МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання

контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Ряди Фур'є»)

для студентів 1 року денної форми навчання

усіх спеціальностей

Одеса 2019

Методичні вказівки до СРС та виконання контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни “Вища математика“ (розділ «Ряди Фур’є») для студентів 1 року денної форми навчання усіх спеціальностей.

Одеса, ОДЕКУ, 2019 р., 28 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц

ЗМІСТ

І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальностей екологія, туризм, науки про Землю, комп'ютерні науки тощо. Вона спрямована на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та математичної статистики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "Вища математика" - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні задач і аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни "Вища математика" базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни.

В результаті вивчення цього розділу студент повинен:

знати – основні визначення, теореми, достатні ознаки збіжності знакододатніх і знакопереміжних рядів, функціональні ряди, поняття рівномірної збіжності, ознаку Вейєрштрасса, теорему Абеля, ряди Фур'є;

вміти – використовувати теоретичні знання та навики при дослідженні на збіжність рядів, знаходженні області збіжності; розкладати функцію в ряд Тейлора, Фур'є, обчислювати визначені інтеграли з певною точністю, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Після вивчення розділу студенти виконують індивідуальне завдання.

1.2 Зміст розділу

Періодичні функції. Парні та непарні функції. Екстремуми функцій. Безперервні та розривні функції. Класифікація розривів.

Загальний вигляд тригонометричного ряду (ряду Фур'є). Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є.

Умови Діріхлє. Теорема Діріхлє. Розкладання в ряд Фур'є функції, періодичної з періодом 2π, що задана на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Розкладання в ряд Фур'є парних та непарних функцій. Парне та непарне продовження функцій що задані на проміжку $[0; \pi]$.

Розкладання в ряд Фур'є функцій, заданих на проміжку довжиною 2π.

Розкладання в ряд Фур'є неперіодичних функцій. Періодичне продовження функцій.

Розкладання в ряд Фур'є функції, періодичної з періодом $2l$, що задана на проміжку $[-l;l]$.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2. М. «Высшая школа», 1986.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М., «Наука», 1976.

3. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М., “Наука”, 1971.

5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., “Наука”, 1972.

7. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г.,Вітавецька Л.А., ХецеліусО.Ю., Дубровська Ю.В., Свінаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2014.

8. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М., «Наука»,1971.

9. Бараненков Г. С. (и др.) Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Демидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.

10. Бугров Я. С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., «Наука», 1981.

11. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.

13. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв’язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною. Програмою передбачається написання модульних контрольних робіт та індивідуальних завдань, що оцінюються згідно з робочою програмою. Всі роботи повинні виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що дана дисципліна є засвоєною студентом.

Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми. Після цього, користуючись цією ж літературою, потрібно відповісти на питання для самоперевірки по цій темі, які наведені у конспекті лекцій з дисципліни. Коли попередній пункт виконано, студент може переходити до виконання прикладів контрольних та індивідуальних завдань , що відповідають вивченій темі, використовуючи наведені розв’язання типових задач.

2.2 Методичні вказівки до розв'язання задач

Література: [1], гл.III, §8, [2], гл.XVII, §1-6, [3], гл.IV, §1-3, вправи 1-6, 21-25, 38-42, 50-53, 59-62, 65-69, 73, 74, 83; §5,6,7, вправи 137, 138, 144-146, 150, 172, 176, 177; §9(2), вправи 264, 265, 268, 269, 271, [4], гл.XI, §1-5; гл.XII, §1.

Довідковий матеріал

1. *Ряд Фур'є* <u>періодичної функції</u> $f(x)$ <u>з періодом</u> 2π, заданої на відрізку $[-\pi; \pi]$, має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{1}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{2}$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-l, l]$, де l – довільне додатне число, то ряд Фур'є для такої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{4}$$

Зрозуміло, що ряд (1) є частинним випадком ряду (3), а формули (2) є частинними випадками формул (4) при $l = \pi$.

