y + 2xi) = 2x.$$

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння. Знайдемо спочатку

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$
$$\eta_x = 2, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} 1 & U_x = 2U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi, \\ 1 & U_{xx} = 4U_{\eta\eta}, \\ 4 & U_{yy} = U_{\xi\xi} \\ & \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.33) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{4\} + U_{\eta\eta}\{4\} + U_\xi\{-3\} + U_\eta\{2\} + U = \xi.$$

Після ділення на 4 (коефіцієнт при $U_{\xi\xi}$ і $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0{,}75U_\xi + 0{,}5U_\eta + 0{,}25U \ = \xi.$$

Відповідь. Рівняння (4.33) є рівнянням параболічного типу на всій площині XOY. Канонічний вигляд $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0{,}75U_\xi + 0{,}5U_\eta + 0{,}25U = \xi$ де $\xi = y, \quad \eta = 2x.$

Задача № 4.

Умова. Визначити тип рівняння

$$y^2U_{xx} - 4x^2U_{yy} = 0 \tag{4.37}$$

і привести його до канонічного вигляду.

Розв'язання:

1. Визначаємо коефіцієнти $A = y^2$, $B = 0$, $C = -4x^2$.
2. Обчислюємо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 4y^2x^2.$$

3. $B^2 - AC = 4y^2x^2 > 0 \Rightarrow$ рівняння гіперболічного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$y^2dy^2 - 4x^2dx^2 = 0. \qquad (4.38)$$

5. Розв'яжемо рівняння (4.38).
   а) розв'язуємо рівняння (4.38) як квадратне рівняння відносно dy:

$$dy = \pm 2\frac{x}{y}dx;$$

$$ydy = \pm 2xdx;$$

$$ydy = 2xdx \qquad ydy = -2xdx. \qquad (4.39)$$

   б) знайдемо загальні інтеграли рівнянь (4.39) (характеристики рівняння (4.37)):

$$y^2 = 2x^2 + C_1, \qquad y^2 = -2x^2 + C_2,$$
$$y^2 - 2x^2 = C_1, \qquad y^2 + 2x^2 = C_2.$$

6. Введемо характеристичні змінні:

$$\xi = y^2 - 2x^2,$$
$$\eta = y^2 + 2x^2.$$

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння.

Знайдемо спочатку

$$\begin{aligned} &\xi_x = -4x, \xi_y = 2y,\ \xi_{xx} = -4, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 2, \\ &\eta_x = 4x, \eta_y = 2y,\ \eta_{xx} = 4, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 2. \end{aligned} \qquad (4.40)$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} y^2 & U_{xx} = 16x^2U_{\xi\xi} - 32x^2U_{\xi\eta} + 16x^2U_{\eta\eta} - 4U_{\xi} + 4U_{\eta} \\ -4x^2 & U_{yy} = 4y^2U_{\xi\xi} + 8y^2U_{\xi\eta} + 4y^2U_{\eta\eta} + 2U_{\xi} + 2U_{\eta} \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.37) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{16x^2y^2 - 16x^2y^2\} + U_{\xi\eta}\{-32x^2y^2 - 32x^2y^2\} + U_{\eta\eta}\{16x^2y^2 - 16x^2y^2\} +$$
$$+ U_{\xi}\{-4y^2 - 8x^2\} + U_{\eta}\{4y^2 - 8x^2\} = 0.$$

$$-4 \cdot 2 \cdot \underbrace{8x^2y^2}_{\eta^2-\xi^2} U_{\xi\eta} = 4U_{\xi}\underbrace{\left(y^2 + 2x^2\right)}_{\eta} - 4U_{\eta}\underbrace{\left(y^2 - 2x^2\right)}_{\xi}.$$

Або після ділення на –4 та $2\left(\eta^2 - \xi^2\right)$(коефіцієнт при $U_{\xi\eta}$):

$$U_{\xi\eta} = \frac{\xi U_{\eta} - \eta U_{\xi}}{2\left(\eta^2 - \xi^2\right)}.$$

<u>Відповідь.</u> Рівняння (4.37) є рівнянням гіперболічного типу у всій площині *XOY*. Канонічний вигляд $U_{\xi\eta} = \dfrac{\xi U_{\eta} - \eta U_{\xi}}{2\left(\eta^2 - \xi^2\right)}$, де $\xi = y^2 - 2x^2, \quad \eta = y^2 + 2x^2.$

<u>Задача № 5.</u>

<u>Умова.</u> Визначити тип рівняння

$$x^2U_{xx} + 2xyU_{xy} + y^2U_{yy} = 0 \qquad (4.41)$$

і привести його до канонічного вигляду.

