МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

для студентів II курсу
всіх напрямків підготовки

Одеса 2006

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання модульних завдань з дисципліни «Вища математика» розділ «Теорія функцій комплексної змінної» для студентів II курсу всіх напрямків підготовки

Укладачі:
Вітавецька Л.А.,канд.фіз.-мат.наук, доцент; Одеса, ОДЕКУ,
Шпінарева І.М., канд.фіз.-мат.наук, доцент; Одеса, ОДЕКУ,
2006р., 31 с., укр.мова

Відповідальний редактор:
Глушков О.В., доктор фіз.-мат.наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вища математика належить до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, диференціального і інтегрального числення, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, операційного числення, рівнянь математичної фізики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни: забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичних курсів з вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Завдання дисципліни "Вища математика – навчити студентів:

- Правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач в практичній діяльності.
- Правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Розділ «Теорія функцій комплексної змінної» (ТФКП) вивчається на другому курсі навчання і передбачає лекційні та практичні заняття та самостійну роботу студентів.

Теорія функцій комплексної змінної є однією з важливих областей математичного аналізу. У фізиці, механіці та інших науках при розв'язуванні різних задач використовується теорія аналітичних функцій. Зокрема, так звані плоскі задачі теплової або електричної рівноваги, задачі обтікання плоских контурів потоками рідини або газу.

Вивчення розділу «Теорія функцій комплексної змінної» потребує від студентів знання основ вищої математики в обсязі програми курсу вищої математики відповідної спеціалізації: теорії функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, теорії рядів.

В результаті вивчення розділу студент повинен знати матеріал в обсязі програми та вміти використовувати отриманні знання при розв'язуванні задач відповідної спеціалізації.

Обсяг вивчення окремих розділів і тем визначаються робочими програмами, розробленими на основі даної програми з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих груп.

Вид контролю знань після вивчення розділу «Теорія функцій комплексної змінної» – модульна контрольна робота, опит.

1. ПРОГРАМА РОЗДІЛУ

Теорію функцій комплексної змінної можна розглядати як розділ вищої математики, в якому вивчаються методи розв'язання задач фізики та механіки. Зокрема, так звані плоскі задачі теплової або електричної рівноваги, задачі обтікання плоских контурів потоками рідини або газу призводять саме до рівняння Лапласа, з різних розв'язків якого побудовано всі аналітичні функції.

Дані методичні вказівки розроблено відповідно до програми курсу «Вища математика» для всіх напрямків підготовки.

Одним з найважливіших факторів засвоєння матеріалу є самостійна робота студентів (СРС).

Мета та завдання даних методичних вказівок – дати загальні рекомендації студенту до самостійної роботи (СР) над розділом «Теорія функцій комплексної змінної» та до виконання модульних завдань після вивчення розділу. Матеріал поділено на розділи, до кожного з яких зазначено рекомендовані посібники із списку літератури. Додаткові посібники рекомендуються тільки в тих випадках, коли необхідний матеріал в основних посібниках відсутній або недостатній. В кінці кожної теми наведено питання до самоперевірки.

ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: «Наука», 1965.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2 – М.: «Высшая школа», 1986.

Додаткова література

4. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций.- М.: «Наука», 1966.
5. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Т.2 – М. «Наука», 1986.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА (на СРС 2 год.)

Комплексні числа в різних формах. Дії над комплексними числами.
Література: [1, гл.1, §1, §2]

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ (ТФКЗ) (на СРС 4 год.)

Функції комплексної змінної. Границя і неперервність функції.
Похідна. Поняття функції аналітичної в області. Умови Коші – Рімана.
Література: [1, гл.1, §2, §3, гл.2, §1, §2], [2, гл.7, §1]

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФКЗ. (на СРС 2 год.)

Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості.
Теорема Коші (для однозв'язної та багатозв'язної області). Інтегральна формула Коші.
Література: [1, гл.2, §3, §4], [2, гл.7, §4]

РЯДИ ФКЗ (на СРС 2 год.)

Розклад аналітичної функції у степеневий ряд.
Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки та їх класифікація.
Теорія лишків. Основна теорема про лишки. Застосування лишків до обчислення інтегралів.
Література: [1, гл.4, §4, §5], [2, гл.7, §5]

Після вивчення дисципліни студент повинен мати:

Знання: основних понять, основних теорем та формул теорії функцій комплексної змінної: умови Коші-Рімана, формули обчислення похідної, конформне відображення, теорему Коші для однозв'язної та багатозв'язної області, основну теорему про лишки, формулу Коші.

Вміння: виконувати дії над комплексними числами; визначати аналітичність функції та обчислювати її похідну за умовами Коші-Рімана; обчислювати інтеграл від функції комплексної змінної за теоремою Коші, за допомогою лишків, за формулою Коші; визначати характер ізольованих особливих точок; розвинути функцію в ряд Лорана; обчислювати лишки функції та застосовувати їх до обчислення інтегралів.
Вміти використовувати отриманні знання при розв'язуванні практичних задач. Аналізувати результати математичних обчислень.

Вид контролю знань після вивчення розділу «Теорія функцій комплексної змінної» – модульна контрольна робота, опит.

2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Перелік тем самостійної роботи

1) Логарифм комплексного числа.
2) Геометричний зміст похідної. Поняття про конформне відображення.
3) Гармонічні і спряжені гармонічні функції.
4) Гідромеханічне тлумачення аналітичної функції.
5) Узагальнене поняття аналітичної функції.
6) Застосування лишків до обчислення визначених інтегралів.