Збіжність ряду (3) визначається *теоремою Діріхле*. Ряд (3) збіжний, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-l, l]$ або має на ньому скінченну кількість точок розриву 1-го роду. При цьому сума $S(x)$ в точках неперервності дорівнює значенню функції в цих точках. Якщо x_0 – точка розриву 1-го роду, то суму ряду (3) можна знайти за формулою

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0} f(x) + \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right].$$

На кінцях відрізка $\left[-l,\, l\right]$ сума ряду (3):

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right].$$

2. Якщо функція $f(x)$ <u>парна</u>, то в формулах (1) – (4) коефіцієнти $b_n=0$ і ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,\ \text{ при }\ x\in\left[-\pi,\,\pi\right], \qquad (5)$$

де $a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$;

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \text{ при }\ x\in\left[-l,\,l\right], \qquad (6)$$

де $a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\,dx$, $a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$.

Ряди (5) та (6) називають рядами *косинусів* функції $f(x)$.

3. Якщо задана функція $f(x)$ <u>непарна</u>, то в формулах (1) – (4) коефіцієнти $a_n=0$, $a_0=0$. Залишаються лише $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ при $x\in\left[-\pi,\,\pi\right]$ або $b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ при $x\in\left[-l,\,l\right]$.

4. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $\left[a,\,b\right]$, то маємо безліч способів розвинути її в ряд Фур'є. Достатньо довизначити функцію на інтервалі $\left[-b,\,a\right)$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=\pi+x$, задану на проміжку $\left(-\pi,\,\pi\right]$ з періодом 2π.

Розв'язання.

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (2):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi + x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx = \frac{\pi}{\pi}\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi} + 0 = 2\pi\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi + x\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{парна}}{\pi\cos nx}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{непарна}}dx =$$

$$= \frac{\pi}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\sin n\pi - \sin 0\right) = 0\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi + x\right)\sin nx\,dx = \frac{\pi}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underset{\text{непарна}}{\pi\sin nx}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\sin nx}_{\text{парна}}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx, & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n}\cdot 0\cdot\cos 0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\left(\sin n\pi - \sin 0\right)\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi =$$

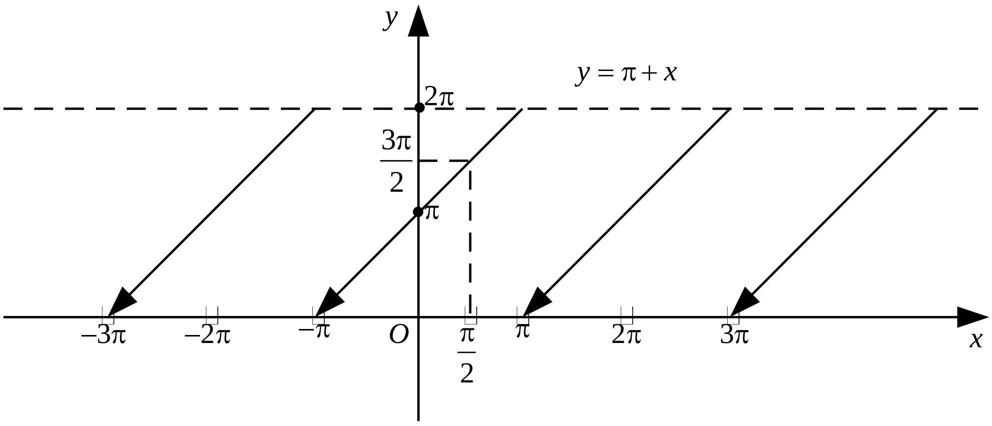
$$= -\frac{2}{n}\cdot\left(-1\right)^n = \frac{2}{n}\left(-1\right)^{n+1}.$$

Таким чином, за формулою (1) ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f\left(x\right) = \frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\left(-1\right)^{n+1}\sin nx = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin nx\ ,\ \text{або}$$

$$f(x)=\pi+2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

Побудуємо графік даної періодичної функції $y=\pi+x$.