<u>Розв'язання:</u>

1. Визначаємо коефіцієнти $A = x^2$, $B = xy$, $C = y^2$.
2. Обчислюємо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2.$$

3. $B^2 - AC = 4y^2x^2 = 0 \Rightarrow$ рівняння параболічного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$x^2dy^2 - 2xydxdy + y^2dx^2 = 0. \tag{4.42}$$

5. Розв'яжемо рівняння (4.42).
   а) розв'язуємо рівняння (4.42) як квадратне рівняння відносно dy:

$$dy = \frac{y}{x}dx;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}. \tag{4.43}$$

   б) знайдемо загальні інтеграли рівнянь (4.43) (характеристики рівняння (4.42)):

$$\ln y = \ln x + C,$$
$$\ln y - \ln x = C,$$

звідки $\frac{y}{x} = C$ або $\frac{x}{y} = C$ (ця форма є більш зручною).

6. Введемо характеристичну змінну:

$$\xi = \frac{x}{y}.$$

   Другу характеристичну змінну обираємо довільно, таким чином, щоб виконувалось твердження $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$, а саме $\eta = x$.

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння.

Знайдемо спочатку

$$\xi_x = \frac{1}{y}, \xi_y = -\frac{x}{y^2},\ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = -\frac{1}{y^2}, \xi_{yy} = \frac{2x}{y^3},$$
$$\eta_x = 1, \eta_y = 0,\ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0. \tag{4.44}$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & U_{xx} = \frac{1}{y^2}U_{\xi\xi} + \frac{2}{y}U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \\ 2xy & U_{xy} = -\frac{x}{y^3}U_{\xi\xi} - \frac{x}{y^2}U_{\xi\eta} - \frac{1}{y^2}U_{\xi} \\ y^2 & U_{yy} = \frac{x^2}{y^4}U_{\xi\xi} + \frac{2x}{y^3}U_{\xi} \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.41) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2}\} + U_{\xi\eta}\{\frac{2x^2}{y} - \frac{2x^2}{y}\} + U_{\eta\eta}\{x^2\} + U_{\xi}\{-\frac{1}{y^2} + \frac{2x}{y^3}\} = 0.$$

$$\underbrace{x^2}_{\eta^2}U_{\xi\xi} = 2\underbrace{\frac{x}{y}}_{\xi}U_{\xi}.$$

Або після ділення на η^2 (коефіцієнт при $U_{\xi\xi}$):

$$U_{\xi\xi} = \frac{2\xi}{\eta^2}U_{\xi}.$$

<u>Відповідь.</u> Рівняння (4.41) є рівнянням параболічного типу у всій площині XOY. Канонічний вигляд $U_{\xi\xi} = \frac{2\xi}{\eta^2}U_{\xi}$., де $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = x$.

Задача № 6.

Умова. Визначити тип рівняння

$$xU_{xx} + 2xU_{xy} + |x|U_{yy} = 0 \tag{4.45}$$

і привести його до канонічного вигляду.

Розв’язання:

Рівняння (4.45) при $x > 0$, тобто у першому та другому квадрантах площини XOY, набуває вигляд $xU_{xx} + 2xU_{xy} + xU_{yy} = 0$, або, $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} = 0$, якщо розділити обидві частини на x, оскільки $x \neq 0$; а при $x < 0$, тобто у третьому та четвертому квадрантах площини XOY, набуває вигляд $-xU_{xx} - 2xU_{xy} + xU_{yy} = 0$, або $U_{xx} + 2U_{xy} - U_{yy} = 0$, якщо обидві частини скоротити на $-x$. Обидва отриманих рівняння необхідно розв’язувати окремо, оскільки вони відносяться до різних типів.

