МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА
«РЯДИ»
(Гідрометеорологія)

Одеса 2007

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання контрольних (модульних) завдань з дисципліни «Вища математика» (Розділ «Ряди») для студентів І курсу денної форми навчання, напрям підготовки - гідрометеорологія

Укладач: Хецеліус Ольга Юріївна, канд.фіз.-мат. наук

Відповід. редактор:
Глушков О.В., д-р фіз.-мат.наук, проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

Передмова

У сучасних умовах у державі існує значна потреба у фахівцях з гідрометеорології, екології та охорони навколишнього середовища. Підготовка висококваліфікованих менеджерів для роботи у пошуковій сфері природньо включає, як базовий елемент, вивчення фундаментальних математичних дисциплін, зокрема, вищої математики.

Вища математика відноситься до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, математичного аналізу, диференційного і інтегрального обчислення, теорії поля, числових і функціональних рядів, звичайних диференційних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики тощо та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Навчальна програма нормативної дисципліни "Вища математика" розроблена на виконання типового "Положення про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах" (наказ Міносвіти України №161 від 02.06.93р.)

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння дисципліни вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, гідрометеорології, екології та охороні навколишнього середовища тощо, навиків творчого дослідження і математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" навчити студентів :
- правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач;
- правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загальноосвітніх навчальних закладів. Обсяги вивчення окремих розділів і тем визначаються робочими програмами, розробленими на основі даної програми з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих груп. Після вивчання курсу "Вища математика" студенти складають екзамен.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – основні визначення, положення та теореми математичного аналізу, диференціального і інтегрального обчислення теорії кратних і криволінійних інтегралів, теорії числових та функціональних рядів тощо; вміти – використовувати теоретичні знання та навички при розв'язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, в теорії числових та функціональних рядів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до рішення прикладних задач.

ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ "ВИЩА МАТЕМАТИКИ"

Розділ. Числові ряди. Функціональні ряди. Ряди Фур'є.

Числові ряди. Збіжність і суми рядів. Необхідна умова збіжності. Дія з рядами. Методи дослідження збіжності рядів. Функціональні ряди, область збіжності, методи її визначення, статечні ряди. Розкладання функцій у статечні ряди. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях. Ряди Фур'є по тригонометричних системах. Розкладання функцій у тригонометричні ряди Фур'є. Умови покрапкової збіжності і збіжності «у середньому». Застосування тригонометричних рядів Фур'є.

Методичні вказівки.
Елементи теорії числових та функціональних рядів

Література : [1], ξ6-8, [2], ξ5-7

Для рішення нижченаведених прикладів необхідно розібратися у понятті числового ряду, що збігається, і ознаках збіжності знак опозитивних і знакозмінних числових рядів, а так само особливостях застосування цих ознак.

Приклад 1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$.

Рішення. Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2}=1\neq 0$ =>ряд розходиться по наслідку з необхідної ознаки.

Приклад 2. $1+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{1+10n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+10n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+10n.}$

Рішення. Порівнюючи даний ряд з гармонійним $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, по ознаці порівняння одержимо $\lim\limits_{n->\infty}\frac{u_n}{\tau_n}=\lim\limits_{n->\infty}\frac{n}{1+10n}=\frac{1}{10}\neq 0.$

Приклад 3. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Рішення. Запишемо

$$u_n = \frac{1}{n!} \text{ і } u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

і далі застосуємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n->\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n->\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n->\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1, \Rightarrow \text{ ряд збігається.}$$

Приклад 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Рішення. Запишемо $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ і застосуємо радікальну ознаку Коші.

$$\lim_{n->\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n->\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n->\infty}\frac{n+1}{2n-1} = 1/2 < 1 \text{ , => ряд збігається.}$$

Приклад 5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

Рішення. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int_0^{\infty} f(n)dn = \int_0^{\infty}\frac{dn}{\sqrt{4n+1}} = 1/4\lim_{N->\infty}\int_0^N (4n+1)^{-1/2} d(4n+1) =$$

$$= 1/4\lim_{N->\infty} 2\sqrt{4n+1}\Big|_0^N = 1/2\lim_{N->\infty}\left(\sqrt{4N+1}-1\right) = \infty, \Rightarrow$$

Невласний інтеграл розбігається, і тому вихідний ряд так само розбігається.

Приклад 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$.

Рішення. Так як ряд є знакозмінним, тому застосуємо ознаку Лейбница.

$$\left.\begin{array}{l} a)\ 1>1/3>1/5>...>\dfrac{1}{2n-1}>... \\ b)\lim\limits_{n->\infty}u_n=\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{1}{2n-1}=0 \end{array}\right] \text{=> ряд збігається.}$$

Встановимо тип збіжності, для чого розглянемо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ і по ознаці порівняння з гармонійним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, одержимо

$\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{1}{2n-1}=1/2\neq 0$, =>, обидва ряди розбігаються. Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$ збігається умовно.

Далі для рішення подальших прикладів необхідно розглянути поняття області збіжності статечного ряду і спосіб її перебування, а так само питання застосування статечних рядів для наближеного обчислення визначених інтегралів і наближеного інтегрування диференційних рівнянь.

Приклад 7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$

Рішення. а) Запишемо

$$a_n=2^{n-1},\ a_{n+1}=2^n,$$

тоді $R=\lim\limits_{n->\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n->\infty}\dfrac{2^{n-1}}{2^n}=1/2$,

отже, $|x|<1/2$ чи $-1/2<x<1/2$ – інтервал збіжності.

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях знайденого інтервалу збіжності. При $x=1/2$ одержимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, що є розбіжним, а при $x=1/2$ одержимо числовий ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, що так само розбігається. Таким чином, область збіжності досліджуваного статечного ряду є $-1/2<x<1/2$ або $x\in\left]-1/2;1/2\right[$.

б) Запишемо

$$a_n = 1/n,\ a_{n+1} = 1/(n+1),$$

тоді $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{n} = 1,$

отже, $-1 < x - 2 < 1$, чи, $1 < x < 3$ – інтервал збіжності.

Збіжність ряду на кінцях інтервалу: при $x = 1$ одержимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$, що збігається умовно (ознака Лейбница); при $x = 3$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, що розбігається. Таким чином, область збіжності досліджуваного статечного ряду є $1 \le x < 3$ або $x \in [1; 3[$.

Якщо функція $f(x)$ має похідні всіх порядків в околиці крапки $x = a$, то для неї формально можна записати розкладання в статечний ряд (ряд Тейлора):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Однак, у кожному випадку необхідно досліджувати, при яких значеннях х ряд збігається і коли його сумою буде саме функція $f(x)$. Якщо $a = 0$, то одержимо окремий випадок ряду Тейлора, що називають рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Приведемо розкладання деяких важливих елементарних функцій у статечні ряди з вказівкою областей збіжності:

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty)$

3. $\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$
$(-1 < x < 1)$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (-1 < x \le 1)$

Приклад 8. Обчислити приблизно інтеграл $\int\limits_0^\alpha \frac{\sin x}{x}dx.$

Рішення. Використовуючи розкладання для $\sin x$, одержимо:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \quad .$$

Цю рівність інтегруємо в межах від нуля до α:

$\int\limits_0^\alpha \frac{\sin x}{x}dx = \alpha - \frac{\alpha^3}{3\cdot 3!} + \frac{\alpha^5}{5\cdot 5!} - \frac{\alpha^7}{7\cdot 7!} + \ldots$ — суму ряду легко обчислити з необхідною точністю при заданому α .

Приклад 9. Знайти наближене рішення диференціального рівняння $y' = xy^2 + 1$ при $y(x=1) = 0$

Рішення. Шукане рішення запишемо у виді ряду Тейлора по ступенях $(x-1)$

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots$$

За умовою $y(1) = 0$. Вважаючи у самому рівнянні $x = 1$, знайдемо, що $y'(1) = 1$.

Продиференцюємо вихідне рівняння й одержимо $y'' = y^2 + 2xyy'$, звідки маємо: при $x = 1$, $y''(1) = 0$. Далі знову диференціюємо рівняння другого порядку й одержимо $y''' = 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$, що при $x = 1$ дає $y'''(1) = 2$.Аналогічно,

$$y^{IV}=6(y')^2+6yy''+6xy'y''+2xyy''' \;;$$

при $x=1$, одержимо $y''(1)=6$ і тощо.

З урахуванням знайдених значень рішення y і його похідних у крапці $x=1$, одержуємо

$$y(x)=(x-1)+\frac{2(x-1)^3}{3!}+\frac{6(x-1)^4}{4!}+\dots$$

або
$$y(x)=(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\dots$$

Для рішення наступних задач необхідно опанування методів розкладання періодичних функцій у повні і неповні ряди Фур'є. Розглянемо приклади розкладання функцій в ряд Фур'є.

Приклад 10. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π , що на безлічі $-\pi<x<\pi$ представлена виразенням $f(x)=|x|$.

Рішення. Функція $f(x)$ парна, тому $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Ряд Фур'є для даної функції записується у виді

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\dots\right)$$

чи в стиснутій формі

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Питання для самоперевірки.

1. Дайте означення ряда та сформулюйте поняття суми ряда.
2. Дайте визначення збіжності ряда та сформулюйте необхідну умову збіжності ряда.
3. Сформулюйте достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.
4. Сформулюйте ознаку Даламбера, граничну ознаку порівняння, радікальну та інтегральну ознаки Коші.
5. Узагальнений гармонічний ряд.
6. Сформулюйте означення знакозмінного ряда. Ознака Лейбніца.
7. Дайте визначення абсолютної (умовної) збіжності ряда.
8. Визначте поняття функціонального ряда та його області збіжності.
9. Ряди Тейлора та Маклорена.
10. Дії над степеневими рядами.
11. Наведить розкладання в ряд Маклорена наступних функцій: $y=e^x$, $y=1/(1-x)$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=(1+x)^m$.
12. Дайте визначення умов Діріхле для функції *f(x)*..
13. Дайте визначення періодичної функції (період функції).
14. Ряд Фур'є для парної функції, заданої на інтервалі (-π; π) та обчислення його коефіцієнтів.
15. Розкладання функції *f(x)* в тригонометричний ряд. Обчислення коефіцієнтів ряда Фур'є для функції на інтервалі (-π; π).
16. Парне періодичне продовження функції.
17. Ряд Фур'є та його коефіцієнти.
18. Непарне періодичне продовження функції.

Завдання контрольної роботи №1
Варіанти 1-10

Варіант №1

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n;$$

Варіант №2

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}, \quad \alpha = const;$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n;$$

Варіант №3

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{n};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n;$$

Варіант №4

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакозмінного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}x^n;$$

Варіант №5

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакопеременного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!},\quad \alpha = const;$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}x^n;$$

Варіант №6

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакопеременного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3\sqrt{n}};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}x^n;$$

Варіант №7

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакопеременного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(n+1)^n}x^n;$$

Варіант №8

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!};$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакопеременного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{5n};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n;$$

Варіант №9

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n;$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакопеременного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{(3n-1)2^n}}x^n;$$

Варіант №10

Завдання 1. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Завдання 2. Дослідити збіжність знакопеременного числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3-1};$$

Завдання 3. Знайти інтервал збіжності статечного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n+1)} x^n;$$

Завдання контрольної роботи №2

Варіанти 1-10

Варіант №1

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y'' = xy, y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = x^2 + 1; \; (-2, \; 2);$$

Варіант №2

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_{0}^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a,b):

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2};\ (-\pi,\ \pi);$$

Варіант №3

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y'' = -xy' - y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a,b):

$$f(x) = 1 + |x|;\ (-1,\ 1);$$

Варіант №4

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int\limits_{0}^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y' = e^x + y^2,\ y(0) = 0;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = |1 - x|;\ (-2,\ 2);$$

Варіант №5

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int\limits_{0}^{0,5} \arctan x^2 dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y'' = xyy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x \le 0 \\ 2x,\ 0 < x < \pi \end{cases};$$

Варіант №6

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y' = x + x^2 + y^2,\ \ y(0) = 5;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = |x|;\ (-3,\ 3);$$

Варіант №7

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_{0}^{0,5} \frac{\arctan x}{x}\,dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y' = y^2 + xy,\ y(0) = 1;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = x - 1;\ (-1,\ 1);$$

Варіант №8

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx;$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$(1-x)y' = 1 + x - y,\ y(0) = 0;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \le 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Варіант №9

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y'' = yy' - x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a, b):

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Варіант №10

Завдання 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ з точністю до 0,001, розклавши подінтегральну функцію в статечний ряд і потім виконавши інтегрування його почленно:

$$\int_{0}^{1/3} x\cos\sqrt{x}dx.$$

Завдання 2. Знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладання в статечний ряд рішення $y = y(x)$ данного диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам:

$$y' = e^{y} + xy,\ y(0) = 0.$$

Завдання 3. Розкласти данну функцію $f(x)$ у ряд Фур'є в інтервалі (a,b):

$$f(x) = |1 - x|;\ (-2,\ 2);$$

Література.

1. Пискунов. Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Е. 1, 2. М., «Наука», 1970, 1972, 1976.
2. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969, 1973.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., «Наука», 1971, 1974, 1976.
4. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.
5. Бараненков Г. С. и др., Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Димидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.
6. Кручкович Г. И. Сборник задач по курсам высшей математике. Под ред. Г. И. М., «Высшая школа», 1973.
7. Глушков О.В., Амбросов С.В., Хецеліус О.Ю., Шпінарева І.М., Вітавецька Л.А.., та інші, Курс вищої математики. Електронний конспект лекцій.-2005.
8. Глушков О.В., Кругляк Ю.О., Чернякова Ю.Г., Лінійна алгебра, Одесса: ТЕС.- 2004.
9. Глушков О.В., Амбросов С.В Шпінарева І.М., “Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ”, Одесса: ТЕС.-2004.
10. Глушков О.В., Амбросов С.В. , Вітавецька Л.А,. Лобода А.В., Математичне програмування, Одесса: ТЕС.-2003.

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання модульних завдань
з дисципліни «Вища математика» (Розділ «Ряди») для студентів І курсу денної форми навчання,
напрям підготовки - гідрометеорологія

Укладачи: Хецеліус О.Ю., к.ф.-м.н., доц.
Відп. ред: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета