

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до самостійної роботи студентів  
та практичних занять  
з дисципліни „Метеорологія та кліматологія”  
(частина III „Динамічна метеорологія”)  
для студентів III курсу  
денної форми навчання**

**Напрямок підготовки „Екологія”  
спеціальність  
“Екологія та охорона навколишнього середовища”**

**“Затверджено”**

на засіданні методичної комісії  
гідрометеорологічного інституту  
протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2009 р.  
Голова комісії \_\_\_\_\_ Єхніч М.П.

**“Узгоджено”**

Декан природоохоронного факультету  
\_\_\_\_\_ Шекк П.В.

**“Затверджено”**

на засіданні кафедри  
“Фізики атмосфери та кліматології”  
протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2009 р.  
Зав. кафедрою \_\_\_\_\_ С.М.Степаненко

**Одеса 2009**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до самостійної роботи студентів**  
**та практичних занять**  
**з дисципліни „Метеорологія та кліматологія”**  
**(частина III „Динамічна метеорологія”)**  
**для студентів III курсу**  
**денної форми навчання**

**Напрямок підготовки „Екологія”**  
**спеціальність**  
**“Екологія та охорона навколишнього середовища”**

**“Затверджено”**  
на засіданні методичної комісії  
гідрометеорологічного інституту  
протокол № 2 від 22.10.2009 р.

Одеса 2009

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів та практичних занять з дисципліни "Динамічна метеорологія" для студентів III курсу денної форми навчання за напрямом "Екологія", спеціальність „Екологія та охорона навколишнього середовища”/ Укладачі: проф. Степаненко С.М., ас. Хоменко І.А. – Одеса, ОДЕКУ, 2009. – 65 с.

## ЗМІСТ

1	Загальна частина.....	4
1.1	Мета та задачі дисципліни.....	4
1.2	Зміст модулю „Динамічна метеорологія”.....	4
1.3	Перелік навчальної і методичної літератури.....	5
1.4	Перелік знань та вмінь студентів і організація навчального процесу.....	5
2	Організація самостійної роботи студента.....	6
2.1	Повчання по вивченню теоретичного матеріалу та виконанню практичних робіт .....	6
2.2	Повчання по вивченню першої теми „Методи математичного опису стану атмосфери. Основні рівняння гідродинаміки атмосфери”.....	7
2.2.1	Рекомендації по вивченню теми.....	7
2.2.2	Приклади розв’язання типових задач.....	8
2.2.3	Контрольні запитання до теми.....	20
2.2.4	Задачі для самостійного розв’язання.....	21
2.3	Повчання по вивченню другої теми „Динаміка вільної атмосфери”.....	24
2.3.1	Рекомендації по вивченню теми.....	24
2.3.2	Приклади розв’язання типових задач.....	25
2.3.3	Контрольні запитання до теми.....	47
2.3.4	Задачі для самостійного розв’язання.....	47
2.4	Повчання по вивченню третьої теми „Рівняння гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери”.....	50
2.4.1	Рекомендації по вивченню теми.....	50
2.4.2	Контрольні запитання до теми.....	51
2.5	Повчання по вивченню четвертої теми „Динаміка граничного шару атмосфери”.....	51
2.5.1	Рекомендації по вивченню теми.....	51
2.5.2	Приклад розв’язання типової задачі.....	52
2.5.3	Контрольні запитання до теми.....	57
2.5.4	Задачі для самостійного розв’язання.....	57
3	Організація контролю знань та вмінь студентів.....	60
	Додаток А.....	62

# 1 ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

## 1.1 Мета та задача дисципліни

Модуль «Динамічна метеорологія» нормативної навчальної дисципліни «Метеорологія та кліматологія» навчального плану спеціальності «Екологія та охорона навколишнього середовища» присвячений вивченню фізичних особливостей рухів повітря, що спостерігаються в тропосфері взагалі і у граничному шарі в окремоті. Саме перенос повітря і турбулентність, яка розвивається особливо в граничному шарі атмосфери, є метеорологічними процесами, що обумовлюють розповсюдження і дифузію шкідливих домішок в атмосфері, тобто формування рівнів їх концентрацій в атмосферному повітрі. Тому цей розділ має суттєве значення для фахівців екологічних спеціальностей.

Метою цього модулю є засвоєння студентами-екологами закономірностей динаміки повітряних течій у вільній атмосфері та граничному шарі атмосфери.

Вивчення цієї частини дисципліни «Метеорологія та кліматологія» базується на базових знаннях студентів, отриманих при проходженні дисциплін «Вища математика», «Фізика», «Методи обробки та аналізу інформації» та попереднього модулю „Фізика атмосфери” дисципліни „Метеорологія та кліматологія”.

Отриманні після вивчення знання та вміння у подальшому будуть використовуватися при вивченні нормативних дисциплін «Моделювання і прогнозування стану довкілля», «Моніторинг довкілля», «Нормування антропогенного навантаження на природне середовище» та входять безпосередньо до ОПП бакалавра–еколога.

## 1.2 Зміст модулю «Динамічна метеорологія»

*Тема 1. Методи математичного опису стану атмосфери. Основні рівняння гідродинаміки атмосфери*

Характеристики стану атмосферного повітря. Рівняння нерозривності. Рівняння руху в формі Ейлера в інерційній та неінерційній системах відліку. Рівняння переносу імпульсу для в'язкої рідини. Рівняння руху в формі Нав'є-Стокса для в'язкої рідини. Рівняння притоку тепла.

*Тема 2. Динаміка вільної атмосфери*

Спрощення рівнянь руху для течій у вільній атмосфері. Геострофічний вітер, його властивості. Термічний вітер, його властивості. Градієнтний вітер, його властивості.

### *Тема 3. Рівняння гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери*

Поняття про ламінарну та турбулентну течії рідини. Методика осереднення рівнянь гідротермодинаміки. Правила осереднення. Осереднені рівняння гідротермодинаміки, їх фізичний аналіз. Замкнення системи рівнянь гідротермодинаміки. «К-теорія». Рівняння балансу та швидкості дисипації кінетичної енергії.

### *Тема 4. Динаміка граничного шару атмосфери*

Фізичний механізм формування граничного шару атмосфери. Опис структури приземного шару. Опис структури вільного граничного шару. Спіраль Екмана. Основні закономірності вертикального розподілу характеристик вітру та турбулентності у граничному шарі атмосфери.

## **1.3 Перелік навчальної і методичної літератури**

### Основна

1. Метеорологія і кліматологія. Підручник під ред. С.М. Степаненка. – Одеса, ТЕС, 2008, 534 с.
2. Степаненко С.Н. Конспект лекцій по курсу „Метеорологія и климатология”. Часть II „Динамическая метеорология”. Издание второе, исправленное. – Одесса, 2001.
3. Задачник по динамической метеорологии. – Л. Гидрометеиздат, 1984, 166 с.
4. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів при підготовці до виконання контрольних робіт з дисципліни „Метеорологія та кліматологія”. Частина II „Динамічна метеорологія”. – Одеса, 2003.

### Додаткова

1. Динамическая метеорология. Учебное пособие под ред. Д.Л. Лайхтмана. – Л. Гидрометеиздат, 1976, 608 с.
2. Задачник по динамической метеорологии. Под редакцией Д.Л. Лайхтмана и Л.С. Гандина. – Л. Гидрометеиздат, 1967, 216 с.
3. Тарнопольський А.Г. Фізика граничного шару атмосфери. – Одеса, 2001, 155 с.

## **1.4 Перелік знань та вмінь студентів і організація навчального процесу**

В результаті вивчення розділу „Динамічна метеорологія” студенти повинні:

### знати:

- основні характеристики, за допомогою яких описується стан атмосферного повітря;

- основні фізичні фактори та сили, що діють в атмосфері та їх співвідношення у вільній атмосфері та у граничному шарі атмосфери;
- основні типи атмосферних течій у вільній атмосфері (геострофічний, термічний, градієнтний вітри);
- основні закономірності формування та динаміки граничного шару атмосфери (вертикальний розподіл вітру, температури, інших характеристик у приземному шарі, вільному граничному шарі);

вміти:

- використовувати отримані знання при аналізі атмосферних процесів у вільній атмосфері та у граничному шарі атмосфери;

бути ознайомленими:

- з методами математичного опису гідродинамічних процесів в атмосфері.

При вивченні дисципліни студент знайомиться з відповідними розділами в навчальній літературі та власних конспектах лекцій, при необхідності та за вказівкою викладача доповнюють рукопис конспектуванням.

Контроль самостійної роботи студента протягом всього часу вивчення дисципліни здійснюється методом модульно–рейтингового контролю. Він передбачає виконання контрольних заходів з двох теоретичних і трьох практичних модулів.

## **2 ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА**

### **2.1 Повчання по вивченню теоретичного матеріалу та виконанню практичних робіт**

Почнемо із загальних порад:

- спочатку необхідно розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеного у пункті 1.3 переліку навчальної і методичної літератури та повчань до цієї теми. В якості основної літератури пропонується використовувати Підручник [1, розділ VII]; якщо при вивченні виникли питання, незрозумілості – тоді, як додаткову, можна використати й іншу навчальну літературу, що наведена у переліку;
- коли Ви вважаєте, що засвоїли зміст теми, що вивчається, спробуйте відповісти на „запитання для самоперевірки”, що наведені наприкінці кожної теми. Якщо Ви не можете відповісти на якесь з цих питань – знайдіть відповідь у тексті Підручника, якщо ж не можете й цього

зробити – перечитайте зміст теми ще раз від початку до кінця – відповідь знайдеться!

- після того, як Ви переконалися, що зміст теми засвоєно, опрацюйте розв'язання типових задач, яке наводиться нижче з повчанням до окремих розділів (дивись нижче п. 2.2);
- далі приступайте до вивчення наступної теми и виконання практичної роботи, що відповідає цій темі.

## **2.2 Повчання по вивченню першої теми „Методи математичного опису стану атмосфери. Основні рівняння гідродинаміки атмосфери”**

### **2.2.1 Рекомендації по вивченню теми**

Перша тема (стор. 177–194 Підручника) знайомить студентів з методом математичного опису стану рідини або газу, що рухається. Атмосфера є одним з таких природних об'єктів і знання фізичних законів, за якими формується динаміка атмосфери, є важливою складовою базових знань фахівця, що займається охороною навколишнього природного середовища.

При вивченні першої теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

1. характеристики стану атмосфери, за допомогою яких можна описати динаміку та термодинаміку атмосфери (стор.5 Конспекту);
2. зв'язок між загальнофізичними законами збереження (маси, імпульсу або кількості руху, енергії) з рівняннями гідротермодинаміки атмосфери (нерозривності – стор. 180–181, руху – стор. 182–190 та притоку тепла – стор. 191–192);
3. перелік сил, що діють в атмосфері та приводять до руху атмосферне повітря (стор. 183 – аналіз рівняння 7.21, стор. 185–186 – аналіз рівняння 7.30, стор. 190 – аналіз рівняння 7.46);
4. визначення диференційних та векторних характеристик полів характеристик стану атмосфери або, як їх називають ще – метеорологічних величин (стор. 177–180);
5. зв'язок індивідуальної та локальної похідних за часом, їх фізичний сенс (стор. 178–179).

Засвоєння цих базових знань дає можливість отримати оцінку „задовільно” на підсумковій атестації.

Для успішного вивчення наступних тем слід також звернути увагу на використання індексних позначень для запису рівнянь гідротермодинаміки (стор. 186–187 та 192) та визначення ефекту „в'язкості” (стор. 189) та його зв'язок з градієнтом швидкості руху (градієнтна гіпотеза – стор. 190).

Закріплення отриманих при вивченні першої теми знань та вмінь здійснюється за допомогою практичних задач, для вирішення яких



потрібно використовувати саме ці знання та вміння. Нижче наводяться приклади задач та пояснення по їх розв'язанню.

### 2.2.2 Приклади розв'язання типових задач

#### Задача № 1.

Умова. Визначити значення і напрям горизонтального градієнту тиску  $\left(\overrightarrow{\frac{\partial p}{\partial n}}\right)$ , якщо відомо, що в широтному напрямі воно змінюється на 3 гПа, а в меридіональному – 5 гПа на кожні 100 км.

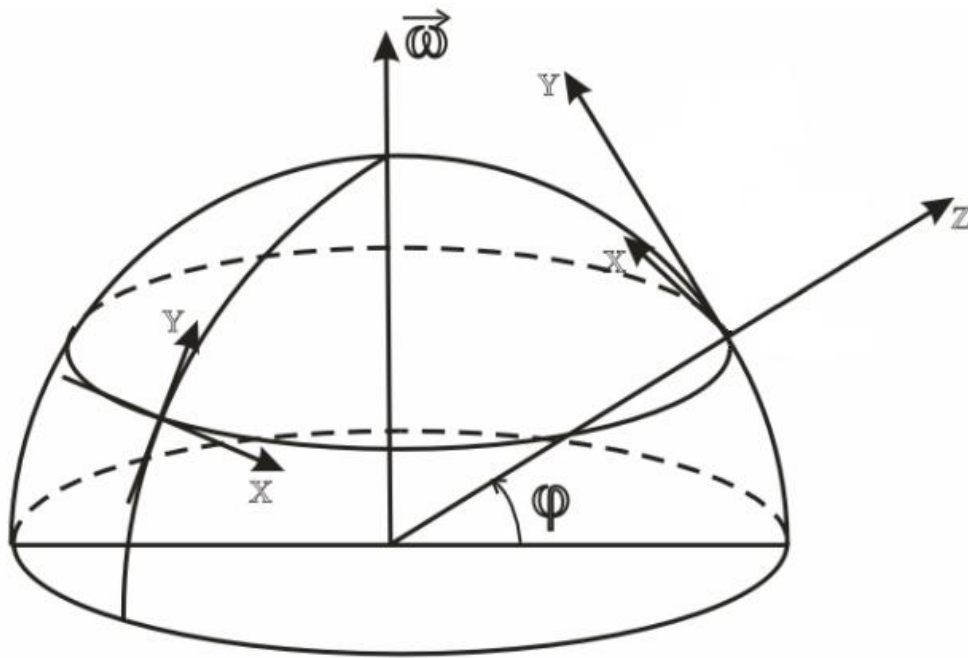
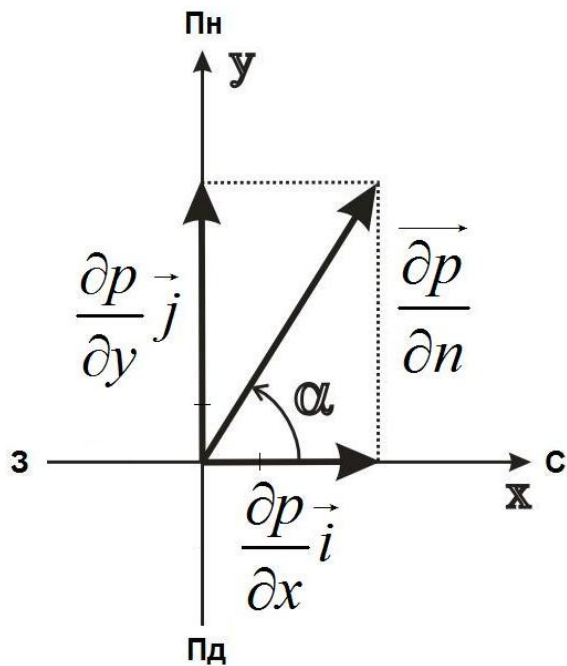


Рисунок 2.1 – Стандартна метеорологічна система координат.

Пояснення до задачі. В метеорології користуються зазвичай стандартною метеорологічною системою координат. В цій системі вісь  $OX$  спрямовують по колу широти з заходу на схід, вісь  $OY$  – по меридіональному колу з півдня на північ, а вісь перпендикулярно площині  $XOY$  вертикально угору (див. рис. 2.1).

#### Розв'язання задачі.

При використанні стандартної метеорологічної системи координат зміна тиску в широтному та меридіональному напрямках означає зміну тиску у напрямку вісі  $OX$  та вісі  $OY$  відповідно. Отже, значення горизонтального градієнту тиску (тобто модуль цього вектора) знаходимо за формулою:



$$\left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{9 + 25} =$$

$$= \sqrt{34} = 5,8 \text{ ГПа/100км},$$

а напрям вектору горизонтального градієнта тиску можна обрахувати так

$$\text{tg } \alpha = \frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial x} = \frac{5}{3} \cong 1.63.$$

Отже кут  $\alpha = \text{arctg}(1.63) \approx 59^\circ$ .

Відповідь до задачі № 1: значення горизонтального градієнту складає 5,8 гПа/100км, а напрям –  $59^\circ$ , тобто - північно-північно-східний.

### Задача № 2.

Умова. Обчислити плоску дивергенцію та вертикальну складову вихору за даними, що наведені на рис. 2.2 ( $r = 500 \text{ км} = 5 \cdot 10^5 \text{ м}$ ).

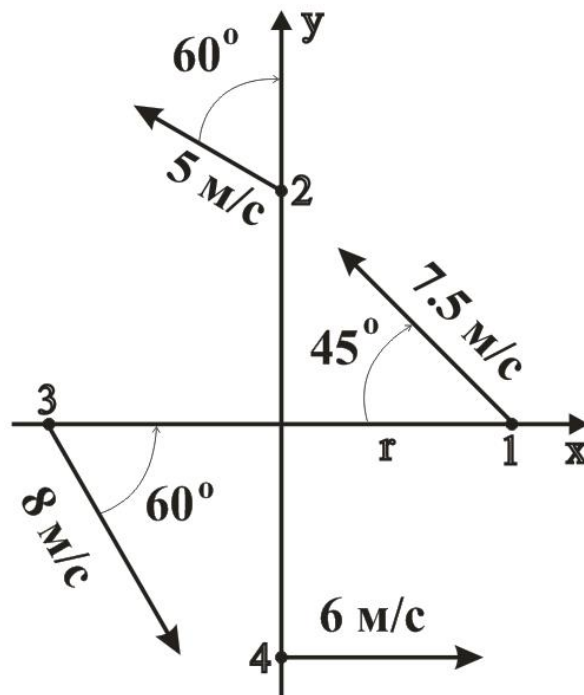


Рисунок 2.2 – Поле швидкості вітру.

### Розв'язання задачі.

Запишемо вирази для плоскої дивергенції та вертикальної складової вихору швидкості [3 (Задачник), стор. 4]:

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{та} \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для того щоб знайти ці диференціальні характеристики поля швидкості, необхідно визначити складові швидкості  $u$  та  $v$ , тобто проекції вектора швидкості на вісі  $x$  та  $y$  відповідно.