А) Розв’яжемо рівняння $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} = 0$ (4.46).

1. Визначаємо коефіцієнти $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$.
2. Обчислюємо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 1 - 1.$$

3. $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ рівняння параболічного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 - 2dxdy + dx^2 = 0. \tag{4.47}$$

5. Розв’яжемо рівняння (4.47).

   а) розв’язуємо рівняння (4.47) як квадратне рівняння відносно dy:

$$dy = dx. \tag{4.48}$$

   б) знайдемо загальні інтеграли рівнянь (4.48) (характеристики рівняння (4.47)):

$$y = x + C,$$

$$y - x = C.$$

6. Введемо характеристичну змінну:

$$\xi = y - x .$$

Другу характеристичну змінну обираємо довільно, таким чином, щоб виконувалось твердження $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$, а саме $\eta = y + x$.

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння.

Знайдемо спочатку

$$\begin{aligned} &\xi_x = -1, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \\ &\eta_x = 1, \eta_y = 1, \ \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} 1 & U_{xx} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \\ 2 & U_{xy} = -U_{\xi\xi} - (-1+1)U_{\xi\eta} + U_{\xi} \\ 1 & U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.46) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{1 - 2 + 1\} + U_{\xi\eta}\{-2 + 2\} + U_{\eta\eta}\{1 + 2 + 1\} = 0.$$

$$4U_{\eta\eta} = 0.$$

Або після ділення на 3 (коефіцієнт при $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\eta\eta} = 0.$$

<u>**В) Розв'яжемо рівняння**</u> $U_{xx} + 2U_{xy} - U_{yy} = 0$ (4.50).

1. Визначаємо коефіцієнти $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$.
2. Обчислюємо вираз $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 1 + 1 = 2.$$

3. $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ рівняння параболічного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:

$$dy^2 - 2dxdy - dx^2 = 0. \tag{4.51}$$

5. Розв'яжемо рівняння (4.51).

а) розв'язуємо рівняння (4.51) як квадратне рівняння відносно dy:

$$dy = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)dx. \tag{4.52}$$

б) знайдемо загальні інтеграли рівнянь (4.52) (характеристики рівняння (4.51)):

$$\begin{aligned} y &= \left(1+\sqrt{2}\right)x + C_1, \quad y - \left(1+\sqrt{2}\right)x = C_1 \\ y &= \left(1-\sqrt{2}\right)x + C_2, \quad y - \left(1-\sqrt{2}\right)x = C_2 \end{aligned}$$

6. Введемо характеристичні змінні:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \left(1+\sqrt{2}\right)x, \\ \eta &= y - \left(1-\sqrt{2}\right)x \end{aligned}.$$

7. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння.

Знайдемо спочатку

$$\begin{aligned} &\xi_x = -1-\sqrt{2}, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \\ &\eta_x = \sqrt{2}-1, \eta_y = 1, \ \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Використовуючи формули (4.6–4.9), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} 1 & U_{xx}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2 U_{\xi\xi}-2\left(1-2\right)U_{\xi\eta}+\left(1-\sqrt{2}\right)^2 U_{\eta\eta} \\ 2 & U_{xy}=\left(1+\sqrt{2}\right)U_{\xi\xi}+\left(-1-\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)U_{\xi\eta}+\left(1-\sqrt{2}\right)U_{\xi} \\ -1 & U_{yy}=U_{\xi\xi}+2\left(-1\right)U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta} \end{array}$$

Ліворуч записано коефіцієнти рівняння (4.50) при відповідних похідних.

8. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)-1\}+U_{\xi\eta}\{-2+4-2\sqrt{2}\}+$$
$$+U_{\eta\eta}\{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+2\left(1-\sqrt{2}\right)-1\}=0.$$

$$-8U_{\xi\eta}=0.$$

Або після ділення на -8 (коефіцієнт при $U_{\xi\eta}$):

$$U_{\xi\eta}=0.$$

Відповідь. Рівняння (4.45) є рівнянням параболічного типу у першому та другому квадрантах площини XOY (канонічний вигляд $U_{\eta\eta}=0$, де $\xi=y-x$, $\eta=y+x$) та рівнянням гіперболічного типу у третьому та четвертому квадрантах площини XOY (канонічний вигляд $U_{\xi\eta}=0$, де $\xi=y-\left(1+\sqrt{2}\right)x$, $\eta=y-\left(1-\sqrt{2}\right)x$).