Сума ряду Фур'є в точках неперервності функції дорівнює її значенню. Наприклад, в точці $x_0=0$ сума ряду $S(x_0)=\pi+0=\pi$. В точці $x_0=\frac{\pi}{2}$ сума ряду $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

В точках розриву, наприклад, в точці $x_0=\pi$ сума ряду

$$S(\pi)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\pi-0}f(x)+\lim_{x\to\pi+0}f(x)\right]=\frac{1}{2}(2\pi+0)=\pi. \quad \lrcorner$$

Приклад 2.

Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=x^2$, задану на відрізку $[-2,\ 2]$ з періодом $T=4$.

Розв'язання.

Дана функція парна. Тому треба застосувати формулу (6) при $l=2$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2, & dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=2xdx, & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{n\pi}x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{n\pi}\underset{0}{\sin n\pi}-0-\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(2\cos n\pi-0\right)=\frac{16\cos n\pi}{n^2\pi^2}=\frac{16\cdot\left(-1\right)^n}{n^2\pi^2}.$$

Ряд Фур’є заданої функції має вигляд

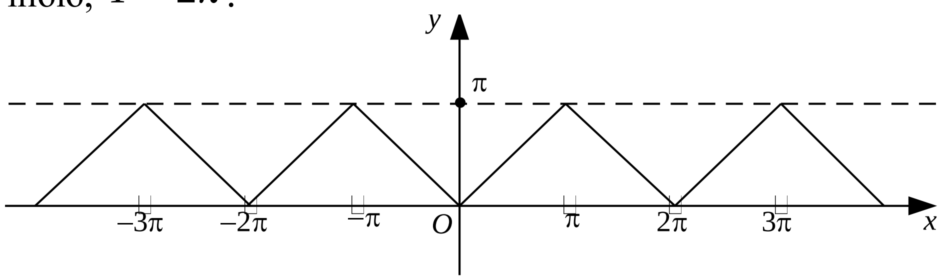
$$f\left(x\right)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}. \quad ┘$$

Приклад 3.

Функція $f\left(x\right)=x$ задана на проміжку $\left(0,\ \pi\right]$. Розвинути її в ряд косинусів.

Розв’язання.

Дану функцію потрібно довизначити на відрізку $\left[-\pi,\ 0\right]$ так, щоб вона була парною. Покладемо $y=-x$ при $x\in\left[-\pi,\ 0\right]$. Вважаємо функцію періодичною, $T=2\pi$.



Функція неперервна на всій осі.

Коефіцієнти ряду знаходимо за формулами (5):

$$b_n = 0\,,\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi\,,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos nx\,dx \\ du = dx, & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi - \cos 0\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi - 1\right].$$

Запишемо ряд Фур’є:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2}\cos nx\,,$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\cos x}{1} - \frac{2\cos 3x}{9} - \frac{2\cos 5x}{5^2} - \cdots\right),\ \text{або}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\,.\ \lrcorner$$

Приклад 4.

Розвинути в ряд Фур’є періодичну функцію $y = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0,\ \pi), \\ -1 & \text{при } x \in [-\pi,\ 0), \end{cases}$

задану на проміжку $[-\pi,\ \pi)$.

Розв’язання.

$$a_0 = 0\,,\ a_n = 0\,,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) =$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{bmatrix} 0, & n-\text{парне}, \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n-\text{непарне}. \end{bmatrix}$$

Запишемо ряд Фур’є:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-1\right]\frac{\sin nx}{n}\text{ , або}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Приклад 5.

Функцію $y=\cos 2x$ $\left(T=\frac{\pi}{2};\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)\right)$ розвинути в ряд синусів.

Розв’язання.

Довизначимо функцію на інтервал $\left(-\frac{\pi}{4},\ 0\right)$ так, щоб вона була непарною, тобто $y=-\cos 2x$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\ 0\right)$; $l=\frac{\pi}{4}$; $a_0=0$; $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2\cdot 4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cdot\sin\frac{n\pi x\cdot 4}{\pi}\,dx=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\sin 4nx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin(4n+2)x+\sin(4n-2)x\right]dx=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos(4n+2)x}{4n+2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(4n-2)x}{4n-2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\left[(4n+2)\frac{\pi}{4}\right]}{4n+2}+\frac{\cos\left[(4n-2)\frac{\pi}{4}\right]}{4n-2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n-2}\right]=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{4n+2}+\frac{\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{4n-2}-\frac{8n}{(4n+2)(4n-2)}\right]=$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[-\frac{\sin n\pi}{4n+2}+\frac{\sin n\pi}{4n-2}-\frac{8n}{(4n+2)(4n-2)}\right]=\frac{32n}{\pi(4n+2)(4n-2)}=$$

$$=\frac{8n}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

Запишемо ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)(2n-1)}\sin 4nx=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 4x}{3\cdot 1}+\frac{\sin 8x}{5\cdot 3}+\frac{\sin 12x}{7\cdot 5}+\cdots\right).$$

Приклад 6.

$f(x)=x+2$, $x\in[1,\ 2]$.

Розв'язання.

Можна покласти $f(x)=0$ при $x\in(-1,\ 1)$ і $f(x)=-(x+2)$ при $x\in[-2,\ -1]$ Тоді функція $f(x)$ непарна і коефіцієнти ряду Фур'є обчислюються за формулами :

$$a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \text{ при } l=2.$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 (x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x+2, & dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du=dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=-\frac{2(x+2)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{8\left(-1\right)^{n+1}}{n\pi}+\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f\left(x\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\left(-1\right)^{n+1}}{n}+\frac{3}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Приклад 7.

Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π, яка задається в $[-\pi;\pi[$ наступним чином: $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x\langle 0, \\ 0, & 0\le x\langle \pi. \end{cases}$

Розв'язання.

З'ясовуємо, чи задовольняє функція умови теореми Діріхле. Ця функція задовольняє умовам Діріхле, тому розвинемо її у ряд Фур'є. Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_{0}^{\pi}0\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\rho}^{0}=-\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\int_{-\pi}^{0}x\cdot\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi}0\cdot\cos(nx)dx\right)$$

Обчислим перший інтеграл за формулою інтегрування частинами:

$$\int_{-\pi}^{0}x\cos(nx)dx=\begin{bmatrix} x=u;\,dx=du \\ \cos(nx)dx=dv;\,v=\dfrac{\sin(nx)}{n}\end{bmatrix}=x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\cdot\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{x}{n}\sin(nx)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\Bigg|_{-\pi}^{0}=0+\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos 0-\cos(n\pi)\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\left[1-\left(-1\right)^n\right];$$

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \begin{cases} 0, \_\_\_\_\_\_ n - парне, \\ \dfrac{2}{n^2\pi}, \_\_\_ n - непарне \end{cases}$$

Звідки $a_1 = \frac{2}{\pi}$; $a_2 = 0$; $a_3 = \frac{2}{3^2 \cdot \pi}$; $a_4 = 0$; $a_5 = \frac{2}{5^2 \cdot \pi}$; ....

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-o}^{0} x\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 0 \cdot \sin(nx)dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{0} x\sin(nx)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x = u; dx = du \\ \sin(nx)dx = dv; v = \int \sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[-x \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{0} \cos(nx)dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n}\cos(nx) \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\sin(nx) \Big|_{-\pi}^{0} \right] = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) = \frac{(-1)}{n} \cdot (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$b_1 = 1$; $b_2 = -\frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{1}{3}$; $b_4 = -\frac{1}{4}$; $b_5 = \frac{1}{5}$; ....

Підставляючи $a_0, a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$ в тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

маємо

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x \right) - \frac{1}{2}\sin 2x + \left(\frac{2}{3^2 \cdot \pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x \right) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+ \left(\frac{2}{5^2 \cdot \pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x \right) + \ldots;$$

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots \right) +$$

$$+ \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \ldots \right).$$

Цей ряд збіжний до $f(x)$ при будь-якому $x\in]-\pi;\pi[$.

В точках $x = \pm\pi$ ряд збіжний до $\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{0-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$.

Приклад 8.

Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом $2l=2$, яка на [-1;1] задається рівнянням $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, \_\_\_\_ -1\le x\langle 0\\ x, \_\_\_\_\_ 0\le x\le 1\end{cases}$

Розв'язання.