Вивчення розділу «Теорія функцій комплексної змінної» потребує від студентів знання основ вищої математики в обсязі програми курсу вищої математики відповідної спеціалізації: теорії функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, теорії рядів.

Вивчення теоретичного матеріалу слід обов'язково супроводжувати розв'язуванням задач. Слід також приділити увагу прикладам, які розв'язані в тексті матеріалу, рекомендованому для вивчення.

Тема 1. Комплексні числа.

Література: [1, гл.1, §1, §2]

Питання до самоперевірки

1. Що називають комплексним числом?
2. Що називається дійсною та уявною частиною комплексного числа?
3. Які форми запису комплексних чисел ви знаєте?
4. За якими правилами виконуються дії над комплексними числами?

Тема 2. Теорія функції комплексної змінної.

Література: [1, гл.1, §2, §3, гл.2, §1, §2], [2, гл.7, §1]

Питання до самоперевірки

1. Елементарні функції комплексної змінної.
2. Дійсна та уявна частина функції комплексної змінної.
3. Означення похідної функції комплексної змінної.
4. Умови Коші-Рімана. Аналітичність функції комплексної змінної.
5. Обчислення похідної функції комплексної змінної

Тема 3. Інтегральне числення ФКЗ

Література: [1, гл.2, §3, §4], [2, гл.7, §4]

Питання до самоперевірки

1. Означення інтегралу ФКЗ.
2. Інтегрування по комплексному аргументу.
3. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші.

Тема 4. Ряди ФКЗ

Література: [1, гл.4, §4, §5], [2, гл.7, §5]

Питання до самоперевірки

1. Означення ряду Лорана: головна та правильна частина.
2. Розвинення функцій в ряд Лорана.
3. Характер ізольованих особливих точок.
4. Означення лишку функції та його обчислення. Теорема про лишки та їх застосування до обчислення інтегралів.

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Тема 1. Комплексні числа.

П р и к л а д 1 . Нехай $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$ $\quad z_2 = \sqrt{3}+i$, знайдемо $z_1 z_2$

Знаходимо модулі і аргументи z_1 і z_2 користуючись формулами:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Відповідно $|z_1| = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\quad |z_2| = 2$, $tg\varphi_1 = \sqrt{3}$, $tg\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Тому $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$; $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}$.. Для добутку маємо

$$|z| = |z_1 \cdot z_2| = 4, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Отже, добуток знаходиться на додатній півосі OY на відстані 4 від початку координат і тому z=(0,4).

Алгебраїчна форма комплексного числа. Розглянемо комплексне число z в площині ХОУ (рис.1) Можна записати z = (x,y) = $(x,0)$ + (0, y) = $x(1,0)$ + $y(0,1)$. Число (1,0) можна ототожнити з числом 1, число (0,1) позначимо літерою i, так що $z=x+yi$**.**

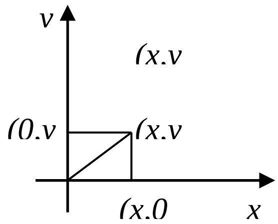


Рис.1

П р и к л а д 2 . Знайдемо i^2.

За означенням добутку двох комплексних чисел знайдемо модуль і аргумент i^2

$$i^2 = i \cdot i = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\arg i^2 = \arg(i \cdot i) = \arg i + \arg i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

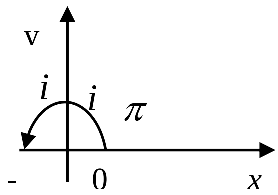


Рис. 2

Таким чином, ми отримали (див.рис.2), що i^2 = -1.

Легко бачити, що дії над комплексними числами в алгебраїчній формі можна проводити за звичайними правилами, враховуючи, що i^2 = -1.

П р и к л а д 3. Нехай $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

Знайти $\qquad z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$.

Знаходимо відповідно

$$z_1 + z_2 = 1+1+i\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right) = 2;$$

$$z_1 - z_2 = 1-1+i\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\,i;$$

$$z_1 z_2 = (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = 1 - \left(i\sqrt{3}\right)^2 = 1+3 = 4;$$

Комплексне число z=x-iy називають спряженим до комплексного числа z=x+iy.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{1+2\sqrt{3}\,i-3}{1+3}=\frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $x^2 - 4x +13 = 0$.
Знаходимо дискримінант D= 16-52=-36. Отже, $\sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{36i^2} = 6i$.
Таким чином, корені рівняння $x_1 = 2+3i$, $x_2 = 2-3i$.

П р и к л а д 5 . Нехай $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 =1-i\sqrt{3}$

Якщо в алгебраїчній формі $z = x + iy$ покласти $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $\rho = |z|$, $\varphi=Argz$, то отримаємо $z=\rho(\cos\varphi+ i\sin\varphi)$. Це є *тригонометрична форма комплексного числа* .

$$z_1=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),\quad z_2=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

Комплексні числа, записані в тригонометричній формі, легко перемножати та ділити. Дійсно, користуючись правилом множення комплексних чисел, отримаємо :

$$z_1\quad z_2=4(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}))=4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

П р и к л а д 6 . Знайти $\sqrt[4]{-1}$.

За допомогою тригонометричної форми комплексного числа легко піднести комплексні числа до довільного натурального степеня. Насправді, якщо $z=\rho(\cos\varphi+ i\sin\varphi)$, то, згідно з правилом множення, $\left|z^n\right|=|z|^n$, $argz^n =n\,argz$. Тому має місце *формула Муавра* $z^n = \rho^n(\cos n\varphi+ i\sin n\varphi)$.

Коренем n-го степеня із комплексного числа z називають комплексне число ω, яке задовольняє рівняння $\omega^n = z$, $n\in Z$, позначення $\omega=\sqrt[n]{z}$.

При k=0,1,..., n-1 можна дістати n різних значень аргументу φ. Тому маємо n різних значень кореня

$$\omega_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1\ldots,n-1,$$

при інших k вони повторюються.

Корені n-го степеня знаходяться в вершинах правильного n-кутника.

Тригонометрична форма: -l=l(cosπ +isinπ), отже, $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$

Маємо чотири значення

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \omega_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \omega_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Користуючись відомою з курсу "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" формулою *Ейлера* e^{it} = *cost + i sint*, замість тригонометричної форми $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ можна вживати форму запису, яка називається *показниковою формою*: $z=|z|e^{i\varphi}$.

П р и к л а д 7. Нехай z_1=1+$i\sqrt{3}$; z_2=l-$i\sqrt{3}$, требо записати в показниковой формі.

z_1=2(cos$\frac{\pi}{3}$ +$i$sin $\frac{\pi}{3}$), z_2=2(cos$\frac{\pi}{6}$ +$i$sin$\frac{\pi}{6}$)

$z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Показникова форма комплексного числа дозволяє обчислювати логарифми комплексних чисел $z=x+iy\neq O$.

$$\ln z = \ln|z| + iArgz.$$

П р и к л а д 8. Знайти ln(-2) .

Маємо |z| = 2, argz=π ; отже ln(-2)=ln2+$i\pi$.

Тема 2. Теорія функції комплексної змінної.

П р и к л а д 9 . Знайти область, яка відповідає умові $|z|-\operatorname{Im}z<1$.

Кажуть, що на множині М точок комплексної площини Z задана функція w=f(z), якщо вказано закон, за яким кожній точці z із М ставиться у відповідність одна точка w.

Якщо $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ і $\operatorname{Im}z=y$, то маємо нерівність $\sqrt{x^2+y^2}$ -y<1;

$\sqrt{x^2+y^2}$ <1+y; $x^2+y^2<(1+y)^2$; y>$\frac{1}{2}(x^2-1)$.

Тоді шукана область представляє множину точок, обмежену графиком y=$\frac{1}{2}(x^2-1)$.

П р и к л а д 1 0 . Знайти функції дійсних змінних *u(x ;y)* та *v(x,y),* якщо $f(z)=iz^2-\bar{z}$.

Нехай $z=x+iy$, $w=u+iv$. Щоб задати ФКЗ $w=f(z)$ слід задати дві функції $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, тому що $f(z)=u+iv=u(x,y)+iv(x,y)$.

$$f(z)=i(x+iy)^2-(x-iy)=i\left(x^2+2xyi-y^2\right)-x+iy=-x(1+2y)+i\left(x^2-y^2+y\right)$$

Тоді $u=-x(1+2y)$, $v=\left(x^2-y^2+y\right)$.

П р и к л а д 1 1 . Обчисліть $\sin i$.

За формулами Ейлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ звідки $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}$.

$$\sin i=\frac{e^{ii}-e^{-ii}}{2i}=\frac{e^{-1}-e^{1}}{2i}=i\frac{e-e^{-1}}{2}=ish1.$$

П р и к л а д 1 2 . Ч и всюди аналітична показникова функція $\omega=e^z$?

Функція f(z) диференційовна в точці z, якщо існує границя $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$.*Ця границя називається похідною функції f(z) в точці z.*

Умову диференційовності *f(z)* в термінах дійсних функцій *u(x,y)* і *v(x,y)* виражає наступна теорема:

Нехай функція f(z)=u(x,y)+iv(x,y) визначена в деякому околі точки z, причому в цій точці u(x,y) і v(x,y) диференційовні. Тоді для диференційовності функції комплексного змінного f(z) в точці z необхідно і достатньо, щоб в цій точці мали місце рівності:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ці умови називаються умовами Коші-Рімана.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функція f(z), диференційовна в кожній точці деякої області D, називається аналітичною в цій області.

Показникову функцію $\omega=e^z$ вже визначено для будь-якого комплексного $z=x+iy$ відношенням $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Функція всюди аналітична, тому що $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$,

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$, тобто $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, а також $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$, тобто $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\left(e^z\right)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y + i\sin y)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

Функція e^z періодична з чисто уявним періодом $2\pi i$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = e^z \text{, так як } e^{2k\pi i} = 1.$$

Приклад 13. Чи є аналітичними тригонометричні функції sinz, cos z ?

Оскільки $\sin z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, то за правилами диференціювання $(\sin z)' = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}\cdot i - ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$

Знайдемо $(\cos z)' = \frac{1}{2}\left(e^{iz}\cdot i - ie^{-iz}\right) = -\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\sin z$.

Тема 3. Інтегральне числення ФКЗ

Приклад 14. Обчисліть $\int\limits_{AB}\operatorname{Re} z dz$, де AB - відрізок, причому $z_A=0$; $z_B=1+i$:

Параметричне рівняння відрізка AB має вигляд $x=t$, $y=t$, а у комплексній формі $z=(1+i)t$, де $0\le t\le 1$

Нехай z = z(t) =x(t) + y(t) - параметричне рівняння кривої C, причому z(a)=a, z(b)=b, тоді обчислення інтеграла від f(z) по кривій C має вигляд

$$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_C f[z(t)]z'(t)dt.$$

Тоді $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 \operatorname{Re}[(1+i)t](1+i)dt = (1+i)\int\limits_0^1 t dt = \frac{1+i}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}$.

П р и к л а д 1 5 . Обчисліть $\int\limits_{AB} f(z)dz$, де $f(z)=x^2+y^2i$, *AB*-відрізок $z_A=1+i$; $z_B=2+3i$:

Обчислення інтеграла $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$ зводиться до обчислення двох дійсних криволінійних інтегралів. Формально це зведення можна провести таким чином. Поклавши *f(z) = u + iv*, *dz=dx+ idy*, маємо:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_{AB} (udx - vdy) + i\int\limits_{AB} (udy + vdx)$$

Оскільки $u=x^2$, $v=y^2$

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} x^2dx - y^2dy + i\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy$$

Рівняння прямої *AB* має вигляд *y=2x-1, dy=2dx.*

$$\int\limits_{AB} x^2dx - y^2dy + i\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_1^2 x^2dx - \int\limits_1^3 y^2dy + i\int\limits_1^2\left[(2x-1)^2+2x^2\right]dx =$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^3 + i\left.\left(2x^3-2x^2+x\right)\right|_1^2 = -\frac{19}{3}+9i\,.$$

П р и к л а д 1 6 . Обчисліть $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, по довільному замкненому контурі *C*.

Якщо $n \le 0$, то по теоремі Коші**:** *Якщо функція f(z) аналітична в однозв 'язній області D, то її інтеграл по довільному замкненому контурі С, що лежить в D дорівнює 0.*

Тому $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int\limits_C (z-a)^m dz = 0$, де $m=-n \ge 0$ та функція *f(z)*$=(z-a)^m$ аналітична в однозв 'язній області .

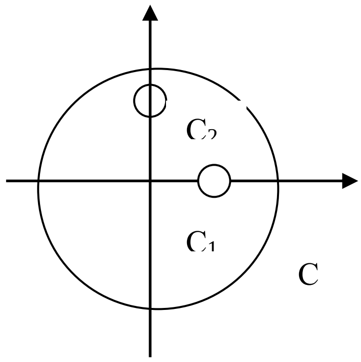
Якщо $z=a$ знаходиться поза межами області обмеженої простим контуром С, то функція *f(z)* аналітична в однозв'язній області D обмеженої простим контуром С, тоді інтеграл цієї функції по границі області дорівнює нулю $\int\limits_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ =0.

П р и к л а д 1 7 . Обчисліть $\int\limits_C \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}dz$, де С-коло $|z|=2$.

У точках $z=1, z=i$ знаменник функції дорівнює нулю. Функція *f(z)* аналітична в області $\overline{C}$, із якої вирізані два кола $|z-1|<r, |z-i|<r$, де $r>0$-досить мала величина.

Тоді по теоремі Коші для багатозв'язних областей**:** *Нехай границя області D складається із простих замкнутих контурів і нехай f(z) аналітична в області D і неперервна в замиканні області* $\overline{D}$*, тоді інтеграл цієї функції по границі області дорівнює* $\int\limits_{C_0} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)dz$.

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz \quad ,$$



де C_1-коло $|z-1| = r$, C_2-коло $|z-i| = r$.

Оскільки $f(z) = \dfrac{z-1+z-i}{(z-1)(z-i)} = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-i}$, то

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} \frac{dz}{z-1} + \int\limits_{C_1} \frac{dz}{z-i} + \int\limits_{C_2} \frac{dz}{z-1} + \int\limits_{C_2} \frac{dz}{z-i}.$$

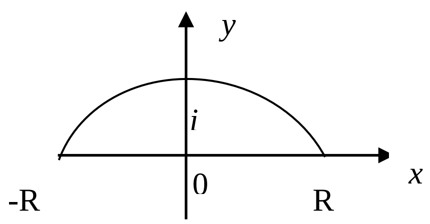
По теоремі Коші $\int\limits_{C_1} \dfrac{dz}{z-i} = 0, \int\limits_{C_2} \dfrac{dz}{z-1} = 0$. Тому $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} \dfrac{dz}{z-1} + \int\limits_{C_2} \dfrac{dz}{z-i}$.

$$\int\limits_{C_1} \frac{dz}{z-1} = \begin{bmatrix} z = 1 + re^{i\varphi} \\ dz = rie^{i\varphi}d\varphi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

$$\int\limits_{C_2} \frac{dz}{z-1} = \begin{bmatrix} z = i + re^{i\varphi} \\ dz = rie^{i\varphi}d\varphi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

Звідки $\int\limits_C f(z)dz = 4\pi i$.

П р и к л а д 1 8 . Знайти інтеграл $\int\limits_C \dfrac{dz}{z^2+1}$, де C - контур (див. рис.) $|z| = R$, R > 1,y $\geq$ 0



Скористаємось інтегральною формулою Коші:

Нехай функція f(z) аналітична в n-зв'язній області D і неперервна в $\overline{D}$. *Тоді для будь-якої внутрішньої точки z=a цієї області має місце формула Коші.*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)dz}{z-a},$$

де C - границя області D, яка проходиться так, що область D залишається весь час зліва.

Всередині області знаходиться одна точка *z=i*, в якій знаменник дорівнює нулю.

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \int_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \int_C \frac{\frac{1}{z+i}dz}{(z-i)}.$$

Функція $f(z) = \frac{1}{z+i}$ аналітична в цій області, тому

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi .$$

Тема 4. Ряди Лорана

П р и к л а д 19. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в ряд Лорана за степенями z в околі точки z=0.

Нехай функція f(z) аналітична в околі точки a, виключаючи точку a. Окіл, з якого виключають центр, називають проколотим околом. Отже, нехай функція f(z) аналітична в деякому проколотому околі точки a. Проведемо в цьому околі два кола C та C_1 радіусами r та r_1 ($r<r_1$) відповідно між якими міститься точка z.

Тоді $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *називається лоранівським розкладом функції f(z) із центром в точці a.*

Скористаємось геометричним рядом $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, де $S = \frac{a}{1-q}$, якщо $|q| < 1$.

Тому $f(z) = \frac{1}{2z-5} = \frac{-1/5}{1-2z/5}$. В околі точки z=0 виконується $\left|\frac{2z}{5}\right| < 1$, тоді *f(z)*-сума геометричного прогресії, а $q = \left|\frac{2z}{5}\right| < 1$. Звідки

$$f(z) = -\frac{1}{5} - \frac{2z}{5^2} - \frac{(2z)^2}{5^3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^{n-1}}{5^n}.$$

Цій розклад містить тільки правильну частину ряду Лорана.

П р и к л а д 20. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{2z-5}$ в ряд Лорана за степенями z в околі точки $z=\infty$.

$f(z)=\dfrac{1}{2z-5}=\dfrac{1/2z}{1-5/2z}$ В околі точки z=∞ виконується $\left|\dfrac{5}{2z}\right|<1$, тоді

f(z)-сума геометричного ряду, а $a=\dfrac{1}{2z}$, $q=\left|\dfrac{5}{2z}\right|<1$. Звідки

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{5}{(2z)^2}+\frac{5^2}{(2z)^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(2z)^n}.$$

Розклад містить тільки головну частину ряду Лорана.

П р и к л а д 2 1 . Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана за степенями z в околі $1<|z|<2$.

Функцію *f(z)* представимо у вигляді $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$.

Якщо $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$, а функція $\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$ є сума геометричної прогресії, де $|q|=\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\ldots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots$$

Аналогічно, $-\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z^3}-\ldots-\dfrac{1}{z^n}-\ldots$

Тоді $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{z}{2^2}-\dfrac{z^2}{2^3}-\ldots-\dfrac{z^n}{2^{n+1}}-\ldots$-

$-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z^3}-\ldots-\dfrac{1}{z^n}-\ldots$

Розклад функції *f(z)* містить головну та правільну частини ряду Лорана.

П р и к л а д 2 2 . Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ та визначити іх вигляд.

Точка а називається ізольованою особливою точкою функції f(z), якщо існує проколотий окіл $0<|z-a|<R$ *цієї точки, в якій f(z) аналітична.*

Розрізняють три типи ізольованих особливих точок в залежності від поведінки функції *f(z)* в їх околах.

Якщо *a* є ізольованою особливою точкою функції *f(z),* то цю функцію можна розкласти в ряд Лорана за степенями *z-a.*

$$f(z)=\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

В залежності від вигляду головної частини цього ряду розрізняють три види ізольованих особливих точок.

z=0- ізольована особлива точка, тоді функцію можна розкласти в ряд Лорана за степенями *z:*

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots$$

Точка a називається усувною особливою точкою функції f(z), якщо в лоранівському розкладі f(z) за степенями z - a відсутня головна частина.

Тому $z = 0$ - усувна особлива точка.

П р и к л а д 2 3 . Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ та визначити їх вигляд.

z=0- ізольована особлива точка, функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд Лорана за степенями *z:*

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\ldots$$

Точка a називається полюсом функції f(z) якщо головна частина лоранівського розкладу f(z) в околі a містить лише скінченну кількість членів відмінних від нуля членів.

При цьому номер старшого від'ємного члена розкладу дорівнює порядку полюса.

Таким чином, точка z=0 є полюсом першого порядку функції.

П р и к л а д 2 4 . Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ та визначити їх вигляд.

Маємо z=0-ізольована особлива точка, тому $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+\ldots$

Точка a є суттєво особливою точкою для функції f(z), коли головна частина лоранівського розкладу в околі точки a містить нескінченну кількість відмінних від нуля членів.

Точка z = 0 є суттєво особлива точка.

П р и к л а д 2 5 . Знайти лишки функції $f(z)=\dfrac{z^2}{z-2}$ відносно точки $z=2$.

Точка $z=2$ є полюсом першого порядку.

Лишком функції f(z) в ізольованій особливій точці a називається коефіцієнт C_{-1} при $(z - a)^{-1}$ в ряді Лорана функції f(z).

$$c_{-1}=rezf(2)=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right]=4.$$

П р и к л а д 2 6 . Знайти лишки функції $f(z)=ctgz$ відносно точки $z=0$.

