МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни

“МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА БІЗНЕС ПЛАНУВАННЯ”

очної, заочної та дистанційної форми навчання

спеціальність спеціальність: 073 «Менеджмент»

Рівень вищої освіти: бакалавр

“**Затверджено”**
на засіданні групи забезпечення спеціальності
протокол № 1 від 10.09.2020 р.

Голова групи___________Павленко О.П.

“**Затверджено”**
на засіданні кафедри публічного
управління та менеджменту
природоохоронної діяльності
протокол № 1 від 31.08.2020 р.

Зав. кафедри__________Павленко О.П.

Одеса 2020

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА БІЗНЕС ПЛАНУВАННЯ» для студентів очної, заочної та дистанційної форми навчання спеціальність 073 «Менеджмент». /Укладач: ст. викл. Чернишов О.С. - Одеса, ОДЕКУ, 2020 р., 88 с., укр. мова.

ЗМІСТ

ВСТУП

Практичні занятя з дисципліни “Моделювання Еколого-Економічних систем та Бізнес Планування проводяться згідно програми практичних модулів з дисципліни.

Практичний модуль 1 базується на матеріалі дисциплін «Обчислювальна математика» та «Дослідження операцій»

Після вивчення практичного змістовного модулю (ЗМ-П1) студент має вміти створювати розрахункову модель процесу або системи та проводити розв’язання задач лінійного програмування, сімплекс-метод розв’язання задач лінійного програмування на прикладі транспортної задачі, задачі з умовами невизначеності та конфлікту, багатокритеріальні задачі. Виконувати розрахунки моделей за допомогою програми MS EXCEL.

Вивчення ЗМ-П1 завершується захистом лабораторних робот. Наявним навчально-методичним забезпеченням є підручники [1-5]..

Практичний модуль 2. Базується на матеріалі дисциплін Бізнес планування та Реінжинірінг. Після вивчення практичного змістовного модулю (ЗМ-П2) студент має вміти виконувати розрахунки моделі бізнес плану за допомогою програми MS EXCEL Розглядаються теми: Складання план-графіку, Розрахунок видатків на створення матеріально-технічної бази підприємства. Моделювання виробництва. План виробництва. Виробничі видатки. Штат підприємства. Витрати на персонал. Складання попереднього балансу. Розрахунок руху коштів відповідно інвестиційному плану. Врахування податків та інших цільових платежів. Обчислення крапки беззбитковості. Наочне представлення результатів розрахунків. Аналіз економічних показників бізнес-плану.

Вивчення ЗМ-П2 завершується захистом лабораторних робіт. Наявним навчально-методичним забезпеченням є підручники [1-4].

Практичний модуль 3. Базується на матеріалі дисципліни Моделювання Еколого-економічних систем. Після вивчення практичного змістовного модулю (ЗМ-П3) студент має вміти складати та використовувати диференційні динамічні моделі (моделі Мальтуса, Ферхюльста, «збір врожаю», міжвидової конкуренції, «хижак – жертва», модель мобілізації, Кюрасао, модель конверсії). Застосовувати метод якісного дослідження систем диференційних рівнянь. Використовувати методи урахування господарської діяльності в моделях екосистем та методи урахування екологічних факторів в економічних моделях.

Вивчення ЗМ-П3 завершується захистом лабораторних робіт. Наявним навчально-методичним забезпеченням є підручники [1-4].

Модуль індивідуального завдання. При виконанні цього модуля студент проводить розрахунок показників власного бізнес плану або плану реінжинірінгу. Після виконання практичного модулю індивідуального завдання (ЗМ-ІЗ) студент має вміти аналізувати бізнес-ідею чи концепцію процесу, складати розрахункову модель бізнес плану. У разі необхідності –

план реінжинірінгу. Розробляти схему інвестування проекту, аналізувати економічні та екологічні показники, проводити ОВНС та створювати СППР.

Вивчення ЗМ-ІЗ завершується захистом індивідуальної практичної роботи. Наявним навчально-методичним забезпеченням є підручники [1-4].

Лабораторні роботи виконуються на базі **Лабораторії інформаційних систем у менеджменті** кафедри МПД. Обладнання – персональні комп'ютери локальної мережі комп'ютерного класу лабораторії ІСМ КМПД.

Підсумковим контролюючим засобом є залік.

Змістовний матеріал до практичного модулю 1

Тема 1. «Оптимізація плану виробництва»

Мета: використання *моделі лінійного програмування* (ЛП) для визначення плану виробництва. Ці можливості узагальнюються для випадку, коли закупівля готової продукції для наступної реалізації може виявитися для виробника переважніше, ніж використання власних потужностей. Розглядається також завдання виробничого планування, що враховує динаміку попиту, виробництва й зберігань продукції. Найбільше часто такого роду завдання виникають на рівні агрегированого планування й оперативного керувань мікроекономічними об'єктами.

Знання: моделі лінійного програмування (ЛП)

Уміння: визначати й використовувати для економічного аналізу: цільову функцію; обмеження; припустимий план; Множина припустимих планів; модель лінійного програмування; оптимальний план; двоїсті оцінки; границі стійкості.

Загальна постановка завдання планування виробництва: необхідно визначити план виробництва одного або декількох видів продукції, що забезпечує найбільш раціональне використання наявних матеріальних, фінансових і інших видів ресурсів. Такий план повинен бути *оптимальним* з погляду обраного критерію — максимуму прибутку, мінімуму витрат на виробництво й т.д.

Теоретичні відомості

Введемо позначення:

n — кількість продуктів, що випускаються;

m — кількість використовуваних виробничих ресурсів (наприклад, виробничі потужності, сировина, робоча сила);

a_{ij} — обсяг витрат i-*го* ресурсу на випуск одиниці j-*й* продукції;

c_j — прибуток від випуску й реалізації одиниці j-*го* продукту;

b_i — кількість наявного i-*го* ресурсу;

x_j — обсяг випуску j-*го* продукту.

Формально задача оптимізації виробничої програми може бути описана за допомогою наступної **моделі лінійного програмування:**

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots, m, \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n. \qquad (3)$$

Тут (1) — цільова функція (максимум прибутку); (2) — система спеціальних обмежень на обсяг фактично наявних ресурсів; (3) — система загальних обмежень (на незаперечність змінних); x_j — змінна.

Задачі (1)-(3) називається задачею лінійного програмування в стандартній формі на максимум.

Задача лінійного програмування в стандартній формі на мінімум мають вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{6}$$

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненти x_j якого задовольняють обмеженням (2) і (3) (або (5) і (6) у задачі на мінімум), називається *припустимиме рішення* або *припустимим планом* задачі ЛП. Сукупність всіх припустимих планів називається *множиною припустимих планів.* Припустиме рішення задачі ЛП, на якому цільова функція (1) (або (4) у задачі на мінімум) досягає максимального (мінімального) значення, називається *оптимальним рішенням* задачі ЛП.

Приклади

Приклад 1. Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси й робочу силу, необхідні для виробництва двох видів продукції. Витрати ресурсів на виготовлення однієї тонни кожного продукту, прибуток, який одержує підприємство від реалізації тонни продукту, а також запаси ресурсів зазначені в наступній таблиці:

	Продукт 1	Продукт 2	Запас ресурсу
Сировина, т	3	5	120
Трудовитрати,год	14	12	400
Прибуток на 1 продукту, грн	30	35	

Визначити: план виробництва для одержання максимального прибутку.

Рішення. Нехай x_1 — обсяг випуску продукту 1 у тоннах, x_2 — обсяг випуску продукту 2 у тоннах. Тоді задача може бути описана у вигляді наступної моделі лінійного програмування:

$$30x_1 + 35x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 120,$$
$$14x_1 + 12x_2 \le 400,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Використовуючи, вихідну ін ня цього завдання можна представити у вигляді наступної таблиці:

	Продукт 1	Продукт 2	Знак обмеження	Обмеження
Сировина, т	3	5	<=	120
Трудовитрати,год	14	12	<=	400
Прибуток на 1 продукту, грн	30	35	максимум	

Вирішуючи це завдання с допомогою MS Excel, одержуємо наступний результат:

	Продукт 1	Продукт 2	Знак обмеження	Обмеження	Фактичне використання ресурсів
Сировина, т	3	5	<=	120	120
Трудовитрати, год	14	12	<=	400	400
Прибуток грн/т	30	35	максимум		988,24
План виробництва, т.	16,47	14,12			

У нижньому рядку зазначений обсяг випуску кожного продукту, що задовольняє обмеженням на ресурси й забезпечує максимальний прибуток - максимальне значення цільової функції. Таким чином, щоб забезпечити максимальний прибуток 988,24 грн, варто виробити 16,47 т продукту 1 і 14,12 т продукту 2.

Приклад 2. *Виробити або купувати?*

Фірма виробляє два типи хімікатів. На майбутній місяць вона уклала контракт на поставку наступної кількості цих хімікатів:

Тип хімікатів	*Продаж по контракту, т*
1	*100*
2	*120*

Виробництво фірми обмежене ресурсом часу роботи двох хімічних реакторів. Кожний тип хімікатів повинен бути оброблений спочатку в реакторі 1, а потім у реакторі 2. Нижче в таблиці наведено фонд робочого часу, наявний у кожного реактора в наступному місяці, а також час на обробку однієї тонни кожного хімікату в кожному реакторі:

Реактор	*Час на обробку 1 т. хімікатів, год*		*Фонд часу, год*
	Тип 1	*Тип 2*	
1	*4*	*2*	*300*
2	*3*	*6*	*400*

Через обмежені можливості, пов'язаних з існуючим фондом часу на обробку хімікатів у реакторах, фірма не має достатніх потужностей, щоб виконати зобов'язання за контрактом. Вихід полягає в наступному: фірма повинна купити якусь кількість цих хімікатів у інших виробників, щоб використовувати ці закупівлі для виконання контракту. Нижче приводиться таблиця витрат на виробництво хімікатів самою фірмою й на закупівлю їх з боку:

Тип хімікатів	*Витрати виробництва тис.грн/т*	*Витрати на закупівлю, тис.грн/т*
1	*35*	*45*
2	*36*	*66*

Мета фірми полягає в тому, щоб забезпечити виконання контракту з мінімальними витратами. Це дозволить їй максимізувати прибуток, тому що ціни на хімікати вже застережені контрактом. Інакше кажучи, фірма повинна прийняти рішення: скільки хімікатів кожного типу виробляти, а скільки - закуповувати з боку для того, щоб виконати контракт із мінімальними витратами.

Визначити: План власного виробництва хімікатів і обсяги їх закупівель. Які мінім. витрати на виконання контракту? Чи варто змінити обсяг закупівель хімікатів типу 2 з боку, якщо їхня ціна зросте до 75 тис. грн. за тонну? На скільки зростуть мінімальні витрати, якщо фонд часу роботи реактора 2 скоротиться з 400 до 300 год?

Рішення. Уведемо позначення: x_1 — кількість прод. 1, виробленого компанією;
z_1 — кількість прод. 1, закуповуваного компанією;
x_2 — кількість прод. 2, виробленого компанією;
z_2 — кількість прод. 2, закуповуваного компанією.

Модель лінійного програмування: Цільова функція $35x_1+56x_2+45z_1+66z_2 \rightarrow \min$

Ресурсні обмеження, обмеження на попит

Реактор 1	$4x_1+2x_2 \leq 300$
Реактор 2	$3x_1+6x_2 \leq 400$
Продукт 1	$x_1+z_1=100$
Продукт 2	$x_2+z_2=120$

Умови незаперечності змінних: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $z_1 \geq 0$; $z_2 \geq 0$.

Таблиця вихідної інформації для розрахунків в *Excel* має такий вигляд:

	X1	X2	Z1	Z2	Знак обмеження	Обмеження
Реактор 1	4	2	0	0	<=	300
Реактор 2	3	6	0	0	<=	400
Хімікат 1	1	0	1	0	=	100
Хімікат 2	0	1	0	1	=	120
Мінімальні витрати грн	35	56	45	66		

Результати розрахунків:

	X1	X2	Z1	Z2	Знак обмеження	Обме-ження	Фактичне викори-стання ресурсів
Реактор 1	4	2	0	0	<=	300	300
Реактор 2	3	6	0	0	<=	400	400
Хімікат 1	1	0	1	0	=	100	100
Хімікат 2	0	1	0	1	=	120	120
Мінім. витрати, грн	35	56	45	66			11476
План виробн. та закупівель, т	55,56	38,89	44,44	81,11			

Відповідь: Підприємство понесе мінімальні витрати при виконанні контракту в розмірі 11476 грн, якщо виконає план виробництва по хімікату 1 в обсязі 55,56 т, і хімікату 2 - 38,89 т. При цьому повністю використовує наявні запаси по реакторі 1 і 2. Іншу частину продукції (хімікат 1 - 44,44 т. і хімікат 2 - 81,11 т) підприємству варто закупити, з метою наступного продажу за контрактом.

Тести для самоконтролю

1. Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$12X + 10Y \rightarrow \max$$

при умовах

$$4X + 3Y \leq 480,$$
$$2X + 3Y \leq 360,$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0.$$

Оптимальне значення цільової функції дорівнює:

1) 1600; 2) 1520; 3) 1800; 4) 1440; 5) не дорівнює жодному із зазначених значень.

2. Розглянемо задачу лінійного програмування: $12X + 10Y \rightarrow \max$

при умовах

$$4X + 3Y \leq 480,$$
$$2X + 3Y \leq 360,$$
$$X \geq 0,\ Y \geq 0.$$

Яка з наступних крапок з координатами *(X, Y)* не є припустимої?

Варіанти відповідей:

1) (0, 100); 2) (100, 10); 3) (70, 70); 4) (20, 90); 5) жодна із зазначених.

3. Розглянемо задачу лінійного програмування: $4X + 10Y \to \max$

при умовах
$$3X + 4Y \le 480,$$
$$4X + 2Y \le 360,$$
$$X \ge 0,\ Y \ge 0.$$

Множина припустимих планів має наступні чотири вершини: (48, 84), (0, 120), (0, 0), (90, 0). Чому дорівнює оптимальне значення цільової функції?

Варіанти відповідей:

1) 1032; 2) 1200; 3) 360; 4) 1600; 5) жодному із зазначених значень.

Задачі для розв'язування

Задача 1. Нафтопереробна установка може працювати у двох різних режимах. При роботі в першому режимі з однієї тонни нафти виробляється 300 кг темних і 600 кг світлих нафтопродуктів; при роботі в другому режимі - 700 кг темних і 200 кг світлих нафтопродуктів. Щодня на цій установці необхідно робити 110 т темних і 70 т світлих нафтопродуктів. Це планове завдання необхідно щодня виконувати, витрачаючи мінімальну кількість нафти. Визначити:

1. Скільки тонн нафти варто щодня переробляти в першому режимі?
2. Скільки тонн нафти варто щодня переробляти в другому режимі?
3. Який мінімальна щоденна витрата нафти?

Задача 2. Фірма «Television» робить два види телевізорів: «Астро» і «Космо».

У цеху 1 роблять телевізійні трубки. На виробництво однієї трубки до телевізора «Астро» потрібно витратити 1,2 людино-годин, а на виробництво трубки до «Космо» - 1,8 людино-годин. У цей час у цеху 1 на виробництво трубок до обох марок телевізорів може бути витрачено не більше 120 людино-годин у день.

У цеху 2 роблять шасі з електронною схемою телевізора. На виробництво шасі для телевізора будь-якої марки потрібно затратити 1 людино-годин. На виробництво шасі до обох марок телевізорів у цеху 2 може бути витрачено не більше 90 людино-годин у день. Продаж кожного телевізора марки «Астро» забезпечує прибуток у розмірі 1500 грн., а марки «Космо» - 2000 грн. Фірма зацікавлена в максимізації прибутку. Визначити: 1. Скільки телевізорів «Астро» варто робити щодня?

2. Яка максимальний щоденний прибуток телевізійної компанії?
3. На скільки грн у день збільшиться прибуток, якщо ресурс часу в цеху 2 зросте на 5 людино-годин?
4. Чи варто змінити план виробництва, якщо прибуток від телевізора «Космо» збільшиться до 2200 грн.?

Задача 3. Підприємство виробляє і продає два види виробів: А й Б. Одержує прибуток у розмірі 10 грн. від виробництва й продажу однієї одиниці виробу А й у розмірі 4 грн. від виробництва й продажу однієї одиниці виробу Б. Виробництво кожного виробу здійснюється на трьох ділянках. Витрати праці (у годинниках) на виробництво однієї одиниці зазначені в
наступній таблиці для кожної ділянки:

Ділянка виробництва	*Вироб А*	*Вироб Б*
1	*0,02*	*0,01*
2	*0,03*	*0,01*
3	*0,03*	*0,02*

Керівництво розрахувало, що в наступному місяці підприємство щодня буде мати у своєму розпорядженні наступні ресурси робочого часу на кожній з ділянок: 60 год на ділянці 1; 70 год на ділянці 2 і 100 год на ділянці 3. Визначити:

1. Скільки виробів А варто робити щодня, якщо фірма хоче максимізувати прибуток?
2. Який максимальний прибуток фірма може одержувати щодня?
3. На скільки збільшиться прибуток, якщо ресурс часу на ділянці 1 збільш. на 10 год?
4. На скільки збільшиться прибуток, якщо ресурс часу на ділянці 2 збільш. на 10 год?

Задача 4. Меблевий цех виробляє столи трьох моделей: А, В и С. Кожна модель вимагає певних витрат часу на виконання трьох операцій: виробництво заготівель, складання й фарбування. Цех має можливість продати всі столи, які виготовить. Більше того, модель С може бути продана й без фарбування. При цьому прибуток зменшується на 200 грн. за штуку. Цех наймає декількох робітників, які працюють у нього по сумісництву, так що кількість годин, що відводиться на кожний вид робіт, змінюється від місяця до місяця.

Побудуйте модель лінійного програмування, що допомогла б знайти таку програму випуску продукції, щоб прибуток у наступному місяці була максимальною. Передбачається, що по кожному виді робіт можливі трудовитрати до 100 ч. У наступній таблиці зазначено час (у годинах), необхідний для виконання операцій по виробництву столів кожної моделі, і прибуток (у грн.), що може бути отримана від реалізації кожного виробу:

Модель	*Виробництво заготовок*	*Збірка*	*Фарбування*	*Прибуток*
A	*5*	*2*	*5*	*450*
B	*1*	*2*	*5*	*400*
C	*7*	*5*	*6*	*500*

Визначити:

1. Який максимальний прибуток може одержати цех протягом місяця?
2. Скільки столів моделі *А* варто робити?
3. Чи варто продавати незабарвлені столи моделі *З*?
4. На скільки збільшиться максимальний прибуток, якщо припустимий обсяг трудовитрат на етапі збірки зросте на 10%?
5. На яку мінімальну величину повинен зрости прибуток від виробництва й продажу пофарбованого стола моделі 3, щоб стало вигідно їх робити?

Задача 5. Після початої рекламної кампанії фірма «Давидко» має незвичайний ріст попиту на два типи мангалів для готування шашликів на відкритому повітрі - газові й вугільні. Фірма уклала контракт на щомісячну поставку в магазини 300 вугільних і 300 газових мангалів. Виробництво мангалів обмежується потужністю наступних трьох ділянок: виробництва деталей, складання й упакування. У таблиці показано, скільки людино-годин затрачається на кожній ділянці на кожну одиницю продукції, а також наведений припустимий щомісячний обсяг трудовитрат:

Ділянка	*Трудовитрати на виробництво 1 мангалу, год*		*Фонд часу, людино-годин*
	вугільного	*газового*	
Виробництво	*5*	*8*	*2600*
Збірка	*0,8*	*1,2*	*400*
пакування	*0,5*	*0,5*	*200*

Фірма «Давидко» не може забезпечити виконання контракту самотужки. Тому вона провела переговори з іншим виробником, що у цей час має у своєму розпорядженні надлишкові потужності. Цей виробник погодився поставляти фірмі «Давидко» у будь-якій кількості вугільні мангали по 3 тис. грн. за штуку й газові мангали по 5 тис. грн. за штуку. Ці ціни перевищують собівартість мангалів на заводі фірми «Давидко» на 1,5 тис. грн. за кожний вугільний мангал і на 2 тис. грн. за кожний газовий мангал. Завдання фірми «Давидко» полягають у тому, щоб знайти таке співвідношення закуповуваних і вироблених мангалів, що забезпечило б виконання контракту з мінімальними загальними витратами. Визначити:

1. Які мінімальні витрати на виконання контракту?
2. Скільки вугільних мангалів варто щомісяця робити фірмі «Давидко»?
3. Скільки газових мангалів варто щомісяця робити?
4. Скільки газових мангалів варто здобувати?
5. Чи варто зберегти обсяги закупівель газових мангалів, якщо компанія, що виконує замовлення для фірми «Давидко», підніме ціну на них до 5,5 тис. грн.?

Тема 2. «Оптимальний розкрій матеріалів»

Мета: використання *моделі лінійного програмування* для рішення завдань розкрою. Завдяки роботам основоположника теорії лінійного програмування лауреата Нобелівської премії академіка Л.В. Канторовича задачу оптимального розкрою можна назвати класичною прикладною оптимізаційною задачею.

Знання: моделі лінійного програмування (ЛП)

Уміння: формулювати й використовувати для економічного аналізу наступні поняття: матеріал; заготівля; відходи; спосіб розкрою (раціональний й оптимальний); інтенсивність використання раціональних способів розкрою.

Теоретичні відомості. Більшість матеріалів, використовуваних у промисловості, надходить на виробництво у вигляді стандартних форм. Безпосереднє використання таких матеріалів, як правило, неможливо. Попередньо їх розділяють на заготівлі необхідних розмірів. Це можна зробити, використовуючи різні способи розкрою матеріалу. **Задача оптимального розкрою** полягає в тому, щоб вибрати один або кілька способів розкрою матеріалу й визначити, яку кількість матеріалу варто розкроювати, застосовуючи кожний з обраних способів. Завдання такого типу виникають у металургії й машинобудуванні, деревообробляючій та легкої промисловості. Актуальне рішення такого типу завдань для рішення завдань оптимізації ресурсоспоживання, і максимізації ресурсозбереження. Виділяють два етапи рішення задачі оптимального розкрою. На першому етапі визначаються раціональні способи розкрою матеріалу, на другому - вирішується задача лінійного програмування для визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою.

1. Визначення раціональних способів розкрою матеріалу.

У задачах оптимального розкрою розглядаються так звані раціональні (оптимальні по Парето) способи розкрою. Припустимо, що з одиниці матеріалу можна виготовити заготівлі декількох видів. Спосіб розкрою одиниці матеріалу називається *раціональним (оптимальним по Парето),* якщо збільшення числа заготівель одного виду можливо тільки за рахунок скорочення числа заготівель іншого виду.

Нехай k — індекс виду заготівлі, k = 1,.... q; i — індекс способу розкрою одиниці матеріалу, i = 1,..., p; a_{ik} — кількість (ціле число) заготівель виду k, отриманих при розкрої одиниці матеріалу i-м способом. Наведене визначення раціонального способу розкрою може бути формалізоване в такий спосіб. Спосіб розкрою v називається *раціональним (оптимальним по Парето),* якщо для будь-якого іншого способу розкрою i зі співвідношень $a_{ik} \geq a_{vk}$, k = 1, ..., q, випливають співвідношення $a_{ik} = a_{vk}$, k = 1, ..., q.

2. Визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою.

Позначення:

j -індекс матеріалу, j = 1,..., n;

k-індекс виду заготівлі, k = 1, ..., q;

i — індекс способу розкрою одиниці матеріалу, i = 1,..., p;

a_{ijk} — кількість (ціле число) заготівель виду k, отриманих при розкрої одиниці j-*го* матеріалу *i-м* способом;

b_k — число заготівель виду k у комплекті, що поставляється замовникові;

d_j — кількість матеріалу j-*го* виду;

x_{ji} — кількість одиницю j-*го* матеріалу, що розкроюються по і-*му* способі (інтенсивність використання способу розкрою);

c_{ji} — величина відходу, отриманого при розкрої одиниці j-*го* матеріалу по і-*му* способі;

в — число комплектів заготівель різного виду, що поставляються замовникові.

Модель *А* розкрою з мінімальною витратою матеріалів:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}\, x_{ji} \geq b_k, \quad k = 1, \dots, q, \qquad (2)$$

$$x_{ji} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, p. \qquad (3)$$

(1) — цільова функція (мінімум кількості використовуваних матеріалів);

(2) - система обмежень, що визначають кількість заготівель, необхідна для виконання замовлення;

(3) - умови незаперечності змінних.

Специфічними для даної області додатка моделі лінійного програмування є обмеження (2).

Модель *В* розкрою з мінімальними відходами:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} c_{ji}\, x_{ji} \to \min, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}\, x_{ji} = b_k, \quad k = 1, \dots, q, \qquad (5)$$

$$x_{ii} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, p. \qquad (6)$$

Тут (4) — цільова функція (мінімум відходів при розкрої матеріалів);

(5) - система обмежень, що визначають кількість заготівель, необхідна для виконання замовлення;

(6) - умови незаперечності змінних.

Модель *C* розкрою з урахуванням комплектації:

$$y \to \max, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \le d_j, \quad j = 1, ..., n, \qquad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{jik} x_{ji} \ge b_k y, \quad k = 1, ..., q, \qquad (9)$$

$$y \ge 0, x_{ji} \ge 0, \quad j = 1, ..., n; \quad i = 1, ..., p. \qquad (10)$$

(7) — цільова функція (максимум комплектів, що включають заготівлі різних видів);
(8) - обмеження по кількості матеріалів;
(9) - система обмежень, що визначають кількість заготівель, необхідна для формування комплектів;
(10) - умови незаперечності змінних.
Специфічними для даної моделі лінійного програмування є обмеження (9).

Приклади

Приклад 1. *Способи розкрою металевого стрижня.*

Визначите всі раціональні способи розкрою металевого стрижня довжиною 100 см на заготівлі трьох типів: довжиною 20, 30 і 50 см. Укажіть величину відходів для кожного способу.

Рішення. Для даного матеріалу й зазначених заготівель існує сім різних раціональних способів розкрою. Всі вони наведені в наступній таблиці:

Спосіб розкрою	*Кількість заготівель довжиною*			*Величина*
	50 см	*30 см*	*20 см*	*відходів, см*
1.	*2*	*0*	*0*	*0*
2.	*1*	*1*	*1*	*0*
3.	*1*	*0*	*2*	*10*
4.	*0*	*3*	*0*	*10*
5.	*0*	*2*	*2*	*0*
6.	*0*	*1*	*3*	*10*
7.	*0*	*0*	*5*	*0*

Приклад 2. *Способи розкрою шматка шкіри.*

Визначите всі раціональні способи розкрою прямокутного шматка шкіри розміром 100 х 60 см на квадратні заготівлі зі сторонами 50,40 і 20 см і вкажіть величину відходів для кожного способу.

Рішення. Для даного матеріалу й зазначених заготівель існує шість різних раціональних способів розкрою:

Спосіб розкрою	*Кількість заготівель з стороною*			*Величина*
	50 см	*30 см*	*20 см*	*відходів, см*
1.	*2*	*0*	*0*	*1000*
2.	*1*	*1*	*2*	*110*
3.	*1*	*0*	*6*	*1100*
4.	*0*	*2*	*7*	*0*
5.	*0*	*1*	*11*	*0*
6.	*0*	*0*	*15*	*0*

Приклад 3. Виготовлення парників з металевих стрижнів.

При виготовленні парників використовується матеріал у вигляді металевих стрижнів довжиною 220 см. Цей матеріал розрізається на стрижні довжиною 120, 100 і 70 см. Для виконання замовлення потрібно виготовити 80 стрижнів довжиною 120 см, 120 стрижнів довжиною 100 см і 102 стрижня довжиною 70 см. Визначити:
1. Скільки існує раціональних способів розкрою?
2. Яка мінімальна кількість матеріалу варто розрізати, щоб виконати замовлення?
3. Скільки способів розкрою варто використовувати при виконанні замовлення?

Рішення. Визначаємо всі раціональні способи розкрою матеріалу на заготівлі. Таких способів п'ять.

Спосіб розкрою	*Кількість заготівель довжиною 120 см*	*100 см*	*70 см*	*Обсяг відходів, см*
1.	*1*	*1*	*0*	*0*
2.	*1*	*0*	*1*	*30*
3.	*0*	*2*	*0*	*20*
4.	*0*	*1*	*1*	*50*
5.	*0*	*0*	*3*	*10*

Використовуємо модель *А* для одного виду матеріалу. Тоді x_i — кількість одиниць матеріалу, що розкроюються по і-*му* способі. Для відповіді на друге і третє питання задачі одержуємо наступну модель лінійного програмування по критерію «мінімум загальної кількості використовуваного матеріалу»:

	X1	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*		
Minimize	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*		
Заготівля 120 см	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	≥	*80*
Заготівля 100 см	*1*	*0*	*2*	*1*	*0*	≥	*120*
Заготівля 70 см	*0*	*1*	*0*	*1*	*3*	≥	*102*

Вирішуючи задачу, одержуємо наступний результат:

	X1	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*			
Minimize	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*			
Заготівля 120 см	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	≥	*80*	*-0,5*
Заготівля 100 см	*1*	*0*	*2*	*1*	*0*	≥	*120*	*-0,5*
Заготівля 70 см	*0*	*1*	*0*	*1*	*3*	≥	*102*	*-0,33*
Solution	*80*	*0*	*20*	*0*	*34*		*134*	

Відповіді: 1.П'ять способів. 2.134 одиниці. 3.Три з п'яти способів розкрою.

Тести для самоконтролю

1. Спосіб розкрою називається раціональним, якщо:
1) він є безвідхідним;
2) він забезпечує мінімум відходів;
3) відходи менше кожної із заготівель;
4) він дозволяє одержати найбільше число заготівель;
5) немає іншого способу, що дає не менше заготівель кожного типу.

2. Розглядається задача оптимального розкрою дерев'яних брусів на заготівлі для будівництва будинку. Довжина брусів виміряється в сантиметрах. У відповідній моделі лінійного програмування невідомими є інтенсивності раціональних способів розкрою матеріалу, значення яких виміряється в штуках. Як критерій розглядається мінімум відходів. У яких одиницях виміряється коефіцієнт цільової функції?
Варіанти відповідей: 1) шт.; 2) см; 3) шт./см; 4) см/шт.; 5) безрозмірна величина.

3. Розглядається задача оптимального розкрою шкіри для пошиття рукавичок. У відповідній моделі лінійного програмування враховується обмеження на кількість матеріалу. Права частина обмеження виміряється в штуках шкіри.

Максимізується кількість пар пошитих рукавичок. У яких одиницях виміряється двоїста оцінка ресурсного обмеження?
Варіанти відповідей: 1) шт.; 2) пари; 3) пари/шт.; 4) шт./пари; 5) безрозмірна величина.

4. Скільки існує раціональних способів розкрою металевого стрижня довжиною 100 см на стрижні довжиною 50, 20 і 10 см?
Варіанти відповідей: 1) більше десяти; 2) десять; 3) дев'ять; 4) вісім; 5) менш восьми.

5. Яке з наступних тверджень є вірним?
1) безвідхідний спосіб розкрою є раціональним;
2) безвідхідний спосіб розкрою може бути раціональним;
3) безвідхідний спосіб розкрою не є раціональним;
4) раціональний спосіб розкрою є безвідхідним;
5) раціональний спосіб розкрою не є безвідхідним.

Задачі для розв'язування

Задача 1. Із прямокутного листу заліза розміром 100 х 60 см необхідно виготовити квадратні заготівлі зі сторонами 50,40 і 20 см. Ці заготівлі потрібні як перегородки при виготовленні пластмасових коробок для зберігання інструментів. Щоб зробити одну коробку, потрібно мати чотири заготівлі зі стороною 50 см, шість заготівель зі стороною 40 см і дванадцять - зі стороною 20 см. На складі перебуває 100 аркушів матеріалу. Визначити : 1. Скільки існує раціональних способів розкрою?
2. Яка максимальна кількість коробок можна виготовити за умови, що заготівлі, що залишилися, можна використовувати для наступної партії коробок?
3. Скільки раціональних способів розкрою варто використовувати?
4. Скільки аркушів матеріалу потрібно, щоб виготовити одну коробку?

Задача 2. Існує три раціональних способи розкрою одиниці матеріалу *A* на заготівлі трьох типів. Ці ж заготівлі можуть бути отримані двома раціональними способами при розкрої одиниці матеріалу *B*. Кількість заготівель, одержуваних кожним із цих способів, показано в наступній таблиці:

Заготівля	*Матеріал A*			*Матеріал B*	
	Спосіб 1	*Спосіб 2*	*Спосіб 3*	*Спосіб 4*	*Спосіб 5*
1	*0*	*2*	*9*	*1*	*5*
2	*4*	*3*	*2*	*5*	*4*
3	*10*	*6*	*0*	*8*	*0*

Заготівлі використовуються для виробництва побутової техніки. У комплект поставки входять чотири заготівлі першого типу, три заготівлі другого типу й сім — третього. На складі є 100 одиниць матеріалу *A* і 300 одиниць матеріалу *B*. Визначити:
1. Скільки раціональних способів розкрою варто використовувати?
2. Яке максимальне число комплектів заготівель можна виготовити з наявного матеріалу в припущенні, що заготівлі, що залишилися, можна використовувати при виконанні наступного замовлення?
3. Скільки одиниць матеріалу *A* варто розкроювати третім способом?
4. Яке максимальне число комплектів заготівель можна виготовити з наявного матеріалу, якщо число заготівель другого типу в комплекті збільшиться до семи?

Задача 3. При розкрої деталей для виробництва єдиного виробу на швейній фабриці використовуються два артикули тканини. Ширина тканини 1 м. Виріб збирається із двох деталей, причому кожна з них може бути отримана шляхом розкрою тканини будь-якого типу. Тканини можна розкроювати трьома способами, кількість деталей кожного виду, отриманих з одного погонного метру тканини, зазначено в таблиці:

Деталь	*Тканина 1*			*Тканина 2*		
	Спосіб 1	*Спосіб 2*	*Спосіб 3*	*Спосіб 4*	*Спосіб 5*	*Спосіб 6*
1	*8*	*0*	*4*	*12*	*0*	*6*
62	*0*	*3*	*1*	*0*	*5*	*2*

Тканини 1 надходить на фабрику в 2 рази більше (по довжині), чим тканини 2. Кількість готових виробів повинно бути максимальним. Визначити:
1. Скільки способів розкрою тканини 1 варто використовувати?
2. Яка частина (в %) тканині 1 повинна бути розкроєна способом 1?
3. На скільки (в %) зміниться вихід готових виробів у порівнянні з первісним, якщо на фабрику буде надходити рівна кількість обох тканин?

Задача 4. На виробництво надійшла партія стрижнів довжиною 250 і 190 см. Необхідно одержати 470 заготівель довжиною 120 см і 450 заготівель довжиною 80 см. Відходи повинні бути мінімальні. Визначити:
1. Яка кількість стрижнів довжиною 250 см треба розрізати?
2. Яка кількість стрижнів довжиною 190 см треба розрізати?
3. Яка величина відходів (у см)?
4. Виявилося, що кількість стрижнів довжиною 250 см обмежене й дорівнює 200 шт. Яка кількість стрижнів довжиною 190 см треба розрізати в цьому випадку?
5. На скільки при цьому збільшаться відходи (у см)?

Завдання 5. Завод уклав договір на поставку комплектів стрижнів довжиною 18, 23 і 32 см. Причому кількість стрижнів різної довжини в комплекті повинне бути в співвідношенні 1:5:3. На сьогоднішній день є 80 стрижнів довжиною по 89 см. Як їх варто розрізати, щоб кількість комплектів бути максимальним? Визначити:

1. Скільки існує раціональних способів розкрою?
2. Скільки комплектів стрижнів буде випущено?
3. Яка при цьому величина відходів (у см)?

Тема 3. «Планування фінансів»

Мета: використання *моделі лінійного програмування* для рішення деяких завдань планування фінансів. При певних припущеннях стає можливим вибрати такі способи вкладення грошей під відсотки, сукупність яких дозволяє мінімізувати первісний внесок, необхідний для виплати позики, або максимізувати дохід. При рішенні завдань фінансового планування можна враховувати ризик і інші фактори, що впливають на вибір способів вкладення грошей.

Знання: моделі лінійного програмування (ЛП)

Уміння: формулювати й використовувати для економічного аналізу наступні поняття: внесок; цільовий фонд; балансове обмеження; індекс ризику по внеску.

Теоретичні відомості

Модель *А* мінімізації цільового фонду. Припустимо, що в певні моменти часу необхідно виплачувати відомі суми грошей по взятому раніше позиці. Щоб нагромадити ці суми, можна заздалегідь створити цільовий фонд, а засобу із цього фонду використовувати для строкових вкладів. Кожний строковий вклад характеризується моментом часу вкладення, строком погашення й прибутковістю. Завдання полягає в тім, щоб визначити мінімальний розмір цільового фонду й вибрати ті види строкових вкладів, які варто використовувати, щоб зробити виплату по позиці. Позначення:

в — розмір цільового фонду, створюваного в нульовий момент часу;

t — сучасний момент часу, t = 0, 1,.... T;

d_t — розмір виплати по позиці, яку треба зробити в момент часу t (t = 1, ..., T); j - індекс строкового вкладу, j = 1,..., n;

v_j — момент часу вкладення по строковому вкладі j;

w_j — строк виплати по строковому вкладі j;

r_j — прибутковість строкового вкладу j (відсоток по внеску);

x_j — обсяг вкладень по строковому вкладі j.

Передбачається, що для будь-якого строкового вкладу j момент v_j часу вкладення фіксований. Якщо по строковому вкладі/зроблені вкладення в розмірі x_j, то через w_j одиниць часу вкладникові виплачується сума $(1 + r_{j*})x_j$. Без обмеження спільності можна вважати, що для будь-якого моменту часу існує такий внесок, виплата по якому виробляється в наступний момент часу. При цьому прибутковість такого внеску може бути нульова. Використання внеску з нульовою прибутковістю означає, що гроші залишаються на руках у власника.

Нехай G_t — множина індексів j, таких, що $t = v_j$, тобто по внеску j зроблене вкладення в момент часу t, Q_t — множина індексів j, таких, що $t = v_j + w_j$, тобто по внеску j отримана виплата в момент часу t. Помітимо, що для будь-якого t множина G_t і Q_t відомі. Тоді модель має такий вигляд:

$$y \to \min, \tag{1}$$

$$y - \sum_{j \in G_t} x_j = 0, \quad t = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in Q_t} (1 + r_j)\, x_j - \sum_{j \in G_t} x_j = d_t, \quad t = 1, \ldots, T - 1, \tag{3}$$

$$\sum_{j \in Q_t} (1 + r_j)\, x_j = d_t, \quad t = T, \tag{4}$$

$$y \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

(1) — цільова функція (мінімальний розмір цільового фонду);

(2) -умова, що характеризує розподіл цільового фонду по внесках у нульовий момент часу;

(3) - співвідношення, що встановлюють баланс між виплатами й вкладеннями;

(4) - умову, що забезпечує виплату по позиці;

(5) - умови незаперечності змінних.

Модель *В* максимізації доходу. Припустимо тепер, що вкладник збирається робити внески для того, щоб через певний період часу одержати максимальний дохід. Завдання полягає в тім, щоб визначити величину максимального доходу при фіксованому розмірі цільового фонду й вибрати ті види строкових вкладів, які варто використовувати. Збережемо прийняті раніше позначення й уведемо нові:

z — розмір доходу, що може одержати вкладник у момент часу T;

u_t— розмір внеску в момент часу t (t = 0, 1,..., T-1).

Де (6) — цільова функція (максимальна величина доходу);

(7) — умова, що характеризує розподіл внеску в нульовий момент часу;

(8) - співвідношення, що встановлюють баланс між виплатами й вкладеннями;

(9) - умову, що визначає величину доходу;

(10) -умови незаперечності змінних.

Тоді модель має такий вигляд:

$$z \to \max, \tag{6}$$

$$\sum_{j \in G_t} x_j = u_t, \quad t = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{j \in G_t} x_j - \sum_{j \in Q_t} (1 + r_j)\, x_j = u_t, \quad t = 1, \ldots, T-1, \tag{8}$$

$$\sum_{j \in Q_t} (1 + r_j)\, x_j - z = 0, \quad t = T, \tag{9}$$

$$z \geq 0, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Приклади

Приклад 1. *Вкладення грошей під відсотки.*

Компанія тільки що уклала контракт на покупку нового обладнання природоохоронного призначення. Відповідно до договору компанія повинна виплатити постачальникові в цілому 750 тис. грн. Причому 150 тис. грн. необхідно сплатити через два місяці, а інші 600 тис. грн. - через шість місяців після того, як устаткування буде встановлене й випробуване. Директор компанії вважає, що відразу після підписання договору варто утворити цільовий фонд і використовувати ці засоби для вкладення грошей під відсотки. Оскільки такі інвестиції породять додаткову готівку на той час, коли прийде вносити гроші за устаткування, Директор розуміє, що цільовий фонд повинен бути менше ніж 750 тис. грн. А от скільки саме - залежить від наявних можливостей інвестування. Проаналізувавши варіанти, директор вирішив зосередитися на 12 можливих способах вкладення грошей під відсотки. Види внесків, їхня тривалість, можливі строки вкладення й відсотки по внеску наведені в наступній таблиці:

Вид внеску	*Строк внеску, місяці*	*Можливі моменти внеску (початок місяця)*	*Процент по внеску*
A	*1*	*1,2,3,4,5, 6*	*1,5%*
B	*2*	*1,3,5*	*3,5%*
C	*3*	*1,4*	*6,0%*
D	*6*	*1*	*11,0%*

Дані про можливості вкладень і повернення грошей (у грн.) представлені в наступній таблиці:

Внесок	*Початок місяця*						
	1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*
A у місяці 1	*1,0* →	*1,015*					
A у місяці 2		*1,0* →	*1,015*				
A у місяці 3			*1,0* →	*1,015*			
A у місяці 4				*1,0* →	*1,015*		
A у місяці 5					*1,0* →	*1,015*	
A у місяці 6						*1,0* →	*1,015*
B у місяці 1	*1,0* →		*1,035*				
B у місяці 3			*1,0* →		*1,035*		
B у місяці 5					*1,0* →		*1,035*
C у місяці 1	*1,0* →			*1,06*			
C у місяці 4				*1,0* →			*1,06*
D у місяці 1	*1,0* →						*1,11*

З урахуванням цих можливостей необхідно мінімізувати розмір цільового фонду, що забезпечує оплату устаткування. Визначити:

1. Який мінімальний розмір цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати?
2. Яка вартість у початковий момент часу однієї гривні, якому треба виплатити на початку сьомого місяця (через шість місяців)?
3. Яка вартість у початковий момент часу однієї гривні, якому треба виплатити на початку п'ятого місяця (через чотири місяці)?

Рішення. Уведемо наступні позначення:
в — розмір цільового фонду;
A_i — розмір внеску виду A в місяці i;
B_i — розмір внеску виду B у місяці i;
C_i — розмір внеску виду С у місяці i;
D_i — розмір внеску виду D у місяці i.

Тому що в будь-який момент часу можна зробити внесок на один місяць, зберігати гроші на руках невигідно. З урахуванням цієї умови задача мінімізації цільового фонду може бути описана наступною моделлю: Цільова функція $в \to \min$

при умовах

$$y - A_1 - B_1 - C_1 - D_1 = 0,$$
$$1{,}015A_1 - A_2 = 0,$$
$$1{,}015A_2 + 1{,}035B_1 - A_3 - B_3 = 150,$$
$$1{,}015A_3 + 1{,}060C_1 - A_4 - C_4 = 0,$$
$$1{,}015A_4 + 1{,}035B_3 - A_5 - B_5 = 0,$$
$$1{,}015A_5 - A_6 = 0,$$
$$1{,}015A_6 + 1{,}035B_5 + 1{,}060C_4 + 1{,}110D_1 = 600.$$

Цю модель можна пре

	y	*A1*	*B*								*5*	*B5*	*A6*		
Minimize	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		
Початок 1 місяця	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		*0*
Початок 2 місяця	*0*	*1,015*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		*0*
Початок 3 місяця	*0*	*0*	*1,035*	*0*	*0*	*1,015*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	=	*150*
Початок 4 місяця	*0*	*0*	*0*	*1,06*	*0*	*1,015*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	=	*0*
Початок 5 місяця	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,035*	*1,015*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	=	*0*
Початок 6 місяця	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,015*	*0*	*-1*	=	*0*
Початок 7 місяця	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,11*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,06*	*0*	*1,035*	*1,015*	=	*600*

Проводячи обчислення, одержуємо наступні результати:

	y	*A1*	*B1*	*C1*	*D1*	*A2*	*A3*	*B3*	*A4*	*C4*	*A5*	*B5*	*A6*			
Minimize	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*			
Поч. 1 міс.	*1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		*0*	*-1*
Поч. 2 міс.	*0*	*1,015*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*		*0*	*-0,985*
Поч. 3 міс.	*0*	*0*	*1,035*	*0*	*0*	*1,015*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	=	*150*	*-0,966*
Поч. 4 міс.	*0*	*0*	*0*	*1,06*	*0*	*1,015*	*0*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*0*	=	*0*	*-0,943*
Поч. 5 міс.	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,035*	*1,015*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	=	*0*	*-0,929*
Поч. 6 міс.	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,015*	*0*	*-1*	=	*0*	*-0,916*
Поч. 7 міс.	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,11*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1,06*	*0*	*1,035*	*1,015*	=	*600*	*-0,890*
Solution	*678,9*		*144,9*	*533,99*						*566,04*					*678,9*	

Наступна таблиця містить границі стійкості за коефіцієнтами цільової функції:

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
y	678,93	0	1	0	Infinity
*A*1	0	0	0	−4,6E−03	Infinity
*B*1	144,98	0	0	−4,3E−03	4,6E−03
*C*1	533,99	0	0	−1	4,3E−03
*D*1	0	1,2E−02	0	−1,2E−02	Infinity
*A*2	0	4,5E−03	0	−4,5E−03	Infinity
*A*3	0	8,6E−03	0	−8,6E−03	Infinity
*B*3	0	4,2E−03	0	−4,2E−03	Infinity
*A*4	0	0	0	−8,4E−03	4,2E−03
*C*4	566,04	0	0	−Infinity	8,5E−03
*A*5	0	0	0	−1,2E−02	Infinity
*B*5	0	8,3E−03	0	−8,3E−03	Infinity
*A*6	0	1,2E−02	0	−1,2E−02	Infinity

Далі приводяться границі стійкості по правих частинах обмежень:

Constraint	Dual Val	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Начало месяца 1	−1	0	0	−678,9	Infinity
Начало месяца 2	−0,985	0	0	0	Infinity
Начало месяца 3	−0,966	0	150	0	Infinity
Начало месяца 4	−0,943	0	0	−566,0	Infinity
Начало месяца 5	−0,929	0	0	0	Infinity
Начало месяца 6	−0,916	0	0	0	Infinity
Начало месяца 7	−0,890	0	600	0	Infinity

У цій моделі особливий інтерес уявляє інтерпретація двоїстих оцінок. Наприклад, двоїста оцінка останнього обмеження дорівнює -0,89. Це означає, що для виплати через півроку одного додаткової гривні необхідно збільшити розмір цільового фонду на 0,89 грн. Таким чином, величина двоїстої оцінки є вартість однієї гривні, виплачуваного через півроку, наведена до початкового моменту часу.
Відповіді: 1.678,93 тис. грн. 2.0,89грн. 3.0,929грн.

Тести для самоконтролю

1. Строковий вклад характеризується:
1) сумою внеску й відсотком по внеску;
2) моментом вкладення, строком погашення, прибутком і відсотком по внеску;
3) розміром внеску, моментом вкладення, строком погашення й відсотком по внеску;
4) розміром внеску, моментом вкладення, строком погашення, прибутком і відсотком по внеску.

2. Метою моделі мінімізації цільового фонду є:
1) мінімізація цільового фонду, необхідного для нагромадження певної суми;
2) максимізація цільового фонду, необхідного для нагромадження певної суми;
3) мінімізація розміру строкового вкладу, необхідного для нагромадження певної суми;
4) максимізація розміру строкового вкладу, необхідного для нагромадження певної суми;
5) мінімізація цільового фонду, необхідного для одержання максимального доходу.

3. Метою моделі максимізації доходу є:
1) максимізація цільового фонду, необхідного для одержання максимального доходу;
2) мінімізація цільового фонду, необхідного для одержання максимального доходу;
3) вибір строкового вкладу з максимальною прибутковістю;
4) мінімізація доходу при фіксованій величині цільового фонду;
5) максимізація доходу при фіксованій величині цільового фонду.

Задачі для розв’язування

Задача 1. Керуючий компанією «Золоте колосся», що спеціалізується на випуску квасу. Компанія закупила устаткування для випуску популярного сорту квасу «Подвійне золоте». Вартість устаткування 900 тис. грн. Відповідно до умов контракту 200 тис. грн. необхідно виплатити через два місяці, коли устаткування буде поставлено, а залишок 700 тис. грн. - через шість місяців, коли устаткування буде змонтовано. Щоб розплатитися повністю, директор припускає негайно ж утворити цільовий фонд, який можна використовувати для інвестицій. Оскільки такі інвестиції породять додаткову готівку на той час, коли прийдеться вносити гроші за устаткування, директор знає, що йому варто відкласти менше ніж 900 тис. грн. А от скільки саме - залежить від наявних можливостей інвестування. Директор вирішив зосередитися на 12 можливостях інвестування.Дані для завдання фінансового планування представлені в наступній таблиці:

Вид внеску	*Строк внеску, місяці*	*Можливі моменти внеску (початок місяця)*	*Процент по внеску*	*Індекс ризику*
A	*1*	*1, 2, 3, 4, 5, 6*	*1,7%*	*3*
B	*2*	*1, 3, 5*	*3,5%*	*10*
C	*3*	*1, 4*	*5,5%*	*7*
D	*6*	*1*	*10,5%*	*9*

Для кожного виду внесків відома експертна оцінка ризику затримки виплати по внеску. Складіть модель лінійного програмування для визначення мінімального розміру цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати. Визначити:
1. Який мінімальний розмір цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати без обліку ризику?
2. Яка вартість у початковий момент часу однієї гривні, якому треба виплатити на початку сьомого місяця (через шість місяців)?

3. Який мінімальний розмір цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати, якщо середній ризик у кожний момент часу не повинен перевищувати 6?
4. Яка «плата» за зниження ризику (у грн.)?

Задача 2. У фірми є 50 тис. грн., які можна інвестувати. Необхідно максимізувати готівку до кінця шестимісячного періоду. Можливі види інвестицій представлені в наступній таблиці:

Вид внеску	*Строк внеску, місяці*	*Можливі моменти внеску (початок місяця)*	*Процент по внеску*	*Індекс ризику*
A	*1*	*1, 2, 3, 4, 5, 6*	*1,7%*	*3*
B	*2*	*1, 2*	*3,5%*	*9*
C	*3*	*3, 4*	*6,5%*	*8*
D	*6*	*1*	*11,5%*	*5*

Для кожного виду внесків відома експертна оцінка ризику затримки виплати по внеску. Складіть модель лінійного програмування для визначення максимального розміру доходу, що може одержати Василь Іванов через півроку, використавши наявні в нього можливості для вкладення 50 тис. грн. Визначити:
1. Який максимальний розмір доходу через півроку?
2. Який максимальний дохід можна одержати через півроку від вкладення однієї гривні в початковий момент часу?
3. Який максимальний розмір доходу можна одержати через півроку, якщо середній ризик у кожний момент часу не повинен перевищувати 6?
4. Яка «плата» за зниження ризику (у грн.)?
5. На початку четвертого місяця фірма припускає вкласти ще 20 тис. грн. На скільки зросте її дохід через півроку з урахуванням ризику?

Задача 3. П'ять проектів конкурують за одержання інвест. фондів компанії.
Проект 1 припускає вкладення грошей в 2006 р., одержання 30% по внеску в 2007 р. і повернення вкладених коштів (без відсотків) в 2008 р.
Проект 2 припускає вкладення грошей в 2007 р., одержання 30% по внеску в 2008 р. і повернення вкладених коштів (без відсотків) в 2009 р.
Проект 3 припускає вкладення грошей в 2006 р. і одержання 1,75 грн. на один вкладений гривня в 2009 р.
Проект 4 припускає вкладення грошей в 2008 р. і одержання 1,4 грн. на один вкладений гривня в 2009 р.
Проект 5 припускає вкладення грошей в 2006 р. і одержання 1,2 грн. на один вкладений гривня в 2008 р.

Максимальна сума, що може бути вкладена в будь-який проект, не повинна перевищувати 10 млн грн. Гроші, отримані в результаті інвестицій в один проект, можна реінвестувати в інші проекти. Компанія також може одержувати 6% річних по короткостроковому (на один рік) банківському вкладу. До початку 2006 р. інвестиційний фонд компанії складе 20 млн грн. Метою компанії є максимізація доходу від інвестицій до 2009 р. Визначити:
1. Яка максимальна сума грошей, яку можна одержати в 2009 р.?
2. Яку суму варто вкласти в другий проект?
3. У якому році варто вкласти гроші в банк під 6% річних?
4. Який максимальний дохід можна одержати в 2009 р., вклавши 1 грн. в 2003 р.?

Тема 4. «Транспортна задача»

Мета: потрібно визначити, від яких виробників і в яких обсягах повинні одержувати продукт споживачі. Поставки повинні здійснюватися таким чином, щоб сукупні витрати на транспортування продукту були мінімальними.

Знання: моделі транспортної задачі.

Уміння: становити й використовувати для економічного аналізу: замкнуту й відкриту транспортні задачі; транспортне задачу з обмеженнями; транспортну задачу з фіксованими перевезеннями; транспортну задачу з обмеженнями на пропускну здатність; транспортну задачу з фіксованими доплатами; транспортну таблицю.

Теоретичні відомості

Позначення:

a_i — величина пропозиції продукту в пункті i ($i = 1, ..., n$);

b_j — величина попиту на продукт у пункті j ($j = 1,..., m$);

c_{ij} — витрати на транспортування одиниці продукту з пункту i у пункт j;

x_{ij} — кількість продукту, перевезеного з пункту i у пункт j.

Модель транспортної задачі:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., m, \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m. \tag{4}$$

Тут (1) — цільова функція (мінімум витрат на транспортування продукту);
(2) — обмеження по величині пропозиції в кожному пункті виробництва;
(3) - обмеження по величині попиту в кожному пункті споживання; (4) - умови незаперечності обсягів перевезень.

1. Замкнута транспортна задача. Загальна пропозиція *дорівнює* загальному попиту:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Це необхідна й достатня умова існування припустимого плану задача (1)-(4).

2. Відкрита транспортна задача.

а) $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ — *надлишок* продукту

Спосіб зведення до замкнутої задачі. Нехай b_{m+1} — величина надлишку продукції, тобто $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$; $c_{i,\, m+1}$ - штраф за одиницю продукту, не реалізованого в пункті i; y_i — кількість продукту, не реалізованого в пункті i. Замкнута транспортна задача має вигляд

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_{i,\,m+1}\, y_i \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} + y_i = a_i, \quad i = 1, ..., n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., m,$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b_{m+1},$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad y_i \ge 0, \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m.$$

б) $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$ — *дефіцит* продукту.

Спосіб зведення до замкнутої задачі. Нехай a_{n+1} — величина дефіциту продукції, т $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$; $c_{n+1,j}$ - штраф за одиницю продукту, недопоставленого в пункт j; y_j — кількість продукту, недопоставленого в пункту.

Замкнута транспортна задача має вигляд

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} c_{n+1,j}\, y_j \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + y_j = b_j, \quad j = 1, ..., m,$$
$$\sum_{j=1}^{m} y_j = a_{n+1},$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad y_j \ge 0, \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., m.$$

3. Транспортна задача з обмеженнями. Нехай E — Множина пар індексів (ij), таких, що з пункту i у пункт j допускається транспортування продукту. Між будь-якими іншими двома пунктами транспортування не допускається. Нехай М-велике число, на $M = \max(c_{ij}) \max\{\sum_{j=1}^{m} b_j, \sum_{i=1}^{n} a_i\}, i = 1, ..., n; j = 1, ..., m.$

Тоді

$$s_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i, j) \in E, \\ M, \text{ если } (i, j) \notin E. \end{cases}$$

В оптимальному плані $\{x_{ij}^*\}$ транспортної задачі $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} s_{ij}\, x_{ij} \to \min$ при обмеженнях (2)—(4) $x_{ij} = 0$, якщо $(i,j) \notin E$.

4. Транспортна задача з фіксованими перевезеннями. Якщо обсяг перевезень між пунктами i і j заданий, то в задачі (1)—(4) вводиться додаткове обмеження: $x_{ij} = v_{ij}$, де v_{ij} — заданий обсяг перевезень.

5. Транспортна задача з обмеженнями на пропускну здатність. Якщо обсяг перевезень із пункту i у пункт j обмежений величиною w_{ij}, то в задачі (1)—(4) вводиться додаткове обмеження: $x_{ij} \le w_{ij}$.

6. Транспортна задача з фіксованими доплатами. Припустимо, що у відкритій транспортній задачі має місце дефіцит продукту й для його усунення в пунктах $i = n + 1, ..., k$ можливе створення нових потужностей d_i.

Нехай змінні $z_i = 1$, якщо в пункті i ($i = n + 1, ..., k$) уводяться потужності d_i і $z_i = 0$, якщо в пункті i потужності не вводяться. Витрати на введення потужностей d, у пункті i ($i = n + 1, ..., k$) становлять u_i.

З урахуванням можливості створення нових потужностей транспортна задача може бути записана в наступному виді:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_{ij}\,x_{ij} + \sum_{i=n+1}^{k} u_i\,z_i \to \min, \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., n, \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le d_i\,z_i, \quad i = n + 1, ..., k, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, ..., m, \qquad (8)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, ..., k; \quad j = 1, ..., m. \qquad (9)$$

Тут (5) — цільова функція (мінімум витрат на транспортування й введення потужностей); (6) — обмеження по величині пропозиції в кожному існуючому пункті виробництва; (7) — обмеження по величині пропозиції в кожному новому пункті виробництва; (8) — обмеження по величині попиту в кожному пункті споживання; (9) — умови незаперечності обсягів перевезень.

Крім безперервних змінних x_{ij} у модель включені булеві змінні z_i,. Задача (5)-(9) є задачею лінійного програмування з «змішаними» змінними.

Всі наведені моделі описують транспортну задачу у вигляді задачі лінійного програмування. У такій формі вона може бути вирішена стандартними засобами лінійного програмування, наприклад симплекс-методом. Для рішення транспортної задачі можуть бути використані також і менш трудомісткі (по обсягу обчислень) алгоритми, наприклад метод потенціалів. Більшість спеціальних алгоритмів рішення транспортної задачі використовує вихідну інформацію у формі транспортної таблиці:

Пункт споживання / *Пункт виробництва*	*1*	*2*	...	*j*	...	*m*	*пропозиція*
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1m}	a_1
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2m}	A_2
...	...	...	...	...	...	...	...
i	C_{11}	C_{i1}	...	C_{ij}	...	C_{im}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
n	C_{11}	C_{n1}	...	C_{nj}	...	C_{nm}	a_n
попит	b_1	B_2	...	B_j	...	B_m	

Оптимальний план перевезень має вигляд

X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1m}
X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2m}
...	...	...	...	...	...
X_{11}	X_{i1}	...	X_{ij}	...	X_{im}
...	...	...	...	...	...
X_{11}	X_{n1}	...	X_{nj}	...	X_{nm}

Приклади

Приклад 1. *Визначення плану перевезень.*

Компанія, що займається видобутком залізної руди, має чотири кар'єри. Продуктивність кар'єрів відповідно 170, 130, 190 і 200 тис. т щомісяця. Залізна руда направляється на три приналежні цієї компанії збагачувальні фабрики, потужності яких відповідно 250, 150 і 270 тис. т на місяць. Транспортні витрати (у тис. грн.) на перевезення 1 тис. т руди з кар'єрів на фабрики зазначені в наступній таблиці:

Фабрика / *Кар'єр*	*1*	*2*	*3*
1	*7*	*3*	*5*
2	*5*	*4*	*6*
3	*4*	*5*	*6*
4	*3*	*2*	*5*

Визначите план перевезень залізної руди на збагачувальні фабрики, що забезпечує мінімальні сукупні транспортні витрати. Задача:

1. Скільки руди варто перевозити з кар'єру 1 на збагачувальну фабрику 2?
2. Скільки руди варто перевозити з кар'єру 4 на збагачувальну фабрику 1?
3. Який обсяг потужностей по видобутку руди виявиться невикористаним?
4. Які мінімальні сукупні транспортні витрати?

Рішення. Транспортна таблиця має такий вигляд:

Фабрика / *Кар'єр*	*1*	*2*	*3*	*Пропозиція*
1				*170*
2				*130*
3				*190*
4				*200*
Попит	*250*	*150*	*270*	

Нижче наведені результати розрахунків - обсяги перевезень і залишок невивезеної руди (у тис. т):

Фабрика / *Кар'єр*	*1*	*2*	*3*	*Надлишок*
1		*10*	*160*	
2			*110*	*20*
3	*190*			
4	*60*	*140*		

У наступній таблиці до косої риси зазначені обсяги перевезень, після риси - відповідні витрати:

Фабрика / *Кар'єр*	*1*	*2*	*3*
1		*10/30*	*160/800*
2			*110/660*
3	*190/760*		
4	*60/180*	*140/280*	

Мінімальні сукупні витрати становлять 2710 тис. грн.

Відповіді: 1.10 тис. т. 2.60 тис. т. 3.20 тис. т. 4. 2710 тис. грн.

Приклад 2. *Задача агрегованого планування.*

Компанія «Джерело» виробляє і реалізує в Україні концентрат для готування фруктового напою «Сонечко». Відділ збуту компанії «Джерело» уклав договори на поставку концентрату в такому обсязі: квітень - 55 т, травень - 70 т, червень - 75 т. При роботі у дві зміни на власному встаткуванні компанія може виробити на місяць до 50 т концентрату. Якщо використовувати понаднормовий час, можна збільшити обсяг виробництва на 5 т на місяць. У квітні початковий запас концентрату на складі складе 10 т. Неважко помітити, що навіть при використанні понаднормового часу й складських запасів концентрату виконати договори не вдасться. Тому з метою виконання договірних зобов'язань ухвалено рішення орендувати обладнання акціонерного товариства «Лана». За рахунок оренди з'являється можливість збільшити виробництво концентрату на 12 т у квітні, на 12 т у травні й на 10 т у червні.

Відомо, що виробництво 1 т концентрату в регулярному режимі двозмінної роботи устаткування обходиться в 60 тис. грн. При використанні понаднормового часу витрати збільшуються на 20 тис. грн. за тонну. Виробництво 1 т концентрату на орендованому устаткуванні обходиться в 90 тис. грн. Витрати зберігання 1 т концентрату протягом місяця - 1 тис. грн. Договори передбачають штрафні санкції у випадку несвоєчасної поставки концентрату. При затримці поставок на один місяць компанія повинна буде заплатити штраф у розмірі 3 тис. грн. за тонну.

Складіть план використання власних і орендованих потужностей для компанії «Джерело» на щомісяця другого кварталу. Визначити:

1. Чому дорівнює значення коефіцієнта транспортної таблиці, що відповідає регулярному використанню власних потужностей компанії у квітні для задоволення попиту на травень?

2. Чому дорівнює значення коефіцієнта транспортної таблиці, що відповідає регулярному використанню власних потужностей компанії в травні для задоволення попиту на квітень?

3. При яких мінімальних витратах можна виконати ув'язнені на другий квартал договори?

4. Яка кількість концентрату варто робити у квітні на орендованому встаткуванні?

5. Який розмір штрафних санкцій за несвоєчасну поставку концентрату передбачений планом?

6. Яка величина запасу концентрату на початок червня передбачена планом?

7. Чому рівні витрати виконання договорів на червень?

Рішення. Для складання плану використовуємо модель транспортної задача. Транспортна таблиця в цьому випадку має такий вигляд:

		квітень	*травень*	*червень*	*потужність*
	Початковий запас	*0*	*1*	*2*	*10*
Квітень	*Регулярний час*	*60*	*61*	*62*	*50*
	Понаднормований час	*80*	*81*	*82*	*5*
	Орендний час	*90*	*91*	*92*	*12*
Травень	*Регулярний час*	*63*	*60*	*61*	*50*
	Понаднормований час	*83*	*80*	*81*	*5*
	Орендний час	*93*	*90*	*91*	*12*
Червень	*Регулярний час*	*66*	*63*	*60*	*50*
	Понаднормований час	*86*	*83*	*80*	*5*
	Орендний час	*96*	*93*	*90*	*10*
	Попит	*55*	*70*	*75*	

Наприклад, значення 1 коефіцієнта в першому рядку транспортної таблиці (при використанні початкового запасу для задоволення попиту в травні) показує, що витрати зберігання 1 т концентрату протягом місяця (квітень) складуть 1 тис. грн. Значення 2 коефіцієнти в першому рядку (при використанні початкового запасу для задоволення попиту в червні) показує, що витрати зберігання 1 т концентрату протягом двох місяців (квітень, травень) складуть 2 тис. грн. Значення 60 коефіцієнта в другому рядку матриці (при регулярному використанні власних потужностей у квітні для задоволення попиту у квітні) відповідає виробничим витратам - 60 тис. грн./т. Значення 66 коефіцієнта у восьмому рядку матриці (при регулярному використанні власних потужностей у червні для виконання договорів, укладених на квітень) перевищує виробничі витрати (60 тис. грн./т) на величину штрафних санкцій (6 тис. грн./т) за несвоєчасну (із запізненням на два місяці) поставку кожної тонни концентрату. Використовуючи наведену вище транспортну таблицю, одержуємо наступне рішення задача:

		квітень	*травень*	*червень*	*Резерв потужності*
	Початковий запас	*10*			
Квітень	*Регулярний час*	*45*	*5*		
	Понаднормований час		*5*		
	Орендний час		*3*		*9*
Травень	*Регулярний час*		*50*		
	Понаднормований час		*5*		
	Орендний час		*2*	*10*	
Червень	*Регулярний час*			*50*	
	Понаднормований час			*5*	
	Орендний час			*10*	

Відповідно до цього рішення з 50 т концентрату, зробленого на регулярних потужностях у квітні, 45 т варто використовувати при виконанні договорів, укладених на квітень, 5 т при виконанні договорів, укладених на травень. У квітні на орендованих потужностях варто зробити 3 т концентрати. При цьому резерв потужності складе 9 т. У травні орендовані потужності варто використовувати повністю (12 т). При цьому 2 т із цих 12 варто використовувати для виконання договорів, укладених на травень, а 10 т - для виконання договорів, укладених на червень. У наступній таблиці мінімальні сукупні витрати (12 473 тис. грн.), що відповідають оптимальному плану використання потужностей, специфіковані по різних статтях витрат:

	Статті витрат	*За місяць*	*Обсяг виробництва*	*Питомі витрати*	*Витрати*
	Початковий запас	*квітень*	*10*	*0*	*0*
Квітень	*Регулярний час*	*квітень*	*45*	*60*	*2700*
		травень	*5*	*61*	*305*
	Понаднормований час	*травень*	*5*	*81*	*405*
	Орендний час	*травень*	*3*	*91*	*273*
Травень	*Регулярний час*	*травень*	*50*	*60*	*3000*
	Понаднормований час	*травень*	*5*	*80*	*400*
	Орендний час	*травень*	*2*	*90*	*180*
		червень	*10*	*91*	*910*
Червень	*Регулярний час*	*червень*	*50*	*60*	*3000*
	Понаднормований час	*червень*	*5*	*80*	*400*
	Орендний час	*червень*	*10*	*90*	*900*
		Усього			*12473*

При використанні регулярних потужностей питомі виробничі витрати становлять 60 тис. грн./т. У випадку регулярного використання власних потужностей у квітні для виконання договорів, укладених на травень, значення коефіцієнта транспортної таблиці перевищує виробничі витрати (60 тис. грн./т) на величину питомих витрат на зберігання концентрату (1 тис. грн./т). Значення коефіцієнта дорівнює 61 тис. грн./т. У випадку регулярного використання власних потужностей у травні для виконання договорів, укладених на квітень, значення коефіцієнта транспортної таблиці перевищує виробничі витрати (60 тис. грн./т) на величину штрафних санкцій (3 тис. грн./т) за несвоєчасну (із запізненням на один місяць) поставку кожної тонни концентрату. Значення коефіцієнта дорівнює 63 тис. грн./т.

Відповіді: 1.61 тис. грн./т. 2.63 тис. грн./т. 3.12 473 тис. грн. 4.3 т. 5.0 грн. 6.10 т. 7. 5210 тис. грн.

Тести для самоконтролю

1. Транспортна задача є частковим випадком задачі:
1) лінійного програмування;
2) регресійної;
3) статистичної;
4) імітаційної;
5)про призначення.

2. Розглядається відкрита транспортна задача, у якій сумарні запаси *M* постачальників більше, ніж сумарні потреби *N* споживачів. На скільки збільшиться число змінних задачі після приведення її до замкнутого виду? Варіанти відповідей:
2) на *N*; 2) на *M*; 3)на *N*+*M*; 4) на *N* · *M*; 5) залишиться без зміни.

3. Розглядається транспортна задача, сформульована як задача лінійного програмування. Обсяги перевезень виміряються в тоннах, значення цільової функції - у гривнях. У яких одиницях виміряється значення коефіцієнта цільової функції?
Варіанти відповідей: 1) грн.; 2) грн./т; 3) т/грн.; 4) т; 5) безрозмірна величина.

4. Розглядається відкрита транспортна задача, у якій сумарні запаси *M* постачальників менше, ніж сумарні потреби *N* споживачів. На скільки збільшиться число змінних задачі після приведення її до замкнутого виду? Варіанти відповідей:
1) на *N*; 2)на *M*; 3) на *N*+*M*; 4) на *N* · *M*; 5) залишиться без зміни.

5. У відкритій транспортній задачі:
1) величина сукупної пропозиції більше величини сукупного попиту;
2) величина сукупної пропозиції менше величини сукупного попиту;
3) величина сукупної пропозиції дорівнює величині сукупного попиту;
4) величина сукупної пропозиції не дорівнює величині сукупного попиту;
5) обмеження сформульовані у вигляді нерівностей.

Задачі для розв'язання

Задача 1. Фірма по прокату автомобілів «Золоте кільце» збирає заявки на оренду у всіх містах центра України. Клієнт має можливість одержати автомобіль у будь-якому зручному для нього населеному пункті й залишити його в будь-якому місці, де він закінчує подорож, у тому числі й у своєму рідному місті. Працівники фірми забирають залишені автомобілі й переганяють їх для передачі новим клієнтам.

Зараз 4 автомобілі компанії залишені в Миколаєві, 3 - у Черкасах, 6 -у Львові й 1 - у Сумах. Є замовлення на 5 автомобілів у Донецьку, на 3 автомобілі в Харкові й на 6 автомобілів у Києві. Відстані між містами (у км) наведені в наступній таблиці:

	Донецьк	*Харків*	*Київ*
Миколаїв	*611*	*556*	*490*

Черкаси	*547*	*420*	*190*
Львів	*1221*	*1028*	*550*
Суми	*706*	*190*	*346*

Складіть план, по якому варто переганяти автомобілі новим клієнтам. Орієнтуйтеся на мінімізацію відстані, що пройдуть усі автомобілі, що переганяють. Визначити: 1. Чому дорівнює мінімальна відстань, що повинні пройти всі автомобілі?
2. Скільки автомобілів варто перегнати в Київ з Львову?
3. На скільки збільшиться мінімальна відстань, що повинні пройти всі автомобілі, якщо додатково стало відомо, що ще один автомобіль залишений у Сумах й ще один клієнт з'явився у Києві?

Задача 2. Компанія «Затишок» робить пластмасові меблі для відпочинку на відкритому повітрі. Основний продукт компанії - стільці. Виробництво знаходиться в Донецьку, Харкові й Києві. Зараз на складі у Донецьку перебувають 7250 стільців, у Харкові - 10 150, у Києві - 4350. Основними споживачами продукції компанії «Затишок» є фірми із продажу у Миколаєві, Черкасах, Львові й Сумах. Зараз ці фірми готові закупити відповідно 8800, 5800, 2900 і 2100 стільців. Питомі витрати на перевезення стільців (у грн./шт.) зазначені в наступній таблиці:

	Донецьк	*Харків*	*Київ*
Миколаїв	*1,1*	*0,8*	*1,6*
Черкаси	*2,6*	*2,4*	*3,4*
Львів	*1,9*	*2,0*	*2,8*
Суми	*2,2*	*2,1*	*1,7*

Допоможіть компанії «Затишок» скласти план транспортування стільців споживачам. Визначити:
1. Чому рівні мінімальні витрати на перевезення всіх стільців?
2. Скільки стільців компанія повинна перевозити в Миколаїв з Києва?
3. Яка кількість стільців залишиться на складі у Києві?
4. Стало відомо, що для збуту в Миколаєві не годяться стільці, зроблені в Києві, а для збуту в Черкасах - стільці з Харкова. Не підходить колір стільців. Складіть новий план перевезень із урахуванням цих умов. На скільки гривень збільшаться при цьому сукупні транспортних витрат?

Задача 3. Компанія, що займається видобутком залізної руди, має чотири кар'єри C_1-C_4 (див. приклад 1). Продуктивність кар'єрів відповідно 170, 150, 190 і 200 тис. т щомісяця. Залізна руда направляється на три належні цієї компанії збагачувальні фабрики S_1 - S_3, потужності яких відповідно 250, 150 і 270 тис. т на місяць. Транспортні витрати (у тис. грн.) на перевезення 1 тис. т руди з кар'єрів на фабрики зазначені в наступній таблиці:

Кар'єри\Фабрика	S_1	S_2	S_3
C_1	*7*	*3*	*8*
C_2	*5*	*4*	*6*
C_3	*4*	*5*	*9*
C_4	*6*	*2*	*5*

Визначити план перевезень залізної руди на збагачувальні фабрики, що забезпечує мінімальні сукупні транспортні витрати.
1. Скільки руди варто перевозити з кар'єру C_1 на збагачувальну фабрику S_2?
2. Скільки руди варто перевозити з кар'єру C_4 на збагачувальну фабрику S_3?
3. Яка загальна мінімальна вартість перевезень?

4. Стало відомо, що поставки з кар'єру C_1 на збагачувальну фабрику S_2 потрібно обмежити обсягом 50 тис. т. До того ж через поганий стан дороги перевезення з кар'єру C_4 на збагачувальну фабрику S_3 неможливі. Визначити новий план перевезень, що враховує ці умови. На скільки зросте вартість перевезень?
5. Скільки руди варто перевозити з кар'єру C_4 на збагачувальну фабрику S_2 з урахуванням додаткової інформації?

Задача 4. Фірма «Чистюля» оцінила попит на вироблений нею лосьон для кожного із чотирьох наступних місяців: 100 ящиків у червні, 140 - у липні, 170 - у серпні й 90 - у вересні. Без використання понаднормового часу фірма може робити до 125 ящиків лосьона на місяць. У понаднормовий час може бути зроблене ще 25 ящиків на місяць, але виробництво кожного ящика обійдеться при цьому на 1 тис. грн. дорожче. Зберігання одного ящика протягом місяця обходиться в 100 грн. Використовуючи модель транспортної задача, потрібно визначити, скільки ящиків лосьона варто робити в кожний із цих місяців, щоб задовольнити попит з мінімальними сукупними витратами.

Визначити: 1. Скільки ящиків лосьона варто зробити в червні?
2. Скільки годин понаднормового часу варто використовувати у вересні?

Задача 5. Фірма хоче розробити план складання комп'ютерів. Прогноз попиту на комп'ютери для кожного кварталу наступного року показаний у таблиці:

Квартал	*Обсяг попиту*
I	*1000*
II	*700*
III	*3100*
IV	*2500*

При роботі в одну зміну фірма може кожний квартал збирати 1200 комп'ютерів. Витрати по складанню одного комп'ютера становлять 3 тис. грн. Якщо ввести другу зміну, то щокварталу можна збирати ще 800 комп'ютерів. Однак складання кожного комп'ютера в другу зміну обходяться дорожче - 4 тис. грн. Комп'ютер може бути зроблений в одному кварталі, а збут - у кожному з наступних кварталів. У цьому випадку зберігання кожного комп'ютера обходиться в 150 грн. за квартал. Складіть план виробництва, використовуючи модель транспортної задачі. Визначити:
1. Скільки комп'ютерів варто зібрати в першому кварталі, щоб задовольнити попит з мінімальними сукупними витратами?
2. На скільки відсотків варто використовувати потужності другої зміни в першому кварталі?
3. Скільки комп'ютерів варто зібрати в другому кварталі?
4. Скільки комп'ютерів варто зібрати в другому кварталі в другу зміну для збуту в третьому кварталі?
5. Які мінімальні витрати?

Тема 5. «Задача про призначення»

<u>**Мета:**</u> У процесі керування виробництвом найчастіше виникають задачі призначення виконавців на різні види робіт, наприклад: підбор кадрів і призначення кандидатів на вакантні посади, розподіл джерел капітальних вкладенні між різними проектами науково-технічного розвитку, розподіл екіпажів літаків між авіалініями.

Задачі про призначення можна сформулювати в такий спосіб. Необхідно виконати N різних робіт. Для їхнього виконання можна залучити N робітників. Кожний робітник за певну плату готовий виконати будь-яку роботу. Виконання будь-якої роботи варто доручити одному робітникові. Потрібно так розподілити роботи між робітниками, щоб загальні витрати на виконання всіх робіт були мінімальними.

Знання: моделі лінійного програмування (ЛП)

Уміння: визначати й використовувати для економічного аналізу: задача про призначення в стандартній формі; відкрита задача про призначення; таблицю задача про призначення; матрицю призначень; ефективність призначень.

Теоретичні відомості

Нехай *m* — кількість робіт.

Задача про призначення в стандартній формі. При розгляді задачі про призначення в стандартній формі передбачається, що кількість робітників *дорівнює* кількості робіт. Позначення:

c_{ij} — показник ефективності призначення і-*го* робітника на j-*й* роботі, наприклад витрати виконання і-*м* робітником *j-й* роботи;

x_{ij} — змінна моделі ($x_{ij} = 1$, якщо і-*й* робітник використовується на j-*й* роботі, і $x_{ij} = 0$ у противному випадку).

Модель задачі про призначення:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2а}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2б}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Де (1) — цільова функція (мінімум витрат на виконання всіх робіт); (2) - система обмежень, що відображає наступні умови: а) кожна робота повинна бути виконана одним робітником; б) кожний робітник може бути притягнутий до однієї роботи; (3) - умови незаперечності змінних. При рішенні задачі про призначення вихідною інформацією є таблиця задач про призначення c={c_{ij}}, елементами якої служать показники ефективності призначень. Для задачі про призначення, записаної в стандартній формі, кількість рядків цієї таблиці збігається з кількістю стовпців:

Робота / *Працівник*	*1*	*2*	...	*j*	...	*m*
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1m}
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
i	C_{11}	C_{i1}	...	C_{ij}	...	C_{im}
...	...	...	...	...	...	...
m	C_{m1}	C_{m1}	...	C_{mj}	...	C_{mm}

Результатом рішення задачі про призначення (1)—(3) є вектор $x^* = \{x_{ij}^*\}$, компоненти якого — цілі числа. Оптимальний план задачі про призначення (1)—(3) можна представити у вигляді квадратної матриці призначень, у кожному рядку й у кожному стовпці якої перебуває рівно одна одиниця. Таку матрицю іноді називають матрицею перестановок. Значення цільової функції (1), що відповідає оптимальному плану, називають *ефективністю призначень.*

Задача про призначення у відкритій формі. Задачі про призначення у відкритій формі виникають тоді, коли кількість робітників *не дорівнює* кількості робіт. У цих випадках задача може бути перетворена в задачу, сформульовану в стандартній формі.

Нехай, наприклад, кількість робітників n перевищує кількість робіт m. Введемо додаткові фіктивні роботи з індексами $j = w + 1,..., n$. Коефіцієнти таблиці призначень c_{ij} , $i = 1,..., n$; $j = m + 1,..., n$, покладемо рівними нулю. У цьому випадку одержуємо задачу, сформульовану в стандартній формі. Якщо в оптимальному плані цієї задачі x_{ij}^* = 1 при $j = m + 1,..., n$, то виконавець i призначається на виконання фіктивної роботи, тобто залишається без роботи. Помітимо, що оптимальне значення цільової функції вихідної задачі збігається з оптимальним значенням задачі, наведеної до стандартної форми. Тому ефективність призначень у результаті такого перетворення не змінюється.

Слід особливо зазначити, що задача про призначення є приватним випадком транспортної задачі, у якій кількість пунктів виробництва збігається з кількістю пунктів споживання, а всі величини попиту й величини пропозиції рівні.

Приклади

Приклад 1. *Розподіл робіт.*

Фірма одержала замовлення на розробку п'яти програмних продуктів. Для виконання цих замовлень вирішено залучити п'ятьох найбільш досвідчених програмістів. Кожний з них повинен написати одну програму. У наступній таблиці наведені оцінки часу (у днях), необхідного програмістам для виконання кожної із цих робіт:

Програміст\програма	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Іванов	*46*	*59*	*24*	*62*	*67*
Петров	*47*	*56*	*32*	*55*	*70*
Сідоров	*44*	*52*	*19*	*61*	*60*
Галкін	*47*	*59*	*17*	*64*	*73*
Окін	*43*	*65*	*20*	*60*	*75*

Оцінки були дані самими програмістами, і у фірми немає підстави їм не довіряти. Треба розподілити роботи між програмістами, щоб загальна кількість людино-днів, витрачена на виконання всіх п'яти замовлень, було мінімальним. Завдання:

1. Яка мінімальна кількість людино-днів необхідна для виконання всіх п'яти замовлень?
2. Яку програму варто доручити Сідорову?
3. Яку програму варто доручити Окіну?

Рішення. Таблиця задачі про призначення представлена в умові. Провівши розрахунки, одержуємо наступну матрицю призначень:

Програмувач\програма	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Іванов	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
Петров	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
Сідоров	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
Галкін	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
Окін	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*

З огляду на вихідну інформацію, одержуємо наступний результат:

Програмувач\програма	***Програма***	***Кількість людино-годин***
Іванов	*5*	*67*
Петров	*4*	*55*

Сідоров	*3*	*52*
Галкін	*2*	*17*
Окін	*1*	*43*
Разом		*234*

Відповіді: 1. 234 людино-днів. 2. Програму 2. 3. Програму 1.

Тести для самоконтролю

1. Задача про призначення ставиться до класу завдань:
1) лінійного програмування;
2) економетричних;
3) статистичних;
4) імітаційних;
5) не ставиться до жодного із зазначених класів.

2. Є дві роботи r_1, r_2, і два робітники L_1 , L_2, кожний з яких може виконати будь-яку роботу. Елемент a_{ij} матриці A показує час, необхідний робітникові i для виконання роботи j: Матриця А

Робітник\Робота	r_1	r_2
L_1	*4*	*5*
L_2	*6*	*6*

Розв’язати задачу про призначення. Чому дорівнює мінімальний час виконання двох робіт? Варіанти відповідей: 1) 9; 2) 10; 3) 11; 4) 12; 5)13.

3. Як відомо, задача про призначення є приватним випадком транспортної задачі. Яка з наведених нижче характеристик транспортної таблиці, побудованої для задачі про призначення, найбільш правильна? Варіанти відповідей:
1) обсяги споживання дорівнюють одиниці, обсягам поставок відмінних від одиниці;
2) обсяги поставок дорівнюють одиниці, обсягам споживання відмінні від одиниці;
3) матриця транспортних витрат квадратна, обсяги поставок відмінні від одиниці;
4) матриця транспортних витрат квадратна, обсяги споживання відмінні від одиниці;
5) матриця транспортних витрат прямокутна, обсяги поставок дорівнюють одиниці.

4. Оптимальний план задачі про призначення можна представити у вигляді:
1) квадратної матриці, у кожному рядку якої перебуває одна одиниця;
2) квадратної матриці, у кожному стовпці якої перебуває одна одиниця;
3) квадратної матриці, у кожному рядку й у кожному стовпці якої перебуває одна одиниця;
4) квадратної матриці, у кожному рядку якої перебуває хоча б одна одиниця;
5) квадратної матриці, у кожному стовпці якої перебуває хоча б одна одиниця.

5. Є дві роботи r_1, r_2 і троє робітників L_1, L_2 і L_3, кожний з яких може виконати будь-яку роботу. Елемент a_{ij} матриці A показує час, необхідний робітникові i для виконання роботи j: Матриця А

Робітник\Робота	r_1	r_2
L_1	*4*	*5*
L_2	*6*	*6*
L_3	*4*	*7*

Розв’язати задачу про призначення. Чому дорівнює мінімальний час виконання двох робіт? Варіанти відповідей: 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) 9.

Задачі для розв’язування

Задача 1. Цех металообробки одержав термінове замовлення на випуск партії деталей. Для виробництва деталі необхідно виконати операції на чотирьох верстатах. У цеху працюють чотири слюсарі високої кваліфікації, кожний з яких може працювати на будь-якому верстаті, але з різним відсотком браку (відсоток браку відомий з документації ВТК):

Робітник\Станок	*1*	*2*	*3*	*4*
1	*2,3*	*1,9*	*2,2*	*2,7*
2	*1,8*	*2,2*	*2,0*	*1,8*
3	*2,5*	*2,0*	*2,2*	*1,8*
4	*2,0*	*2,4*	*2,4*	*2,8*

Розподілити верстати між робітниками таким чином, щоб відсоток браку був мінімальним. (Передбачається, що ВТК перевіряє готову деталь, тобто загальний відсоток браку визначається як сума відсотків браку, допущеного всіма робітниками). Визначити: 1. На якому верстаті повинен працювати робітник 2?

2. Чому дорівнює мінімальний загальний відсоток браку?

Задача 2. Київська фірма по виробництву чоловічих головних уборів планує освоєння нових ринків збуту в п'яти містах. Можливості збуту невеликі, так що в кожне місто досить направити одного торговельного представника фірми для висновку з магазинами договорів про поставки. У наступній таблиці зазначений обсяг попиту (у млн грн.):

Місто	*Одеса*	*Харків*	*Житомир*	*Львів*	*Донецьк*
Обсяг попиту	*9*	*5*	*4*	*3*	*6*

Фірма має у своєму розпорядженні дані про професійні можливості шести своїх співробітників. У наступній таблиці втримуються оцінки ступеня освоєння ринку, що може забезпечити відповідний торгівельний представник фірми:

Представник	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$П_6$
Оцінка ступеню освоєння ринку	*0,7*	*0,6*	*0,5*	*0,8*	*0,4*	*0,5*

Так, представник $П_1$ може освоїти 70% від обсягу попиту в будь-якому місті. Наприклад, якщо направити його у Одессу, то дохід фірми на цьому ринку складе 6,3 млн грн. Розподілите торгоівельних агентів по містах таким чином, щоб фірма одержала максимальний дохід. Визначити:

1. Чому дорівнює максимальний дохід фірми?
2. У яке місто варто направити торговельного представника $П_1$?
3. Хто з торговельних представників не буде використаний?

Задача 3. Фірма одержала замовлення на розробку п'яти програмних продуктів. На фірмі працюють шість кваліфікованих програмістів, яким можна доручити виконання цих замовлень. Кожний з них дав оцінку часу (у днях), необхідного для розробки програм. Ці оцінки наведені в наступній таблиці:

програміст\програма	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Іванов	*46*	*59*	*24*	*62*	*67*
Петров	*47*	*56*	*32*	*55*	*70*
Сідоров	*44*	*52*	*19*	*61*	*60*
Галкін	*47*	*59*	*17*	*64*	*73*
Окін	*43*	*65*	*20*	*60*	*75*
Фокін	*41*	*53*	*28*	*54*	*68*

Виконання кожного з п'яти замовлень фірма вирішила доручити одному програмістові. Ясно, що один із програмістів не одержить замовлення. Кожному програмістові, якому буде доручене виконувати замовлення, фірма запропонувала плату 600 грн. у день. Розподілите роботу між програмістами, щоб загальні витрати на розробку програм були мінімальними. Визначити:

1. Чому рівні мінімальні витрати фірми на виконання всіх п'яти замовлень?

2. Яку програму варто доручити Сідорову?
3. Яку програму варто доручити Окіну?
4. Хто із програмістів не одержить замовлення?
5. Стало відомим, що не всі програмісти погодилися з умовами оплати, обґрунтовуючи це тим, що мають різну кваліфікацію. У результаті була досягнута домовленість про наступні розміри оплати в день (у грн.):

Програмувач	***Розмір оплати***
Іванов	*600*
Петров	*800*
Сідоров	*650*
Галкін	*800*
Окін	*650*
Фокін	*800*

Чи зміниться розподіл робіт між програмістами при нових умовах оплати праці? Які будуть у цьому випадку загальні мінімальні витрати? Хто із програмістів при нових умовах не одержить замовлення?

Задача 4. П'ять навчальних груп економічного факультету збираються відвідати під час практики 10 підприємстві й НДІ. Кожна навчальна група може відвідати дві організації. Шляхом опитування студентів виявлені переваги кожної групи для 10 організацій (1 означає «найбільш краща», а 10 - «найменш краща»). Переваги кожної з п'яти навчальних груп показані в таблиці (П-- промислові підприємства; НДІ- науково-дослідні інститути):

Організація\Група	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
П-1	*3*	*2*	*1*	*4*	*2*
П-2	*2*	*5*	*3*	*3*	*5*
П-3	*1*	*1*	*2*	*1*	*1*
П-4	*4*	*3*	*5*	*2*	*3*
П-5	*6*	*7*	*4*	*6*	*6*
НДІ-1	*7*	*4*	*8*	*7*	*4*
НДІ-2	*10*	*8*	*6*	*10*	*9*
НДІ-3	*5*	*6*	*7*	*5*	*10*
НДІ-4	*9*	*9*	*10*	*9*	*8*
НДІ-5	*8*	*10*	*9*	*8*	*7*

Визначите, які дві організації повинна відвідати кожна група, щоб у максимальному ступені були враховані переваги всіх студентів. Завдання:
1. Чому дорівнює сума балів, що відповідає найкращому розподілу груп по організаціях?
2. Яка група повинна відвідати НДІ-2?
3. Яку ще організацію повинна відвідати ця група?
4. Деканат вніс пропозицію, щоб кожна група відвідала одне підприємство й один НДІ. Укажіть тепер такий варіант розподілу, щоб кожній групі дісталося по одному промисловому підприємству й одному НДІ. Чому дорівнює сума оцінних балів у цьому випадку?
5. Яка група повинна відвідати НДІ-5 при нових умовах?
6. Яку ще організацію повинна відвідати ця група?

Задача 5. Літаки компанії «Днеправіа» літають між Сімферополем й Львовом. Графік руху показаний у наступній таблиці:

Сімферополь-Львів			*Львів-Сімферополь*		
№ рейса	*Час відправки*	*Час*	*№ рейса*	*Час відправки*	*Час*

		прибуття			*прибуття*
110	*6:00*	*9:00*	*210*	*7:00*	*10:00*
120	*8:00*	*11:00*	*220*	*10:00*	*13:00*
130	*12:00*	*15:00*	*230*	*13:00*	*16:00*
140	*15:00*	*17:00*	*240*	*16:00*	*19:00*
150	*19:00*	*22:00*	*250*	*21:00*	*24:00*
160	*23:00*	*2:00*	*260*	*0:00*	*3:00*

Рейси можуть обслуговуватися сімферопольським або львівським екіпажами. Будь-який екіпаж виконує пари рейсів - «туди й назад». Час, необхідне для підготовки літака до чергового рейсу, - одна година. Потрібно визначити, яку пару рейсів варто виконувати кожному екіпажу й з якого загону, сімферопольського або львівського, повинен бути відповідний екіпаж. Розподіл рейсів необхідно здійснити таким чином, щоб сумарний час очікування вильоту в «чужому» місті було мінімальним. Час очікування не включає ту годину, що йде на підготовку літака до чергового рейсу. Визначити:

1. Чи вірно, що рейс 210 повинен виконуватися сімферопольським екіпажем?
2. Чи вірно, що рейси 240 і 160 повинні виконуватися одним екіпажем?
3. Чи вірно, що рейс 160 повинен обслуговуватися львівським екіпажем?
4. Яке мінімальний загальний час перебування екіпажів в «чужих» містах?
5. Яку кількість рейсів повинні виконувати сімферопольські екіпажі?

Змістовний матеріал до практичного модулю 2

При вивченні цього розділу студент має відтворити засобами таблиць EXCEL загальний варіант – приклад розрахунку показників бізнес-плану. Зміст розрахунків відповідає методиці, яка наведена у конспекті лекцій.

З початку необхідно задати інтервал дискретизації розрахунків.Можна використовувати періоди, які прийняті у бухгалтерському обліку (місяць, квартал, піврічча, рік). У випадку, якщо проект дуже короткотривалий – по тижням, або навіть щоденно. Структура таблиці EXCELL (книга) добре підходить для проведення розрахунку бізнес плану. Для зручності розробки та друку бізнес плану показники різних стадій розвитку проекту та різні його аспекти розташовуються на різних аркушах книги. Перший аркуш зручно назваети «Вихідні дані». На нього виносяться усі базові числові значення, необхідні для розрахунку (назва, організаційна форма підприємства, константи - курс долара, ціни на пальне, тривалість та кіллкість змін, плановий обсяг виробництва продукції, ставки податків, тарифи та т.і.). Оскільки спочатку неможна встановити повний перелік висхідних параметрів, зрозуміло, що інформація на цій сторінці буде поповнюватися в ході обчислень.

Побудована таким чином розрахункова система, дозволяє моделювати різні комбінації економічних показників, оцінювати ризики, вплив змін показників ринку, законодавчих обмежень та т.і. Примірний склад висхідних даних наведено в Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 Вихідні дані бізнес-плану створення підприємства з виробництва хлебобулочних виробів

Организационная форма предприятия-ЧП

№ п/п	Наименование параметра	Значення	Од. виміру
1.	Среднее число рабочих дней в месяце	30	днів
2.	Количество часов в смене	8	годин
3.	Коэффициент сменности	3	
4.	Процент банковского кредитования	12	%
5.	Курс доллара на дату реализации начала проекта	8	
6.	Мин. з/п	815	грн
7.	Площадь производственного помещения	300	м. кв.
8.	Цена за 1 м кв.	500	дол. США
9.	Процент затрат на капитальный ремонт помещения	20	%
10.	Стоимость проекта размещения технологического оборудования	50000	грн
11.	Сопутствующие проекты (подкл. к коммуникациям)	30000	грн
12.	Розничная наценка	20	%
13.	Оптовая наценка	30	%
14.	Плановый объем производства		
	Хлеб белый обеденный	2400	шт. /добу
	Хлеб черный "Бородинский"	2400	шт. /добу
	Батон белый нарезной	3600	шт. /добу
	Рогалик	10000	шт. /добу
	Бублик с маком	12000	шт. /добу
	Плетёнка	1200	шт. /добу
15.	Процент начисления на з.п	35	%
	Схема инвестирования		
	Собственные средства	500000	грн
	Банковский кредит под залог ОС на условиях поручительства третей стороны. В качестве поручителя привлекается действующее предприятие стабильный доход которого обесечивает погашение платежей по выбранной схеме финансирования		

На другій сторінці розміщується план-графік, який дозволяє узгодити дії та заходи у часі. Він оформлюється у вигляді таблиці, де період реалізації заходу відмічається штриховкою або іншим кольором. Вигляд план-графіка наведено в Таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 План-графік заходів

№ п/п	Название мероприятия	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Подбор подходящего помещения												
2.	Выкуп помещения												
3.	Подбор директора, охраника, кладовщика												
4.	Кап. Ремонт помещения, подводка коммуникаций												

	(электричество, газ)												
5.	Разработка проекта размещения технологического оборудования												
6.	Сопутствующие проекты (подкл. к коммуникациям)												
7.	Транспортные подъезды, парковки, вывоз мусора, озеленение, зона отдыха персонала												
8.	Закупка технологического оборудования												
9.	Монтаж технологического оборудования												
10.	Получение разрешения на хоз. деятельность												
11.	Соласование СЭС												
12.	Согласование пожарная служба												
13.	Согласование охрана труда												
14.	Формирование штата предприятия, приём на работу специалистов												
15.	Пробный запуск технологической линии и отработка производственного цикла												
16.	Закупка 1-й партии сырья для производства												
17.	Формирование рецептуры и ассортимента изделий												
18.	Сертефикация продукции на соответсвие требованиям ГОСТ												
19.	Разработка маркетинговой стратегии реализации продукции												
20.	Проведение стартовых рекламных мероприятий												
21.	Организация транспортной сети												
22.	Оганизация торгово-розничной сети												
23.	Комплектация персонала торговых точек												
24.	Начало стабильной производственной деятельности												

25.	Выход на плановый объем производства													

На третьому листі можна встановити обсяг витрат на створення матеріальної бази підприємства, зібрані у таблиці зворотніх та незворотніх вітрат. Перелік витрат узгоджують із заходами план-графіка. В таблицах витрат вводиться стовпчик ціни, а також вертикальні підсумков стовпці та горизонтальні ітогові рядки. В колонці ІТОГО розраховуються сумарні витрати за кожною статтєю. В рядку ІТОГО розраховуються сумарні витрати по кожному місяцю. Приклади наведено в Таблицях 2.3 та 2.4.

До табл. ***Зворотні витрати*** заносяться витрати на закупівлю обладнання та нерухомості, які можна буде продати у випадку відмови від реалізації проекту. В табл. ***Незворотні витрати*** заносяться витрати на проектування, оренду, ремонт та інші витрати які у випадку відмови від реалізації проекту, компенсовані не будуть.

Наступні дві сторінки відведені для розрахунку показників плана виробництва на різних етапах розвитку бізнес проекту. Перша – таблиця 2.5 «Номенклатура товарів та послуг» або «Асортимент продукції». В ній необхідно указати перелік товарів та послуг, які виробляє підприємство. В наступній таблиці розраховується собівартість продукції. Це можна робити або методом оцінки витрат (встановлюються норми ресурсов на виробництво одиниці виробів кожного виду - сировина, матіриалі, комплектуючі, робочий час, амортизація технологічного обладнання, накладні витрати), однак такий метод не є еффективним до виходу підприємства на плановий обсяг виробництва. Є різні підходи для розрахунку собівартості. У випадку розрахунку спрощеного бізнес-плану можна застосувати спрощенную схему, коли на основі средньогалузевих показників приймають усреднену норму затрат у % від вартості продукции або від вартості сировини та матеріалів. Приклад спрощеного варіанту встановлення собівартості, оптової та роздрібної ціни по всьому ассортименту наведено в Таблиці 5.

Наступним кроком необхідно задати план виробництва по месяцям та розрахувати планові значення виробничих виатрат та валового доходу (Таблиці 2.6, 2.7, 2.8). Перша з них є Таблица обсягу випуску продукції у фізичних одиницях помісячно. Далі розраховується вже грошовий еквівалент витрат та надходжень. Для виробництва витрати необхідно розділити на постійні та змінні. Доля постійних витрат у собівартості продукції буде зменшуватися по мері роста обсягу виробництва.

Таблица 2.3 Зворотні витрати

№ п/п	Вид расходов	Цена	Месяцы												
			окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен	всего
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1.	Выкуп помещения	1200000	1												1200000
2.	Закупка газовой печи	500000		1											500000
3.	Тестомесилка	80000		3											240000
4.	транспортер	50000		1											50000
5.	лотки для хлеба	100			100	50									15000
6.	стелажи для лотков	400			20	10									12000
7.	морозильная камера	200000		1											200000
8.	бытовой холодильник	2000			2										4000
9.	ручной инструмент (комплект)	10000		1											10000
10.	Закупка прилавков для торговых точек	400			10				5		5				8000
11.	Кассовые аппараты	400			10				5		5				8000
12.	Стелажи на торговую точку	500			20				10		10				20000
		всего	1200000	1000000	40000	9000	0	0	9000	0	9000	0	0	0	2267000

Таблица 2.4 Незворотні витрати

№ п/п	Вид расходов	Цена	Месяцы												
			окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен	всего
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1.	Трансп. Расх. на поиск помещения	500	1												500
2.	Кап. ремонт и переоб. помещ.	240000		0,5	0,5										240000
3.	Разр. проекта разм. техн. обор.	50000		1											50000
4.	Сопут. проекты (подкл. к коммун.)	30000		1											30000
5.	Монтаж обор.	50000				1									50000
6.	Получ. разр. на хоз. деят.	3000					1								3000
7.	Сол. СЭС	2000			1										2000
8.	Согл. пож. служба	2000			1										2000
9.	Согл. Охр. труда	10000					1								10000
10.	Форм. рецепт. и ассорт. изд.	10000	0,25	0,25	0,25	0,25									10000
11.	Серт. прод. на соотв. треб. ГОСТ	40000					0,5	0,5							40000
12.	Разр. марк. страт. реализ. прод.	5000				0,25	0,25	0,5							5000
13.	Телевизионная реклама	20000					1								20000
14.	Флаера	10000					0,5	0,5							10000
		всего	3000	202500	126500	53750	59250	27500	0	0	0	0	0	0	472500

Таблица 2.5 Асортимент виробів

№ п/п	Наименование изделия	себестоимость	оптовая цена	розничная цена
1.	Хлеб белый обеденный	2,38	3,40	4,25
2.	Хлеб черный "Бородинский"	2,13	3,04	3,80
3.	Батон белый нарезной	1,79	2,56	3,20
4.	Рогалик	0,84	1,20	1,50
5.	Бублик с маком	0,70	1,00	1,25
6.	Плетёнка	3,44	4,92	6,15

Таблица 2.6 План виробництва

№ п/п	Наименование продукции	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Хлеб белый обеденный						18000	36000	54000	64800	72000	72000	72000
2.	Хлеб черный "Бородинский"						18000	36000	54000	64800	72000	72000	72000
3.	Батон белый нарезной						27000	54000	81000	97200	108000	108000	108000
4.	Рогалик						75000	150000	225000	270000	300000	300000	300000
5.	Бублик с маком						90000	180000	270000	324000	360000	360000	360000
6.	Плетёнка						9000	18000	27000	32400	36000	36000	36000

Таблица 2.7 Виробничі витрти (змінні без оплати праці)

№ п/п	Наименование продукции	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	Мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Хлеб белый обеденный	0	0	0	0	0	42 840	85 680	128 520	154 224	171 360	171 360	171 360
2.	Хлеб черный "Бородинский"	0	0	0	0	0	38 304	76 608	114 912	137 894	153 216	153 216	153 216
3.	Батон белый нарезной	0	0	0	0	0	48 384	96 768	145 152	174 182	193 536	193 536	193 536
4.	Рогалик	0	0	0	0	0	63 000	126 000	189 000	226 800	252 000	252 000	252 000
5.	Бублик с маком	0	0	0	0	0	63 000	126 000	189 000	226 800	252 000	252 000	252 000
6.	Плетёнка	0	0	0	0	0	30 996	61 992	92 988	111 586	123 984	123 984	123 984
	Итого	0	0	0	0	0	286 524	573 048	859 572	1 031 486	1 146 096	1 146 096	1 146 096

Таблица 2.8 Валовой доход

№ п/п	Наименование продукции	окт 1	ноя 2	дек 3	янв 4	фев 5	мар 6	апр 7	май 8	июн 9	июл 10	авг 11	сен 12
		Месяцы											
1.	Хлеб белый обеденный	0	0	0	0	0	76 500	153 000	229 500	275 400	306 000	306 000	306 000
2.	Хлеб черный "Бородинский"	0	0	0	0	0	68 400	136 800	205 200	246 240	273 600	273 600	273 600
3.	Батон белый нарезной	0	0	0	0	0	86 400	172 800	259 200	311 040	345 600	345 600	345 600
4.	Рогалик	0	0	0	0	0	112 500	225 000	337 500	405 000	450 000	450 000	450 000
5.	Бублик с маком	0	0	0	0	0	112 500	225 000	337 500	405 000	450 000	450 000	450 000
6.	Плетёнка	0	0	0	0	0	55 350	110 700	166 050	199 260	221 400	221 400	221 400
	Итого	0	0	0	0	0	511 650	1 023 300	1 534 950	1 841 940	2 046 600	2 046 600	2 046 600

Таблица 2.9 Постійні витрати, види

№ п/п	Вид расходов	окт 1	ноя 2	дек 3	янв 4	фев 5	мар 6	апр 7	май 8	июн 9	июл 10	авг 11	сен 12
		Месяцы											
1.	Освещение территории		0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	1	1
2.	Пульт централизованной охраны			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3.	Офисные расходы		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4.	Доступ к Internet		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5.	Телефонная связь		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 2.10 Суми постійних витрат

№ п/п	Вид расходов	Цена	окт 1	ноя 2	дек 3	янв 4	фев 5	мар 6	апр 7	май 8	июн 9	июл 10	авг 11	сен 12
			Месяцы											
1.	Освещение территории	1000	0	500	500	500	500	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
2.	Пульт централизованной охраны	200	0	0	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
3.	Офисные расходы	300	0	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300
4.	Доступ к Internet	100	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
5.	Телефонная связь	600	0	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600
	Итого		0	1500	1700	1700	1700	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200

Значения витрат у Таблицях 2.7 та 2.8 отримуємо множенням кількості даного товару або послуги у місяці на роздрібну ціну та себівартість відповідно.

Постійні витрати розраховуються у таблицях 2.9 та 2.10. В першій вони представлені у фізичному вигляді, у другій – у грошовому еквіваленті.

Наступним етапом встановлюються витрати на персонал. Таблиця 2.11 показує штатний розклад (перелік посад, умови та размер оплати праці). Таблиця 2.12 - потребу у штатных одиницях помісячно. В таблице 13 - «Витрати на персонал», значення розраховують множенням кількості одиниць на ставку. Внизу таблиці вводится стрічка УСЬОГО, де підсумовується помісячно обсяг витрат на персонал. В цій таблиці зручно також розрахувати розмір нарахувань на зарабітну плату та загальну суму витрат на персонал з урахуванням нарахувань на зарабітну плату.

Таблиця 2.11 Перелік штатних одиниць

№ п/п	Наименование должности	Вид оплаты	Тариф	Ед. изм.
1	Директор	ставка	4000	грн./мес.
2	Кладовщик	ставка	2500	грн./мес.
3	Бухгалтер	ставка	3000	грн./мес.
4	Технолог	ставка	3000	грн./мес.
5	Охранник	почасовая	10	грн./час.
6	Пекарь	ставка	2700	грн./мес.
7	Грузчик	ставка	2000	грн./мес.
8	Уборщица	ставка	1500	грн./мес.
9	Реализатор	ставка	2500	грн./мес.

Запролпонована система таблиц дощволяє розрахувати показники бізнес плану на периоді створення виробничої бази підприємства, його виходу на точку беззбитковості, а потім на планові показники виробництва деятельности. Витрати на персонал можно відности як до постійних, ьак і до змінних витрат залежно від системи оплати праці (ставка, преміальна або пропорційна оплата), однак в наведеному прикладі вони враховуються окремо. Окремий розрахунок витрат на персонал дає додаткові переваги при подальших обчисленнях, когда треба врахувати вплив податків. Крім того, это дає можливість анализу структури виатрат при реализації бізнес проекту.

Таблиця 2.12 Потреба у персоналі

№ п/п	Должность	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Директор	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	Кладовщик		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	Бухгалтер				1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	Технолог			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	Охранник		480	480	480	720	1440	1440	1440	1440	1440	1440	1440
6	Пекарь			1	2	4	8	8	8	8	8	8	8
7	Грузчик		2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4
8	Уборщица		1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
9	Реализатор						20	30	30	40	40	40	40

Таблица 2.13 Расходы на персонал

№ п/п	Должность	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Директор	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000
2	Кладовщик	0	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500
3	Бухгалтер	0	0	0	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
4	Технолог	0	0	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
5	Охранник	0	4800	4800	4800	7200	14400	14400	14400	14400	14400	14400	14400
6	Пекарь	0	0	2700	5400	10800	21600	21600	21600	21600	21600	21600	21600
7	Грузчик	0	4000	4000	4000	4000	8000	8000	8000	8000	8000	8000	8000
8	Уборщица	0	1500	1500	1500	1500	3000	3000	3000	3000	3000	3000	3000
9	Реализатор	0	0	0	0	0	50000	75000	75000	100000	100000	100000	100000
	Всего	4000	16800	22500	28200	36000	109500	134500	134500	159500	159500	159500	159500
	Начисления	1400	5880	7875	9870	12600	38325	47075	47075	55825	55825	55825	55825
	Всего с начислениями	5400	22680	30375	38070	48600	147825	181575	181575	215325	215325	215325	215325

Таблица 2.14

№ п/п	Вид расхода	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	Валовый доход	0	0	0	0	0	511 650	1 023 300	1 534 950	1 841 940	2 046 600	2 046 600	2 046 600
2.	Постоянные расходы	0	1 500	1 700	1 700	1 700	2 200	2 200	2 200	2 200	2 200	2 200	2 200
3.	Переменные расходы	0	0	0	0	0	286 524	573 048	859 572	1 031 486	1 146 096	1 146 096	1 146 096
4.	Стартовые расходы	1 203 000	1 202 500	166 500	62 750	59 250	27 500	9 000	0	9 000	0	0	0
5.	Расход на персонал	5 400	22 680	30 375	38 070	48 600	147 825	181 575	181 575	215 325	215 325	215 325	215 325
	Всего	-1 208 400	-1 226 680	-198 575	-102 520	-109 550	47 601	257 477	491 603	583 929	682 979	682 979	682 979
	Всего накопительно	-1 208 400	-2 435 080	-2 633 655	-2 736 175	-2 845 725	-2 798 124	-2 540 647	-2 049 044	-1 465 115	-782 136	-99 157	583 822

На наступному етапі переходимо до складання фінансового балансу проекту за один чи два перших роки його реалізації. В таблицю вносять підсумкові строки помісячних розрахунків за усіма видами витрат та доходів (Таблица 14). В ітоговому рядку ***Валовой доход*** враховується із знаклм «+», Усі витрати – із знаком «-», та отримуємо значення балансу помісячно. Для розрахунку загального балансу проекта додаємо строку ***Всего накопительно***.

Всего накопительного = Всего + каждый месяц (помесячно)

За даними цієї строки створюється діаграмма або графік, яка дозволяє оцінити параметры бізнес проекту (Рис. 1).

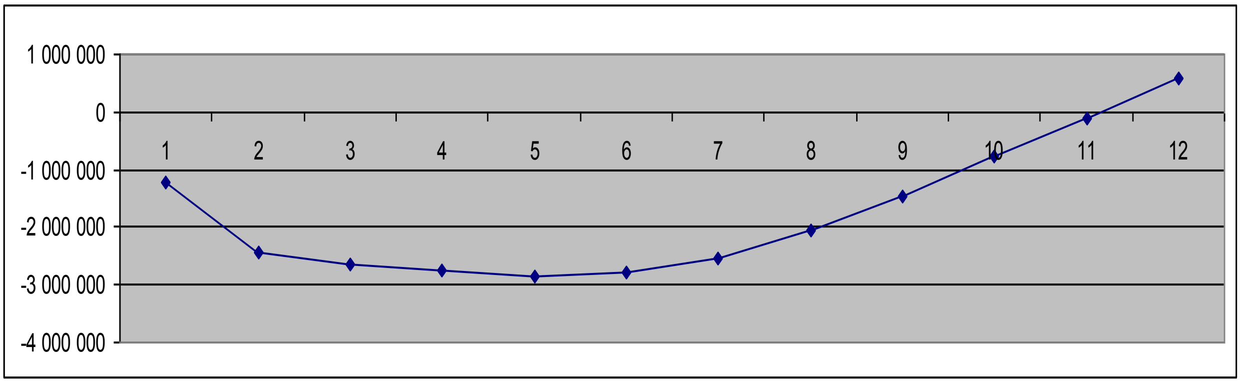


Рис. 1

Аналізуючи графік проводимо первинну оцінку привабливості проекту та реальності закладених в основу розрахунків показників. Виходячи зі значень у балансовій таблиці та вигляду графіку оцінюємо основні фінансові параметри проекту – обсяг фінансування, строк вихода на точку беззбитковості, срок повернення інвестицій та деякі інші.

На наступному етапі формируємо модель фінансування проекту, враховуючи обрані джерела залучення коштів, схему інвестування, потребу у кредитах, модель кредитування та враховуємо, повязані з цим, додаткові витрати. Класичною схемою кредитування створення виробництва є кредит на 3-5 років у формі кредитної лінії з відстрочкою погашення суми кредиту (звичайно від 6 до 12 місяців - на період выхода на точку беззбитковості, с коефіцієнтом запасу 25%). В такому випадку встановлюють ліміт кредитної лінії, в размері необхідного обсягу фінансування (може прийматися запас 25-30 % від розрахункового обсягу). Схематично це показано на Рисунку 2.2.

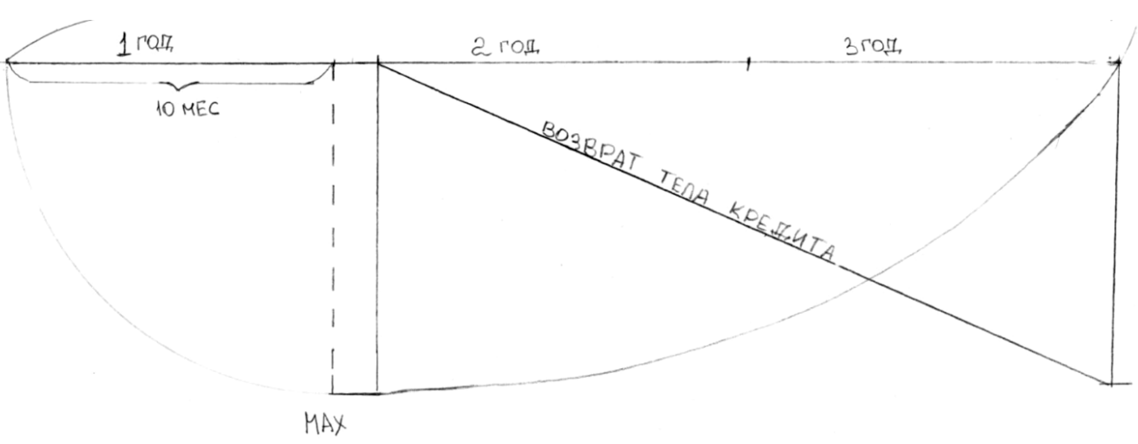


Рис 2.2

Попередню оцінку витрат, повязаних із залученням зовнішнього кредиту можна провести окремо, розрахувавши схему повернення кредиту (Таблица 2.15).

Таблица 2.15 Схема кредитування

Месяц	Сумма инвести-рования	Сумма кредита	Выплата %	Возврат суммы кредита	Суммарный месячный платёж
1	1 208 400	708 400			0
2	1 226 680	1 935 080	7084		7084
3	198 575	2 126 571	19351		19351
4	102 520	2 229 091	21266		21266
5	109 550	2 338 641	22291		22291
6	0	2 338 641	23386		23386
7	0	2 338 641	23386		23386
8	0	2 338 641	23386		23386
9	0	2 338 641	23386		23386
10	0	2 338 641	23386		23386
11	0	2 338 641	23386		23386
12	0	2 338 641	23386		23386
1		2 338 641	23386	194887	218273
2		2 143 754	23386	194887	218273
3		1 948 868	21438	194887	216324
4		1 753 981	19489	194887	214375
5		1 559 094	17540	194887	212427
6		1 364 207	15591	194887	210478
7		1 169 321	13642	194887	208529
8		974 434	11693	194887	206580
9		779 547	9744	194887	204631
10		584 660	7795	194887	202682
11		389 774	5847	194887	200733
12		194 887	3898	194887	198784
		0	1949		1949

Расходы на кредит 409094

З аданими таблиці важливо оцінити максимальний розмір місячного платежу та порівняти його із сумою доходу за відповідний місяць. Якщо сума платежу перевищує запланований доход – така схема кредитування непрйнятна.

Можна також проводити дисконтування вкладених коштів. Це дозволяє оцінити недоотриманий прибуток внаслідок того, що кошти, витрачені на інвестування, могли бути розміщені на банківському рахунку.

Фінальний розрахунок показників бізнес плану проводится шляхом створення уточненої ***Ітоговой таблиці***, Для цього вводимо наступні строки:

- Помісячна потреба в інвестиційних коштах;
- Помісячні витрати на выплату відсотків по кредиту;
- Помісячні витрати на повернення тіла кредиту;
- Помісячний обсяг зобовязань по кредиту.

Спрощений варіант без дисконтирования наведено в Таблиці 2.16, а новий графік на Рисунку 2.3. Далі необхідно урахувати витрати на оподаткування (Таблиця 2.17.

Таблица 15 Баланс с учетом схемы инвестирования

№ п/п	Вид расхода	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Собственные средства	500000											
2	Валовый доход	0	0	0	0	0	511650	1023300	1534950	1841940	2046600	2046600	2046600
3	Постоянные расходы	0	1500	1700	1700	1700	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200
4	Переменные расходы	0	0	0	0	0	286524	573048	859572	1031486	1146096	1146096	1146096
5	Стартовые расходы	1203000	1202500	166500	62750	59250	27500	9000	0	9000	0	0	0
6	Расход на персонал	5400	22680	30375	38070	48600	147825	181575	181575	215325	215325	215325	215325
	Всего	-1208400	-1233764	-217997	-124122	-132393	23434	233310	467436	559762	658812	658812	658812
	Инвестирование	708400	1233764	217997	124122	132393	0	0	0	0	0	0	0
	Сумма кредита	708400	1942164	2160161	2284282	2416675	2416675	2416675	2416675	2416675	2416675	2416675	2416675
	проценты		7084	19422	21602	22843	24167	24167	24167	24167	24167	24167	24167
	возврат												
	Всего накопительно	-1208400	-2442164	-2660161	-2784282	-2916675	-2893241	-2659931	-2192494	-1632732	-973920	-315108	343704

№ п/п	Вид расхода	Месяцы											
		окт	ноя	дек	янв	фев	мар	апр	май	июн	июл	авг	сен
		13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	Собственные средства												
2	Валовый доход	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600	2046600
3	Постоянные расходы	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200	2200
4	Переменные расходы	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096	1146096
5	Стартовые расходы	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	Расход на персонал	215325	215325	215325	215325	215325	215325	215325	215325	215325	215325	215325	215325
	Всего	457423	457423	459437	461450	463464	465478	467492	469506	471520	473534	475548	477562
	Инвестирование	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Сумма кредита	2416675	2215285	2013896	1812506	1611117	1409727	1208338	1006948	805558	604169	402779	201390
	проценты	24167	24167	22153	20139	18125	16111	14097	12083	10069	8056	6042	4028
	возврат	201390	201390	201390	201390	201390	201390	201390	201390	201390	201390	201390	201390
	Всего накопительно	801127	1258550	1717986	2179437	2642901	3108379	3575871	4045377	4516897	4990431	5465979	5 943 540

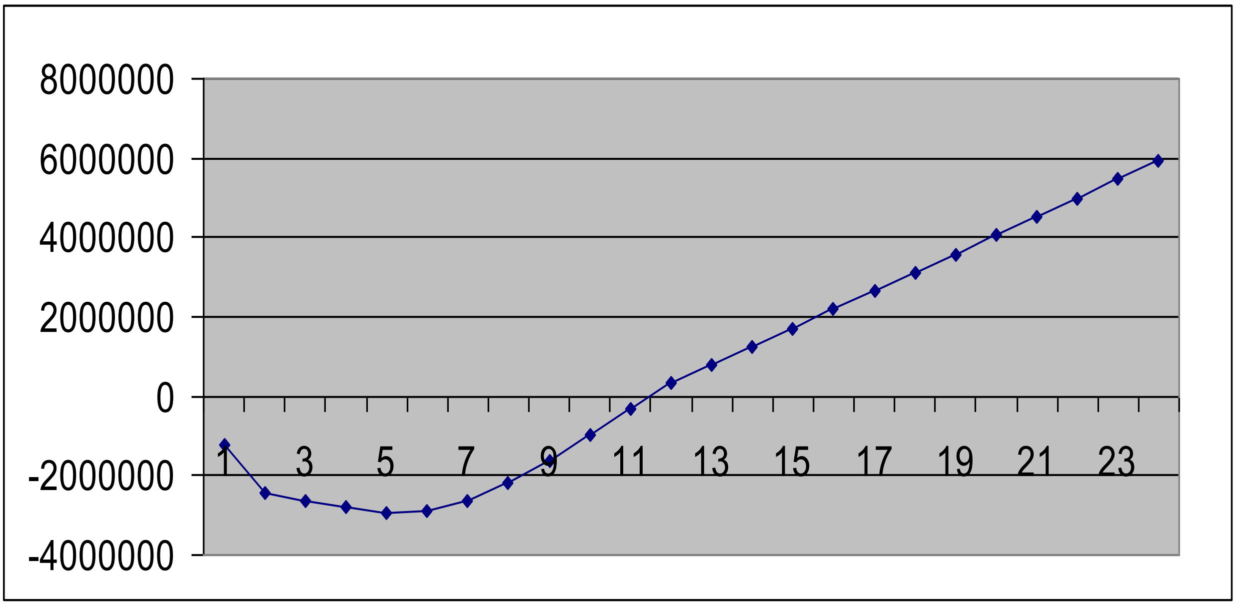


Рис 2.3

Урахування оподаткування..Податки можно разділити на три групи.:
- Податки на фонд зарабітньої плати (нарахування, вже встановлені при розрахунку витрат на персонал);
- ПДВ;
- Податок на прибуток.

Для розрахунку аитрат на сплату ПДВ та податку на прибуток необхідно визначити базу оподаткування та відслежувати помісячно розмір податкового кредиту ПДВ.

ПДВ. Згідно Податкового Кодексу в Україні цей податок розраховується за підсумками кожного місяця. ПДВ нараховується на суму валового доходу, однак його розмір зменьшується на суму податкового кредиту за 12 попередніх місяців. При створенні нового піприємства до початку виробничої діяльності є можливість накопичити значний кредит по ПДВ. При розрахунку БП з самого початку необхідно вфдстежувати розмір цього кредиту.

У розрахунок включається сторінка «Розрахунок ПДВ», на якій щомісячно відображається динаміка змін розміру кредиту по ПДВ, і виникнення зобов'язань по погашенню ПДВ у рахунок держави. Ставка ПДВ становить 20%, це означає, що 1/6 всіх витрат крім фонду оплати праці зараховується в збільшення кредиту по ПДВ. Після початку виробничої діяльності підприємства, 1/6 валового доходу, отриманого від цієї діяльності зараховується в поточні зобов'язання підприємства по оплаті ПДВ. Оскільки сума виникаючих зобов'язань по оплаті ПДВ у стабільно функціонуючого підприємства завжди перевищує обсяг одержуваного їм податкового кредиту по ПДВ, у плині деякого періоду відбувається погашення накопиченого за час створення виробничої бази підприємства кредиту. Після цього щомісяця підприємство повинне оплачувати на відповідні рахунки сум різниці між податковими зобов'язаннями й податковим кредитом по ПДВ за минулий місяць. Дані платежі ставляться до витрат.

Податок на прибуток. Нараховується й оплачується поквартально. У зв'язку з тим, що фінансовий і бухгалтерський облік по різному розглядають різні витрати, необхідно з моменту початку діяльності підприємства відслідковувати поквартальний баланс. Нарахування прибутку провадиться відповідно до правил бухгалтерського обліку. Згідно із цими правилами внесення фінансових коштів на рахунок підприємства засновниками розглядається як доход, якщо це поворотна фінансова допомога й не розглядається як доход, якщо це внесок у рахунок виплати статутного фонду. Витрата грошей на закупівлю основних засобів виробництва (земля, будинки, устаткування) не є розходом. Одержання кредиту в банку не є доходом, а його повернення не є витратою. Виплата відсотків по кредиту є витратою.

Для розрахунку ставки податку на прибуток у таблиці «Податок на прибуток» поквартально розраховується база оподатковування й обчислюється ставка податку. У балансовій таблиці розрахунку показників бізнес проекту податок на прибуток ставиться до витрат. Для обчислення показників бізнес проекту з урахуванням податків будується ще одна балансова таблиця, що відрізняється від попередніх тем, що в неї додаються рядки витрат на оплату ПДВ і податку на прибуток з відповідних таблиць. Окремо фіксується стан розрахункового рахунку підприємства, на якому не повинен виходити негативний баланс.

Після завершення розрахунку бізнес плану провадиться аналіз отриманих економічних показників і дається висновок про перспективність запропонованого проекту.

Список рекомендованої літератури до Модулю 2

1. Абдикеев Н.М., Данько Т.П., Ильдеменов С.В., Виселев А.Д. – Реинжиниринг бизнес-процессов. – М.: Изд-во Эксмо, 2005. – 592 с.
2. Барроу К., Барроу П., Браун Р. – Бізнес-план: Практ. Посіб.: Пер. З 4-го англ. Вид. – К.: Т-во «Знання», КОО, 2005. – 434 с.
3. Бизнес-планы. Полное справочное руководство/Под ред. И.М. Степнова – М.:Лаборатория базовых знаний, 2001.-240 с.: - ил.
4. Фінансова діяльність підприємства: Підручник /Бандурка О.М., Коробов М.Я., Орлов П.І.- К.: Либідь, 2003.-384с.
5. Калянов Г.Н. – CASE-технологии. Консалтинг в автоматизации бизнес-процессов. – 3-е изд. – М.: Горячая линия-Телеком, 2002. – 320 с.
6. Кучеренко В.Р., Карпов В.А., Маркитан О.С. Бізнес-планування фірми: навч. Посіб. – К.: Знання, 2006. – 423 с.
7. Ушаков И.И. – Бизнес-план. СПб.: Питер, 2008. – 224 с.
8. Скворцов М.Н. Бізнес-план підприємства –К.: Вища шк., 1995
9. Финансовый менеджмент. Учебник под ред. Е.С. Стояновой. Изд. 5. – М.: Перспектива.- 2000.

Змістовний матеріал до практичного модулю 3

При вивченні практичного змістовного модулю необхідно опанувати методи моделювання господарської діяльності в моделях екосистем та методи урахування екологічних факторів в економічних моделях та застосування методів екологічної та біологічної аналогії. Цей метод є одним з напрямків дослідження динамічних соціально-економічних процесів. Існують соціально-економічні й екологічні процеси, які формально описувалися тими самими або близькими математичними моделями. Використання аналогії носить елемент наочності.

Тема 1. Модель Мальтуса

Модель росту чисельності популяції. Однієї з найпростіших моделей класичної екології є модель росту чисельності популяції при надлишку їжі й відсутності інших обмежуючих факторів, описувана диференціальним рівнянням експонентного росту.

Народжуваність характеризує частоту появи нових особин у популяції. Розрізняють народжуваність абсолютну й питому. *Абсолютна народжуваність* – число особин, що з'явилися в популяції за одиницю часу. *Питома народжуваність* виражається в відношенні числа нероджених особин на одну існуючу особину в одиницю часу. Наприклад, для популяції людини як показник питомої народжуваності звичайно використають число дітей, що народилися в рік на 1000 осіб. *Смертність (абсолютна і питома)* характеризує швидкість убування чисельності популяції, внаслідок загибелі особин від хижаків, хвороб, старості й т.д.

Використовуючи такі параметри моделі зміни чисельності популяції, Томас **Мальтус** (1766–1834) сформулював експонентну модель. У книзі «Про ріст народонаселення» Мальтус опублікував в 1798 р. результати своїх досліджень, заснованих на даних про ріст населення в американських колоніях. Уведемо позначення:

$N(t)$ – чисельність популяції в момент часу t;

$\frac{dN}{dt}$ – швидкість росту чисельності популяції;

A – число особин у популяції, що народжуються в одиницю часу;

B – число особин у популяції, що вмирають в одиницю часу.

Тоді швидкість росту чисельності популяції буде дорівнює: $\frac{dN}{dt} = A - B$, де $A = a \cdot N$ (a – коефіцієнт природної народжуваності) і $B = b \cdot N$ (b – коефіцієнт природної смертності), і a, b – позитивні константи. З огляду на це, запишемо швидкість росту чисельності популяції як $\frac{dN}{dt} = N \cdot (a - b)$.

Якщо різницю між природною народжуваністю й природною смертністю позначити за r, тобто $r = a - b$, те вираження прийме наступний вид:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \quad . \tag{1.1}$$

Дане рівняння і є ***модель Мальтуса***, де *r* – коефіцієнт приросту чисельності популяції, або *мальтузіанський коефіцієнт.*

Для дослідження даної моделі необхідно вирішити наведене диференціальне рівняння.

Зробимо поділ змінних: $\frac{dN}{N} = r \cdot dt$. Проинтегрируем: $\int \frac{dN}{N} = r \int dt =\ >$ $\ln N = r \cdot t + c$.

При $t = t_0$ й $N = N_0$ => $\ln N_0 = r \cdot t_0 + c$. Виразимо константу: $c = \ln N_0 - r \cdot t_0$ і підставимо: $\ln N = r \cdot t + \ln N_0 - r \cdot t_0$.

Провівши наступні перетворення: $\ln \frac{N}{N_0} = r \cdot (t - t_0)$ => $\ell^{r(t-t_0)} = \frac{N}{N_0}$, одержимо рішення диференціального рівняння (1.1) $N(t) = N_0 \cdot \ell^{r(t-t_0)}$.

Графічне подання знайденого рішення наведене на мал. 1.1.

У літературі приводиться багато прикладів швидкого росту чисельності популяцій (найпростіші й т.д.). На коротких проміжках часу ця модель добре описує динаміку цих популяцій.

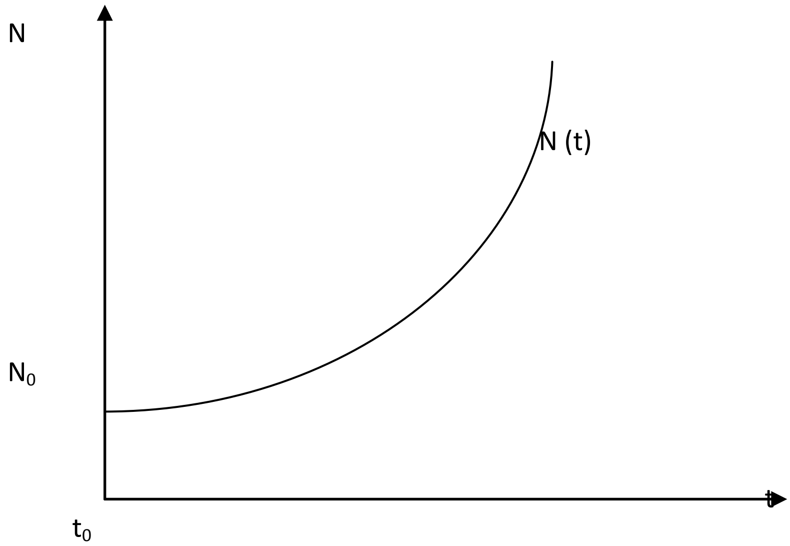


Рис.1.1. Графік зміни чисельності популяції

В моделі присутні три параметра: **No; r** та **to**

Відповідно **N** и **t** можна вважати за функцію **N(t)** та аргумент. Шаг зміни аргументу **t** приймають рівномірним (**Δt =** ***const***)

Практичне завдання

Створіть просту чисельну модель з використанням програми EXCEL, та промоделюйте наступні базові сценарії:

Застосування МЕТОДу ЕКОЛОГІЧНОЇ (БІОЛОГІЧНОЇ) АНАЛОГІЇ

Модель Мальтуса (1.1) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу

$$\frac{dy}{dt} = ay,$$

де a − коефіцієнт приросту.

Тема 2. Модель Ферхюльста

Модель внутрішньовидової конкуренції. Рівняння в моделі Мальтуса фактично описує максимальну біологічну продуктивність виду й справедливо лише для коротких проміжків часу, коли обмеженість середовища перебування ще не перешкоджає росту. У реальних умовах жодна популяція не може повністю реалізувати свій біологічний потенціал. Чисельність її завжди обмежується зовнішнім середовищем. Рівняння Мальтуса варто змінити так, щоб урахувати внутрішньовидову конкуренцію, що виникає через обмеженість ресурсів.

Слід зазначити, що конкуренцію можна визначити, як використання деякого ресурсу (їжі, води, простору) яким-небудь організмом, що тим самим зменшує доступність цього ресурсу для інших організмів. *Внутрішньовидовою конкуренцією* називається взаємодія між конкуруючими організмами, якщо вони належать до одного виду. Якщо вони ставляться до різних видів, то – *міжвидовою конкуренцією*.

До факторів, що обмежують чисельність популяції, ставляться недолік ресурсів харчування, висвітлення, простору, а також продукти життєдіяльності популяції.

У результаті замість експонентної залежності виникає *логістична*.

Якщо в моделі Мальтуса $\frac{dN}{dt} = r \cdot N$ коефіцієнт b записати як $b = m + \mu \cdot N$, де m – коефіцієнт природної смертності, μ – коефіцієнт залежності смертності від чисельності популяції, то одержимо

$$\frac{dN}{dt} = N \cdot (a - m - \mu \cdot N).$$

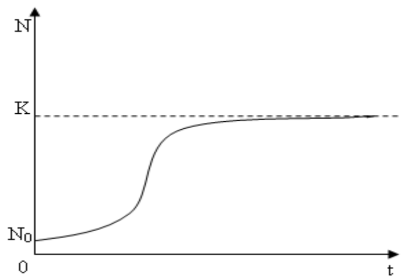


Рис. 2.1. Логістичний вид залежності

Після перетворення формула прийме вид

$$\frac{dN}{dt} = (r - \mu \cdot N) \cdot N \quad . \tag{2.1}$$

Дане рівняння описує ***модель внутрішньовидової конкуренції.*** Вираження в дужках – це питома швидкість росту популяції. Причому чим більше чисельність популяції *N(t)*, тим менше швидкість росту. Математичний опис внутрішньовидової конкуренції вперше запропоноване в 1838 р. Ферхюльстом.

Якщо в правій частині рівняння винести за дужки *r*, то $\frac{dN}{dt} = N \cdot r(1 - \frac{\mu}{r} \cdot N)$, і позначити $\frac{\mu}{r}$ за $\frac{1}{K}$, тоді рівняння можна переписати так: $\frac{dN}{dt} = r \cdot N(\frac{K-N}{K})$.
При малих N значенням $\frac{N}{K}$ можна зневажити й тоді ріст чисельності йде за експонентним законом, при зростанні N й незмінному *До* ріст чисельності буде сповільнюватися, і при N, близькому до величини K, ріст зупиниться. Величину *K* називають *ємністю середовища*. Вона відбиває можливості середовища перебування надати популяції потрібні для її росту ресурси.
Для дослідження моделі необхідно вирішити дане рівняння. Як початкові умови взято, що при $t = t_0$ $N(t_0)=N_0$. Проінтегруємо та одержимо

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot \exp(-r \cdot (t - t_0))}.$$

На мал. 2.2 представлений вид залежності N(t) для різних співвідношень початкової чисельності популяції і ємності середовища. Логістична крива дає гарний збіг з експериментальними даними, що говорить про адекватність моделі.

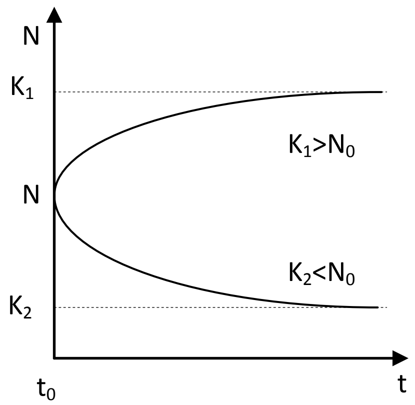


Рис.2.2. Зміна чисельності популяції
при різних початкових значеннях

Умови застосовності диференціальних рівнянь (модель Мальтуса й модель Ферхюльста) для опису росту популяцій можуть бути сформульовані в такий спосіб:

1) у моделях не враховуються індивідуальні розходження особин одного виду. Популяція представляється народжуваності, що складається з однакових особин із середніми характеристиками, і смертності незмінними в часі. Просторовий розподіл особин уважається однорідним;

2) розмноження й смертність популяцій уважаються між поколіннями, що происходящими безупинно без тимчасових сдвигов. Це справедливо для росту бактерій, дріжджів, мікроводоростей й інших організмів, що не володіють віковою структурою;

3) досить висока чисельність популяції, тобто якщо число особин мало, усереднені характеристики вводити не можна. Необхідно враховувати дискретність популяції, тобто використати імовірнісний підхід.

Практичне завдання
Створіть просту чисельну модель з використанням програми EXCEL, та промоделюйте наступні базові сценарії:

Застосування МЕТОДу ЕКОЛОГІЧНОЇ (БІОЛОГІЧНОЇ) АНАЛОГІЇ

Модель поширення реклами має вигляд, аналогічний моделі Ферхюльста (2.1).
Якщо все населення прийняти за одиницю, то y – частка населення, що володіє деякою інформацією, а $(1-y)$ – частка населення, що не володіє інформацією. У цьому випадку модель поширення реклами буде мати

$$\frac{dy}{dt} = ay(1-y),$$

де a – коефіцієнт ефективності передачі інформації від володіючих інформацією до тих, що не володіють.

Тема 3. Модель типу «збір врожаю»

Розглянемо модель популяції, чисельність якої залежить не тільки від внутрішньовидової боротьби, але й від вилову. Як таку популяцію можна розглянути «череди промислових риб». Інтенсивність вилову позначимо Q, тобто Q – це число особин, що виловлюють в одиницю часу, причому Q>0. У цьому випадку рівняння виходить із моделі Ферхюльста (2.1) і приймає наступний вид:

$$dy/dt = y(a-by) - Q, \qquad (3.1)$$

де a – мальтузіанський коефіцієнт;
b – коефіцієнт внутрішньовидової конкуренції.
Потрібно визначити, при якому максимальному значенні квоти вилову Q популяція не зникне.
Для рішення цієї задачі помітимо, що на площині *YOY*’ (мал. 3.1) рівняння (3.1) задає параболу, кінці якої спрямовані вниз. Стаціонарне рішення не залежить від часу $\frac{dy}{dt} = 0$, тому $ay - by^2 - Q = 0$,

$D = a^2 - 4Qb$ і значить $\frac{a^2}{4b} > Q$.

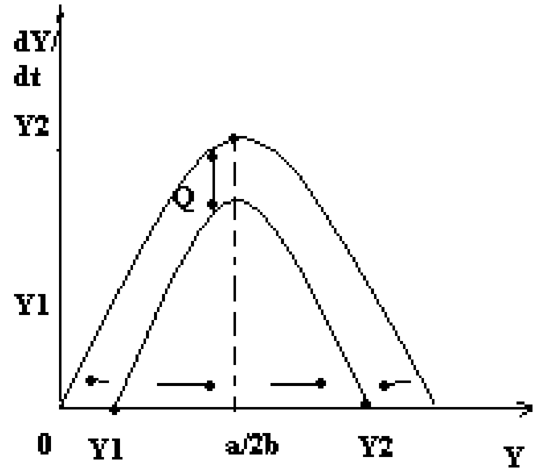


Рис. 3.1. Залежність швидкості росту
Популяції від її чисельності при $0 < Q < \frac{a^2}{4b}$

При цьому у випадку $Q < \frac{a^2}{4b}$ квадратний тричлен $by^2 - ay + Q$ має два позитивних корені: y_1 і y_2. Це значить, що диференціальне рівняння (3.1) має два стаціонарних рішення $y = y_1$ й $y = y_2$ (мал. 3.2).

Оскільки права частина рівняння (3.1) негативна при $y < y_1$ й $y > y_2$ й позитивна при $y_1 < y < y_2$, те рішення рівняння (3.1) при $y < y_1$ й $y > y_2$ монотонно убувають, а при $y_1 < y < y_2$ – монотонно зростають.

Із цього треба, що будь-яке випадкове відхилення від стаціонарного рішення $y = y_2$ гаситься.

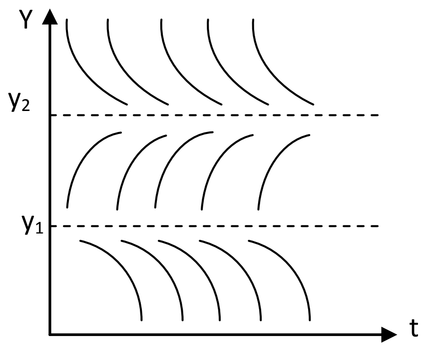


Рис. 3.2. Динаміка чисельності популяції при $0 < Q < \frac{a^2}{4b}$

Якщо відбувається з якої-небудь причини випадкове відхилення від стаціонарного рішення $y = y_1$ нагору, то це приводить до подальшого росту чисельності популяції до величини $y = y_2$. У випадку ж відхилення від рішення $y = y_1$ вниз чисельність рішення популяції скорочується до нуля, що відповідає катастрофічній ситуації. Таким чином, стаціонарне рішення $y = y_1$ рівняння (3.1) є нестійким, а рішення $y = y_2$ – стійким .

Що відбудеться при збільшенні квоти вилову *Q*? У міру збільшення параметра *Q* ця парабола буде зміщатися вниз (мал. 3.3), внаслідок чого значення y_1 й y_2 будуть зближатися.

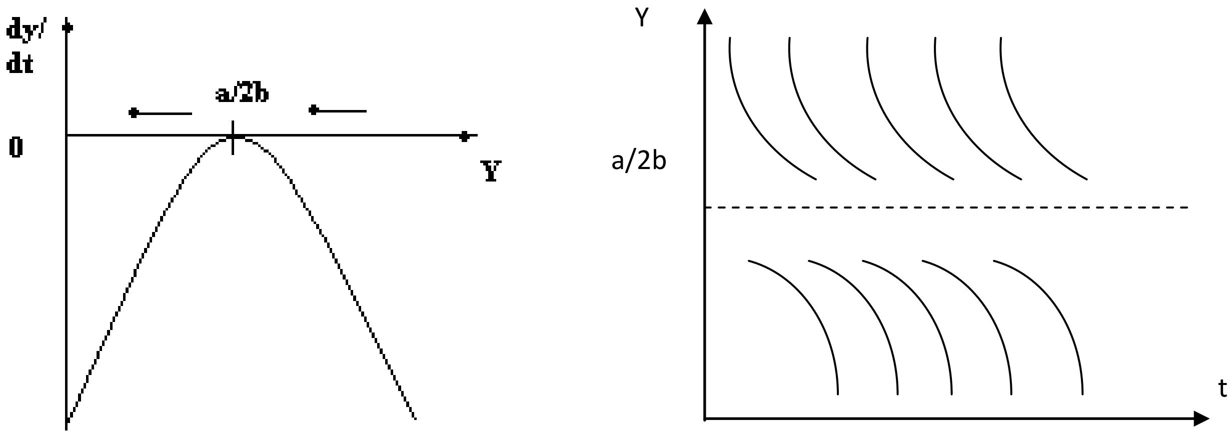
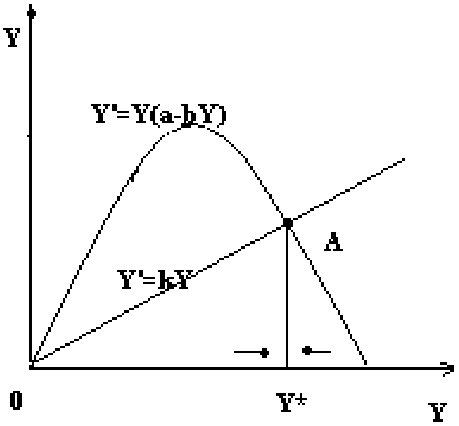
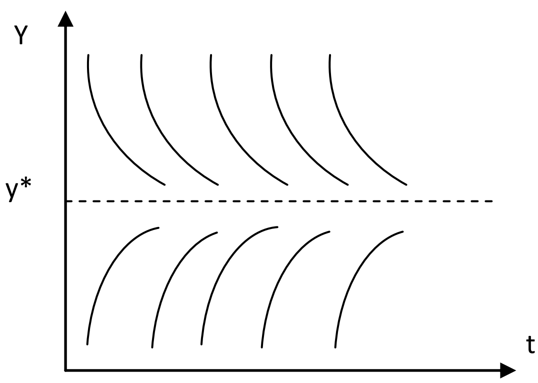


Рис. 3.3. Залежність швидкості росту популяції від її чисельності (*а*) і динаміка чисельності (*б)* при $Q = \frac{a^2}{4b}$

Як видно з мал. 1.6,*а*, при $Q=\frac{a^2}{4b}$ права частина рівняння (3.1) негативна всюди, крім $y=\frac{a}{2b}$, де вона звертається в нуль. Це значить, що при $Q=\frac{a^2}{4b}$ стаціонарне рішення $y=\frac{a}{2b}$ диференціального рівняння (1.3) є нестійким: будь-яке випадкове відхилення вниз від цього рішення приводить до падіння чисельності популяції до нуля (див. мал. 3.3,б). Зрозуміло, що при $Q>\frac{a^2}{4b}$ популяція також гине, оскільки в цьому випадку похідна y' завжди негативна.
Отже, прагнення максимізувати квоту вилову приводить до втрати стійкості рішення, наслідком чого є катастрофа: популяція гине. Як варто змінити стратегію, щоб при вилові $Q=\frac{a^2}{4b}$ чисельність популяції не падала б до нуля при малих випадкових відхиленнях від стаціонарного рішення?
Виявляється, що стійкість не губиться у випадку введення зворотного зв'язку, що у цьому випадку означає заміну твердого плану $Q=\text{const}$ гнучким, коли, наприклад, квота вилову Q пропорційна чисельності популяції: $Q=c\cdot y$.
Модель й у цьому випадку зручно досліджувати на стійкість, використовуючи площину YOY'. На мал. 3.4а добре видно, що права частина рівняння (3.1) при $Q=c\cdot y$ звертається в нуль, якщо $y=\frac{a-c}{b}$. Отримане стаціонарне рішення є стійким: чисельність популяції при $y>\frac{a-c}{b}$ скорочується (у цьому випадку $y'<0$), а при $y<\frac{a-c}{b}$ – збільшується (у цій області $y'>0$). Інтегральні криві, що відповідають случаю $Q=c\cdot y$, наведені на мал. 3.4б. Всі вони при необмеженому росту *t* прагнуть до стаціонарного рішення $y^*=\frac{a-c}{b}$.





а) *б)*

Рис. 3.4. Залежність швидкості росту популяції від її чисельності (*а*) і динаміка чисельності (*б)* при гнучкому плані Q=$c.y$

Далі необхідно обчислити відповідне значення квоти вилову. Маємо $Q = cy = c \cdot \frac{a-c}{b}$. Q залежить від значення параметра c. При цьому максимум квоти досягається при $c = \frac{a}{2}$, а максимальне значення становить $Q\max = \frac{a}{2}\frac{a-\frac{a}{2}}{b} = \frac{a^2 - \frac{a^2}{2}}{2b} = \frac{a^2}{4b}$. Отже, максимальний вилов у задачі зі зворотним зв'язком, як й у випадку твердого плану, дорівнює $\frac{a^2}{4b}$, а досягається він теж при стаціонарному значенні чисельності популяції $y = \frac{a}{2b}$. Оскільки при $y = \frac{a}{2b}$ досягається максимум «продуктивності» популяції $y = \frac{a}{2b}$, то отримане рішення означає, що система перебуває в динамічній рівновазі, коли вилов дорівнює максимальної швидкості природного приросту популяції.

Як бачимо, «оптимальний» твердий план $Q = \text{const}$ приводить до втрати стійкості й катастрофі (популяція гине), а введення зворотного зв'язку (необов'язково лінійної) стабілізує систему. Цей висновок має важливе значення для розуміння механізму стабілізації керованого процесу.

Практичне завдання

Створіть просту чисельну модель з використанням програми EXCEL, та промоделюйте наступні базові сценарії:

Застосування МЕТОДу ЕКОЛОГІЧНОЇ (БІОЛОГІЧНОЇ) АНАЛОГІЇ

$$\frac{dy}{dt} = (a - by)y - Q\ .$$

Така модель виникає при дослідженні економіки, ресурси якої обмежені, а частина національного доходу витрачається на які-небудь потреби невиробничого характеру (витрати на озброєння, ведення воєнних дій). Надмірні невиробничі витрати можуть привести до нестійкості й катастрофи.

Подібна модель може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві. При аналізі наслідків «витоку мозків» виникає подібна модель. Якщо квота вилову, тобто число кваліфікованих фахівців, що залишають науку, перевищить критичний рівень, то це приведе до катастрофічних наслідків.

Тема 4. Модель міжвидової конкуренції

Розглянемо деякий ареал, у якому живуть два види. Ці види взаємодіють, ріст чисельності однієї популяції позначається на чисельності іншої, види конкурують за ту саму їжу, запаси якої обмежені.

Нехай $N_1(t)$ й $N_2(t)$ – чисельності популяцій 1 й 2 види відповідно, $F(N_1, N_2)$– кількість корму, що з'їдає всіма особинами в одиницю часу. Припустимо, що з ростом чисельності популяції скорочується кількість корму, внаслідок чого відбувається зниження темпів росту кожної популяції. Найпростішою моделлю такої взаємодії є наступна система:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{N_1 dt} = a - mF(N_1, N_2); \\ \dfrac{dN_2}{N_2 dt} = b - nF(N_1, N_2). \end{cases} \quad (4.1)$$

Тут коефіцієнти *m* й *n* визначають чутливість популяцій до недоліку корму; *a* й *b* – коефіцієнти природного приросту чисельності популяцій в умовах достатку їжі.

Якщо прийняти, що ріст споживаних кормів залежить лінійно від чисельності популяцій, то для функції $F(N_1, N_2)$ одержуємо $F(N_1, N_2) = gN_1 + hN_2$, де *g* й *h* – позитивні константи (коефіцієнти «ненажерливості»). Підставляючи цю залежність у праві частини диференціальних рівнянь (4.1), одержимо

$$\begin{cases} dN_1 / dt = N_1(a - m(gN_1 + hN_2)); \\ dN_2 / dt = N_2(b - n(gN_1 + hN_2)). \end{cases} \quad (4.2)$$

Рішення системи (4.2) варто шукати з урахуванням початкових умов: при t=0 $N_1(0) = N_{10}$, $N_2(0) = N_{20}$.

Поділивши нижнє рівняння системи (4.2) на верхнє, одержимо наступне рівняння:

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{nN_2(q - (gN_1 + hN_2))}{mN_1(p - (gN_1 + hN_2))}, \quad (4.3)$$

де коефіцієнти $p = \dfrac{a}{m}$ й $q = \dfrac{b}{n}$ – параметри виживаності популяцій.

Як видно, параметр виживаності кожної популяції дорівнює відношенню значення коефіцієнта природного приросту до значення коефіцієнта чутливості до недоліку корму.

Побудуємо у фазовому просторі (мал. 4.1) поле напрямків системи (4.2). Для визначеності розглянемо випадок, коли $p < q$.

З рівняння (4.3) треба, що на прямій $gN_1 + hN_2 = q$ (лінія 1 на мал. 4.1) виконане умова $dN_2 / dN_1 = 0$, і, таким образом, при перетинанні цієї прямої дотичні до траєкторій паралельні осі 0 N_1 . Точно так само встановлюється, що при перетинанні прямої $gN_1 + hN_2 = p$ (лінія 2 на мал. 4.1) дотичні до траекторі паралельні осі 0 N_2 .

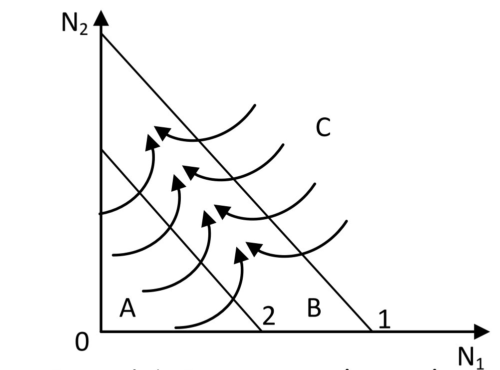


Рис. 4.1. Інтегральні криві диференціального рівняння (4.3)

Відзначимо й те, що в області А (див. мал. 4.1) похідні $\frac{dN_1}{dt}$ й $\frac{dN_2}{dt}$ у силу (4.2) позитивні; в області В мають різні знаки ($dN_1/dt < 0, dN_2/dt > 0$); в області З – негативні ($dN_1/dt < 0, dN_2/dt < 0$).

Внаслідок цього при малих початкових значеннях численностей популяцій (початкова крапка перебуває в області А) змінні N_1 й N_2 спочатку ростуть одночасно. Однак, починаючи з деякого моменту (цей момент визначається умовою $gN_1 + hN_2 = p$, тобто крапка перебуває в області В), чисельність другої популяції N_2 продовжує рости, а чисельність першої популяції N_1 починає скорочуватися. Це порозумівається тим, що перша популяція більше чутлива до недоліку корму (у неї значення параметра виживаності нижче, ніж у другої).

Якщо ж чисельності обох популяцій у початковий момент велика (траєкторія починається в крапці області З), то спочатку чисельності обох популяцій зменшуються (недолік корму згубно діє на кожен вид). Однак з деякого моменту, обумовленого умовою $gN_1 + hN_2 = q$, чисельність другої популяції починає збільшуватися, хоча чисельність першої популяції продовжує убувати.

Перша популяція більше чутлива до недоліку корму, виживає та популяція, у якої параметр виживаності більше.

Для подальшого аналізу моделі необхідно знайти перший інтеграл системи (4.2), для цього перепишемо цю систему так:

$$\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a - m(gN_1 + hN_2)) \quad | \cdot n\dfrac{dt}{N_1}; \\ dN_2/dt = N_2(b - n(gN_1 + hN_2)) \quad | \cdot m\dfrac{dt}{N2}. \end{cases}$$

Далі зробимо зазначені вище дії:

$$\begin{cases} n \cdot \dfrac{dN_1}{N_1} = n(a - mF(N_1, N_2))dt; \\ m \cdot \dfrac{dN_2}{N_2} = m(b - nF(N_1, N_2))dt \end{cases}$$

і віднімемо одне рівняння з іншого. У результаті виходить вираження $n \cdot \frac{dN_1}{N_1} - m \cdot \frac{dN_2}{N_2} = (na - mb)dt,$ інтегрування якого з обліком початкових даних (t=0, $N_1(0) = N_{10}$, $N_2(0) = N_{20}$) приводить до рівняння $n\ln\frac{N_1}{N_{10}} - m\ln\frac{N_2}{N_{20}} = (na - mb)t$.

Провівши наступні преобразования:

$$\ln\frac{N_1{}^n}{N_{10}{}^n} - \ln\frac{N_2{}^m}{N_{20}{}^m} = (na - mb)t \ ,$$

$$\ln\frac{N_1{}^n \cdot N_{20}{}^m}{N_{10}{}^n \cdot N_2{}^m} = (na - mb)t,$$

$$\frac{{N_1}^n \cdot {N_{20}}^m}{{N_{10}}^n \cdot {N_2}^m} = \ell^{(na-mb)t},$$

$$\left(\frac{N_1}{N_{10}}\right)^n = \ell^{(na-mb)t} \cdot \left(\frac{N_2}{N_{20}}\right)^m,$$

$$\left(\frac{N_1}{N_{10}}\right)^n = \ell^{mn(\frac{a}{m}-\frac{b}{n})t} \cdot \left(\frac{N_2}{N_{20}}\right)^m,$$

одержимо

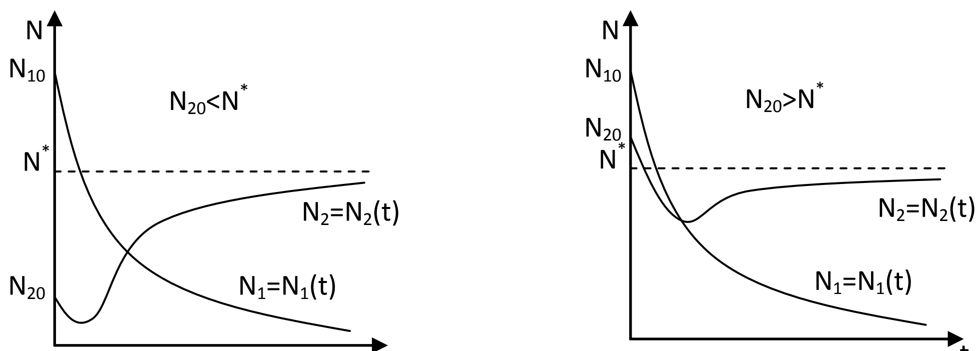
$$\left(\frac{N_1}{N_{10}}\right)^n = \ell^{mnt(p-q)} \cdot \left(\frac{N_2}{N_{20}}\right)^m. \tag{4.4}$$

Оскільки розглядається випадок $p < q$, те права частина рівняння (4.4) прагне до нуля при $t \to \infty$. Це, у силу умов $m > 0$, $n > 0$ і обмеженості рішень N_1 й N_2, означає, що N_1 теж прагне до нуля при $t \to \infty$.