Тоді в точці 1:  $u_1 = 7.5 \cdot \cos 135^\circ = -5.3 \text{ м/с}$ ,  $v_1 = 7.5 \cdot \sin 45^\circ = 5.3 \text{ м/с}$ ;

в точці 2:  $u_2 = 5 \cdot \cos 150^\circ = -4.3 \text{ м/с}$ ,  $v_2 = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2.5 \text{ м/с}$ ;

в точці 3:  $u_3 = 8 \cdot \cos 60^\circ = 4.0 \text{ м/с}$ ,  $v_3 = 8 \cdot \cos 150^\circ = -6.9 \text{ м/с}$ ;

в точці 4:  $u_4 = 6 \cdot \cos 0^\circ = 6 \text{ м/с}$ ,  $v_4 = 6 \cdot \cos 90^\circ = 0$ .

---

Зауваження. Кут визначається між напрямком вектора та додатним напрямком вісі.

---

Нагадаємо, що для обчислення диференціальних характеристик метеорологічних полів використовують наближені скінченнорізницеві співвідношення за допомогою яких можна представити перші та другі похідні через значення метеорологічної величини в точках та крок за простором,  $r$ , (рис. 2.3) [3 (Задачник), стор. 5].

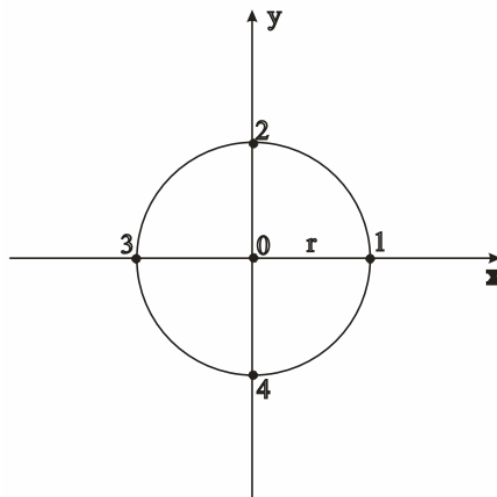


Рисунок 2.3 – Чотириточковий шаблон, що використовується для знаходження перших та других похідних

Скінченнорізницеві співвідношення можна представити через центральні різниці:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{f_1 - f_3}{2r}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{f_2 - f_4}{2r},$$

Перші похідні від складових швидкості апроксимуємо центральними різницями за формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_1 - u_3}{2r} = \frac{-5.3 \text{ М/с} - 4.0 \text{ М/с}}{2 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ м}} = -9.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_1 - v_3}{2r} = \frac{5.3 \text{ М/с} + 6.9 \text{ М/с}}{2 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ м}} = 12.2 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_2 - v_4}{2r} = \frac{2.5 \text{ М/с}}{2 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ м}} = -2.5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_2 - u_4}{2r} = \frac{-4.3 \text{ М/с} - 6.0 \text{ М/с}}{2 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ м}} = -10.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

---

Зауваження. В будь-якій фізичній задачі необхідно привести одиниці вимірювання до однієї системи одиниць. Оскільки в метеорології найчастіше використовується система SI, то, знаходячи дивергенцію та вихор, обов'язково перевести крок сітки з км в метри, оскільки швидкість задано в м/с і одиниця вимірювання дивергенції та вихору буде 1/с або с<sup>-1</sup>.

---

Тоді

$$\text{div} \vec{V} = -9.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1} + 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1} = -6.8 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

$$\Omega_z = 12.2 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1} - (-10.3 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}) = -22.5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

Додатна вертикальна складова вихору швидкості вказує на циклонічний рух повітряних мас.

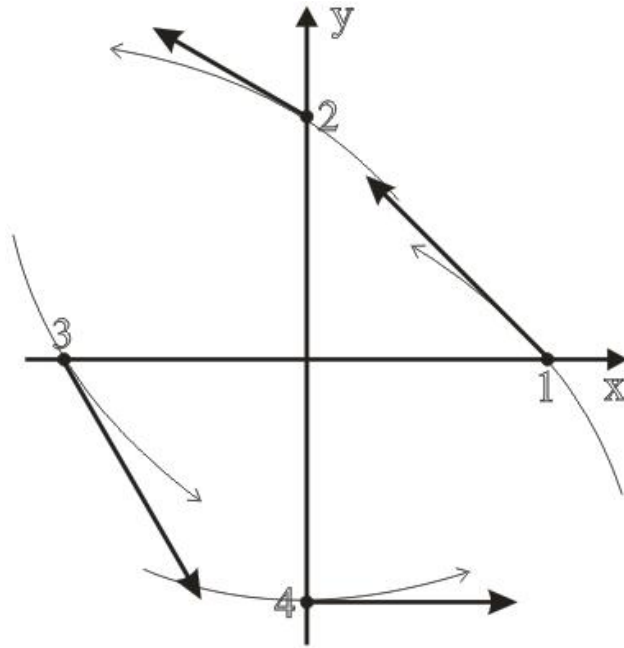


Рисунок 2.4 – Лінії течії в заданому полі швидкостей вітру.

Від’ємна плоска дивергенція має сенс відносного зменшення з часом площі проекції повітряного об’єму у горизонтальній площині, або конвергенції повітряних мас, тобто потік швидкості, що втікає, перевищує той, що витікає. Це можна бачити безпосередньо з рис. 2.2: якщо в кожній точці, в якій задано вектор швидкості вітру, побудувати лінію течії, тобто провести лінію, для якої вектор швидкості спрямований по дотичній, то можна побачити, що загалом повітряні маси рухаються у центр циклона, тобто на справді спостерігається конвергенція повітряних течій (рис. 2.4).

Відповідь до задачі № 2:  $div \vec{V} = -6.8 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Omega_z = -22.5 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ .

### Задача № 3.

Умова. Оцінити середнє значення лапласіана тиску в центрі антициклонічної області, якщо відомо, що ізобари, проведені через 5 гПа, мають форму концентричних кіл. Тиск у центрі антициклону складає  $p_0 = 1000$  гПа, а віддалення ізобари 995 гПа від центру складає 350 км.

### Розв’язання задачі.

Для концентричних кіл значення лапласіана тиску можна визначити за формулою

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

У загальному вигляді другі похідні для будь-якої фізичної величини можна представити у скінченнорізницевому вигляді таким чином [3, стор. 5]:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{r^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{r^2}.$$

Тоді для лапласіана тиску скінченнорізницевий аналог набуває вигляду  $\nabla^2 p = \frac{1}{r^2}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 4p_0)$ , де  $r$  – радіус кола або віддалення ізобари від центру кола.

Тоді, для нашої задачі  $r = 3.5 \cdot 10^2$  км, а  $(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 4p_0) = (4 \cdot 995 - 4 \cdot 1000) = -20$  гПа. Підставляємо отримані значення до формули і отримуємо:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{12.25 \cdot 10^4} (-20) = -1.6 \cdot 10^{-4} \text{ гПа/км}^2.$$

Відповідь до задачі № 3: *середнє значення лапласіана в центрі антициклонічної області складає  $-1,6 \cdot 10^{-4}$  гПа/км<sup>2</sup>.*

#### Задача № 4.

Умова. Обчислити зміну температури повітря за 3 години, яке буде зареєстроване приладами на вільному врівноваженому аеростаті, що зсувається на північний схід зі швидкістю 11 м/с, якщо горизонтальний градієнт температури чисельно дорівнює 2<sup>0</sup>С на 100 км та спрямований на південь, а підвищення температури за останні 3 години за даними станційних спостережень складають 0.5<sup>0</sup>С.

Пояснення до задачі. Вільний аеростат – це аеростат, яким не керують, і він рухається разом з повітряним потоком, тобто зі швидкістю повітря, а це означає, що прилади у такому аеростаті показуватимуть зміну фізичних величин з часом у об'ємі повітря, що рухається. За умовами задачі аеростат є врівноваженим, це означає, що він рухається суто у горизонтальній площині, тобто вертикальна компонента швидкості  $w$  відсутня.

Умову задачі скорочено можна записати наступним чином:

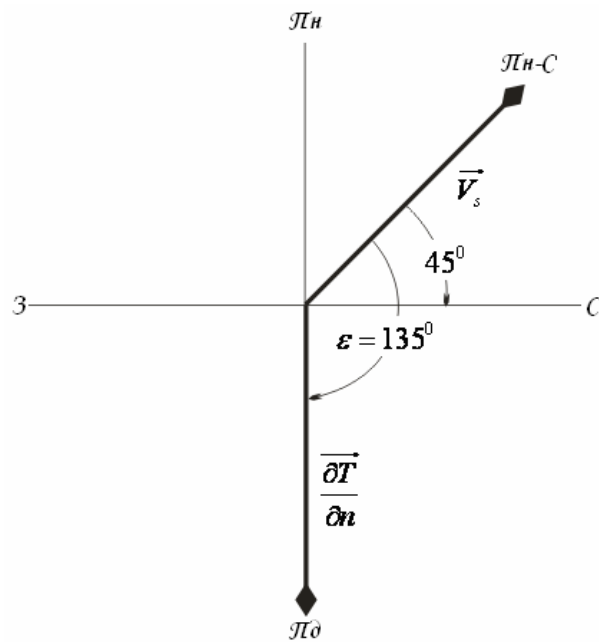
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.5^{\circ} \text{C}/3\text{год}$$

$$V_s = 11\text{м}/\text{с}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 2^{\circ} \text{C}/100\text{км}$$

$$\varepsilon = 135^{\circ}$$

$$\frac{dT}{dt} = ?$$



### Розв'язання задачі.

Для знаходження зміни температури скористуємось формулою (1.11) з Задачнику [3, стор. 7] у наступному вигляді:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + V_s \frac{\partial T}{\partial n} \cos \varepsilon.$$

Підставляючи значення всіх величин у цей вираз, треба привести всі одиниці вимірювання до системи SI, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.5^{\circ} \text{C}/3\text{год} = \frac{0.5^{\circ} \text{C}}{10800\text{с}} = 4.6 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ} \text{C}/\text{с}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 2^{\circ} \text{C}/100\text{км} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ} \text{C}/\text{м}$$

$$\cos \varepsilon = \cos 135^{\circ} \approx -0.707$$

$$\frac{dT}{dt} = 4.6 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ} \text{C}/\text{с} + 11\text{м}/\text{с} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ} \text{C}/\text{м} (-0.707) =$$

$$= -10.954 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ} \text{C}/\text{с} \cdot \frac{10800\text{с}}{3\text{год}} \approx -1.2^{\circ} \text{C}/3\text{год}$$

Відповідь до задачі № 4:

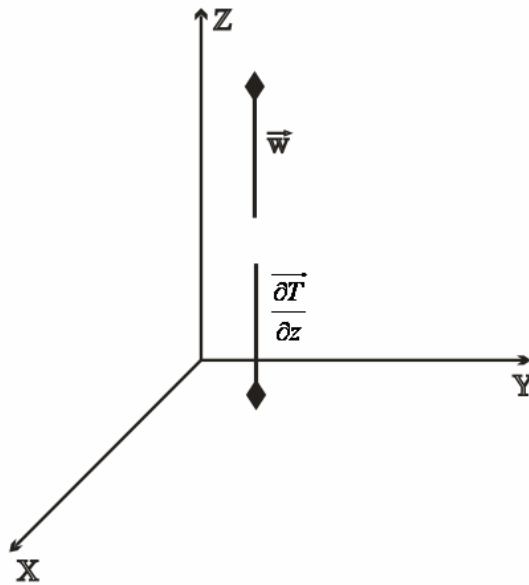
*приладами на аеростаті за 3 години буде зареєстроване зменшення температури на  $1.2^{\circ} \text{C}$ .*

### Задача № 5.

Умова. Повітряна маса підіймається з швидкістю 1 см/с. Обчислити зміну її температури за 3 години, якщо вертикальний градієнт температури у зовнішньому середовищі дорівнює  $-0.5^{\circ}\text{C}/100\text{м}$  (температура з висотою зменшується), а на деякій фіксованій висоті температура за цей час зростає на  $1^{\circ}\text{C}$ .

Умову задачі скорочено можна записати наступним чином:

$\frac{\partial T}{\partial t} = 1.0^{\circ}\text{C}/3\text{год}$
$w = 1\text{см}/\text{с}$
$\frac{\partial T}{\partial z} = -0.5^{\circ}\text{C}/100\text{м}$
$\frac{dT}{dt} = ?$



### Розв'язання задачі.

З формули (1.11) [3, стор. 7] бачимо, що зміни температури з часом для цього випадку можна виразити як  $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + w \frac{\partial T}{\partial z}$ , оскільки рух у горизонтальній площині є відсутнім.

Оскільки за умовою задачі необхідно знайти зміну температури у повітряній масі, що піднімається, за 3 години, то для того, щоб відповідь одразу отримати у  $\frac{^{\circ}\text{C}}{3\text{год}}$ , виразимо такі фізичні величини як локальну

похідну за часом та вертикальну складову швидкості у  $\frac{^{\circ}\text{C}}{3\text{год}}$  та  $\frac{\text{м}}{3\text{год}}$  відповідно.

З умови задачі  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{3^{\circ}\text{C}}{3\text{год}}$ . Вертикальний градієнт температури дорівнює  $-\frac{0.5^{\circ}\text{C}}{100\text{м}} = -0.5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{C}}{\text{м}}$  (знак „-“ вказує на той факт, що температура зменшується з висотою).



Вертикальна швидкість в системі SI дорівнює  $w = 0.01 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$   
 або за 3 години ( $3 \times 3600 \text{с} = 10800 \text{с} = 1.08 \cdot 10^4 \text{с}$ ) маємо  
 $w = 1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1.08 \cdot 10^4 \text{с}}{3 \text{год}} = 1.08 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{3 \text{год}}$ .

Тоді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1^\circ\text{C}}{3 \text{год}} - 0.5 \cdot 10^{-2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}} \cdot 1.08 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{3 \text{год}} = 0.46 \frac{^\circ\text{C}}{3 \text{год}}$$

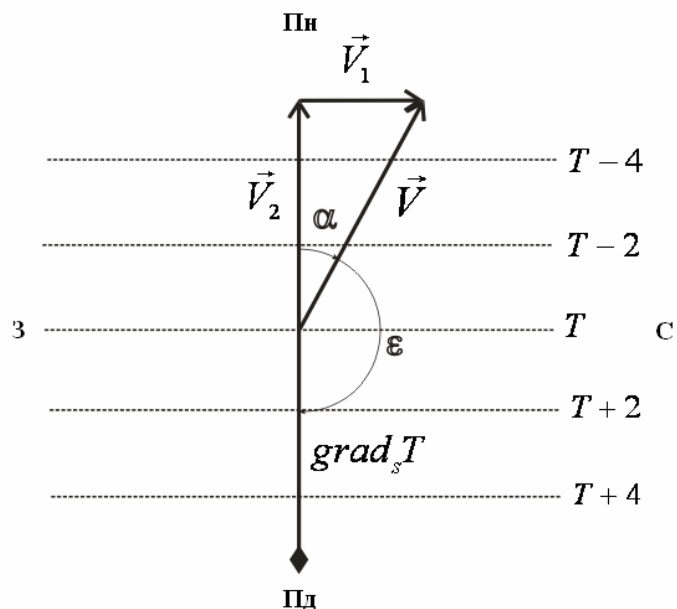
Відповідь до задачі № 5: температури повітряної маси за 3 години підвищиться на  $0,46^\circ\text{C}$ .

### Задача № 6.

Умова. Визначити напрямок та швидкість руху вільного врівноваженого аеростату, якщо за 3 год. польоту він перемістився на 100 км східніше, його прилади за цей час зареєстрували зниження температури на  $2.0^\circ\text{C}$ , а за даними станційних вимірювань температура підвищилась на  $3.0^\circ\text{C}/\text{год}$ . Відмітимо, що горизонтальний градієнт температури дорівнює  $1.5^\circ\text{C}/100 \text{км}$  та спрямований на південь.

Умову задачі скорочено можна записати наступним чином:

$\frac{\partial T}{\partial t} = +0.3^\circ\text{C}/\text{год}$
$\frac{dT}{dt} = -2.0^\circ\text{C}/\text{год}$
$ \text{grad}_s T  = 1.5^\circ\text{C}/100 \text{км}$
$ \vec{V}_1  = \frac{100 \text{км}}{3 \text{год}} \approx 9.3 \text{м}/\text{с}$
$ \vec{V}  = ?$



### Розв'язання задачі:

Аеростат перемістився на 100 км східніше відносно свого початкового положення. Це означає, що він перемістився не строго на схід (у такому

випадку  $\frac{dT}{dt} = 0$ , оскільки шлях аеростату пролягав би уздовж ізотерми), тобто його переміщення було або з північною, або з південною складовою. Оскільки прилади на аеростаті зареєстрували зниження температури, то рухався він у бік протилежний градієнтові температури, тобто з північною складовою (рисунок до задачі).

Отже, швидкість аеростату ( $\vec{V}$ ) можна розкласти на дві складові:  $\vec{V}_1 = \frac{100\text{км}}{3\text{год}} \approx 17.9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  – складова, яка не викликає зміни температури та  $\vec{V}_2$  – складова, яка повністю відповідає за зміну температури. Тоді, скориставшись виразом (1.18), можна отримати значення для модуля швидкості  $\vec{V}_2$  (кут між  $\vec{V}_2$  та  $\text{grad}_s T$  складає  $180^\circ$ ):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + |\vec{V}_2| |\text{grad}_s T| \cos \varepsilon$$

$$|\vec{V}_2| = \frac{\frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t}}{|\text{grad}_s T| \cos \varepsilon}$$

$$|\vec{V}_2| = \frac{-2.0 \frac{^\circ\text{C}}{3\text{год}} - 0.3 \frac{^\circ\text{C}}{\text{год}}}{1.5 \frac{^\circ\text{C}}{100\text{км}} \cdot \cos 180^\circ} = \frac{\frac{2.0^\circ\text{C}}{10800\text{с}} + \frac{0.3^\circ\text{C}}{3600\text{с}}}{1.5 \cdot 10^{-5} \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}} \approx$$

$$\approx \frac{18.5 \cdot 10^{-5} \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}} + 8.3 \cdot 10^{-5} \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}}{1.5 \cdot 10^{-5} \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}} \approx 17.9 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Тоді загальна швидкість:

$$|\vec{V}| = \sqrt{|\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2} = \sqrt{\left(17.9 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 + \left(9.3 \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2} \approx \sqrt{406.9} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 20.2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Знайдемо напрямок швидкості, для цього обчислимо кут між напрямком на північ та вектором загальної швидкості,  $\alpha$ :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{|\vec{V}_1|}{|\vec{V}_2|} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{9.3}{17.9} \right) \approx 27.4^\circ,$$

тобто аеростат переміщувався у північно–північно–східному напрямку.

Відповідь до задачі № 6: аеростат переміщувався у північно–північно–східному напрямку зі швидкістю 20.2 м/с.

### Задача № 7.

Умова. Повітряна маса натікає на узгір'я, що має нахил  $10^\circ$  до горизонту, зі швидкістю 10 м/с. Горизонтальний та вертикальний складають  $2.5^\circ\text{C}/100\text{ км}$  та  $-0.65^\circ\text{C}/100\text{ м}$  відповідно. Як зміниться температура в фіксованій точці за 3 години, якщо рух повітряної маси відбувається адіабатично, а кут між напрямком горизонтального градієнта та напрямком руху повітряної маси складає  $45^\circ$ .

### Розв'язання задачі.

Оскільки рух повітряної маси відбувається і у горизонтальній, і у вертикальній площинах одночасно, то і горизонтальна, і вертикальна складова швидкості існуватимуть (див. рис. до задачі).



З рисунку можна бачити, що горизонтальну складову швидкості можна знайти як

$$|\vec{V}_s| = |\vec{V}| \cos(\text{кут нахилу узгір'я до горизонту}) = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot \cos 10^\circ = 9.8 \frac{\text{М}}{\text{с}},$$

а вертикальну складову швидкості як

$$w = |\vec{V}| \sin(\text{кут нахилу узгір'я до горизонту}) = 10 \frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot \sin 10^\circ = 1.7 \frac{\text{М}}{\text{с}}$$

За умовою задачі відомо, що повітряна маса піднімається адіабатично, тобто у повітряній масі під час підйому потенціальна температура залишається незмінною (це впливає з визначення потенціальної температури). Тобто зв'язок між індивідуальною та локальною похідними ми маємо переписати у термінах потенціальної температури:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + |\vec{V}_s| |\text{grad}\theta| \cos \varepsilon + w \frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Перейдемо від звичайної температури до потенціальної:  $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$ ,  $\text{grad}\theta = \text{grad}T$  (оскільки в цьому випадку зміна температури відбувається на фіксованому рівні).

Для того, щоб перейти від вертикального градієнта звичайної температури до вертикального градієнта потенціальної температури маємо спочатку прологарифмувати, а потім про диференціювати по  $z$  вираз для потенціальної температури  $\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/C_p}$ :

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{C_p} (\ln 1000 - \ln p),$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{R}{C_p} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Якщо замінити  $\frac{\partial p}{\partial z}$  з рівняння статки  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ , а густину з рівняння стану  $p = \rho R T$ , то отримаємо:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{C_p} \frac{1}{p} \frac{p g}{R T} \Rightarrow \frac{1}{\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{T} \frac{g}{C_p},$$

Враховуючи, що співвідношення  $\frac{\theta}{T} \approx 1$ , вираз () можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{C_p} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \gamma_a.$$

$$\text{Звідки } \frac{\partial \theta}{\partial z} = -0.65 \frac{^{\circ}\text{C}}{100\text{м}} - 0.98 \frac{^{\circ}\text{C}}{100\text{м}} = -1.63 \frac{^{\circ}\text{C}}{100\text{м}}.$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{d\theta}{dt} - |\vec{V}_s| |\text{grad}\theta| \cos \varepsilon - w \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= 0 - 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2.5 \frac{^{\circ}\text{C}}{100\text{км}} \cdot \cos 45^{\circ} + 1.7 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1.63 \frac{^{\circ}\text{C}}{100\text{м}} = \\ &= -9.8 \cdot 2.5 \cdot 0.707 \cdot 10^{-5} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{с}} + 1.7 \cdot 1.63 \cdot 10^{-2} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{с}} \approx \\ &\approx 2.79 \cdot 10^{-5} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{с}} \frac{0.108 \cdot 10^5 \text{с}}{3\text{год}} \approx 0.3 \frac{^{\circ}\text{C}}{3\text{год}}. \end{aligned}$$

Відповідь до задачі № 7: температура у фіксованій точці підвищилась на  $0.3^{\circ}\text{C}$  за 3 години.

### 2.2.3 Контрольні запитання до теми

1. Чим відрізняються скалярна та векторна величини?
2. Наведіть приклади скалярних величин (векторних величин).
3. Дайте визначення градієнта скалярної величини.
4. Градієнти яких скалярних величин Ви знаєте?
5. Запишіть вираз для дивергенції швидкості.
6. Визначення та фізичний сенс дивергенції швидкості.
7. Запишіть вираз для вихору швидкості.
8. Визначення та фізичний сенс вихору швидкості.
9. До скалярних чи векторних величин відносяться градієнт скалярної величини, дивергенція швидкості, вихор швидкості?
10. Як представити перші похідні від фізичної величини  $f$  за допомогою скінченнорізницевої апроксимації?
11. Як представити другі похідні від фізичної величини  $f$  за допомогою скінченнорізницевої апроксимації?
12. Фізичний сенс локальної похідної.
13. Фізичний сенс індивідуальної похідної.
14. Чим обумовлена зміна температури з часом у фіксованій точці?
15. Чим обумовлена зміна температури з часом у об'ємі повітря, що рухається?
16. Чим будуть обумовлені зміни величини  $f$  у частинці, що рухається, якщо локальна похідна  $\frac{\partial f}{\partial t}$  дорівнює нулю?

## 2.2.4 Задачі для самостійного розв'язання

### Задачі на визначення градієнта поля скалярної величини.

1. Визначити значення та напрям горизонтального градієнту тиску, якщо відомо, що в широтному напрямку воно змінюється на 3.0 гПа, а в меридіональному на 4.0 гПа на кожні 100 км.
2. Визначити значення та напрям горизонтального градієнту тиску, якщо відомо, що в широтному напрямку воно змінюється на 5.5 гПа, а в меридіональному на 6.2 гПа на кожні 200 км.
3. Визначити значення та напрям горизонтального градієнту тиску, якщо відомо, що в широтному напрямку воно змінюється на  $-3.5$  гПа, а в меридіональному на 5.0 гПа на кожні 300 км.
4. Визначити значення та напрям горизонтального градієнту тиску, якщо відомо, що в широтному напрямку воно змінюється на  $-2.5$  гПа, а в меридіональному на  $-3.0$  гПа на кожні 200 км.
5. Визначити значення та напрям горизонтального градієнту тиску, якщо відомо, що в широтному напрямку воно змінюється на  $-2,4$  гПа, а в меридіональному на  $-2,3$  гПа на кожні 100 км.
6. Відстань між двома точками, що розташовані на одному меридіані, складає 500 км. Тиск у цих точках відрізняється на 15 гПа та зростає у північному напрямку. Ізобара проходить між двома цими точками та перетинає меридіан під кутом  $30^0$  (кут відраховується проти годинникової стрілки). Визначити значення та напрямок горизонтального градієнта тиску.
7. Поле температури  $T$  було задано у площині. Область низьких значень  $T$  була обкреслена двома замкнутими ізотермами (лініями рівних  $T$ ) у вигляді концентричних кіл. На двох сусідніх ізотермах температура рівна 289 До і 295 К, а найкоротша відстань між ними – 300 км. Розрахувати модуль градієнта температури і показати на кресленні його напрям.
8. Область низького тиску була обкреслена у площині замкнутими ізобарами (лініями рівних значень тиску) у вигляді концентричних кіл. На двох сусідніх ізобарах тиск дорівнює 995 і 1000 гПа, а найкоротша відстань між ними – 500 км. Розрахувати модуль плоского градієнта тиску і показати на кресленні його напрям.
9. Знайти кут нахилу ізотермічної поверхні до горизонту в стандартній атмосфері, якщо відстань між одиничними ізотермами на карті масштабу  $1:10^7$  складає 2 см.
10. Знайти кут нахилу ізобаричної поверхні 1000 гПа до горизонту в стандартній атмосфері, якщо горизонтальний градієнт тиску складає  $\frac{2\text{гПа}}{100\text{км}}$ .

Задачі на визначення дивергенції та вихору швидкості вітру.

Оцінити дивергенцію та вихор швидкості вітру на ізобаричних поверхнях АТ–850, АТ–700 та АТ–500 за даними, наведеними у таблиці ( $r = 100\text{км}$ ). Отримані результати проаналізувати.

1 варіант						2 варіант					
АТ	u,v	1	2	3	4	АТ	u,v	1	2	3	4
земля	u	-1.2	-2.4	-9.4	-10.6	земля	u	-0.6	-1.6	-0.6	2.1
	v	-1.0	-3.0	-4.4	-5.8		v	-1.4	-3.4	-4.9	-3.1
850	u	-4.2	-3.6	-13.5	-12.8	850	u	1.2	-5.0	-1.0	3.6
	v	-6.6	-5.0	-5.5	-7.6		v	-8.1	-10.0	-10.5	-7.9
700	u	-5.2	-13.5	-12.5	-12.6	700	u	3.4	-3.8	-1.0	3.4
	v	-8.9	-7.8	-7.2	-8.8		v	-8.6	-10.4	-10.4	-8.1
500	u	-6.8	-6.5	-6.5	-6.2	500	u	-0.6	-4.0	-2.6	-0.4
	v	-7.8	-7.0	-6.8	-8.0		v	-7.0	-7.6	-8.2	-7.2

3 варіант						4 варіант					
АТ	u,v	1	2	3	4	АТ	u,v	1	2	3	4
земля	u	-1.6	-1.4	-4.6	-2.6	земля	u	3.5	4.1	5.0	2.9
	v	-2.6	-3.2	-2.1	-5.4		v	-1.6	-4.6	-1.0	-2.2
850	u	-10.6	-13.6	-9.4	-5.0	850	u	8.5	3.6	3.5	7.5
	v	-9.6	-8.1	-9.2	-10.0		v	-4.6	-7.9	-7.9	-4.6
700	u	-8.1	-13.2	-9.1	-3.8	700	u	7.0	3.4	0.9	4.2
	v	-9.6	-9.2	-9.8	-10.4		v	-5.1	-8.1	-8.2	-5.2
500	u	-5.5	-6.2	-5.6	-4.0	500	u	1.1	-0.4	-0.2	0.8
	v	-7.9	-8.0	-8.2	-7.6		v	-5.4	-7.2	-8.5	-6.8

5 варіант						6 варіант					
АТ	u,v	1	2	3	4	АТ	u,v	1	2	3	4
земля	u	0.1	-0.8	3.0	3.9	земля	u	5.1	2.9	2.1	4.2
	v	-1.6	-3.8	-5.6	-2.6		v	-1.9	-5.4	-5.4	-2.0
850	u	5.8	-0.1	1.6	6.0	850	u	10.9	7.5	7.5	10.0
	v	-6.6	-9.4	-9.4	-6.0		v	-1.9	-4.6	-5.8	-2.6
700	u	6.4	1.1	0.4	3.9	700	u	7.5	4.2	4.0	7.5
	v	-6.8	-9.5	-9.2	-6.6		v	-2.2	-5.2	-7.0	-4.8
500	u	0.9	-1.6	-1.4	0.4	500	u	1.5	0.8	2.6	4.2
	v	-6.2	-7.4	-8.2	-6.8		v	-4.8	-6.8	-10.4	-8.9

7 варіант						8 варіант					
АТ	u,v	1	2	3	4	АТ	u,v	1	2	3	4
земля	u	-2.0	-6.6	-5.6	-2.2	земля	u	3.5	1.4	4.8	1.8
	v	-4.0	-2.3	-2.6	-3.5		v	-0.4	-3.8	-3.8	0.1
850	u	-9.5	-14.6	-10.6	-3.5	850	u	14.6	11.4	10.0	12.9
	v	-9.5	-9.6	-9.6	-8.6		v	-1.0	-3.5	-3.1	0.6
700	u	-5.2	-13.1	-8.1	0.0	700	u	12.1	10.2	6.9	9.6
	v	-7.9	-10.0	-9.6	-9.0		v	-1.4	-3.9	-3.9	-0.9
500	u	-6.1	-7.4	-5.5	-3.0	500	u	2.1	2.0	1.1	1.5
	v	-8.4	-7.8	-7.9	-7.5		v	-3.2	-4.5	-4.6	-3.1

9 варіант						10 варіант					
АТ	u,v	1	2	3	4	АТ	u,v	1	2	3	4
земля	u	5.4	3.8	2.0	3.1	земля	u	-1.6	-3.5	-2.0	-1.6
	v	0.1	-2.6	-2.2	0.8		v	-3.1	-3.1	-4.0	-2.1
850	u	17.4	12.0	13.6	16.5	850	u	-8.4	-14.9	-9.5	-0.4
	v	-0.5	-3.0	-2.5	-0.2		v	-5.0	-9.0	-9.5	-6.0
700	u	16.2	13.9	13.0	14.1	700	u	-3.6	-12.2	-5.2	3.6
	v	-1.2	-3.9	-3.0	-0.8		v	-3.4	-7.2	-7.9	-6.2
500	u	4.8	4.4	2.8	3.0	500	u	-7.0	-10.1	-6.1	-1.4
	v	-3.8	-5.1	-4.2	-3.1		v	-8.0	-7.9	-8.4	-7.5

Задачі на визначення індивідуальної або локальної зміни метеорологічних величин у часі.

1. Розрахувати зміну температури на деякому фіксованому рівні, якщо повітряна маса адіабатично опускається зі швидкістю 2 см/с, а вертикальний градієнт температури в атмосфері складає  $0,6^{\circ}\text{C}/100\text{м}$  (температура з висотою знижується).
2. Збільшення температури в рухомій повітряній масі дорівнює зменшенню температури у фіксованій точці. Знайти кут між градієнтом температури, що дорівнює  $4^{\circ}\text{C}/100\text{км}$ , і швидкістю вітру, що дорівнює 8 м/с, якщо за 3 години температура в точці зросла на  $10^{\circ}$ .
3. Визначити зміну температури в повітряній масі, що піднімається зі швидкістю 1.5 см/с, якщо температура у фіксованій точці простору збільшилась на  $2^{\circ}\text{C}$  за 3 год., а повітряна маса перемістила за цей час у північно–західному напрямку на 100 км, а горизонтальний градієнт температури дорівнює  $1^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$  та спрямований на південь. Вертикальний градієнт дорівнює  $0.6^{\circ}\text{C}/100\text{ м}$  (температура з висотою зменшується).
4. Визначити напрям та швидкість руху вільного урівноваженого аеростату, якщо за 3 год. Польоту він змістився на 100 км на схід, його прилади за цей час показали зниження температури на  $2^{\circ}\text{C}$ , а по даним станційних вимірювань температура підвищується на  $0.3^{\circ}\text{C}/\text{год}$ . Відомо, що горизонтальний градієнт температури дорівнює  $1.5^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$  та спрямований на південь
5. За який час температура в психрометричній будці зменшиться на  $2^{\circ}\text{C}$  при швидкості східного вітру 7 м/с, якщо температура зменшується з заходу на схід на  $4^{\circ}\text{C}/100\text{ км}$ , а рух повітряної маси відбувається ізотермічно?
6. На якій відстані відстоять одна від одної ізотерми, що проходять через  $5^{\circ}\text{C}$  на карті масштабу 1:15 000 000, якщо адвективне вихолодження дорівнює  $1^{\circ}\text{C}$  за 1 год., а напрямок вітру складає кут  $45^{\circ}$  з напрямком градієнту температури, а швидкість вітру дорівнює 10 м/с.



7. Повітряна маса зміщується в горизонтальній площині на північ з швидкістю  $\vec{V}$ . В цьому ж районі температура в нерухомій точці знижується кожену хвилину на 0,006 К. Горизонтальний градієнт температури  $\nabla T$  направлений на схід. На скільки зміниться температура в частинці, що зміщується, за 3 години?
8. Повітряна маса натікає на узгір'я, що має нахил  $1^\circ$  до горизонту, зі швидкістю 8 м/с. Як зміниться температура у фіксованій точці за 3 год., якщо рух відбувається адіабатично, а зменшення температури з висотою складає  $0.5^\circ\text{C}/100\text{ м}$ .
9. Повітряна маса натікає на узгір'я, що має нахил  $1^\circ$  до горизонту, зі швидкістю 8 м/с. Як зміниться температура у фіксованій точці за 3 год., якщо рух відбувається адіабатично, а вертикальний та горизонтальний градієнти температури складають мінус  $0.5^\circ\text{C}/100\text{ м}$  та  $2^\circ\text{C}/100\text{ км}$  відповідно, та кут між напрямком руху повітряної маси та горизонтальним градієнтом температури дорівнює  $60^\circ$ .
10. Повітряна маса зміщується в горизонтальній площині на південь і зміна її температури за годину на  $1,5^\circ\text{C}$  перевищує відповідну зміну температури за годину в нерухомій точці. Горизонтальний градієнт температури спрямований на південь і його модуль рівний  $0,5\text{ К}/10\text{ км}$ . Обчислити швидкість руху повітряної маси.

## 2.3 Повчання по вивченню другої теми „Динаміка вільної атмосфери”

### 2.3.1 Рекомендації по вивченню теми

Друга тема (стор. 195–209 Підручника [1]) знайомить студента з типами рухів повітря у вільній атмосфері. Ці повітряні течії формують трансграничний перенос забруднюючих речовин в атмосфері й тому, знання їх зв'язків з формами баричних утворень, горизонтальними градієнтами тиску та температури є важливою складовою базових знань фахівця-еколога у галузі метеорології. Тому, при вивченні цієї теми потрібно звернути увагу та такі базові знання та вміння:

1. визначення „вільної атмосфери” та її головні особливості [1, § 7.2.1, стор. 195–197];
2. визначення геострофічного вітру та його властивості [1, стор. 201-202].

*Зверніть увагу на визначення напрямку руху в залежності від напрямку горизонтального градієнту руху (див. рис.7.1 – стор. 202)!*

3. визначення термічного вітру та його зв'язок з горизонтальним градієнтом температури [1, стор. 203–205].

*При цьому необхідно звернути увагу на те, що термічний вітер – це вектор зміни геострофічного вітру з висотою!*

4. визначення градієнтного вітру та його властивості.

*Зверніть увагу на визначення напрямку руху в циклонах та антициклонах (див. рис. 7.3 – стор. 206)!*

5. студент повинен вільно визначати напрям руху повітря у вільній атмосфері при заданому баричному полі.

При вивченні другої теми рекомендуємо також звернути увагу на визначення балансу сил, що діють в горизонтальній площині, при різних типах рухів у вільній атмосфері.

### 2.3.2 Приклади розв'язання типових задач

#### Задача № 1.

Умова. Вивести робочу формулу для визначення швидкості геострофічного вітру (в м/с) на деякій широті, якщо відомий горизонтальний градієнт тиску в гПа на 100 км. Прийняти густину повітря

$$\rho = 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

#### Розв'язання задачі.

Робочі формули отримують для полегшення розрахунків, найчастіше їх отримують для формул, в яких розмірності вхідних та вихідних величин представлено в різних системах одиниць вимірювання. Наприклад, градієнт тиску зазвичай ми отримуємо в гПа на 100, 150 або 200 км (загальноживані масштаби синоптичних карт), а швидкість геострофічного вітру мусимо одержати в м/с. Тому має сенс мати формули, в які можна підставити градієнт тиску, наприклад, в гПа/100 км, і не переводячи в систему SI, отримати швидкість в м/с, яку і називають робочою формулою для геострофічного вітру. Окрім того, будь-яка формула включає незмінні величини, які зручно звести до постійного коефіцієнту.

Модуль швидкості геострофічного вітру визначається формулою 7.71 [1, стор. 201].

Враховавши, що

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial n} \right] = \frac{\text{гПа}}{100\text{км}} = \frac{100\text{Па}}{10^5\text{м}},$$

отримаємо:

$$V_g = \frac{1}{2\rho\omega \sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}} \sin(\varphi)} \frac{\partial p \cdot 100 \text{Па}}{\partial n \cdot 10^5 \text{м}} \approx \frac{5.3}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n}$$

Тобто робоча формула має вигляд  $V_g = \frac{5.3}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n}$ , в яку підставляємо зміну тиску на 100 км та широту місця.

Відповідь до задачі № 1:  $V_g = \frac{5.3}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n}$

Задача № 2.

Умова. Обчислити відстань між ізобарами на карті масштабу  $1:1.5 \cdot 10^7$ , якщо швидкість геострофічного вітру дорівнює 17 м/с, температура повітря  $20^\circ\text{C}$ , тиск 995 гПа, широта  $50^\circ$ .

Дано:

$$V_g = 17 \text{ м/с}$$

$$T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ К}$$

$$p = 995 \text{ гПа} = 995 \cdot 10^2 \text{ Па}$$

$$\varphi = 50^\circ$$

$$M: 1:1.5 \cdot 10^7$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = ?$$

Розв'язання задачі.

Перш ніж обчислити відстань між ізобарами, необхідно розрахувати горизонтальний градієнт тиску  $\frac{\partial p}{\partial n}$ :

$$V_g = \frac{1}{2\rho\omega\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = 2\rho\omega\sin(\varphi)V_g$$

Замінімо густину,  $\rho$ , з рівняння стану  $p = \rho RT \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$ .

$$\text{Тоді } \frac{\partial p}{\partial n} = 2\omega\sin(\varphi) \frac{V_g p}{RT}$$

Знайдемо розмірність градієнту тиску:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial n} \right] = \frac{\frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot \text{Па}}{\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}} \cdot \frac{1}{\text{с}} = \frac{\text{Па}}{\text{м}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{17 \frac{\text{М}}{\text{с}} 995 \cdot 10^2 \text{Па}}{287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} 293 \text{К}} \cdot 2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{с}} \sin(\varphi) \approx$$

$$\approx 224.6 \frac{\text{Па}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{гПа}}{10^2 \text{Па}} \frac{1.5 \cdot 10^5 \text{м}}{150 \text{км}} \approx 3.3 \frac{\text{гПа}}{150 \text{км}}.$$

Масштаб карти  $1:1.5 \cdot 10^7$  означає, що в 1 см карти міститься  $1.5 \cdot 10^7$  см, або 150 км.

Ми отримали, що тиск змінюється на 3.3 гПа на 150 км, нам потрібно визначити на яку відстань ( $\Delta n$ ) тиск змінюється на 5 гПа, оскільки саме через 5 гПа проводять ізобари. Тоді

$$\Delta n = \frac{150 \text{км} \cdot 5 \text{гПа}}{3.3 \text{гПа}} \approx 227 \text{км}.$$

Відстань між ізобарами 227 км, або  $\frac{227 \text{км} \cdot 1 \text{см}}{150 \text{км}} \approx 1.5 \text{см}$ .

Відповідь до задачі № 2: відстань між ізобарами на карті складає 1.5 см.

### Задача № 3.

Умова. Обчислити швидкість геострофічного вітру на рівні моря, якщо відстань між ізобарами на карті масштабу  $1:10^7$  дорівнює 2.5 см. Температура повітря  $10^0 \text{C}$ , тиск в точці 1025 гПа, широта  $45^0$ .

Дано:

$$V_g = 17 \text{м/с}$$

$$T = 10^0 \text{C} = 283 \text{К}$$

$$p = 1025 \text{гПа} = 1025 \cdot 10^2 \text{Па}$$

$$\varphi = 45^0$$

$$\text{М: } 1:10^7$$

$$V_g - ?$$

Розв'язання задачі.

Масштаб карти  $1:10^7$  означає, що в 1 см карти міститься  $10^7$  см, або 100 км. Оскільки відстань між ізобарами (вважається, що їх проведено через 5 гПа) дорівнює 2.5 см, то

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{5 \text{гПа}}{150 \text{км}}.$$

Запишемо формулу для геострофічного вітру:  $V_g = \frac{1}{\ell \rho} \frac{\partial p}{\partial n}$ , замінимо

густину,  $\rho$ , з рівняння стану  $p = \rho RT \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$ , тобто  $V_g = \frac{RT}{\ell p} \frac{\partial p}{\partial n}$ ,

причому, використовуючи цю формулу можна не переводити  $p$  з гПа в Па, оскільки вони скорочуються.

$$V_g = \frac{287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 283 \text{ К}}{1025 \text{ гПа} \cdot 2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}} \sin 45^\circ} \frac{2.5 \text{ гПа}}{1.5 \cdot 10^5 \text{ м}} \approx 12.8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь до задачі № 3: швидкість геострофічного вітру дорівнює 12.8 м/с.

#### Задача № 4.

Умова. Побудувати градієнтну лінійку для визначення швидкості геострофічного вітру по відстані між ізобарами на карті масштабу 1:10 000 000 для широт  $40^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ . Для цього нанести ізолінії швидкості вітру в системі координат  $(\Delta n, \varphi)$ , де  $\Delta n$  відкладати в масштабі карти.

#### Розв'язання задачі.

Градієнтні лінійки необхідні для визначення швидкості геострофічного вітру по відомій відстані між ізобарами на карті.

В кожному окремому випадку швидкість геострофічного вітру можна обчислити за формулою, проте на практиці, якщо визначати швидкість геострофічного вітру доводиться досить часто, то має сенс цей процес спростити. Таким спрощенням і є градієнтні лінійки. За допомогою градієнтної лінійки можна визначити швидкість геострофічного вітру безпосередньо по карті навіть не розраховуючи баричний градієнт.

Будується градієнтна лінійка для певних обраних швидкостей вітру, зазвичай заданих в км/год, для певних широт та певного масштабу карти в системі координат  $(\Delta n, \varphi)$ , де  $\varphi$ , широта, відкладається уздовж вісі  $y$ , а  $\Delta n$ , відстань між ізобарами у сантиметрах, – уздовж вісі  $x$ .

Масштаб карти є заданим – 1:10 000 000, який означає, що в одному сантиметрі карти міститься 100 км.

Будуватимемо градієнтну лінійку для таких значень швидкості вітру 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 та 50 км/год. Для того, щоб зручніше було виконувати розрахунки має сенс отримати робочу формулу. Скористаємось робочою формулою, отриманою в задачі № 1

$$V_g = \frac{5.3}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

Проте у робочій формулі швидкість вітру виражено у м/с, а необхідно, тому ми повинні перейти від м/с до км/год. Тоді

$$V_g = \frac{5.3}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n} = \left[ \frac{5.3}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n} \right] \frac{\text{м} \cdot 3600\text{с}}{\text{с} \cdot 1 \text{ год}} \frac{1\text{км}}{1000\text{м}} = \frac{19.08}{\sin(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial n}. \quad (2.1)$$

За допомогою цієї формули швидкість геострофічного вітру можна отримати одразу в км/год.

Для того, щоб визначати швидкість геострофічного за відстанню між ізобарами, необхідно з формули виразити  $\Delta n$ , що буде означати відстань між ізобарами у см для певної швидкості вітру. Перепишемо формулу (2.1)

у такому вигляді  $V_g = \frac{19.08}{\sin(\varphi)} \frac{\Delta p}{\Delta n}$ , де  $\Delta p = 5$  гПа, оскільки зазвичай ізобари

проводять через 5 гПа.

Отже

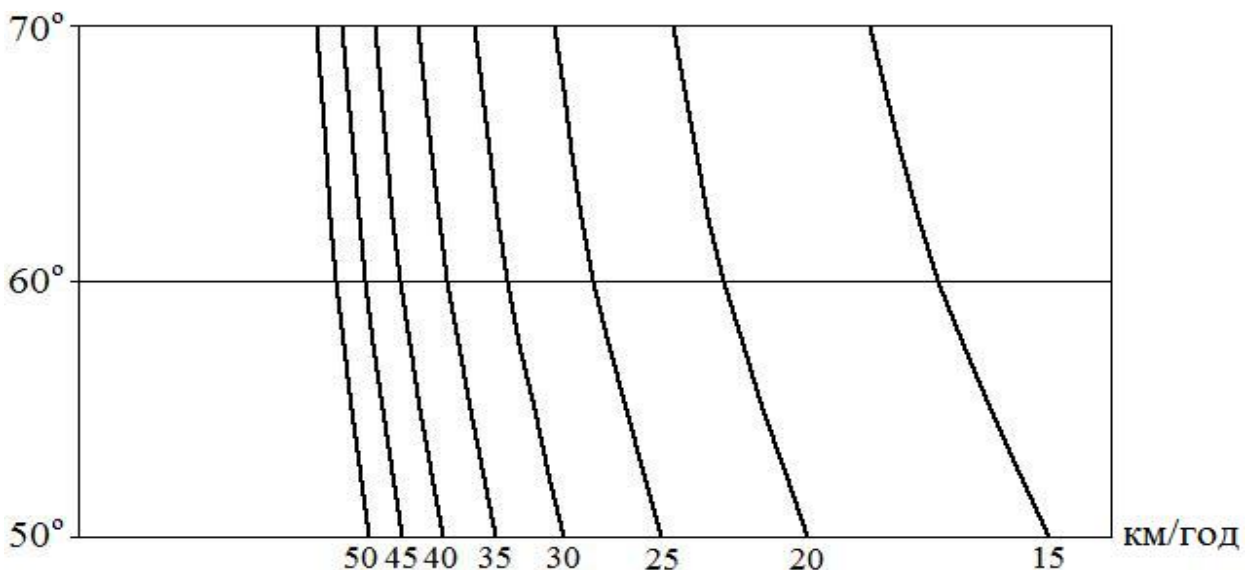
$$\Delta n = \frac{5.3 \Delta p}{V_g \sin(\varphi)} = \frac{19.08 \cdot 5}{V_g \sin(\varphi)} = \frac{95.4}{V_g \sin(\varphi)}, \quad (2.2)$$

тобто, підставивши у вираз (2.2) швидкість геострофічного вітру у км/год та широту місця, отримаємо відстань у см або у сотнях км.

Результати розрахунків представимо в таблиці:

$V_g$	15	20	25	30	35	40	45	50
$\varphi$								
50	8.3	6.2	5.0	4.2	3.6	3.1	2.8	2.5
60	7.3	5.5	4.4	3.7	3.1	2.8	2.4	2.2
70	6.8	5.1	4.1	3.4	2.9	2.5	2.3	2.0

За отриманими розрахунками побудуємо градієнтну лінійку (відстань  $\Delta n$  відкладаємо в см від лівого краю лінійки):

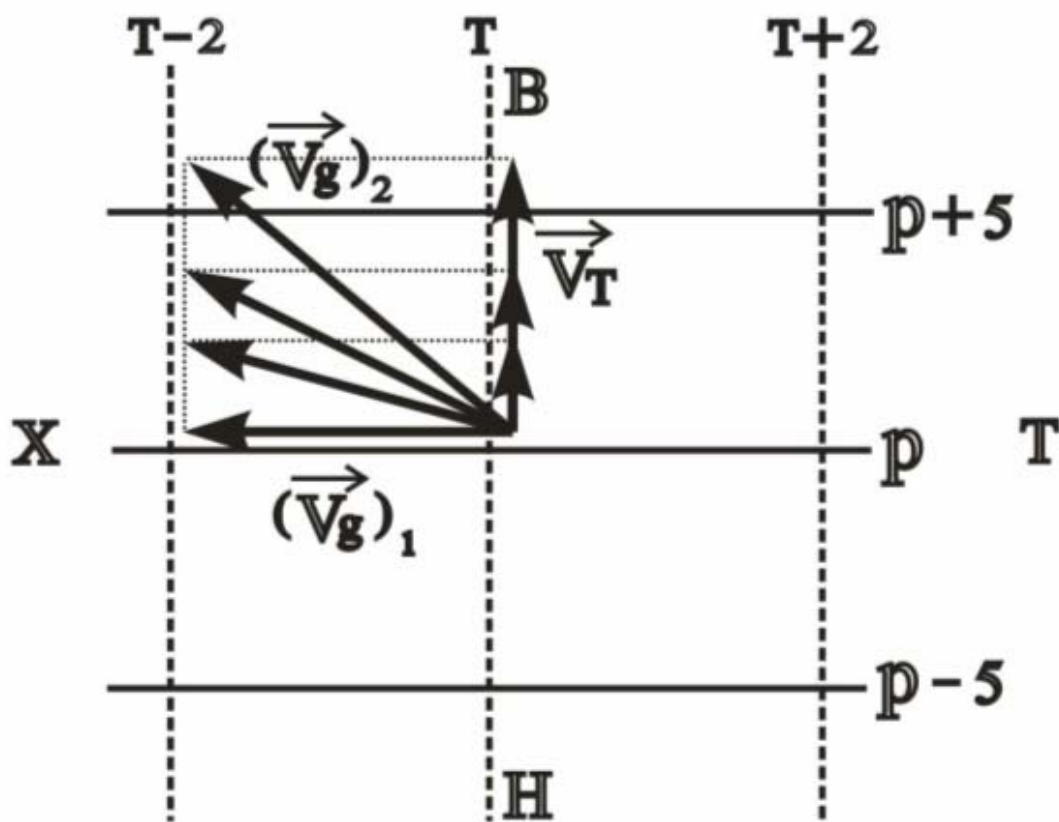


Задача № 5.

Умова. Схематично показати як змінюватиметься з висотою вектор швидкості геострофічного вітру при адвекції тепла.

Розв'язання задачі.

Адвекція тепла має місце при термобаричній ситуації, при якій спостерігається заміщення холодного повітря теплим. Найбільш різко вираженою адвекція тепла є у випадках, якщо ізотерми та ізобари є взаємно перпендикулярними. Таку саме термобаричну ситуацію і представлено на рисунку.



Термічним вітром в деякому шарі називають векторну різницю геострофічного вітру на верхній та нижній границях цього шару [1, стор. 205], тобто

$$\vec{V}_T = (\vec{V}_g)_2 - (\vec{V}_g)_1.$$

Отже, для того, щоб визначити як поводитиметься геострофічний вітер з висотою, необхідно знайти геострофічний вітер на верхньому рівні, який буде являти собою векторну суму геострофічного вітру на нижньому рівні та термічного вітру, тобто

$$(\vec{V}_g)_2 = (\vec{V}_g)_1 + \vec{V}_T.$$

З рисунку видно, що геострофічний вітер на верхній границі шару відхилився від початкового вектора геострофічного вітру праворуч (або в бік високого тиску) та збільшився за модулем.

Проте геострофічний вітер не одразу набув того числового значення та напрямку, що вказані на рисунку, а поступово: із зростанням товщини шару поступово змінювався і геострофічний вітер (це ілюструють проміжні вектори геострофічного вітру).

Тому остаточно можна зробити такий висновок, що при адвекції тепла з висотою геострофічний вітер відхилитиметься праворуч (у бік високого тиску) та збільшуватиметься за модулем.

### Задача № 6.

Умова. Отримати робочу формулу для визначення термічного вітру в м/с на деякій широті, якщо відомі градієнт температури в К/200 км і товщина шару в км. Прийняти середню температуру  $\bar{T} = 273\text{ К}$ .

Дано:

$$\bar{T} = 273\text{ К}$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial n} \right] = \frac{\text{К}}{200\text{ км}} = \frac{\text{К}}{2 \cdot 10^5\text{ м}}$$

$$\Delta z = \text{км} = 10^3\text{ м}$$

$$g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Розв'язання задачі.

Формула для термічного вітру:

$$V_T = \frac{g}{\bar{T} 2\omega \sin(\varphi)} \frac{\partial T}{\partial n} \Delta z.$$

$$V_T = \frac{9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2 \cdot 273\text{ К} \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}} \sin(\varphi)} \frac{\partial T}{\partial n} \frac{\text{К}}{2 \cdot 10^5\text{ м}} \Delta z \cdot 10^3\text{ м}$$

$$V_T \approx \frac{1.23}{\sin(\varphi)} \frac{\partial T}{\partial n} \Delta z.$$

Отримуємо робочу формулу для термічного вітру  $V_T = \frac{1.23}{\sin(\varphi)} \frac{\partial T}{\partial n} \Delta z$ , в

яку підставляємо замість градієнту температури різницю температур на 200 км, товщину шару в км та широту.

Відповідь до задачі № 6:

$$V_T = \frac{1.23}{\sin(\varphi)} \frac{\partial T}{\partial n} \Delta z.$$



Задача № 7.

Умова. Знайти висоту обертання геострофічного вітру, якщо на висоті 1 км, горизонтальний градієнт тиску в гПа/м чисельно дорівнює горизонтальному градієнту температури в К/м. Температура повітря  $\bar{T} = 273 \text{ К}$ , тиск  $p_1 = 900 \text{ гПа}$ . Питома газова постійна  $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ .

Умову задачі скорочено можна записати наступним чином:

$\bar{T} = 273 \text{ К}$ $\frac{\partial T}{\partial v} = \psi \frac{\text{К}}{\text{м}}$ $\frac{\partial p}{\partial n} = \psi \frac{\text{гПа}}{\text{м}}$ $p_1 = 900 \text{ гПа}$ $z_1 = 1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $z_{\text{обертання}} - ?$	
---	--

Розв'язання задачі.

Висотою обертання геострофічного вітру називають висоту, на якій геострофічний вітер обертається на нуль, тобто  $\left|(\vec{V}_g)_2\right| = 0$ . З визначення термічного вітру випливає  $\vec{V}_T = -(\vec{V}_g)_1$ , або  $|\vec{V}_T| = |(\vec{V}_g)_1|$  (див. рис. до задачі).

Така ситуація можлива, якщо вектор геострофічного вітру на вихідному рівні  $z_1$  та вектор термічного вітру у шарі спрямовані у протилежні сторони, і при достатній товщині шару та за умови, що горизонтальний градієнт температури залишається незмінним, значення геострофічного вітру, як векторної суми між геострофічним вітром на вихідній висоті та значенням термічного вітру у цьому шарі, поступово зменшується до нуля, а потім значення геострофічного вітру починає збільшуватися, але його напрям змінюється на протилежний.

Для визначення товщини шару, яка необхідна для того, щоб модуль термічного вітру став би рівним модулю геострофічного вітру на вихідному рівні, скористаємося формулами:

$$V_T = \frac{g}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \Delta z_{\text{обертання}}, \quad (\text{див. формулу 7.82 на стор. 205 Підручника})$$

та

$$V_g(z_1) = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial P_1}{\partial n} \quad (\text{див. формулу 7.71 на стор. 201 Підручника}).$$

Прирівнюючи праві частини цих співвідношень (оскільки необхідно, щоб  $V_T = V_g(z_1)$ ), отримуємо

$$\frac{g}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu} \Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}; \rightarrow \Delta z = \frac{\bar{T}}{g\rho} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu}}.$$

$$\text{Звідси } z_{\text{обертання}} = z_1 + \frac{\bar{T}}{g\rho} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu}}.$$

Формулу у такому вигляді можна використовувати для знаходження висоти обертання, якщо є відомими баричний та термічний градієнти, середня температура в шарі та густина повітря, проте в нашому випадку густина є невідомою величиною. Щоб позбутися густини, скористаємось рівнянням стану,  $\rho = \frac{p_1}{R\bar{T}}$ , тоді формула набуває вигляду:

$$z_{\text{обертання}} = z_1 + \frac{(\bar{T})^2 R}{gp_1} \frac{\frac{\partial p}{\partial n}}{\frac{\partial \bar{T}}{\partial \nu}}.$$

Оскільки чисельні значення обох градієнтів співпадають (за умовою задачі), то введемо для їх чисельних значень однакове позначення –  $\psi$ , тоді

$$z_{\text{обертання}} = 1000\text{м} + \frac{(273)^2 \text{К}^2 \cdot 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \psi \frac{10^2 \text{Па}}{\text{м}}}{9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 9 \cdot 10^4 \text{Па}} \frac{\text{м}}{\psi \frac{\text{К}}{\text{м}}} \approx 1000\text{м} + 2425\text{м} = 3425\text{м}.$$

У формулі всі одиниці виражено в системі одиниць SI, тому, оскільки гПа не є системною одиницею, то  $p_1 = 900 \text{ гПа} = 9 \cdot 10^4 \text{ Па}$ , а

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \psi \frac{\text{гПа}}{\text{м}} = \psi \cdot 10^2 \frac{\text{гПа}}{\text{м}}.$$

Відповідь до задачі № 7: висота обертання геострофічного вітру рівна 3425 м.

### Задача № 8.

Умова. Визначити швидкість та напрямок геострофічного вітру на висоті 3 км, якщо на приземній синоптичній карті ізобари проходять паралельно широтному колу на відстані 2 см одна від одної, а ізотерми відхиляються на  $30^\circ$  вліво від ізобар. Тиск зростає з півночі на південь. Відстань між одиничними ізотермами дорівнює 1 см. Температура зменшується з південного–південного сходу на північний–північний захід. Горизонтальний градієнт температури не змінюється з висотою. Широта місця  $50^\circ$ . Масштаб карти  $1:1.5 \cdot 10^7$ . Прийняти  $\bar{T} = 273 \text{ К}$ ,  $\rho = 1.3 \text{ кг/м}^3$ .

Умову задачі скорочено можна записати наступним чином:

Дано:

на 1 см (150 км) зміна температури складає 1 К;  
на 2 см (300 км) зміна тиску складає 5 гПа;

$$z_1 = 0 \text{ м}$$

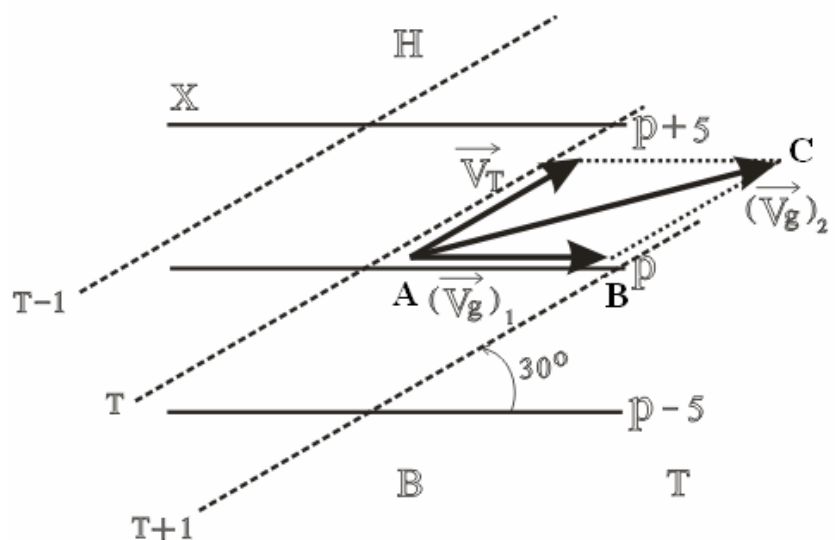
$$\bar{T} = 273 \text{ К}$$

$$\rho = 1.3 \text{ кг/м}^3$$

$$M: 1:1.5 \cdot 10^7$$

$$\varphi = 50^\circ$$

$$\left| (\vec{V}_g)_2 \right| - ?$$



### Розв'язання задачі.

Оскільки є відомими відстані між ізобарами та одиничними ізотермами, можна обчислити градієнти тиску та температури, по яких можна отримати модулі геострофічного та термічного вітрів відповідно:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{5 \text{ гПа}}{300 \text{ км}} = \frac{2.5 \text{ гПа}}{150 \text{ км}}, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1 \text{ К}}{150 \text{ км}}.$$

Всі величини задано для стандартних умов ( $\bar{T} = 273\text{ К}$ ,  $\rho = 1.29\text{ кг/м}^3$ ), тому можна скористатись робочими формулами:

для  $\frac{\partial p}{\partial n}$ , заданого на 150 км, вона матиме вигляд:

$$V_g = \frac{3.6}{\sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad V_g = \frac{3.6}{\sin 50^\circ} 2.5 \approx 11.8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

для  $\frac{\partial T}{\partial \nu}$ , заданого на 150 км, вона матиме вигляд:

$$V_T = \frac{1.64}{\sin \varphi} \frac{\partial T}{\partial \nu} \Delta z, \quad V_T = \frac{1.64}{\sin 50^\circ} \cdot 3 \approx 6.4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Геострофічний вітер на рівні 3 км,  $(\vec{V}_g)_2$ , представляє собою (за визначенням термічного вітру) векторну суму геострофічного вітру біля поверхні землі  $(\vec{V}_g)_1$  та термічного вітру  $\vec{V}_T$  у трикілометровому шарі. На рисунку показано напрямки термічного вітру та геострофічного вітрів біля поверхні землі та на трикілометровому рівні. Геострофічний вітер на рівні 3 км можна знайти з трикутника  $ABC$ , який утворено векторами  $\vec{V}_T$ ,  $(\vec{V}_g)_1$  та  $(\vec{V}_g)_2$ , якщо перенести вектор  $\vec{V}_T$  паралельно самому собі, сполучивши його початок з кінцем вектору  $(\vec{V}_g)_1$ , а його кінець – з кінцем вектору  $(\vec{V}_g)_2$ . У трикутнику  $ABC$  кут  $\hat{B}$  дорівнює  $150^\circ$ , оскільки  $\hat{B} = 180^\circ - 30^\circ$ , де  $30^\circ$  – це кут між ізобарою та ізотермою (за умовою задачі), або між ізобарою та вектором  $\vec{V}_T$ . Таким чином. У трикутника  $ABC$  є відомими дві сторони та кут між ними, що дозволяє скористатись теоремою косинусів, щоб знайти сторону  $AC$ , або вектор  $(\vec{V}_g)_2$ :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \hat{B}} = \\ &= \sqrt{(11.8)^2 + (6.4)^2 - 2 \cdot (11.8) \cdot (6.4) \cdot \cos 150^\circ} \approx 17.6 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{aligned}$$

Спрямований вектор  $(\vec{V}_g)_2$  приблизно на схід–північний–схід за побудовою, тобто геострофічний вітер захід–південно–західний. Отримати більш точне значення напрямку можна за допомогою теореми синусів:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} \cdot BC;$$

$$\hat{A} = \arcsin\left(\frac{\sin \hat{B}}{AC} \cdot BC\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 150^\circ}{17.6} \cdot 6.4\right) \approx 10.5^\circ.$$

Тобто вектор геострофічного вітру відхиляється від західного напрямку лише на  $10^\circ$  вліво.

Відповідь до задачі № 8: *напрямок вектора геострофічного вітру на рівні 3 км становитиме  $260^\circ$ , а модуль – 17.6 м/с.*

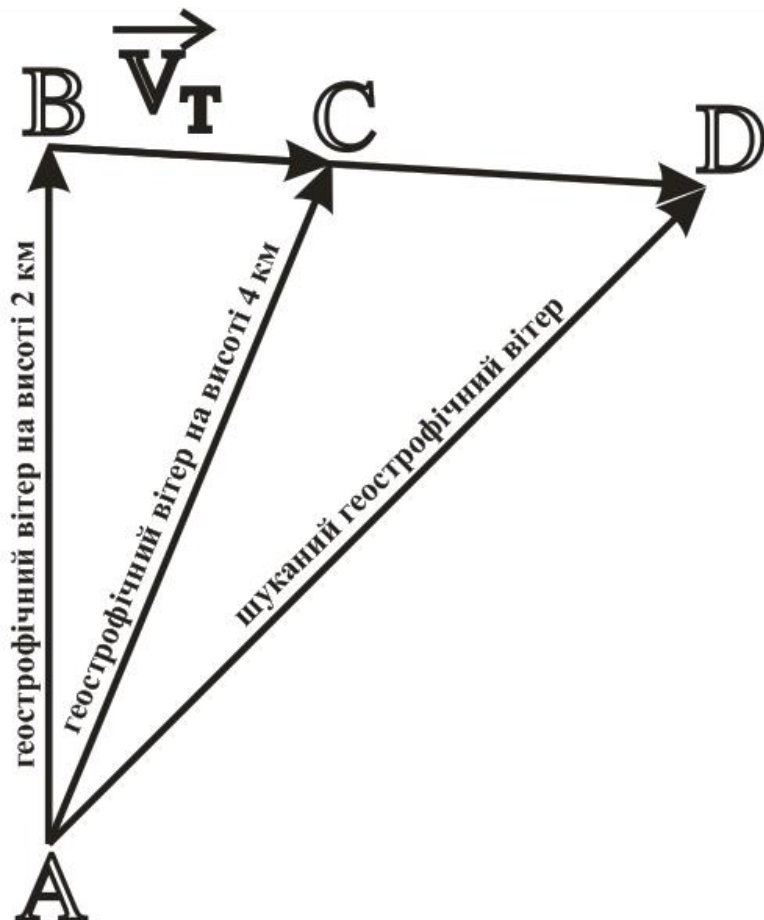
#### Задача 9.

Умова задачі. Геострофічний вітер на висоті 2 км південний 8.3 м/с; на висоті 4 км він південно-південно-західний 9 м/с. На якому рівні спостерігатиметься південно-західний вітер та яка його швидкість, якщо горизонтальний градієнт температури з висотою є незмінним?

$$(V_g)_{2\text{км}} = 8.3 \text{ м/с}$$

$$(V_g)_{4\text{км}} = 9.0 \text{ м/с}$$

На якій висоті спостерігатиметься південно-західний вітер та чому дорівнюватиме його швидкість?



### Розв'язання задачі.

Відомо, що зміна геострофічного вітру з висотою, а, отже, і термічний вітер, визначається горизонтальним градієнтом середньої температури шару та товщиною шару, тобто, якщо горизонтальний градієнт середньої температури залишається з висотою незмінним, то на термічний вітер за інших рівних умов впливатиме тільки товщина шару, що означає, що термічний вітер змінюватиметься тільки за модулем, а напрямок його залишатиметься один й той самий. Тому вектор  $\overline{BD}$ , що являє собою вектор термічного вітру у шарі, на нижній границі якого геострофічний вітер був південний 8.3 м/с, а на верхній – південно-західний, є продовженням вектора  $\overline{BC}$ , що є вектором термічного вітру у шарі від 2-х до 4-ьох км.

Таким чином, в задачі вектори термічного та геострофічного вітру утворюватимуть трикутник  $ABD$ , а геострофічний вітер на висоті 4 км являтиме собою бісектрису  $AC$  у цьому трикутнику при  $\hat{A}$  (за умовою задачі). У свою чергу бісектриса  $AC$  поділяє трикутник  $ABD$  на два трикутники  $ABC$  та  $ACD$ .

Отже знайдемо термічний вітер у шарі від 2-х до 4-ьох км з трикутника  $ABC$ , як сторону  $BC$ , користуючись формулою косинусів, оскільки у цьому трикутнику є відомими дві сторони:  $AB = (V_g)_{2\text{км}} = 8.3 \text{ м/с}$ ,  $AC = (V_g)_{4\text{км}} = 9.0 \text{ м/с}$  та кут між ними  $22.5^\circ$ .

$$\begin{aligned} |\vec{V}_T| = BC &= \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}} = \\ &= \sqrt{(8.3)^2 + (9.0)^2 - 2 \cdot 8.3 \cdot 9.0 \cdot \cos 22.5} \approx 3.4 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Знайдемо кут  $B$  у трикутнику  $ABC$ , скориставшись теоремою синусів (відношення сторони до синуса протилежного до неї кута є величина стала):

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \sin \hat{A},$$

тоді

$$\sin \hat{C} = \frac{8.3}{3.4} \sin 22.5^\circ \approx 0.9342 \Rightarrow \hat{C} \approx 69.1^\circ.$$

Скористувавшись властивістю трикутника, що сума кутів у трикутнику завжди дорівнює  $180^0$ , знайдемо третій кут у трикутнику  $ABC - \hat{B}$ , і  $\hat{D}$  у трикутнику  $ABD$ :

$$\hat{B} = 180^0 - 22.5^0 - 69.1^0 = 88.4^0,$$

$$\hat{D} = 180^0 - 45^0 - 88.4^0 = 46.6^0.$$

А отже, тепер застосувавши теорему синусів до трикутника  $ABD$ , можемо знайти термічний вітер у шарі від 2-х до рівня, на якому спостерігатиметься південно-західний геострофічний вітер:

$$BD = \frac{AB}{\sin \hat{D}} \sin \hat{A} = \frac{8.3}{\sin 46.6^0} \sin 45^0 \Rightarrow BD \approx 8.1 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Модуль геострофічного вітру, коли він набуває південно-західного напрямку, тобто сторону  $AD$ , можна знайти виходячи з властивості бісектриси (бісектриса поділяє протилежну сторону на частини, що є пропорційними прилеглим сторонам):

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AD = \frac{AB}{BC} \cdot CD \Rightarrow AD = \frac{8.3}{3.4} \cdot (8.1 - 3.4) \approx 11.5 \frac{\text{М}}{\text{с}},$$

А висоту, на якій спостерігатиметься південно-західний геострофічний вітер, знайдемо виходячи з того, що за інших рівних умов, модуль швидкості термічного вітру повинен бути пропорційним товщині шару, в якому цей має місце, тобто термічний вітер, величина якого складала 3.4 м/с, у шарі від 2-х до 4-ьох км, є пропорційним величині 2 км, а термічний вітер, велична якого складала 8.1 м/с у шарі від 2-х до рівня, на якому спостерігатиметься південно-західний геострофічний вітер, є пропорційним невідомій величині  $\Delta z$ :

$$\Delta z = \frac{8.1 \cdot 2}{3.4} \approx 4.8 \text{ км}, \text{ тобто } z = 6.8 \text{ км}.$$

Відповідь до задачі № 9: *геострофічний вітер набуде південно-західного напрямку на висоті 6.8 км, а за модулем становитиме 11.5 м/с.*

#### Задача № 10.

Умова. Визначити градієнтний вітер в точці, що знаходиться на відстані 800 км від центру антициклону та розташована на широті  $55^0$ , якщо відстань між сусідніми ізобарами на приземній карті дорівнює 2 см.

Масштаб карти  $1:1.5 \cdot 10^7$ . Прийняти, що густина повітря дорівнює  $1.3 \text{ кг/м}^3$ .

### Розв'язання задачі.

Для знаходження швидкості градієнтного вітру в антициклоні (Az)  $V_{Az}$  скористаємося формулою 2.32 (стор. 34 Конспекту):

$$V_{Az} = -\omega_z r + \sqrt{\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}};$$

Оскільки  $\omega_z = \omega \cdot \sin(\varphi)$ , де  $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  – кутова швидкість обертання Землі, маємо розрахункову формулу

$$V_{Az} = -\omega r \sin \varphi + \sqrt{\omega^2 r^2 \sin^2 \varphi + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}.$$

Знайдемо баричний градієнт. З умови задачі видно, що зміна тиску на 5 гПа відбувається на 2.5 см карти (оскільки ізобари на карті проводяться через 5 гПа). Масштаб карти  $1:1.5 \cdot 10^7$  означає, що в 1 см карти міститься  $1.5 \cdot 10^7 \text{ см}$ , або 150 км, тобто в 2 см карти міститься 300 км, звідси випливає, що модуль баричного градієнта

$$\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \approx \frac{5 \text{ гПа}}{300 \text{ км}} = \frac{2.5 \text{ гПа}}{150 \text{ км}}.$$

Для антициклону градієнт тиску  $\frac{\partial p}{\partial r} \leq 0$ , тоді маємо  $\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2.5 \text{ гПа}}{150 \text{ км}}$ .

Радіус–вектор точки, або радіус кривизни ізобар в системі SI становить  $r = 800 \text{ км} = 8 \cdot 10^5 \text{ м}$ .

Підставивши чисельні значення в формулу швидкості в антициклоні, отримаємо

$$\begin{aligned} V_{Az} &= -7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ м} \cdot \sin 55^\circ + \\ &+ \sqrt{\left(7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ м} \cdot \sin 55^\circ\right)^2 - \frac{8 \cdot 10^5 \text{ м}}{1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \frac{250 \text{ Па}}{1.5 \cdot 10^5 \text{ м}}} \approx \\ &\approx -47.8 + \sqrt{2282.2 - 1025.6} \approx -12.4 \text{ м/с}. \end{aligned}$$



Знак „-“ вказує, що в антициклоні рух відбувається по дотичній до ізобари за годинниковою стрілкою таким чином, щоб низький тиск залишається ліворуч.

Відповідь до задачі № 10: швидкість градієнтного вітру в антициклоні становить 11 м/с.

Задача № 11.

Умова. Схематично зобразити змінювання швидкості градієнтного вітру з висотою в циклоні у північній півкулі. Вважати, що середня температура повітря в деякому шарі зменшується з півночі на південь. Надати пояснення до рисунка.

Розв'язання задачі.

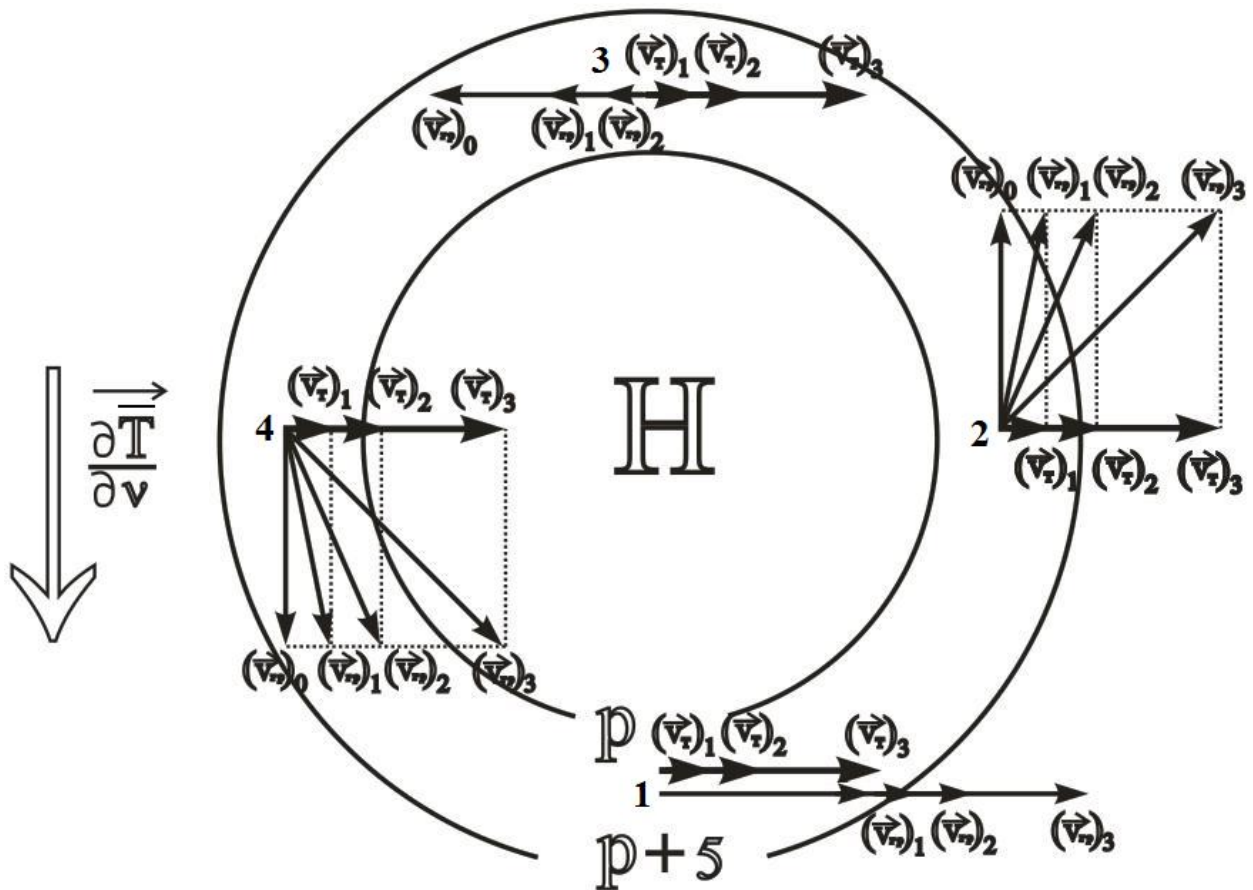


Рисунок 2.5. – Зміна вітру з висотою в циклоні. Вважають, що на рисунку північ знаходиться нагорі, південь – унизу, захід – ліворуч, а схід – праворуч.

Якщо розглядати зміну градієнтного вітру з висотою під впливом термічної горизонтальної неоднорідності, то тут ситуація не має такої

однозначності, як у випадку прямолінійних ізобар, оскільки градієнт температури вважається сталим, а баричний градієнт постійно змінює свій напрямок.

Тому має сенс розглядати кожну точку (або частину) баричного утворення окремо. Розглянемо зміну градієнтного вітру з висотою у чотирьох точках, що позначені на рисунку.

1. В цьому випадку обидва градієнти паралельні. Вектори геострофічного  $(\vec{V}_g)_1$  та термічного  $\vec{V}_T(z)$  вітру спрямовані в один бік, а, отже, на рівнях, що розташовані вище початкового, геострофічний вітер являє собою алгебраїчну суму  $(\vec{V}_g)_1$  та  $\vec{V}_T(z)$ . Він збільшується за модулем та залишається постійним за напрямком. З рисунку видно, що така ситуація реалізуватиметься в теплому секторі циклону, що зміщується з заходу на схід, в якому температура зменшується з півдня на північ.

2. Градієнти є перпендикулярними, причому градієнт температури спрямований на південь, а градієнт тиску – на захід. В цьому випадку вектор геострофічного вітру на рівні  $z > z_0$  являє собою діагональ паралелограму, що побудований на векторах  $(\vec{V}_g)_1$  та  $\vec{V}_T(z)$ . З рисунка видно, що з висотою геострофічний вітер збільшуватиметься за модулем та повертатиме праворуч (у бік високого тиску). Кут між векторами  $\vec{V}_T(z)$  та  $\vec{V}_g(z)$  (а, отже, і кут між ізобарою та ізотермою) з висотою зменшуватиметься, наближаючись до нуля. В циклоні така ситуація може мати місце у передній частині циклону.

3. Градієнт тиску на нижньому рівні та градієнт температури є паралельними, проте спрямовані у протилежні боки. В цьому випадку геострофічний вітер на початковому рівні та термічний вітер спрямовані у протилежні боки та їх векторна сума дорівнює алгебраїчній сумі їх модулів, тобто геострофічний вітер зменшується за величиною, не змінюючи свого напрямку доти, доки модуль термічного вітру не дорівнюватиме модулю вітру на початковому рівні. На рівні, де термічний вітер дорівнює за величиною вихідному значенню геострофічного вітру, швидкість геострофічного вітру дорівнює нулю. Цей рівень отримав назву рівня обернення. Вище цього рівня вітер змінює напрямок на протилежний, а його швидкість починає зростати. Очевидно, що висота рівня обернення  $z_{\text{обернення}}$  залежить від величини модулів градієнтів тиску та температури та має місце тільки у випадку, коли градієнти тиску та температури спрямовані у протилежні боки.

У природі така ситуація може спостерігатись у північній частині циклону (див. рисунок), за умови, що він зміщується з заходу на схід, і температура в ньому зменшується з півдня на північ.

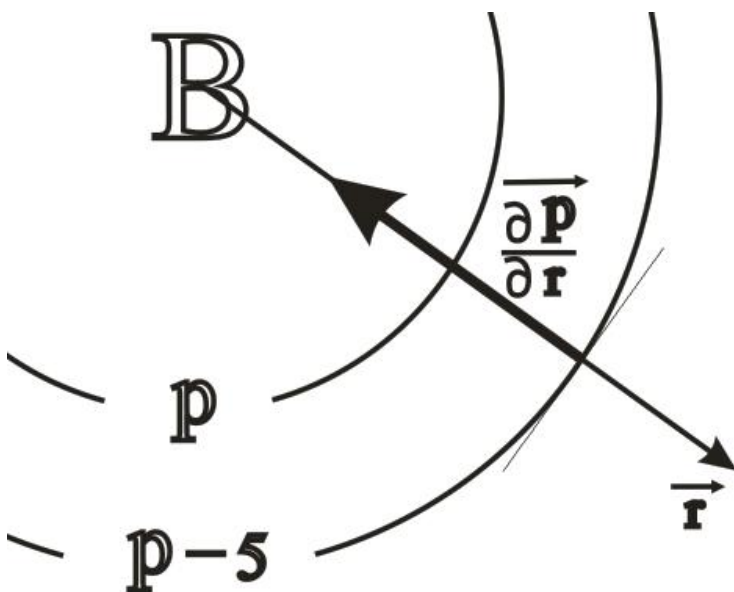
4. Ситуація є аналогічною до ситуації у передній частині циклону. Градієнти також є перпендикулярними, проте градієнт температури спрямований на південь, а градієнт тиску – на схід. В цьому випадку з висотою геострофічний вітер також збільшуватиметься за модулем та повертатиме ліворуч, тобто у бік низького тиску. Така зміна геострофічного вітру зазвичай спостерігається у тилівій частині циклону.

Намагання градієнтного вітру з висотою наблизитись до термічного спостерігається за будь-яких співвідношень між термічним та баричним градієнтами. Якщо кут між градієнтами є тупим, то градієнтний вітер спочатку зменшується за величиною до того рівня, на якому він стає перпендикулярним термічному вітру, а потім вже збільшується.

### Задача № 12.

Умова. Отримати формулу для оцінки максимально можливої швидкості градієнтного вітру та мінімально можливої відстані між ізобарами в антициклоні.

### Розв'язання задачі.



З формули для градієнтного вітру (Конспект, стор. 34)

$$V_{Az} = -\omega_z r + \sqrt{\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}$$

можна бачити, що градієнт тиску в антициклоні не може перевищувати певного критичного значення. Оскільки в антициклоні баричний градієнт та радіус-вектор мають взаємно протилежні напрямки (див.

рисунок), то проекція баричного градієнта на радіус-вектор є від'ємною і якщо  $\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > \omega_z^2 r \rho$ , підкореневий вираз  $\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$  стає від'ємним, а швидкість градієнтного вітру уявним числом.

---

Зауваження. У підкореневий вираз чисельне значення баричного градієнта підставляють з урахуванням знака.

---

Отже, при антициклонічному полі модуль баричного градієнта не має перевищувати значення  $\omega_z^2 r \rho$ , тобто максимальне значення, якого може сягати модуль баричного градієнта в антициклоні, становить  $\omega_z^2 r \rho$ .

---

Зауваження. В циклонічному полі такого обмеження не існує. Тому зазвичай в циклонах спостерігаються більші значення градієнтів тиску, а отже, і швидкостей вітру.

---

Тоді вираз для максимально можливої швидкості вітру в антициклоні можна знайти, підставивши вираз для максимально можливого градієнта, тобто

$$V_{Az} = -\omega_z r + \sqrt{\omega_z^2 r^2 - \frac{r}{\rho} \omega_z^2 r \rho} = -\omega_z r.$$

Зрозуміло, що мінімальна відстань між ізобарами спостерігатиметься при максимальному градієнті тиску, тобто знаходити формулу для оцінки мініально можливої відстані між ізобарами необхідно, виходячи з формули для оцінки максимально можливого градієнта тиску  $\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{\max} = \omega_z^2 r \rho$ . Для цього зручніше представити  $\frac{\partial p}{\partial r}$  у вигляді скінченних різниць, тобто  $\frac{\Delta p}{\Delta r}$ , де  $\Delta p = 5$  гПа (оскільки ізобари проводять саме через 5 гПа), а  $\Delta r$  є відстанню між ізобарами. Тоді

$$\left| \frac{500}{\Delta r} \right|_{\max} = \omega_z^2 r \rho \Rightarrow (\Delta r)_{\min} = \frac{500}{\omega_z^2 r \rho} \text{ (гПа одразу переведено у Па).}$$

Відповідь до задачі № 12: *максимально можлива швидкість та мініально можлива відстань між ізобарами в антициклоні знаходять за формулами  $V_{Az} = -\omega_z r$  та  $(\Delta r)_{\min} = \frac{500}{\omega_z^2 r \rho}$  відповідно.*

### Задача № 13.

Умова. Отримати наближену формулу для обчислення швидкості градієнтного вітру в точках, що є віддаленими від центру баричного утворення на велику відстань.

### Розв'язання задачі.

Для точок, що розташовані на досить великій відстані від центра баричного утворення, формулу для градієнтного вітру (Підручник, стор. 208, рівняння 7.87)

$$V_{ep} = -\omega_z r + \sqrt{\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} \quad (2.3)$$

можна переписати у спрощеному вигляді:

$$V_{ep} = \frac{1}{4\omega_z r} \left( 1 - \frac{1}{2r\rho\omega_z^2} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Підкореневий вираз у формулі (2.3) можна представити у вигляді:

$$\sqrt{\omega_z^2 r^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}} = \omega_z r \left( 1 + \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Вираз, який стоїть у дужках, як відомо з математики, представляє собою біном Ньютона (у загальному вигляді  $(a+b)^n$ ), який розвивається у нескінченний ряд, якщо показник степеня є дробовим або від'ємним числом:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} a^{n-k} b^k + \dots \quad (2.4)$$

Цей ряд збігається, якщо  $a < b$ . Оскільки наближена формула знаходиться для великих  $r$  ( $\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} < 1$ ), то ця умова виконується.

Тоді відповідно до формули (4) маємо:

$$\left( 1 + \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} 1^{\frac{1}{2}-1} \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) 1^{\frac{1}{2}-2} \left( \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 + \dots$$

або

$$\left(1 + \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 + \dots$$

Іншими членами у розвиненні можна знехтувати через їх малість.

Тоді, підставивши отриманий вираз у формулу (2.3), отримаємо:

$$V_{zp} = -\omega_z r + \omega_z r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\rho\omega_z^2 r} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2\right);$$

$$V_{zp} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{8\omega_z^3 r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho\omega_z} \left(1 - \frac{1}{4r\rho\omega_z^2} \frac{\partial p}{\partial r}\right) \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (2.5)$$

Вираз (2.5) дозволяє помітити, що при одному й тому самому значенні градієнта тиску, за інших рівних умов, швидкість градієнтного вітру у циклоні менша, ніж в антициклоні.

Іноді є зручним перейти від спрощеної формули (2.5), що пов'язує швидкість градієнтного вітру з баричним градієнтом, до формули, що пов'язує швидкість градієнтного вітру з швидкістю геострофічного вітру.

Для цього у формулі (2.5) виділимо вираз для геострофічного вітру:

$$V_{zp} = \left(1 - \frac{1}{2r\omega_z} \underbrace{\frac{1}{2\rho\omega_z} \frac{\partial p}{\partial r}}_{V_g}\right) \underbrace{\frac{1}{2\rho\omega_z} \frac{\partial p}{\partial r}}_{V_g} = \left(1 - \frac{1}{2r\omega_z} V_g\right) V_g.$$

Враховуючи, що в антициклоні градієнтний вітер має знак „-“, а в циклоні „+“, то вираз набуває вигляду:

$$|V_{zp}| = \left(1 - \frac{|V_g|}{2r\omega_z}\right) |V_g| \text{ в області циклону,} \quad (2.6)$$

та

$$|V_{zp}| = \left(1 + \frac{|V_g|}{2r\omega_z}\right) |V_g| \text{ в області антициклону.} \quad (2.7)$$

Звідси можна бачити, що вітер під впливом циклонічної кривизни ізобар буде зменшуватись, і під впливом антициклонічної кривизни ізобар – збільшуватись.

Задача № 14.

Умова. Якій радіус кривизни ізобар, якщо вітер швидкістю 10 м/с збільшується під впливом кривизни ізобар на 10%? Широта місця  $55^{\circ}$ .

Розв'язання задачі.

Для цієї задачі необхідно використовувати спрощену формулу для знаходження градієнтного вітру, оскільки вітер під впливом кривизни ізобар збільшується усього на 10%, що свідчить про досить велику кривизну ізобар. Вітер збільшується під впливом кривизни, тому при розв'язанні цієї задачі ми маємо використовувати формулу для антициклону (див. задачу № 13), а саме формулу (2.7) з задачі № 13:

$$|V_{ep}| = \left( 1 + \frac{1}{2r\omega_z} |V_g| \right) |V_g|.$$

Оскільки за умовою задачі  $|V_{ep}| = |V_g| + 0.1|V_g|$ , то вираз можна переписати у вигляді:

$$|V_g| + 0.1|V_g| = \left( 1 + \frac{1}{2r\omega_z} |V_g| \right) |V_g|,$$

або, скоротивши на  $|V_g|$ , отримаємо:

$$1.1 = \left( 1 + \frac{1}{2r\omega_z} |V_g| \right).$$

Виразимо радіус кривизни ізобар:

$$r = \frac{|V_g|}{0.2\omega_z}.$$

Підставимо значення усіх заданих величин в отриманий вираз:

$$r = \frac{10 \text{ м/с}}{0.2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} \sin 55^{\circ}} \approx 8.37 \cdot 10^5 \text{ м} \approx 840 \text{ км}.$$

Відповідь до задачі № 14: радіус кривизни ізобар складає 840 км.

### 2.3.3 Контрольні запитання до теми

1. Дайте визначення геострофічному вітру.
2. При рівновазі яких сил спостерігається геострофічний вітер?
3. Як визначається напрямок геострофічного вітру (термічного вітру)?
4. Дайте визначення термічному вітру.
5. Чи є термічний вітер реальним вітром, що можна безпосередньо спостерігати в атмосфері? Чи можна виміряти термічний вітер?
6. Від чого залежить термічний вітер?
7. Що таке висота обертання геострофічного вітру? За яких умов в атмосфері може реалізуватись така ситуація?
8. Як змінюватиметься з висотою геострофічний вітер при адвекції холоду?
9. Як змінюватиметься з висотою геострофічний вітер при адвекції тепла?
10. Дайте визначення градієнтного вітру.
11. За інших рівних умов де градієнтний вітер буде більшим в антициклоні чи в циклоні?
12. В якому баричному утворенні існують обмеження на величину горизонтального градієнта тиску, а отже і на швидкість геострофічного вітру? Чому?

### 2.3.4 Задачі для самостійного розв'язання

#### Задачі на визначення геострофічного вітру.

1. Отримати робочу формулу для визначення швидкості геострофічного вітру (в м/с) на деякій широті, якщо є відомим горизонтальний градієнт тиску в гПа на 150 км. Прийняти густину повітря  $\rho = 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
2. Визначити швидкість та напрямок геострофічного вітру, якщо широтна та меридіональна складові горизонтального градієнта тиску дорівнюють відповідно 2.3 та 1.2 гПа/100 км. Широта місця  $55^\circ$ . прийняти густину повітря  $\rho = 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .
3. На широті  $40^\circ$  ізобари розташовані у 2 рази рідкіше, ніж на широті  $60^\circ$ . Яке співвідношення швидкостей вітру на цих широтах за інших рівних умов?
4. Обчислити швидкість геострофічного вітру на рівні моря, якщо відстань між сусідніми ізобарами на карті масштаба  $1:10^7$  дорівнює 4,5 см, температура  $10^\circ$ , тиск 1025 гПа, широта місця  $45^\circ$ .



5. Обчислити відстань між ізобарами на карті масштабу  $1:1 \cdot 10^7$ , якщо швидкість геострофічного вітру дорівнює 7 м/с, температура  $20^0$ , тиск 995 гПа та широта місця  $54^0$ .
6. Обчислити відстань між ізобарами на широтах  $30^0$  та  $60^0$  на карті масштабу  $1:1,5 \cdot 10^7$ , якщо швидкість геострофічного вітру дорівнює 20 м/с. Густина дорівнює  $1,27 \text{ кг/м}^3$ .
7. Обчислити швидкість геострофічного вітру на рівні моря, якщо відстань між сусідніми ізобарами на карті масштаба  $1:10^7$  дорівнює 2,5 см, температура  $0^0$ , тиск 1013,3 гПа, широта місця  $55^0$ .
8. В пункті А тиск на 1 % більший за тиск в пункті В, що розташований на той самій широті на відстані 600 км від пункту А. Визначити напрямок та швидкість геострофічного вітру, якщо температура в обох пунктах  $5^0\text{С}$ , а ізобари проходять меридіонально? Широта місця  $55^0$ .
9. При переміщенні уздовж меридіана від широти  $57.5^0$  до широти  $52.5^0$  тиск збільшився на 1 %. Визначити швидкість та напрямок геострофічного вітру, якщо уздовж широти тиск не змінюється? Температура повітря  $7^0\text{С}$ .
10. Визначити широту місця та швидкість геострофічного вітру, якщо його меридіональна складова дорівнює 8.5 м/с, а горизонтальний градієнт тиску відхилений на  $40^0$  праворуч від напрямку на схід та дорівнює 1.8 гПа/100 км.

Задачі на визначення термічного вітру.

1. Визначити величину та напрямок термічного вітру в шарі 3 км, якщо середній градієнт температури спрямований на південь та дорівнює  $3^0/100\text{км}$ . Середня температура повітря  $25^0$ , широта місця  $60^0$ .
2. Знайти висоту обертання геострофічного вітру на станції, широта якої  $50^0$ , якщо на висоті 1000 м геострофічний вітер становить 9 м/с, а середній горизонтальний градієнт температури 1 град/100 км.
3. Визначити величину і напрямок середнього горизонтального градієнта температури в шарі від 1 до 4 км, якщо вітер на висоті 4 км південний 11 м/с, а на висоті 1 км – південно–східний 8 м/с. Широта місця  $60^0$ ,  $\bar{T} = 290 \text{ K}$ .
4. Знайти висоту обертання геострофічного вітру, якщо відомо, що на висоті 1 км зростання тиску на 6 гПа відбувається на тій самій відстані, що і зменшення температури на  $5^0$ .
5. Знайти висоту обертання геострофічного вітру, якщо на висоті 1 км горизонтальний градієнт тиску в гПа/м чисельно дорівнює горизонтальному градієнту температури в град/м. Температура повітря 273 К, тиск 950 гПа. Питома газова стала  $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ .
6. На якій відстані відстоять одна від одної ізотерми, що проходять через  $5^0\text{С}$  на карті масштабу 1:15 000 000, якщо адвентивне вихолодження

- дорівнює  $1^{\circ}\text{C}$  за 1 год., а напрямок вітру складає кут  $45^{\circ}$  з напрямком градієнту температури, а швидкість вітру дорівнює 10 м/с.
7. Визначити геострофічний вітер на висоті 2 км, якщо вітер на рівні 1 км спрямований з півдня на північ та дорівнює 7,9 м/с, а середній горизонтальний градієнт температури дорівнює 2 град/100 км та спрямований з півночі на південь. Широта місця  $55^{\circ}$ .
  8. Як спрямований та чому дорівнює градієнт температури на рівні 1 км, якщо на тому ж рівні тиск зростає з заходу на схід на 7 гПа на кожні 500 км, а на висоті 4 км має місце обернення геострофічного вітру.
  9. Геострофічний вітер на висоті 1 км південно–південно–східний 6 м/с; на висоті 2 км він південно–східний 6,5 м/с. На якому рівні спостерігатиметься східний вітер та яка його швидкість, якщо горизонтальний градієнт температури з висотою не змінюється?
  10. Визначити геострофічний вітер на висоті 5 км, якщо вітер на рівні 2 км спрямований з заходу на схід та дорівнює 8,1 м/с, а середній горизонтальний градієнт температури дорівнює 2 град/100 км та спрямований зі сходу на захід. Широта місця  $45^{\circ}$ .

#### Задачі на визначення градієнтного вітру.

1. Зобразити схематично змінювання швидкості градієнтного вітру з висотою у східній частині антициклону та західній частині циклону у північній півкулі. Вважати, що температура повітря зменшується з півдня на північ. Надати пояснення до рисунка.
2. Зобразити схематично змінювання швидкості градієнтного вітру з висотою у північній частині антициклону та південній частині циклону у північній півкулі. Вважати, що температура повітря зменшується з півночі на південь. Надати пояснення до рисунка.
3. Зобразити схематично змінювання швидкості градієнтного вітру з висотою у північно–східній частині антициклону та південно–західній частині циклону північної півкулі. Вважайте, що температура повітря зростає з півночі на південь. Надайте пояснення до рисунка.
4. Визначити максимально можливу швидкість градієнтного вітру в антициклоні в точках, які віддалені на відстань 600 км від центру. Широта місця  $30^{\circ}$ .
5. Яким має бути радіус кривизни ізобар, якщо вітер швидкістю 12 м/с зменшується під впливом кривизни ізобар на 10 %? Широта місця  $50^{\circ}$ .
6. Доведіть, що в циклоні північної півкулі градієнтний вітер менший за геострофічний, а в антициклоні – навпаки.
7. Відстань між сусідніми ізобарами в циклоні на карті масштабу  $2:10^7$  дорівнює 1,5 см. Визначити градієнтний вітер в точці на відстані 500 км від центру. Широта місця  $40^{\circ}$ .
8. Знайти максимально можливу швидкість градієнтного вітру в антициклоні в точках, що віддалені від центру на 500 км, та мінімально

можливу відстань між ізобарами на приземній карті масштабу  $1:2 \cdot 10^7$ , що відповідає цьому значенню. Широта місця  $60^0$ .

9. На якій відстані розташовані ізобари на синоптичній карті, якщо геострофічний вітер зменшився під впливом кривизни ізобар на 20 %? Радіус кривизни 500 км. Широта місця  $55^0$ .
10. Обчислити горизонтальний градієнт тиску в пункті, що є віддаленим від центру на відстань 700 км, якщо швидкість градієнтного вітру в ньому 14 м/с. Широта місця  $50^0$  (скористатись наближеною формулою).

## **2.4 Повчання по вивченню третьої теми „Рівняння гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери”**

### **2.4.1 Рекомендації по вивченню теми**

Третя тема (стор. 210–235 Підручника [1]) присвячена методам опису повітряних течій, що мають турбулентний характер. Необхідність вивчення цих методів пов'язана з тим, що в атмосфері існує багато шарів та зон, де рух повітря має турбулентний характер. В першу чергу, це граничний шар атмосфери, в якому відбуваються основні процеси розповсюдження та дифузії забруднюючих домішок. Тому якість атмосферного повітря, яка є одним з найважливіших показників екологічного стану довкілля, тісно пов'язана з інтенсивністю турбулентності в цьому шарі.

В результаті вивчення цієї теми студент повинен зрозуміти які фізичні чинники, а через них – й метеорологічні умови у граничному шарі атмосфери, впливають на інтенсивність турбулентних рухів в атмосфері. Тому, при вивченні цієї теми потрібно звернути увагу та такі базові знання та вміння:

1. визначення „ламінарного” та „турбулентного” рухів, їх головні особливості (§ 7.3.1, стор. 210 Підручника [1]);
2. необхідність осереднення рівнянь гідротермодинаміки для опису турбулентних течій та основні положення методики осереднення цих рівнянь (§ 7.3.2, стор. 210 Підручника [1]);
3. фізичний сенс додаткових членів в рівняннях руху (стор. 221) та притоку тепла (стор. 223), які з'являються в рівняннях гідротермодинаміки за рахунок операції осереднення;
4. основні положення „К-теорії” замкнення осереднених рівнянь гідротермодинаміки (стор. 224-227 Підручника [1] – аналогія між молекулярним та турбулентним переносом та „градієнтна гіпотеза”);
5. перелік фізичних чинників, які впливають на інтенсивність турбулентних рухів (див. аналіз рівняння балансу кінетичної енергії турбулентності на стор. 229–230);

6. вплив стратифікації атмосфери на інтенсивність турбулентних рухів та фізичний сенс числа Річардсона та його значення при різних типах стратифікації у граничному шарі атмосфери (стор. 232 Підручника [1]).

#### 2.4.2 Контрольні запитання до теми

1. Дайте визначення ламінарному руху.
2. Дайте визначення турбулентному руху.
3. Фізичний сенс числа Річардсона.
4. Чому для опису турбулентного руху ми повинні використовувати операцію осереднення?
5. Якій період осереднення необхідно використовувати, щоб виділити саме турбулентні рухи?
6. Використовуючи правила осереднення знайдіть  $\overline{f \cdot \varphi}$ , де  $f$  та  $\varphi$  – це деякі метеорологічні величини?
7. Використовуючи правила осереднення знайдіть  $\overline{f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s}}$ , де  $f$  та  $\varphi$  – це деякі метеорологічні величини?
8. Використовуючи правила осереднення знайдіть  $\overline{c \cdot \nabla^2 f}$ , де  $c$  – константа?
9. Які додаткові члени з'являються в рівняннях руху при їх осередненні? Що саме вони описують?
10. Які фізичні чинники впливають на генерацію кінетичної енергії турбулентності?
11. Для чого використовується „К-теорія” турбулентності. Її основне положення.

### 2.5 Повчання по вивченню четвертої теми „Динаміка граничного шару атмосфери”

#### 2.5.1 Рекомендації по вивченню теми

Четверта тема (стор. 236–274 Підручника [1]) знайомить студента з методами опису розподілу швидкості вітру, інших характеристик стану повітря у граничному шарі атмосфери. В цьому шарі відбуваються основні процеси розповсюдження та дифузії забруднюючих домішок, які формують якість атмосферного повітря. Тому, знання динаміки рухів повітря, поведінки характеристик турбулентності у різних частинах граничного шару, його структури є одними з найважливіших складових базових знань фахівця-еколога у галузі метеорології. Тому, при вивченні цієї теми студенту потрібно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

1. визначення „граничного шару атмосфери” та фізичний механізм його формування (§ 7.4.1, стор. 236 Підручника [1]);
2. визначення внутрішніх та зовнішніх параметрів граничного шару (§ 7.4.1, стор. 238-239 Підручника [1]).  
*Зверніть увагу на визначення висоти граничного шару, як рівня, на якому турбулентні потоки дорівнюють нулю, а вітер – дорівнює вітру у вільній атмосфері(стор. 58)!*
3. внутрішня структура граничного шару атмосфери (приземний шар та вільний граничний шар) – стор. 239 та 241-242 Підручника [1];  
*Зверніть увагу на розподіл у вільному граничному шарі сил, що діють на частку повітря, що рухається (рис. 7.7 на стор. 243)!*
4. особливості приземного шару (вертикальний розподіл швидкості вітру та турбулентних потоків) – стор. 239-241 Підручника [1];  
*Зверніть увагу на розподіл у приземному шарі швидкості вітру та коефіцієнту турбулентності при нейтральній стратифікації (стор. 241)!*
5. вертикальний розподіл швидкості вітру у граничному шарі атмосфери, що впливає з моделі Екмана, та вплив стратифікації та цей розподіл (стор. 246-247 Підручника [1]).  
*Зверніть увагу на годограф швидкості вітру за моделлю Екмана (рис. 7.8 на стор. 248)!*
6. вертикальний розподіл коефіцієнту турбулентності у граничному шарі атмосфери та вплив стратифікації та цей розподіл (стор. 68 Конспекту).  
*Зверніть увагу на рис. 7.9 на стор. 250, що представляє профіль коефіцієнту турбулентності у граничному шарі атмосфери!*

### **2.5.2 Приклад розв’язання типової задачі**

#### Задача № 1.

Умова. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 55^\circ$  при швидкості геострофічного вітру 5 м/с та коефіцієнту турбулентного обміну  $k = 5 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 та 1000 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.

### Розв'язання задачі.

Спіраль Екмана становить годограф вітру у граничному шарі атмосфери, тобто залежність швидкості вітру від висоти. Спіраль Екмана будується за результатами обчислень аналітичного розв'язку рівнянь руху, отриманим при деяких суттєвих спрощеннях (Підручник [1], стор. 245), а саме:

$$u = u(z), \quad v = v(z), \quad w = 0, \quad k = \text{const}, \quad \rho = \text{const}$$

та таких граничних умовах (Підручник [1], стор. 246–247):

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad u = v = 0, \\ \text{при } z \rightarrow H \quad u \rightarrow u_g, \quad v \rightarrow v_g \end{aligned}$$

Аналітичний розв'язок спрощених рівнянь руху має вигляд:

$$\begin{aligned} u &= u_g - e^{-az} (u_g \cos az + v_g \sin az), \\ v &= v_g - e^{-az} (v_g \cos az - u_g \sin az), \end{aligned}$$

де  $a = \sqrt{\frac{\omega_z}{k}}$ .

Для окремого випадку, коли вісь  $OX$  співпадає за напрямком з напрямком геострофічного вітру ( $v_g = 0$ ,  $u_g = V_g$ ), формули приймають вигляд (Підручник [1], стор. 248):

$$\begin{aligned} u &= V_g (1 - e^{-az} \cos az), \\ v &= V_g e^{-az} \sin az. \end{aligned}$$

Кут між вектором геострофічного вітру та вектором вітру на будь-якій висоті визначається як

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \frac{e^{-az} \sin az}{1 - e^{-az} \cos az}.$$

Розрахуємо величину  $a = \sqrt{\frac{\omega_z}{k}} = \sqrt{\frac{7.29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1} \sin 55^\circ}{5 \frac{\text{M}^2}{\text{c}}}} \approx 0.0034 \text{ M}^{-1}$

Для знаходження складових швидкості вітру та кута нахилу вітру всі розрахунки доречно оформити в таблицю:

$z$	$az$	$e^{-az}$	$\sin az$	$\cos az$	$u$	$v$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\alpha$
<b>25</b>	0.0864	0.9169	0.0863	0.9963	0.4	0.4	0.9143	42.4
<b>50</b>	0.1728	0.8407	0.1719	0.9851	0.9	0.7	0.8412	40.1
<b>100</b>	0.3456	0.7068	0.3388	0.9409	1.7	1.2	0.7146	35.5
<b>200</b>	0.6912	0.4995	0.6374	0.7705	3.1	1.6	0.5176	27.4
<b>400</b>	1.3824	0.2495	0.9823	0.1873	4.8	1.2	0.2571	14.4
<b>600</b>	2.0735	0.1246	0.8763	-0.4818	5.3	0.5	0.1030	5.9
<b>800</b>	2.7647	0.0622	0.3680	-0.9298	5.3	0.1	0.0217	1.2
<b>1000</b>	3.4559	0.0311	-0.3092	-0.9510	5.1	-0.05	-0.0093	-0.5

Зауваження. Розраховуючи синус та косинус, слід пам'ятати, що значення величини  $az$  отримуємо у радіанах.

Спіраль Екмана зазвичай будують у системі координат  $u, v$  де значення  $u$  відкладають уздовж вісі  $OX$ , а значення  $v$  – уздовж вісі  $OY$ , отримані точки з'єднують з початком координат векторами, а їх кінцівки – плавною лінією.

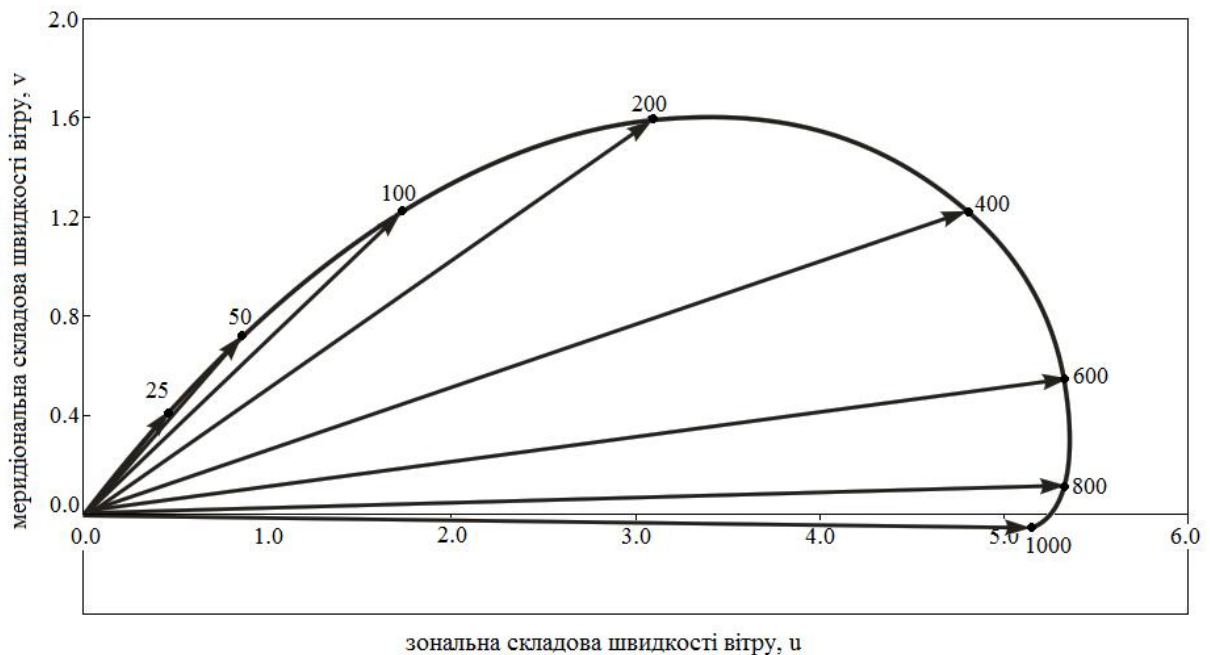


Рисунок 2.5 – Спіраль Екмана, що побудована за даними розрахунків таблиці.

Використовуючи спіраль Екмана для опису зміни вітру у граничному шарі атмосфери з висотою, ми розглядаємо сталий рух (Підручник [1], стор. 245), що означає, що цей рух виникає при рівновазі

трьох сил, а саме, сили баричного градієнта, сили Коріоліса та сили турбулентної в'язкості (див. рис. 2.6).

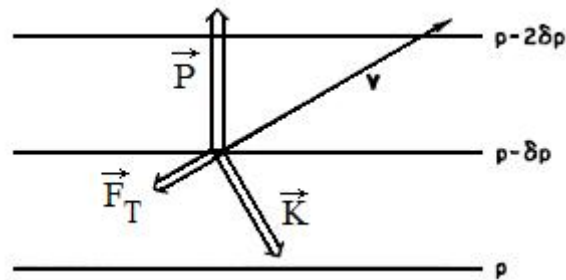


Рисунок 2.6 – Баланс сил при сталому русі в граничному шарі атмосфери ( $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_T$  та  $\vec{K}$  – сила баричного градієнта, сила турбулентної в'язкості та сила Коріоліса відповідно).

Знайдемо величину та напрямок градієнта тиску. Модель Екмана отримується при припущенні, що градієнт тиску у граничному шарі атмосфери з висотою є величиною незмінною. Таким чином, сила баричного градієнта також не змінюватиметься з висотою.

Отже, змінюватись з висотою будуть тільки сила Коріоліса та сила турбулентної в'язкості таким чином, щоб їх сума на будь-якій висоті та в будь-якій момент часу врівноважувала силу баричного градієнта (див. рис. 2.6).

Оскільки вісь  $OX$  спрямовано в напрямку вектора геострофічного вітру, то напрямок баричного градієнта буде протилежним напрямку вісі  $OY$ , тому  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , а  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial n}$ . Величину баричного градієнта можна отримати з виразу для геострофічного вітру:

$$V_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = 2\omega_z \rho V_g,$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 2 \cdot 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1} \cdot \sin 55^\circ \cdot 1.3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 77.63 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Па}}{\text{м}} = 0.8 \frac{\text{гПа}}{100 \text{ км}},$$

$$\text{або } \frac{\partial p}{\partial y} = -0.8 \frac{\text{гПа}}{100 \text{ км}}$$

Записавши спрощені рівняння руху для балансу трьох сил: сили баричного градієнта, сили Коріоліса та сили турбулентної в'язкості, знайдемо вирази також для сили Коріоліса та сили турбулентної в'язкості:



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 2\omega_z v + k_z \frac{d^2 u}{dz^2},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -2\omega_z u + k_z \frac{d^2 v}{dz^2}.$$

Величину сили Коріоліса можна знайти як  $|\vec{K}| = 2\omega_z \sqrt{u^2 + v^2}$ . Оскільки  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , а  $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial n}$ , то

$$2\omega_z v = -k_z \frac{d^2 u}{dz^2},$$

$$k_z \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega_z u.$$

Тоді величину сили турбулентної в'язкості можна знайти як

$$|\vec{F}_T| = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega_z u\right)^2 + (2\omega_z v)^2}.$$

Для того, щоб знайти величину сили Коріоліса та сили турбулентної в'язкості зручно заповнити таблицю:

$z$	$u$	$v$	$ \vec{V} $	$ \vec{K}  \cdot 10^5 \frac{\text{M}}{\text{c}^2}$	$2\omega_z u \cdot 10^5 \frac{\text{M}}{\text{c}^2}$	$2\omega_z v \cdot 10^5 \frac{\text{M}}{\text{c}^2}$	$ \vec{F}_T  \cdot 10^5 \frac{\text{M}}{\text{c}^2}$
<b>25</b>	0.4	0.4	0.6	7.0	5.2	4.7	54.8
<b>50</b>	0.9	0.7	1.1	13.4	10.3	8.6	50.2
<b>100</b>	1.7	1.2	2.1	24.6	20.0	14.3	42.2
<b>200</b>	3.1	1.6	3.5	41.4	36.7	19.0	29.8
<b>400</b>	4.8	1.2	4.9	58.8	56.9	14.6	14.9
<b>600</b>	5.3	0.5	5.3	63.6	63.3	6.5	7.4
<b>800</b>	5.3	0.1	5.3	63.2	63.2	1.4	3.7
<b>1000</b>	5.1	-0.05	5.1	61.5	61.5	-0.6	1.9

Зауваження. Підставляючи в вираз  $|\vec{F}_T| = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega_z u\right)^2 + (2\omega_z v)^2}$  модуль сили баричного градієнта  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$  необхідно перевести гПа в Па, а км – в метри.

Висоту верхньої межі граничного шару атмосфери знайдемо за формулою:

$$H = \pi \sqrt{\frac{k}{\omega_z}}$$

$$H = 3.14 \sqrt{\frac{5 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}}{7.29 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} \cdot \sin 55^\circ}} \approx 909 \text{ м.}$$

### 2.5.3 Контрольні запитання до теми

1. Які сили діють в умовах стаціонарного горизонтально–однорідного граничного шару атмосфери?
2. При яких припущеннях будується модель Екмана?
3. Від яких величин залежать значення складових швидкості вітру у вільному граничному шарі?
4. Якій профіль вітру спостерігається в екманівському граничному шарі?
5. Як змінюється напрямок вітру з висотою в граничному шарі атмосфери?
6. Що таке кут нахилу вітру? Чому він дорівнює біля поверхні землі (на верхній границі ГША)? Чому дорівнює його максимальне значення?

### 2.5.4 Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 55^\circ$  при швидкості геострофічного вітру 10 м/с та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 5 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 та 1000 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.

2. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 35^{\circ}$  при швидкості геострофічного вітру  $7\text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 5\text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 100, 200, 300, 500, 700, 900 та 1200 м. Прийняти густину рівною  $1.3\text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
3. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 45^{\circ}$  при швидкості геострофічного вітру  $10\text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 7\text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 та 1000 м. Прийняти густину рівною  $1.3\text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
4. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 60^{\circ}$  при швидкості геострофічного вітру  $15\text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 5\text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 100, 200, 300, 500, 700, 900 та 1200 м. Прийняти густину рівною  $1.3\text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
5. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 50^{\circ}$  при швидкості геострофічного вітру  $20\text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 5\text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 50, 200, 400, 600, 800 та 1200 м. Прийняти густину рівною  $1.3\text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
6. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 40^{\circ}$  при швидкості геострофічного вітру  $17\text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 8\text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 та

- 1000 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
7. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 65^\circ$  при швидкості геострофічного вітру  $23 \text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 6 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 100, 300, 400, 600, 800, 1000 та 1300 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
  8. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 55^\circ$  при швидкості геострофічного вітру  $15 \text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 9 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 та 1000 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
  9. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 55^\circ$  при швидкості геострофічного вітру  $5 \text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 5 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 25, 50, 100, 200, 400, 600, 800 та 1000 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.
  10. Побудувати спіраль Екмана для широти  $\varphi = 55^\circ$  при швидкості геострофічного вітру  $5 \text{ м/с}$  та коефіцієнті турбулентного обміну  $k = 5 \text{ м}^2/\text{с}$ . Для кожної заданої висоти розрахувати: складові швидкості вітру, кут нахилу вітру, величину та напрямок градієнта тиску, величину та напрямок сили Коріоліса та величину та напрямок сили тертя. Розрахунки провести для висот 50, 200, 400, 600, 800 та 1200 м. Прийняти густину рівною  $1.3 \text{ кг/м}^3$ . Визначити висоту граничного шару атмосфери.

### 3 ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТІВ

Контроль знань та вмінь студентів складається з заходів поточного контролю, який відбувається протягом всього семестру під час проведення практичних занять та містить заходи контролю самостійної роботи студента поза межами аудиторних занять. Він має за мету перевірку рівня підготовленості студента до виконання контрольної роботи.

Поточний контроль полягає у виконанні модульних контрольних робіт з теоретичної та практичної частин курсу і усного опитування з розв'язанням типових задач біля дошки під час практичних занять.

Поточний контроль знань та вмінь студента з модуля „Динамічна метеорологія” в дисципліні „Метеорологія та кліматологія” здійснюється за накопичувально–модульною системою.

Модуль „Динамічна метеорологія” розбито на два змістовні модулі, які включають:

Змістовний модуль № 1: розділи „*Методи математичного опису стану атмосфери. Основні рівняння гідродинаміки атмосфери*” та „*Динаміка вільної атмосфери*”

Змістовний модуль № 2: розділи „*Рівняння гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери*” та „*Динаміка граничного шару атмосфери*”.

Максимальна сума балів за кожний змістовний модуль та перелік контролюючих заходів визначаються робочою програмою дисципліни на поточний навчальний рік.

Оцінка іспиту виставляється за результатами поточного контролю – всі студенти, які набрали не менше за 60% від максимально можливої загальної суми балів та виконали всі завдання з практичної частини курсу, отримують оцінку іспиту відповідно до такої шкали:

Інтегральна сума балів складає	Оцінка з іспиту
<60 % від максимально можливої суми	незадовільно
60–74.9 % від максимально можливої суми	задовільно
75–89.9 % від максимально можливої суми	добре
≥90 % від максимально можливої суми	відмінно

Узагальнюючи інформацію, що викладена у підпунктах 2.2 – 2.5, можна привести повний перелік базових знань та вмінь по розділу „Динамічна метеорологія”:

1) Перша тема:

- а) характеристики стану атмосфери, за допомогою яких можна описати динаміку та термодинаміку атмосфери;
- б) зв'язок між загальнофізичними законами збереження (маси, імпульсу або кількості руху, енергії) з рівняннями гідротермодинаміки атмосфери;

- в) перелік сил, що діють в атмосфері та приводять до руху атмосферне повітря;
  - г) визначення диференціальних та векторних характеристик полів характеристик стану атмосфери.
- 2) Друга тема:
- а) визначення „вільної атмосфери” та її головні особливості;
  - б) визначення геострофічного вітру та його властивості;
  - в) визначення термічного вітру та його зв'язок з горизонтальним градієнтом температури;
  - г) визначення градієнтного вітру та його властивості;
  - г) студент повинен вільно визначати напрям руху повітря у вільній атмосфері при заданому баричному полі.
- 3) Третя тема:
- а) визначення „ламінарного” та „турбулентного” рухів, їх головні особливості;
  - б) необхідність осереднення рівнянь гідротермодинаміки для опису турбулентних течій та основні положення методики осереднення цих рівнянь;
  - в) фізичний сенс додаткових членів в рівняннях руху та притоку тепла, які з'являються в рівняннях гідротермодинаміки за рахунок операції осереднення;
  - г) основні положення „К-теорії” замкнення осереднених рівнянь гідротермодинаміки;
  - г) перелік фізичних чинників, які впливають на інтенсивність турбулентних рухів;
  - д) вплив стратифікації атмосфери на інтенсивність турбулентних рухів та фізичний сенс числа Ричардсона та його значення при різних типах стратифікації у граничному шарі атмосфери.
- 4) Четверта тема:
- а) визначення „граничного шару атмосфери” та фізичний механізм його формування ;
  - б) визначення внутрішніх та зовнішніх параметрів граничного шару;
  - в) внутрішня структура граничного шару атмосфери;
  - г) особливості приземного шару (вертикальний розподіл швидкості вітру та турбулентних потоків);
  - г) вертикальний розподіл швидкості вітру у граничному шарі атмосфери, що впливає з моделі Екмана, та вплив стратифікації та цей розподіл;
  - д) вертикальний розподіл коефіцієнту турбулентності у граничному шарі атмосфери та вплив стратифікації та цей розподіл.

## Додаток А

### Оператор Гамільтона та тензорна форма запису

Оператор Гамільтона – це диференціальний оператор, що має такий вигляд:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{A.1})$$

Він являє собою символічний вектор з проєкціями  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  на координатні осі (у випадку прямокутної декартової системи координат) і називається оператором “набла” (позначається –  $\nabla$ ). Символічним вектором його називають, оскільки він має такі самі властивості, що і інші вектори, проте не має ані довжини, ані напрямку.

Оператор Гамільтона дозволяє математично визначити основні диференціальні характеристики векторних та скалярних полів, з якими оперує динамічна метеорологія (найчастіше це поля швидкості, тиску та температури).

Основними диференціальними характеристиками векторних та скалярних полів, які дозволяє визначити оператор “набла”, є градієнт, дивергенція та ротор.

Скалярним полем  $f(x, y, z) = f(\vec{r})$  називається скалярна величина  $f$ , яка визначена в кожній точці  $\vec{r} = (x, y, z)$  простору (тобто приймає в них конкретні значення, наприклад, поле температури, тиску, густини в неоднорідному середовищі, тощо).

Градієнтом  $grad f$  скалярного поля  $f = f(\vec{r})$  називається вектор, визначений в кожній точці поля, який спрямований за нормаллю до поверхні рівня (в бік зростання  $f(\vec{r})$ ) та довжина якого дорівнює  $\partial f / \partial n$ , де  $\vec{n}$  – орт нормалі до поверхні рівня в даній точці простору (в бік зростання  $f(\vec{r})$ ).

Градієнт поля складної величини можна отримати при застосуванні оператора Гамільтона до скаляра  $f$ :

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (\text{A.2})$$

Проекціями вектора  $grad f$  на координатні осі є  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . Таким чином скалярне поле  $f = f(\vec{r})$  утворює векторне поле градієнта  $grad f$ .

Векторне поле відрізняється від скалярного тим, що в кожній точці простору крім абсолютного значення задано також його напрямок (наприклад, поле швидкості, імпульсу тощо).

Розбіжність, або дивергенцію поля векторної величини  $\vec{A}$  можна формально розглядати як скалярний добуток символічного вектора  $\nabla$  на вектор  $\vec{A}$ :

$$\nabla \cdot \vec{A} = \vec{i} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{A.3})$$

де  $A_x, A_y, A_z$  – це проекції вектора  $\vec{A}$  на осі декартової системи координат.

Таким чином, векторне поле  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  перетворюється на скалярну характеристику – дивергенція  $\text{div } \vec{A}$ .

Операція “ротор” визначається як векторний оператор над векторним полем  $\vec{A}$ , оскільки результатом його дії на векторне поле є вектор. Ротор вектора швидкості називають вихором швидкості. Його математичний вираз через оператор Гамільтона представляє собою векторний добуток оператора “набла” на векторну функцію  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} = [\nabla \times \vec{A}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Проекціями вектора  $\text{rot } \vec{A}$  на координатні осі є  $\left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)$ ,  $\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$ . Таким чином векторне поле  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  утворює нове векторне поле ротора  $\text{rot } \vec{A}$ .

Для зручності запису оператора “набла”, диференціальних характеристик метеорологічних полів та деяких членів в рівняннях гідротермодинаміки використовують тензорну (скорочену) форму запису.

Такий скорочений запис було запропоновано в тензорному аналізі, що має справу з багатомірними просторами, тобто з багатьма просторовими координатами. Отже, для позначення цих координат використовують не літери латинської абетки ( $x, y, z$  тощо), а одну літеру (домовились, що це буде літера  $x$ ) з цифровим індексом.

Таким чином, осі декартової системи координат матимуть позначатимуться таким чином:

$$x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2, \quad z \equiv x_3.$$

де індекс „1” відповідає осі  $x$ , „2” –  $y$ , „3” –  $z$ . Отже, проекції будь-якого вектора на осі  $x, y, z$  можна також представити у вигляді літери, що позначає цей вектор з цифровими індексами. Тобто вектор  $\vec{A}$  можна представити як



$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \equiv A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3, \quad (\text{A.5})$$

де  $\vec{i}$  використовується як узагальнене позначення для будь-якого одиничного вектора, а цифрові індекси вказують до якої осі відноситься кожен з ортів.

Проте всі ці цифрові індекси та узагальнені позначення не мали б жодного сенсу, якщо б не можна було б всі однакові за структурою доданки згорнути і записати в скороченому вигляді.

Для цього в динамічній метеорології для позначення цифрових індексів вводять дві літери „ $i$ ” та „ $\alpha$ ”, причому  $\alpha$  змінюється від одного до трьох (тобто приймає значення  $x, y, z$ ) та означає підсумовування доданків за цим індексом, а  $i$  вважається незмінним в межах одного виразу та приймає певне фіксоване значення від одного до трьох.

Найпростіший приклад використання індексу „ $\alpha$ ” – скалярний добуток двох довільних векторів  $\vec{A}$  і  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = A_\alpha B_\alpha, \quad \alpha = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

В результаті три однакові за структурою доданки представлено у вигляді одного з індексом  $\alpha$ .

Таким чином, у скороченій формі оператор Гамільтона можна представити як

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{i}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \quad (\text{A.7})$$

градієнт поля скалярної величини  $f$  як:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= \vec{i}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = \vec{i}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

дивергенцію вектора швидкості  $\vec{V}$  як:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= (\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
до самостійної роботи студентів  
та практичних занять  
з дисципліни „Метеорологія та кліматологія”  
(частина III „Динамічна метеорологія”)  
для студентів III курсу  
денної форми навчання

Укладачі: проф. Степаненко С.М., ас. Хоменко І.А.

Підп. до друку  
Умовн. друк. арк.

Формат  
Тираж

Папір  
Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

---

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

---