Ця функція парна. Для розвинення в ряд Фур'є потрібно знайти a_0, a_n. Оскільки функція парна, то $b_n=0$ і тому дана функція розкладається в ряд Фур'є за косинусами. Знаходимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=2\int_0^1 xdx=2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=x^2\Big|_0^1=1;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi\cdot x}{l}dx=2\int_0^1 x\cos(n\pi\cdot x)dx=\begin{bmatrix}x=u; dx=du\\ \cos(n\pi\cdot x)=dv; v=\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi\cdot x)\end{bmatrix}=$$

$$=2\left[x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi\cdot x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi\cdot x)dx\right]=$$

$$=2\left[x\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi\cdot x)\Big|_0^1+\frac{1}{n^2\cdot\pi^2}\cos(n\pi\cdot x)\Big|_0^1\right]=$$

$$=0+\frac{2}{n^2\cdot\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=\frac{2}{n^2\cdot\pi^2}\left[(-1)^n-1\right].$$

$$a_n=\begin{cases}0, \_\_\_\_\_\_ n-\textit{парне}\\ -\frac{4}{n^2\cdot\pi^2}, n-\textit{непарне}\end{cases}$$

Знаходимо:

$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2}; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{4}{9\pi^2}; \quad a_4 = 0; \quad a_5 = -\frac{4}{25\pi^2}; \quad a_6 = 0; \quad \ldots..$$

Ряд Фур'є запишеться у вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi \cdot x) + \frac{\cos(3\pi \cdot x)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi \cdot x)}{5^2} + \frac{\cos(7\pi \cdot x)}{7^2} + \ldots \right)$$

Дана функція неперервна на всій числовій осі, тому її ряд Фур'є збіжний до цієї функції при будь-якому значенні *x*.

2.3 Питання для самоперевірки

1) Ряд Фур'є та його коефіцієнти.
2) Визначення парної та непарної функції.
3) Визначення періодичної функції. Період функції.
4) Умови Діріхле для функції $f(x)$.
5) Теорема Діріхлє.
6) Розвинення функції $f(x)$ в тригонометричний ряд. Обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для функції на інтервалі $(-\pi;\pi)$.
7) Ряд Фур'є парної функції, заданої на інтервалі $(-\pi;\pi)$. Обчислення його коефіцієнтів.
8) Розвинення функції на інтервалі $(0;\pi)$ в ряд по синусам. Обчислення коефіцієнтів.
9) Розвинення в ряд Фур'є функції, заданої на довільному відрізку з періодом $2l$. Обчислення коефіцієнтів.
10) Парне та періодичне продовження функції.
11) Непарне та періодичне продовження функції.

12) Застосування формули інтегрування частинами для обчислення визначених інтегралів.

2.4 Типові приклади індивідуальних завдань

Варіант 1

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$.

2. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{3}, \text{ при } & 0<x<\frac{\pi}{3} \\ 0, \text{ при } & \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3}, \text{ при } & \frac{2\pi}{3}<x<\pi \end{cases}$

Варіант 2

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{при } -\pi<x<0 \\ 1, & \text{при } 0<x<\pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x, (0 < x < \pi)$.

Варіант 3

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{при } -\pi\le x\le 0 \\ x, & \text{при } 0\le x\le\pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\frac{\pi}{8}\cdot(\pi-2x)$,(0; π).

Варіант 4

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

2. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}$

Варіант 5

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = e^x$ в інтервалі (0; 2π).

2. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

Варіант 6

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = \dfrac{1}{2}(\pi - x) \cdot \sin x$ в інтервалі (0; π).

Варіант 7

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \cos ax$ на відрізку [–π; π] (a – не ціле число).

2. Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3} \\ -\dfrac{\pi}{3}, & \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$

Варіант 8

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi, & \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = x \cdot (7 - x)$ в інтервалі (0; 7).