4.5 Контрольні запитання з теми

1. Отримайте вирази (4.11).
2. Надайте класифікацію диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку
3. Дайте визначення характеристичного рівняння
4. Опишіть методику приведення до канонічної форми рівняння гіперболічного (параболічного, еліпчтиного) типу
5. Наведіть канонічні форми трьох типів рівнянь.

4.6 Задачі для самостійного розв'язання

Визначити тип рівняння з постійними коефіцієнтами і привести його до канонічної форми:

1 $U_{xx} - 8U_{xy} - 9U_{yy} + 21U_x + 3U_y - U = 0$.

2 $2U_{xx} - 4U_{xy} - 6U_{yy} - U_x + 7U_y + 3U = 0$.

3 $3U_{xx} - 4U_{xy} + U_x - 3U_y + U = 0$.

4 $-7U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - U_y + 4U = 0$.

5 $U_{xx} - 2U_{xy} - 8U_{yy} + 3U_y - U = 0$.

6 $U_{xx} - U_{xy} - 6U_{yy} + 2U_x - U = x$.

7 $4U_{xx} - 2U_{xy} - 6U_{yy} + 8U_x + U_y - U = y$.

8 $U_{xx} - 16U_{yy} + U_x + 3U_y - 6U = 0$.

9 $U_{xx} - 8U_{xy} + 2U_x - U_y - 5U = x + y$.

10 $6U_{xx} - U_{xy} - U_{yy} + U_x + U_y - U = 0$.

11 $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 2U_x - U_y + U = x$

12 $2U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + U_x - 3U_y + U = y^2$

13 $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_x - 3U_y + 5U = 0$

14 $3U_{xx} - 6U_{xy} + 3U_{yy} + 5U_x - 3U_y + 2U = y - x$

15 $4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2U_y + U = 0$

16 $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U = x + y$

17 $9U_{xx} - 6U_{xy} + U_{yy} + 7U_x - 2U_y - U = 0$

18 $2U_{xx} - 8U_{xy} + 8U_{yy} + U_x - U_y + U = 0$

19 $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 5U_x + U_y - 3U = y$

20 $9U_{xx} - 12U_{xy} + 4U_{yy} - 3U_x - 2U_y + U = 0$

21 $-U_{xx} - 2U_{xy} - 5U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = 0$

22 $U_{xx} - 2U_{xy} + 10U_{yy} + U_x + 3U_y - 5U = 0$

23 $2U_{xx} + 4U_{xy} + 10U_{yy} + 8U_x - 3U_y + U = \sin x$

24 $U_{xx} - 4U_{xy} + 13U_{yy} + 7U_x + 6U_y = 0$

25 $2U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} + U_x + 5U_y - 2U = y - \frac{3x}{2}$

26 $3U_{xx} - 8U_{xy} + 7U_{yy} + 3U_x - U_y + 2U = 0$

Визначити тип рівняння з постійними коефіцієнтами і привести його до канонічної форми:

27 $3U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} + 3U_x + U_y - 2 = \frac{\sqrt{2}x}{3}$

28 $U_{xx} - 6U_{xy} + 13U_{yy} + 3U_x - U_y + 4U = 0$

29 $13U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + 3U_x + 6U_y - U = 0$

30 $10U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + U_x + 3U_y = 0$

Визначити тип рівняння зі змінними коефіцієнтами і привести його до канонічної форми.

