МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА
«Звичайні диференціальні рівняння»
(Гідрометеорологія)

Одеса 2007

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання контрольних (модульних) завдань з дисципліни «Вища математика» (Розділ «Звичайні диференціальні рівняння») для студентів I курсу денної форми навчання, напрям підготовки - гідрометеорологія

Укладач: Хецеліус Ольга Юріївна, канд.фіз.-мат. наук, доц.

Відповід. редактор:
Глушков О.В., д-р фіз.-мат.наук, проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

Передмова

У сучасних умовах у державі існує значна потреба у фахівцях з гідрометеорології, екології та охорони навколишнього середовища. Підготовка висококваліфікованих менеджерів для роботи у пошуковій сфері природньо включає, як базовий елемент, вивчення фундаментальних математичних дисциплін, зокрема, вищої математики.

Вища математика відноситься до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, математичного аналізу, диференціального і інтегрального обчислення, теорії поля, числових і функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики тощо та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Навчальна програма нормативної дисципліни “Вища математика” розроблена на виконання типового “Положення про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах” (наказ Міносвіти України №161 від 02.06.93р.)

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння дисципліни вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, гідрометеорології, екології та охороні навколишнього середовища тощо, навиків творчого дослідження і математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни “Вища математика” навчити студентів :
- правильно використувати вивчені методи при вирішуванні задач;
- правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Вивчення дисципліни “Вища математика” базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загальноосвітних навчальних закладів. Обсяги вивчення окремих розділів і тем визначаються робочими програмами, розробленими на основі даної програми з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих груп. Після вивчання курсу “Вища математика” студенти складають іспит.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – основні визначення, положення та теореми математичного аналізу, диференціального і інтегрального обчислення, теорії кратних і криволінійних інтегралів, теорії звичайних диференціальних рівнянь тощо; вміти – використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, в теорії звичайних диференціальних рівнянь, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до рішення прикладних задач.

ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ “ВИЩА МАТЕМАТИКИ”

Розділ. Звичайні диференціальні рівняння та їх системи.

Фізичні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема існування й одиничності і рішення задачі Коші. Основні класи рівнянь, що інтегруються в квадратурах. Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Поняття про крайові задачі для диференціальних рівнянь. Рівняння, що допускають зниження порядку. Лінійні диференціальні рівняння, однорідні і неоднорідні. Поняття загального рішення. Лінійні диференціальні рівняння з постійним коефіцієнтами. Рівняння з правою частиною спеціального виду. Додаток до опису лінійних моделей. Нормальна система диференціальних рівнянь. Задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь. Теорема існування й одиничності рішення задачі Коші. Метод виключення для рішення нормальних систем диференціальних рівнянь. Системи лінійних диференціальних рівнянь, властивості диференціальних рівнянь. Рішення систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Методичні вказівки.
Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь

Література : [1], ξ7-9, [2], ξ6-8

Зауваження. У наступних задачах необхідно скласти диференціальне рівняння (тобто математичну модель), і вирішити для цього рівняння задачу Коші або знайти загальне рішення.

Приклад 1. Знайти лінію, у якої довжина нормалі (тобто відрізок її нормалі від крапки на лінії до осі абсцис) є постійна величина a.

Рішення. Складемо рівняння нормалі до шуканої кривої, прийнявши за x і y координати крапки, що лежить на кривій, а за X і Y поточні координати нормалі.

$$Y-y=-\frac{1}{y'}\left(X-x\right).$$

У крапці А перетинання нормалі з віссю абсцис (мал. 4.1) $Y=0$, а $X=x$. Виразимо довжину нормалі з через координати крапок А и Р:

$$\sqrt{(X-x)^2+y^2}=a,$$

відкіля знайдемо $X-x$ і підставимо його в рівняння нормалі.

$$X-x=\sqrt{a^2-y^2}.$$

З іншого боку, тому що крапка А лежить на нормалі , те її координати повинні задовольняти рівнянню нормалі. Підставивши їх:

$$-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \quad \text{чи} \quad y'=\frac{1}{y}(X-x)=\frac{1}{y}\sqrt{a^2-y^2},$$

одержимо диференціальне рівняння шуканої кривої

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

Проинтегрируем його:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y};$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx;$$

$$C-\sqrt{a^2-y^2}=x,$$

$$-\sqrt{a^2-y^2}=x-C;$$

$$a^2-y^2=(x-C)^2$$

чи відкіля остаточно

$$(x-C)^2+y^2=a^2.$$

Ми одержали сімейство окружностей радіуса a з центрами, розташованими на осі OX .

Зауваження. Для рішення наступних задач необхідно скористатися методикою рішення рівнянь виду $y'' = f(x, y')$ і $y'' = f(y, y')$.

Приклад 2. Знайти загальне рішення рівняння $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

Рішення. Рівняння не містить y і належить до типу $y' = f(x, y')$. Тому зробимо заміну $y' = p$ і $y'' = p'$. Приходимо до лінійного рівняння першого порядку

$$p' = -\frac{1}{x} p = x \ .$$

Вирішимо його, використовувавши підстановку

$$p = uv. \ \ p' = u'v + v'u,$$

і рівняння приводиться до:

$$u'v + v'u - \frac{1}{x} uv = x.$$

За відомою методикою одержуємо два рівняння з разделяющимися перемінними

$$v' - \frac{1}{x} v = 0 \quad \text{і} \quad u'v = x$$

З першого маємо:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}; \ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};$$

$$\ln y = \ln x;$$

$$y = x.$$

Надаємо значення v у друге рівняння й інтегруємо його

$$u'x = x \ \text{ чи } \ u' = 1,$$

відкіля:

$$u = x + c.$$

Таким чином, ми знайшли

$$p = x(x + c) = x^2 + cx.$$

Заміняючи $p = \dfrac{dy}{dx}$ й інтегруємо це рівняння, одержимо остаточне рішення

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + cx;$$
$$dy = (x^2 + cx)dx; \quad .$$
$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + c_1$$

Зауваження. Далі для рішення наступних задач необхідно знайти особисте рішення неоднорідного диференціального рівняння при заданих умовах.

Приклад 3 . Знайти особисте рішення рівняння

$$y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3),$$

шо задовольняє умовам:

$$y\big|_{x=0} = 2; y'\big|_{x=0} = 2.$$

Рішення. Рішення знайдемо у декілька етапів.

1. Розглянемо рівняння:

$$y'' - 2y' = 0.$$

Особисте рішення цього рівняння шукаємо у вигляді: $y = e^{kx}$. Підставляючи це передбачуване рішення в рівняння і скорочуючи на e^{kx}, приходимо до характеристичного рівняння $k^2 - 2k = 0$, відкіля $k_1 = 0,\ k_2 = 2$.

Одержуємо дві частки рішення:

$$y_1 = e^{ox} = 1 \text{ і } y_2 = e^{2x}.$$

Ця фундаментальна система, тому що

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const.$$

Тому на їхній основі будуємо загальне рішення однорідного рівняння:

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^{2x} \ .$$

2. Так як права частина заданого рівняння має вид $e^{\alpha x} p_n(x)$, та частку рішення шукаємо в такій же формі $(k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha)$:

$$y = l^x (ax^2 + bx + c),\ y' = e^x (ax^2 + bx + c) + c^x (2ax + b);$$

$$y'' = e^x (ax^2 + bx + c) + 2e^x (2ax + b) + 2ue^x .$$

Підставляємо ці значення в задане рівняння і приходимо до тотожності (яке попередньо скоротимо на $e^x \neq 0$)

$$-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x - 3 \ .$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x ліворуч і праворуч, приходимо до системи рівнянь для визначення a, b і c:

$$-a = 1; -b = 1;\ 2a - c = -3,$$

відкіля

$$a = -1;\ b = -1;\ c = 1,$$

і частка рішення приймає вигляд:

$$y = e^x (-x^2 - x + 1) \ .$$

3. Складаємо загальне рішення неоднорідного рівняння:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^x (-x^2 - x + 1) \ .$$

4. Визначаємо c_1 і c_2 з початкових умов

$$y' = 2c^2 e^{2x} + e^x (-x^2 - x + 1) - e^x (x + 1)$$

$$\left. y \right|_{x=0} = 2 = c_1 + c_2 + 1$$
$$\left. y' \right|_{x=0} = 2 = 2c_2 + 1 - 1$$ чи

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 = 2 \end{cases}.$$

З останньої рівності $c_2 = 1$.

Тоді $c_1 = 0$ і частка рішення неоднорідного рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам, одержуємо у вигляді:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) = e^x(e^x - x^2 - x + 1).$$

Зауваження. Далі для рішення наступних задач необхідно за допомогою характеристичного рівняння знайти рішення системи лінійних диференціальних рівнянь. Розглянемо відповідний приклад.

Приклад 4. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Рішення. Нагадаємо, Що частки рішення системи шукаються у вигляді:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt} \text{ і } x_2 = \alpha_2 e^{kt}.$$

Після їхньої підстановки в задану систему і скорочення на e^{kt} одержуємо алгебраїчну систему

$$\begin{cases} (2-k)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Вона має нетривіальні (відмінні від нуля) рішення тільки у тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю.

Записавши цю умову, ми одержуємо характеристичне рівняння для системи лінійних, однорідних, диференціальних рівнянь

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник і одержуємо:

$$(2-k\ )(4-k\ ) = 0 \text{ чи } k^2 - 6k + 5 = 0,$$

відкіля $k_1 = 1,\ k_2 = 5$.