Варіант 9

1. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x) = x - 1$, яка задана на відрізку [1; 2]

2. Розвинути в ряд косинусів функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Варіант 10

1. Знайти розвинення в ряд Фур’є періодичної функції $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 2, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд за синусами функцію $f(x) = x$ на відрізку [0; 2]

Варіант 11

1. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x) = x^2$, яка задана на відрізку [0; π]. Продовжити $f(x)$ на відрізок [–π; 0] непарним способом.

Варіант 12

1. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x) = x$, яка задана на інтервалі (0; 2π).

2. Розвинути в ряд за косинусами функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 3 \\ 4 - x, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

Варіант 13

1. Розвинути в ряд Фур’є функцію $f(x) = x$, задану на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

2. Розвинути в ряд за косинусами функцію $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ -\cos x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{3\pi}{2}\\ \cos x, & \dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\end{cases}$

Варіант 14

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ -1, & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\\ 1, & \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\pi-2x$, яка задана на відрізку [0; π]. Продовжити $f(x)$ на відрізок [–π; 0] парним способом.

Варіант 15

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le \pi\\ -3, & \pi<x\le 2\pi\end{cases}$

2. Розвинути в ряд за синусами функцію $f(x)=\dfrac{7}{\pi}\cdot(\pi-x)$, якщо $0 < x < 2\pi$.

Варіант 16

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, якщо $0 < x < 2\pi$.

2. Розвинути в ряд за косинусами функцію $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le 1\end{cases}$

Варіант 17

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^x$, якщо $-\pi < x < \pi$.

2. Розвинути в ряд синусів функцію $f(x)=\begin{cases}-5, & -\pi\le x\le 0\\ 5, & 0\le x\le \pi\end{cases}$

Варіант 18

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le 2\end{cases}$

2. Розвинути в ряд за синусами функцію $f(x)=\cos 2x$, яка задана на відрізку [0; π].

Варіант 19

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi\le x\le 0\\ 3x, & 0\le x\le \pi\end{cases}$

2. Розвинути в ряд за косинусами функцію $f(x)=7-\frac{7}{\pi^2}\cdot(x-\pi)^2$, [0; 2π].

Варіант 20

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\pi+x$, задану на інтервалі (–π; π).

2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}x, & 0< x\le 1\\ 2-x, & 1< x\le 2\end{cases}$.

   Продовжити $f(x)$ на відрізок [–2; 0] непарним способом.

Варіант 21

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -7\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2}, & \frac{7}{2}\le x\le 7\end{cases}$

2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \pi - 2x$, яка задана на відрізку $[0; \pi]$. Продовжити $f(x)$ на відрізок $[-\pi; 0]$ непарним способом.

Варіант 22

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд за косинусами функцію $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ на відрізку $[0; 2]$.

Варіант 23

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -\cos x, & -\pi \le x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = x$, яка задана на відрізку $[0; \pi]$.

Варіант 24

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = e^x$, ка задана на інтервалі $(-5; 5)$.

2. Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, задану на відрізку $[0; 2]$.

Варіант 25

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$, яка задана на відрізку $[-1; 1]$.

2. Розвинути в ряд за синусами функцію $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$ на інтервалі $(0; \pi)$.

Варіант 26

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 < x < \pi \end{cases}$

2. Розвинути в ряд косинусів функцію $f(x)=\sin ax$, яка задана на інтервалі (0; π) (a – ціле число).

Варіант 27

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^{x}-1$, задану на інтервалі (0; 2π).
2. Розвинути в ряд за косинусами функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<2\\ 0, & 2<x<\pi\end{cases}$$

Варіант 28

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\sin ax$, яка задана на інтервалі (–π; π) (a – не ціле число).
2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ в інтервалі (0; π). Продовжити $f(x)$ на інтервал (–π; 0) непарним способом.

Варіант 29

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x\cos x$, якщо $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Розвинути в ряд за синусами функцію $f(x)=x\cdot(\pi-x)$ в інтервалі (0; π).

Варіант 30

1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}x+\frac{\pi}{2}, & -\pi\le x\le 0\\ \frac{\pi}{2}-x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$
2. Розвинути в ряд косинусів функцію $f(x)=x$, якщо $x\in(0;\pi)$.