$f(z)=ctgz=\dfrac{\cos z}{\sin z}=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$. Точка $z=0$ є нулем першого порядку для функції $\sin z$. Тому лишки знайдемо по формулі $\operatorname{Re}sf(a)=\dfrac{f_1(a)}{f_2'(a)}$.

$$\operatorname{Re}sf(0)=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1.$$

П р и к л а д 2 7 . Обчислити $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z(z+1)}dz$

В області |z|< 4 функція аналітична всюди крім точок z=0 і z=-l.
Знаходимо лишки в точках z=0 і z=-l.

$$rezf(0)=\lim_{z\to 0}\left[z\frac{e^z-1}{z(z+1)}\right]=0,\quad rezf(-1)=\lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{e^z-1}{z(z+1)}\right]=1-e^{-1}$$

Скористуємось теоремою про лишки, яка дозволяє звести обчислення інтеграла по замкненому контуру до обчислення лишків.

Теорема. *Нехай f(z) неперервна на границі C області D і аналітична всередині цієї області всюду, крім скінченного числа особливих точок a_1, a_2,...., a_n. Тоді* $$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}resf(a_k)$$

Тому . $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z(z+1)}dz=\left(1-e^{-1}\right)2\pi i.$

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Варіант 1

1. $z_1 = 2+3i, \quad z_2 = -4-5i, \quad z_3 = 3-2i, \quad z_4 = \sqrt{3} - \dfrac{2}{3} - \dfrac{23}{13}i.$

   Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^5, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.
   $\omega = i(1 - z^2) - 2z, \quad z_0 = 1.$

3. Дано дійсну частину $u(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\qquad u(x, y) = 2x - y^2 + x^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (2\bar{z} - 3z)dz, \quad A(1-i), \quad B(2+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=4} \dfrac{z+2}{z^2 - 5z + 6}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{z}{z+5}$ в околі $a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 2

1. $z_1 = 3+5i, \quad z_2 = 4-2i, \quad z_3 = 4+6i, \quad z_4 = -\dfrac{71}{26} + \dfrac{35}{26}i.$

   Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.
   $\omega = z^3 + 3z - i, \quad z_0 = -i.$

3. Дано уявну частину $v(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\qquad v(x, y) = 3x^2 y - y^3$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (3\bar{z} - 5i)dz, \quad A(-1+i), \quad B(3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3} \dfrac{z+2}{z^2 + z - 2}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{1}{z+3}$ для $3 \langle |z| \langle \infty$.

Варіант 3

1. $z_1 = -6-2i, \quad z_2 = 5+3i, \quad z_3 = 2-3i, \quad z_4 = \dfrac{7}{13} - \sqrt{3} + \dfrac{30}{13}i.$

   Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^4, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = 2z^2 - iz, \quad z_0 = 1 - i.$

3. Дано дійсну частину $u(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\qquad u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2 i) dz, \quad A(1+i), \quad B(2+3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=5} \frac{2z+1}{z(z-4)(z+4)} dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{2}{5z+4}$ в околі

$a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 4

1. $z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = 5 - 4i, \quad z_3 = 2 + 3i, \quad z_4 = \frac{11}{13} + \frac{3}{13} i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^5, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = z^3 + z^2 + i, \quad z_0 = \frac{2}{3} i.$

3. Дано уявну частину $v(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\qquad v(x, y) = 2xy + 2y$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} \bar{z} dz, \quad A(-2-3i), \quad B(-2+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=4} \frac{z+4}{z^2 + 5z + 6} dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{z}{3z+5}$ в околі

$a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 5

1. $z_1 = 5 - 3i, \quad z_2 = 2 + 4i, \quad z_3 = 6 - 4i, \quad z_4 = -\frac{49}{26} + \left(\frac{15}{26} + \sqrt{3}\right) i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = iz - 3z^2 + 5i, \quad z_0 = i.$

3. Дано дійсну частину $u(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\qquad u(x, y) = x^2 - y^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(4-2\bar{z})dz, \quad A(0), \quad B(3+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=10}\dfrac{z+5}{z^2-7z}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z}{3z+5}$ в околі

$a)\ z=0, \quad b)\ z=\infty.$

Варіант 6

1. $z_1=-5+4i, \quad z_2=3-6i, \quad z_3=-2+7i, \quad z_4=-\dfrac{192}{53}-\dfrac{142}{53}i.$

Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4, \quad z^4, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega=3iz+5z+4i, \quad z_0=\dfrac{i}{3}.$

3. Дано уявну частину $v(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x,y)=2xy+x$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(z-3i)dz, \quad A(1+i), \quad B(2+3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{3z-1}{z^2-2z}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{3z-4}$ в околі

$a)\ z=0, \quad b)\ z=\infty.$

Варіант 7

1. $z_1=-2+6i, \quad z_2=3-5i, \quad z_3=-3+2i, \quad z_4=-\dfrac{37}{13}-\sqrt{3}+\dfrac{36}{13}i.$

Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4, \quad z^5, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega=3z^2+2z, \quad z_0=i+1.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y)=x^2-3y-y^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(x-y^2i)dz, \quad A(0+i), \quad B(1+2i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{z+2}{z^2+z}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z}{3z+10}$ в околі

$a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 8

1. $z_1=4+7i,\quad z_2=6+5i,\quad z_3=3+2i,\quad z_4=-\dfrac{11}{13}-\left(\dfrac{10}{13}+\sqrt{3}\right)i.$

Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^6,\quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega=z^3+2z,\quad z_0=2+2i.$

3. Дано уявну частину $v(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x,y)=x-y+5xy$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(5\bar{z}-6i)dz,\quad A(2),\quad B(3+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{dz}{z^2+2z}$.

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, якщо $1<|z|<3$.

Варіант 9

1. $z_1=-7+4i,\quad z_2=5-6i,\quad z_3=4-3i,\quad z_4=\dfrac{103}{25}-\left(\dfrac{4}{25}+\sqrt{3}\right)i.$

Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^4,\quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega=z^2+3iz,\quad z_0=i.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y)=x^2-2y-y^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(y+1-xi)dz,\quad A(1;0),\quad B(0;-i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{2z-1}{z^2+4}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z^2}{z-1}$ в околі $a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 10

1. $z_1=2-7i,\quad z_2=4+6i,\quad z_3=5+2i,\quad z_4=\dfrac{94}{29}+\dfrac{3}{29}i.$

Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = 3z^2 - 2iz + 5i, \quad z_0 = 1 - 2i.$

3. Дано уявну частину $v(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x, y) = 2x - 4xy$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (\bar{z} + 3i)dz, \quad A(i), \quad B(-2).$

5. Обчислити $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^2 - zi}.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{3z}{2z + 4}$ в околі

$a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 11

1. $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -4 - 5i, \quad z_3 = 3 - 2i, \quad z_4 = \sqrt{3} - \dfrac{2}{3} - \dfrac{23}{13} i.$

Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^5, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = i(1 - z^2) - 2z, \quad z_0 = 1.$

3. Дано дійсну частину $u(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x, y) = 2x - y^2 + x^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (2\bar{z} - 3z)dz, \quad A(1 - i), \quad B(2 + i).$

5. Обчислити $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z + 2}{z^2 - 5z + 6} dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{z}{z + 5}$ в околі $a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 12

1. $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 - 2i, \quad z_3 = 4 + 6i, \quad z_4 = -\dfrac{71}{26} + \dfrac{35}{26} i.$

Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt[3]{z}$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = z^3 + 3z - i, \quad z_0 = -i.$

3. Дано уявну частину $v(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x, y) = 3x^2 y - y^3$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(3\bar{z}-5i)dz,\quad A(-1+i),\quad B(3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3}\frac{z+2}{z^2+z-2}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{z+3}$ для $3\langle|z|\langle\infty$.

Варіант 13

1. $z_1=-6-2i,\quad z_2=5+3i,\quad z_3=2-3i,\quad z_4=\frac{7}{13}-\sqrt{3}+\frac{30}{13}i.$

Обчислити $z=\frac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^4,\quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.
$\omega=2z^2-iz,\quad z_0=1-i.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y)=x^3-3xy^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2 i\right)dz,\quad A(1+i),\quad B(2+3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=5}\frac{2z+1}{z(z-4)(z+4)}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{2}{5z+4}$ в околі
$a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 14

1. $z_1=3-2i,\quad z_2=5-4i,\quad z_3=2+3i,\quad z_4=\frac{11}{13}+\frac{3}{13}i.$

Обчислити $z=\frac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^5,\quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.
$\omega=z^3+z^2+i,\quad z_0=\frac{2}{3}i.$

3. Дано уявну частину $v(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x,y)=2xy+2y$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}\bar{z}dz,\quad A(-2-3i),\quad B(-2+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=4}\frac{z+4}{z^2+5z+6}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z}{3z+5}$ в околі

$a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 15

1. $z_1=5-3i,\quad z_2=2+4i,\quad z_3=6-4i,\quad z_4=-\dfrac{49}{26}+\left(\dfrac{15}{26}+\sqrt{3}\right)i.$

   Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^6,\quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

   $\omega=iz-3z^2+5i,\quad z_0=i.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y)=x^2-y^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(4-2\bar{z})dz,\quad A(0),\quad B(3+i).$

5. Обчислити $\oint\limits_{|z|=10}\dfrac{z+5}{z^2-7z}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z}{3z+5}$ в околі

   $a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 16

1. $z_1=-5+4i,\quad z_2=3-6i,\quad z_3=-2+7i,\quad z_4=-\dfrac{192}{53}-\dfrac{142}{53}i.$

   Обчислити $\quad z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^4,\quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

   $\omega=3iz+5z+4i,\quad z_0=\dfrac{i}{3}.$

3. Дано уявну частину $v(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x,y)=2xy+x$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(z-3i)dz,\quad A(1+i),\quad B(2+3i).$

5. Обчислити $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{3z-1}{z^2-2z}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{3z-4}$ в околі

   $a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 17

1. $z_1 = -2 + 6i, \quad z_2 = 3 - 5i, \quad z_3 = -3 + 2i, \quad z_4 = -\frac{37}{13} - \sqrt{3} + \frac{36}{13}i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^5, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = 3z^2 + 2z, \quad z_0 = i + 1.$

3. Дано дійсну частину $u(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x, y) = x^2 - 3y - y^2$.

4. Обчислити $\int_{AB} (x - y^2 i) dz, \quad A(0 + i), \quad B(1 + 2i).$

5. Обчислити $\int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{z + 2}{z^2 + z} dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{z}{3z + 10}$ в околі

$a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 18

1. $z_1 = 4 + 7i, \quad z_2 = 6 + 5i, \quad z_3 = 3 + 2i, \quad z_4 = -\frac{11}{13} - \left(\frac{10}{13} + \sqrt{3}\right)i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = z^3 + 2z, \quad z_0 = 2 + 2i.$

3. Дано уявну частину $v(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x, y) = x - y + 5xy$.

4. Обчислити $\int_{AB} (5\bar{z} - 6i) dz, \quad A(2), \quad B(3 + i).$

5. Обчислити $\int_{|z| = 3} \frac{dz}{z^2 + 2z}.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 3)}$, якщо $1 < |z| < 3$.

Варіант 19

1. $z_1 = -7 + 4i, \quad z_2 = 5 - 6i, \quad z_3 = 4 - 3i, \quad z_4 = \frac{103}{25} - \left(\frac{4}{25} + \sqrt{3}\right)i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^4, \quad \sqrt{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = z^2 + 3iz, \quad z_0 = i.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y) = x^2 - 2y - y^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (y + 1 - xi)dz, \quad A(1;0), \quad B(0;-i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3} \frac{2z-1}{z^2+4}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$ в околі $a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 20

1. $\quad z_1 = 2 - 7i, \quad z_2 = 4 + 6i, \quad z_3 = 5 + 2i, \quad z_4 = \frac{94}{29} + \frac{3}{29}i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = 3z^2 - 2iz + 5i, \quad z_0 = 1 - 2i.$

3. Дано уявну частину $v(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x,y) = 2x - 4xy$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (\bar{z} + 3i)dz, \quad A(i), \quad B(-2).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 - zi}.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{3z}{2z+4}$ в околі

$a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 21

1. $\quad z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -4 - 5i, \quad z_3 = 3 - 2i, \quad z_4 = \sqrt{3} - \frac{2}{3} - \frac{23}{13}i.$

Обчислити $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^5, \quad \sqrt{z}$.

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = i(1 - z^2) - 2z, \quad z_0 = 1.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y) = 2x - y^2 + x^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (2\bar{z} - 3z)dz, \quad A(1-i), \quad B(2+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=4} \frac{z+2}{z^2 - 5z + 6}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z}{z+5}$ в околі $a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 22

1. $z_1=3+5i,\quad z_2=4-2i,\quad z_3=4+6i,\quad z_4=-\dfrac{71}{26}+\dfrac{35}{26}i.$

Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^6,\quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega=z^3+3z-i,\quad z_0=-i.$

3. Дано уявну частину $v(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x,y)=3x^2y-y^3$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(3\bar{z}-5i)dz,\quad A(-1+i),\quad B(3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{z+2}{z^2+z-2}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{z+3}$ для $3\langle|z|\langle\infty$.

Варіант 23

1. $z_1=-6-2i,\quad z_2=5+3i,\quad z_3=2-3i,\quad z_4=\dfrac{7}{13}-\sqrt{3}+\dfrac{30}{13}i.$

Обчислити $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4,\quad z^4,\quad \sqrt{z}$.

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega=2z^2-iz,\quad z_0=1-i.$

3. Дано дійсну частину $u(x,y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x,y)=x^3-3xy^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2+y^2i)dz,\quad A(1+i),\quad B(2+3i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=5}\dfrac{2z+1}{z(z-4)(z+4)}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{2}{5z+4}$ в околі

$a)\ z=0,\quad b)\ z=\infty.$

Варіант 24

1. $z_1=3-2i,\quad z_2=5-4i,\quad z_3=2+3i,\quad z_4=\dfrac{11}{13}+\dfrac{3}{13}i.$

Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^5, \quad \sqrt[3]{z}.$

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = z^3 + z^2 + i, \quad z_0 = \dfrac{2}{3}i.$

3. Дано уявну частину $v(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad v(x, y) = 2xy + 2y$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} \bar{z}dz, \quad A(-2-3i), \quad B(-2+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=4} \dfrac{z+4}{z^2+5z+6}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{z}{3z+5}$ в околі $a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

Варіант 25

1. $z_1 = 5 - 3i, \quad z_2 = 2 + 4i, \quad z_3 = 6 - 4i, \quad z_4 = -\dfrac{49}{26} + \left(\dfrac{15}{26} + \sqrt{3}\right)i.$

Обчислити $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4, \quad z^6, \quad \sqrt{z}$.

2. Довести аналітичність функції і обчислити її похідну в точці z_0.

$\omega = iz - 3z^2 + 5i, \quad z_0 = i.$

3. Дано дійсну частину $u(x, y)$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти $f(z)$. $\quad u(x, y) = x^2 - y^2$.

4. Обчислити $\int\limits_{AB} (4 - 2\bar{z})dz, \quad A(0), \quad B(3+i).$

5. Обчислити $\int\limits_{|z|=10} \dfrac{z+5}{z^2-7z}dz.$

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{z}{3z+5}$ в околі $a)\ z = 0, \quad b)\ z = \infty.$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називають комплексним числом? Які форми запису комплексних чисел ви знаєте?
2. Елементарні функції комплексної змінної.
3. Означення похідної функції комплексної змінної.
4. Умови Коші-Рімана. Аналітичність функції комплексної змінної.

5. Обчислення похідної функції комплексної змінної
6. Означення інтегралу ФКЗ.
7. Інтегрування по комплексному аргументу.
8. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші.
9. Означення ряду Лорана: головна та правильна частина.
10. Розвинення функцій в ряд Лорана.
11. Характер ізольованих особливих точок.
12. Означення лишку функції та його обчислення. Теорема про лишки та їх застосування до обчислення інтегралів.

Методичні вказівки

до самостійного вивчення та виконання модульних завдань

з дисципліни «Вища математика»

розділ «Теорія функцій комплексної змінної»

для студентів II курсу

всіх напрямків підготовки

Укладачі:

Вітавецька Л.А., Шпінарева І.М.

Підписано до друку р. Формат . Папір офсетний.
Тираж . Замовлення

Надруковано з готового оригінала-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, м.Одеса, вул. Львівська, 15