Підставляючи кожне із знайдених значень k у систему алгебраїчних рівнянь, визначаємо значення α_1 і α_2, і таким чином, і особисті рішення x_1 і x_2.

Візьмемо $k_1 = i`$ і підставимо його в систему. Одержимо

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0 \\ 3a_1^{(1)} + 3a_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

(тут невідомі a_1 і a_2, що відповідає значенню k_1 позначені $a_1^{(1)}$ і $a_2^{(1)}$). Отримані рівняння залежні. Тому визначаємо (з точністю до постійного множника $a_1^{(1)}$ і $a_2^{(1)}$) з першого рівняння

$$a_1^{(1)} = 1\ , \quad a_2^{(1)} = -1$$

і одержуємо перші особисті рішення:

$$x_1^{(1)} = e^t \text{ і } x_2^{(1)} = -e^t\,.$$

Візьмемо $k_1 = 1$ і підставимо його в систему. Одержимо

$$\begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0 \\ 3a_1^{(1)} - a_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку, з першого рівняння знайдемо:

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{3} a_2^{(2)}$$

і, прийнявши $a_2^{(2)} = 3$, одержимо $a_1^{(2)} = 1$.

Отже, другими особистими рішеннями будуть:

$$x_1^{(2)} = e^{5t}; \quad x_2^{(2)} = 5e^{5t} \ .$$

Умножуючи $x_i^{(1)}$ на C_1, а $x_i^{(2)}$ на C_2 і складаючи відповідні рішення, знаходимо загальне рішення системи:

$$x_1 = c_1 x_1^{(1)} + c_2 x_1^{(2)} = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$$

$$x_2 = c_1 x_2^{(1)} + c_2 x_2^{(2)} = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}$$

Запишемо в матричній формі задану систему і її рішення.

Система:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Рішення:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & 3c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки.

1. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші.
2. Теорема існування й одиничності рішення задачі Коші.
3. Основні класи рівнянь, що інтегруються в квадратурах.
4. Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші.
5. Поняття про крайові задачі для диференціальних рівнянь.
6. Рівняння, що допускають зниження порядку.
7. Лінійні диференціальні рівняння, однорідні і неоднорідні. Поняття загального рішення.
8. Лінійні диференціальні рівняння з постійним коефіцієнтами.
9. Рівняння з правою частиною спеціального виду.
10. Додаток до опису лінійних моделей

11. Нормальна система диференціальних рівнянь.
12. Задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь.
13. Теорема існування й одиничності рішення задачі Коші.
14. Метод виключення для рішення нормальних систем диференціальних рівнянь.
15. Системи лінійних диференціальних рівнянь, властивості диференціальних рівнянь.
16. Рішення систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Завдання контрольної роботи №1

Варіанти 1-10

Варіант №1

Завдання 1. Матеріальна крапка маси $m = 2$ м без початкової швидкості повільно занурюється в рідину. Опір рідини пропорційний швидкості занурення з коефіцієнтом пропорційності $k = 2$ г/с. Знайти швидкість крапки через одну секунду після початку занурення.
Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$yy'' + (y')^2 = 1$$

Варіант №2

Завдання 1. Моторний човен рухається в спокійній воді зі швидкістю $v_0 = 12$ км/ч. На повному ходу її мотор був виключений і через 10 зі швидкість човна зменшилася до $v_1 = 6$ км/ч. Опір води пропорційно швидкості руху човна. Знайти швидкість човна через одну хвилину після зупинки мотора.
Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$(y'')^2 = y'$$

Варіант №3

Завдання 1. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с, входить у досить товсту стіну. Опір стіни передає кулі негативне прискорення, пропорційне квадрату її швидкості з коефіцієнтом пропорційності $k = 7$ м.$^{-1}$ Знайти швидкість кулі через 0,001 з послу входження кулі в стіну.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$xy'' = y'$$

Варіант №4

Завдання 1. Матеріальна крапка масою $m = 1$г рухається прямолінійно. На неї діє у напрямку руху сила, пропорційна часу, що пройшов від моменту, коли швидкість крапки дорівнювала нулю, з коефіцієнтом пропорційності $k_1 = 2$ г см/с^3 ; крім того, крапка випробує опір середовища, пропорційний швидкості руху з коефіцієнтом пропорційності $k_2 = 3$г/с. Знайти швидкість крапки через 3 з початку руху.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$(y')^2 + 2yy'' = 0$$

Варіант №5

Завдання 1. У судині знаходиться 100 л водяного розчину солі. У судину втікає чиста вода зі швидкістю $q = 5$л/хв, а суміш випливає з тією же швидкістю, причому концентрація розчину підтримується рівномірною шляхом перемішування. У початковий момент у розчині містилося $m_0 = 10$кг солі. Скільки солі буде міститися в судині через 20 хв після початку процесу?

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$y'' = y' + x$$

Варіант №6

Завдання 1. Крива проходить через крапку (2; –1) і володіє властивістю, що кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її крапці пропорційний квадрату ординати крапки торкання з коефіцієнтом пропорційності $k = 3$. Знайти рівняння кривої.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$y'' - 2ctg\, x \cdot y^1 = \sin^3 \mathrm{x}$$

Варіант №7

Завдання 1. Крива проходить через крапку (1; 2) і володіє властивістю, що добуток кутового коефіцієнта дотичної в будь-якій її крапці на суму координат крапки торкання дорівнює подвоєній ординаті цієї крапки. Знайти рівняння кривої.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$y^{n}=\frac{1}{4\sqrt{y}}$$

Варіант №8

Завдання 1. Крива проходить через крапку (1; 2) і володіє властивістю, що відношення ординати будь-якої її крапки до абсциси пропорційно кутовому коефіцієнту дотичної до цієї кривої , проведеної в тій же крапці, з коефіцієнтом пропорційності $k=3$. Знайти рівняння кривої.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$y^{3}y^{n}=-1$$

Варіант №9

Завдання 1. Крива проходить через крапку (1; 5) і володіє властивістю, що відрізок, що відтинається на осі ординат будь-якою дотичною, дорівнює побудованій абсцисі крапки торкання. Знайти рівняння кривої.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$y''=y'/x+x$$

Варіант №10

Завдання 1. Крива проходить через крапку (2; 4) і володіє властивістю, що відрізок, що відтинається на осі абсцис дотичною, проведеною у будь-якій крапці кривої, дорівнює кубу абсциси крапки торкання. Знайти рівняння кривої.

Завдання 2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння:

$$2xy'y''=(y')^{2}+1$$

Завдання контрольної роботи №2
Варіанти 1-10

Варіант №1

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}, \quad y'(0) = y_0$.

$$y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x; \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Варіант №2

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}, \quad y'(0) = y_0$.

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; \; y(0) = 4/3, \; y'(0) = 1/27$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

Варіант №3

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y'' + 4y = e^{-2x}; \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$$

Варіант №4

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Варіант №5

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y' + 5y + 6y = 12\cos 2x; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 3$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$$

Варіант №6

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y'' - 5y'' + 6y = (12 - 7)e^{-x}; \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Варіант №7

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Варіант №8

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y' - 4y' = 6x^2 + 1; \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$$

Варіант №9

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y' - 2y' + y = 16e^x; \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$$

Варіант №10

Завдання 1. Знайти особисте рішення диференціального рівняння:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

що задовольняє початковим умовам: $y(0) = y_{0_1}$, $y'(0) = y_0$.

$$y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; \; y(0) = 3; \; y'(0) = 2$$

Завдання 2. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати у матричній формі дану систему і її рішення.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$$

Література.

1. Пискунов. Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Е. 1, 2. М., «Наука», 1970, 1972, 1976.
2. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969, 1973.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., «Наука», 1971, 1974, 1976.
4. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.
5. Бараненков Г. С. и др., Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Димидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.
6. Кручкович Г. И. Сборник задач по курсам высшей математике. Под ред. Г. И. М., «Высшая школа», 1973.
7. Глушков О.В., Амбросов С.В., Хецеліус О.Ю., Шпінарева І.М., Вітавецька Л.А.., та інші, Курс вищої математики. Електронний конспект лекцій.-2005.
8. Глушков О.В., Кругляк Ю.О., Чернякова Ю.Г., Лінійна алгебра, Одесса: ТЕС.- 2004.
9. Глушков О.В., Амбросов С.В. Шпінарева І.М., “Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ”, Одесса: ТЕС.-2004.
10. Глушков О.В., Амбросов С.В. , Вітавецька Л.А,. Лобода А.В., Математичне програмування, Одесса: ТЕС.-2003.
11. “A Core Curriculum in Mathematics for European Engineers”, by Working Group of mathematics of the European organization of the engineer education SEFI MWG”, Brussels, Belgium.-1994.
12. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., В: Матеріали і висновки Всеукраїнської науково-методичної конференції “Математика. Актуальні проблеми навчання, викладання і застосування у науковій та інженерній творчості”.- Міносвіти та науки України, Київ, 2000р.

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання модульних завдань
з дисципліни «Вища математика» (Розділ «Звичайні диференціальні рівняння») для студентів І курсу денної форми навчання,
напрям підготовки - гідрометеорологія

Укладачи: Хецеліус О.Ю., к.ф.-м.н., доц.
Відп. ред: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета