МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Практичне застосування степеневих рядів»)

для студентів 1 року денної форми навчання

спеціальностей 101 «Екологія», 183 «Технологія захисту навколишнього середовища», 242 «Туризм», 103 «Науки про Землю».

Одеса 2020

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни “Вища математика“ (розділ «Практичне застосування степеневих рядів») для студентів 1 року денної форми навчання спеціальностей 101 «Екологія», 183 «Технологія захисту навколишнього середовища», 242 «Туризм», 103 «Науки про Землю».

Одеса, ОДЕКУ, 2020 р., 28 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц

ЗМІСТ

І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальностей екологія, туризм, науки про Землю тощо. Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні задач і аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни.

В результаті вивчення цього розділу студент повинен:

знати – основні визначення, теореми, основні різновиди рядів, методи дослідження та необхідні і достатні ознаки збіжності рядів, зокрема степеневих, методи розвинення функцій у степеневі ряди, основні застосування рядів;

вміти – використовувати теоретичні знання та навички при виконанні різноманітних практичних задач, у яких застосовується математичний апарат теорії степеневих рядів, застосовувати степеневі ряди для наближених обчислень значень функцій, обчислення визначених інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь і т.с., правильно аналізувати результати математичних обчислень.

1.2 Зміст розділу

Дослідження збіжності степеневих рядів.

Розвинення функцій у степеневі ряди Тейлора та Маклорена

Застосування степеневих рядів для наближених обчислень значень функцій.

Застосування степеневих рядів для наближених обчислень визначених інтегралів.

Застосування степеневих рядів для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2. М. «Высшая школа», 1986.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1976.

3. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М., "Наука", 1971.

5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., "Наука", 1972.

7. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.3. –Одеса, 2016.

8. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.

9. Бараненков Г. С. (и др.) Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Демидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.

10. Бугров Я. С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., «Наука», 1981.

11. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.

13. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв’язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною. Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт та індивідуальних завдань, що оцінюються згідно з робочою програмою. Всі роботи повинні виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що дана дисципліна є засвоєною студентом.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми. Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі, які наведені у конспекті лекцій з дисципліни. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв’язання типових задач.

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач

Література: [1], гл.II, §10, [2], гл.XV, §5, [3], гл.III, §1-3, вправи 38-42, 50-53, 59-62, 65-69, 73, 74, 83; §5,6,7, вправи 137, 138, 144-146, 150, 172, 176, 177; §9(2), вправи 264, 265, 268, 269, 271, [4], гл.XI, §1-5; гл.XII, §2.

Довідковий матеріал

Серед функціональних рядів є клас степеневих рядів. Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

називається *степеневим* за степенями $(x-x_0)$. Вирази - $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ постійні числа. Якщо $x_0 = 0$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ є степеневим за степенями x. Число R таке, що для всіх $x, |x| < R$ степеневий ряд збігається, а для всіх x, $|x| > R$, розбігається, називається *радіусом збіжності* ряду, а інтервал $(-R;R)$ називається *інтервалом збіжності*. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ інтервал збіжності має вигляд:

$x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ з центром в точці x_0. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ інтервал збіжності має вигляд $x \in (-R,\ R)$ з центром в точці 0. У граничних точках $x = \pm R$ поведінка ряду вимагає додаткового дослідження. Можна вказати правило для находження радіуса збіжності степеневого ряду.

Дослідження збіжності степеневих рядів.

Теорема 1. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, то $R = \dfrac{1}{\rho}$, причому вважаємо $R = 0$, якщо $\rho = \infty$, і $R = \infty$ якщо $\rho = 0$.

Теорема 2. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \rho$, $R = \dfrac{1}{\rho}$, причому ми вважаємо $R = 0$, якщо $\rho = \infty$, і $R = \infty$,якщо $\rho = 0$.

Степеневі ряди в області збіжності збігаються абсолютно, тому можна просто використовувати ознаки збіжності знакододатних рядів.

За ознакою Даламбера, ряд збігається, якщо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \;<1$$

Розвинення функцій у степеневі ряди Тейлора та Маклорена

Р*ядом Тейлора* функції *f(x)* називається степеневий ряд:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ - залишковий член ряда. Необхідною умовою розкладання функції в ряд Тейлора є дифференційованість функції нескінченне число разів. При $x_0=0$ цей ряд перетворюється у *ряд Маклорена*.

Розвинення основних елементарних функцій у степеневі ряди

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in R.$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};\ x \in R$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x \in R.$

4. $\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n; -1 < x \le 1$

5. $arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad -1 \le x \le 1$

7. $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \quad x \in (-1,1).$

Застосування степеневих рядів для наближених обчислень значень функцій.

Для наближених обчислень значень функцій використовують розвинення основних елементарних функцій у степеневі ряди. Для наближеного обчислення значення функції у точці x_0 у розвинення функції підставляють замість x значення x_0 і за наближене значення функції у цій точці беруть суму перших n доданків розвинення. Похибка при цьому буде менша за перший відкинутий доданок у випадку знакопочережного ряду, а інакше обчислюється за допомогою формули залишкового члена ряду.

Застосування степеневих рядів для наближених обчислень визначених інтегралів.

Степеневі ряди застосовуються для обчислення інтегралів, що не беруться в елементарних функціях. Хай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx.$ Підставимо замість підінтегральної функції її розвинення у степеневий ряд і скористаємось властивістю лінійності інтеграла. В результаті отримаємо нескінченну суму інтегралів від степеневих функцій, які беруться у квадратурах. Взявши ці інтеграли і виконавши подвійну підстановку за границями інтегрування, отримаємо числовий ряд, який збігається. За наближене значення шуканого інтегралу візьмемо n-ну часткову суму отриманого ряду. Похибку обчислюємо як у попередньому пункті.

Застосування степеневих рядів для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь

При необхідності наближенного розв'язання диференціального рівняння з початковими умовами (коректно поставленої задачі Коші) розв'язок шукають у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ $a_n = ?$. Хід подальшого розв'язання залежить від методу відшукання цих коефіцієнтів.

а) *Метод послідовного диференціювання* полягає в тому, що функція-розв'язок представлена своїм рядом Тейлора (або Маклорена), тобто коефіцієнти містять похідні цієї функції у одній і тій самій точці. Ці похідні можна знайти, послідовно диференціюючи обидві частини диференціального рівняння, що розв'язане відносно старшої похідної, та підставляючи вже відомі значення молодших похідних у точці.

б) *Метод невизначених коефіцієнтів* передбачає *n*-кратне диференціювання степеневого ряду, яким представлений розв'язок, з подальшою підстановкою цих виразів у диференціальне рівняння. Далі прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях у правій та лівій частинах рівняння і, таким чином, отримають систему лінійних рівнянь для відшукання коефіцієнтів степеневого ряду.

У обох випадках у якості наближеного розв'язку беруть часткову суму степеневого ряду, що задовольняє припустиму похибку.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

Знайдіть область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Розв'язання.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

Інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$. Досліджуємо граничні точки. $x = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – ряд розбігається;

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - збігається умовно за ознакою Лейбниця.

Відповідь:

Область збіжності ряду: $x \in [-1, 1)$.

Приклад 2. Знайдіть область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

Розв'язання.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty;$$

Відповідь:

Ряд збігається при всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

Приклад 3.
Обчислити $\sin 10^\circ$ з точністю 0,001.

Розв'язання.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ Ряд збігається при значенні $x \in R$.

$$10^\circ = \frac{\pi \cdot 10^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{18}; \qquad \sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \ldots$$

Ряд знакопереміжний, залишок ряду можна оцінити за ознакою Лейбниця. Знайдемо член ряду, менший за модулем, ніж 0,001.

$$|u_2| = \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} < 0.001$$

За ознакою Лейбниця похибка від відкидання всіх членів, починаючи з n -го, дорівнює $|R_n| < |u_{n+1}|$, значить $|R_1| < |u_2| < 0.001$; $Sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0.174$.

Відповідь:

$Sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0.174$

Приклад 4.

Обчислити з точністю до 0,01 значення $\ln 8$.

Розв'язання.

$\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$; Обчислимо $\ln 2$. Скористаємося розкладанням логарифмічної функції в ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln\frac{(1+x)}{(1-x)} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right), \quad |x| < 1$$

При якому значенні x $\frac{1+x}{1-x} = 2$? $1 + x = 2(1-x) \rightarrow x = \frac{1}{3}$.

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} + \dots\right)$$

$$\ln 8 = 3 \cdot 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots\right)$$

Скільки членів потрібно залишити, щоб обчислити $\ln 8$ з точністю 0,01?

$$R_n = 3 \cdot 2\left[\frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{2n+3} + \dots\right] < \begin{array}{l} < 6 \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots\right] = \\ = 2 \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 2\frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{9}{8} \end{array}$$

$$R_2 < 2 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1 \cdot 9}{5 \cdot 8} = \frac{1}{180} \approx 0{,}005 < 0{,}01;$$

$$\ln 8 = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81}\right) = 2 + \frac{2}{27} \cong 2{,}07.$$

Відповідь:

Ln8≈2,07

Приклад 5.

Обчислити $\sqrt[4]{17}$ з точністю 0,01.

Розв'язання.

$$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\sqrt[4]{1+\frac{1}{16}}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Скористаємося біноміальним рядом, вважаючи $x=\frac{1}{16},\ \ m=\frac{1}{4}$

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[1+\frac{1}{4\cdot16}+\frac{(-1)\cdot3}{2!4^2}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{16}\right)^3+\ldots\right]=$$

$$2+\frac{1}{32}-\frac{3}{16^3}+\frac{7}{4\cdot16^4}-\ldots,\quad |R_n|<|u_{n+1}|$$

$$|u_3|=\frac{3}{16^3}<0{,}01\quad |R_2|<|u_3|$$

$$\sqrt[4]{17}=2+\frac{1}{32}=2+0{,}031=2{,}03.$$

Відповідь:

$\sqrt[4]{17}\approx2{,}03$

Приклад 6.

Обчислити число e з точністю до 0,001.

Розв'язання.

Оцінимо похибку наближеної рівності:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\ldots\frac{x^n}{n!},\quad 0<x<1.$$

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots=\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1}+\left(\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{x}{n+1}\right)^3+\ldots\right]=$$

за формулою для суми нескінченно спадної геометричної прогресії

$$=\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}}=\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}\Rightarrow R_n(x)<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}$$

Для обчислення числа e оцінимо $R_n(x)$ при $x=1$:

$$\frac{1}{n!\,n}<0{,}001,\quad n=5\cdot$$

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=$$
$$=2+0{,}5+0{,}166+0{,}041+0{,}008=2{,}715$$

Відповідь:

$e \approx 2{,}715$

Приклад 7.

Обчислити інтеграл $\int_0^a e^{-x^2}dx$

Розв'язання.

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots$$

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\int_0^a\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\dots\right)\Bigg|_0^a=a-\frac{a^3}{1!\cdot 3}+\frac{a^5}{2!5}-\frac{a^7}{3!7}+\dots$$

Визначимо, скільки членів ряду потрібно врахувати, щоб отримати результат з точністю 0,001 ; $a=1$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=1-\frac{1}{1!3}+\frac{1}{2!5}-\frac{1}{3!7}+\dots$$

Ряд збігається за ознакою Лейбниця, при цьому $S<u_1$. Відкинемо члени, для яких $\frac{1}{n!(2n+1)}\le 0{,}001 \quad n=0,1,2,\dots \quad \Rightarrow \quad n=5$.

Приклад 8.

Обчислити інтеграл $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

Розв'язання.

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{t(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{t(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}dt=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Приклад 9.

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y' = x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1$$

Розв'язання.

Шукаємо розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

Застосуємо метод послідовного диференціювання. За умовою завдання $y(0) = 1$, підставляючи $x = 0$ в диференціальне рівняння $y' = x^2 y^2 - 1$, отримуємо $y'(0) = -1$. Послідовним диференціюванням вихідного диференціального рівняння знаходимо:

$$y'' = 2xy^2 + 2x^2 yy', \quad \Rightarrow y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 2x^2 (y')^2 + 2x^2 yy'', \quad \Rightarrow y'''(0) = 2$$

і т.д. У підсумку

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{3} x^3 - \ldots$$

Приклад 10.

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' = 2xy' + 4y, \quad y = 0, \quad y' = 1 \text{ при } x = 0$$

Розв'язання.

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad a_n = ?\ ;$$

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. З початкових умов слідує $a_0 = 0, \ a_1 = 1$. Тоді

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$
$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots$$

Підстановка в рівняння дає:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots = 2x + 4a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + \dots\dots + 4x + 4a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + \dots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^0 : 2a_2 = 0 \to a_2 = 0; x^1 : 6a_3 = 2 + 4 \to a_3 = 1;$$
$$x^2 : 12a_4 = 4a_2 + 4a_2 \to a_4 = 0; \quad \dots\dots a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1} \quad \dots\dots$$
$$a_5 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_6 = 0, \dots. \quad \Rightarrow y = x + x^3 + \frac{1}{2} x^5 + \dots$$

2.3 Питання для самоперевірки

1. Означення степеневого ряду
2. Що таке інтервал збіжності степеневого ряду; яка його структура?
3. Що таке радіус збіжності степеневого ряду? Як його визначити?
4. Як дослідити на абсолютну збіжність функціональний ряд? Які ознаки збіжності можна застосовувати?
5. Загальний вигляд рядів Тейлора і Маклорена.
6. Розвинення у ряд Маклорена основних елементарних функцій.
7. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень значень деяких алгебраїчних та трансцендентних функцій.
8. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень визначених інтегралів, які не беруться у квадратурах.
9. Застосування степеневих рядів для наближеного розв’язання диференціальних рівнянь з початковими умовами.

2.4 Типові приклади контрольних завдань

ВАРІАНТ 1

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$ за степенями $(x+1)$

3. Обчислити sin 10° з точністю до 10^{-2}.

4. Обчислити $\int_0^{0,2}\frac{e^x-1}{x}dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 2

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot(x-2)^n$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Обчислити ln 1,04 з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int_0^{1}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 3

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}$ $(x>0)$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x)=e^x$ в околі точки $x_0 = -2$.

3. Обчислити π з точністю до 10^{-3}, використовуючи розвинення функції $f(x)$ = arctg x.

4. Обчислити $\int_0^{0,5}\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$ з точністю до 10^{-2}.

ВАРІАНТ 4

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot(x-5)^n$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = x \cdot \ln(x+1)$.

3. Обчислити cos 18° з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^x}{x^2} dx$ з точністю до 10^{-5}.

ВАРІАНТ 5

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \sin 3x$ за степенями $x + \frac{\pi}{3}$.

3. Обчислити $e^{-\frac{1}{5}}$ з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1}{1-x^5} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 6

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

3. Обчислити $\sqrt[3]{7}$ з точністю до 10^{-2}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ з точністю до 10^{-2}.

ВАРІАНТ 7

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \frac{1}{5-x}$ в околі точки $x_0 = 2$.

3. Обчислити sin 16° з точністю до 10^{-2}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{1} \cos(x^2) dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 8

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^4}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos(x+4)$.

3. Обчислити ln 5 з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int_0^{1/16} e^x\cdot\sqrt{x}dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 9

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\frac{(2x-3)^n}{4^n}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $(x-2)$.

3. Обчислити $\sqrt[3]{751}$ з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int_{0,1}^{0,2}\frac{\sin x}{x}dx$ з точністю до 10^{-4}.

ВАРІАНТ 10

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\cdot x^{n-1}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=e^{2x}$.

3. Обчислити $\cos\frac{1}{2}$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 11

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n\cdot(x-1)^n}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x)=\sqrt{x^3}$ в околі точки ($x_0 = 1$).

3. Обчислити е з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 12

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^{-x^2}$.

3. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,8} x^{10} \cdot \sin x dx$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi}{10}\right)$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 13

1. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left[\frac{\sqrt{x+4}+n}{3n \cdot \sqrt{x+4}}\right]^n$,

$x > -4$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \cos x$ за степенями $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Обчислити sin 0,4 з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{1/4} e^{-x^2} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 14

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

3. Обчислити ln 3 з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 15

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$ в околі точки $x_0 = 2$.

3. Обчислити $\sqrt[3]{7641}$ з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 16

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(n-1)x]^{n-1}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Обчислити cos 1 з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}dx$ з точністю до 10^{-6}.

ВАРІАНТ 17

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \sin x$ за степенями $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Обчислити $\frac{1}{\sqrt{e}}$ з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 18

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^{\sin x}$.

3. Обчислити $\sqrt{27}$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \cdot \mathrm{arctg} x dx$ з точністю до 10^{-2}.

ВАРІАНТ 19

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$ в околі точки $x_0 = 2$.

3. Обчислити sin 18° з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$ з точністю до 10^{-2}.

ВАРІАНТ 20

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \cos^2 x$.

3. Обчислити ln 0,98 з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int_0^1 \sin(x^2) dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 21

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ за степенями $(x - 3)$.

3. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,5} x \cdot \ln(1+x^2)dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 22

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \ln(1+x)$.

3. Обчислити cos 10° з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 23

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \sin x$ в околі точки $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

3. Обчислити $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 24

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot x^n$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.

3. Обчислити $\sqrt[3]{500}$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ з точністю до 10^{-4}.

ВАРІАНТ 25

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ за степенями $(x + 4)$.

3. Обчислити $\sin 9°$ з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int_0^{1} \frac{\mathrm{arctg} x}{x} dx$ з точністю до 10^{-6}.

ВАРІАНТ 26

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot x^n}{n!}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = 3^x$.

3. Обчислити $\ln 6$ з точністю до 10^{-5}.

4. Обчислити $\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ з точністю до 10^{-2}.

ВАРІАНТ 27

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 6)$ в околі точки $x_0 = 2$.

3. Обчислити $\sqrt[5]{1{,}1}$ з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int_0^{1/2} \cos(x^2) dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 28

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^{n-1}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Обчислити cos 1° з точністю до 10^{-4}.

4. Обчислити $\int_{0}^{1/9} \sqrt{x} \cdot e^{x} dx$ з точністю до 10^{-3}.

ВАРІАНТ 29

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

2. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \ln x$ за степенями $(x-1)$.

3. Обчислити $\frac{1}{e}$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до 10^{-6}.

ВАРІАНТ 30

1. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sin^2 x$.

3. Обчислити $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}997}}$ з точністю до 10^{-3}.

4. Обчислити $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$ з точністю до 10^{-3}.