О.С. ЛІМОНОВ

# ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.С. ЛІМОНОВ

# ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Конспект лекцій

Одеса – 2011

ББК 22. 313
Л 58
УДК 681. 584

*Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету ( протокол № 11 від 22.о5. 2010 р.).*

**Лімонов О.С.**
Теорія електромагнітного поля: Конспект лекцій. -Одеса, Вид-во "ТЕС" 2010. 144с.

В конспекті лекцій розглянуті основні рівняння електромагнітного поля, основні характеристики електричних хвиль. Конспект лекцій використовується для студентів денної форми навчання, напрямку "Гідрометеорологія".

© Одеський державний
екологічний університет, 2011

*Навчальне видання*

**Лімонов Олександр Сергійович**

**“Теорія електромагнітного поля”**

Конспект лекцій

Підп. до друку 12.04.11 Формат Папір
Умовн. друк. арк.. Тираж Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
85016, Одеса, Львівська, 15

## ЗМІСТ

1 ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ……5
1.1 Поняття поля. Основні характеристики скалярного поля. Інтегральні характеристики поля…….……..5
1.2 Основні рівняння векторного поля. Основні характеристики векторного поля. Інтегральні характеристики поля…….……..10
1.3 Основні рівняння електромагнітного поля. Загальна суть рівняння Максвела. Інтегральна форма рівнянь Максвела. Рівняння Максвела – узагальнене формулювання експериментальних законів. Закон збереження зарядів……17
1.4 Основні рівняння електромагнітного поля. Перетворення інтегральних рівнянь Максвела в диференціальні. Рівняння безперервності. Щільність сили Лоренца. Матеріальні рівняння……...21
1.5 Електростатичне поле. Електромагнітне поле постійних струмів. Граничні умови. Електростатика. Магнітостатика……29
1.6 Енергетичні співвідношення в електромагнітному полі. Енергія електростатичного поля. Енергія зарядів в просторі. Енергія електростатичного поля в анізотропному середовищі. Еліпсоїд енергії….40
1.7 Енергія магнітостатичного поля. Енергія магнітного поля постійних струмів. Стаціонарне поле. Квазістаціонарне поле……47
1.8 Енергетичні співвідношення в електромагнітному полі. Вектор Умова. Теорема Пойнтинга. Баланс енергії. Вектор Пойнтинга. Сутність передачі енергії електромагнітними хвилями……..……49
2 ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ…….……55
2.1 Постановка задачі. Хвильове рівняння. Загальні співвідношення між векторами $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$. Фазова і променева швидкості……....55
2.2 Змінне електромагнітне поле у діелектрику. Класифікація середовищ на надвисоких частотах. Плоска хвиля у діелектрику. Плоска хвиля напівпровідниковому середовищі……61
2.3 Змінне електомагнітне поле в провідному середовищі. Поширення плоскої хвилі в провідному середовищі. Електромагнітні хвилі в плазмі……..68
2.4 Основні характеристики електромагнітних хвиль. Поляризація плоских електромагнітних хвиль.Загальний випадок поляризації…….…74
2.5 Поляризація електромагнітних хвиль. Обертання площини поляризації (ефект Фарадея). Параметри Стокса і сфера Пуанкаре……80
2.6 Проходження плоскої електромагнітної хвилі на межах розділу двох середовищ. Граничні умови. Межі розділу двох середовищ. Закони відбиття і заломлення хвиль. Формули Френеля…….……84

2.7 Проходження плоскої електромагнітної хвилі на межах розділу двох середовищ. Визначення коефіцієнтів відбиття і заломлення. Аналіз коефіцієнтів відображення. Кут Брюстера. Повне внутрішнє відбиття…..92
3 ПОНЯТТЯ ПРО НАПРАВЛЕНІ СИСТЕМИ І ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ…….….98
3.1 Класифікація. Процеси в лініях передач……...……98
3.2 Параметри електромагнітних хвиль в передавальних лініях. Сталий режим в лінії. Погоджена лінія. Параметри електромагнітних хвиль в передавальних лініях. Неспотворююча лінія…….…..105
3.3 Поняття про направлені системи. Неузгоджена лінія. Відрізки короткозамкнутої лінії……109
3.4 Резонансні ланцюги. Коефіцієнт напруги стоячої хвилі. Графічне рішення рівнянь лінії…….……..114
3.5 Узгодження імпеданса. Узгоджуючі елементи……..122
3.6 Випромінювачі електромагнітних хвиль. Елементарний вібратор. Поняття елементарного вібратора. Електромагнітне поле елементарного вібратора. Зони вібратора. Ближня зона. Далека або хвильова зона…...127
3.7 Елементарні випромінювачі, їх характеристики і діаграми спрямованості. Поле двох елементарних вібраторів. Когерентні і некогерентні коливання. Час когерентності. Довжина когерентності. Тимчасова когерентність. Просторова когерентність……132
3.8 Електромагнітне поле в намагнічених ферітах. Фізичні процеси в намагніченому фериті. Електромагнітне поле в подовжньо-намагніченому фериті. Пристрої з феритами……135
ЛІТЕРАТУРА……...139

# 1 ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

## 1.1 Поняття поля. Основні характеристики скалярного поля. Інтегральні характеристики поля

Весь простір пронизано полями. Ми живемо у гравітаційних полях Сонця і Землі.

**Світло –** це електромагнітне поле.

**Поле** – це будь-яка фізична величина, яка у різних точках простору набуває різних значень.

**Фізична величина** – це величина, яку можна виміряти кількісно.

Математично поле описується сукупністю функцій координат і часу.

**Поле температур –** скалярне поле, яке описується однією функцією координат і часу.

**Гравітаційне поле –** векторне поле, яке описується трьома скалярними функціями координат і часу.

Електромагнітне поле описується декількома векторними функціями координат і часу. Структура полів і процеси в полях описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Незалежними перемінними є просторові координати X, Y, Z і час t. Це – найбільш точний опис поля у будь-якій точці простору і часу. Далі ми побачимо, що електромагнітне поле описується системою диференційних рівнянь у частинних похідних – рівняннями Максвела.

*Основні характеристики скалярного поля:*

- <u>функція точки</u>. Скалярна величина U, яка набирає визначених значень у кожній точці M простору – це **скалярна функція точки** або **скалярне поле** $U = U(M)$ (напрклад, поле температури, потенціалу, щільності в неоднорідному середовищі і т.п.). Поле можна визначити за допомогою скалярної функції векторного аргументу $\vec{r}$ (радіуса – вектора точки M при обраному полюсі O – початку координат):

$$U = U(r). \tag{1.1}$$

- <u>центральне і осьове поле.</u> Якщо функція набуває різних значень для всіх точок, які знаходяться на рівній відстані від якогось центру $C(r_1)$, то поле називається **центральним** або **сферичним** : U залежить тільки від відстані $CM = r$, наприклад, $U = r$ (відстань точки від початку координат – полюса), $U = \frac{C}{r^2}$ (поле освітленості у кожній точці при центральному джерелі світла), взагалі:

$$U = f(r). \qquad (1.2)$$

Якщо функція набуває рівних значень для всіх точок, які знаходяться на рівних відстанях від якоїсь прямої (осі поля), то поле називається **осьовим** або **циліндричним**.

- <u>координатне завдання поля.</u> Визначивши точку М її координатами (декартовими x, y, z, циліндричними $\rho$, $\varphi$, $z$ або сферичними $r$, $\theta$, $\varphi$), одержуємо вираз скалярного поля (1.1) у вигляді трьох змінних:

$$U = \Phi(x, y, z);\ U = \Psi(\rho, \varphi, z);\ U = X(r, \theta, \varphi), \qquad (1.3)$$

а для плоского поля – у вигляді функції двох змінних (у декартових або полярних координатах):

$$U = \Phi(x, z) \text{ або } U = \Psi(\rho, \varphi). \qquad (1.4)$$

Вираз центрального поля у координатах:

$$U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right) = U\left(\vec{r}\right),$$

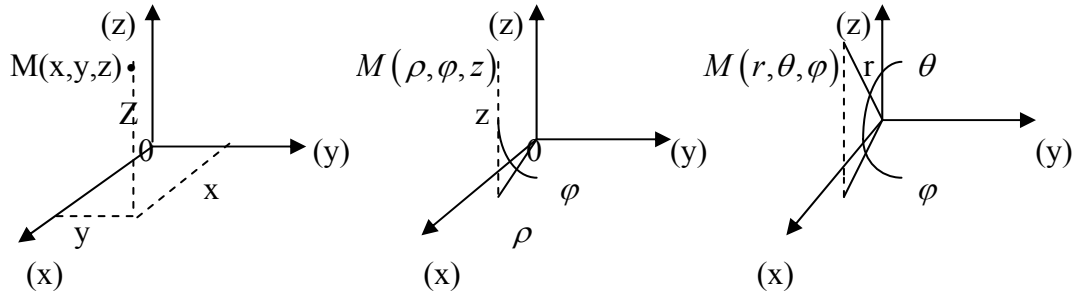
(1.5)

осьового:

$$U = U\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = U(\rho) = U(r \sin\theta). \qquad (1.6)$$

Для вивчення центральних полів найбільш зручні сферичні, для осьових – циліндричні координати.

- <u>системи координат</u> (рис. 1.1)




а) б) в)

Рисунок 1.1 – Системи координат: а-прямокутна (x,y,z); б-колова циліндрична $(\rho,\varphi,z)$; в-сферична $(r,\theta,\varphi)$

- <u>поверхні і лінії рівня</u>. Точки, для яких функція U(r) набуває одного і того ж значення U=const, утворює в просторі поверхню рівня, рівняння якої в координатах

$$U=\Phi(x,y,z)=const;\ U=\Psi(\rho,\varphi,z)=const;\ U=X(r,\theta,\varphi)=const. \qquad (1.7)$$

При різних $const=U_0$, $U_1$, $U_2$, .. утворюються різні поверхні: через кожну точку поля проходить одна така поверхня.

**Приклад 1.** Для поля $U=cr=c_x\cdot x+c_y\cdot y+c_z\cdot z$ поверхні рівня – паралельні площини.

**Приклад 2.** Для поля $U=x^2+2y^2+4z^2$ подібні і подібно розташовані еліпсоїди.

Поверхні рівня центрального поля – **концентричні сфери**, поверхні рівня осьового поля – **циліндри із загальною віссю.**

Для плоского поля рівняння U=const зображує лінії рівня:

$$U(x,y)=const;\quad U(\rho,\varphi)=const. \qquad (1.8)$$

На кресленнях лінії рівня умовно проводяться через визначений однаковий інтервал значень U, і на кожній з них підписується відповідне числове значення U ( рис. 1.2).

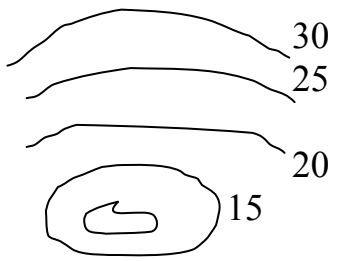
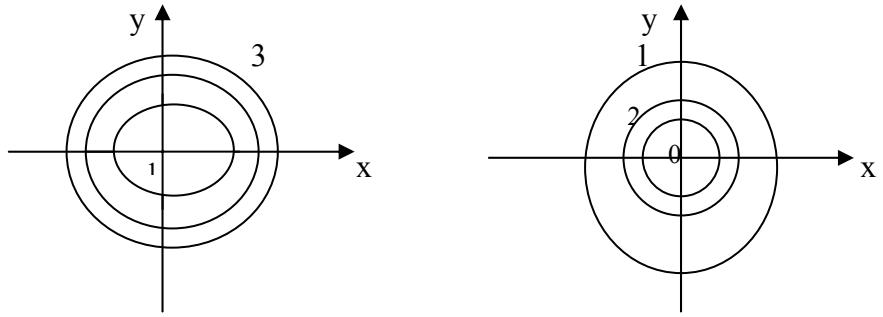



Рисунок 1.2 - Лінії рівня

**Приклад 1.** Ізобари на синоптичних або горизонталі (лінії однакової висоти) на топографічних картах.

**Приклад 2.** а-$U=r^2$; б-$U=\frac{1}{r}$ (рис. 1.3).




а) б)

Рисунок 1.3 – Ізобари: а-$U = r^2$; б-$U = \frac{1}{r}$

Похідна скалярного поля $U = U(r)$ в даній точці $r$ за вектором $c$ - це межа відношення

$$\frac{\partial U}{\partial C} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(r + \varepsilon c) - U(r)}{\varepsilon}$$ (рис.1.4)

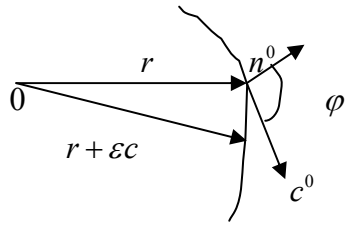



Рисунок 1.4 – Похідна скалярного поля

Похідна поля $U = U(r)$ в даній точці $r$ у напрямі орта $c°$ - це похідна $\frac{\partial U}{\partial C^0}$.

Похідна за вектором $c$ і його орту $c°$ в даній точці зв'язані співвідношенням $\frac{\partial U}{\partial c} = |c| \frac{\partial U}{\partial c^0}$.

$\frac{\partial U}{\partial C^0}$ показує швидкість зростання функції $U$ у напрямку $c°$ у кожній точці; з усіх похідних в даній точці за різними ортами найбільшою є похідна $\frac{\partial U}{\partial n^0}$ у напрямку нормалі $n$ ($n^0$ - орт нормалі) до поверхні рівня у цій точці (у бік зростання функції $U$); похідна за ортою у будь-якому іншому напрямку визначається як

$$\frac{\partial U}{\partial c^0} = \frac{\partial U}{\partial n^0}\cos\left(c^0, n^0\right) = \frac{\partial U}{\partial n^0}\cos\varphi .$$

Основною характеристикою скалярного поля $U(x,y,z,t)$ є **градієнт поля.**

Градієнт поля $U(r)$ (позначається $gradU$ або $\nabla \cdot U$) – це вектор, визначений у кожній точці поля, який має напрямок нормалі до поверхні рівня (у бік зростання *U*) і довжину, яка дорівнює $\frac{\partial U}{\partial n^0}$.

Похідна $\frac{\partial U}{\partial C^0}$ дорівнює проекції $gradU$ на напругу $c°$ :

$$\frac{\partial U}{\partial c^0} = c^0 gradU .$$

*Координати градієнта:*

- в декартовій системі:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot x^0 + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot y^0 + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot z^0 ;$$

- в системі циліндричних координат:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial \rho}\cdot \rho^0 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot \varphi^0 + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot z^0 ;$$

- в системі сферичних координат:

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot r^0 + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi}\cdot \varphi^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\cdot \theta^0 .$$

У точках поля, де лінії рівня накреслені найбільш густо, абсолютна величина градієнта більше; у точках максимума і мінімума поля $gradU = 0$.

**Диференціал скалярного поля** – це повний диференціал функції U:

$$dU = gradU \cdot dr = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz .$$

<u>Правила обчислення градієнта:</u>

grad a = 0, a = const; $grad\left(U_1 + U_2\right) = gradU_1 + gradU_2$,

$grad\left(a\cdot U\right) = a\ gradU$ ; $grad\left(U_1 + U_2\right) = U_1 gradU_2 + U_2 gradU_1$;

$grad\varphi\left(U\right) = \frac{d\varphi}{dU} gradU$ ; $grad\left(V_1\cdot V_2\right) = \left(V_1 grad\right)V_2 + \left(V_2 grad\right)V_1 xrotV_2 + V_2 xrotV_1$.

<u>Градієнт центрального поля:</u> $gradU\left(r\right) = U^{/}\left(r\right)\frac{r^0}{r}$ (сферичне поле); зокрема, $gradr = \frac{r^0}{r}$ - поле одиничних векторів.

Таким чином, градієнт скалярного поля $U(x,y,z,t)$ - це $gradU = x^0\frac{\partial U}{\partial x} + y^0\frac{\partial U}{\partial y} + z^0\frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U$, де $\nabla = x^0\frac{\partial}{\partial x} + y^0\frac{\partial}{\partial y} + z^0\frac{\partial}{\partial z}$ - диференціальний оператор “набла”, або оператор Гамільтона.

Вектор $\nabla U$ спрямований у бік найшвидшого зростання функції $U$, який дорівнює за величиною похідній цієї функції за цим напрямком. Вектор $\nabla U$ не залежить від напрямку координатних осей і положення їх початку, це – **інвертна величина.** По окремості похідна $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ залежить від напрямку координат і не можуть бути характеристикою поля.

***Контрольні запитання***

1. Що таке поле?
2. Що таке поверхня рівня?
3. Що таке градієнт?
4. Що таке градієнт скалярного поля.
5. Що таке набла?

## 1.2 Основні рівняння векторного поля. Основні характеристики векторного поля. Інтегральні характеристики поля

Вектор-функція точки. Векторна величина $\vec{A}$, яка приймає певне значення в кожній точці $M$ простору, називається ***вектор*-функцією** точки або **векторним** полем $\vec{A} = \vec{A}(M)$; (наприклад, поле швидкостей часток рідини, що рухається, силове поле електричної або магнітної напруги і т.п.).

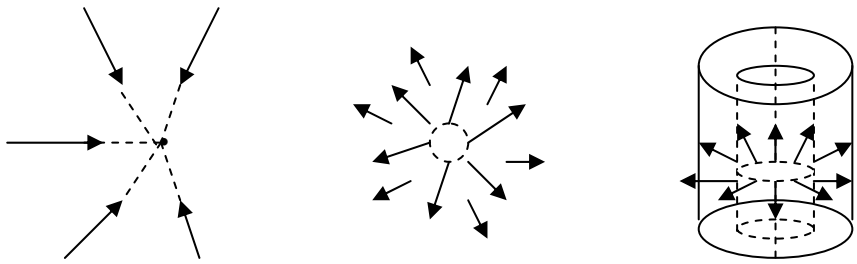
Поле може бути визначено за допомогою функції векторного аргументу $r$:

$$\vec{A} = \vec{A}\left(\vec{r}\right). \qquad (1.9)$$

Векторне поле – плоске, якщо всі значення як $\vec{r}$, так і $\vec{A}$ лежать в одній площині.

**Типи векторних полів:**

1. Центральне векторне поле (рис. 1.5,а).



а) б) в)

Рисунок 1.5 – Векторні поля

У цьому полі всі вектори $\vec{A}$ лежать на прямих минаючих черех центр. Таке поле описується як $\vec{A} = f(r) \cdot r^0$; всі вектори $\vec{A}$ мають напрямок радіуса-вектора $r^0$. Це поле описується також як $\vec{A} = \varphi(r)\frac{r^0}{r}$, $\varphi(r)$ - довжина вектора $\vec{A}$; $\frac{r^0}{r}$ - його орт.

1. Сферичне векторне поле: $\vec{A} = \varphi(r)\frac{\vec{r}}{r}$, важливий випадок центрального поля, у якому довжина вектора $\vec{A}$ залежить тільки від відстані $\left|\vec{r}\right|$, наприклад поля притягання Кулона:

$\vec{A} = \frac{c}{r^3}\vec{r} = \frac{c}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ (для плоского поля цей випадок називається **коловим полем**).

2. Циліндричне векторне поле (рис. 1.5, в)

Тут всі вектори $\vec{A}$ лежать на прямих, минаючих крізь вісь перепендикулярно до неї; на рівних відстанях від осі ці вектори рівні за абсолютною величиною і всі вони спрямовані або до осі, або від неї. Якщо напрямок осі визначається ортом $c^0$, то таке поле описується як $\vec{A} = \varphi(\rho)\frac{\vec{r}}{\rho}$, де $\vec{r}$ - вектор, що є проекцією на площину, перпендикулярну до осі: $\vec{r} = c^0 \times \left(\vec{r} \times c^0\right)$.

В перетині цього поля площинами, перепендикулярними до осі, одержуємо однакові кругові поля.

3. Координатне завдання поля. Векторне поле (1.9) можна визначити за допомогою трьох скалярних полей $A^1(r)$, $A^2(r)$ і $A^3(r)$, які є коефіцієнтами розкладання $\vec{A}$ за трьома якими-небудь некомпланарними векторами $e_1$, $e_2$, $e_3$:

$$\vec{A} = A^1 e^1 + A^2 e^2 + A^3 e^3 . \qquad (1.10)$$

Якщо за ці вектори прийняті координатны орти $x^0$, $y^0$, $z^0$, а коефіцієнт $A^1$, $A^2$, $A^3$ виражені через декартові координати $x$, $y$, $z$, то:

$$\vec{A} = A_x(x,y,z) \cdot x^0 + A_y(x,y,z) \cdot y^0 + A_z(x,y,z) z^0 , \qquad (1.11)$$

тобто векторне поле визначено за допомогою трьох скалярних функцій від трьох перемінних (завдання поля в декартових координатах). В циліндричних і сферичних координатах орти - вектори $\rho^0$, $\varphi^0$ і $z^0$ (рис. 1.5) і $\frac{1}{r}r^0$, $\varphi^0$, $\theta^0$ (рис. 1.6) є дотичними до координатних ліній у кожній точці, а коефіцієнти виражені через відповідні координати:

$$\vec{A} = A\rho(\rho,\varphi,z)\rho^0 + A\varphi(\rho,\varphi,z)\varphi^0 + Az(\rho,\varphi,z)z^0, \tag{1.12}$$

$$\vec{A} = Ar(\rho,\varphi,z)r^0 + A\varphi(\rho,\varphi,z)\varphi^0 + A\theta(\rho,\varphi,z)\theta^0. \tag{1.13}$$

В цих випадках орти змінюють свій напрямок при переході від однієї точки до іншої, залишаючись перпендикулярними.

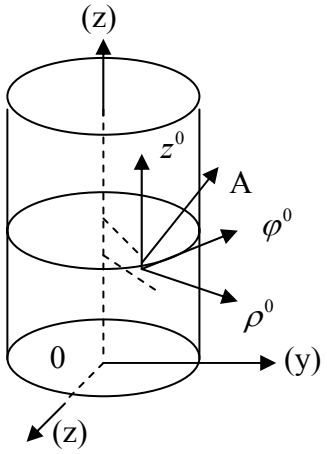



Рисунок 1.6 – Циліндричні координати

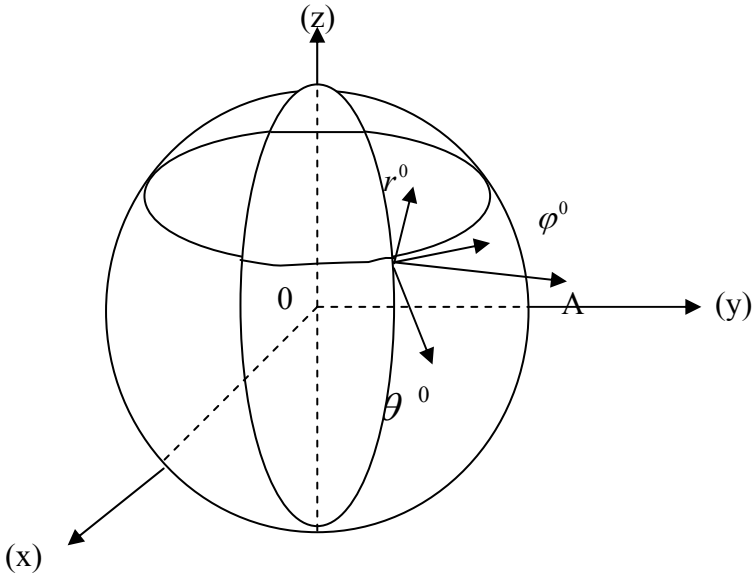


Рисунок 1.7 – Сферичні координати

3. <u>Формули переходу від однієї системи до іншої:</u>

- вираз декартових координат черех циліндричні:

$$A_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi;\ A_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi;\ A_z = A_z.$$

- вираз циліндричних координат через декартові:

$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi;\ A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi;\ A_z = A_z.$$

- вираз декартових координат через сферичні:

$$A_x = A_r \sin\theta\cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi + A_\theta \cos\varphi\cos\theta;$$

$$A_y = A_r \sin\theta\cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi + A_\theta \cos\varphi\cos\theta;$$

$$A_z = A_r \sin\theta\cos\varphi - A_\theta \sin\theta.$$

- вираз сферичних координат через декартові:

$$A_r = A_x \sin\theta\cos\varphi - A_y \sin\theta\sin\varphi + A_z \cos\theta;$$

$$A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi;$$

$$A_\theta = A_x \cos\theta\cos\varphi + A_y \cos\theta\sin\varphi - A_z \sin\theta.$$

Вираз сферичного векторного поля через декартові координати:

$$\vec{A} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(x\cdot x^0 + y\cdot y^0 + z\cdot z^0\right);$$

Вираз циліндричного поля через декартові координати:

$$\vec{A} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(x\cdot x^0 + y\cdot y^0\right).$$

4. <u>Дивергенція векторного поля.</u>

**Дивергенцією** або розбіжністю поля $A$ (позначається $divA$ або $\nabla\cdot A$), називається скаляр, визначений у кожній точці поля і що є об'ємною похідною цього поля:

$$div\,\vec{A} = \lim_{v\to 0}\frac{\int_\Sigma Vds}{v}.$$

*Формули для обчислення дивергенції:*

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$ (в декартових координатах);

$$\nabla\cdot A = div\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$ (в циліндричних координатах)

$$\nabla\cdot A = div\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 Ar\right)\right] + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial A\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)\right]$$ - в сферичних координатах.

*Правила обчислення дивергенції:*

$$divA = 0;\ div\left(\vec{A}_1 + \vec{A}_2\right) = div\,\vec{A}_1 + div\,\vec{A}_2;\quad diva\,\vec{A} = adiv\,\vec{A};$$

$$div\left(\vec{A}\cdot B\right) = Bdiv\,\vec{A} + \vec{A}\,gradB\ \left[частково, divr\cdot a = \frac{ra}{r}\right];$$

$$div\left(\vec{A}_1\times\vec{A}_2\right)=\vec{A}_2\,rot\,\vec{A}_1-\vec{A}_1\,rot\,\vec{A}_2\,.$$

Дивергенція центрального поля $divr=3$; $div\varphi(r)\cdot\vec{r}=3\varphi(r)+r\varphi^{/}(r)$.

5. <u>Ротор векторного поля.</u>

**Ротор** або вихор векторного поля $\left(rot\,\vec{A}, curl\,\vec{A}\,або\nabla\times\vec{A}\right)$ - це вектор, визначений у кожній точці поля і що є об'ємною похідною цього поля, узятого із зворотним знаком:

$$\nabla\times\vec{A}=rot\,\vec{A}=-\lim_{\nu\to 0}\left[\frac{1}{\nu}\int_{\Sigma}\vec{A}\times d\,\vec{s}\right].$$

*Координати ротації:*

$$\nabla\cdot\vec{A}=rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix} x^0 y^0 z^0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \\ A_x A_y A_z \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)x^0+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)y^0+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)z^0$$ - в декартових координатах;

$$\nabla\times\vec{A}=rot\,\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\rho^0+\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\varphi^0+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)z^0$$ - в циліндричних кординатах;

$$\nabla\times\vec{A}=rot\,\vec{A}=\left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]r^0+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\varphi^0+$$

$$+\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\right]\theta^0$$ - в сферичних координатах.

*Правила обчислення ротора:*

$$rot\left(\vec{A}_1+\vec{A}_2\right)=rot\,\vec{A}_1+rot\,\vec{A}_2;\ rot\left(a\,\vec{A}\right)=arot\,\vec{A};$$

$$rot\left(U\cdot\vec{A}\right)=Urot\,\vec{A}+gradU\times\vec{A};$$

$$rot\left(\vec{A}_1\times\vec{A}_2\right)=\left(\vec{A}_2\,grad\right)\vec{A}_1-\left(\vec{A}_1\,grad\right)\vec{A}_2+\vec{A}_1\,div\,\vec{A}_2-\vec{A}_2\,div\,\vec{A}_1\,.$$

*Скалярний добуток векторів:*

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A\cdot B\cos\varphi\,.$$

Воно дорівнює їх довжині на косинус кута між ними.

*Скалярний добуток векторів:*

$x^0\cdot x^0=1$; $y^0\cdot y^0=1$; $z^0\cdot z^0=1$.

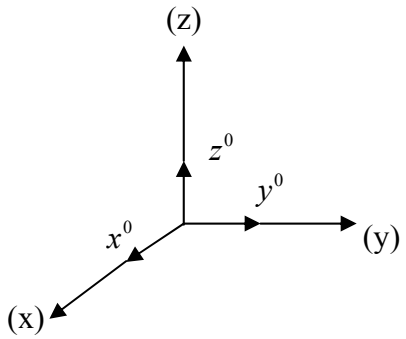
$x^0\cdot y^0=0$; $x^0\cdot z^0=0$; $y^0\cdot z^0=0$.

$y^0\cdot x^0=0$; $z^0\cdot x^0=0$; $z^0\cdot y^0=0$.

Скалярний добуток різних ортів дорівнює нулю, так як вони перпендикулярні.

*Векторний добуток векторів:*

Результат векторного добутку $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$ - вектор, спрямований до $\vec{A}$ і $\vec{B}$; $|C|=|A||B|\sin\varphi$. Напрямок $\vec{C}$ - визначається за правилом буравчика; якщо обертати за часовою стрілкою вектор $\vec{A}$ і $\vec{B}$, то $\vec{C}$ - покаже напрямок кінця буравчика.




*Векторний добуток ортів $x^0$, $y^0$, $z^0$:*

$\left[x^0\times y^0\right]=z^0$; $\left[y^0\times x^0\right]=-z^0$; $\left[x^0\times x^0\right]=0$.

$\left[y^0\times z^0\right]=x^0$; $\left[x^0\times z^0\right]=-y^0$;

$\left[z^0\times x^0\right]=y^0$.

Двохкратне застосування оператора “набла” $\nabla$:

$$\nabla\left(\nabla\times\vec{A}\right)=divrot\,\vec{A}=0$$

$$\nabla\times\left(\nabla\cdot U\right)=rot\cdot gradU=0$$

$$\nabla\left(\nabla U\right)=divgradU=\nabla\cdot\nabla\cdot U=\nabla^2U=-\Delta U$$

Величина $\nabla^2=\Delta$ - це **оператор Лапласа.**

*Його координатні вирази:*

$\Delta U=\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial z^2}$ - декартові координати.

$\Delta U=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial z^2}$ (циліндричні координати).

$\Delta U=\dfrac{\partial^2U}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r^2}ctg\theta\dfrac{\partial U}{\partial\theta}$ (сферичні координати).

Оператор Лапласа, застосований до вектора $A$:

$\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)=graddiv\,\vec{A}$ і $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=rot\cdot rot\,\vec{A}$ зв'язані між собою формулою:

$\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\Delta\vec{A}$:

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \cdot x^0 + \Delta A_y \cdot y^0 + \Delta A_z \cdot z^0 = \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) x^0 + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) y^0$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) z^0 .$$

Інтегральна характеристика векторного поля *A*, відповідна диференційній характеристиці $divA = \nabla \cdot A$, є потік Ф вектор – *A* крізь замкнуту поверхню: $\Phi = \oint_s A \cdot ds$, $ds = n^0 \cdot ds$; $n^0$ - нормаль до поверхні $S$.

<u>Теорема дивергенції:</u> $\int_V \nabla \cdot A dv = \oint_S A ds$ - об'єм $V$ обмежений поверхнею $S$.

Інтегральна характеристика векторного поля *A*, відповідна диференційній характеристиці $rotA = \nabla \cdot A$, є **циркуляція Ц**, яка дорівнює криволінійному інтегралу на замкнутому контурі від проекції вектора *A* на дотичну у кожній точці контуру: $Ц = \oint_l A dl$, $dl = 1^0 \cdot dl$.

<u>Теорема Стокса:</u> $\int_S \nabla \times A \cdot ds = \oint_l A \cdot dl$ - поверхня $S$ спирається на контур $l$.

### *Контрольні запитання*

1. Що таке векторне поле?
2. Які існують типи векторних полів?
3. Яке координатне завдання поля?
4. Що таке дивергенція векторного поля?
5. Що таке ротор векторного поля?
6. Які інтегральні характеристики поля?
7. Що таке оператор Лапласа?

## 1.3 Основні рівняння електромагнітного поля. Загальний зміст рівнянь Максвела. Інтегральна форма рівнянь Максвела. Рівняння Максвела – узагальнене формулювання експериментальних законів. Закон збереження зарядів

Електромагнітне поле характеризується чотирма векторами:

$\vec{E}(x,y,z,t)$ - вектор напруженості електромагнітного поля;

$\vec{B}(x,y,z,t)$ - вектор магнітної індукції;

$\vec{D}(x,y,z,t)$ - вектор електричного зсуву;

$\vec{H}(x,y,z,t)$ - вектор напруженості магнітного поля.

Розмірності цих векторів:

$$\left[\vec{E}\right]=\frac{вольт}{метр}=B/M;\quad \left[\vec{D}\right]=\frac{кулон}{метр^2}=Кл/м^2;\quad \left[\vec{B}\right]=тесла=T;\quad \left[\vec{H}\right]=\frac{ампер}{метр}=A/м.$$

Джерела електромагнітного поля характеризуються:

- вектором щільності електричного струму $\vec{v}$;
- щільністю електричного заряду $\rho$.

Розмірність цих величин:

$$\left[\vec{v}\right]=\frac{ампер}{метр^2}=A/м^2;\quad [\rho]=\frac{кулон}{метр^3}=Кл/м^3.$$

<u>Рівняння Максвела мають наступний вигляд:</u>

$$1.\ rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ 2.\ rot\,\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{v};\ 3.\ div\,\vec{D}=\rho;\ 4.\ div\,\vec{B}=0.$$

Рівняння Максвела формують у найбільш загальному компактному вигляді закони електромагнітного поля. Вони виражають у найбільш загальному вигляді структуру електромагнітного поля, установлюють зв'язок між електромагнітним полем і його джерелами – струмами і зарядами.

Рівняння Максвела установлюють експерементально.

Узагальнений вигляд рівнянь дозволяють установити часткові закономірності.

Наведені вище рівняння Максвела є диференційними рівняннями у часткових похідних. Їх можна сформувати в інтегральній формі і установити прямий зв'язок рівнянь Максвела з тими експериментальними законами, узагальненням яких вони є.

*Перше рівняння Максвела формується так:*

$$1.\ \oint_l \vec{E}_l\,dl=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}_n\,ds,$$

де $l$ - фіксований уявлюваний замкнутий контур;

$S$ - довільна поверхня, що спирається на цей контур.

Циркуляція вектора напруженості електричного поля по нерухомому контуру дорівнює похідній у часі зі зворотним знаком від потоку магнітної індукції через поверхню, що спирається на цей контур.

*Друге рівняння Максвела має вигляд:*

$$2.\quad \oint_l \vec{H}_l dl = I + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}_n\, ds\,,$$

де $I$ - струм провідності;

$\frac{d}{dt}\int_S \vec{D}_n\, ds$ - струм зсуву;

$l$ - фіксований контур;

$S$ - довільна поверхня, яка опирається на цей контур.

*Третє рівняння Максвела:*

$$3.\quad \oint_S \vec{D}_n ds = q\,,$$

де $q$ - електричний заряд.

Потік вектора електричного зсуву через замкнуту поверхню дорівнює заряду, укладеному усередині цієї поверхні.

*Четверте рівняння Максвела:*

$$4.\quad \oint_S \vec{B}_n\, ds = 0\,.$$

Потік вектора магнітної індукції черех замкнуту поверхню дорівнює нулю. Інакше вектор магнітної індукції не має джерел, тобто у природі немає магнітних зарядів, аналогічних електричним.

Перше рівняння є узагальненням закону електромагнітної індукції, відкритого Фарадеєм у 1831 році. Цей закон говорить: при зміні потоку магнітної індукції через поверхню, обмежену замкнутим проводом, в останньому виникає струм індукції, напрямок якого визначається правилом Лєнца, тобто індукований струм має такий напрямок, що створюване їм магнітне поле прагне компенсувати зміни цього потоку:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}\,,$$

де $\varepsilon$ - електрорухома сила індукції, яка виникає у проводі;

$\Phi$ - потік магнітної індукції.

Узагальнення складається з установлення рівностей: $\varepsilon = \oint_l \vec{E_l} dl$; $\Phi = \int_S \vec{B_n} ds$,

причому замість проводу може бути будь-який уявлюваний контур $l$.

**Друге рівняння Максвела** є узагальненням закону повного струму, який у свою чергу є узагальненням експерементального закону взаємодії двох паралельних струмів, відкритого Ампером у 1820 році після виявленого Ерстедом у тому ж 1820 році дії струму на магнітну стрільцю.

Закон Ампера для сили $F$ взаємодія двох паралельних струмів $I$ і $I_1$ формується так:

$$F = \frac{\mu_a I \cdot I_1}{2\pi r},$$

де $r$ - відстань між проводами;

$\mu_a$ - магнітна проникність середовища.

Якщо струми однаково спрямовані, має місце притягання, а якщо протилежно – має місце відштовхування.

Тут струм $I$ створює магнітне поле $H = \frac{I}{2\pi r}$, векторні лінії якого представляють собою концентричні окружності з центром у точці, де проходить струм. Проведемо у тій же площині довільний замкнутий контур $l$ і знайдемо: $\oint_l \vec{H_l} dl = \oint_l H \cos\left(l^0, \vec{H}\right) dl = \int_0^{2\pi} H_r d\varphi = I$.

Для багатьох паралельних струмів: $M = \oint_l H_l dl = \sum_l I_l = I$.

Це - закон повного струму: магніторушійна сила $M$ у замкнутому контурі, що охоплює сумарний струм $I$, дорівнює цьому струму. Подальше узагальнення зробив Максвел. Він ввів в закон повного струму новий струм – струм зсуву $\frac{d}{dt}\oint_S \vec{D_n} dS$. У результаті магніторушійна сила у замкнутому контурі створюється сумарним струмом - струмом провідності і струмом зсуву. Введення струму зсуву є найбільш суттєвим узагальненням домаксвельської теорії електромагнетизму.

***Третє рівняння*** є узагальненням закону Кулона для сили $F$ взаємодії двох зарядів, відкритого Кулоном у 1785 році:

$$F = \frac{q \cdot q_1}{4\pi\varepsilon_a r^2},$$

де $r$ - відстань між зарядами;

$\varepsilon_a$ - діелектрична проникність середовища.

Якщо заряди однакового знака, відбувається відштовхування, а якщо різного – притягання. Заряд $q$ створює електричне поле:

$$\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_a r^2},$$

векторні лінії якого – радіуси, вихідні з заряду $q$.

Проведемо довільну замкнуту поверхню, що охоплює заряд $q$ і, з огляду на те, що $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2}$, знайдемо: $\oint_S D_n ds = q$.

Цей результат узагальнюється на випадок, коли усередині замкнутої поверхні – безліч зарядів: $\oint_S D_n ds = \sum_i q_i = q$, і у результаті ми отримаємо узагальнення закону Кулона у третє рівняння Максвела.

**Четверте рівняння Максвела** є узагальненням відомого експериментального факту, що скільк б раз ми не половинили би магніт, все одно виходить магніт з двома різними полюсами, які не можуть існувати окремо. У той же час закон взаємодії двох полюсів цілком аналогічний закону Кулона для взаємодії електричних зарядів. На основі цих двох експериментальних фактів і приходимо до висновку, що потік вектора індукції через замкнуту поверхню повинен дорівнювати нулю, тобто векторні лінії $\vec{B}$ завжди замкнуті.

Закон збереження зарядів – наслідок рівнянь Максвела.

Якщо у другому рівнянні Максвела контур $l$ стягти у точку, контурний інтеграл буде дорівнювати нулю, поверхня $s$ - замкнутій: $I + \frac{d}{dt}\oint_s D_n ds = 0$.

З третього рівняння маємо: $I + \frac{dt}{dq} = 0$.

Це співвідношення формує закон збереження заряду: зміну зарядів усередені об'єму, обмеженого замкнутою поверхнею, дорівнює струму, що протікає через цю поверхню.

Якщо у першому рівнянні Максвела стягти контур у точку, то контурний інтеграл буде дорівнювати нулю, поверхня $s$ - замкнутій, і ми отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\oint_s B_n ds = 0, \text{ тобто } \oint_s B_n ds = const,$$

причому згідно четвертому рівнянню Максвела, $const = 0$.

Таким чином, з другого і третього рівнянь Максвела витікає закон збереження зарядів, а з першого і другого – закон збереження зарядів свого роду «магнітних зарядів», тобто завжди діє сумарний «сумарний заряд», який дорівнює нулю. Інакше кажучи, магнітних «монополей» – зарядів, аналогічних електричним, у природі не існує.

### *Контрольні запитання*

1. Які вектори характеризують електромагнітне поле?
2. У чому сутність рівнянь Максвела?
3. У чому сутність першого рівняння Максвела в інтегральній формі?
4. У чому сутність другого рівняння Максвела в інтегральній формі?
5. У чому сутність третього рівняння Максвела в інтегральній формі?
6. У чому сутність четвертого рівняння Максвела в інтегральній формі?

## 1.4 Основні рівняння електромагнітного поля. Перетворення інтегральних рівнянь Максвела у диференціальні. Рівняння неперервності. Щільність сили Лоренца. Матеріальні рівняння

Переваги диференційної форми рівнянь Максвела:

а) диференційні рівняння – це найбільш адекватний опис поля, яке визначає фізичні величини у кжній точці простору;

б) вони найбільш зручні для рішення різноманітних часткових задач.

Перетворемо рівняння Максвела з інтегральної у диференційну форму, використовуючи формули Стокса і теорему Остроградського-Гауса.

Перетворемо перше і друге рівняння Максвела за формулою Стоса. Згідно цій формулі маємо: $\oint\limits_s E_l dl = \int\limits_s rot_n \vec{E} ds$.

Вважаємо поверхню $s$ плоскою, обмеженою контуром $l$, настільки малою, що $\int\limits_s rot_n \vec{E}\, ds = -\frac{d}{dt}\int\limits_s \vec{B_n} ds$, запишемо $rot_n \vec{E}\, ds = -\frac{\partial \vec{B_n}}{\partial t}\Delta s$.

Тут повна похідна за часом замінена частковою похідною, так як $rot_n \vec{E}$ і $B_n$ - це середнє значення цих величин на дуже малій площадці $\Delta s \to 0$, тобто це майже їх значення у точці. Отже, $rot_n \vec{E}$ і $B_n$ тут є вже функціями не тільки часу, а й координат.

Так як рівність повинна виконуватись для довільно орієнтованої площадки $\Delta \vec{s} = \vec{n}\Delta s$, то це можливо лише у випадку рівності $rot\, \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$.

Зміст цього рівняння – вихор вектора напруженості електричного поля у якій-небудь точці дорівнює швидкості зміни вектора магнітної індукції зі зворотним знаком у тій же точці або будь-які зміни вектора напруженості електричного поля створює зміни магнітного поля.

Друге рівняння Максвела аналогічно представляється у вигляді:

$$\int_s rot_n \vec{H} ds = I + \frac{d}{dt}\int_s D_n ds .$$

Уводимо у розгляд щільність струму $\vec{v}$ за формулою:

$$I = \int_s J_n ds .$$

Для довільної малої площадки $\Delta s \to 0$ одержуємо:

$$rot_n \vec{H} \Delta s = \vec{J}_n \Delta s + \frac{\partial D_n}{\partial t} \Delta s .$$

Рівність ця виконується, коли

$$rot \vec{H} \Delta s = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Зміст цього рівняння: вихор вектора напруженості магнітного поля у якій-небудь точці дорівнює сумі щільностей струмів – струму провідності і струму зсуву або будь-яка зміна вектора напруженості магнітного поля створює зміну струмів провідності і зсуву, тобто зміни електричного поля.

У третьому і четвертому рівняннях Максвела робимо перетворення за теоремою Остроградського-Гауса.

Щільність зарядів:

$$q = \int_V \rho dV ,$$

і замість третього і четвертого рівнянь Максвела маємо:

$$\int_V div \vec{D} dV = \int_V \rho dV ,$$

$$\int_V div \vec{B} dV = 0 .$$

Для будь-якого $\Delta v \to 0$ можна записати:

$$div\,\vec{D}\,\Delta v = \rho \Delta v\,,$$

$$div\,\vec{B}\,\Delta v = 0\,.$$

Звідси одержуємо другу пару рівнянь Максвела:

$$div\,\vec{D} = \rho\,,$$

$$div\,\vec{B} = 0\,,$$

тобто розхідність вектора електричного зсуву у якій-небудь точці дорівнює щільності електричних зарядів у тій же точці, а розхідність вектора магнітної індукції буде дорівнювати нулю.

Таким чином, система рівнянь Максвела такова:

$$1.\ \ rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};\ \ 2.\ \ rot\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};\ \ 3.\ \ div\,\vec{D} = \rho;\ \ 4.\ \ div\,\vec{B} = 0\,.$$

Ця система рівнянь є найбільш фундаментальною системою рівнянь сучасної фізики.

З рівнянь Максвела як слідство витікає закон збереження зарядів. Цей закон у диференційній формі представляється слідуючим чином.

Так як $divrot\,\vec{H} \equiv 0$, з другого рівняння Максвела знаходимо:
$div\,\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} div\,\vec{D} = 0$.

Враховуючи третє рівняння Максвела, одержуємо: $div\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Це – рівняння неперервності, воно є формулюванням закону збереження зарядів у диференційній формі.

З закону Кулона випливає, що на заряд $\Delta q$ діє сила $\Delta \vec{F}_E = \Delta q\,\vec{E}$,
а з закону Ампера для сили, яка діє з боку магнітного поля з вектором магнітної індукції $\vec{B}$ на струм $I$ елемента довжини $\Delta l$, маємо: $\Delta \vec{F}_M = I \cdot \Delta \vec{l} \times \vec{B}$.

Як бачимо, напрямок дії цієї сили установлюється правилом правої руки – напрямок струму за великим пальцем, напрямок магнітного поля ( вектор $\vec{B}$) за іншими пальцями, тоді напрямок сили $\Delta \vec{F}_M$ буде перепендикулярно долоні.

Струм $I$ визначається як $I = \frac{\Delta q}{dt}$ і $\Delta \vec{F}_M = \Delta q \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} \times \vec{B} = \Delta \vec{q} \vec{V} \times \vec{B}$.

Сумарна сила, яка діє на заряд $\Delta q$, що рухається, дорівнює:

$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_Э + \Delta F_M = \Delta q \left( \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \right)$.

Звідси одержуємо вираз для сили Лоренца, яка діє на одиницю об'єму ( щільність сили Лоренца ):

$$\frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{f}_л = \rho \left( \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \right).$$

Найпростішою за своїм електричним і магнітним властивостям середою є вільний простір – вакуум.

Для цієї середи має місце наступний зв'язок між векторними полями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \qquad (1.14)$$

де $\varepsilon_0$ - діелектрична проникність вакууму;

$\mu_0$ - магнівтна проникність вакууму,

$\mu_0$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{Ф}{м}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Г}{м}.$$

Ще один параметр вакууму:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с} \text{ -}$$

швидкість поширення електромагнітних волн у вільному просторі. Параметри $\varepsilon_0$, $\mu_0$ - це усі характеристики вільного простору як середовища.

Співвідношення (1.14) називаються **матеріальними рівняннями**.

Матеріальні рівняння – це співвідношення між самими векторами поля. Цим вони відрізняються від рівнянь Максвела, які є диференційними рівняннями.

Для реальних середовищ матеріальні рівняння мають вигляд

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E},$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a}\vec{B}, \qquad (1.15)$$

де $\varepsilon_a$ - абсолютна діелектрична проникність;

$\mu_a$ - абсолютна магнітна проникність,

$$\varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_0,$$

$$\mu_a = \mu \cdot \mu_0,$$

$\varepsilon$, $\mu$ - відносні діелектричні і магнітні проникності.

У рівняннях Максвела щільність струму $\vec{J}$ може бути джерелом поля, тобто причиною виникнення поля, але він може і породжуватися полем – є слідством.

В останньому випадку має місце ще одне матеріальне рівняння:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \qquad (1.16)$$

$\sigma$ - провідність середовищ, $[\sigma] = \frac{Сіменс}{метр} = См/м$.

Це співвідношення є формулюванням закону Ома у диференційній формі. Параметри $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ знаходяться експериментально.

Матеріальні рівняння (1.15) зв'язують між собою “силові” вектори $\vec{E}$ і $\vec{B}$, і “кількісні” вектори поля $\vec{D}$ і $\vec{H}$.

Вектори $\vec{E}$ і $\vec{B}$ називають силовими тому, що вони, як видно з виразу для сили Лоренца: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right)$, визначають собою силу, яка діє на заряд в електромагнітному поле. Вектори $\vec{D}$ і $\vec{H}$ називають кількісними тому, що вони згідно другому і третьому рівнянням Максвела в інтегральній формі, визначаються безпосередно величинами зарядів і струмів, тобто величинами, які характеризують джерела електромагнітного поля.

Розглянемо класифікацію середовищ за їхніми електричними властивостями.

**Ізотропні** – це середовища, у яких електричні властивості однакові за усіма напрямками.

У декартовій системі координат про довільно спрямованому векторі $\vec{E}$ має місце рівності: $D_x = \varepsilon_0 \varepsilon E_x$; $D_y = \varepsilon_0 \varepsilon E_y$; $D_z = \varepsilon_0 \varepsilon D_z$.

Отже, для будь-якого напрямку вектора $\vec{E}$: $\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 E$ і аналогічно $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$,

тобто в ізотропному середовищі вектор $\vec{D}$ колінеарен $\vec{E}$, вектор $\vec{B}$ - $\vec{H}$, вектор $\vec{J}$ - $\vec{E}$.

**Анізотропні** – це середовища, у яких електричні властивості різноманітні у різних напрямках. В цьому випадку:

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_x = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1,$$

$$D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_x = D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2, \qquad (1.17)$$

$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_x = D_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_3 E_3.$$

Рокладаючи вектор $\vec{E}$ за координатними осями, одержимо: $D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_x$; $D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_y$; $D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_2$.

Оскільки $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, вектор $\vec{D} = D_x \cdot x^0 + D_y \cdot y^0 + D_z \cdot z^0 = \varepsilon_0 \left( x^0 \varepsilon_1 E_x + y^0 \varepsilon_2 E_y + z^0 \varepsilon_3 E_z \right)$ вже не буде колінеарен вектору $\vec{E}$.

Для довільної прямокутної системи координат співвідношення між векторами $\vec{E}$ і $\vec{D}$ для анізотронних середовищ більш складно:

$$D_x = \varepsilon_0 \left( \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \right),$$

$$D_y = \varepsilon_0 \left( \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \right), \qquad (1.18)$$

$$D_z = \varepsilon_0 \left( \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z \right).$$

Дев'ятка чисел $\varepsilon_{ij}$ називається **тензором**. Тензор записується у вигляді матриці:

$$\left[ \varepsilon_{ij} \right] = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zy} \varepsilon_{zz} \end{vmatrix},$$

де $i, j = x, y, z$.

Тензор – це узагальнення скаляра і вектора. **Скаляр** – величина, яка характеризується одним числом, і для його опису не потрібні індекси. **Вектор** – характеризується трьома числами (координатними складовими), і для його опису потрібен один індекс ($x$ або $y$, або $z$). **Тензор** – величина, яка характеризується дев'яткою чисел, для його опису потрібно два індекса ($xx$ або $yy$, або $zz$ і т.д.).

Відповідно скаляр – тензор нульового рангу, векто – тензор першого рангу, а тензор діелектричної проникності – тензор другого рангу.

Тензорами можуть бути і магнітна проникність $\mu$, і провідність $\sigma$. Приклад анізотропного середовища – іоносфера.

Середовище, у якому електричні параметри не залежать від координат, є **однорідним**.

При $\sigma = const$, $\mu = const$, $\varepsilon = const$ середовище – ізотропне.

В однорідному ізотропному середовищі усі складові тензорів електричних параметрів не залежать від координат.

Середовище, у якому електричні пареметри залежать від координат (або хоча б один параметр залежить від однієї координати) – це **неоднорідне середовище**.

Прикдад неоднорідного середовища – атмосфера.

Середовище, у якому електричні параметри не залежать від величин векторів електромагнітного поля – це **лінійні середовища**.

Середовище, у якому електричні параметри залежать від величин векторів електромагнітного поля – це **нелінійні середовища**.

Приклад нелінійного середовища – **феромагнетик**, у якого магнітна проникність залежить від величин вектора напруженості магнітного поля.

Середовища з провідністю мають ще один похідний параметр – **час релаксації**.

*З трьох співвідношень* : $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $\sigma = const$; $div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, $\varepsilon = const$ знаходимо: $\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Рішення цього рівняння:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\rho_0$ - початкова щільність зарядів;

$\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}$ - **час лелаксації**; воно показує, як швидко розтікається скупчення зарядів щільністю $\rho_0$ у середовищі.

Так, для міді $\sigma \sim 10^7 \frac{см}{м}$; $\varepsilon = 1$; $\tau = 10^{-18} c$;

- морського середовища $\sigma = 4\frac{см}{м}$; $\varepsilon = 80$; $\tau = 2\cdot 10^{-10} c$;
- скла $\sigma = 10^{-13}\frac{см}{м}$; $\varepsilon = 2$; $\tau = 20c$;
- кварцу $\sigma = 10^{-17}\frac{см}{м}$; $\varepsilon = 2$; $\tau = 2\cdot 10^{6} c \simeq 25$ доби.

Як бачимо, у металі скупчення зарядів майже миттєво розтікається за поверхнею провідника.

Крім того, чим краще ізолятор, тим більше час релаксації.

Рівняння Максвела для лінійних середовищ.У цьому випадку самі рівняння теж лінійні. Тому залежність від часу тут зручно представляти **тимчасовим множником** $e^{j\omega t}$, так що будь-яка величина, яка характеризує електромагнітне поле, представляється у вигляді добутку функції координат і тимчасового множника. При цьому функція координат може бути і комплексною, так що характеристики електромагнітного поля можуть бути і векторними, і комплексними одночасно.

Наприклад,

$$\vec{E}(x,y,z) = x^0\left|E_x(x,y,z)\right|e^{j\varphi_1(x,y,z)} + y^0\left|E_x(x,y,z)\right|e^{j\varphi_2(x,y,z)} + +z^0\left|E_x(x,y,z)\right|e^{j\varphi_3(x,y,z)},$$

де $\left|E_x(x,y,z)\right|$ - модуль;

$\varphi_1(x,y,z)$ - аргумент або фаза комплексного числа $E_x(x,y,z)$ і так далі.

Так як $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ - тобто похідна у часі є оператором множення на $j\omega$, **рівняння Максвела** мають вигляд:

1. $rot\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$; 2. $rot\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$; 3. $div\,\vec{D} = \rho$; 4. $div\,\vec{B} = 0$.

Думаючи у другому рівнянні $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon_a\vec{E}$, можна представити його у вигляді $rot\,\vec{H} = j\omega\left(\varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}$.

Порівнюючи це рівняння з рівнянням у випадку діелектрика $(\sigma = 0)$, тобто з з рівнянням

$$rot\,\vec{H} = j\omega\varepsilon_a\vec{E}, \tag{1.19}$$

бачимо, що доцільно ввести у розгляд комплексну діелектричну проникність $\varepsilon_a^{/} = \varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}$ і написати

$$rot\,\vec{H} = j\omega\varepsilon_a^{/}\vec{E}. \tag{1.20}$$

Порівнюючи (1.19) і (1.20), бачимо, що при $\sigma \neq 0$ і $\sigma = 0$ формально ці рівняння не відрізняються один від одного.

Таким чином, величини діелектричної і магнітної проникності можуть бути комплексними.

У радіотехніці $\varepsilon$, $\sigma$ і $\mu$ багатьох середовищ майже не залежать від частоти. Така залежність виникає у мікроволновій і оптичній частинах радіоволн, де $\varepsilon$, $\sigma$ і $\mu$ залежать від частоти, тобто має місце явище **дісперсії**.

### *Контрольні запитання*

1. Який зміст першого рівняння Максвела у диференційній формі?
2. Який зміст другого рівняння Максвела у диференційній формі?
3. Який зміст третього і четвертого рівнянь Максвела у диференційній формі.
4. Який зміст матеріальних рівнянь Максвела.
5. Що таке ізотропне середовище?
6. Що таке тензор?

## 1.5 Електростатичне поле. Електромагнітне поле постійних струмів. Граничні умови. Електростатика. Магнітостатика

У рівняннях Максвела немає безпосередньо параметрів середовища. Отже, вони справедливі для середовищ з будь-якими параметрами, в тому ж числі на границі розділу різних середовищ.

Якщо середовище однорідне, то на уявлюваній поверхні усередині середовища як нормальні, так і тангенціальні складові векторів поля будуть змінюватись неперервно при переході через цю поверхню.

Якщо ж ця гранична поверхня між двома середовищами з різними електромагнітними параметрами, неперервністі може і не бути.

Перехідний шар має якусь товщину, а у ній – перехідний шар, усередині якого електричні параметри змінюються неперервно від їх значень в одному середовищі до їх значень у другому середовищі. Тому усередині шару, як і поза ним, справедливі рівняння Максвела.

Різку границю, або граничні умови, одержимо шляхом граничного переходу.

Нехай вісь $ox$ перпендикулярна перехідному шару (рис. 1.8) і крива на рисунку – це зміна електричного параметра при переході з середовища $a$ в середовище $b$:

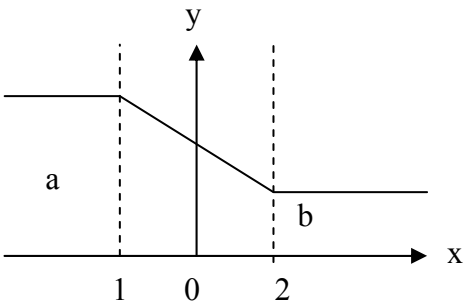



Рисунок 1.8 – Перехідний шар

Представимо третє рівняння Максвела у вигляді $\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho$ і проінтегруємо обидві частини від точки *1* до точки *2*. Тоді одержимо $D_{x2}-D_{x1}+\int_1^2\frac{\partial D_y}{\partial y}dx+\int_1^2\frac{\partial D_z}{\partial z}dx-\int_1^2\rho dx$; вважаючи перехідний шар достатньо тонким - $\Delta x\to 0$, знайдемо

$D_{x2}-D_{x1}+\frac{\partial D_y}{\partial y}\Delta x+\frac{\partial D_z}{\partial y}\Delta x=\rho\Delta x$, або $D_{x2}-D_{x1}=\rho_s$,

де $\rho_s$ - поверхнева щільність зарядів, яка дорівнює

$$\rho_s=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \rho\to\infty}}\rho\Delta x,\ [\rho_s]=Кл/м^2. \tag{1.21}$$

Бачимо, що рівняння Максвела допускають існування поверхневих зарядів з щільністю (1.21).

Направивши нормаль $n$ до граничної площини за віссю $x$, одержимо **граничну умову** для вектора $\vec{D}$ у вигляді:

$$D_{n2}=D_{n1}, \tag{1.22}$$

якщо зарядів на граничній поверхні немає.

Таким чином, нормальна складова вектора електричного зсуву $D_n$ при переході через поверхню розділу двох середовищ терпить стрибок, який дорівнює $\rho_s$ - поверхневої щільності зарядів, або змінюється неперервно, якщо поверхневих зарядів немає.

Аналогічно – граничні умови для вектора $\vec{B}$:

$$\vec{B}_{n2}=\vec{B}_{n1}. \tag{1.23}$$

Нормальна складова вектора магнітної індукції при переході через границю розділу двох середовищ змінюється неперервно.

Представимо друге рівняння Максвела у вигляді трьох скалярних рівнянь:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}.$$

Проінтегруємо останні два рівняння в межах від точки *1* до точки *2* і, вважаючи $\Delta x \to 0$, одержимо:

$$\vec{H}_{x2} - \vec{H}_{x1} = -\vec{J}_{ys},$$
$$\vec{H}_{y2} - \vec{H}_{y1} = -\vec{J}_{ys}, \qquad (1.24)$$

де $\vec{J}_s = y^0 J_{ys} + z^0 J_{zs}$ - вектор поверхневої щільності струмів, обумовленої рівністю:

$$J_{ys} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ j_y \to \infty}} \vec{J}_y \cdot \Delta x,$$

$$J_{zs} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ j_z \to \infty}} \vec{J}z \, \Delta x, \qquad (1.25)$$

$$\left| \vec{J}_s \right| = \frac{A}{м}.$$

Бачимо, що рівняння Максвела допускають існування поверхневих струмів і щільність їх визначається формулами (1.25).

Направивши нормаль $n$ до граничної поверхні за віссю $ox$, з граничної умови (1.26) одержимо:

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{J}_s\,, \tag{1.26}$$

якщо є поверхневі струми і $\vec{n}=\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0$ або, узявши вектор $\vec{\tau}$ дотичний до поверхні розділу:

$$H_{\tau 2}\simeq H_{\tau 1}\,, \tag{1.27}$$

якщо на граничній поверхні струмів немає.

Тангенціальна складова вектора напруженості магнітного поля при переході через поверхню розділу двох середовищ терпить стрибок, який дорівнює поверхневій щільності струмів, або змінюється неперервно, якщо поверхневих струмів немає.

Аналогічно утворюється гранична умова для вектора $\vec{E}$:

$$E_{\tau 2}=E_{\tau 1}\,. \tag{1.28}$$

Тангенціальна складова вектора напруженості електричного поля при переході через поверхню розділу двох середовищ змінюється неперервно.

Усередині ідеального провідника $(\sigma\to\infty)$, як свідчить зі співвідношень $\frac{1}{\sigma}=\vec{E}=0\to rot\,\vec{E}=-j\omega\mu_0\vec{H}\to rot\,\vec{H}=\vec{J}=0$ поле дорівнює нулю.

Так як відповідні складові поля при переході через поверхню ідеального провідника терпить стрибок, то повинні з'явитися поверхневі заряди і струми, так що $\rho_s\neq 0$ і $J_s=0$, причому:

$$\begin{gathered} D_{n2}=D_{n1}=\rho_s\,, \\ \vec{n}\times\vec{H}=\vec{J}_s\,. \end{gathered} \tag{1.29}$$

В цьому випадку тангенціальна складова електричного поля і нормальна складова магнітного поля дорівнюють нулю.

Згідно граничній умові (1.22) можемо написати $\varepsilon_2\cdot E_{n2}=\varepsilon_1 E_{n1}$.

З обліком граничної умови (1.28) $\frac{1}{\varepsilon_1}\cdot\frac{E_{\tau 1}}{E_{n1}}=\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{E_{\tau 2}}{E_{n2}}$.

Позначаючи $\frac{E_{\tau 1}}{E_{n1}}=tg\alpha_1$, $\frac{E_{\tau 2}}{E_{n2}}=tg\alpha_2$,

де $\alpha_1$ і $\alpha_2$ - кути між лінією, перпендикулярній до границі розділу і векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ у першій і других середовищах (рис. 1.7), одержимо:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (1.30)$$

Аналогічно, використовуючи граничні умови (1.23) і (1.27), знаходимо:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \qquad (1.31)$$

де $\alpha_1$ і $\alpha_2$ - кути між лінією, перпендикулярної до границі розділу і векторами $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ у першій і другій середовищах.

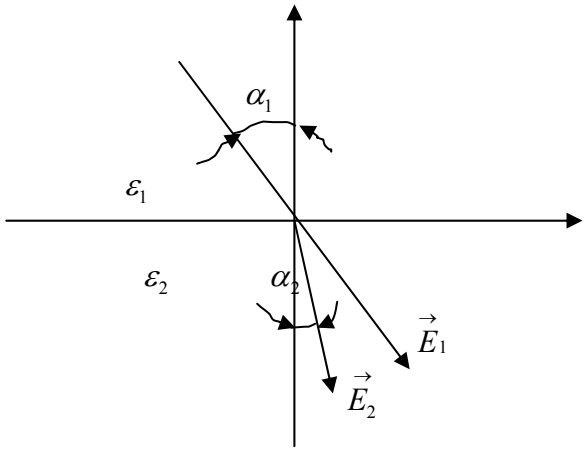



Рисунок 1.7 - Межа розділу

Статистичні поля – це поля, які не залежать від часу. Вони описуються рівняннями Максвела, у яких всі похідні у часі дорівнюють нулю, тобто $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. У цьому випадку рівняння Максвела розбиваються на дві незалежні пари рівнянь:

1. $rot\,\vec{E} = 0$ і 3. $div\,\vec{D} = \rho$; 2. $rot\,\vec{H} = \vec{J}$ і 4. $div\,\vec{B} = 0$.

У першій парі – величини, які характеризують тільки електричне поле, у другій – тільки магнітне поле. Це означає, що при $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ електрика і манетизм – явища різні.

Перша пара рівнянь – це основа електростатики, друга пара – основа магнітостатики.

Електростатика визначається рівняннями 1. $rot\vec{E}=0$, 3. $div\vec{D}=\rho$ і $\vec{D}=\varepsilon_0\cdot\varepsilon\vec{E}$ – матеріальне рівняння ізотропних середовищ.

Рівняння 1 затверджує, що електростатичне поле безвихрове. Так як

$$rotgrad\varphi=0\text{, то } \vec{E}=-grad\varphi=-\nabla\varphi, \tag{1.32}$$

$$\nabla\varphi=x^0\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y^0\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z^0\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Скалярна функція $\varphi$ - це **електростатичний потенціал**, або просто **потенціал**. $[\varphi]=\frac{джоуль}{кулон}=Дж/Кл$.

Представлення електростатичного поля формулою (1.32) означає, що це поле потенціальне. Знак “-“ – це результат угоди, він представлений для того, щоб $\varphi$ мав зміст потенціальної енергії. Точніше, щоб робота зовнішніх сил проти сил поля за переміщенням заряду з точки $M_1$ у точку $M_2$ дорівнювала збільшенню потенціальної енергії цього заряду:

$$-\int_{M_1}^{M_2}\vec{E}dl=\int_{M_1}^{M_2}grad\varphi dl=\int_{M_1}^{M_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=\varphi(M_2)-\varphi(M_1). \tag{1.33}$$

З (1.33) випливає, що зазначена робота не залежить від шляху переміщення, а залежить від початкового і кінцевого положення заряду.

Так як потенціал у нескінченності при $M=\infty$ дорівнює нулю, то

$$\varphi(M)=-\int_{M\infty}^{M}\vec{E}dl=\int_{M}^{M\infty}\vec{E}dl. \tag{1.33, a}$$

Думаючи, що $\varepsilon=const$ і $E=-grad\varphi$, з третього рівняння Лапласа одержимо:

$$divgrad\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}\text{, або } \nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}, \tag{1.34}$$

де $\nabla^2=\Delta$ - оператор Лапласа.

Співвідношення (1.34) – це рівняння Пуасона.

Там, де немає зарядів, де $\rho=0$, рівняння Пуасона перетворюється у рівняння Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = 0\,. \qquad (1.35)$$

Таким чином, система рівнянь Максвела для електростатичного поля звелася до одного скалярного рівнянню Пуасона або Лапласа для потенціала $\varphi$. Знайшовши потенціал, обчислюють напруженість поля $E$.

Знайдемо рішення рівнянь (1.34) і (1.35).

Перший випадок – точечний заряд величини $q$. Такий заряд створює поля, векторні лінії $\vec{E}$ якого направлені за радіусом. Поле $\vec{E}$ визначається з третього рівняння Максвела в інтегральній формі

$\int\limits_s \vec{E}d\vec{s} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}$.

Проводиться сфера радіусом $r$ з центром у точці розташування заряду. Векторні лінії $\vec{E}$ нормальні до цієї сфери:

$4\pi r^2\vec{E} = \dfrac{q}{\varepsilon_0\varepsilon}$, і $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_a}\cdot\vec{r}_0$.

Це поле знайдемо з третього рівняння Максвела і задовольняє йому. Потенціал $\varphi$ знаходимо за формулою (1.33, а): $\varphi = \int\limits_r^\infty \vec{E}d\vec{r} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_a r}$.

Так як $\vec{E} = -grad\varphi$, знайдений вектор $\vec{E}$ задовольняють і першому рівнянню Максвела.

Для системи точечних зарядів $q_1$, $q_2$, … , $q_n$.

Для сумарного потенціалу у точці з координатами $x$, $y$, $z$ (точці спостереження) $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_a r_i}$, де $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$.

Для випадку неперервного розподілу зарядів:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho}{r}dv\,, \qquad (1.36)$$

де $r_i = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$.

Рівняння 4 затверджує, що вектор $\vec{B}$ соленоїдален і так як $divrot\,\vec{A} = 0$, можна покласти $\vec{B} = rot\,\vec{A}$.

З рівнянння 2 і матеріального рівняння $\vec{B} = \mu_a\vec{H}$ маємо :

$$rotrot\,\vec{A} = \mu_a\vec{J}\,. \qquad (1.37)$$

З тотожності $rotrot\,\vec{A} = graddiv\,\vec{A} - \left(x^0\nabla^0 A_x + y^0\nabla^0 A_y + z^0\nabla^0 A_z\right)$, думаючи, що $div\,\vec{A} = 0$, знайдемо вектор $\vec{A}$ і представимо (1.37) трьома скалярними рівняннями Пуасона:

$$\Delta^2 A_x = -\mu_a J_x,$$

$$\Delta^2 A_y = -\mu_a J_y,$$

$$\Delta^2 A_z = -\mu_a J_z,$$

або одним векторним рівнянням Пуасона: $\Delta^2 A_z = -\mu_a \vec{J}$.

Аналогічно рішення $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\rho}{r}dV$ рівняння Пуасона для електричного потенціалу $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$, рішення для вектора $\vec{A}$: $\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int_V \frac{1}{\vec{r}}dV$, де $r = \sqrt{\left(x-x_1\right)^2 + \left(y-y_1\right)^2 + \left(z-z_1\right)^2}$, а $div\,\vec{A} = \frac{\mu_a}{4\pi}\int_V div\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)dV = \frac{\mu_a}{4\pi}\oint_s \frac{J_n \cdot ds}{r}$.

Тут замкнута поверхня $s$ захоплює усі струми, поверхневий інтеграл дорівнює нулю і $div\,\vec{A} = 0$.

Рівняння Максвела 2. $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, 4. $\nabla \cdot B = 0$ і

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \tag{1}$$

описує закономірності магнітостатики. Поле постійних магнитів є частковим випадком магнітостатики при $\vec{J} = 0$.

Рівняння (2) затверджує, що вектор $\vec{B}$ соленоїдален і оскільки $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$, то можна покласти:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{2}$$

Вважаючи, що $\mu_a = const$, з рівнянь (2) і (1) одержуємо:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_a \vec{J}. \tag{3}$$

Скористаємося тотожністю:
$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\cdot\nabla\cdot A-\left(x^0\nabla^2A_x+y^0\nabla^2A_y+z^0\nabla^2A_z\right)$ і думаючи, що $\nabla\cdot\vec{A}=0$, представимо (3) трьома скалярними рівняннями:

$$\nabla^2A_x=-\mu_aJ_x,$$

$$\nabla^2A_y=-\mu_aJ_y,$$

$$\nabla^2A_z=-\mu_aJ_z,$$

або одним векторним рівнянням Пуасона: $\Delta^2\vec{A}=-\mu_a\vec{J}$.

Аналогічно рішення $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V\frac{\rho}{r}dV$ рівняння Пуасона для для електричного потенціалу $\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_a}$, можна написати:

$$A_x=\frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V\frac{J_x}{r}dV,$$

$$A_y=\frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V\frac{J_y}{r}dV,$$

$$A_z=\frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V\frac{J_z}{r}dV$$

і відповідно $\vec{A}=\frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}}{\vec{r}}dV$.

Так як $\nabla\cdot\nabla\times\vec{H}=\nabla\cdot\vec{J}=0$, то струми у магнітостатиці завжди замкнуті – це лінійні замкнуті струми.

Векторний потенціал (рис.1.8) знаходиться при умові $\vec{J}\cdot\Delta V=\frac{I}{\Delta s}\Delta\vec{\ell}\,\Delta s=I\Delta\vec{\ell}$:

$$\vec{A}=\frac{\mu_aI}{4\pi}\int\limits_\ell\frac{d\vec{\ell}}{r},\ r=\sqrt{(x-\varsigma)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}.$$

Магнітне поле дорівнює: $\vec{H}=\frac{1}{\mu_a}\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\ell\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3}$. Це – закон Біо-Савара.

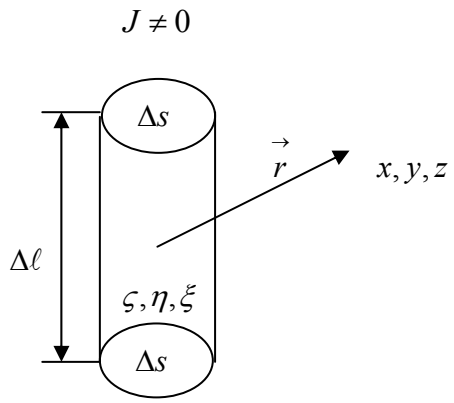



Рисунок 1.8 – Магнітний диполь

Розглянемо довгий соленоїд. За його витками протікає струм $I$. Відповідно на одиницю довжини струм $I_1 = NI$, де $N$ - число витків на одиницю довжини. Поза соленоїдом поле $\vec{H} = 0$ згідно 2 рівнянню Максвела. Усередині соленоїда поле:

$$\vec{H} = \vec{I}_1 . \tag{4}$$

Ампер знайшов залізний сердечник, що усередені соленоїда збільшує вектор магнітної індукції $\vec{B}$. За його припущенням це збільшення – результат того, що на поверхні сердечника з'являється додатковий струм – поверхневий струм намагнічування $\vec{I}_{s\ нам}$, який створюється молекулярними круговими струмами. Кожна молекула представляє собою круговий струм з дипольними моментами $\vec{m}_{мол}$ і згідно з тим, що $\vec{m} = \vec{I}_{знам1} \cdot s$, де $s$ - площа сердечника, $I_{знам1}$ - поверхневий струм намагнічування на одиницю довжини сердечника.

Можна увести у розгляд вектор магнітного моменту одиниці об'єму сердечника:

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_{мол}}{s} = \vec{I}_{знам1} . \tag{5}$$

Зіставляючи (4) і (5), бачимо, що $\vec{I}_{snam1}$ зв'язан з $\vec{M}$ також, як струм $\vec{I}$ - з $\vec{H}$ і аналогічно співвідношенню $\oint_{\ell} \vec{H}_{\ell}\, d\ell = \vec{I}$. Можна записати $\oint_{\ell} \vec{M}_{\ell}\, d\ell = \vec{I}_{snam1}$ .

Висновок: існують не тільки поверхневі струми намагнічування, а й об'ємні струми намагнічування, щільність яких $\vec{J}_{нам}$ визначається формулою Стокса: $\int_{s} \nabla \times \vec{M} d\vec{s} = \int_{s} \vec{J}_{нам} d\vec{s}$ і $\vec{J}_{нам} = \nabla \times \vec{M}$ .

Таким чином, згідно другому рівнянню Максвела усередині речовини має місце рівність $\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_{нам} = \vec{J} + \nabla \times \vec{M}$, звідки $\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$ .

Вектор $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ і є напруженість магнітного поля у речовині. З цього вираження $\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{M} \right)$.

У більшості речовин $\vec{M}$ прямо пропорційне $\vec{H}$, тобто $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, де $\chi_m$ - магнітна сприйнятливість. Так що $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu \cdot H$ і відносна магнітна проникність дорівнює $\mu = 1 + \chi_m$. При $\chi_m \succ 0$ речовина – парамагнетик, при $\chi_m \succ\succ 1$ речовина – феромагнетик.

Згідно 4 рівнянню Максвела $\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \cdot \nabla \left( \vec{H} + \vec{M} \right) = 0$ і можемо написати $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$ .

Величину $-\nabla \cdot \vec{M}$ формально можна тлумачити як об'ємну щільність “магнітних зарядів”: $\rho_m = -\nabla \cdot \vec{M}$ .

Тоді рівняння Максвела приймають вигляд: $\nabla \times \vec{H} = 0$, $\nabla \cdot \vec{M} = \rho_m$ за аналогією з рівнянням Максвела для електростатики: $\nabla \times \vec{H} = 0$, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$.

Значить у магнітостатиці постійних магнітів за аналогією з електростатикою можна увести поняття магнітного потенціалу $\varphi_M$ за формулою $\vec{H} = -\nabla \cdot \varphi_M$, який задовольняє рівнянню Пуасона $\nabla^2 \cdot \varphi_m = -\rho_m$, рішенням якого є $\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m}{r} \cdot dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \vec{M}}{\vec{r}} dV$ .

В частковості поле магнітного диполя на великих відстанях можна розглядати як поле двох “магнітних зарядів” з потенціалом $\varphi_m = -\frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}$, $m$ - момент диполя.

### *Контрольні запитання*

1. Які граничні умови для вектора $D$?
2. Які граничні умови для вектора $B$?
3. Які граничні умови для вектора $E$?
4. Яке рівняння Максвела для електростатики?
5. Що таке електростатичний потенціал?
6. Яке рівняння Максвела для магнітостатики?
7. Що таке магнітний потенціал?

## 1.6 Енергетичні співвідношення у електромагнітному полі. Енергія електростатичного поля. Енергія зарядів у просторі. Енергія електростатичного поля в анізотропному середовищі. Еліпсоїд енергії

Розглянемо $n$ зарядів $q_i$, розподілених на $n$ провідниках (рис. 1.9).

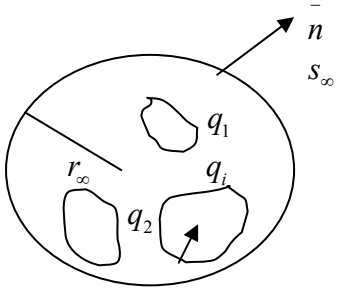



Рисунок 1.9 – Розподіл зарядів

Енергія електростатичного поля в об'ємі $V$ дорівнює $W_э = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV$. При $\vec{E} = -grad\varphi$ маємо $W_э = -\frac{1}{2}\int_V \vec{D}grad\varphi dV$. Так як $\vec{D}\,grad\varphi = div\left(\varphi\vec{D}\right) - \varphi div\vec{D}$ і поза провідником $div\vec{D} = 0$ маємо $W_э = -\frac{1}{2}\int_V div\left(\varphi\vec{D}\right)dV$.

Згідно теоремі Остроградського-Гауса $W_э = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\oint_{s_i} D_{n_i}ds + \frac{1}{2}\oint_{s_\infty}\varphi_\infty D_n ds$,

де $s_\infty$ - поверхня сфери нескінченного радіуса, що включає усі провідники.

Інтеграл за поверхнею сфери $s_\infty$ повинен прагнути до нуля зі збільшенням радіуса сфери $r_\infty$, оскільки $D_n \sim \frac{1}{r^2}$; $\varphi \sim \frac{1}{r}$; $s_\infty \sim r_\infty^2$.

З обліком $\oint\limits_s D_{n_i} ds = q_i$, знаходимо

$$W_э = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i q_i \ . \qquad (1.38)$$

Використовуючи коефіцієнти електростатичної індукції $C_{iк}^{/}$, обумовлені формулою $q_i = \sum_{i=1}^{n} C_{iк}^{/} \cdot \varphi_к$, $i = 1, 2, 3, ..., n$, енергію електростатичного поля представляємо у вигляді $W_э = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{к=1}^{n} C_{iк}^{/} \varphi_i \cdot \varphi_к$. Ці коефіцієнти, як випливає з рівності $\frac{\partial^2 W_э}{\partial \varphi_к \partial \varphi_i} = \frac{\partial^2 W_э}{\partial \varphi_i \partial \varphi_к} = \frac{1}{2} C_{iк}^{/}$, симетричні, тобто $C_{iк}^{/} = C_{кi}^{/}$.

Коефіцієнти електростатичної індукції $C_{iк}^{/}$ відрізняються від коефіцієнтів взаємної ємності, які визначаються як $q_i = \sum_{\substack{к=i \\ к \neq i}}^{n} C_{iк}\left(\varphi_i - \varphi_к\right) + C_{ii} \cdot \varphi_i$.

Коефіцієнти взаємної ємності є узагальненням поняття звичайної ємності конденсатора $C = C_{12} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$.

Зв'язок між $C_{iк}^{/}$ і $C_{iк}$: $C_{ii}^{/} = \sum_{к=1}^{n} C_{iк}$; $C_{iк}^{/} = -C_{iк}^{/} \prec 0$,

$C_{ii}$ - власна ємність;

$C_{ii}^{/}$ - коефіцієнти ємності.

Формула (1.38) застосована і до системи точкових зарядів. При цьому $\varphi_i$ - це потенціал у точці заряду $q_i$, створений всіма іншими зарядами. Так, для енергії взаємозв'язку двох зарядів:

$$W_Э = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right). \qquad (1.39)$$

Користуючись формулою (1.39), розраховуємо енергію взаємозв'язку диполя (системи двох зарядів) із зовнішнім полем (рис. 1.10).

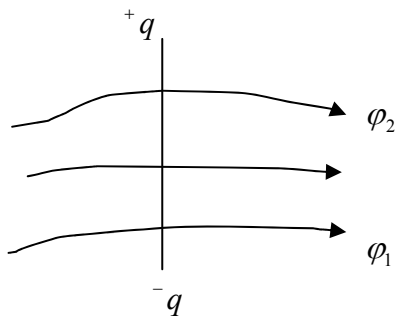



Рисунок 1.10 – Взаємодія із зовнішнім полем

Тут:

$$W_Э = q\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = q\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}\Delta\ell = \vec{p}\,grad\varphi = -\vec{p}\cdot\vec{E}. \qquad (1.40)$$

Знак “-“ означає, що енергія взаємозв'язку, або потенціальна енергія диполя найбільша, коли мрмент диполя $\vec{p}$ протилежно спрямований вектору $\vec{E}$ і навпаки, коли $\vec{p}$ збігається за напрямком з $\vec{E}$, потенціальна енергія диполя в електростатичному полі найменша.

При неперервному розподілі зарядів з щільністю $\rho$ енергії дорівнює $W_Э = \frac{1}{2}\int\limits_v \rho\varphi dv$.

**Електричний диполь -** це система з двох рівних за величиною і протилежних за знаком електричних зарядів $+q$ і $-q$.

У сферичній системі координат $\rho$, $\partial$, $\varphi$ потенціал цієї (координату $\varphi$ не змішувати з потенціалом $\varphi$): $\varphi = \frac{q\vec{\ell}}{4\pi\varepsilon_a r^2} = \frac{\rho\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a r^2}$, де $p = q\ell$ - електричний момент диполя.

Спрямованість поля дорівнює $\vec{E} = -grad\varphi = -\left(r^0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\theta^0}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$, так як в силу осьової симетрії похідна за координатою $\varphi$ дорівнює нулю.

У результаті одержуємо $\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_a r^2}\left(2r^0\cos\theta + \theta^0\sin\theta\right)$, і складові вектори напруженості поля в сферичній системі координат дорівнює $E_r = \frac{2\rho}{4\pi\varepsilon_a r^2}\cos\theta$; $E_\theta = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_a r^2}\sin\theta$.

Наряду з диполем можливі більш складні системи зарядів мультиполі (рис. 1.11).

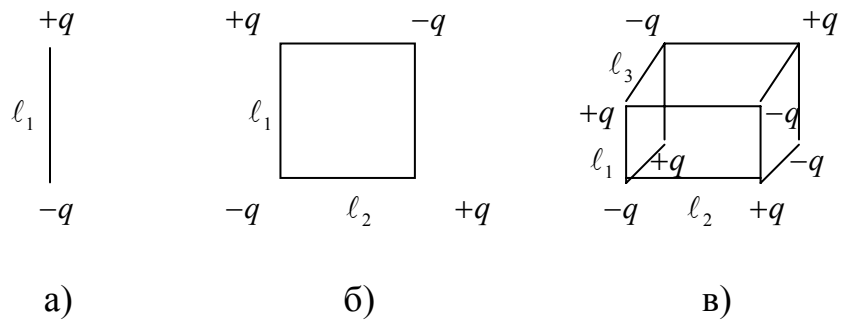



Рисунок 1.11– Системи зарядів: а-диполь; б-квадруполь; в-октополь

Кожний мультиполь володіє своїм моментом: диполь - дипольним; квадруполь - квадрупольним; октополь - октопольним (рис. 6.4).

Для диполя: $\ell_1 \prec\prec r$;

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q\ell_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a r^2} = \frac{p_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_a r^2};$$

$$p_1 = q\ell_1.$$

Для квадруполя: $\ell_2 \prec\prec r$;

$$\varphi_2 = \frac{2p_1\ell_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{4\pi\varepsilon_a r^2 \cdot r_1^2} = \frac{2p_1\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}{4\pi\varepsilon_a r^3};$$

$$p_2 = 2p_1\cdot\ell_2.$$

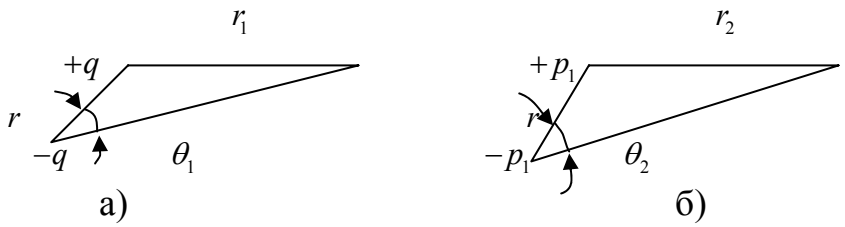



Рисунок 1.12 – Дипольні моменти: а – диполь; б – квадруполь

Виявляється, як помітив Фарадей, при поляризації діелектрика між обкладками конденсатора ємність зростає, так як $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$; напруженість поля при цьому

$$\vec{E} = \vec{E}_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}. \qquad (1.41)$$

При внесенні діелектрика різниця потенціалів зменшується через збільшення ємності і відповідно зменшується напруженість поля. Ефект пояснюється тим, що під впливом електричного поля молекули

діелектрика поляризуються, і на обкладках конденсатора утворюються поверхневий заряд, протилежний початковому заряду, і

$$\vec{E} = \vec{E}_n = \frac{\rho_s^{/}}{\varepsilon_0},$$

де $\rho_s^{/} \prec \rho_s$.

Уведемо в розгляд дипольний момент одиниці об'єму $\vec{P}$, або так називаємий вектор поляризації $[P] = \left[\frac{q\ell}{V}\right] = Кл/м^3$.

Тоді можна запропонувати

$$\rho_s^{/} = \rho_s - \vec{P}_n,$$

де $\vec{P}_n$ - нормальна до обкладки конденсатора складова вектора поляризації.

Тоді з $E_n = \frac{\rho_s - \rho_n}{\varepsilon_0}$ знайдемо $\rho_s = \vec{D}_n = \varepsilon_0 \vec{E}_n + \vec{P}_n$.

У загальному можна записати, що усередині діелектрика $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Згідно третьому закону Максвела $div\vec{D} = \rho$, знаходимо $div\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho - div\vec{P}$.

На відміну від площини вільних зарядів $\rho$, величину $-div\vec{P}$ називають площиною зв'язаних або поляризаціонних зарядів, $\rho_{пол} = -div\vec{P}$.

Для ізотропного діелектрика вектор $\vec{P}$ пропорційний вектору $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \cdot \vec{E}, \tag{1.42}$$

де $\chi_e$ - електрична сприйнятливість.

Відповідно $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ і відносна діелектрична проникність

$$\varepsilon = 1 + \chi_e. \tag{1.43}$$

Тоді

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)\vec{E}. \tag{1.44}$$

Для анізотропного діелектрика електрична сприйнятливість є тензором і $\left[\varepsilon_{iy}\right]=\left[1+\chi_{eij}\right]$.

Згідно формулі $W_Э=-\vec{p}\cdot\vec{E}$ робота, витрачена полем на поляризацію діелектрика одиниці об'єму при створенні вектора поляризації $d\vec{P}$ дорівнює

$$dw_э=\vec{E}\,d\vec{P}, \tag{1.45}$$

причому для анізотропного середовища:

$$dP_x=\varepsilon_0\left(\chi_{exx}dE_x+\chi_{exy}dE_y+\chi_{exz}dE_z\right),$$

$$dP_y=\varepsilon_0\left(\chi_{eyx}dE_x+\chi_{eyy}dE_y+\chi_{eyz}dE_z\right),$$

$$dP_z=\varepsilon_0\left(\chi_{ezx}dE_x+\chi_{ezy}dE_y+\chi_{ezz}dE_z\right).$$

Вираз (1.45) представляє собою роботу, затрачувану на зміну складових поля від $E_x$, $E_y$, $E_z$ відповідно до $E_x+dE_x$, $E_y+dE_y$, $E_z+dE_z$.

Маємо: $dw_э=Ed\vec{P}=E_xdP_x+E_ydP_y+E_zdP_z$.

Енергія електростатичного поля в анізотропному середовищі в одиниці об'єму, враховуючи симетричність тензора діелектричної проникності, представляється у вигляді: $w_э=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}=\frac{1}{2}\left(E_xD_x+E_yD_y+E_zD_z\right)=w_э\left(E_x,E_y,E_z\right)$.

Рівняння

$$w_э=w_э\left(E_x,E_y,E_z\right)=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\varepsilon_{xx}E_x^2+\varepsilon_{xy}E_y^2+\varepsilon_{zz}E_z^2+2\varepsilon_{xy}E_x\cdot E_y+2\varepsilon_{xy}E_x\cdot E_z+2\varepsilon_{yz}E_yE_z\right)=const$$

представляє собою рівняння поверхні еліпса у просторі, координатами точок якого є складові вектора напруженості поля $E_x$, $E_y$, $E_z$ (рис. 1.13).

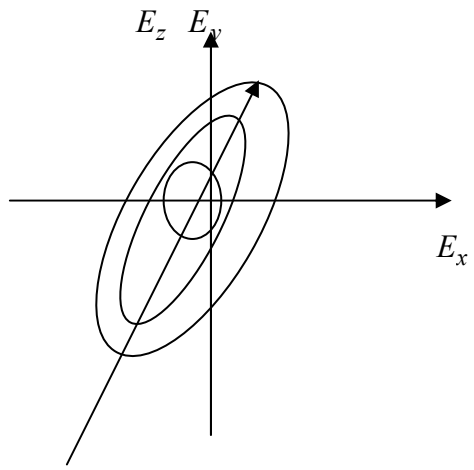



Рисунок 1.13 – Еліпсоїд Френеля

Цей еліпсоїд називається еліпсоїдом тензора діелектричної проникності або еліпсоїдом Френеля.

Найбільш простий вид рівняння еліпса приймає у прямокутній системі координат, осі якої співпадають з осями еліпсоїда:

$$\varepsilon_1 E_x^2 + \varepsilon_2 E_y^2 + \varepsilon_3 E_z^2 = const\,. \qquad (1.45)$$

Величини $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ - головні значення тензора діелектричної проникності, а напрямки осей – головні напрямки тензора діелектричної проникності.

### *Контрольні запитання*

1.Яка енергія електростатичного поля?
2. Який електричний момент диполя?
3. Яка напруженість поля диполя?
4. Який вектор поляризації.
5. Що таке електрична сприйнятливість?
6. Якак енергія електричного поля в анізотропному середовищі?
7. Що таке еліпсоїд енергії?

## 1.7 Енергія магнітостатичного поля. Енергія магнітного поля постійних струмів. Стаціонарне поле. Квазістаціонарне поле

Енергія магнітного поля дорівнює: $W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\,\vec{B}\,d\vec{V}$; з огляду на на те, що $\vec{B} = rot\,\vec{A}$, одержуємо $W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{H} rot\,\vec{A}\,d\vec{V}$.

Згідно тотожності $div\,\vec{A}\times\vec{H} = -\vec{A}\,rot\,\vec{H} + \vec{H}\,rot\,\vec{A}$, одержуємо $W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{A} rot\,\vec{H}\,dV + \frac{1}{2}\int_V div\left[\vec{A}\,\vec{H}\right]dV$.

У першому інтегралі – друге рівняння Максвела, у другому – теорема Остроградського-Гауса; відповідно $W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\,\vec{A}\,dV + \frac{1}{2}\int_s \left[\vec{A}\,\vec{H}\right]_n ds$.

Так як постійні струми замкнуті і $dV = \frac{d\ell}{\Delta s}$; $J\cdot\Delta s = I$, перший інтеграл перетвориться до вигляду $\int_V \vec{A}\,\vec{J}\,dV = \sum_{i=1}^{n} I_i \oint_{\ell_i} A_{\ell_i} d\ell_i$, де $n$ - число замкнутих струмів.

$\oint A_{\ell_i} d\ell_i = \int_{s_i} rot_n\,\vec{A}_i ds_i = \int_{s_i} B_{n_i}\cdot dS_i = \phi_i$, де $\phi_i$ - потік магнітної індукції через площу $s_i$ і-го контура струму.

Другий інтеграл береться за замкнутою поверхнею, що охоплює усі струми; при $s\to\infty$ цей інтеграл дорівнює нулю. У результаті маємо:

$$W_M = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\phi_i\,. \qquad (1.46)$$

Цей вираз аналогічний формулі для енергії системи дискретних зарядів $W_Э = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$.

Вираз (1.44) можна представити у другому вигляді, увівши у розгляд коефіцієнт взаємної індукції $L_{iк}$ за формулою $\phi_i = \sum_{к=1}^{n} L_{iк}\cdot I_к$.

Підставляючи цей вираз у (1.44), знаходимо $W_M = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{к=i}^{n} L_{iк} I_i\cdot I_к$.

Коефіцієнт взаємної індукції симетричні: $L_{iк} = L_{кi}$. В частковості для одного контуру $\phi = \phi_i = L_{ii} I_i = L\cdot I$ і $W_M = \frac{LI^2}{2}$.

**Стаціонарне поле -** поле, виникаюче у провіднику, за яким протікає постійний струм.

Рівняння Максвела для цього поля 1. $rot\vec{E}=0$; 2. $rot\vec{H}=\vec{J}$.

Матеріальне рівняння – закон Ома у диференційній формі: $\vec{J}=r\vec{E}$. Дані рівняння зводяться до законів Кірхгофа теорії ланцюгів. Так, друге рівняння Максвела дає $divrot\vec{H}=div\vec{J}=0$, звідки одразу виходить закон Кірхгофа $\sum_{i=1}^{n}I_i=0$, тобто сума струмів у вузлі ланцюга дорівнює нулю.

З першого рівняння Максвела випливає, що стаціонарне електричне поле потенціально, так як $\vec{E}=-grad\varphi$, $\oint_{\ell}E_{\ell}d\ell=0$; підставляючи під інтеграл $E_{\ell}d\ell=\frac{J}{\sigma}d\ell=\frac{J\Delta s d\ell}{\sigma\Delta s}=IdR$, де $dR=\frac{d\ell}{\sigma\Delta s}$ - опір проводу елемента довжини $d\ell$, одержимо: $IR=\oint_{\ell}E_{\ell}d\ell=0$.

Так як $R\neq 0$, то $I=0$, тобто постійний струм не може існувати за рахунок стаціонарного електричного поля. Значить, струм створюється сторонніми джерелами, напруженість поля яких $\vec{E}_{стор}$. Значить, у цьому випадку закон Ома включає і сторонні джерела, тобто $\vec{J}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right)$.

Проаналізувавши обидві частини цього співвідношення за замкнутим контуром, знайдемо $IR=\oint_{\ell}\left(E_{\ell}+E_{стор}\right)d\ell=\oint_{\ell}E_{стор}d\ell=\varepsilon_{стор}$.

Як результат звідси виходить другий закон Кірхгофа: $\sum_{i=1}^{n}I_iR_i=\varepsilon_{стор}$, тобто сума падінь на окремих ділянках замкнутого ланцюга дорівнює сторонніій е.р.с., діючої у цьому ланцюзі.

**Квазістаціонарне поле** виникає у провідниках з повільним струмом, що змінюється.

Ознака повільності: струм зсуву повинен бути значно менше струму провідності, $|J_{см}|\prec\prec|J|$.

Квазістаціонарне поле описується рівнянням Максвела: 1. $rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; 2. $rot\vec{H}=\vec{J}$, і двома матеріальними рівняннями $\vec{B}=\mu_a\vec{H}$ і $\vec{J}=\sigma\vec{E}$.

Усі ці рівняння зводяться до законів Кірхгофа для перемінних струмів. З другого рівняння Максвела випливає, що $div\vec{J}=0$, і перший закон Кірхгофа застосуємо тут без змін. Перше рівняння Максвела означає, що $\oint_{\ell}E_{\ell}d\ell=-\frac{d\Phi}{dt}=-L\frac{dI}{dt}$.

**Висновок**: існує три вида напруженностей електричного поля:

$\vec{E}$ - потенціальне; для нього $\oint_{\ell} E_{\ell} d\ell = \int_{2}^{1} E_{\ell} d\ell = -U$,

де $U$ - різниця потенціалів;

$\vec{E}_{інд}$ - вихрове або індукціонне; для нього $\oint_{\ell} E_{\ell} d\ell = -L\frac{dI}{dt}$;

$\vec{E}$ - стороннє; для нього $\oint_{\ell} \vec{E}_{стор}\, d\ell = \varepsilon_{стор}$.

За рахунок цих трьох полей узагальнень закон Ома у диференційній формі має вигляд: $\vec{J} = \sigma\left(E + E_{інд} + E_{стор}\right)$, звідки $\oint_{\ell} \frac{J}{\sigma} d\ell = R \cdot I = \oint_{\ell}\left(E_{\ell} + E_{інд_{\ell}} + E_{стор_{\ell}}\right) d\ell$, тобто $RI + U + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon_{стор}$, або $RI + \frac{1}{c}\int Idt + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon_{стор}$. Це є другий закон Кірхгофа для перемінних струмів.

### *Контрольні запитання*

1. Яка енергія магнітного поля постійних струмів?
2. Яке рівняння Максвела для стаціонарного поля?
3. Яке рівняння Максвела для квазістаціонарного поля?

## 1.8 Енергетичні співвідношення в електромагнітному полі. Вектор Умова. Теорема Пойнтинга. Баланс енергії . Вектор Пойнтинга. Сутність передачі енергії електромагнітним хвилям

Професор Одеського університету Умов к 1874 році установив ще один закон збереження енергії: якщо енергія зникає у якій-небудь області простору, то це відбувається через те, що вона витікає через границі цієї області.

Зформуємо цей закон математично.

Нехай в об'ємі $V$ є енергія $W$. Тоді за аналогією з законом збереження зарядів

$$\frac{dq}{dt} = -I = -\oint_{s} \vec{J}_n \cdot d\vec{s}$$

(1.47)

можемо записати (рис. 1.14):

$$\frac{dW}{dt} = -\oint Y_n ds. \qquad (1.48)$$

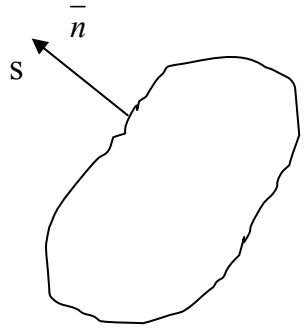



Рисунок 1.14 – Об'єм енергії

Тут $\vec{Y}$ - вектор, аналогічний вектору щільності струмів $\vec{J}$, $\vec{J} = \rho\vec{v}$, де $\rho$ - щільність і $v$ - швидкість зарядів. Відповідно $\vec{Y}$ визначається як $\vec{Y} = w \cdot \vec{v}$, де $w$ - щільність, а $\vec{v}$ - швидкість руху енергії. Вектор $\vec{Y}$ має значення щыльносты струму потоку енергії. Його розмірність $[Y] = \frac{джоуль}{метр^2} = \frac{Ватт}{метр^2} = Вт/м^2$.

Керуючись законом збереження енергії, знайдемо формулювання закону збереження енергії в електромагнітному полі. Спочатку узагальнимо співвідношення, враховуючи, що ененргія даного виду усередині об'єму може зменшуватися за рахунок її перетворення у теплову.

При цьому більш узагальнене формулювання закону збереження енергії:

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_s Y_n ds - Q, \tag{1.49}$$

де $Q$ - кількість теплоти.

Вважаємо, що в об'ємі $V$ існує електромагнітне поле і $E \neq 0$; $\vec{B} \neq 0$; $\vec{D} \neq 0$; $\vec{H} \neq 0$ і $\vec{J} \neq 0$.

Виразимо $Q$ через величини, які характеризують електромагнітне поле. При перетворенні електричної енергії у теплову за законом Джоуля-Ленца $Q = I^2 R$, де $Q$ - кількість теплоти, що виділяється в одиницю часу у провіднику з опором $R$ при проходженні через нього струму $I$. Тут $I = J \cdot s$, $R = \frac{\ell}{\sigma s}$ і $Q = \frac{J^2 \cdot s^2 \cdot \ell}{\sigma s} = \vec{J}^2 \frac{V}{\sigma}$; і $\frac{dQ}{dV} = \frac{J^2}{\sigma} = \sigma E^2 = \vec{J} \cdot \vec{E}$. Отже, $Q = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV$.

Підставивши під інтегралом вираз $\vec{J}$ з другого рівняння Максвела, одержимо $Q = \int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{J}\, dV = \int\limits_V \vec{E} \left( rot\, \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV$.

Скориставшись співвідношенням $div\, \vec{E} \times \vec{H} = \vec{H}\, rot\, \vec{E} - \vec{E}\, rot\, \vec{H}$, знаходимо $Q = \int\limits_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV = \int\limits_V \left( \vec{H}\, rot\, \vec{E} - div\, \vec{E} \times \vec{H} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV$.

Замість $rot\, \vec{E}$ - підставимо $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$Q = \int\limits_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV = -\int\limits_V \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + div\, \vec{E} \times \vec{H} \right) dV . \qquad (1.50)$$

Згідно теоремі Остроградського-Гауса $\int\limits_V div\, \vec{E} \times \vec{H}\, dV = \int\limits_s \left[ \vec{E}, \vec{H} \right]_n ds$, і у результаті

$$\int\limits_V \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV = -\oint\limits_s \left[ \vec{E}, \vec{H} \right]_n ds - Q . \qquad (1.51)$$

Отримане співвідношення (1.51) – це **теорема Пойнтинга**.

З'ясуємо фізичний зміст теореми. Покладемо $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$; $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ і врахуємо, що $\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right)$; $\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_a H^2}{2} \right)$.

Тоді замість (1.51) будемо мати:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = -\oint\limits_s \left[ \vec{E}, \vec{H} \right]_n ds - Q . \qquad (1.52)$$

Порівнюючи ці рівності , бачимо, що $\int\limits_V \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = W$, це енергія електромагнітного поля в об'ємі $V$; $\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}$ - це щільність енергії електромагнітного поля , причому:

- $\frac{\varepsilon_a E^2}{2} = w_э$ - щільність електричної енергії;

- $\frac{\mu_a H^2}{2}$ - щільність магнітної енергії;
- $\oint_s \left[\vec{E},\vec{H}\right]_n ds = \oint_s Y_n ds$ - потік електромагнітної енергії через поверхню $s$;
- $\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \vec{Y} \equiv \vec{S}$ - щільність потоку енергії. Вектор $\vec{S}$ називається вектором Пойнтинга (1884 рік).

Таким чином, теорема Пойнтинга – це формулювання закону збереження електромагнітної енергії.

Теорема Пойнтинга у диференційній формі згідно (1.51) і (1.52) має вигляд: $\frac{\partial w}{\partial t} = -div\,\vec{S} - \vec{J}\cdot\vec{E}$.

Джерела електромагнітного поля можуть бути розподілені у просторі, і напруженість поля визначається $\vec{E}_{стор}$. При цьому закон Ома представиться у вигляді: $\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right)$ і $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_{стор}$. З рівняння $Q = \int_V \vec{\nu}\,\vec{E}\,dV = \int_V \frac{\vec{\nu}^2}{\sigma} dV$ одержимо:

$$\int_V \vec{J}\,\vec{E}_{стор}\,dV = \frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right) dV + \oint_s \left[\vec{E},\vec{H}\right]_n ds + Q. \qquad (1.53)$$

Співвідношення (1.53) є формулюванням закону збереження енергії електромагнітного поля при наявності джерел. Бачимо, що енергія джерел витрачається на збільшення електрормагнітної енергії в об'ємі $V$, на потік енергії з об'єму і на джоулево тепло.

У диференційній формі (1.53) записується як: $\vec{J}\,\vec{E}_{стор} = \frac{\partial w}{\partial t} + div\,\vec{S} + \frac{J_2}{\sigma}$.

$\left[\vec{E},\vec{H}\right] = \vec{Y} \equiv \vec{S}$ - щільність потоку енергії або вектор Пойнтинга. При зміні електромагнітного поля за гармонічним законом, коли:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos wt \;\; \vec{E} = \vec{E}_0 \cos wt, \qquad (1.54)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos\left(wt + \varphi\right)$$

середнє значення вектора $\vec{s}$ за період $T$ дорівнює:
$\vec{S}_{сер} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\vec{E},\vec{H}\right]dt = \left[\vec{E}_0,\vec{H}_0\right]\frac{1}{T}\int_0^T \cos wt \cdot \cos\left(wt+\varphi\right)dt$
$= \left[\vec{E}_0,\vec{H}_0\right]\frac{1}{T}\int_0^T \left(\cos^2 wt \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2}\sin 2wt \cdot \sin\varphi\right)dt$, тобто

$$\vec{S}_{сер} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_0,\vec{H}_0\right]\cos\varphi . \qquad (1.55)$$

Енергія, яка запасається в одиниці об'єму електромагнітного поля, дорівнює сумі електричної $\frac{1}{2}\varepsilon_a \vec{E}^2$ і магнітної $\frac{1}{2}\mu_a \vec{H}^2$ енергій:

Загальна енергія на одиницю об'єму $= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_a \vec{E}^2 + \mu_a \vec{H}^2\right) \Big/ м^3$ .

Розглянемо поверхню $ds$ з потоком потужності $\vec{\Upsilon}$ на одиницю площі (рис. 1.15):

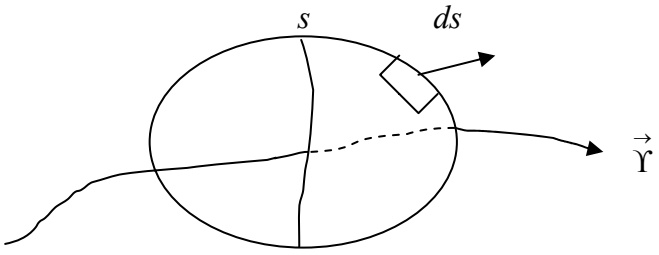



Рисунок 1.15 – Потік потужності

Повна потужності через поверхню $s$ дорівнює $\oint_s \vec{\Upsilon} ds$. Це приводить до витрати запасеної енергії, данної як витрати $= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\oint_V \left(\varepsilon_a E^2 + \mu_a H^2\right)dV\right]$

або $\oint_s \vec{\Upsilon} ds = -\oint_V \left(\varepsilon_a \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)dV$ .

У непровідному середовищі $rot\,\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$; $rot\,\vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Отже, $\oint_s \vec{\Upsilon} ds = \oint_V \left[\vec{H}\cdot\left(rot\,\vec{E}\right) - \vec{E}\left(rot\,\vec{H}\right)\right]dV$ .

В загальному випадку $div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\equiv\vec{H}\left(rot\,\vec{E}\right)-\vec{E}\left(rot\,\vec{H}\right)$, звідки $\oint\limits_{s}\vec{\Upsilon}ds=\oint\limits_{V}div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV=\oint\limits_{V}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)ds$, або $\vec{\Upsilon}=\vec{E}\times\vec{H}\,\frac{Ватт}{м^2}$.

Середнє значення вектора $\vec{\Upsilon}$: $\vec{\Upsilon}_{сер}=\frac{1}{2}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]Ватт/м^2$, де $\vec{H}^*$ - комплексно сполучена з $\vec{H}$. Це дає **реальну потужність**, розповсюджувану зі швидкістю $c$ (рис. 1.16):

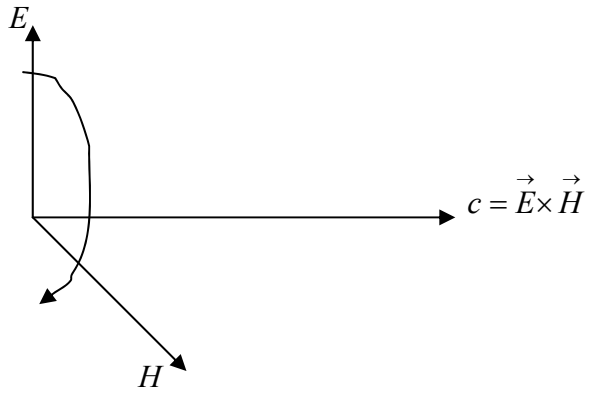



Рисунок 1.16 – Напрямок поширення хвилі

### *Контрольні запитання*

1. Що таке вектор Умова?
2. Який фізичний зміст теореми Пойнтинга?
3. Що таке вектор Пойнтинга?
4. У чому сутність передачі енергії електромагнітними хвилями?

# 2 ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

## 2.1 Постановка задачі. Хвильове рівняння. Загальні співвідношення між векторами $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$. Фазова і променева швидкості

За визначенням, плоскої електромагнітною хвилею є рішення системи рівнянь Максвела, у якому вектори електромагнітного поля залежать тільки від однієї координати прямокутної системи координат (наприклад, $z$).

Важливо, що при умовах рівняннях Максвела допускають строге рішення.

Вважаємо, що поле у часі змінюється за гармонічним законом, і залежність від часу будемо представляти множником $e^{jwt}$. Вважаємо середовище однорідною. При цьому у відсутності зарядів 3 и 4 рівняння Максвела є, як відразу витікає з тотожностей $divrot\,\vec{E}=0$, $divrot\,\vec{H}=0$ наслідком 1 і 2 рівнянь Максвела.

Значить формули для плоскої хвилі в однорідному середовищі можна отримати з 1 і 2 рівнянь Максвела.

<u>Хвильове рівняння:</u>

- Рівняння Максвела для перемінного електромагнітного поля у діелектриці:

- 1. $rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-jw\mu_a\vec{H}$; 2. $rot\,\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=jw\varepsilon_a\vec{E}$;

3. $div\,\vec{D}=0$; 4. $div\,\vec{B}=0$,

так як $\rho=0$ і $\sigma=0$ у діелектриці.

- Рівняння Максвела для перемінного електромагнітного поля у провіднику:

- 1. $rot\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-jw\mu_a\vec{H}$; 2. $rot\,\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\left(\sigma+jw\varepsilon_a\right)\vec{E}$;

- 3. $div\,\vec{D}=\rho$; 4. $div\,\vec{B}=0$.

- Рішення рівнянь Максвела для **діелектричного середовища** ми маємо $rot\,\vec{E}=-jw\mu_a\vec{H}$. Тут $rotrot\,\vec{E}=rot\left(-jw\mu_a\vec{H}\right)=-jw\mu_a rot\,\vec{H}$, або $rotrotE=w^2\mu\varepsilon_a\vec{E}$ і $div\left(div\,\vec{E}\right)=\Delta\vec{E}=rotrot\,\vec{E}$; тут $\Delta=\nabla^2$ - Лапласлан.

- Далі $rotrot\,\vec{E} = div\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\,\vec{E}$ і $div\,\vec{D} = div\varepsilon_a\,\vec{E} = 0$. Тоді $div(0) - \Delta\cdot\vec{E} = w^2\mu_a\varepsilon_a\,\vec{E}$, або $\Delta E = -w^2\mu_a\varepsilon_a\,\vec{E}$.

Тут $\frac{1}{\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}}$ має розмірність швидкості, з чого Максвел уклав, що світло – це електромагнітна хвиля, минаюча через вільний простір (вакуум) зі швидкістю $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ і $\Delta\cdot\vec{E} = -\frac{w^2}{c^2}\vec{E}$.

Для перемінного поля $\vec{E} = \vec{E}_0\cdot\sin wt$, або $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -w^2\,\vec{E}\sin wt = -w^2\,\vec{E}$.

Відповідно

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ \text{і аналогічно}\ &\Delta\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\}$$

Це хвильове рівняння для векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ перемінного електромагнітного поля.

Для **провідного середовища** без вільних електричних зарядів $(\rho = 0)$ має провідність $\sigma$. Тут $rot\,\vec{E} = -jw\mu_a\,\vec{H}$, або $rot\cdot rot\,\vec{E} = -j\mu_a rot\,\vec{H} = -jw\mu_a\left(\sigma + jw\varepsilon\right)\vec{E}$.

Так як $rot\cdot rot\,\vec{E} = div\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\cdot\vec{E}$ і $div\,\vec{D} = div\varepsilon_a\,\vec{E} = 0$, то $\Delta\vec{E} = -rotrot\,\vec{E} = \left(jw\mu_a\sigma - w^2\mu_a\varepsilon_a\right)\vec{E}$ або $\Delta\cdot\vec{E} = \gamma^2 = \left(j\beta\right)^2 = -\beta^2 = \left(jw\mu_a\sigma - w^2\mu_a\varepsilon_a\right)$, або $\beta = \sqrt{w^2\mu_a\varepsilon_a - jw\mu_a\sigma}$, де $\gamma$ - коефіцієнт поширення, $\beta$ - хвильовий коефіцієнт.

Відповідно за аналогією $\Delta\cdot\vec{H} = \gamma\,\vec{H}$. Для $\vec{E} = \vec{E}\cdot\sin wt$, $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = w\vec{E}_0\cos wt = jw\vec{E}$ і $w^2\mu_a\varepsilon_a = \frac{w^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Остаточно

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\vec{E} = \gamma^2\,\vec{E} = \sigma\mu_a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ &\Delta\vec{H} = \gamma^2\,\vec{E} = \sigma\mu_a\frac{\sigma\vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\}$$

Хвильове рівняння для $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у провідному середовищі.

Ми розглядаємо плоску хвилю, що поширюється за віссю $z$. У такій хвилі площини рівних фаз перпендикулярні вісі $z$. В загальному випадку напрямок поширення може не збігатися з віссю $z$ і площина рівних фаз

може бути нахилена до цієї осі. У цьому випадку рівняння площини дорівнює фазі замість $\kappa \cdot z = const$, буде $\vec{\kappa} \cdot \vec{n^0} \cdot \vec{r} = const$ (рис. 2.1).

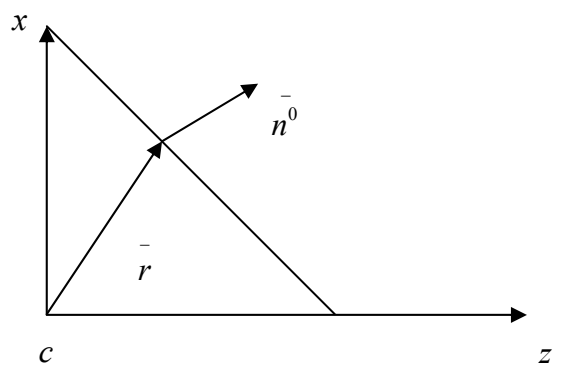



Рисунок 2.1 – Нормаль до площини рівної фази

Звідси випливає, що напрямок поширення плоскої хвилі можна характеризує або нормаллю $\vec{n^0}$ до площини рівної фази, або вектором $\kappa \cdot \bar{n}^0 = \bar{\kappa}$ - хвильовим вектором.

Розглянемо поширення плоских хвиль в анізотропному середовищі, де діелектрична проникність є тонзором.

Виходимо з рівнянь Максвела: 1. $rot\,\vec{E} = -jw\mu_a \vec{H}$; 2. $rot\,\vec{H} = jw\vec{D}$.

Рішення цих рівнянь будемо шукати у вигляді:

$$\vec{E} = E_m e^{j\left(wt - \kappa \bar{n}^0 \bar{r}\right)},$$
$$\vec{H} = H_m e^{j\left(wt - \kappa n^0 r\right)}, \tag{2.1}$$

де $E_m = const$ і $H_m = const$, а постійна поширення $\kappa$ - невідома величина.

Скористаємося векторним співвідношенням $rot\left(\vec{A}\varphi\right) = grad\varphi \times \vec{A}$, де $\vec{A}$ - постійний вектор, а $\varphi$ - скалярна функція; після підстановки (2.1) у рівняння Максвела, одержуємо:

$$\vec{H} = \frac{\kappa}{w\mu_a}\left[\vec{n^0}, \vec{E}\right], \tag{2.2}$$

$$D = -\frac{\kappa}{w}\left[\vec{n}^0, \vec{H}\right]. \qquad (2.3)$$

З цих співвідношень випливає, що вектор $\vec{H}$ перпендикулярний векторам $\vec{E}$ і $\vec{n}^0$, а вектор $\vec{D}$ перпендикулярний $\vec{H}$ і $\vec{n}^0$. Оскільки ж для анізотропного середовища вектор $\vec{D}$ не коленіарен вектору $\vec{E}$, то звідси випливає, що вектор $\vec{E}$ не перпендикулярний поширенню хвиль.

З іншого боку, вектор Пойнтинга $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ перпендикулярний векторам $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Звідси випливає, що швидкість поширення, тобто **фазова швидкість**, яка направлена за вектором $\bar{n}^0$, не збігається ***зі* швидкістю поширення** енергії, яка спрямована за вектором Пойнтинга. Отже, в анізотропних середовищах необхідно розрізняти дві швидкості – фазову швидкість $v_{сер}$ і швидкість $v_л$, за напрямком вектора Пойнтинга, яка називається променевою швидкістю.

Фазова швидкість визначається співвідношенням $\kappa = \frac{w}{v_{сер}} = \frac{w}{c} \cdot n$, де $n$ - показник переломлення.

Підставляючи цей вираз для $\kappa$ в (2.2) і (2.3), одержуємо:

$$\vec{H} = \frac{1}{v_{сер}\mu_a}\left[\bar{n}^0, \vec{E}\right], \qquad (2.4)$$

$$\vec{D} = -\frac{1}{v_{сер}}\left[\bar{n}^0, \vec{H}\right]. \qquad (2.5)$$

З огляду на ці співвідношення, знайдемо вираз для щільності енергій електричного і магнітного полів:

$$w_э = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = -\frac{1}{2v_{сер}}\vec{E}\left[\bar{n}^0, \vec{H}\right] = \frac{1}{2v_{сер}}\bar{n}^0\left[\vec{E}, \vec{H}\right],$$

$$w_э = \frac{1}{2}\vec{H}\,\vec{B} = \frac{\mu_a}{2}\frac{1}{v_{сер}\mu_a}\vec{H}\left[\bar{n}^0, \vec{E}\right] = \frac{\bar{n}^0}{2v_{сер}}\left[\vec{E}, \vec{H}\right].$$

Щільність енергії електромагнітного дорівнює $w = w_э + w_м = \frac{\bar{n}^0}{v_{сер}} \cdot \vec{S}$,

звідси $v_{сер} = \frac{\vec{S}}{w}\bar{n}^0 = \frac{S}{w}\bar{s}^0\,\bar{n}^0$, де $s^0$ - одиничний вектор у напрямку вектора Пойнтинга. Величина $\frac{S}{w} = v_л$ - променева швидкість хвиль.

Таким чином, одержуємо:

$$v_{сер} = v_л \cos\left(\bar{s}^0, \bar{n}^0\right) = v_л \cos\alpha, \tag{2.6}$$

де $\alpha$ - кут між векторами $\bar{s}^0$ і $\bar{n}^0$.

Зауважуємо, що $v_{сер} \prec v_л$.

Процес поширення плоскої хвилі в анізотропному середовищі характеризується 5 факторами $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, $\bar{n}^0$, $\bar{s}^0$, причому $\vec{H}$ перпендикулярний всім іншим векторам. Звідси випливає, що вектори $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\bar{n}^0$, $\bar{s}^0$ лежать в одній площині – компланарні. Орієнтація всіх векторів відносно один одного ясно з рис. 2.2.

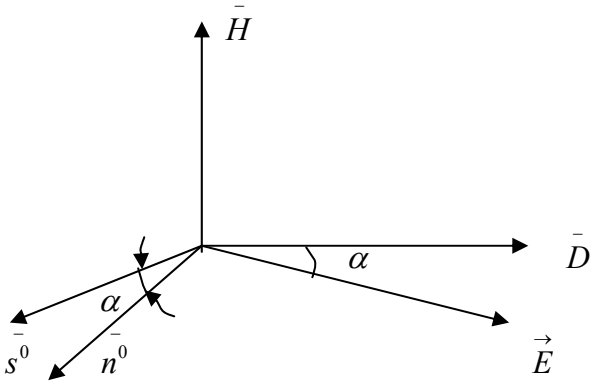



Рисунок 2.2 – Орієнтація векторів

Підставляючи вектор $\vec{H}$ із співвідношення (2.4) в (2.5), знаходимо:

$$\vec{D} = -\frac{1}{v^2_{сер} \cdot \mu_a}\left[\bar{n}^0\left[\bar{n}^0, \vec{E}\right]\right] = -\frac{1}{v^2_{сер} \cdot \mu_a}\left(\vec{E} - \bar{n}^0\,\vec{E}\right) = \frac{1}{v^2_{сер}\mu_a}\vec{E}_\perp, \tag{2.7}$$

де $\bar{n}^0\left(\bar{n}^0\,\bar{E}\right)$ - подовжня складова вектора $\vec{E}$ за напрямком $\bar{n}^0$;

$\vec{E}_{\perp}$ - поперечна складова до того ж напрямку.

Співвідношення:

$$\vec{D} = \frac{1}{v_{сер}{}^{2}\mu_a}\left(\vec{E} - \bar{n}^0\left(\bar{n}^0\,\vec{E}\right)\right) \qquad (2.8)$$

і є шукане векторне рівняння для визначення $v_{сер}$ в анізотропному середовищі.

Знайдемо аналогічне рівняння доя визначення $v_л$.

Так як $\overline{D} \perp \overline{n^0}$, то, як бачимо з рис. 2.2, поперечна складова вектора $\vec{E}$ до вектора $\overline{n^0}$ дорівнює подовжній складовій цього ж вектора до вектора $\vec{D}$, тобто $\vec{E}_{\perp} = \left(\vec{E}\frac{\vec{D}}{D}\right)\frac{\vec{D}}{D}$.

Підставивши цей вираз для $\vec{E}_{\perp}$ в (2.7), одержимо $\vec{D} = \frac{1}{v_{сер}^2\mu_a}\left(\vec{E}\frac{\vec{D}}{D}\right)\frac{\vec{D}}{D}$.

Помножимо скалярно обидві цього рівності на $\vec{D}$: $D^2 = \frac{1}{v_{сер}^2\mu_a}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)$, тобто $\frac{D^2}{\left(\vec{E}\,\vec{D}\right)} = \frac{1}{v_{сер}^2\mu_a}$, або $\frac{D^2\cos\alpha}{ED} = \frac{\cos^2\alpha}{v_{сер}^2\mu_a}$.

Враховуючи (2.6), одержуємо $\frac{D^2\cos\alpha}{E\cdot D} = \frac{1}{v_л^2\mu_a}$, або $\frac{\vec{D}\,\vec{E}}{E^2} = \frac{1}{v_л^2\mu_a}$. Так як поперечна складова вектора $\vec{D}$ до $\overline{s^0}$ дорівнює подовжній складовій цього вектора по $\vec{E}$, тобто $\vec{D}_{\perp} = \vec{D} - \overline{s^0}\left(\overline{s^0}\,\overline{D}\right) = \left(\vec{D}\frac{\overline{E}}{E}\right)\frac{\overline{E}}{E}$, знаходимо:

$$\vec{E} = v_л^2\mu_a\left(\overline{D} - \left(\overline{s^0}\,\overline{D}\right)\right). \qquad (2.9)$$

Це і є шукане векторне рівняння для визначення променевої швидкості $v_л$.

### *Контрольні запитання*

1. Яке рівняння Максвела для перемінного поля в діелектрику?
2. Яке рівняння Максвела для перемінного поля у провіднику?
3. Яке хвильове рівняння для діелектричного середовища?

4.Яке хвильове рівняння для провідного середовища?
5.Що таке фазова швидкість?
6.Що таке променева швидкість?

## 2.2 Змінне електромагнітне поле у діелектрику. Класифікація середовищ на надвисоких частотах. Плоска хвиля у діелектрику. Плоска хвиля в напівпровідниковому середовищі

Перше рівняння Максвела з обліком диференціального закона Ома має вигляд: $rot\,\vec{H} = \sigma\vec{E} + jw\varepsilon_a\vec{E} = jw\varepsilon_a\left(1+\frac{\sigma}{jw\varepsilon_a}\right)\vec{E}$. Величина:

$$\varepsilon_a\left(1+\frac{\sigma}{jw\varepsilon_a}\right) = \varepsilon_к \qquad (2.10)$$

це комплексна діелектрична проникність середовища.

Відношення $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}$ має цілком фізичний зміст. Перетворимо його, помноживши чисельник і знаменник на $\left|\vec{E}\right|$:

$$\frac{\sigma}{w\varepsilon_a} = \frac{\sigma\left|\vec{E}\right|}{w\varepsilon_a\left|\vec{E}\right|} = \frac{\left|\vec{J}_{пров}\right|}{\left|\vec{J}_{зсув}\right|}, \qquad (2.11)$$

тобто величина $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}$ визначає відношення величин щільностей струмів провідності і зсуву, і дозволяє оцінювати властивості середовища.

Так, при $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a} \prec\prec 1$, струми зсуву переважають над струмами провідності, середовище – діелектрик.

При $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a} \succ\succ 1$ струми провідності переважають над струмами зсуву, середовище – провідник.

При $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a} \simeq 1$ - середовище є напівпровідне.

В ряді випадків середовище ідеалізують. Якщо $\sigma = 0$, середовище вважають ідеальним діелектриком, а при $\sigma \to \infty$ середовище – ідеальний провідник.

Скористаємося прямокутною системою координат з ортами (рис. 2.3) $x^0$, $y^0$, $z^0$ з векторними співвідношеннями $x^0 = y^0 \times z^0$; $y^0 = z^0 \times x^0$.

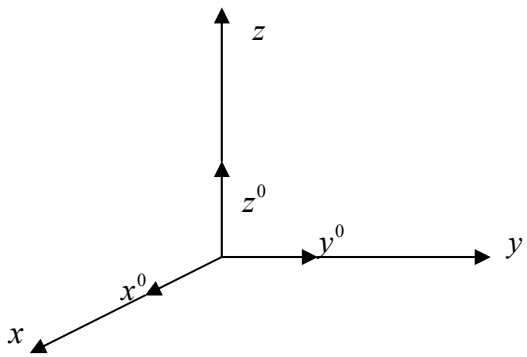



Рисунок 2.3 – Система координат з ортами

Рівняння Максвела для плоских хвиль:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -jw\mu_a \left( \vec{H} \times z^0 \right), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = jw\varepsilon_a \left( \vec{E} \times z^0 \right).$$

(2.13)

У цих рівняннях $H_z = 0$; $E_z = 0$ - хвиля поперечна; є $E_x$, $E_y$ і $H_x$, $H_y$.

Шукаємо рішення цих рівнянь у вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{j(wt - \kappa z)}, \tag{2.14}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \, e^{j(wt - \kappa z)}. \tag{2.15}$$

Підставивши їх в (2.12) і (2.13), одержуємо:

$$\vec{E} = \frac{w\mu_a}{\kappa} \left[ \vec{H} \times z^0 \right], \tag{2.16}$$

$$\vec{H} = -\frac{w\mu_a}{\kappa} \left[ \vec{E} \times z^0 \right]. \tag{2.17}$$

З цих векторних відношень випливає, що $\vec{E}$, $\vec{H}$, $z^0$ взаємно перпендикулярний (рис. 2.4) і зорієнтованих як $x^0$, $y^0$, $z^0$.

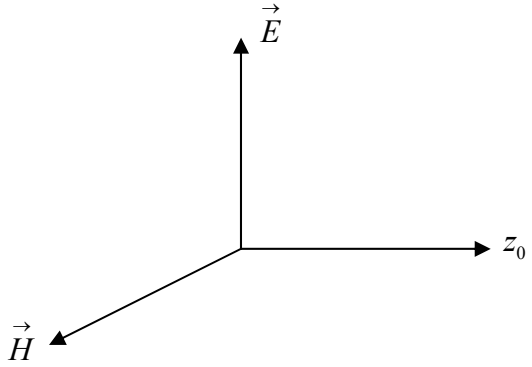



Рисунок 2.4 – Векторні співвідношення

Величина $\kappa$ - хвильове число або постійне поширення.

У (2.16) і (2.17), підставивши $\vec{H}$ з (2.17) у (2.16) і одержимо:

$$\vec{E} = -\frac{w\mu_a}{\kappa} \cdot \frac{w\varepsilon_a}{\kappa}\left[\vec{E} \times z^0\right],$$

$$\text{або } \left|\vec{1}\right| = \frac{w^2 \mu_a \varepsilon_a}{\kappa^2},$$

$$\text{тобто } \kappa = w\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}\ . \qquad (2.18)$$

З рівнянь площини рівних фаз: $w\left(t - \frac{\kappa}{w} z\right) = const$; продиференціцірував його за часом, одержуємо вираз для фазової швидкості хвилі у діелектрику: $\frac{dz}{dt} = v_{сер} = \frac{w}{\kappa} = \frac{w}{w\sqrt{\mu_a \cdot \varepsilon_a}} = \frac{w}{w\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$, де $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ - швидкість поширення у вільному просторі, $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ - показник переломлення середовища.

Отже, $\kappa = \frac{w}{v_{сер}} = \frac{2\pi}{\lambda}$, де $\lambda$ - довжина хвилі.

Підставивши (2.18) у (2.16) і (2.17), одержимо:

$$\vec{E} = Z_в\left[\vec{H}, z^0\right],$$

$$H = \frac{1}{z_в}\left[z^0, \vec{E}\right], \tag{2.19}$$

де $z_в = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ - має розмірність опору і називається хвильовим опором середовища.

Для вільного простору $z_в = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = z_0$.

Оскільки $z_в$ речовинно, вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ коливаються синфазно (рис. 2.5).

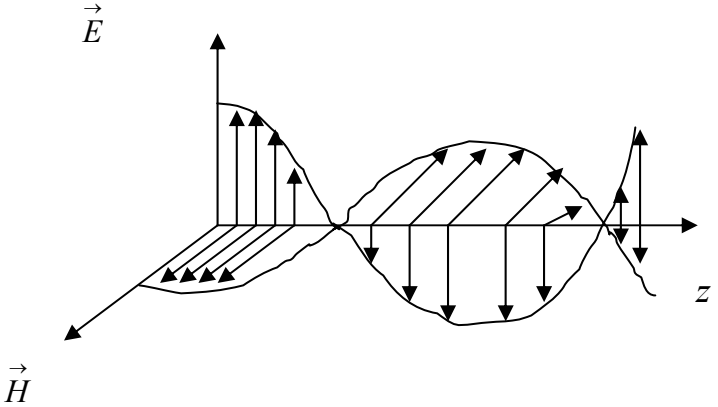



Рисунок 2.5 – Поширення електромагнтної хвилі

Щільність потоку енергії хвилі дорівнює $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] = E \cdot H \cdot z^0$. Середня щільність потоку енергії визначається як $\vec{S}_{сер} = \frac{1}{2} R_e \left[\vec{E}, \vec{H}\right] = \frac{E^2 m}{z z_в}$.

Щільність енергії дорівнює сумі щільностей енергій електричного і магнітного полей $w_э$ і $w_м$: $w_э = \frac{1}{2}\varepsilon_a E^2$, $w_м = \frac{1}{2}\mu_a H^2$, $w = w_э + w_м = \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a}{2} \cdot \frac{\mathrm{E}^2}{\mu_a / \varepsilon_a} = \varepsilon_a \mathrm{E}^2$, тобто енергії, які занесені в електричному і магнітному полях рівні за величиною.

Далі одержуємо: $\frac{\vec{S}}{w} = \frac{E^2 m}{2 Z_в} \Big/ \varepsilon_a E_m^2 = \frac{E_m^2}{\sqrt{\mu_a / \varepsilon_a \cdot \varepsilon_a E_m^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}} = v_ф$, тобто

$$\vec{S} = w \cdot v_ф \cdot z^0. \tag{2.20}$$

Отже, у випадку плоскої хвилі у діелектриці вектор щільності потоку енергії дорівнює вектору щільності електромагнітної енергії, помноженої на швидкість поширеня хвилі.

Прикладом напівпровідних середовищ є товща земної поверхні, морська вода, що володіють кінцевою провідністю, де $\sigma \neq 0$, $\varepsilon_a = const$; $\mu_a = const$.

Для таких середовищ зводиться комплексна діелектрична провідність $\varepsilon_к = \left(1 + \frac{\sigma}{jw\varepsilon_a}\right)$. Вона дозволяє звести рівняння електромагнітного поля до такого ж вигляду, як для діелектрика, замінивши $\varepsilon_a$ на $\varepsilon_к$: $rot\,\vec{H} = jw\varepsilon_к \vec{E}$, $rot\,\vec{E} = -jw\mu_a \vec{H}$. Рішення для цих рівнянь: $\vec{E}_x = \vec{E}_{x_1} \cdot e^{-jкz}$, $\vec{H}_y = \vec{H}_{y_1} \cdot e^{-jкz}$. Тут $к = w\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$. Замінивши $\varepsilon_a$ на $\varepsilon_к$.

Тоді

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{x_1} \cdot e^{-jw\sqrt{\varepsilon_к \mu_a} z} = \vec{E}_{x_1} \cdot e^{-\gamma z}, \tag{2.21}$$

$$\vec{H}_y = \vec{H}_{y_1} \cdot e^{-jw\sqrt{\varepsilon_к \mu_a} z} = \vec{H}_{y_1} \cdot e^{-\gamma z}, \tag{2.22}$$

де

$$\gamma = jw\sqrt{\varepsilon_к \mu_a}. \tag{2.23}$$

$\varepsilon_к$ - комплексна величина, і відповідно $\gamma$ теж комплексна величина:

$$\gamma = jw\sqrt{\varepsilon_к \mu_a} = \alpha + j\beta, \tag{2.24}$$

де $\gamma$ - коефіцієнт поширення;
$\alpha$ - коефіцієнт загасання;
$\beta$ - коефіцієнт фази.

З (2.24) і (2.21), (2.22) одержимо: $\vec{E}_x = \vec{E}_{x_1} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$, $\vec{H}_y = \vec{H}_{y_1} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$.

Миттєві значення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$:

$$\vec{E}_x(t) = \vec{E}_{xm_1} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(wt - \beta_z + \varphi_1), \tag{2.25}$$

$$\vec{H}_x(t) = \vec{H}_{xm_1} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(wt - \beta_z + \varphi_2). \tag{2.26}$$

З даних рівнянь видно, що амплітуда електромагнітного поля зменшується у напрямку осі $z$ через множник $e^{-\alpha z}$. Це відбувається через теплові утрати, так як провідність $\sigma \neq 0$. Електромагнітна хвиля затрачає енергію на переміщення, що і приводить до утрати частини енергії хвилі. Тут $\alpha$ - коефіцієнт загасання. Він показує зменшення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ при поширенні хвилі на одиницю довжини.

Величина $\beta$ - коефіцієнт фази. Він показує зміну фази на одиницю довжини. У діелектриці коефіцієнт поширення $\kappa = w\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ - також є коефіцієнтом фази, але $\kappa \neq \beta$, і, отже, фазова швидкість хвилі в напівпровідному середовищі відрізняється від фазової швидкості у ідеальному діелектрику.

Значення $\alpha$ і $\beta$ визначаються з рівняння $jw\sqrt{\varepsilon_\kappa \mu_a} = \alpha + j\beta$ при $\varepsilon_\kappa = \varepsilon_a\left(1 + \frac{\sigma}{jw\varepsilon_a}\right)$, і мають вигляд:

$$\alpha = w\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}\right)}\right) - 1}, \tag{2.27}$$

$$\beta = w\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}\right)}\right) - 1}. \tag{2.28}$$

Звідси видно, що коефіцієнт фази і коефіцієнт ослаблення у напівпровідному середовищі залежать від параметрів середовища $\varepsilon_a$, $\mu_a$, $\sigma$ і частоти $w$.

Установимо зв'язок між комплексними амплітудами електричного і магнітного полей.

Для діелектрика $\frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = \rho$, або $\vec{E}_x = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\vec{H}_y$.

Замінивши $\varepsilon_a$ на $\varepsilon_\kappa$, одержимо $\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_\kappa}} = \rho_\kappa$ - комплексний хвильовий опір напівпровідного середовища. Відповідно $\frac{E_{xm_1}}{H_{ym_1}} = |\rho_\kappa|$ і $|\rho_\kappa| = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}\right)^2}}$.

Рівняння показує зв'язок між амплітудами електричного і магнітного полей. Тут $|\rho_\kappa| \prec \rho$ **- хвильовий опір** напівпровідного середовища менше

хвильового опору діелектрика. Так, для морської води $|\rho_к|$=2,44 Ом на $\alpha$=100 м. Між електричним і магнітним полем з'являється фазовий зсув $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ - магнітне поле відстає від електричного на кут $\varphi$. На рис. 2.6 наведене поле хвилі у напівпровідному середовищі.

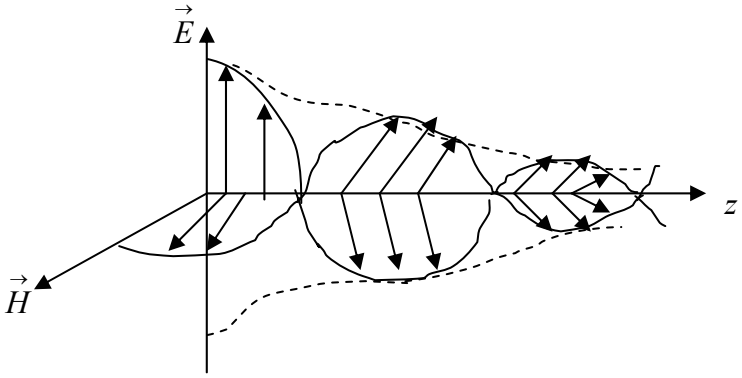



Рисунок 2.6 – Загасаюча хвиля

Фазова швидкість:

$$v_ф = \frac{w}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}\right)^2}}}. \qquad (2.29)$$

Як бачимо, у напівпровідному середовищі $v_ф$ менше $c$ - швидкості світла, і залежить не тільки від параметрів середовища, але і від частоти.

Явище залежності фазової швидкості від частот називають дисперсією, і середовища, у яких це явище спостерігається – диспергіруючими.

Довжина хвилі у напівпровідному середовищі визначається співвідношенням:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_a w}\right)^2}}}, \qquad (2.30)$$

де $\lambda$ - довжина хвилі у вакуумі.

Зі зростанням провідності $\sigma$ довжина хвилі зменшується. Так, $\lambda$=100 м у вакуумі відповідає $\lambda_n$=0,91 м у морській воді.

### *Контрольні запитання*

1. Яка умова класифікації середовищ?

2. Яке рівняння Максвела для плоских хвиль?
3. Що таке хвильове число?
4. Що таке хвильовий опір середовища?
5. Яка щільність енергії електромагнітного поля?
6. Що таке коефіцієнт фази?
7. Що таке коефіцієн загасання?

## 2.3 Змінне електромагнітне поле у провідному середовищі. Поширення плоскої хвилі у провідному середовищі. Електромагні хвилі в плазмі

Рівняння Максвела для змінного електромагнітного поля у провідному середовищі:

2. $rot\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left(\sigma + jw\varepsilon_a\right)\vec{E}$;

1. $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -jw\mu_a\,\vec{H}$;

3. $div\,\vec{D} = \rho$;

4. $div\,\vec{B} = 0$.

У провідному середовищі без вільних електричних зарядів $(\rho = 0)$ є провідність $\sigma$. Тут $rot\,\vec{E} = -jw\mu_a\,\vec{H}$, або $rot \cdot rot\,\vec{E} = -jw\mu_a rot\,\vec{H} = -jw\mu_a\left(\sigma + jw\varepsilon\right)\vec{E}$.

Так як $rot \cdot rot\,\vec{E} = div\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$ і $div\,\vec{D} = div\varepsilon_a\,\vec{E} = 0$, то $\Delta\vec{E} = -rot \cdot rot\,\vec{E} = \left(jw\mu_a\sigma - w^2\mu_a\varepsilon_a\right)$, або $\Delta\vec{E} = \gamma^2 = \left(j\beta\right)^2 = -\beta^2 = \left(jw\mu_a\sigma - w^2\mu_a\varepsilon_a\right)$, або $\beta = \sqrt{w^2\mu_a\varepsilon_a - jw\mu_a\sigma}$. Тут $\Delta$ - лапласіан.

Аналогічно для магнітного поля: $\Delta\vec{H} = \gamma^2 \cdot \vec{H}$. Для $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin wt$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = w\vec{E}_0 \cos wt = jw\vec{E}$, де $w^2\mu_a\varepsilon_a = \frac{w^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Відповідно $\Delta\vec{E} = \gamma^2\vec{E} = \sigma\mu_a\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$, $\Delta\vec{H} = \gamma^2\vec{H} = \sigma\mu_a\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$. Це – рівняння $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у провідному середовищі.

У провідних середовищах $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a} \succ\succ 1$. Тоді в коефіцієнтах загасання $\alpha$ і фази $\beta$: $\alpha = w\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}\right)}-1}$, $\beta = w\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}\right)}+1}$. Можна зневажити одиницею порівняно з $\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}$. При цьому:

$$\alpha = \beta \simeq w\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}\cdot\frac{\sigma}{w\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{w\mu_a\sigma}{2}}\ . \qquad (2.31)$$

зсув фаз між електричним і магнітним полем $\varphi = arctg\frac{\alpha}{\beta} = 45^0$.

Таким чином, з (2.31) видно, що коефіцієнт загасання $\alpha$ у провідному середовищі набагато більше, ніж у напівпровідному, і хвиля в провідному середовищі загасає швидше. Коефіцієнт фази $\beta$ також зростає і, отже, фазова швидкість $v_\phi = \frac{w}{\beta} = \sqrt{\frac{2w}{\mu_a\sigma}}$ у провідному середовищі зменшується, причому $v_\phi$ залежить від частоти $w$, отже провідник – диспергіруюче середовище. Довжина хвилі у провіднику $\lambda_{пр} = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{w\mu_a\sigma}}$ тим менше, чим більше провідність $\sigma$.

**Глибина проникнення** хвилі у провіднику $\delta$ показує ступінь її поглинання. Величина $\delta$ - це відстань, на якому амплітуда електричного поля електричного поля плоскої хвилі зменшується у $e$ раз (рис. 2.6):

$$E_2 = E_1 \cdot e^{-\alpha\cdot\beta},$$

$$\frac{E_2}{E_1} = e^{\alpha\cdot\delta} = e, \qquad (2.32)$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{w\mu_a\sigma}}.$$

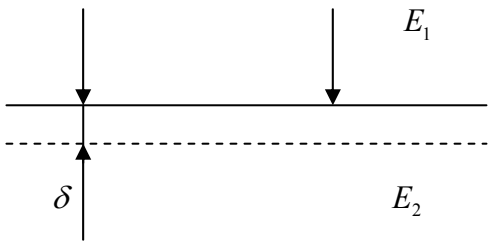
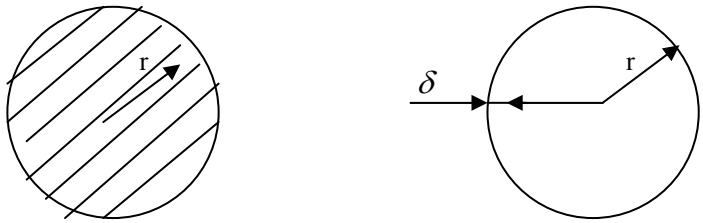



Рисунок 2.7 - Глибина проникнення

З (2.7) випливає, що чим быльше частота $w$ і провідність $\delta$, тим менше глибина проникнення $\delta$. Так, при $\lambda$=100 м глибина її проникнення в морську воду $\delta$=14,5 см. Для ідеального провідника $\sigma \sim \infty$, глибина проникнення хвилі У ньому все поле – на його поверхні.

Знайдемо опір провідника струму надвисокої частоти. Так як $\delta$ дуже мала, весь струм протікає практично за поверхнею. Це явище називається скін – ефектом, або поверхневим ефектом.

Для постійного струму $I_=$ за всім перетином провідника: $R_= = \dfrac{\ell}{\sigma \pi r^2}$ (рис. 2.8, а).




а) б)

Рисунок 2.8 – Розподіл струму: а - $I_=$; б - $I_\sim$

Перемінний струм $I_\sim$ йде тільки за шаром товщиною $\delta$ і $R_\sim \approx \dfrac{\ell}{\sigma 2\pi r \delta}$.

Відношення $R_\sim$ і $R_=$ визначається як:

$$\frac{R_\sim}{R_=} = \frac{\ell \cdot \sigma \pi r^2}{\sigma \cdot 2\pi r \cdot \delta \cdot \ell} = \frac{r}{2\delta} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{w \mu_a \sigma}{2}}. \qquad (2.33)$$

Таким чином, для зменшення $R_\sim$ треба зменшувати $r$ - радіус провідника.

**Плазма** – іонізований газ. Утворюється у верхніх шарах атмосфери під впливом різних іонізованих факторів. Буває високотемпературною (тисячі і мільйони градусів) і низькотемпературною (сотні і тисячі градусів). Шари атмосфери з плазмою – це **іоносфера**.

При проходженні електромагнітної хвилі через плазму заряджені частки прискорюються за рахунок енергії хвиль, втрачається частина енергії, стерпна хвилею. Плазма має концентрацію електронів $N_e$, $ел/м^3$. Частота коливань хвилі - $w$.

Для аналізу поширення електромагнітного поля у плазмі достатньо визначити її діелектричну проникність $\varepsilon_{a\ \ пл}$ і електричну провідність $\sigma_{пл}$.

Еквівалентні параметри плазми визначаються з виразу для площини повного струму: $\vec{J}_{\Sigma} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{пр} + \vec{J}_{см}$; при гармонічному процесі комплексна амплітуда повного струму:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + jw\varepsilon_a \vec{E}. \qquad (2.34)$$

Комплексна амплітуда струму зсуву:

$$\vec{j}_{см} = jw\varepsilon_0 \vec{E}, \qquad (2.35)$$

де $\varepsilon_a = \varepsilon_0$.

Струм провідності:

$$\vec{j}_{см} = -e \cdot N_{ел} \cdot \vec{v}_{ел}. \qquad (2.36)$$

Швидкість $\vec{v}_{ел}$ визначається з рівняння руху електронів в іонізованому газі під впливом напруженості електричного поля хвилі. Сила впливу хвилі на електрон:

$$\vec{F} = -e\vec{E}. \qquad (2.37)$$

Інша сила, що впливає на електрон – це сила гальмування через зіткнення електронів з тяжкими частками:

$$\vec{F}_{гальм} = -\vartheta \cdot m \cdot \vec{v}_{ел}, \qquad (2.38)$$

де $\vartheta$ - число зіткнень в секунду;

$m$ - маса електрона;

$v_{ел}$ - швидкість електрона перед зіткненням.

Під впливом $F + F_{гальм}$ електрон здобуває прискорення $\frac{dv_{ел}}{dt}$ і

$$F + F_{гальм} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.39}$$

З (2.37), (2.38) і (2.39) одержуємо:

$$-e\vec{E} = \vartheta_m \vec{v}_{ел} + m\frac{\partial v_{ел}}{\partial t}. \tag{2.40}$$

При $\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}} e^{jwt}$, одержуємо:

$$\vec{v}_{ел} = \dot{\vec{v}}_{ел} \cdot e_0^{jwt}. \tag{2.41}$$

Тоді з (2.40) і (2.41) знаходимо:

$$\vec{v}_{ел} = -\frac{e}{m(\vartheta + jw)} \cdot \dot{\vec{E}}. \tag{2.42}$$

У результаті струм провідності: $\dot{\vec{J}}_{пров} = \frac{e^2 N_{ел}}{m(\vartheta + jw)} \cdot \dot{\vec{E}}$.

Остаточно сумарний струм плазми буде дорівнювати:

$$\dot{\vec{J}}_{пл\Sigma} = \dot{\vec{J}}_{пров} + \dot{\vec{J}}_{см} = \left\{ \frac{e^2 N_{ел} \cdot v}{m(v^2 + w^2)} + jw\left[\varepsilon_0 - \frac{e^2 N_{ел}}{m(v^2 + w^2)}\right]\right\}. \tag{2.43}$$

Речовинна частина – це питома електрична провідність $\sigma_{пл}$ для плазми:

$$\sigma_{пл} = \frac{e^2 N_{ел} \cdot \vartheta}{m(\vartheta^2 + w^2)}, \tag{2.44}$$

а в квадратних дужках – питома діелектрична провідність:

$$\varepsilon_{a_{пл}} = \varepsilon_0 - \frac{e^2 N_{ел}}{m(\vartheta^2 + w^2)}. \tag{2.45}$$

Відносна діелектрична проникність плазми дорівнює

$$\varepsilon_{пл} = \frac{\varepsilon_{a_{пл}}}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{e^2 \mathrm{N}_{ел}}{\varepsilon_0 m\left(\nu^2 + \omega^2\right)}. \qquad (2.46)$$

Так як $w \succ\succ \vartheta$,

$$\sigma_{пл} = \frac{e^2 N_{ел} \vartheta}{m w^2}, \qquad (2.47)$$

$$\varepsilon_{пл} = 1 - \frac{e^2 N_{ел}}{\varepsilon_0 m w^2}. \qquad (2.48)$$

Підставивши у (2.48) $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ кл, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-19}$ Ф/м і $w = 2\pi f$, одержимо:

$$\varepsilon_{пл} = 1 - 80,8 \frac{\mathrm{N}_{ел}}{f^2}. \qquad (2.49)$$

Таким чином, плазма, являючись провідним середовищем, має ряд особливих властивостей.

Так, еквівалентні параметри плазми $\sigma_{пл}$ і $\varepsilon_{пл}$ залежать від частоти. Значить, і фазова швидкість $\nu_\phi$ буде залежати від частоти, тобто плазма – диспергируюче середовище.

Відносна діелектрична проникність $\varepsilon_{пл}$ завжди менше одиниці. Більш того, вона може дорівнювати нулю або навіть стати негативною.

Частота, при якій $\varepsilon_{пл} = 0$, називається власною частотою плазми $f_{пл}$.

З (2.49) випливає, що

$$f_{пл} = \sqrt{80,8 \mathrm{N}_{ел}}. \qquad (2.50)$$

З обліком (2.50), формула (2.49) має вигляд:

$$\varepsilon_{пл} = 1 - \left(\frac{f_{пл}}{f}\right)^2. \qquad (2.51)$$

При $f \succ f_{пл}$, $\varepsilon_{пл} \succ 0$; при $f = f_{пл}$, $\varepsilon_{пл} = 0$ і при $f \prec f_{пл}$, $\varepsilon_{пл} \prec 0$.

При $\varepsilon_{пл} \prec 0$ хвильового процесу у плазмі не буде, так як коефіцієнт фази $\beta_{пл} = w\sqrt{\varepsilon_{a_{пл}}\mu_a} = w\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_{пл}}$ є у даному випадку величиною мнимою, а множник $e^{-j\beta z}$ буде множником загасання.

Хвильовий процес існує тільки при $f \succ f_{пл}$ і з ростом частоти $\varepsilon_{пл} \to \varepsilon_0$.

При $\vartheta_2 \prec\prec w^2$ провідність плазми $\sigma_{пл}$ зворотньо пропорційна $w^2$. Значить, при рості частоти зменшується $\sigma_{пл}$ і величина втрат енергії.

При $\vartheta_2 \succ\succ w^2$ втрати практично не залежать від частоти, так як при цьому:

$$\sigma_{пл} \approx \frac{e^2 \mathrm{N}_{ел}}{m\vartheta}. \qquad (2.52)$$

Чим вище $\mathrm{N}_{ел}$, тим більше втрат. У цьому випадку $f_{пл}$ змешується, відповідно при фіксованій частоті зменшується $\varepsilon_{пл}$ - формула (2.46).

### *Контрольні запитання*

1. Яке рівняння Максвела для перемінного поля у провідному середовищі?
2. Який коефіцієнт фази у провідному середовищі?
3. Який коефіцієнт загасання у провідному середовищі?
4. Яка глибина проникнення хвилі у провідник?
5. Які існують особливі властивості плазми порівняно з провідним середовищем?
6. У чому полягає залежність провідності плазми від частоти електромагнітного поля?

## 2.4 Основні характеристики електромагнітних хвиль. Поляризація плоских електромагнітних хвиль. Загальний випадок поляризації

Електромагнітні хвилі – це процес одночасного поширення у просторі електричного і магнітного полей, що змінюються. Електричне поле визначається вектором напруженості $\vec{E}$, магнітне – вектором напруженості магнітного поля $\vec{H}$, які взаємно ортогональні.

Напрямок поширення електромагнітних хвиль ортогонально до площини, в якій лежать обидва вектора $\vec{E}$ і $\vec{H}$.

Основні характеристики електромагнітних хвиль:

- кругова частота $w = 2\pi f$ , Гц;
- період коливань $T = \frac{1}{f}$, сек;
- довжина хвилі $\lambda$, м;
- швидкість поширення $\vartheta = \lambda \cdot f_1$, або $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$; у вакуумі $\vartheta = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$; $\mu$, $\varepsilon$ - параметри середовища. Відповідно $\lambda = \frac{\vartheta}{f}$.

У загальному випадку плоскі електромагнітні хвилі – векторні; вони відрізняються від скалярних плоских хвиль тим, що характеризуються не однією скалярною функцією, задовольняючою хвильовому рівнянню, а декільком такими функціями. Внаслідок цього з'являється нова характеристика електромагнітних хвиль – **поляризація**.

При розгляді електромагнітних хвиль спеціально вибиралася прямокутна система координат так, щоб вісь вібратора (джерела хвилі) збігалася з віссю $x$, і в далекій зоні створювалася плоска хвиля - $x$-хвиля. В цій хвилі вектор $\vec{E}$ має тільки одну складову - $\vec{E}_x$, а вектор $\vec{H}$ - $\vec{H}_y$. В такій хвилі вектор $\vec{E}$ спрямований уздовж осі $x$, а вектор $\vec{H}$ - вздовж осі $y$.

Якщо ж розташувати вібратор вздовж осі $y$ - виникне $y$-хвиля, де електричне поле буде має тільки складову $\vec{E}_y$ , а магнітне поле - $\vec{H}_x$. Однак можливо довільне розміщення вібратора відносно осі координат. Тоді вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ будуть складовими, паралельні осям $x$ і $y$. Значить, одночасно будуть існувати $x$-хвиля і $y$-хвиля, складові яких $\vec{E}_x$ і $\vec{E}_y$ змінюються синфазно. Плоску хвилю можна створити двома взаємно перпендикулярними вібраторами, розмістивши їх вздовж осей $x$ і $y$. В цьому випадку вектор $\vec{E}$ буде складатися з двох складових $\vec{E}_x$ і $\vec{E}_y$ (рис. 2.8).

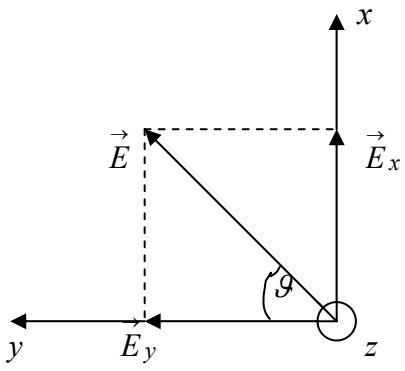


Рисунок 2.8 – Вектори електромагнітного поля

Однак в залежності від співвідношення фаз струмів у вібраторах ці складові можуть змінюватися або синфазно, або з якимсь фазовим зсувом. Таким чином, плоску хвилю можна розглядати як суперпозицію двох хвиль зі взаємно перпендикулярною орієнтацією векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$, які поширюються в одному напрямку.

В цьому випадку результуючий вектор $\vec{E}$ такої хвилі:

$$\vec{E} = \vec{x^0} E_{xm} \cos\left(wt - \beta z - \varphi_x\right) + \vec{y^0} E_{ym} \cos\left(wt - \beta_z + \varphi_y\right), \qquad (2.53)$$

де $E_{xm}$ і $E_{ym}$ - амплітуда електричного поля складових хвиль;

$\varphi_x$ і $\varphi_y$ - початкові фази складових.

Орієнтація і зміна результуючого вектора $\vec{E}$ буде визначатися співвідношенням між амплітудами і початковими фазами складових. Ці співвідношення і визначають різні види поляризації.

**Поляризація –** це така характеристика електромагнітної хвилі, яка визначає напрямок (орієнтацію) і величину вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ в даній точці простору.

Кут $\vartheta$ між віссю $y$ і вектором $\vec{E}$ називають **кутом поляризації**. Цей кут може бути незмінним або змінюватись в залежності від співвідношення почвткових фаз і амплітуд складових.

Розрізняють плоску або лінійну поляризацію, кругову і еліптичну поляризацію.

Лінійна поляризація виникає, коли складові $E_x$ і $E_y$ мають однакову частоту і початкову фазу:

$$E_x = E_{xm} \cos\left(wt - \beta z + \varphi_x\right),$$

$$E_y = E_{ym} \cos\left(wt - \beta z - +\varphi_y\right). \qquad (2.54)$$

$\varphi_x = \varphi_y = \varphi$.

Амплітуди складових можуть бути похідними. Величина результуючого вектора $\vec{E}$:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}\cos\left(wt - \beta z + \varphi\right).$$

(2.55)

Кут поляризації:

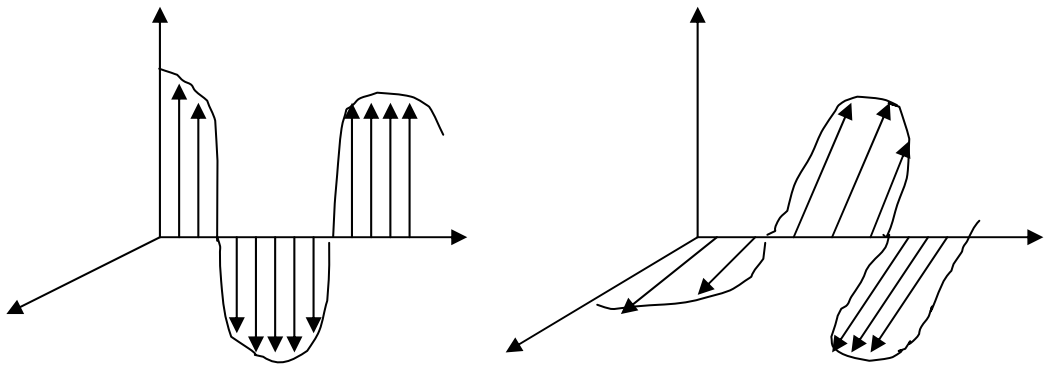
$$\vartheta = arctg\frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{xm}}{E_{ym}} = const\,. \qquad (2.56)$$

Бачимо, що кут поляризації $\vartheta$ не залежить від координат $z$, тобто на всіх точках вздовж осі $z$ вектор $\vec{E}$ лежить в одній площині.

Відповідно, при додаванні взаємно перпендикулярних хвиль з однаковими фазами результуючий вектор $\vec{E}$ лежить в одні площині, яку називають площиною поляризації. Ця площина, у якій розташован вектор $\vec{E}$ і яка проходить крізь напрямок поширення хвилі.

При фіксованому $z$ вектор $\vec{E}$ знаходиться весь час на одній лінії, тому плоску поляризацію називають лінійною.

Якщо складова $\vec{E}_y$ дорівнює нулю, вектор $\vec{E}$ буде спрямований вздовж осі $x$, тобто лежить у вертикальній плдощині. Така хвиля називається вертикально-поляризованою (рис. 2.9, а).



а) б)

Рисунок 2.9 - Поляризація хвиль: а – вертикальна поляризація; б – горизонтальна поляризація

Якщо $E_x$ дорівнює нулю, вектор $\vec{E}$ лежить в горизонтальній площині. Це – горизонтально-поляризована хвиля (рис. 2.9, б).

Вертикально-поляризовану хвилю випромінює вертикально-розташований вібратор. Горизонтально-розташований вібратор випромінює горизонтально-поляризовану хвилю.

Розглянемо інтеренференцію у діелектрику двох плоских хвиль, у яких вектори $\vec{E}$ сорієнтовані відповідно за віссю $ox$ і $oy$, причому припустимо, що амплітуда і початкові фази цих хвиль різні, тобто

$$E_1 = E_x = a_1 \cos\left(wt - \kappa z\right) = a_1 \cos\psi ,$$

$$E_2 = E_y = a_2 \cos\left(wt - \kappa z + \varphi\right) = a_2 \cos\left(\psi + \varphi\right) = a_2 \cos\psi \cdot \cos\varphi - a_2 \sin\psi \cdot \sin\varphi ,$$

де $\varphi$ - різниця фаз коливань цих хвиль.

Маємо $\frac{E_x}{a_1} \sin\varphi = \cos\psi \cdot \sin\varphi$;

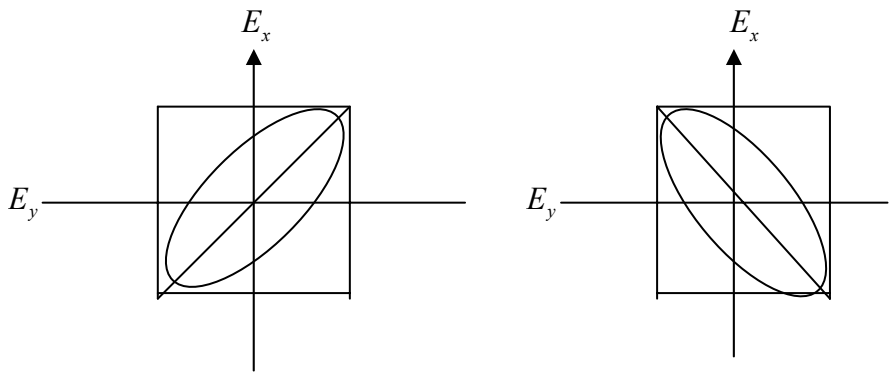
$$\frac{E_y}{a_2} = \cos\psi \cdot \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi = \frac{E_x}{a_1} \cos\varphi - \sin\psi \cdot \sin\varphi .$$

З цих двох рівностей одержуємо:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 \sin^2\psi + \left(\frac{E_y}{a_2} - \frac{E_x}{a_1}\cos\varphi\right)^2 = \sin^2\varphi , \qquad (2.57)$$

або $\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_1} \cdot \frac{E_y}{a_2} \cos\varphi = \sin^2\varphi .$

Звідси видно, що у площині, координатами точок якої є складові вектора $E_x$ і $E_y$, кінець вектора $\vec{E}$ за період високої частоти $T = \frac{2\pi}{w}$ описує криву другого порядку. Інакше кажучи, годограф вектора $\vec{E}$ є крива другого порядку. Ця крива, оскільки вона не виходить за межі прямокутника зі сторонами $2a_1$ і $2a_2$, може бути тільки еліпсом. Цей еліпс, вписаний в прямокутник зі сторонами $2a_1$ і $2a_2$, може мати, як наведено на рис. 2.10, два положення.



а) б)

Рисунок 2.10 – Еліпси поляризації: а-ліва поляризація; б-права поляризація

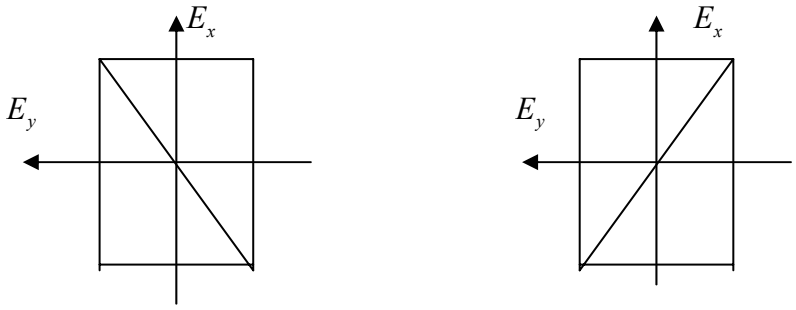
Розглянемо два часткових випадки поляризації – лінійну і криву поляризацію.

• Лінійна поляризація. Вона виникає, коли вектор $\vec{E}$ коливається по прямій, і виходить при $\varphi = n\pi$, $n = 0, 2, 4...$ - парні числа, і при $\varphi = n_1 \cdot \pi$, $n_1 = 1, 3, 5...$ - непарні числа.

У першому випадку: $\left(\frac{E_y}{a_2} - \frac{E_x}{a_1}\right)^2 = 0$; $\frac{E_x}{a_1} = \frac{E_y}{a_2}$; $\frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} = ctg\theta$.

У другому випадку: $\left(\frac{E_y}{a_2} + \frac{E_x}{a_1}\right)^2 = 0$; $\frac{E_x}{a_1} = -\frac{E_y}{a_2}$; $\frac{E_x}{E_y} = -\frac{a_1}{a_2} = -ctg\theta$.

Перший випадок ілюструється на рис. 2.11, а; другий – на рис. 2.11, б.




а) б)

Рисунок 2.11 – Лінійна поляризація: а-ліва поляризація; б-права поляризація

• Колова поляризація. Цей вид поляризації виходить при $a_1 = a_2 = a$ і $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

Коли $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, $E_x = a\cos\psi$; $E_y = a\cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -a\sin\psi$.

Коли $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $E_y = a\cos\psi$; $E_y = a\cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin\psi$.

В обох випадках $E_x^2 + E_y^2 = a^2$, тобто годограф вектора є **окружність**.

Визначимо напрямок обертання вектора.

Візьмемо похідну за $\psi$ в $E_x$ і $E_y$, і потім покладемо $\psi = 0$.

Для першого випадку одержимо: $E_x^{/} = -a\sin\psi$; $E_y^{/} = -a\cos\psi$; у другому випадку $E_x^{/} = -a\sin\psi$; $E_y^{/} = a\cos\psi$.

На рис. 2.12 наведено напрямок обертання вектора $\vec{E}$, тобто коли $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, вектор $\vec{E}$ обертання вправо (за годинною стрілкою – рис. 2.12, а); для $-\frac{\pi}{2}$ - обертання проти годинної стрілки рис. 2.12, б).

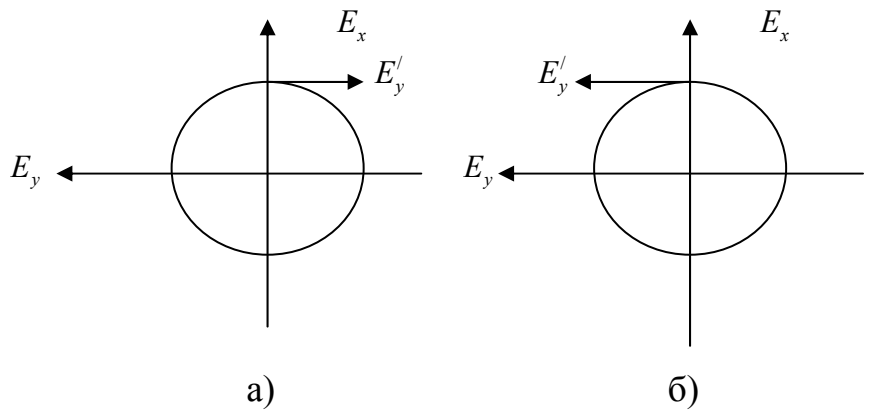



Рисунок 2.12 – Кругова поляризація: а-права поляризація; б-ліва поляризація

Таким чином, кругова поляризація може бути правого і лівого обертання.

Поляризація ввважається правого обертання, якщо спостерігач дивиться на хвилю, що наближається і бачимо обертання вектора за годинною стрілкою; при обертанні проти годинникової стрілки – це поляризація лівого обертання.

### *Контрольні запитання*

1. Які основні характеристики електромагітної хвилі?
2. Що таке поляризація плоских хвиль?
3. Що таке лінійна поляризація?
4. Що таке кругова поляризація?
5. Що таке еліптична поляризація?

## 2.5 Поляризація електромагнітних хвиль. Обертання площини поляризації (ефект Фарадея). Параметри Стокса і сфера Пуанкаре

Розглянемо інтерференцію двох поляризованих за колом плоских хвиль, однакових за амплітудою, за протилежним напрямком обертання, распространяющихся з однаковою швидкістю. У результаті вийде одна лінійно-поляризована хвиля: $E_x = E_{x_1} + E_{x_2} = a\cos\psi + a\cos\psi = 2a\cos\psi$; $E_x = E_{y_1} + E_{y_2} = -a\sin\psi + a\sin\psi = 0$.

Розглянемо інший варіант.

Нехай ті ж інтерфірируючі хвилі поширюються з різними швидкостями: $\vartheta_1 = \frac{c}{n_1}$, $\vartheta_2 = \frac{c}{n_2}$, де $n_1$ і $n_2$ - коефіцієнти переломлення; $n_i = \sqrt{\mu_i \varepsilon_i}$. Відповідно постійні поширення $\kappa_1 = \frac{\omega}{\vartheta_1} = \frac{\omega}{c} n_1 = \kappa_0 n_1$; $\kappa_0 = \frac{\omega}{c}$; $\kappa_2 = \frac{\omega}{\vartheta_2} = \frac{\omega}{c} n_2 = \kappa_0 n_2$. Тоді, представляючи складові напруг цих хвиль у вигляді:

$$E_{x_1} = a\cos\left(wt - \kappa_0 n_1 z\right) = a\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(wt-\kappa_0 n_1 z)}\right\},$$

$$E_{y_1} = -a\sin\left(wt - \kappa_0 n_1 z\right) = a\,\mathrm{Re}\left\{je^{j(wt-\kappa_0 n_1 z)}\right\},$$

$$E_{x_2} = a\cos\left(wt - \kappa_0 n_2 z\right) = a\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(wt-\kappa_0 n_2 z)}\right\},$$

$$E_{y_2} = a\sin\left(wt - \kappa_0 n_2 z\right) = -a\,\mathrm{Re}\left\{je^{j(wt-\kappa_0 n_2 z)}\right\}.$$

Складаючи їх, одержимо:

$$E_x = E_{x_1} + E_{x_2} = a\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(wt-\kappa nz)} \cdot \left[e^{-j\kappa_0 \alpha z} + e^{j\kappa_0 \alpha z}\right]\right\},$$

$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2} = a\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(wt-\kappa nz)} \cdot \left[e^{-j\kappa_0 \alpha z} - e^{j\kappa_0 \alpha z}\right]\right\},$$

з позначеннями:

$$n_1 = \frac{1}{2}\left(n_1 + n_2\right) + \frac{1}{2}\left(n_1 - n_2\right) = n + \alpha,$$

$$n_2 = \frac{1}{2}\left(n_1 + n_2\right) - \frac{1}{2}\left(n_1 - n_2\right) = n - \alpha.$$

У результаті $E_x = 2a\cos(\kappa_0 \alpha z)\cdot\cos(wt - \kappa_0 nz)$;
$E_y = 2a\sin(\kappa_0 \alpha z)\cdot\cos(wt - \kappa_0 nz)$.

З цих виразів видно, що сумарна хвиля також лінійно-поляризована, але з обертаючою площиною поляризацій.

Так, на відрізку шляху хвилі $z_1 - z_2$ кут повороту площини поляризації дорівнює: $\Omega = \kappa_0 \alpha (z_2 - z_1)$. Таке обертання площини поляризації оптичних хвиль вперше виявлений Фарадеєм.

З розглянутих лінійної і кругової поляризації можна зробити висновок про загальний випадок еліптичної поляризації, зображувані на рис. 2.13.

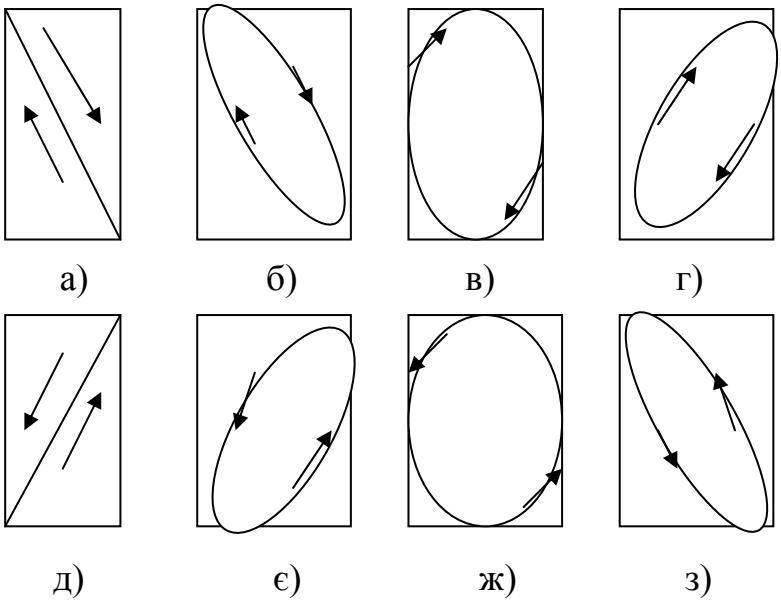



Рисунок 2.13 – Випадки еліптичної поляризації: а- $\varphi = 0$; б- $0 \prec \varphi \prec \frac{\pi}{2}$; в- $\varphi = \frac{\pi}{2}$; г- $\frac{\pi}{2} \prec \varphi \prec \pi$; д- $\varphi = \pi$; є- $\frac{3}{2}\pi \prec \varphi \prec 2\pi$; ж- $\pi \prec \varphi \prec \frac{3}{2}\pi$; з- $\varphi = \frac{3}{2}\pi$

Більш кількісне представлення про характер поляризації в загальному випадку дають параметри стокса і сфера Пуанкаре. Параметрами Стокса називаються наступні вирази:

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2,$$

$$s_1 = a_1^2 - a_2^2,$$

$$s_2 = 2a_1 a_2 \cos\varphi, \qquad (2.58)$$

$$s_3 = 2a_1a_2 \sin\varphi .$$

Для цих параметрів виконується рівність: $s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$.

В результаті чисто геометричних викладень одержуємо співвідношення:

$$tg^2\theta = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 - a_2^2}\cos\varphi , \qquad (2.59)$$

$$tg^2\chi = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2}\sin\varphi , \qquad (2.60)$$

де $tg\chi = \pm\frac{b}{a}$;

$a$ - велика напіввісь еліпсу поляризації;

$b$ - мала напіввісь еліпсу поляризації.

Оскільки завжди $a \succ 0$ і $b \succ 0$, знак перед відношенням $\frac{b}{a}$ згідно (2.60) повинен бути таким, яким він виходить у $\sin\varphi$ - цей знак визначається кутом $\varphi$.

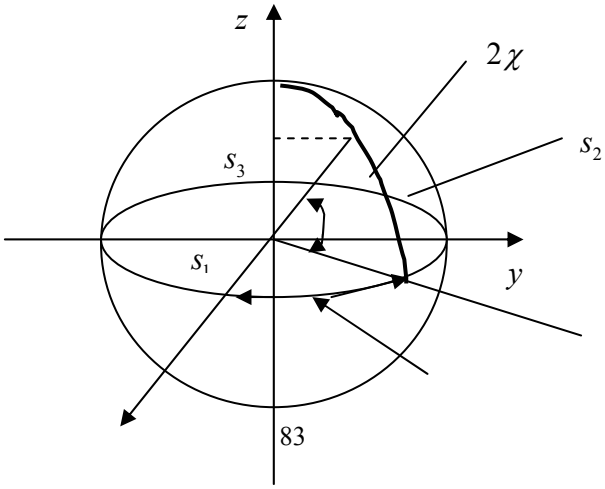
Після ряду викладень одержуємо наступні рівності:

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cdot \cos 2\theta ,$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \cdot \sin 2\theta , \qquad (2.61)$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi .$$

Ці рівності мають наступний геометричний зміст. Параметри Стокса $s_1$, $s_2$ і $s_3$ можна розглядати, як прмокутні координати, а параметр Стокса $s_0$ і кути $2\chi$ і $2\theta$ - як сферичні координати на поверхні сфери радіуса $s_0$ (рис. 2.14).



$2\theta$

Рисунок 2.14 – Сфера Пуанкаре

На відміну від звичайної сферичної системи координат кут $2\chi$ тут відраховується не від полярної осі $oz$, а від екваторіальної площини $xoy$, тобто кут $2\chi$ відповідає географічній широті.

Кожна точка на сфері має чіткий фізичний зміст – її координати представляют собою всі параметри, що характеризують поляризацію при фіксованій інтенсивності хвилі $a_1^2 + a_2^2 = s_0 = const$.

Екваторіальна площина $xoy$ поділяє поляризацію на два види. Вище цієї площини $\chi \succ 0$, оскільки $s_3 \prec 0$, що згідно (2.58) відповідає $\sin\varphi \prec 0$. Це – поляризація лівого обертання.

Точки на екваторі $\chi = 0$, оскільки $s_3 = 0$, що згідно (13.1) відповідає $\varphi = 0$, визначає лінійну поляризацію.

Точки на полюсах $2\chi = \pm\frac{\pi}{2}$, оскільки $s_1 = s_2 = 0$, що згідно (13.1) відповідає $a_1 = a_2$ і $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, визначає кругову поляризацію, причому «північний» полюс – поляризацію правого обертання, а «південний» – поляризацію лівого обертання. Описана тут сфера називається сферою Пуанкаре.

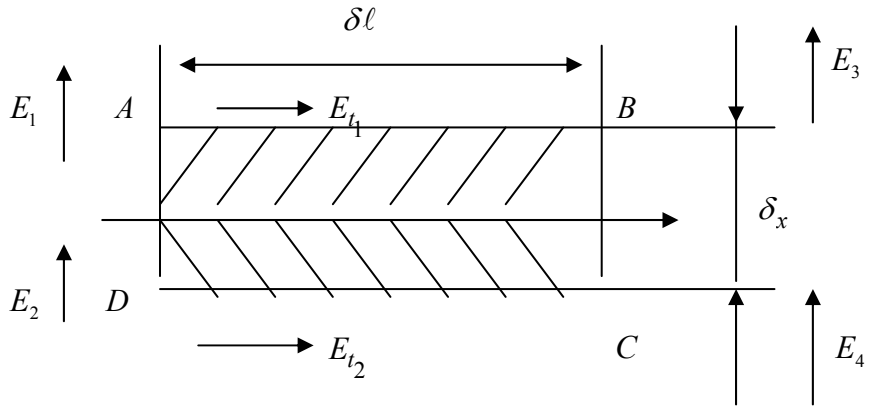
***Контрольні запитання***

1. У чому полягає сутність ефекту Фарадея?
2. Що таке параметри Стокса?
3. Що таке сфера Пуанкаре?

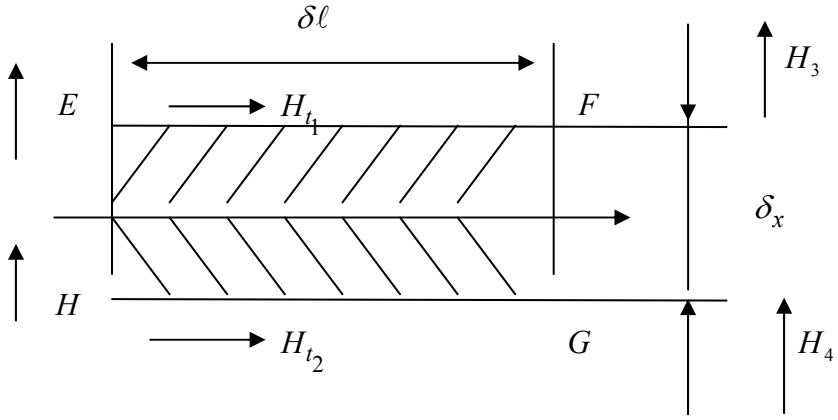
## 2.6 Проходження плоскої електромагнітної хвилі на межах розділу двох середовищ. Граничні умови. Межі розділу двох середовищ. Закони відбиття і заломлення хвиль. Формули Френеля

Для електромагнітних хвиль існує граничні на границі розділу діелектричних або провідних середовищ, які повинні задовольняти рівнянням Максвела.

а) діелектрична границя розділу (рис. 2.15, а, б)




а)




б)

Рисунок 2.15 – Діелектрична межа розділу: а-електричного поля; б-магнітного поля

Якщо $E_{t_1}$, $E_{t_2}$ і $H_{t_1}$, і $H_{t_2}$ - тангенціальні електричні і магнітні компоненти відповідно, то на границі розділу двох середовищ маємо: $E_{t_1} = E_{t_2}$; $H_{t_1} = H_{t_2}$.

Аналогічно, для $D_{n_1}$, $D_{n_2}$, $B_{n_1}$ і $B_{n_2}$ - нормальних компонентів електричного і магнітного полей відповідно, ми повинні мати:

$$D_{n_1} = D_{n_2},$$

$$B_{n_1} = B_{n_2}.$$

б) провідна границя розділу середовищ (рис. 2.16, а, б).

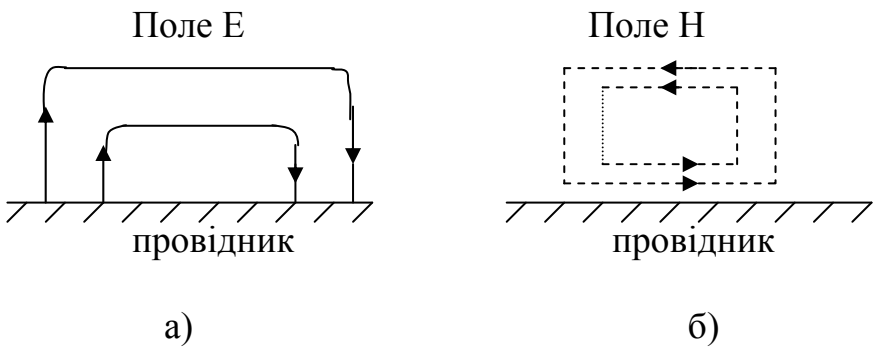



Рисунок 2.16 – Провідна границя розділу: а-електричного поля; б-магнітного поля

На провідній границі з $\sigma = \infty$, $E = \frac{J}{\sigma} = 0$ і $E_{t_2} = 0$, так як на еквіпотенціальній поверхні електричного поля немає $(E = 0)$.

Нормальні компоненти можуть з'явитися у вигляді силових ліній (рис. 2.16).

Відповідно, на поверхні немає магнітного поля і $B_{n_2} = 0$. Так як $B_{n_1} = B_{n_2}$, магнітні лінії форми формують замкнуті контури над границею розділу (рис. 2.16, б).

Таким чином, граничні умови дуже важливі для визначення розподілу полей усередині обмежених областей, таких, як хвилеводи і резонатори.

в) Проникнення крізь провідну границю розділу (рис. 2.17).

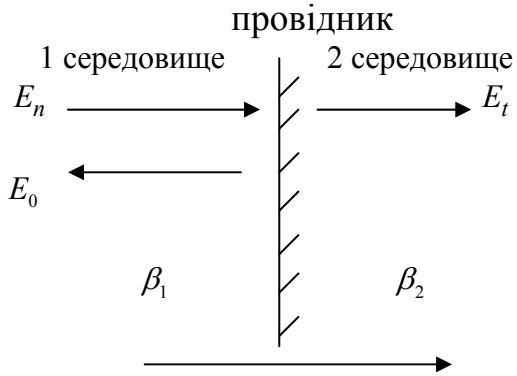



Рисунок 2.17 – Межа розділу

Тут $E_n$ - падаюча хвиля; $E_0$ - відбиваюча хвиля; $E_t$ - транзитна (провідна) хвиля.

Падаюча хвиля: $E_n = E_1 e^{j(wt-\beta_1 x)}$; транзитна хвиля: $E_t = E_2 e^{j(wt-\beta_2 x)}$, де $\beta_1$ і $\beta_2$ - фазоздвигаючі коефіцієнти поза і усереднині провідника відповідно.

Відбиваюча хвиля $E_0 = E_n - E_t$.

У загальному випадку для провідного середовища:
$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - j\sigma\omega\mu_a}$, $\sigma$ - провідність.

Для металів: $j\sigma\omega\mu_a \succ\succ \omega^2 \mu_a \varepsilon_a$, тобто $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a} \succ\succ 1$. Відповідно,

$\beta_2 \simeq \sqrt{-j\sigma\omega\mu_a} \simeq \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu_a}{2}} \cdot (1-j)$, або $\beta_2 = s \cdot (1-j)$, $s = \sqrt{\frac{\sigma w \mu_a}{2}}$. При цьому
$E_t = E_2 e^{(jwt - js\cdot x - s\cdot x)} = E_2 e^{-sx} e^{j(wt - s\cdot x)}$.

Проникнення або скіп-ефект $\delta$ визначається тут як $\delta = \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_a}}$.

При падінні на границю розділу двох середовищ плоскої хвилі возмущаючої дії границі виявляється у появі відбиваної і переломленої хвилі.

Будь-яка плоска хвиля окремо є рішенням рівнянь Максвела. Але для того, щоб зазначені хвилі представляли собою рішення задачі, необхідно, щоб вони спільно з падаючою хвилею задовольняли граничним умовам на поверхні розділу середовищ.

Нехай напруженість поля падаючої хвилі: $\vec{E}_i = \vec{E}_{oi}\, e^{j(wt-\kappa_1 n_i r)}$, а напруженості поля відбитої і переломленої хвиль відповідно дорівнюють:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_{OR}\, e^{j(wt-\kappa_1 n_R r)},$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{or}\, e^{j(wt-\kappa_2 n_r r)},$$

де $\kappa_1 = \frac{w}{c}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \frac{w}{c} n_1$, $\kappa_2 = \frac{w}{c}\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \frac{w}{c} n_2$ (середовища вважаємо діелектриками).

Напрямок будемо характеризувати кутами (рис. 2.18).

$\varphi_i$ - кут падіння; вважаємо його відомим;

$\varphi_\kappa$ - шуканий кут відбивання;

$\psi$ - шуканий кут переломлення;

$E_{oi}$ - відомо;

$E_{OR}$, $E_r$ - невідомі.

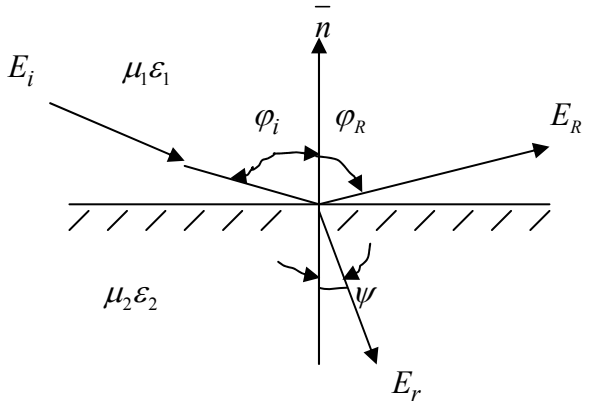



Рисунок 2.18 – Напрямок кутів

Граничні умови, яким повинні задовольняти спільно усі три хвилі:

$$E_{t_1} = E_{t_2}\,,$$
$$\varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}\,, \tag{2.62}$$

або

$$H_{t_1} = H_{t_2}\,,$$
$$\mu_1 H_{n_1} = \mu_2 H_{n_2}\,. \tag{2.63}$$

Підставивши у яку-небудь граничну умову вираз для полей трьох хвиль, одержимо співвідношення наступного вигляду:

$$Ae^{j\left(wt-\kappa_1 n_i r\right)} + Be^{j\left(wt-\kappa_2 n_R r\right)} = Ce^{j\left(wt-\kappa_2 n_r r\right)},$$

де $r$ - радіус-вектор якої-небудь точки граничної площини, проведеної з точки падіння (рис. 2.19).

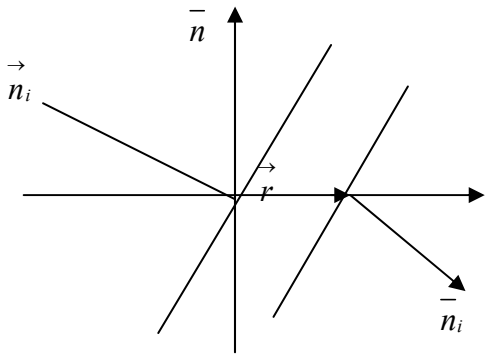



Рисунок 2.19 – Точки граничної площини

Ця рівність повинна виконуватись на всій граничній площині при будь-якій величині вектора $\vec{r}$. А це можливо тоді і тільки тоді, коли усі три фазових множника рівні, тобто коли виконується умова $\kappa_1 \vec{n}_i \vec{r} = \kappa_1 \vec{n}_R \vec{r} = \kappa_2 \vec{n}_r \vec{r}$.

З'ясуємо зміст цих двох рівностей.

Оскільки ці рівності повинні виконуватись при будь-якій величині вектора $\left[\vec{n}\vec{r}\right]$, то повинно бути:

$$\left[\vec{n}_i \vec{n}\right] = \left[\vec{n}_R \vec{n}\right], \tag{2.64}$$

$$\kappa_1 \left[\vec{n}_R \vec{n}\right] = \kappa_2 \left[\vec{n}_1 \vec{n}\right]. \tag{2.65}$$

*Ці дві векторних рівності представляють собою формулювання законів відбивання і переломлення плоских хвиль:*

- промінь падаючий, промінь відбиваючий і промінь переломлений лежить в одній і тій же площині – площини падіння;

Площина падіння – це площина, у якій лежать вектор $\vec{n}_i$ і вектор $\vec{n}$ - нормаль до границі розділу, відновлена у точці падіння.

- $\sin\varphi_i = \sin\varphi_R$ і $\varphi_i = \varphi_R$, тобто кут падіння дорівнює куту відбивання.
- $\kappa_1 \sin\varphi = \kappa_2 \sin\psi$ або $n_1 \sin\varphi = n_2 \sin\psi$ (закон Снела).

Ці закони справедливі при будь-якій поляризації падаючої хвилі. У той же час коефіцієнти відбивання і проходження залежать від виду поляризації падаючої хвилі.

Характерними видами поляризації є вертикальна і горизонтальна поляризації. При вертикальній поляризації вектор $\vec{E}_i$ лежить у площині падіння, а при горизонтальній поляризації у площині падіння лежить

вектор $\vec{H}_i$. При довільному випадку поляризації вектор $\vec{E}_i$ розкладається на два складових вектора, лежачих відповідно в площині падіння і перпендикулярно до неї, і цим звести до цих двох випадків поляризації

<u>При вертикальній поляризації.</u>

Граничні умови (рис. 2.18):

$$\left(E_{iB} - E_{RB}\right)\cos\varphi = E_{rB}\cos\psi ,$$

$$\varepsilon_i\left(E_{iB} + E_{RB}\right)\sin\varphi = \varepsilon_2 E_r \sin\psi . \tag{2.66}$$

Тут індекс “B” – вертикальна поляризація.

Замість $\sin\varphi$ з закону Снела у другому рівнянні підставляємо $\sin\psi = \frac{n_1}{n_2}\sin\varphi$.

Вирішуючи систему рівнянь (2.66) відносно $E_{RB}$ і $E_{rB}$, знаходимо:

$$E_{RB} = E_{iB}\frac{\varepsilon_2 n_1\cos\varphi - \varepsilon_1 n_2\cos\psi}{\varepsilon_2 n_1\cos\varphi + \varepsilon_1 n_2\cos\psi} ,$$

$$E_{rB} = E_{iB}\frac{2\varepsilon_1 n_2\cos\psi}{\varepsilon_2 n_1\cos\varphi + \varepsilon_1 n_2\cos\psi} . \tag{2.67}$$

При $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ці формули приймають вид:

$$E_{RB} = E_{iB}\frac{n_2\cos\varphi - n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi} ,$$

$$E_{rB} = E_{iB}\frac{2n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi + n_1\cos\psi} . \tag{2.68}$$

В останніх двох формулах можна за допомогою закону Снела виключити $n_1$ і $n_2$ і отримати:

$$E_{RB} = E_{iB}\frac{tg\left(\varphi - \psi\right)}{tg\left(\varphi + \psi\right)} ,$$

$$E_{rB} = E_{iB}\frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\cos\left(\varphi - \psi\right)\sin\left(\varphi + \psi\right)} . \tag{2.69}$$

Співвідношення (2.67) – (2.69) називають формулами Френеля.

При горизонтальній поляризації.

Шукані формули можна отримати з формул (2.67), замінивши параметри $\varepsilon_1$ і $\varepsilon_2$ параметрами $\mu_1$ і $\mu_2$, а $E_{iB}$, $E_{RB}$ і $E_{rB}$ відповідно $H_{i\Gamma}$, $H_{R\Gamma}$, $H_{r\Gamma}$ (індекс "Г" – горизонтальна поляризація).

У результаті одержимо:

$$H_{Rr} = H_{i\Gamma}\frac{\mu_2 n_1 \cos\varphi - \mu_1 n_2 \cos\psi}{\mu_2 n_1 \cos\varphi + \mu_1 n_2 \cos\psi},$$

$$H_{r\Gamma} = H_{i\Gamma}\frac{2\mu_1 n_2 \cos\psi}{\mu_2 n_1 \cos\varphi + \mu_1 n_2 \cos\psi}. \qquad (2.70)$$

Частіш за все оперують вектором $\vec{E}$, і у формулах (2.70) доцільно вектори $\vec{H}$ замінити векторами $\vec{E}$, використовуючи рівність $H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E$.

У першій формулі (2.70) коефіцієнт при $E_{i\Gamma}$ не змінюється, друга ж формула перетвориться до вигляду: $E_{\Gamma\Gamma} = E_{i\Gamma}\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}}\frac{2\mu_1 n_2 \cos\psi}{\mu_2 n_1 \cos\varphi + \mu_1 n_2 \cos\psi}$.

При $\mu_2 = \mu_1 = 1$:

$$E_{R\Gamma} = E_{i\Gamma}\frac{n_1 \cos\varphi - n_2 \cos\psi}{n_1 \cos\varphi + n_2 \cos\psi},$$

$$E_{r\Gamma} = E_{i\Gamma}\frac{2n_1 \cos\psi}{n_1 \cos\varphi + n_2 \cos\psi}. \qquad (2.71)$$

Виключивши за допомогою закону Снела $n_1$ і $n_2$, одержимо:

$$E_{R\Gamma} = -E_{i\Gamma}\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)},$$

$$E_{r\Gamma} = E_{i\Gamma}\frac{2\cos\varphi \sin\psi}{\sin(\varphi + \psi)}. \qquad (2.72)$$

### *Контрольні запитання*

1. Які граничні умови для діелектричної границі розділу середовищ?
2. Які граничні умови для провідної границі розділу середовищ?
3. Який скін-ефект у провідному середовищі?
4. У чому полягає закон Снела?

5. Які Формули Френеля використовують при вертикальній поляризації?
6. Які формули Френеля використовують при горизонтальній поляризації?

## 2.7 Проходження плоскої електромагнітної хвилі на межах розділу двох середовищ. Визначення коефіцієнтів відбиття і заломлення. Аналіз коефіцієнтів відбиття. Кут Брюстера. Повне внутрішнє відбиття

Проведемо енергетичне визначення коефіцієнтів відбивання і переломлення.

**Коефіцієнт відбиття** – це відношення нормальної складової щільності потоку енергії відбитої хвилі від одиниці поверхні до нормальної складової щільності потоку енергії падаючої хвилі на ту ж одиницю поверхні (рис. 2.20).

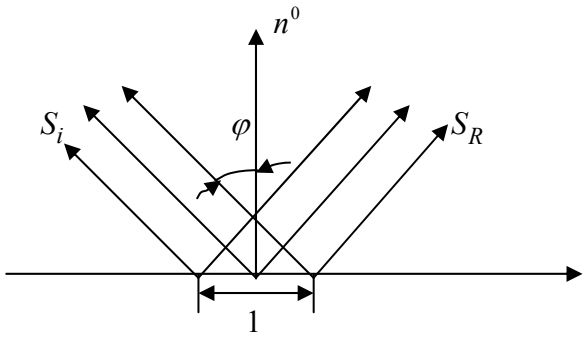



Рисунок 2.20 – Відбиття хвилі

$$q = R^2 = \frac{\vec{n}\,\vec{S}_R}{\left|\vec{n}_i\,\vec{S}_i\right|} = \frac{\left|E_R\right|^2}{\left|E_i\right|^2}, \qquad (2.73)$$

де $\vec{S}_R$ і $\vec{S}_i$ - вектори Пойтинга.

Коефіцієнт заломлення визначається аналогічно.

$n^0$

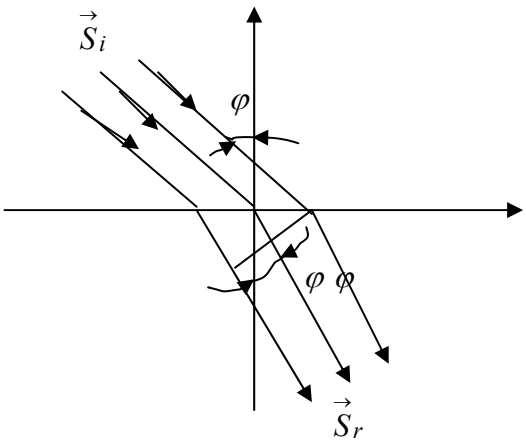



Рисунок 2.21 – Заломлення хвилі

Це – відношення нормальної складової щільності потоку енергії, яка пройшла крізь одиницю поверхні розділу середовищ до нормальної складової щільності потоку енергії падаючої хвилі на одиницю поверхні при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$:

$$d = \frac{\left|\vec{n}^0 \vec{S}_r\right|}{\left|\vec{n}_i \vec{S}_i\right|} = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \frac{\vec{n}_2}{\vec{n}_1} \frac{\left|\vec{E}_r\right|^2}{\left|\vec{E}_i\right|^2}.$$

(2.74)

Використовуючи формули (2.70), (2.72) з попередньої лекції, знаходимо:

- для <u>вертикальної поляризації.</u>

Коефіцієнт відбиття:

$$q_B = R_B^2 = \frac{tg^2(\varphi - \psi)}{tg^2(\varphi + \psi)} = \frac{\left|E_{RB}\right|^2}{\left|E_{iB}\right|^2}. \qquad (2.75)$$

Коефіцієнт заломлення:

$$d_B = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \frac{n_2}{n_1} \frac{\left|E_{rB}\right|^2}{\left|E_{iB}{}^2\right|} = \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi + \psi) \cdot \cos^2(\varphi - \psi)}. \qquad (2.76)$$

- для <u>горизонтальної поляризації.</u>

Коефіцієнт відбиття:

$$q_\Gamma = R_\Gamma^2 = \frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)} = \frac{\left|E_{R\Gamma}\right|^2}{\left|E_{i\Gamma}\right|^2}. \tag{2.77}$$

Коефіцієнт заломлення:

$$d_\Gamma = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\frac{n_2}{n_1}\frac{\left|E_{r\Gamma}\right|^2}{\left|E_{i\Gamma}\right|^2} = \frac{\sin 2\varphi \cdot \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}, \tag{2.78}$$

причому має місце рівність:

$$\begin{gathered} q_B + d_B = 1, \\ q_\Gamma + d_\Gamma = 1. \end{gathered} \tag{2.79}$$

В силу рівностей (2.79) достатньо проаналізувати коефіцієнти відбиття. Розглянемо як змінюються ці коефіцієнти зі зміною кута $\varphi$.

При нормальному падінні хвилі на границю розділу різниць між вертикальною і горизонтальною поляризацією немає.

При малих кутах падіння $\varphi$, як випливає з закону Снела: $\psi = \frac{n_1}{n_2}\varphi$, і формули (15.3) і (15.5) дають однаковий результат: $q_B = q_\Gamma = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в обох випадках поляризації коефіцієнти відбиття дорівнюють 1. При інших кутах падіння коефіцієнти відбиття при вертикальній і горизонтальній поляризаціях можуть суттєво відрізнятися один від одного.

При горизонтальній поляризації коефіцієнт відбиття $q_B$ ні при якому куті $\varphi$ в нуль не звертається.

При вертикальній поляризації $q_\Gamma$ звертається в нуль при $tg(\varphi+\psi) = \infty$, то є коли $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. При цьому випадку $\sin\psi = \cos\varphi$.

З закону Снела $n_1 \sin\varphi = n_2 \cos\varphi$ знаходимо:

$$tg\varphi = tg\varphi_Б = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2.80}$$

Кут $\varphi_Б$, який визначається цією рівністю, називають кутом Брюстера або кутом повної поляризації. Падаючий під кутом Брюстера вертикально поляризована хвиля від границі розділу двох середовищ не відбивається

взагалі, а одразу повністю переходить у друге середовище. Цей ефект аналогічний явищу узгодження двох довгих ліній з різними імпедансами.

При будь-якій іншій поляризації при куті Брюстера відбивається тільки горизонтально поляризована складова хвилі. Тому кут Брюстера називають кутом повної поляризації.

Нехай хвиля проходить з середовища 1 в середовище 2 з меншим показником переломлення, ніж у середовищі 1. Тоді за законом Снела кут $\psi$ має зміст переломлення тільки при кутах падіння $\varphi$, задовольняючих умові:

$$\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi = \sin\psi \le 1 . \qquad (2.81)$$

Що буде, якщо нерівність (2.81) не виконується.

Розглянемо фазовий множник плоскої хвилі $e^{-j\kappa_0 nr}$ (рис. 2.22).

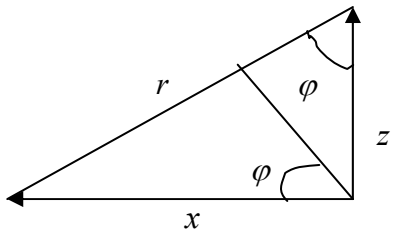



Рисунок 2.22 – Фазовий множник хвилі

Замінивши тут $r$ виразом $r = x\sin\varphi + z\cos\varphi$, цей фазовий множник можна представити (опускаючи $e^{jwt}$) у вигляді:

$$e^{-j\kappa_0 nr} = e^{-j\kappa_0\left(xn_1\sin\varphi + zn_1\cos\varphi\right)} . \qquad (2.82)$$

Відповідно для другого середовища фазовий множник має вигляд:

$$e^{-j\kappa_0\left(xn_2\sin\psi + zn_2\cos\psi\right)} .$$

(2.83)

Тут $n_2 \prec n_1$.

З закону Снела: $\cos\psi = \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)^2}$ і при кутах $\varphi_1$ не задовольняючих нерівності (2.81):

$$\cos\psi = -j\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)^2 - 1} \text{ -} \qquad (2.84)$$

чисто мнима величина.

Знак "-" узятий для забезпечення ослаблення хвилі при великих відстанях від границі розділу.

Таким чином, фазовий множник хвилі у середовищі 2 при виконанні (2.81) має вигляд (опускаючи $e^{jwt}$) :

$$e^{jxn_1\sin\varphi} \cdot e^{-\kappa z n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\varphi\right)^2 - 1}}. \qquad (2.85)$$

Відповідно, у даному випадку поширення хвилі у глиб середовища 2 не буде. Хвильовий процес буде тільки паралельний границі розділу, убиваючи за експонентою за мірою збільшення відстані $z$ від границі розділу середовищ.

Коефіцієнти відбиття тут $q_B$ і $q_\Gamma$ дорівнюють 1, так як відношення $\frac{|E_R|}{|E_i|}$ в обох випадках поляризації має вигляд $\frac{\alpha - j\beta}{\alpha + j\beta}$ і, відповідно, $\frac{|\alpha - j\beta|}{|\alpha + j\beta|} = 1$. Тому це явище і називають повним внутрішнім відбиттям.

У випадку розділу діелектрика і провідника відбиття і заломлення відбуваються у відповідності з законом Снела, але при цьому показник переломлення другого середовища є комплексним. Фазовий множник (2.83) при цьому представиться у вигляді: $e^{-j\kappa_0(чn_2\sin\psi + zn_2\cos\psi)} = e^{-j[x\kappa_0 n_1\sin\varphi + z(\beta - j\alpha)\cos\psi]}$.

Вважаємо, що хвиля падає на провідник нормально; тоді фазовий множник, який пройшов в провідник хвилі (опускаючи $e^{jwt}$) буде дорівнювати: $e^{-j\beta z - \alpha z}$.

У провіднику:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}}. \qquad (2.86)$$

Щільність струму, створювана полем хвилі, яка пройшла у провідник, дорівнює: $J = \sigma E \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(wt - \alpha z)}$. З (2.86) видно, чим більше частота $w$, тим більше $\alpha$, і тим менше $\delta = \frac{1}{\alpha}$.

Величина $\delta$ - глибина проникнення. Чисельно $\delta$ дорівнює відстані, на протязі якого амплітуда поля убуває у $e$ раз.

### *Контрольні запитання*

1. Що таке коефіцієнт відбиття?
2. Що таке коефіцієнт заломлення?
3. Що таке кут Брюстера?
4. Що таке явище повного внутрішнього відбиття?
5. Які особливості відбиття і заломлення на межах розділу діелектрика і провідника?

# 3 ПОНЯТТЯ ПРО НАПРАВЛЕНІ СИСТЕМИ І ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

## 3.1 Класифікація. Процеси в лініях передач

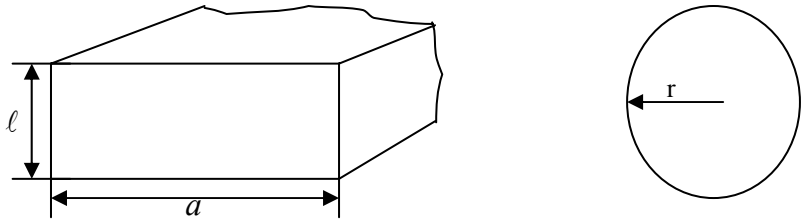
**Направлені системи** – це структури передачі електромагнітних хвиль. Їх також називають лініями передачі, так як вони забезпечують передачу енергії електромагнітних хвиль від джерела до споживача (від генератора до навантаження).

В залежності від конструктивних особливостей передавальні лінії класифікуються на:

- хвилеводні;
- двопровідні;
- коаксиальні;
- смугові;
- мікросмугові.

Розглянемо конструктивні особливості і характеристики основних видів передавальних ліній.

**Хвилеводи** – трьохмірна передавальна лінія з прямокутним або круглим розкривом. В них поширюються хвилі типу ТЕ або ТМ (поперечні хвилі – рис. 3.1).




а) б)

Рисунок 3.1 – Хвилеводи: а-прямокутний; б-коловий

Використовується у діапазоні надвисоких частот.

Більш докладно розглядаться в курсі “Техніка СВЧ”.

**Двопровідна повітряна лінія** – збалансована лінія, кожний з провідників якої має однаковий імпеданс відносно землі (рис. 3.2).

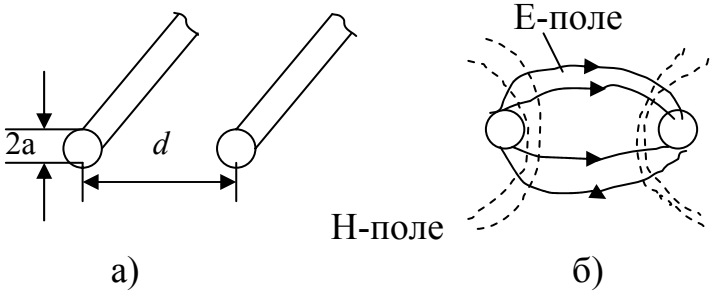



Рисунок 3.2 – Повітряна лінія: а-розміщення; б-структура поля

Така лінія має високий опір Ом/м і дуже малі розподілені індуктивності Генрі/м і ємності Фарад/м. Відстань $d$ залежить від діаметра проводів. На високих частотах зміною величини $d$ змінюють втрати на випромінювання.

<u>Параметри лінії на погонний метр:</u> $R = 2\rho / \pi a^2$ Ом; $R \sim \frac{1}{\pi a}\left[\frac{\omega\mu\rho}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ Ом; $L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}$ Генрі; $C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln d/a}$ Фарад; де $\rho$ - питомий опір; $a$ - радіус провідника; $d$ - відстань між центрами.

Імпеданс лінії $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{c}} = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon_0}}\ln\frac{4a}{d} = 276\log_{10}\frac{d}{a}$ Ом. $\vartheta_{сер} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\cdot 10^8$ м/сек.

Застосовується на низьких частотах – до 100 МГц, на невеликих дистанціях. На високих частотах втрати через скін-ефект у провідниках і випромінювання у простір.

**Коаксиальна лінія** – незбалансована лінія (зовнішній провідник на землі – рис. 3.3).

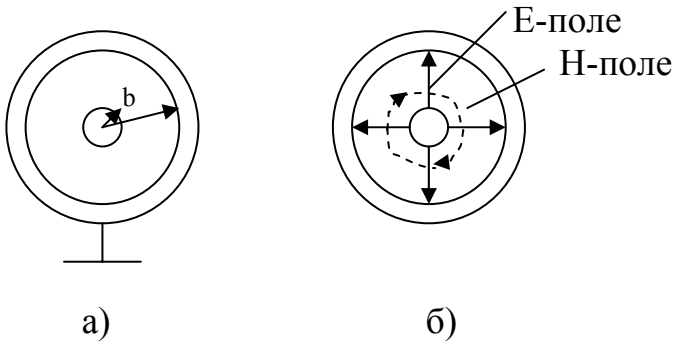
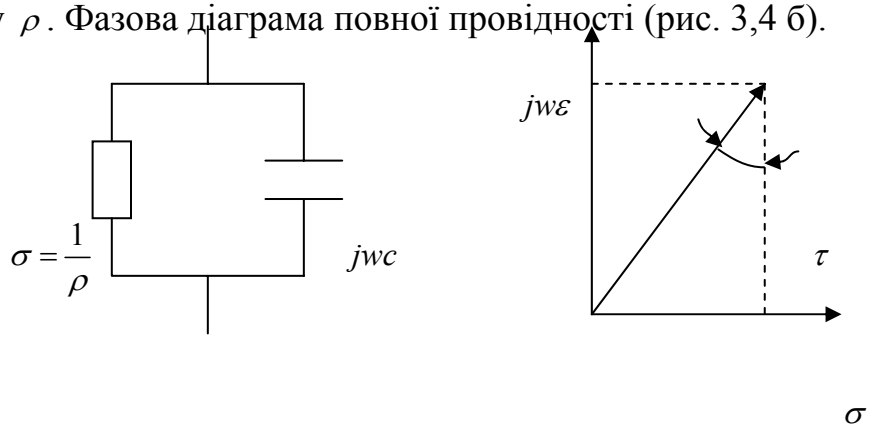



Рисунок 3.3 – Коаксиальна лінія: а-конструкція; б-структура поля

В ній поширюється поперечна хвиля ТЕМ. Лінія не має втрат на випромінювання, але є втрати в залежності від використовуваного діелектрика. Втрати потужності залежать від наявності у діелектрику провідності $\sigma$. Такий діелектрик представляється як великий опір, зашунтований ємністю (рис. 16.4, а). Провідність $\sigma$ зворотня питомому опору $\rho$. Фазова діаграма повної провідності (рис. 3,4 б).




а) б)

Рисунок 3.4 – Схема коаксиальної лінії: а-еквівалентна схема; б-фазова діаграма

Тут фазор втрат (кут втрат) визначається як $tg\tau = \frac{\sigma}{w\varepsilon}$. При малих $\tau$ $(tg\tau \to \tau)$, $\tau = \frac{\sigma}{w\varepsilon}$.

Чим менше повна провідність, тим менше ослаблення електромагнітної хвилі. Всі лінії мають опір втрат через кінцеву провідність. Загасання у коаксиальній лінії залежить від частот.

Коаксиальна лінія (кабель) має внутрішній мідний провідник; між металевою оболонкою і провідником – діелектрик.

<u>Параметри коаксиального кабеля на одиницю довжини:</u>

$$R \sim \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega\mu\rho}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right], \text{ Ом/м};$$

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu_\Gamma}{2\pi} \ln\frac{b}{a}, \text{ Г/м};$$

$$G = wc \cdot tg\tau, \text{ См/м};$$

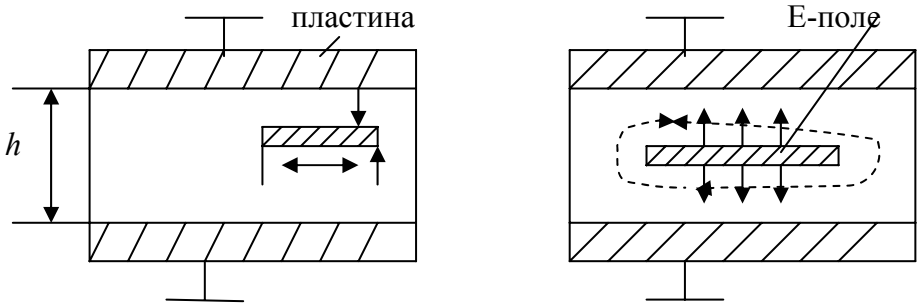
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_\Gamma}{\ln b/a}, \text{ Ф/м};$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{c}} = \frac{13b}{\sqrt{\varepsilon_\Gamma}} \log\frac{b}{a}, \text{ Ом};$$

$$\vartheta_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_Г \cdot \varepsilon_Г}}, \text{ м/с;}$$

$$\alpha = \frac{R_\sim}{2Z_0} \text{ Непер/м.}$$

Тут $b$ - радіус внутрішнього провідника; $\tau$ - кут втрат; $\rho$ - питомий опір провідника.




Хвиля ТЕС

а) б)

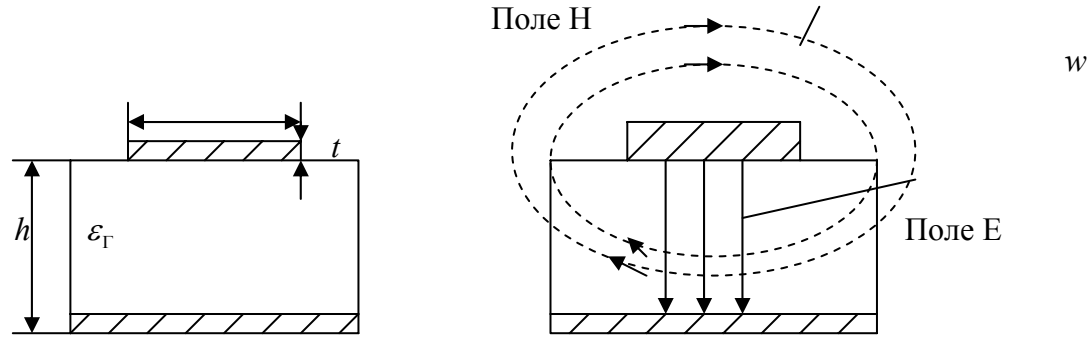
Рисунок 3.5 – Полоскова лінія: а-конструкція; б- розподіл полів

Центральна смужка має ширину $w$ і товщину $t$ (рис. 3.5).

Тут $Z_0 = \frac{30}{\sqrt{\varepsilon_Г}} \ln_2 \left[ \frac{1+\sqrt{\kappa}}{1-\sqrt{\kappa}} \right]$ Ом для $\frac{w}{h} \le 0,5$ і $Z_0 = \frac{30\pi^2}{\sqrt{\varepsilon_Г}} \ln_2 \left[ \frac{1+\sqrt{\kappa_1}}{1-\sqrt{\kappa_1}} \right]$ Ом для $\frac{w}{h} \succ 0,5$; $\kappa = \sec h(\pi w / 2h)$; $\kappa_1 = tgh(\pi w / 2h)$.

Довжина хвилі в лінії $\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon_Г}$. Загасання $\alpha = 4,34 \frac{R_s}{z_0 \cdot w} \frac{\partial Б}{см}$, де $R_s$ - поверхневий опір провідних ; $w$ - ширина смужки.

**Мікросмужкова лінія** наведена на рис. 3.6.




а) б)

Рисунок 3.6 – Мікрополоскова лінія: а-конструкція; б-розподіл полів

На підніжці (пластині з полістиролу, фібергласа) наноситься металева смужка. Діелектричний матеріал – субстрат має високу $\varepsilon_{\Gamma}$, що дозволяє проводити лінії без небезпеки інтерференції і випромінювання. Наприклад, для імпеданса лінії $z_0 = 50$ Ом з'єднання лінії повинно розміщатися хоча б крізь одну ширину $w$ і може бути збільшена для більш високого імпеданса.

Характеристичний імпеданс для випадку $w/h \succ 1$:

$$z_0 = \frac{120\pi/\sqrt{\varepsilon_{еф}}}{w/h + 1{,}393 + \frac{2}{3}\ln\left(w/h + 1{,}44\right)}; \quad \varepsilon_{еф} = \frac{\varepsilon_{\Gamma}+1}{2} + \frac{\varepsilon_{\Gamma}-1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+12h/w}}.$$

При $w/h \prec 1$: $\varepsilon_{еф} = \frac{\varepsilon_{\Gamma}+1}{2} + \frac{\varepsilon_{\Gamma}-1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+12h/w}} + 0{,}04\left(1-w/h\right)^2\right]$;

$$z_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{еф}}}\ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right).$$

Типові субстрати: тефлон з $\varepsilon_{\Gamma} = 2{,}55$; алюмна - $\varepsilon_{\Gamma} = 10$.

<u>Швидкість поширення хвилі в передавальній лінії.</u> Для лінії без втрат $\vartheta = \frac{c}{\sqrt{\mu_{\Gamma}\varepsilon_{\Gamma}}}$. Для більшості матеріалів, крім феритів, $\mu_{\Gamma} = 1$ і $\vartheta = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\Gamma}}}$.

В мікрополосковій хвилі в залежності від субстрату квазі-ТЕМ хвиля поширюється зі швидкістю $\vartheta = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{ЭФФ}}}$, $\varepsilon_{ЭФФ}$ знаходиться з рівнянь мікрополоскової хвилі.

<u>Вибір характеристичного імпеданса коаксиального кабеля.</u> У кабелі з малими втратами $Z_0$ залежить в основному від діаметру провідника і проникності діелектрика $\varepsilon_{\Gamma}$. Вибір $Z_0$ залежить від оптимізуючого параметра – загасання стерпної потужності, пробійної напруги.

Для коаксиальної лінії з повітряним діелектриком максимум стерпної потужності залежить від відношення діаметрів $\frac{D}{d}$; при відношенні, рівному 1,65 $Z_0$ = 30 Ом.

З іншого боку, при оптимізації напруги пробою потрібно відношення діаметрів, рівне 2,7, що відповідає $Z_0$ = 60 Ом.

В обох випадках спочатку дається щільність діаметрів ~ 3,6 і $Z_0 \simeq 77$ Ом. Величина $Z_0$=77 Ом стандартизована на 75 Ом.

При зміні повітря у кабелі поліетиленом, величина $Z_0$ зменшується до $Z_0 = \frac{77}{\sqrt{\varepsilon_{\Gamma}}} = 51$ Ом для $\varepsilon_{\Gamma} = 2{,}3$. Ця величина використовується при стандарті 50 Ом.

Для визначення струму $I$ і напруга $U$ уздовж лінії треба визначити електричні параметри лінії або їх еквіваленти. Два самих важких

параметра в лінії без втрат – це $L$ і $C$. Струм в лінії створює магнітний струм навколо провідників, який індуцирує напругу в провіднику $L\frac{di}{dt}$, де $L$ і $C$ - розподілені індуктивності і ємності.

При проходженні хвилі струм і напруги струм повинен проходити через розподілені котушки індуктивності, а напруга – розподілятися через розподілені ємності.

Це – інерціонний процес і швидкість поширення хвилі через лінію – кінцева. Наявність провідностей у діелектрику створює загасання, і реально можливі втрати в лінії. Ми розглядаємо лінію без втрат.

- Прямі хвилі в лінії без втрат.

Можна представити поширення струмів і е.р.с. в лінії (рис. 16.6), де и – передавальний кінець лінії – від джерела; н – приймальний кінець лінії – до навантаження.

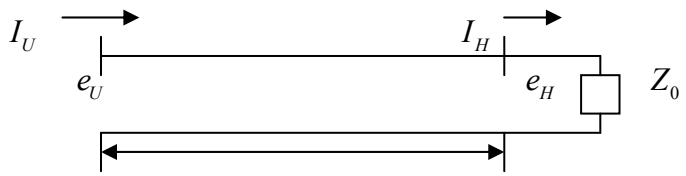



Рисунок 3.7 – Лінія без втрат

В загальному випадку при підключенні джерела в лінії присутні дві хвилі – падаюча і відбита.

*Падаюча хвиля* поширюється від джерела до відбиваючого кінця; *відбита* – від відбитого кінця до джерела (рис. 3.8).

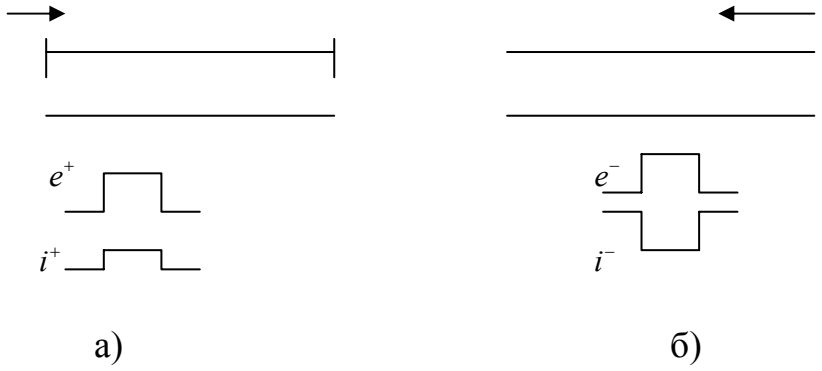



Рисунок 3.8 – Процеси в лінії без втрат: а- пряма хвиля; б-відбита хвиля

Падаюча хвиля е.р.с. - $e^+$, струму - $i^+$; відбита хвиля е.р.с. - $e^-$, струму - $i^-$. Струм падаючої хвилі $i^+ = \frac{e^+}{z_0}$.

Відбитий струм $i^- = -\frac{e^-}{z_0}$, знак “-“ показує, що відбита хвиля змінює напрямок – від навантаження до джерела.

Чому виникає відбиття?

Якщо імпеданс навантаження $Z_H = Z_0$ - характеристичному імпедансу лінії, то за законом Ома $\frac{e_H^+}{i_H^+} = Z_H = Z_0$ - відображень немає.

Но при $Z_H \neq Z_0$ повинна виникнуть друга хвиля, щоб закон Ома виконався. Таким чином, при $Z_H \neq Z_0$ виникає відображення. Остаточно повинно бути:

$$\frac{повне\,e}{повний\,i} = Z_H . \qquad (3.1)$$

- <u>Коефіцієнти відображення</u>. Повна напруга на навантаженні як повне $e = e^+ + e^-$; повний струм:

$$i = i_H^+ + i_H^- = \frac{e_H^+}{Z_0} - \frac{e_H^-}{Z_0} . \qquad (3.2)$$

З (3.1) і (3.3) одержуємо:

$$\frac{повне\,e}{повний\,i} = Z_H = Z_0 \frac{e_H^+ + e_H^-}{e_H^+ - e_H^-} . \qquad (3.3)$$

З (16.3) відношення між прямою і відбитою напругою знаходиться як:

$$\frac{e_H^-}{e_H^+} = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0} = \Gamma_H . \qquad (3.4)$$

Величина $\Gamma_H$ називається коефіцієнтом відображення напруги. Якщо $Z_R = Z_0$, то $\Gamma_H = 0$; при $Z_H \neq Z_0$ $e_H^- = \Gamma_H \cdot e_H^+$.

Відповідно *коефіцієнт відображення струму* $\frac{i_H^-}{i_H^+}$ - відображення по відношенню до $\Gamma_H$.

### *Контрольні запитання*

1. Які існують види передавальних ліній?
2. Який кут втрат діелектрика коаксиального кабеля?
3. Яка швидкість поширення хвилі в передавальній лінії?
4. Що таке падаюча хвиля?
5. Що таке відбита хвиля?
6. Що таке коефіцієнт відображення напруги?
7. Що таке коефіцієнт відображення струму?

## 3.2 Параметри електромагнітних хвиль в передавальних лініях. Сталий режим в лінії. Погоджена лінія. Параметри електромагнітних хвиль в передавальних лініях. Неспотворююча лінія

В передавальній лінії крім індуктивності $L$ і ємності $C$, є опір лінії $R$ і провідність діелектрика $G$.

За законом Ома і Кірхгофа вихідна напруга $E+\Delta E = E - I\left(R+jwL\right)\Delta x$, або $\frac{\Delta E}{\Delta x} = -\left(R+jwL\right)\cdot I$.

Відповідно, струм $\Delta I + I = I - \left(G+jwC\right)\left(E+\Delta E\right)\cdot\Delta x = I - \left(G+jwC\right)\cdot E\cdot\Delta x$; $\Delta x\cdot\Delta E$ - мало, $\simeq 0$.

Тоді $\frac{\Delta I}{\Delta x} = -\left(G+jwC\right)\cdot E$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{dI}{dt} = -\left(G+jwC\right)E$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta E}{\Delta x} = -\left(R+jwL\right)I$.

Зазвичай послідовний імпеданс на одиницю довжину $\left(R+jwL\right)$ позначають символом $Z$, а паралельну провідність на одиницю довжини $Y$: $Z = R+jwL$; $Y = G+jwC$.

- <u>Диференціальні рівняння сталого режиму:</u>

$$\frac{dE}{dx} = -ZI\,; \tag{3}$$

$$\frac{dI}{dx} = -Y\cdot E\,. \tag{4}$$

Похідні від (3) і (4):

$$\frac{d^2E}{dx^2} = -Z\frac{dI}{dx}; \tag{5}$$

$$\frac{d^2E}{dx^2} = (YZ)E\ . \qquad (6)$$

Рішення цих рівнянь: $E = A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} + A_2 e^{\sqrt{ZY}x}$; $I = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(A_1 e^{-\sqrt{ZY}x} - A_2 e^{\sqrt{ZY}x}\right)$.

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ - характеристичний імпеданс або хвильовий опір.

Загальне рішення для напруги в лінії: $E(x) = A_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + A_2 e^{(\alpha + j\beta)x}$.

Для нескінченої лінії з $x \to \infty$, $e^{\alpha_x} \to \infty$, тому другим членом зневажає, так як це фізично нереально.

Таким чином, маємо: $E(x) = A_1 e^{-\upsilon_x}$, $\upsilon = \alpha + j\beta$.

Для перебування $A_1$ використовуємо граничні умови з боку джерела.

Лінія з імпедансом $Z_0$ - погоджена лінія. Такі лінії називають *нерезонансними* або *правильно навантаженими*.

Еквівалентний ланцюг погодженої лінії (рис. 3.9).

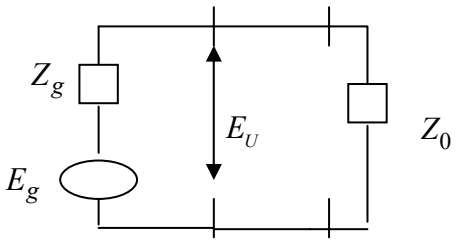
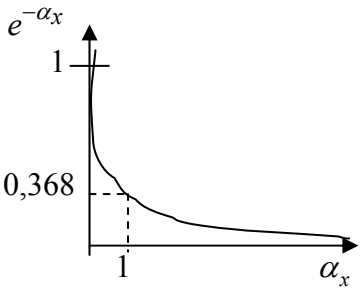



Рисунок 3.9 – Еквівалентний ланцюг

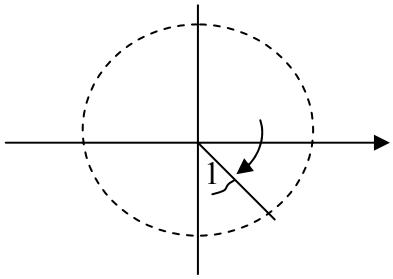
Тут $E_g = E_g \cdot \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}$.

- <u>Пряма хвиля.</u> Напруга в погодженій лінії: $E(x) = E_U \cdot e^{-(\alpha + j\beta)\cdot x} = E_U \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}$.

Фактор $e^{-\alpha x}$ показує експотенціальне зменшення амплітуди напруги за напрямком до навантаження (рис. 3.10, а).




а)




б)

Рисунок 3.10 – Напруга в погодженому навантаженні: а-зменшення амплітуди; б-наростання фази

Фактор $e^{-j\beta x}$ показує наростання фази при зростанні x.

Миттєва форма прямої хвилі: $e = R_e\left(\sqrt{2}E_g e^{-\alpha x}\cdot e^{-j\beta x}\cdot e^{-jwt}\right) = \sqrt{2}E_g\cdot e^{-\alpha x}R_e\left[e^{-j(wt-\beta x)}\right] = \sqrt{2}E_u\cos(wt-\beta x)$ при $\alpha = 0$; цей вираз – для лінії без втрат.

У загальній формі процес поширення в лінії описується рівняннями струму і напруги: $I(x) = \frac{1}{Z_0}\left(A_1 e^{-\nu x} - A_2 e^{\nu x}\right)$; $E(x) = A_1 e^{-\nu x} - A_2 e^{\nu x}$, де фактори, які містять $e^{-\nu x}$ відносяться до прямої хвилі $\left(I^{+} або E^{+}\right)$, а ті, які містять $e^{\nu x}$ - до відбитої хвилі.

Для визначення фазової швидкості розглянемо точку з постійною фазою $(\beta_x - wt) = const$, де $\beta$ і $w$ - постійні.

Узявши похідну, отримаємо $\frac{d}{dt}(\beta_x) - \frac{d}{dt}w = \frac{d}{dt}const$ і $\frac{\beta dx}{dt} - w = 0$.

Відповідно швидкість $\vartheta_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{\beta}$ м/с.

Швидкість в лінії без втрат при $\alpha = 0$ знаходиться з $\nu = \alpha + j\beta = \sqrt{jwL\cdot jwc} = jw\sqrt{LC}$, або $\beta = w\sqrt{LC}$, звідки $\vartheta_\phi = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$\lambda$ - це дистанція, яка проходить хвилею за один цикл - $2\pi$ радіан: $\beta\cdot\lambda = 2\pi$, або $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{w}\cdot\vartheta_\phi = \frac{\vartheta_\phi}{f}$.

- <u>Залежність параметрів лінії від частоти.</u>

$Z_0 = \sqrt{\frac{R + jwL}{G + jwC}}$; $\nu = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + jwL)(G + jwC)}$.

$\vartheta_\phi = \frac{w}{\beta}$.

*Постійний струм:* $w = 0$.

$\alpha = \sqrt{RG}$ - дуже мало;

$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{G}}$ - дуже велико, так як $G$ дуже мало.

*Низькі частоти* $(wL \prec\prec R)$: у доброму ізоляторі $G \to 0$; тоді $Z_0 = \sqrt{\frac{R}{jwC}} = \sqrt{\frac{R}{2wC}} - j\sqrt{\frac{R}{2wC}}$, імпеданс $Z_0$ - ємносний на низьких частотах; реактивні і активні компоненти зменшуються зі зростанням частоти $w$.

Така залежність імпеданса від частоти утрудняє узгодження лінії: $\nu = \sqrt{R \cdot jwC}$; $\alpha + j\beta = \sqrt{\frac{RwC}{2}} + j\sqrt{\frac{RwC}{2}}$ - загасання зростає з ростом частоти $w$.

Швидкість $\vartheta_\phi = \frac{w}{\sqrt{\frac{RwC}{2}}} = \sqrt{\frac{2w}{RC}}$, вона зменшується з частотою і приводить до перекручування сигналів в лінії, так як високочастотні компоненти проходять швидше.

- <u>Дуже високі частоти</u> $wL \succ\succ R$; $wC \succ\succ G$ з малою $G$.

Тут $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $\nu = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + jwL) \cdot wC}$, або $\nu = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + jw\sqrt{LC}$.

Загасання на високих частотах $\alpha \to \frac{R}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$, а фазова швидкість $\vartheta_\phi \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

При передачі комплексного сигнала через лінію загасання всіх частотних компонентів повинно бути постійним, також як і фазова швидкість. Це забезпечує неспотворювану передачу сигнала, тільки з ослабленням і затримкою у часі.

Таким чином, для неспотворюваної лінії повинно бути $\alpha = const$; $\beta = w_x const$.

Постійна поширення для лінії $\nu = \sqrt{(R + jwL)(G + jwC)}$.

В лінії без втрат $R = 0$; $G = 0$; $\alpha = 0$ і $\beta = w\sqrt{LC}$.

На низьких частотах це представлення невірно і лінія в загальному неспотворювана. Умова неспотворюваної лінії: $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$. При цьому $\alpha = \sqrt{RG}$; $\beta = w\sqrt{LC}$ і $\vartheta_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Наприклад, в телефонній довгій лінії відношення $\frac{R}{L}$ в тисячу раз більше, ніж $G/C$. Для виконання неспотворюваних умов $G$ треба збільшувати, але при цьому зростає $\alpha$ - ослаблення; $R$ треба зменшувати, збільшуючи діаметр провідників. $C$ також можна зменшити, збільшуючи відстань між провідниками, але це має практичне відображення.

Основним методом є збільшення $L$ шляхом підключення індуктивного навантаження.

### *Контрольні запитання*

1. Які існують розподілені параметри передавальної лінії?

2. Яке рішення диференційних рівнянь сталого режиму?
3. Що таке коефіцієнт поширення?
4. Яка швидкість хвилі в лінії без втрат?
5. У чому полягає залежність параметрів лінії від частоти?

### 3.3 Поняття про направлені системи. Неузгоджена лінія. Відрізки короткозамкнутої лінії

Неузгоджена лінія. В таких лініях є присутнім пряма и відбита хвилі (рис. 3.11 ).

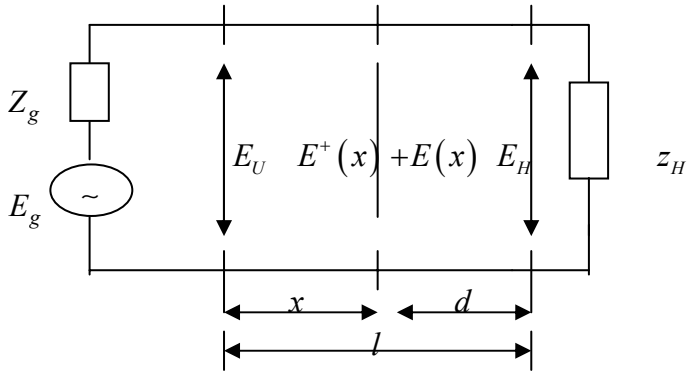



Рисунок 3.11 - Неузгоджена лінія

Зворотня хвиля дана у формі $e^{+\nu x}$ або еквівалентно $e^{+\nu d}$ ($d$ - відстань від навантаження). Тоді

$$E(x) = E^+(x) + E^-(x), \tag{3.5}$$

де $E^+(x)$ - пряма хвиля у точці $x$;

$E^-(x)$ - відбита хвиля у точці $x$,

може бути записана у вигляді

$$E^+(x) = E^+(0) \cdot e^{-\nu x}, \tag{3.6}$$

де $E^+(0)$ - напруга на вході.

Пряма хвиля на навантаженні $E^+(l) = E(0)e^{-\nu l}$; відбита хвиля

$$E^-(l) = \Gamma_H \cdot E^+(l) = \Gamma_H E^+(0) e^{-\nu l}. \tag{3.7}$$

$\Gamma_H = \frac{e_H^-}{e_H^+} = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0}$.

При напрямку від навантаженнядо джерела, (3.7) – відбита хвиля у точці $x$ або $d$: $E^-(d) = E^-(l) \cdot e^{-\nu_d}$.

При $E^{-d}(d) = E^-(x)$, у тій точці $E^-(e) \cdot e^{-\vartheta(l-x)}$.
Відповідно

$$E^-(x) = \Gamma_H E^+(0) e^{-\vartheta l} \cdot e^{-\vartheta(l-x)} = E^+(0) \Gamma_H e^{-\vartheta(2l-x)}. \quad (3.8)$$

Повна напруга скрізь вздовж лінії знаходиться у відповідності з (3.5) і (3.6):

$$E(x) = E^+(0)\left[e^{-\vartheta x} + \Gamma_H e^{-\vartheta(2l-x)}\right]. \quad (3.9)$$

Так як $E^+(0)$ невідомо, воно може бути представлено через $E_U$ у точці $x = 0$: $E(0) = E_U = E^+(0)\left(1 + \Gamma_H e^{-2\vartheta l}\right)$, і відповідно $E^+(0) = \frac{E_U}{1 + \Gamma_H e^{-2\vartheta l}}$.

З рівняння (3.9)

$$E(x) = E_U \frac{e^{-\nu x} + \Gamma_H e^{-\vartheta(2l-x)}}{1 + \Gamma_H e^{-2\nu l}}. \quad (3.10)$$

Для прямого струму: $I^+(x) = \frac{E^+(x)}{Z_0}$; для зворотного струму: $I^-(x) = -\frac{E^-(x)}{Z_0}$.

Знак “-“ – струм тече від навантаження. Загальний струм $I(x) = I^+(x) + I(x) = \frac{E^+(0)}{Z_0} e^{-\nu x} - \Gamma_H \frac{E^+}{Z_0} e^{-\nu(2l-x)}$, $I(x) = \frac{E^+(0)}{Z_0}\left[e^{-\nu x} - \Gamma_H e^{-\nu(2l-x)}\right]$.

Тоді для $E^+(0)$: $I(x) = \frac{E_U}{Z_0} \frac{e^{-\nu x} - \Gamma_H e^{-\nu(2l-x)}}{1 + \Gamma_H e^{-2\nu l}} = \frac{E_U}{Z_0} \frac{e^{\nu(l-x)} - \Gamma_H e^{-\nu(2l-x)}}{e^{\nu l} + \Gamma_H e^{-\nu l}}$.

Для перебування $E_U$ повинен бути відомий вхідний імпеданс:

$$Z_U = \frac{E(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{e^{\nu l} + \Gamma_H e^{-\nu l}}{e^{\nu l} - \Gamma_H e^{-\nu l}}.$$

(3.11)

Для лінії без втрат з $R=0$; $G=0$ і $\alpha=0$:
$e^{\nu(l-x)}=-e^{j\beta(l-x)}=\cos\beta(l-x)+j\sin\beta(l-x)$;
$e^{-\nu(l-x)}=-e^{-j\beta(l-x)}=\cos\beta(l-x)-j\sin\beta(l-x)$, і аналогічно для $e^{\nu l}$ і $e^{-\nu l}$.

З $\Gamma_H=\dfrac{Z_H-Z_0}{Z_H+Z_0}$ рівняння навантаження мають вигляд:

$$E(x)=E_u\frac{Z_H\cos\beta(l-x)+jZ_0\sin\beta(l-x)}{Z_H\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}; \tag{3.12}$$

$$I(x)=\frac{E_u}{Z_0}\frac{Z_H\cos\beta(l-x)+jZ_0\sin\beta(l-x)}{Z_H\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}; \tag{3.13}$$

$$Z_u=Z_0\frac{Z_H\cos\beta(l-x)+jZ_0\sin\beta(l-x)}{Z_H\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}. \tag{3.14}$$

Розглянемо два екстремальних випадки непогодженості. Це – короткозамкнута на кінці лінія і розімкнута на кініці лінія.

а) короткозамкнута лінія без втрат. З рівняння (3.12) напруга на навантаженні лінії:

$$E_H=E(l)=E_u\frac{Z_H}{Z_H\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}, \tag{3.15}$$

звідси

$$E_u=\frac{E_H}{Z_H}\left(Z_H\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l\right). \tag{3.16}$$

Для $d=l-x$ маємо $E(d)=E_u\left[\dfrac{Z_H\cos\beta d+jZ_0\sin\beta d}{Z_H\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}\right]$.

Представляючи (3.16) для $E_u$, одержимо:

$$E(d)=E_H\left(\cos\beta d+j\frac{Z_0}{Z_H}\sin\beta d\right)=E_H\cos\beta d+jI_HZ_0\sin\beta d. \tag{3.17}$$

Для струму за аналогією:

$$I(d)=I_H\cos\beta d+j\frac{E_H}{Z_0}\sin\beta d. \tag{3.18}$$

Імпеданс у точці $d$:

$$Z(d)=\frac{E(d)}{I(d)}=\frac{Z_H\cos\beta d+jZ_0\sin\beta d}{\cos\beta d+(Z_H/Z_0)\sin\beta d}. \qquad (3.19)$$

<u>Для короткозамкнутого ланцюга</u> $Z_H=0$ і $E_H=0$;
тоді :

$$E_{K.З}=jI_H\cdot Z_0\sin\beta d=jI_H Z_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}d, \qquad (3.20)$$

$$I_{K.З}=I_H\cdot\cos\beta d=I_H\cos\frac{2\pi}{\lambda}d. \qquad (3.21)$$

Рівняння (3.20) і (3.21) показують, що в короткозамкнутому ланцюзі струм і напруга зрушені на $90^\circ$. Відповідно коефіцієнт передачі потужності $\cos 90^\circ=0$ і в лінії немає передачі потужності.

Напруга дорівнює нулю на короткозамкнутому кінці і максимально на $\lambda/4$ від кінця до джерела. Так, навпаки, максимальний на короткозамкнутому кінці і максимальний на $\lambda/4$ від кінця до джерела. В результаті маємо <u>стоячу хвилю</u>.

Короткозамкнута лінія використовується для визначення напруги, що змінюється амплітудою і постійною фазою шляхом руху вздовж лінії між двома сусідніми кутами. При цьому змінюється імпеданс $Z(d)=\frac{E(d)}{I(d)}$.

Застосування відрізків короткозамкнутої лінії:

1. Коаксиальний ізолюючий опір (рис. 3.12)

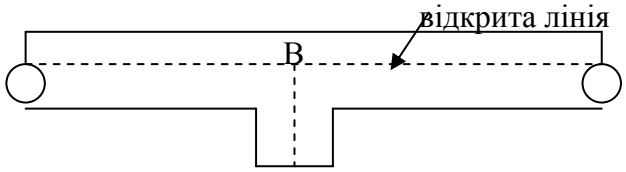



Рисунок 3.12 – Короткозамкнута лінія

У точці А – коротке замикання; через $\lambda/4$ - в точці В – максимальний активний опір, ізольований від ділянки з коротким замиканням, який використовується як опір лінії.

2. $\lambda/4$ трансформатор, що погодить (рис. 3.13, 3.14).

а) б)

Рисунок 3.13 – Узгоджуючий трансформатор:
а – небалансна; б-балансна

Використовується для з'єднання небалансної (кабельної) і балансної (повітряної) лінії. На низьких частотах використовують звичайний трансформатор. На високих частотах використовується $\lambda/4$ стакан у якості трансформатора (рис. 3.14).

Точка А ізольована від землі і може підключатися до балансної лінії.

У розімкнутій лінії $Z_H = \infty$, струм на кінці лінії дорівнює нулю, а напруга – максимуму (рис. 3.15).

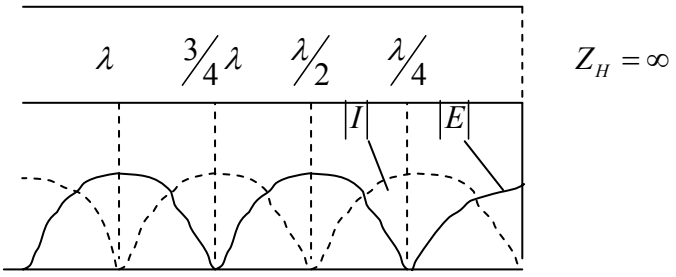



Рисунок 3.15 – Стояча хвиля в розімкнутій лінії

Імпеданс розімкнутої на кінці лінії визначається як $Z_{Р.Л}(d) = -jZ_0 ctg\frac{2\pi}{\lambda}d$. Це представлено на рис. 3.16.

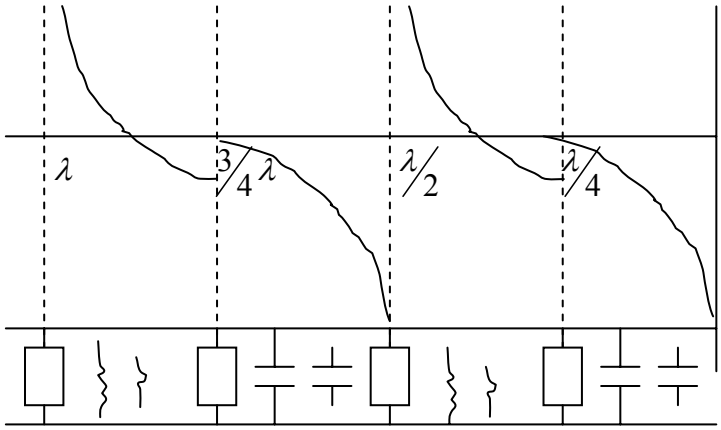



Рисунок 3.16 – Розподіл імпеданса

Розімкнута на кінці лінія використовується не так часто, як короткозамкнута. Одним з її недоліків на високих частотах є поява випромінювання з відкритого кінця, коли навантаження стає активним.

***Контрольні запитання***

1. Яка пряма хвиля в неузгодженій лінії?
2. Яка зворотня хвиля в неузгодженій лінії?
3. Що таке стояча хвиля напруги?
4. Як змінюється імпеданс вздовж короткозамкнутої лінії?
5. Як змінюється імпеданс вздовж відкритої лінії?

## 3.4 Поняття про направлені системи. Резонансні ланцюги. Коефіцієнт напруги стоячої хвилі. Графічне рішення рівнянь лінії

На високих частотах короткозамкнута лінія з повним відображенням часто представляється як зручна індуктивна котушка. Розповсюджена ємність між кінцями котушки сильно зменшує імпеданс при збільшенні частоти і котушка представляється в комплексному вигляді.

**Резонансний ланцюг –** це послідовне або паралельне з'єднання ємностей і індуктивностей, тому короткозамкнута і відкрита лінії використовують як резонансні. Так, короткозамкнута $\lambda/4$ секція лінії представляється як послідовний резонансний ланцюг (рис. 3.17).

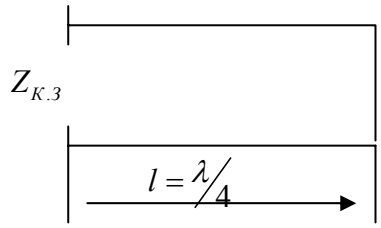



Рисунок 3.17 – Короткозамкнута $\lambda/4$ секція лінії

Тут $Z_{K.З} = jZ_0 tg\beta l$, $\beta = \dfrac{\omega}{\vartheta_\phi} = \dfrac{2\pi f}{\vartheta_\phi} = \dfrac{2\pi f}{f_0 \cdot \lambda_0}$ і

$$Z_{K.З} = jZ_0 tg\frac{2\pi f \cdot \lambda_0}{\lambda_0 \cdot 4} = jZ_0 tg\frac{\pi f}{2f_0}. \qquad (3.22)$$

На частоті $f_0$ імпеданс $Z_{K.З} \to \infty$ (рис. 3.18) також як і в паралельному резонансному $L-C$ контурі.

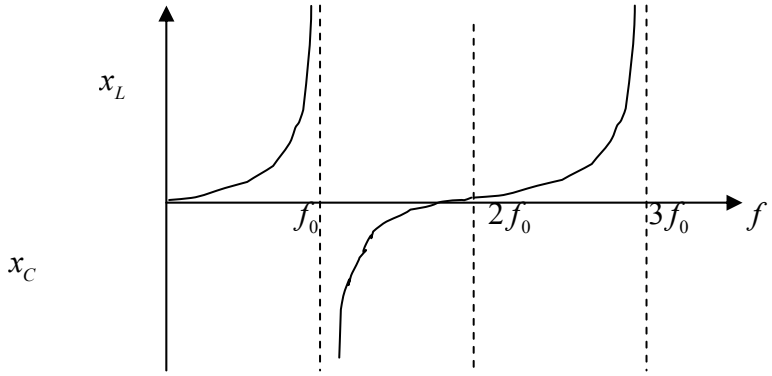



Рисунок 3.18 – Розподіл імпеданса

З іншої сторони, на частоті $2f_0$ імпеданс $Z_{K.З} \to 0$, як і в послідовному резонансному $L-C$ контурі.

Рис. 3.18 показує, що $\lambda/4$ відрізок лінії на частоті $f_0$ є паралельним резонансним контуром. Це повторюється на $3f_0$, $5f_0$,… і так далі – на непарних гармоніках. На парних гармоніках - $2f_0$, $4f_0$… відрізок $\lambda/4$ представляє собою послідовний резонансний контур.

При послідовному резонансі $Z_{МІН} = Z_0 \cdot \alpha \cdot \ell$, $\alpha\ell \prec\prec 1$. Представлення $\beta = \omega\sqrt{LC}$ і $\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ можуть використовуватися для визначення мінімума і максимуму імпеданса. Для лінії з великими втратами ці представлення непридатні, тут і $Z_{МАКС}$, $Z_{МІН} \to Z_0$ для $\alpha\ell \succ\succ 1$. Таким чином, лінії з втратами не можуть бути резонансними.

<u>Резонансний ланцюг</u> описують два параметра: $Q$ - добротність і $B \cdot W$ - смуга пропущення.

Визначення: $Q = \omega \cdot \frac{Запасенаенергія}{Розсіянаенергія}$; $BW = \frac{f_0}{Q}$. При $\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$; $\beta = \sqrt{LC}$,

$$Q = \frac{\omega_0 LC}{RC + LG}. \tag{3.23}$$

Для лінії з повітряним діелектриком $G = 0$ і $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ - величина порядку тисяч.

Коефіцієнт напруги стоячої хвилі, або КСХ:

$$КСВ = \frac{|E_{МАКС}|}{|E_{МІН}|}, \tag{3.24}$$

$E_{МАКС}$ - це пікове (або середнє квадратичне) значення напруги стоячої хвилі у кожній точці (рис. 3.19).

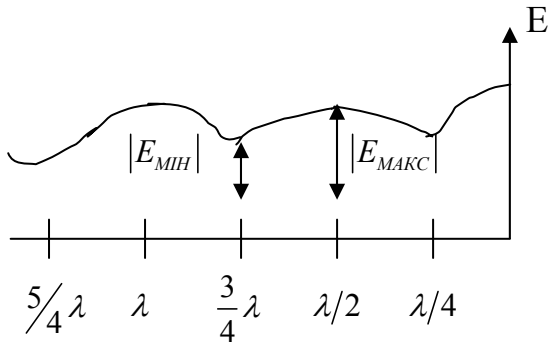



Рисунок 3.19 – Стояча хвиля

В децибелах: $КСХ(дБ) = 20\log КСХ$, де $КСХ$ - легко вимірювана величина в лінії. Так, в лінії без відображень $|E_{МАКС}| = |E_{МІН}|$ і $КСХ = 1$.

**Зауваження:** КСХ не може бути обмірюваний при великих втратах в лінії. При наявності відображень в лінії: $|E_{МАКС}| = |E^+| + |E^-|$. $|E_{МІН}|$ визначається як $|E_{МІН}| = |E^+| - |E^-|$.

Таким чином,

$$КСХ = \frac{|E^+| + |E^-|}{|E^+| - |E^-|} = \frac{1 + |E^-| / |E^+|}{1 - |E^-| / |E^+|}, \qquad (3.25)$$

$$\Gamma_H = \frac{E^-}{E^+}.$$

<u>КСХ для різноманітних навантажень</u>:

а) Короткозамкнута лінія $-Z_H = 0$: $\Gamma_H = \frac{Z_H - Z_0}{Z_H + Z_0} = -1$; $|\Gamma_H| = 1$;

$КСХ = \frac{1+1}{1-1} = \infty$.

б) Відкрита лінія, $Z_H = \infty$: $\Gamma_H = 1$; $КСХ = \infty$.

в) Погоджена лінія, $Z_H = Z_0$: $\Gamma_H = 0$; $КСХ = \frac{1+0}{1-0} = 1$.

г) $Z_H = 2Z_0$: $\Gamma_H = \frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = \frac{1}{3}$; $КСХ = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$.

Таким чином, мінімальний КСХ дорівнює одиниці.Це правильно, інакше $E_{МАКС}$ повинно бути менше $E_{МІН}$; тому якщо $КСХ \prec 1$ - існує протиріччя.

<u>Зворотні втрати</u> в лінії визначаються як відношення потужності прямої хвилі у точці переривання до потужності, відбитої від цієї точки.

Пряма потужність: $P^+ = |E^+|^2 / Z_0$; зворотня потужність: $P^- = |E^-|^2 / Z_0$.

Відношення $\frac{P^-}{P^+} = \frac{|E^-|^2}{|E^+|^2}$.

<u>Зворотні втрати</u> в децибелах: зворотні втрати

$$(дБ) = 10 \log \frac{P^+}{P^-} = 20 \log \frac{1}{|\Gamma_H|}. \qquad (3.26)$$

Через КСХ:

$$КСХ = \frac{|E_{МАКС}|}{|E_{МІН}|} = \frac{1-|\Gamma_H|}{1+|\Gamma_H|},$$

(3.27)

$$|\Gamma_H| = \frac{КСХ-1}{КСХ+1}$$

і зворотні втрати в одиницях КСХ дорівнює зворотні втрати

$$(\partial Б) = 20\log\frac{КСХ-1}{КСХ+1}. \qquad (3.28)$$

Втрати при передачі $P_П = P^+ - P^-$ і

$$\text{втрати на передачу} = 10\log\frac{P^+}{P_П} = 10^1\log\frac{P^+}{P^+-P^-} = 10\log\frac{1}{1-|\Gamma_H|^2}. \qquad (3.29)$$

В одиницях КСХ:

$$\text{втрати на передачу} = 10\log\frac{КСХ+1}{4КСХ}. \qquad (3.30)$$

В децибелах $20\log e^{-\alpha\Delta x} = -\alpha\Delta x 20\log e = -\alpha\Delta x\cdot 8,686$.

Таким чином, $-\alpha\Delta x$ - представляє загасання в неперах, втрати в 1 непер представляються 8,686 $\partial Б$. Отже, 1 непер = 8,686 $\partial Б$.

<u>Графічне рішення рівнянь лінії</u> зменшує об'єм роботи при розрахунку характеристик лінії. Так, для розрахунку вхідного імпеданса

$$Z_{вх} = \frac{E(0)}{I(0)} = Z_0\frac{e^{\nu\ell}+\Gamma_H e^{-\nu\ell}}{e^{\nu\ell}-\Gamma_H e^{-\nu\ell}}. \qquad (3.31)$$

Коефіцієнт відображення $\Gamma_H = |\Gamma_H|\underline{|\Phi}$, де $|\Gamma_H|$ - модуль; $\Phi$ - фазовий кут.

Після ділення (3.31) на $e^{\nu\ell}$ у чисельнику і знаменнику одержуємо:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1+|\Gamma_H|e^{-\alpha d}\cdot e^{-j(2\beta d-\Phi)}}{1-|\Gamma_H|e^{-\alpha d}\cdot e^{-j(2\beta d-\Phi)}}. \qquad (3.32)$$

Для лінії без втрат $\alpha = 0$, тоді

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1+|\Gamma_H|\underline{|\Phi - 2\beta d}}{1-|\Gamma_H|\underline{|\Phi - 2\beta d}}.$$

(3.33)

Чисельник і знаменник (3.33) представлені на рис. 3.20.

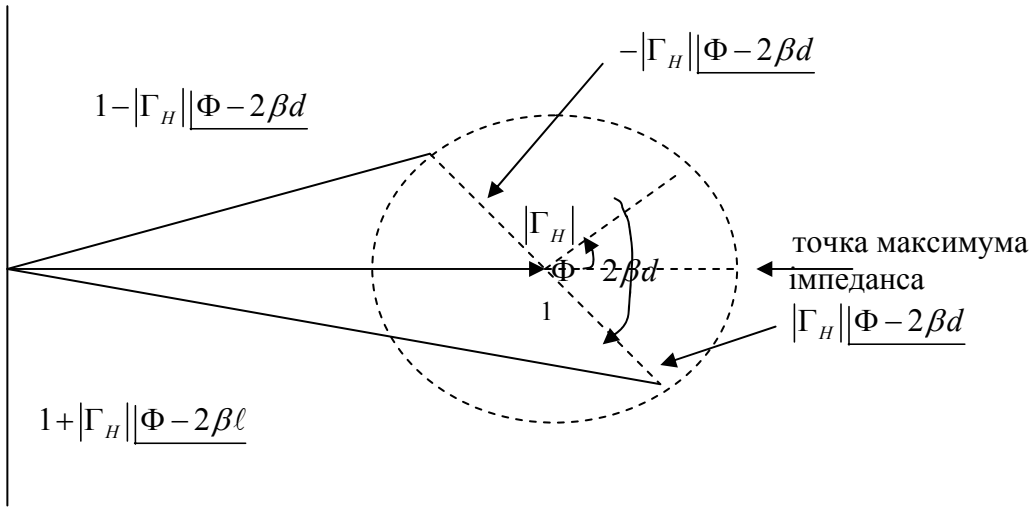



Рисунок 3.20 – Графік рішення рівнянь лінії

З діаграми рис. 3.20 випливає, що чисельник максимальний, коли $1+|\Gamma_H|\underline{|\Phi - 2\beta \ell}$ у фазі і коліарний з 1, а знаменник – мінімальний. Це – точка максимума нормалізованого імпеданса:

$$\left(\frac{Z}{Z_0}\right)_{МАКС} = \frac{1+|\Gamma_H|}{1-|\Gamma_H|}, \qquad (3.34)$$

вона позитивна і реальна, так як максимальне значення для коефіцієнта відображення $|\Gamma_H| = 1$.

З рівняння $КСХ = \frac{1+|\Gamma_H|}{1-|\Gamma_H|}$ бачимо, що (3.34) відповідає КСХ.

Таким чином, <u>максимальний нормалізований імпеданс</u> в лінії без втрат еквівалентний КСХ з реальною величиною:

$$КСХ = \left(\frac{Z}{Z_0}\right)_{МАКС}. \qquad (3.35)$$

Діаграма містить активні і реактивні графіки. Представимо

$$\frac{Z}{Z_0} = r + jx\,, \tag{3.36}$$

де $r$ - нормалізований активний опір;
$x$ - нормалізований реактивний опір.
Представимо

$$\left|\Gamma_H\right|\underline{\left|\Phi - 2\beta d\right.} = U + j\vartheta\,. \tag{3.37}$$

Права частина (3.37) – це прямокутна форма лівої частини, яка в полярній системікоординат (3.21).

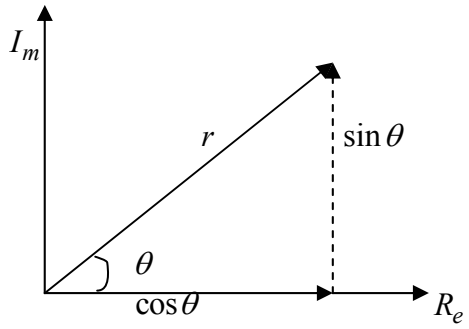



Рисунок 3.21 – Полярна система координат

Експотенціальна форма: $r \cdot e^{j\theta}$;
Прямокутна форма: $r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right)$;
Полярна форма: $r\underline{|\theta}$.
Рівність

$$\frac{Z}{Z_0} = r + jx = \frac{1 + u + j\vartheta}{1 - u - j\vartheta} = \frac{1 - u^2 - \vartheta^2 - 2j\vartheta}{\left(1 - u\right)^2 + \vartheta^2}\,. \tag{3.28}$$

Тут ми зменшимо чисельник і знаменник на $\left(1 + u + j\vartheta\right)$.

а. <u>Рівняння для активної і реактивної частини імпеданса.</u> Зрівнявши реальну і мниму частини, одержимо:

$$r\left(1 - 2u + u^2 + \vartheta^2\right) = 1 - \vartheta^2 - u^2\,, \tag{3.39}$$

$$x\left(1 - 2u - u^2 + \vartheta^2\right) = 2\vartheta\,. \tag{3.40}$$

Рівняння

$$u^2 - \frac{2r}{r+1}u + \vartheta^2 = \frac{1+r}{1-r} \text{ -} \tag{3.41}$$

це рівняння окружності.

Доповнимо квадрати в рівняння і знайдемо центр:

$$\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \vartheta^2 = \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2,$$

(3.42)

$$\left(u - \frac{r}{r+1}\right)^2 + \vartheta^2 = \frac{1}{(1+r)^2}. \tag{3.43}$$

(3.42) і (3.43) – рівняння окружності з радіусом $\frac{1}{1+r}$ і центром $u = \frac{r}{1+r}$ і $\vartheta = 0$.

Таблиця 3.1 – Радіуси і центри для активної частини імпеданса

| $r$ | Радіус | Центр | |
|---|---|---|---|
| | | $\vartheta$ | $u$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1/2 | 2/3 | 0 | 1/3 |
| 1 | 1/2 | 0 | 1/2 |
| 2 | 1/3 | 0 | 2/3 |

Таблиця 3.2 – Радіуси і центри для реактивної частини імпеданса

| x | Радіус | Центр | |
|---|---|---|---|
| | | $\vartheta$ | $u$ |
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | 1 |
| $\pm 1$ | 1 | $\pm 1$ | 1 |
| $\pm 2$ | 1/2 | $\pm\frac{1}{2}$ | 1 |

Аналогічно для $x$ знаходимо:

$$(u-1)^2 + \left(\vartheta - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \tag{3.44}$$

Радіус окружності тут $\frac{1}{x}$, а центри – в $u = 1$ і $\vartheta = 1$.

### *Контрольні запитання*

1. Які відрізки лінії розглядають як резонансні ланцюги?
2. Що таке добротність резонансного ланцюга?
3. Який коефіцієнт стоячої хвилі напруги?
4. Який зв'язок коефіцієнта стоячої хвилі з коефіцієнтом відображення?
5. Що таке зворотні втрати в лінії?
6. Що таке діаграма Сміта?

## 3.5 Узгодження імпеданса. Узгоджуючі елементи

Узгодження виробляється, коли в лінії є відображення хвилі.

Достоїнства узгодження:

- лінія передає дану потужність з малим піковою напругою і при неузгодженості мало шансів на передачу великих величин потужності;

- при узгодженості вхідного імпеданса залишається величиною $Z_0$ і при зміні частот виключаються модуляційні перекручування;

- нерезонансні лінії не впливають на частоту генератора. Резонансні мають змінювану реактивну компоненту зі зсувом частоти, яка відображається у зовнішній ланцюг генератора.

Розглянемо умови максималізіції переданої потужності. 3.22).

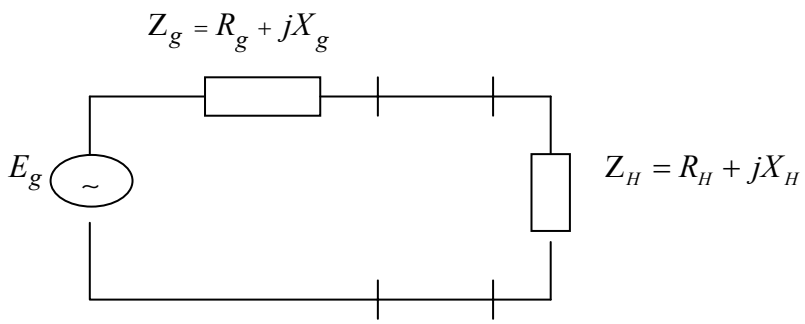



Рисунок 3.22 – Імпеданси навантаження і генератора

При цьому $R_H = R_g$; $X_H = -X_g$.

Таким чином, для забезпечення передачі максимума потужності від генератора до навантаження без відображень, приймають відповідні секції, що погодять або генератори, установлювані в точках генератора і навантаження лінії (рис. 3.23).

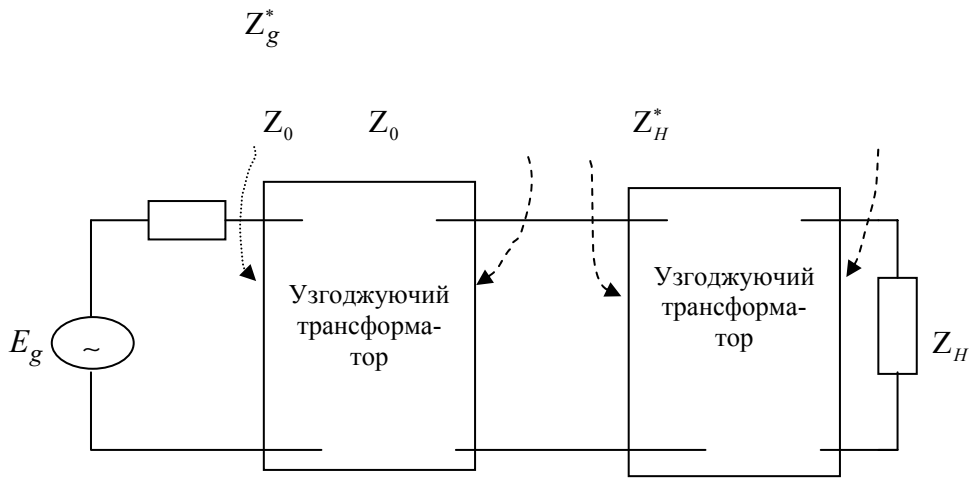



Рисунок 3.23 – Узгоджуючі секції

Застосовують:

- $\lambda/4$ трансформатор;
- одиночний пристосований шлейф;
- подвійний пристосований шлейф і т.д.

а. $\lambda/4$ <u>трансформатор</u> (рис. 3.24).

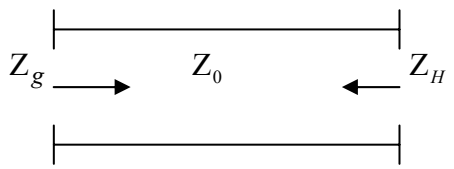



Рисунок 3.24 – $\lambda/4$ трансформатор

З рівняння:

$$Z_u = Z_0 \frac{Z_H \cos\beta\ell + jZ_0 \sin\beta\ell}{Z_0 \cos\beta\ell + jZ_H \sin\beta\ell} \tag{3.44}$$

можна знайти вхідний імпеданс. $\lambda/4$ трансформатора, навантаженого на $Z_H$. Тут $\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \lambda/4 = \frac{\pi}{2}$ і

$$Z_u = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \sin\beta\ell}{0 + jZ_H \sin\beta\ell} = \frac{Z_0^2}{Z_H}. \tag{3.45}$$

Неузгоджене навантаження успішно погодиться включенням у навантаження $\lambda/4$ трансформатора з обраним імпедансом

$$Z_0 = \sqrt{Z_g \cdot Z_H}\ . \qquad (3.46)$$

Для успішного узгодження повинно бути $Z_g = R_g$, $Z_H = R_H$. Тоді

$$Z_0 = \sqrt{R_g \cdot R_H}\ . \qquad (3.47)$$

*Елементи,що погодять:*

1. <u>Узгодження з комплексним навантаженням</u>. Схема включення $\lambda/4$ трансформатора (рис. 3.25).
2.

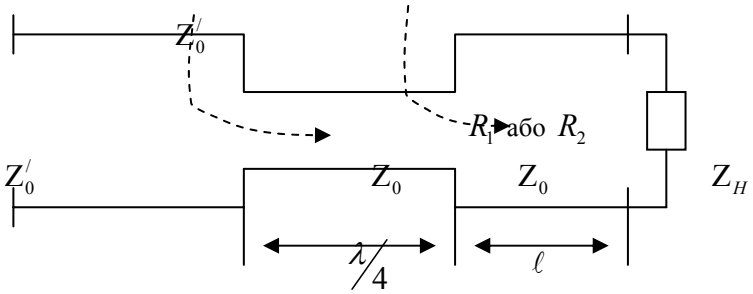



Рисунок 3.25 – Узгодження з комплексним навантаженням

Може використовуватись два перетинання, але зазвичай обирається $R_1$. Характеристичний імпеданс $\lambda/4$ секції:

$$Z_0 = \sqrt{R_1 \cdot Z_0^{/}}\ ,$$

або (3.49)

$$Z_0 = \sqrt{R_2 \cdot Z_0^{/}}\ .$$

Головний недолік $\lambda/4$ трансформатора – його вузькосмужність. Чутливість до частоти може бути знижена трансформатором з декількох секцій.

Для двосекційного трансформатора найкращий результат буде, коли

$$\left(\frac{Z_0^{//}}{Z_0^{/}}\right)^2 = \frac{Z_0^{/}}{Z_0} = \left(\frac{Z_0}{R}\right)^2. \qquad (3.50)$$

3. <u>Одиночний пристосований шлейф</u> (рис. 3.26).

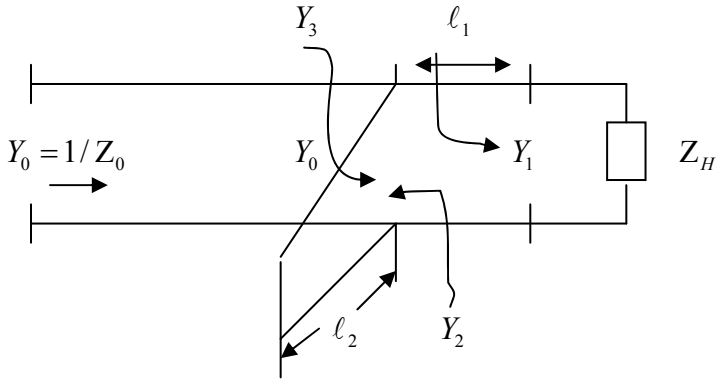



Рисунок 3.26 – Одиночний пристосований шлейф

Це – відкрита, або частіше короткозамкнута секція лінії, включена паралельно головній лінії на дистанції $\ell_1$ від навантаження. Звичайно, послідовні секції теоретично простіше, але на практиці важко і навіть неможливо включати їх в коаксиальні лінії. Взагалі, короткозамкнуті шлейфи переважніше відкриті, до того ж через відкритий кінець можливо випромінювання.

Обидві дистанції - $\ell_1$ - від навантаження до шлейфа і $\ell_2$ - довжина щлейфа повинні бути регулюючими.

Розрахунок такого шлейфа порівняно легко зробити за допомогою діаграми Сміта. Так як включення шлейфа до лінії – паралельне, зручніше користуватись <u>провідностями</u>, ніж імпедансами, тому що провідності при паралельному з'єднанні складаються. Лінія містить реактивності або реактивні провідності. На рис. 3.25 для узгодженості нормалізована провідність $\Upsilon_3 = \frac{Y_3}{Y_0}$ повинна дорівнювати 1. Так як шлейф тільки додає реактивну провідність, нормалізована провідність $\Upsilon_1 = \frac{Y_1}{Y_0}$ повинна відрізнятись від $\Upsilon_3$ тільки нормалізованою реактивною провідністю. Довжина $\ell_1$ обирається так, щоб для $\Upsilon_1$ реальна частина дорівнювала 1. Тоді, в напрямку від навантаження до з'єднання шлейфа нормалізована провідність повинна бути $\Upsilon_1 = \frac{Y_1}{Y_0} = 1 + jb$, де $b$ - небажана реактивна провідність.

Довжина короткозамкнутого шлейфа $\ell_2$ потім настроюється так, щоб придушувався нормалізований реактивний компонент в $\Upsilon_1$: $\Upsilon_2 = \frac{Y_2}{Y_0} = -jb$ (рис. 3.27).

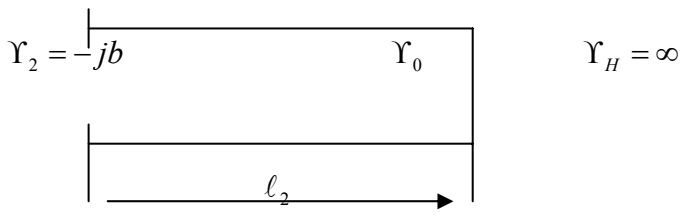



Рисунок 3.27 – Короткозамкнутий шлейф

<u>Використання діаграми Сміта для рішення задач узгодження.</u>

1. Узгоджувати навантаження $Z_H = 100 + j50$ з $Z_0 = 50$-омною лінією, використовуючи одинарний пристосований шлейф (рис. 3.28).

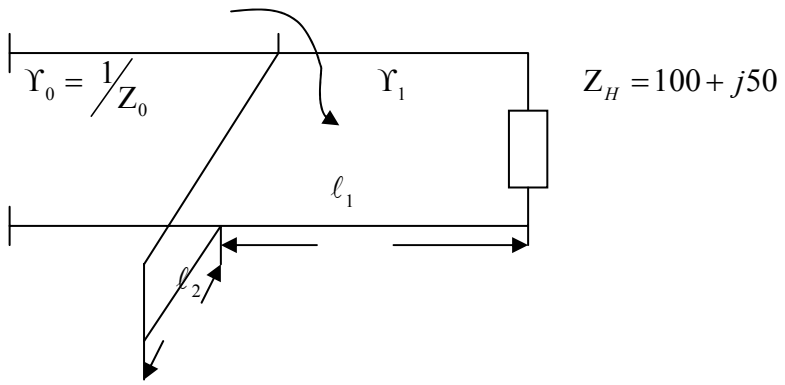



Рисунок 3.28 – Одиночний пристосований шлейф

Рішення: нормалізований імпеданс навантаження $Z_H = \frac{Z_H}{Z_0} = \frac{100 + j50}{50} = 2 + j1$.

На діаграмі Сміта знаходимо коефіцієнт відображення – радіус з кінцем у точці перетину окружності $r = 2$ з реактивністю $jx = 1$. У протилежному від точки перетину напрямку – нижче лінії $x = 0$, в області провідностей, знаходимо точку $y_H = \frac{Y_H}{Y_0} = 0,4 - j0,2$ (перетини радіуса коефіцієнта відображення з цією точкою).

Для узгодження $y_1$ повинен бути взят з $1 \pm jb$. Радіус коефіцієнта відображення з точки перетину 0,4 і j 0,2 руху від навантаження до генератора (за годинною стрілкою) до перетину з окружністю $r = 1$ і провідністю $jx = 1$. Перетини з цими двома точками – це і є $y = 1 + j1$. За

зовнішньою окружністю діаграми знаходимо, що ця точка розташовується на (0,037+0,162)$\lambda$ від навантаження до генератору – це і є точка включення шлейфа $\ell_1$. $\ell_2$ знаходимо за місцем $\frac{Y_H}{Y_0}=\infty$ (рис. 3.28) на діаграмі, ця точка перетину x=0 з зовнішньою окружністю і обертанням від цієї точки до генератора знаходимо перетин зовнішньої окружності з лінією реактивності $jx=-j1$. Так хнаходиться довжина відрізка $\ell_2=0{,}125\lambda$.

Таким чином, $\ell_1=0{,}199\lambda$; $\ell_2=0{,}125\lambda$.

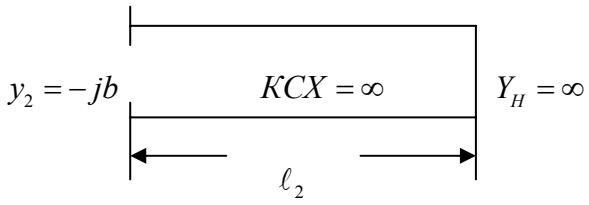



Рисунок 3.29 – Короткозамкнутий шлейф

Узгодження одинарним шлейфом потребує, щоб шлейф розташовувався в визначеній точці лінії. Складності в настроюванні – малі довжини, які реалізуються. Ця незручність усувається подвійним прстосованим шлейфом.

Пристрій містить два пристосованих шлейфа, пыдключених паралельно до лінії. Розподіл шлейфів некритично.

***Контрольні запитання***

1. Які достоїнства узгодження?
2. Що таке $\lambda/4$ трансформатор?
3. Що таке пристосований шлейф?
4. Що таке подвійний пристосований шлейф?

## 3.6 Випромінювачі електромагнітних хвиль. Елементарний вібратор. Поняття елементарного вібратора. Електромагнітне поле елементарного вібратора. Зони вібратора. Ближня зона. Далека або хвильова зона

**Елементарний вібратор –** елемент провідника, за яким протікає перемінний у часі струм, однаковий за всіма перетинами провідника у кожні фіксовані моменти часу.

Практична реалізація – диполь Герца. Це – два з'єднаних проводом металеві шари, заряди яких $+q(t)$ і $-q(t)$ у кожний момент часу однакові за величиною і протилежні за знаком.

Якщо після зарядки диполя надати його самому собі, то виникнуть коливання, оскільки шари, з'єднані проводом, володіють ємністю і індуктивністю, і неминучим опором, який приводить до загасання цих коливань. По проводу, з'єднуючому обидва шари, потече струм:

$$I(t) = \frac{dq}{dt}, \tag{3.51}$$

у кожний фіксований момент однаковий за всіма перетинами провода.

Диполь Герца має дипольний момент, мінливий за часом $p(t) = q(t) \cdot \ell$, де $\ell$ - довжина диполя. Відповідно дипольним моментом $p(t)$ володіє будь-який елементарний вібратор, причому цей момент і струм $I(t)$ у вібраторі пов'язані формулою $\frac{dp(t)}{dt} = I(t) \cdot \ell$, яка у випадку гармонічної залежності струму від часу перетвориться у вигляд $j\omega p = I \cdot \ell$.

З обліком викладеного елементарний вібратор називають диполем Герца або просто електричним диполем. Якщо $\ell \prec\prec \lambda$ - це елементарний вібратор.

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu_a} rot\, \vec{A}, \tag{3.52}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_a} rot\, \vec{H}.$$

(3.53)

В сферичній системі координат

$$rot_r\, \vec{a} = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\varphi \sin\theta\right),$$

$$rot_\theta\, \vec{a} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r a_\varphi\right), \tag{3.54}$$

$$rot_\varphi\, \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r a_\theta\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} a_r.$$

бачими, що $H_r = H_\theta = 0$, $H_\varphi \neq 0$; $E_r \neq 0$, $E_\theta \neq 0$, $E_\varphi = 0$, тобто вектор $\vec{H}$ має тільки одну "екваторіальну" складову $H_\varphi$, а вектор $\vec{E}$ - радіальну і "меридіальну" складову $E_r$ і $E_\theta$.

Складові вектора $\vec{E}$ обчислюються за вектором $\vec{A}$ двома способами: за формулами (3.52) і (3.53), або, користуючись умовою Лорентца, за формулами

$$\varphi = \frac{1}{j\omega\mu_a\varepsilon_a} div\,\vec{A} \rightarrow \vec{E} = -grad\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{j\omega\mu_a\varepsilon_a} graddiv\,\vec{A} - j\omega\,\vec{A}. \qquad (3.55)$$

Обидва способи приводять до одного результату. Згідно (3.52) і (3.53):

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu_a\varepsilon_a} rotrot\,\vec{A} = \frac{1}{j\omega\mu_a\varepsilon_a}\left( graddiv\,\vec{A} - \nabla^2\,\vec{A} \right).$$

З обліком хвильового рівняння для вектора $\vec{A}$: $\nabla^2\,\vec{A} + \kappa^2\,\vec{A} = 0$, одержуємо результат такий же, як (3.55):

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu_a\varepsilon_a}\left( graddiv\,\vec{A} + \kappa^2\,\vec{A} \right) = \frac{1}{j\omega\mu_a\varepsilon_a} graddiv\,\vec{A} - j\omega\,\vec{A},$$

$$\left( \kappa^2 = \omega^2\mu_a\varepsilon_a \right). \qquad (3.56)$$

В <u>ближній зоні</u> $\kappa_r \prec\prec 1$ основний вклад в поле вносять доданки, які містять вищі ступені $\frac{1}{\kappa_r}$.

Згідно фурмулі (3.55):

$$\vec{E}_r \approx \frac{2\vec{P}_m}{4\pi\varepsilon_a} \cdot \frac{\cos\theta}{\vec{r}^{\,3}} \cdot e^{j\omega t},$$

$$\vec{E}_\theta \approx \frac{\vec{P}_m}{4\pi\varepsilon_a} \cdot \frac{\sin\theta}{\vec{r}^{\,3}} \cdot e^{j\omega t}. \qquad (3.57)$$

електричне поле елементарного вібратора у ближній зоні за величиною поля у кожний момент часу і конфігурації його векторних ліній – це

електростатичне поле диполя, але з мінливим у часі дипольним моментом $\vec{P}_m$.

**Далека або хвильова зона елементарного вібратора** – зона, де $\kappa_r \succ\succ 1$. У цій зоні основний вклад у величину поля вносять доданки з першим ступенем $\frac{1}{\kappa_r}$. Тому одержуємо з (3.57) , нехтуючи доданки ступенем $\frac{1}{\kappa_r}$ більш високого порядку:

$$\vec{E} = \vec{E}_\theta \simeq j\frac{\mu_a \omega I_m \vec{\ell}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{\vec{r}} e^{j\left(\omega t - \kappa \vec{r}\right)},$$

(3.58)

$$\vec{H} \simeq H_\varphi \simeq j\frac{\omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} I_m \cdot \vec{\ell}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{\vec{r}} e^{j\left(\omega t - \kappa \vec{r}\right)}.$$

З (3.56) випливає, що в далекій зоні:

- вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, як і в плоских хвилях, ортогональні;
- поверхні рівних фаз представляють сфери, то є хвиля – сферична;
- швидкість поширення хвилі, як у випадку плоских хвиль, дорівнює $\vartheta_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}$;
- вектор швидкості $\vec{\vartheta}_\phi$ перпендикулярний векторам $\vec{E}$ і $\vec{H}$, тому хвилі ці поперечні, як і у випадку плоских хвиль;
- величини $\vec{E}$ і $\vec{H}$ змінюються у часі синфазно;
- амплітуди напруг поля залежать від кута $\theta$ і в силу пропорційності їх $\sin\theta$ мають максимальне значення в екваторіальній площині і дорівнюють нулю вздовж осі вібратора, тобто елементарний вібратор випромінює хвилі спрямовано;
- амплітуди напруг поля пропорційні величині $\omega \cdot \ell = 2\pi c\ell / \lambda$, тобто відношенню довжини вібратора до довжини хвилі;
- відношення напруг $\vec{E}$ і $\vec{H}$, як і у випадку плоскої хвилі, дорівнює хвильовому опору середовища: $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = Z_в$.

Напруги поля елементарного вібратора у дальній зоні в свободному просторі дорівнюють:

$$\vec{E} \simeq \theta \vec{E}_\theta \simeq j\frac{60\pi I_m \cdot \vec{\ell}}{\kappa \vec{r}} \sin\theta e^{j\left(\omega t - \kappa \vec{r}\right)},$$

(3.59)

$$\vec{H} \simeq H_\varphi \simeq j\frac{I_m \cdot \vec{\ell}}{2\lambda \vec{r}} \sin\theta e^{j\left(\omega t - \kappa \vec{r}\right)}.$$

Середній вектор Пойнтинга, або середня щільність струму енергії, випромінюваної елементарним вібратором, дорівнює

$$\vec{S}_{сер} = \frac{1}{2} R_e\left[\vec{E}, \vec{H}^*\right] = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\kappa^2 \ell^2 \frac{I^2 m \sin^2\theta}{2(4\pi)^2 \cdot r^2} \cdot \vec{r}^{\,0}. \qquad (3.60)$$

Для визначення потужності випромінювання обчислюється струм вектора Пойнтинга $\vec{S}_{сер}$ через замкнуту поверхню – сферу, що охоплює вібратор, з центром у місці розташування вібратора.

В сферичній системі координат елемент поверхні дорівнюють $dS = r^2 \sin\theta \cdot d\theta d\varphi$; потужність випромінювання вібратора:

$$P = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S_{сер} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{12\pi}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\kappa^2 \ell^2 I^2 m. \qquad (3.61)$$

Увівши у розгляд ефективне значення струму $I_{еф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, одержимо:

$$P = I_{еф}^2 \cdot R_\Sigma, \qquad (3.62)$$

де $R_\Sigma = \frac{1}{6\pi}\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\kappa^2 \cdot \ell^2$ - так званий **опір випромінювання вібратора**.

**Опір випромінювання –** такий активний опір двосмужника, у якому при тому ж струмі $I_{еф}$ розсіюється така ж потужність, як і потужність випромінювання вібратора.

Для вільного простору:

$$R_\Sigma = 80\left(\frac{\pi\ell}{\lambda}\right)^2. \qquad (3.63)$$

***Контрольні запитання***

1. Що таке елементарний вібратор?

2. Що таке ближня зона вібратора?
3. Що таке проміжна зона вібратора?
4. Що таке далека зона вібратора?
5. Що таке опір випромінювання вібратора?

**3.7 Елементарні випромінювачі, їх характеристики і діаграми спрямованості. Поле двох елементарних вібраторів. Когерентні і некогерентні коливання. Час когерентності. Довжина когерентності. Тимчасова когерентність. Просторова когерентність**

Диполі є випромінювачами електромагнітних хвиль – найпростішими антенами. Основною характеристикою випромінювачів хвиль є спрямованість випромінювання. Елементарний вібратор випромінює скеровано в меридіанальних площинах. Множником, що характеризує спрямованість випромінювання або характеристикою спрямованості тут є $\sin\theta$.

В екваторіальній площині елементарний вібратор випромінює спрямовано.

На рис. 3.30 зображена діаграма спрямованості випромінювання диполя в екваторіальній площині.

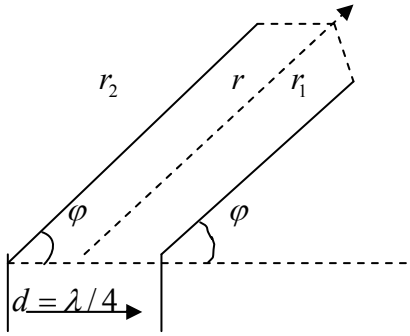



Рисунок 3.30 – Система двох елементарних вібраторів

У просторі діаграма випромінювання – тороїд, перетин якого в меридіональній площині – крива $\sin\theta$ в полярних координатах, а в екваторіальній площині – круг.

Випромінювання високої спрямованості може створити лише система випромінювачів, наприклад, два елементарних вібратора.

Розглянемо поле системи двох елементарних паралельних вібраторів в їх екваторіальній площині. Нехай відстань між вібраторами 1,2 дорівнює $d = \lambda/4$ (рис. 3.30) і струм вібратора 2 випереджає за фазою на $\frac{\pi}{2}$ вібратора

1. Поле вібраторів відповідно дорівнюють: $E_1 = j\frac{B}{r_1}e^{j(\omega t-\kappa r)}$, $E_2 = j\frac{B}{r_2}e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j(\omega t-\kappa r)}$, де $B = \frac{60\pi I_m \cdot \ell}{\lambda}$.

У вилученій точці спостереження, де $r \succ\succ d$, можна вважати $\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r}$. Промені від вібраторів можна вважати паралельними і $r_2 - r_1 = d\cos\varphi$.

Складаючи поля з обліком останніх рівностей, одержуємо $E = E_1 + E_2 = j\frac{B}{r}\left(1+e^{j\left(\frac{\pi}{2}\kappa d\cos\varphi\right)}\right)e^{j(\omega t-\kappa r)}$ і для амплітуди напруг поля одержуємо $E_m(\varphi) = \frac{2B}{r}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$. Звідси випливає, що характеристикою спрямованості системи двох диполей є $f(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$, $f(\varphi) = \begin{cases}1, при \varphi = 0\\ 0, при \varphi = \pi\end{cases}$, тобто ця система випромінює односпрямовано.

Графік функції $f(\varphi)$ - діаграма спрямованості в полярній системі координат наведена на рис. 3.31.

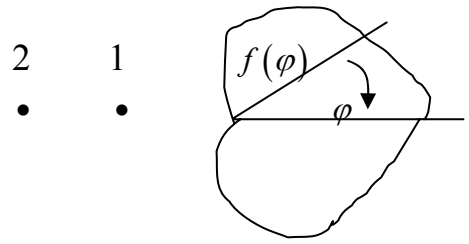



Рисунок 3.31 – Діаграма випромінювання

Можна зробити висновок, що за допомогою великого числа випромінювачів, відповідним чином розташованих і зфазованих, можна створити антену і більш високої спрямованості.

Очевидно, що спрямоване випромінювання – це результат інтерференції хвиль. Установимо умови, при яких можлива інтерференція.

Для двох коливань струму однієї частоти, з постійною амплітудою і початковими фазами $\varphi_1$ і $\varphi_2$: $I_1(t) = A_1\cos(\omega t-\varphi_1)$, $I_2(t) = A_2\cos(\omega t-\varphi_2)$, сумарне коливаня дорівнює $I(t) = I_1(t) + I_2(t) = A(t)\cos(\omega t-\varphi)$, де

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (3.64)$$

Два крайніх випадки:

1.Різниця фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = const$. У цьому випадку коливання когерентні.

2. $\varphi_1$ і $\varphi_2$ - випадкові функції часу, наприклад, через кожний проміжок часу $\tau$ фаз змінюється стрибком, приймаючи випадкові значення.

Усереднивши (3.64) за інтервалом часу, значно більше, ніж $\tau$, одержимо

$$\overline{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = 0, \qquad (3.65)$$

$\overline{A^2} = \overline{A_1^2} + \overline{A_2^2}$ - усереднення значення.

Такі два коливання, де має місце (3.65) є когерентними. Помітимо, що фази коливань можуть бути випадковими функціями часу, але при цьому $\varphi_1 - \varphi_2 = const$ - у цьому випадку коливання також будуть когерентними.

3.Час когерентності. Довжина когерентності.

Розглянемо сферичні хвилі, створювані елементарним вібратором зі струмом, початкова фаза яких змінюється через кожний проміжок часу $\tau$ називаються **часом когерентності**.

Запитання: чи когерентні коливання поля, створювані цим джерелом в різних точках простору?

Якщо з джерела як центра провести сферу радіуса $r_1$, то цю поверхню будуть перетинати так звані цуги хвиль, тривалість яких $c \cdot \tau$. Величина $c \cdot \tau$ називається довжиною когерентності. Впродовж часу $\tau$ початкові фази у будь-якій точці сфери будуть однакові. Після $\tau$ - фаза у всіх точках змінюється на одну і ту ж випадку величину.

Проведемо іншу сферу радіуса $r_2$. З'ясуємо, коли коливання цих двох сфер будуть когерентними, а коли - ні.

Очевидно, що при $r_2 - r_1 \geq c\tau$ ці коливання – некогерентні.

При $r_2 - r_1 \prec c\tau$ - коливання когерентні впродовж часу $\tau - \frac{r_2 - r_1}{c}$, тобто не весь проміжок $\tau$, а тільки частина його. Такі коливання називаються частково когерентними.

Ясно, що коливання поля в точках, що знаходяться на одній і тій же сфері, завжди будуть когерентними.

При суперпозиції хвиль від двох рознесених елементарних вібраторів в екваторіальній площині можливі наступні випадки.

Якщо різниця фаз струмів обох вібраторів постійна, то різниця фаз хвиль, прихожих у кожну точку простору від обох вібраторів, зберігається увесь час і хвилі будуть когерентними. У цьому випадку має місце явище інтерференції.

Якщо різниця коливань струмів в обох вібраторів – випадкова величина, то у кожній точці простору коливання поля, створювані кожним вібратором, будуть некогерентними і хвилі будуть некогерентними. Інтерференції не буде.

Нехай другий вібратор є дзеркальним зображенням першого вібратора, що створює відбиті від дзеркала хвилі і нехай фаза струму в цьому вібраторі змінюється випадковим чином. Очевидно, що при цьому прямі і відбиті хвилі будуть когерентні або частково когерентні, якщо вони належать одному і тому ж цугу хвиль. Такого рода когерентність називається **тимчасовою**. Джерело хвиль в реальності не є крапковим. Однак при достатньо малій просторовій довжині він спільно зі своїм дзеркальним відображенням може створити чітку інтерференційну картину. Таке джерело називається просторово когерентним.

Два просторово когерентних джерела в довільних точках в загальному випадку створюють некогерентні або частково когерентні коливання. Коливання в двох точках будуть когерентними тільки в тому випадку, якщо різниця відстаней від одного джерела до цих точок мінус різниця відстаней від іншого джерела до цих же двох точок, дорівнює цілому числу довжин хвиль.

***Контрольні запитання:***

1. Яка характеристика спрямованості поля двох елементарних вібраторів?
2. Яка діаграма спрямованості в полярній системі координат?
3. Яка умова когерентності коливань?
4. Що таке просторова когерентність?

## 3.8 Електромагнітне поле в намагнічених феритах. Фізичні процеси в намагніченому фериті. Електромагнітне поле в подовжньо-намагніченому фериті. Пристрої з феритами

Ненамагнічений ферит є однорідною ізотропною масою. В намагніченому стані феритове середовище стає анізотропним, що обумовлено орієнтуванням магнітних моментів електронів в напрямку намагнічування і виникаючої при цьому прецесією магнітних моментів. В основі розглянутих явищ лежить прецесія – обертання електрона навколо власної осі. Кожний електрон прецесує, його можна розглядатияк гироскот

з масою $m$, яка обертається навколо центра атома і одночасно навколо власної осі.

За рахунок обертання електрона навколо власної осі виникає спиновий механічний момент $\vec{K}$. Через кільцевий рух заряду виникає магнітний момент $\vec{M}_1$. Пару моментів $\vec{K}$ і $\vec{M}_1$ називають **спіном** електрона. Ці моменти пропорційні один одному: $\vec{M}_1 = -\gamma \vec{K}$, де $\gamma = 3{,}5 \cdot 10^{-2} \ \frac{МГц \cdot м}{А}$ - гіромагнітне співвідношення.

Вільна процесія моменту $\vec{M}_1$ відбувається, якщо магнітне поле напруженістю $\vec{H}_0$ прикладено під кутом до вектора $\vec{M}_1$. При цьому вектор $\vec{M}_1$ обертається навколо вектора $\vec{H}_0$, причому завжди за годинниковою стрілкою, якщо дивитись вздовж вектора $H_0$. Частота процесії $\omega_0 = \vartheta \cdot H_0$, де $\omega_0$ - частота феромагнтного резонансу.

Очевидно, що змінюючи $H_0$, можна змінювати $\omega_0$. При проходженні плоскої електромагнітної хвилі з круговою поляризацією магнітного вектора $\vec{H}_\sim$ вздовж вектора $H_0$ сумарний вектор магнітного поля $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{M}_\sim$ буде обертатись, весь час відхиляючись від напрямку вектора $M_1$. В результаті вектори $\vec{H}$ і $\vec{B}$ припиняють збігатися за напрямком – ферит стає анізотропним середовищем. Сумарний магнітний момент буде дорівнювати $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, де $\vec{M}_2$ - момент, обумовлений прецесією.

Розглянемо вплив напрямку обертання площини поляризації хвилі на взаємодію з феритом.

Для хвилі з лівої (проти годинникової стрілки) кругової поляризації вектори $\vec{H}_\sim$ і $\vec{M}_2$ обертаються в протилежні сторони, поле хвилі не впливає на обертання електрона. Ферит для хвилі з лівою круговою поляризацією веде себе як <u>ізотропне</u> середовище.

При взаємодії хвилі $\vec{H}_\sim$ з правою поляризацією (за годинниковою стрілкою) на $\vec{H}_0$, напрямок обертання векторів $\vec{H}_\sim$ і $\vec{M}_2$ співпадають. Спостерігається значна взаємодія поля і електрона, і при наближенні частоти поля $\omega$ до частоти прецесійного руху $\omega_0$ настає феромагнітного резонансу. При цьому різко змінюється магнітна проникність $\mu$, що веде до фазової швидкості правополяризованої хвилі і росту втрат.

В подовжньо-намагнічених феритах напрямок постійного поля, що намагнічує паралельно напрямку поширення хвилі.

З обліком матеріальних рівнянь $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ і $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, рівняння Максвела має вигляд: $rot\,\vec{H} = j\omega\varepsilon_a \vec{E}$, $rot\,\vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}$.

При поширенні вздовж напрямку поля, що намагнічує $\vec{H}_0$, коли хвиля поширюється вздовж напрямку $Z^0$: $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{\pm \nu z}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{\mp \nu z}$, $\nu = \alpha + j\beta$.

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$. Залежності $e^{-\nu z}$ і $e^{+\nu z}$ описують дві хвилі в протилежних напрямках - $+z^0$ і $-z^0$.

Таким чином, вздовж подовжнього намагніченого ферита поширюється дві хвилі з різними постійному поширення $\nu^+$ і $\nu^-$. Ці хвилі поляризовані за кругом в протилежних напрямках. Їх фазові швидкості $\vartheta^+$ і $\vartheta^-$ неоднакові і при проходженні однієї і тієї ж відстані $\Delta\ell$ у фериті результуючий вектор лінійної поляризованої хвилі повернеться на кут $\theta$: $\theta = \frac{\nu^+ \Delta\ell - \nu^- \Delta\ell}{2}$.

Ефект повороту площини поляризації лінійно поляризованої хвилі при її поширенні вздовж подовжньо намагніченого ферита – це ефект Фарадея. Поворот площини поляризації відбувається в напрямку прецесії. Величина $\theta$ залежить від відстані $\Delta\ell$ і напруженості поля, що намагнічує $\vec{H}_0$. Відповідно хвильовий опір намагніченого середовища в різних напрямках буде $Z^+_{серед.} = \sqrt{\frac{\mu_a^+}{\varepsilon_a}}$ і $Z^-_{серед.} = \sqrt{\frac{\mu_a^-}{\varepsilon_a}}$.

Тоді і амплітуда напруженості полей на виході намагніченого ферита також будуть різні - $H_m^+ \neq H_m^-$ і поле результуючої хвилі на виході буде мати не лінійну, а еліптичну поляризацію.

Пристрої з феритами у техніці СВЧ не підкоряються теоремі взаємності. В таких пристроях створюються умови, при яких електромагнітна хвиля в прямому і зворотному напрямках має різні загасання, фазові швидкості, повороти площини поляризації.

а. **Циркулятор** – хвильоводний багатополюсник, у якому рух електромагнітної енергії відбувається в певному напрямку в залежності від орієнтації зовнішнього магнітного поля (рис. 3.32).

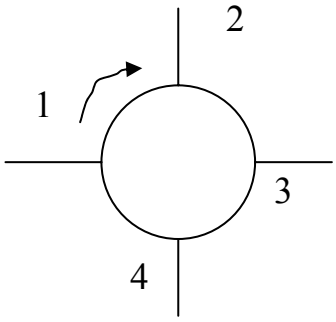



Рисунок 3.32 – Циркулятор

б. Невзаємний атентатор (рис. 3.33).

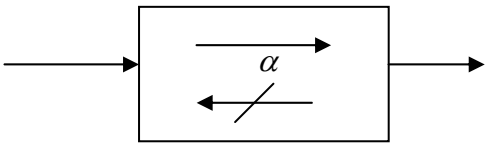



Рисунок 3.33 – Атенюатор

Тут електромагнітна хвиля в прямому напрямку має мале загасання, а в зворотному – велике.

в. Невзаємний фазообертач (рис. 3.34).

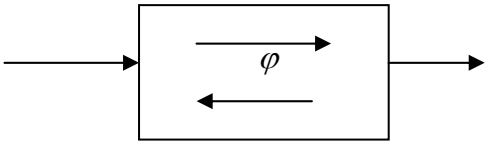



Рисунок 3.34 – Фазообертач

Електромагнітна хвиля в прямому напрямку має більший фазовий зсув, ніж в зворотному.

**Феритовий елемент** – це стрижень або пластина усередині пристрою, наприклад, хвильовода.

За допомогою постійного магніта навколо ферита виробляється управління параметрами електромагнітних хвиль. Ферит має магнітні властивості феромагнетика і електричні властивості діелектрика.

Без намагнічування ферит має $\sigma = 10^{-7} \div 10^{-11}$, $\varepsilon = 5 \div 20$, $\tau \simeq 10^{-4}$.

Магнітна проникність – від одиниць до тисяч.

### *Контрольні запитання*

1. Що таке спин?
2. Що таке магнітний момент заряду?
3. Яке управління Максвела для подовжньо-намагніченого ферита?
4. Як виникає ефект повороту площини поляризації?

## *ЛІТЕРАТУРА*

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные . М, “Сов. Радио”, 1988.

2. Теория электромагнитного поля. Ф.Б. Черный. Издание ВИРТА, 1973.

3. Electronic Transmission Technology. W.Sinnema. PRENTICE HALL, 1986.

4. Теория электромагнитного поля и техника СВЧ. Под ред. Б.Н. Штительмана. Издание ВИРТА, 1974.