1 $U_{xx} + xyU_{yy} = 0$

2 $yU_{xx} - xU_{yy} + U_x + yU_y = 0$

3 $e^{2x}U_{xx} + 2e^{x+y}U_{xy} + e^2U_{yy} = 0$

4 $(1-y)U_{xx} + (1+y)U_{yy} = 0$

5 $xU_{xx} + 4\sqrt{xy}U_{xy} + yU_{yy} - U_x = 0$

6 $(x-y)U_{xx} + \left(xy - y^2 - x + y\right)U_{xy} = 0$

7 $y^2U_{xx} - e^{2x}U_{yy} + U_x = 0$

8 $\sin^2 yU_{xx} - e^{2y}U_{yy} + 3U_x - 5U = 0$

9 $xU_{xx} + 2xyU_{xy} + 4yU_{yy} + U_x + 3U_y = 0$

10 $xU_{xx} - 2\sqrt{xy}U_{xy} - yU_{yy} + U_x + U_y = 0$

5 СПРОЩЕННЯ ГРУПИ МОЛОДШИХ ПОХІДНИХ ДЛЯ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

5.1 Теоретичні відомості

В найзагальнішому вигляді лінійне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$\begin{aligned} &A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + \\ &+ a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Перетворенням незалежних змінних група старших похідних рівняння може бути спрощений. Рівняння (5.1) приводиться до одного з наступних видів

- у випадку рівняння гіперболічного типу:

$$U_{\xi\eta} + a_1 U_\xi + b_1 U_\eta + c_1 U = f_1(\xi,\eta); \tag{5.2}$$

- у випадку рівняння параболічного типу:

$$U_{\eta\eta} + a_2 U_\xi + b_2 U_\eta + c_2 U = f_2(\xi,\eta); \tag{5.3}$$

- у випадку рівняння еліптичного типу:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + a_3 U_\xi + b_3 U_\eta + c_3 U = f_3(\xi,\eta). \tag{5.4}$$

Якщо коефіцієнти початкового рівняння постійні, то для подальшого спрощення рівняння будь-якого типу потрібно зробити заміну невідомої функції

$$U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} V(\xi,\eta) \tag{5.5}$$

де $V(\xi,\eta)$ – нова невідома функція, – параметри, що підлягають визначенню. Така заміна не «зіпсує» канонічного вигляду, але при цьому дозволить підібрати параметри так, щоб з трьох складових групи молодших похідних в рівнянні залишилося тільки одне. Рівняння гіперболічного, параболічного і еліптичного типів відповідно наберуть вигляду:

$$U_{\xi\eta} + \widetilde{c}_1 U = \widetilde{f}_1(\xi,\eta);$$
$$U_{\eta\eta} + \widetilde{a}_2 U_{\xi} = \widetilde{f}_2(\xi,\eta);$$
$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \widetilde{c}_3 U = \widetilde{f}_3(\xi,\eta).$$

Щоб реалізувати заміну (5.5) в рівняннях (5.2), (5.3), (5.4), необхідно перерахувати всі похідні, що входять в ці рівняння, по формулах

$$\begin{aligned}
&U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} V(\xi,\eta),\\
&U_{\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda V + V_{\xi}),\\
&U_{\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu V + V_{\eta}),\\
&U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2 V + 2\lambda V_{\xi} + V_{\xi\xi}),\\
&U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu V + \mu V_{\xi} + \lambda V_{\eta} + V_{\xi\eta}),\\
&U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2 V + 2\mu V_{\eta} + V_{\eta\eta}).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Детально розглянемо цей процес на прикладі рівняння гіперболічного типу, тобто рівняння (5.2). Перерахуємо похідні, що входять в це рівняння, використовуючи формули (5.6).

$$\begin{array}{c|l}
c_1 & U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} V(\xi,\eta),\\
a_1 & U_{\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda V + V_{\xi}),\\
b_1 & U_{\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu V + V_{\eta}),\\
1 & U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu V + \mu V_{\xi} + \lambda V_{\eta} + V_{\xi\eta})
\end{array}$$

Тут зліва були розставлені відповідні коефіцієнти рівняння (5.2). Збираючи подібні доданки, отримаємо

$$e^{\lambda\xi+\mu\eta}\{V_{\xi\eta} + V_{\xi}(a_1+\mu) + V_{\eta}(b_1+\lambda) + V(a_1\lambda + b_1\mu + \lambda\mu + c_1)\} = f_1(\xi,\eta). \tag{5.7}$$

В рівнянні (5.7) прирівняємо до нуля коефіцієнти при і V_{η}

$$a_1 + \mu = 0,$$
$$b_1 + \lambda = 0.$$

Звідки, підставивши ці значення параметрів в рівняння (5.7) і розділивши його на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, прийдемо до рівняння

$$U_{\xi\eta} + \widetilde{c}_1 U = \widetilde{f}_1(\xi,\eta),$$

де $\widetilde{c}_1 = -2a_1 b_1 + a_1 b_1 + c_1, \quad \widetilde{f}_1(\xi,\eta) = f_1 e^{-b_1\xi - a_1\eta}$.

5.2 Приклади розв'язання типових задач

Привести рівняння

$$U_{xx} - 4U_{xy} + 5U_{yy} - 3U_x + U_y + U = 0 \tag{5.8}$$

до канонічного вигляду і спростити групу молодших похідних.

Розв'язання:

1. Визначимо коефіцієнти $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:

   A=1, B=–2, C=5.
2. Обчислимо вираз $B^2 - AC$:

   $$B^2 - AC = 4 - 5 = -1.$$
3. $B^2 - AC = -1 < 0 \Rightarrow$ рівняння еліптичного типу у всій площині XOY.
4. Запишемо рівняння характеристик:
5.

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0\ . \tag{5.9}$$

6. Розв'яжемо рівняння (5.9). Для цього:

   а) розв'яжемо рівняння (5.9) як квадратне рівняння щодо *dy:*

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{1} dx;$$

$$dy = (-2 \pm i)dx; \tag{5.10}$$

   б) знайдемо загальні інтеграли рівнянь (5.10) (характеристики рівняння (5.9)):

$$y = (-2 \pm i)x + C,$$

$$y + 2x \pm xi = C,$$

7. Введемо характеристичні змінні:

$$\xi = y + 2x,$$
$$\eta = x.$$

8. Перерахуємо похідні, що входять в початкове рівняння.
   Знайдемо спочатку

$$\xi_x = 2, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$
$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

   Використовуючи формули (7), отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} -3 & U_x = 2U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_y = U_\xi, \\ 1 & U_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ -4 & U_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, \\ 5 & U_{yy} = U_{\xi\xi}. \end{array}$$

   Тут зліва були написані коефіцієнти рівняння (5.8) при відповідних похідних.

9. Збираючи подібні доданки, отримаємо:

$$U_{\xi\xi}\{4-8+5\} + U_{\xi\eta}\{4-4\} + U_{\eta\eta}\{1\} +$$
$$+U_\xi\{-6+1\} + U_\eta\{-3\} + U = 0.$$

   або

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 5U_\xi - 3U_\eta + U = 0. \qquad (5.11)$$

   Тепер за допомогою заміни невідомої функції (5.5)

$$U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} V(\xi,\eta)$$

спростимо групу молодших похідних.

Перерахуємо похідні, що входять в рівняння (5.11), використовуючи формули (4.6–4.9).

$$\begin{array}{r|l} 1 & U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}V(\xi,\eta), \\ -5 & U_{\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda V + V_{\xi}), \\ -3 & U_{\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu V + V_{\eta}), \\ 1 & U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2 V + 2\lambda V_{\xi} + V_{\xi\xi}), \\ 1 & U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2 V + 2\mu V_{\eta} + V_{\eta\eta}). \end{array}$$

Тут зліва були розставлені відповідні коефіцієнти рівняння (5.8). Збираючи подібні доданки, отримаємо

$$e^{\lambda\xi+\mu\eta}\{V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\xi}(-5+2\lambda) + V_{\eta}(-3+2\mu) + V(-5\lambda - 3\mu + \lambda^2 + \mu^2 + 1)\} = 0. \quad (5.12)$$

В рівнянні (5.12) прирівняємо до нуля коефіцієнти при V_{ξ} і V_{η}

$$\begin{aligned} -5 + 2\lambda &= 0, \\ -3 + 2\mu &= 0. \end{aligned}$$

Звідки, підставивши ці значення параметрів в рівняння (5.12) і розділивши його на, прийдемо до рівняння

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{15}{2}V = 0.$$

Відповідь. Рівняння (5.8) є рівнянням еліптичного типу на всій площині *XOY*. Його канонічний вигляд $V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{15}{2}V = 0$, де $\xi = y + 2x, \eta = x, \quad U(\xi,\eta) = e^{\frac{5\xi+3\eta}{2}}V(\xi,\eta)$.

5.3 Контрольні запитання з теми

1. Розпишіть алгоритм спрощення групи молодших похідних.
2. Як визначається функція $V(\xi,\eta)$?
3. Якого вигляду набуває диференціальне рівняння після застосування спрощення групи молодших похідних?

5.4 Задачі для самостійного розв’язання

Привести рівняння до канонічної форми та спростити групу молодших похідних

1. $3U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} + 3U_x + U_y - 2U = 0$.
2. $3U_{xx} - 8U_{xy} + 7U_{yy} + 3U_x - U_y + 2U = 0$.
3. $2U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} + U_x + 5U_y - 2U = 0$.
4. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 4U_x - 9U_y - 3U = 0$.
5. $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 4U_x - 3U_y - 7U = 0$.
6. $2U_{xx} + 8U_{xy} + 8U_{yy} - U_x - 2U_y - 5U = 0$.
7. $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} - 3U_x + 2U_y - 5U = 0$.
8. $8U_{xx} - 6U_{xy} - U_{yy} - U_x - 3U_y - U = 0$.
9. $4U_{xx} - 8U_{xy} + U_{yy} - 2U_x + 2U_y - 3U = 0$.
10. $U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 7U_y - 3U = 0$.

6 ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ

Контроль знань та вмінь студентів складається з заходів поточного та підсумкового контролю. Поточний контроль відбувається протягом всього семестру під час проведення практичних занять та містить заходи контролю самостійної роботи студента поза межами аудиторних занять. Він має за мету перевірку рівня підготовленості студента до виконання контрольної роботи.

Поточний контроль полягає у виконанні модульних контрольних робіт з теоретичної та практичної частин курсу і усного опитування з розв'язанням типових задач біля дошки під час практичних занять.

Підсумковий контроль здійснюється на основі результатів поточного контролю і полягає в оцінці засвоєння студентом навчального матеріалу. Він має за мету встановлення рівня знань та вмінь, які набув студент після вивчення навчальної дисципліни. Форма підсумкового контролю – іспит.

Поточний та підсумковий контроль знань та вмінь студента з дисципліни «Математичне моделювання в гідрометеорології та екології» здійснюється за модульно–рейтинговою системою.

Дисципліну розбито на три змістовні модулі, які включають:

<u>Змістовний модуль № 1:</u> розділи „Основні принципи математичного моделювання", „".

<u>Змістовний модуль № 2:</u> розділи „Основні аналітичні (точні) методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними".

<u>Змістовний модуль № 3:</u> „Основні чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними", „Чисельні схеми та їх властивості", „Застосування методів обчислювальної математики для розв'язання різних типів скінченно-різницевих рівнянь".

Максимальна сума балів за кожний модуль та перелік контролюючих заходів визначаються діючою робочою програмою дисципліни.

Оцінка заліку виставляється за результатами поточного контролю – всі аспіранти, які набрали не менше за 60% від максимально можливої загальної суми балів та виконали всі завдання з практичної частини курсу, отримують оцінку заліку відповідно до такої шкали:

Інтегральна сума балів складає	Оцінка з іспиту
<60 % від максимально можливої суми	незадовільно
60–74.9 % від максимально можливої суми	задовільно
75–89.9 % від максимально можливої суми	добре
≥90 % від максимально можливої суми	відмінно

Методичні вказівки для виконання практичних занять з дисципліни „Математичне моделювання в гідрометеорології та екології” (розділ „Аналітичні методи розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними: метод характеристик”) для аспірантів II року навчання денної форми навчання/ Укладачі: к.ф.–м.н., доц. Казаков О.Л., ас. Хоменко І.А. – Одеса, ОДЕКУ, 2011. – 57 с.