Що стосується популяції другого виду, то при цих умовах відбувається стабілізації її чисельності. Дійсно, нехай t досить велико й чисельністю популяції першого виду можна зневажити. Тоді динаміка популяції другого виду в силу рівняння (4.2) визначається з умови $\frac{dN_2}{dt} = N_2(b - nhN_2)$, і, таким чином, виходить рівняння Ферхюльста, рішенням якого є логістична крива.

Отже, при конкуренції двох популяцій за ту саму їжу при будь-яких початкових умовах той вид, у якого параметр виживання ($\frac{a}{m}$ або $\frac{b}{n}$) більше, виживає й стабілізується, повністю витісняючи свого суперника, у якого значення цього параметра нижче.

Этой висновок ілюструється на мал. 4.2, де зображені рішення системи (4.2) за умови $p < q$.



а) *б*)

Рис.4.2. Динаміка популяцій першого (*а*) і другого (*б)* виду (випадок *p*<*q*)

Як видно, навіть при малому початковому значенні другого виду й істотній перевазі першого виду в початковий період останній однаково гине, а другий вид виживає й стабілізується. При цьому результат зберігається, як велике не було початкове значення чисельності популяції першого виду N_{10}. Сказане означає, що, наприклад, у випадку рівності коефіцієнтів природного приросту $a = b$ виживає та популяція, що менш чутлива до недоліку корму. Рассмотренная модель зветься моделі В. Вольтерра.

Практичне завдання
Створіть просту чисельну модель з використанням програми EXCEL, та промоделюйте наступні базові сценарії:

Модель конкуренції двох видів (модель 1)
Нехай два види тварин конкурують один з одним на деякій території з обмеженими запасами їжі. Можливі різні исходы їхньої конкурентної боротьби:

а) вид 1 виживає, а вид 2 умирає;
б) вид 2 виживає, а вид 1 умирає;
в) обидва види співіснують;
г) обидва види вимирають.

Кожний із цих исходов відповідає деякому положенню рівноваги для популяції N_1 й N_2 двох розглянутих видів. Тому диференціальні рівняння, що моделюють динаміку популяцій N_1 й N_2, повинні мати 4 положення рівноваги.
Розглянемо наступні нелінійні динамічні рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = \left(a - b \cdot N_1 - s \cdot N_2\right) \cdot N_1 ; \\ \dfrac{dN_2}{dt} = \left(c - g \cdot N_1 - d \cdot N_2\right) \cdot N_2 , \end{cases} \qquad (4.5)$$

де $a, b, c, d, s, g > 0$.
Тут a й c – інтенсивності росту для видів 1 й 2 відповідно (швидкості розмноження ізольованих популяцій N_1 й N_2); члени $-b \cdot N_1$ і $-d \cdot N_2$ відповідають внутрішньовидовій конкуренції, а члени $-s \cdot N_2$ і $-g \cdot N_1$ відповідають міжвидовій конкуренції. Необхідна умова для можливості виживання обох видів полягає в тому, що повинна існувати нерухома крапка системи, обидві координати якої позитивні. Т. к. зміст N_1 й N_2 – чисельність популяцій, нас цікавлять тільки нерухомі крапки, що лежать у першому квадранті площини N_1, N_2. Знайдемо нерухомі крапки системи (4.5):

$$\begin{cases} \left(a - b \cdot N_1 - s \cdot N_2\right) \cdot N_1 = 0; \\ \left(c - g \cdot N_2 - d \cdot N_2\right) \cdot N_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Нерухомі крапки системи (2.6) - це рішення системи (4.6).
1. Очевидно, крапка (0,0) є нерухома крапка системи (4.5). Цій крапці відповідає випадок вимирання обох видів тварин.
2. Другу нерухому крапку знайдемо з умов

$$N_1 = 0,\ c - g \cdot N_1 - d \cdot N_2 = 0.$$

Шукана крапка лежить на перетинанні осі координат $0N_2$ і прямій $N_2 = c/d - g/d \cdot N_1$. Координаты точки равны (0, c/d), ей соответствует случай вымирания первого вида.
3. Аналогічно перебуває третя нерухома крапка системи з координатами (a/b, 0), що відповідає вимиранню другого виду.

4. Для знаходження четвертої нерухомої крапки потрібно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} a - bN_1 - sN_2 = 0; \\ c - gN_1 - dN_2 = 0, \end{cases}$$

$N_1 = a/b - s/b \cdot N_2$,

$$c - g \cdot \left(a/b - s/b \cdot N_2\right) - dN_2 = 0,$$

$$N_2 = \frac{cb - ag}{bd - sg}.$$

Отже, шукана крапка лежить на перетинанні двох прямих $a - b_1$ - $s_2 = 0$ й $c - g_1 - d_2 = 0$ і має координати

$$\frac{ad - sc}{bd - gs} - \frac{cb - ag}{bd - gs}.$$

Тому що нас цікавлять у цьому випадку тільки позитивні координати, те повинні виконуватися наступні умови:

а) $bd - gs >$ ПРО , $ad - sc > 0$, $cb - ag > 0$ або
б) $bd - gs <$ ПРО , $ad - sc < 0$, $cb - ag < 0$.

Імовірність якого-небудь результату конкурентної боротьби залежить від стійкості відповідного положення рівноваги.
Розглянемо випадок виконання умов *б)*. (Дослідження у випадку *а*) пропонується проробити самостійно.) Після знаходження нерухомих крапок системи (4.7) для дослідження поводження рішення зробимо лінеаризацію цієї системи на околицях крапок спокою. Кожну з линеаризованных систем запишемо у вигляді

$$\dot{N} = \mathrm{W}\ \overline{N},$$

де W – матриця Якоби.
1. Матриця Якоби для крапки (0,0):
det = $ac >$ про , Tr = $a + c > 0$, отже , положення рівноваги хитливо.

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial N_1} & \dfrac{\partial F}{\partial N_2} \\ \dfrac{\partial G}{\partial N_1} & \dfrac{\partial G}{\partial N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2bN_1 - sN_2 & -sN_1 \\ -gN_2 & c - gN_1 - 2dN_2 \end{pmatrix}_{N_{1,2}=0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\det(W - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & c - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння. Це рівняння можна було скласти наступним чином:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}TrW \pm \frac{1}{2}\sqrt{D} = \frac{1}{2}(a + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + c)^2 - 4ac} = \frac{1}{2}(a + c) \pm \frac{1}{2}(a - c).$$

$$\lambda_1 = \mathrm{a} > 0\ ,\ \lambda_2 = \mathrm{c} > 0\ .$$

Тому що обоє власних числа позитивні, те, положення рівноваги (0,0) є нестійкий вузол. Всі траєкторії системи віддаляються від крапки (0,0), звідси

$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{sc}{d} & 0 \\ -g\frac{c}{d} & -c \end{pmatrix}$$

треба, що вимирання видів при наявності достатнього ресурсу їжі й у пропозиції, що немає інших впливів зовнішнього середовища, що впливають на чисельність популяцій, крім випадків міжвидової й, що враховують нами, внутрішньовидової конкуренції, неможливо.

$$\det W = -c(a - \frac{sc}{d}) = c(\frac{sc}{d} - a),$$

$$TrW = a - c - \frac{sc}{d} = \frac{ad - cd - sc}{d} < 0.$$

1. Для крапки (0, c/d) матриця Якоби має вигляд:

$$W = \begin{pmatrix} a - \frac{sc}{d} & 0 \\ -g\frac{c}{d} & -c \end{pmatrix}.$$

$$\det W = -c(a - \frac{sc}{d}) = c(\frac{sc}{d} - a),$$

$$TrW = a - c - \frac{sc}{d} = \frac{ad - cd - sc}{d} < 0,$$

тому що розглядається випадок б), коли виконуються умови $ad - sc < 0$, те $\det W = c\dfrac{sc - ad}{d} > 0$. При цьому виконання умов Tr $W < 0$ й det $W > 0$ означає для систем 2-го порядку асимптотическую стійкість положення рівноваги. Таким чином, вимирання першого виду цілком можливо.

ВПРАВА 1. Довести, що при виконанні умов б) цілком можливе вимирання 2-го виду. (Примітка. Який з видів буде вимирати, перш або другий, залежить від початкових умов.)

Розглянемо тепер нерухому крапку

$$\begin{pmatrix} \frac{ad - sc}{bd - gs} & \frac{cb - ag}{bd - gs} \end{pmatrix}.$$

Матриця Якоби:

$$W = \begin{pmatrix} a - 2b\frac{ad - sc}{bd - sg} - s\frac{bc - ag}{bd - sg} & -s\frac{ad - sc}{bd - sg} \\ -g\frac{bc - ag}{bd - sg} & c - g\frac{ad - sc}{bd - sg} - 2d\frac{bc - ag}{bd - sg} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{bd - sg}\begin{pmatrix} a(bd - sg) - 2b(ad - sc) - s(bc - ag) & s(cs - ad) \\ g(ag - bc) & c(bd - sg) - g(ad - sc) - 2d(bc - ag) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{bd - sg}\begin{pmatrix} bcs - adb & s(sc - ad) \\ g(ag - bc) & adg - bcd \end{pmatrix} = \frac{1}{bd - gs}\begin{pmatrix} b(cs - ad) & s(sc - ad) \\ g(ag - bc) & d(ag - bc) \end{pmatrix}$$

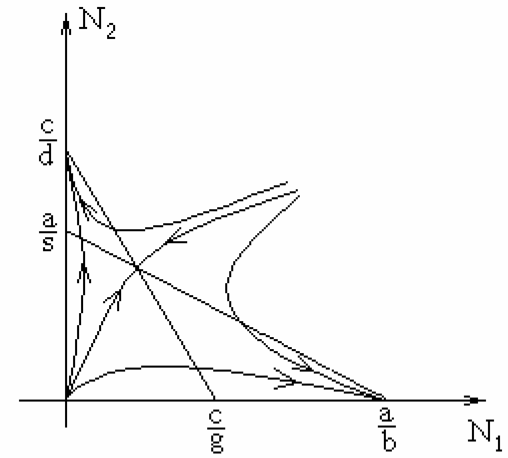
$$\det W = \frac{bd(cs-ad)(ag-bc)-gs(sc-ad)(ag-bc)}{(bd-sg)^2} = \frac{(cs-ad)(ag-bc)(bd-gs)}{(bd-sg)^2} =$$
$$= \frac{(cs-ad)(ag-bc)}{bd-sg} < 0,$$

тому що виконані умови б).

Отже, у припущенні, що виконується умова б), $\det W < 0$, звідки треба, що положення рівноваги $\left(\frac{ad-sc}{bd-gs} \quad \frac{cb-ag}{bd-gs}\right)$ є сідлом.

Помітимо, що у випадку виконання умов а) $\det W > 0$. Фазовий портрет системи (4.7) для випадку виконання умов $bd - gs < 0$, $ad - sc < 0$, $cb - ag < 0$ (тобто умов б)) зображений на мал. 4.3.

Бачимо, що співіснування для двох конкуруючих видів є надзвичайно малоймовірним, тому що при t((у цю крапку входять тільки дві траєкторії, а всі інші віддаляються від її.



Припускаючи, що початкові положення (початкові чисельності досліджуваних популяцій) рівно вірогідні, бачимо, що найбільш імовірним результатом є вимирання одного з видів. Отриманий результат відповідає "принципом конкурентного виключення" Гаузе, відповідно до якого в таких ситуаціях конкурентний боротьби один з видів вимирає.

Рис.4.3. Фазовий портрет системи для умови б)

ВПРАВА 2. Довести, що при виконанні нерівностей а) одержуємо протилежний екологічний висновок:
неможливе вимирання одного з видів, обидва види тварин співіснують разом.
Таким чином, виконання умов а) тягне стійкість нетривіальної нерухомої крапки. На мал. 4.4 й 4.5 відповідно показаний геометричний зміст умов а) і б).

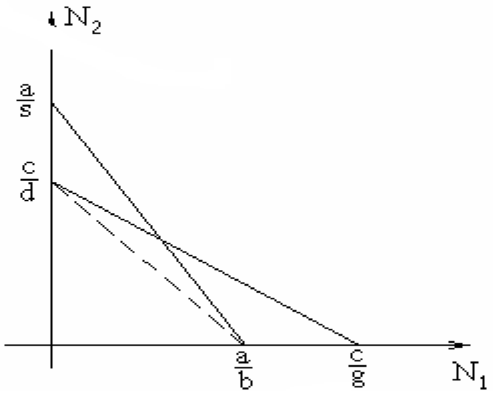


Рис. 4.4. Геометричний зміст умов а)

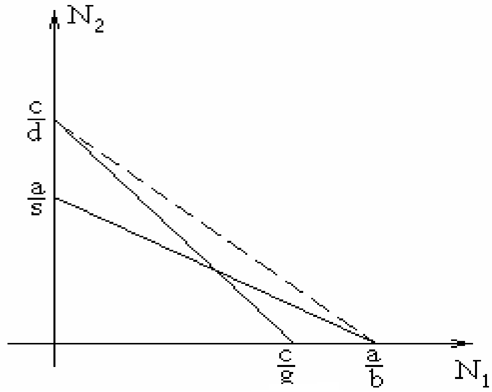


Рис. 4.5 Геометричний зміст умов б)

Для стійкості (тобто для співіснування) крапка рівноваги повинна лежати над прямій, що з'єднує (a/b, 0) і (0, c/d).
Біологічна інтерпретація умов а), що забезпечують стійкість положення рівноваги, полягає в наступному: якщо щирі швидкості росту a й $з$ у задачі (4.7) однакові, то $b>g$ й $d>s$, тобто збільшення чисельності одного з конкурентів сильніше придушує його власний ріст, чим ріст іншого конкурента.

Застосування МЕТОДУ ЕКОЛОГІЧНОЇ (БІОЛОГІЧНОЇ) АНАЛОГІЇ

За допомогою моделі міжвидової конкуренції

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = (a - m(gy_1 + hy_2)y_1); \\ \dfrac{dy_2}{dt} = (b - n(gy_1 + hy_2)y_2) \end{cases}$$

можна досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами. У цьому випадку a й b – трактуються як природні темпи росту підприємств за умови перевищення попиту над пропозиціями товарів; m й n – відбивають зниження темпів росту у зв'язку з розвитком виробництва, отже, збільшенням пропозиції товарів і посиленням конкуренції, p й q – можуть бути пов'язані з різними умовами функціонування, наприклад, одні підприємства мають податкові пільги, а інші змушені платити непомірні податки. При сприятливих умовах одна форма підприємництва (наприклад, приватна) може цілком витиснути державну.

Тема 5. Модель «хижак – жертва»

Для дослідження коливань уловів риби в Адріатичному морі, що мають той самий період, але відрізняються по фазі, італійським математиком Кручене Вольтерра була побудована модель «хижак - жертва», що стала класичною.
Передбачається, що у відсутності хижаків популяція росте экспоненциально. Чим більше чисельність популяції жертв і хижаків, тим частіше вони зустрічаються. Число хижаків буде рости доти, поки в них буде досить їжі. Збільшення числа хижаків приведе до зменшення популяції жертв. Коли жертв стане мало, чисельність хижаків почне зменшуватися. Внаслідок цього з деякого моменту почнеться ріст жертв, що через якийсь час викличе ріст хижаків, - цикл замкнув.
Нехай $N_2(t)$ – число риб-хижаків, які харчуються малими рибами-жертвами; $N_1(t)$ – чисельність риб-жертв.
Припустимо, що темп приросту чисельності жертв в умовах відсутності хижаків постійний: $\dfrac{dN_1}{N_1 dt} = r$, де r – позитивна постійна. Це означає, що ресурси харчування риб-жертв не обмежені, а внутрішньовидовою боротьбою можна зневажити.
Поява хижака, мабуть, знизить темп приросту жертв. Будемо вважати, що це зниження лінійно залежить від чисельності хижака: чим більше чисельність хижака, тим менше темп приросту жертв. Тоді $\dfrac{dN_1}{N_1 dt} = r - aN_2$, звідки треба

$\frac{dN_1}{dt} = rN_1 - aN_1N_2$, де a – коефіцієнт ефективності пошуку. Тут a – деякий коефіцієнт пропорційності. Відзначимо, що швидкість скорочення риб-жертв, викликана поїданням їхніми хижаками, дорівнює aN_1N_2.

Складемо тепер рівняння, що визначає динаміку популяції хижаків. У випадку відсутності першого виду (жертв) чисельність би її скорочувалася через недолік корму (жертв): $\frac{dN_2}{N_2dt} = -g$.

Наявність же жертв приводить до росту коефіцієнта відносного приросту. Приймаючи, що цей ріст линеен, одержуємо $\frac{dN_2}{N_2dt} = -g + faN_1$ й $fa = b$, де g – коефіцієнт смертності при відсутності жертв; f – коефіцієнт ефективності, з якого їжа переходить у потомство хижака.

Звідки швидкість популяції хижака дорівнює

$$\frac{dN_2}{dt} = -gN_2 + bN_1N_2.$$

Отримана система

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(r - aN_2); \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(-g + bN_1) \end{cases}$$

являє собою ***модель «хижак – жертва»***.

Фазовий портрет для моделі зображений на мал. 5.1. Траєкторіями системи будуть замкнуті криві − окружності.

Наявність траєкторій, що мають вид замкнутих кривих, означає, що система робить коливальні рухи навколо нерухомої крапки N_1^*, N_2^*. Амплітуда коливального процесу залежить від того, як близькі початкові умови до положення рівноваги. Чим ближче до центра розташована початкова крапка руху системи $N_1(t_0)$, $N_2(t_0)$, тим менше буде амплітуда коливань.

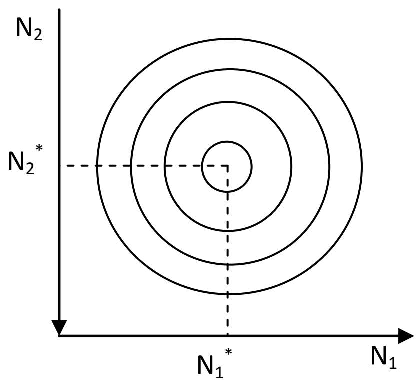


Рис. 5.1. Фазовий портрет моделі «хижак - жертва»

Практичне завдання

Створіть просту чисельну модель з використанням програми EXCEL, та промоделюйте наступні базові сценарії:

Моделі "хижак-жертва" (моделі 2а, 2б, 2в, 2г)

Розглянемо модель, що містить два види, один вид – хижак, а іншої – їхній видобуток. Нехай N_1 й N_2 – популяції жертв і хижаків відповідно. Зробимо наступні припущення:

а) між особинами одного виду немає суперництва;

б) будь-яка жертва може знайти досить їжі для їжі;

в) при будь-якій зустрічі хижака й жертви хижак убиває жертву (тобто загибель жертви пропорційна кількості N_1 й N_2 .

Динаміка популяцій у цих припущеннях описується наступною системою диференціальних рівнянь для **моделі 2а**.

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (a - bN_2)N_1, \\ \dot{N}_2 = (-c + dN_1)N_2 \ , \end{cases} \tag{5.1}$$

де N_1– чисельність жертв;

N_2 – чисельність хижаків;

a>0 – швидкість розмноження (інтенсивність росту) при відсутності хижаків;

c>0 – інтенсивність вимирання хижаків у відсутності жертв;

b>0 – коефіцієнт втрати біомаси жертв хижаків;

d>0 – коефіцієнт збільшення біомаси хижаків у випадку вдалого полювання (чим більше жертв, тим більше біомаса хижаків).

Система (5.1) має дві нерухомі крапки: (0,0) і (c/d, a/b).

Матриця Якоби для крапки (0,0) має вигляд

$$W = \begin{pmatrix} a - bN_2 & -bN_1 \\ dN_2 & -c + dN_1 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

det W = -ac < 0 , звідси треба, що початок координат – хитке положення рівноваги (сідло). Знайдемо матрицю Якоби для крапки спокою (c/d, a/b):

$$W = \begin{pmatrix} a - bN_2 & -bN_1 \\ dN_2 & -c + dN_1 \end{pmatrix}_{(\frac{c}{d},\frac{a}{b})} = \begin{pmatrix} 0 & -b\dfrac{c}{d} \\ d\dfrac{a}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

det = ac > 0 , Tr = 0 .

Згідно мал. 5.2 досліджувана крапка – центр, траєкторіями системи будуть замкнуті криві, у які перетворяться за рахунок нелінійності системи (2.3) окружності – траєкторії лінійної системи $\dot{\bar{N}} = W \cdot \bar{N}$.

Фазовий портрет для моделі 2а зображений на мал. 5.2.

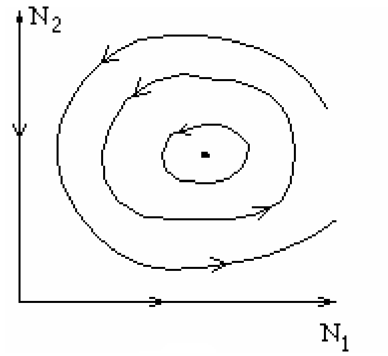


Рис. 5.2. Загальний фазовий портрет досліджуваної системи

Наявність траєкторій, що мають вид замкнутих кривих, означає, що система робить коливальні рухи навколо нерухомої крапки (c/d, a/b). Амплітуда коливального процесу залежить від того, як близькі початкові умови до положення рівноваги. Чим ближче до центра розташована початкова крапка($N_1(t_0)$, $N_2(t_0)$) руху системи, тим менше буде амплітуда коливань.

Розглянемо наступну модель "хижак-жертва" Вольтерра (**модель 2б**). Змінимо тепер рівняння для жертви, увівши член, що зменшує чисельність популяції за рахунок внутрішньовидової конкуренції. Система прийме такий вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = (a - kN_1 - bN_2)N_1; \\ \dot{N}_2 = (-c + dN_1)N_2, \end{cases} \qquad (5.2)$$

де k – коефіцієнт внутрипопуляционной конкуренції. Введення члена – k_1 означає, що у відсутності хижаків ріст чисельності жертв буде відбуватися відповідно до логістичного рівняння: a/k – ємність середовища для жертви.
Найдем крапки спокою для системи (5.2):

$$\begin{cases} (a - kN_1 - bN_2)N_1 = 0; \\ (-c + dN_1)N_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, крапка (0,0) є нерухома крапка, друга нерухома крапка лежить на перетинанні двох прямих (мал. 5.3):

$$N_1 = \frac{c}{d} \qquad N_2 = \frac{a}{b} - \frac{k}{b}N_1 = \frac{ad - kc}{bd}.$$

В екологічних моделях розглядають тільки крапки (N_1, N_2), що мають неотрицательные значення. N_2 буде більше 0 тоді й тільки тоді, коли виконується умова $\frac{a}{b} > \frac{k}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

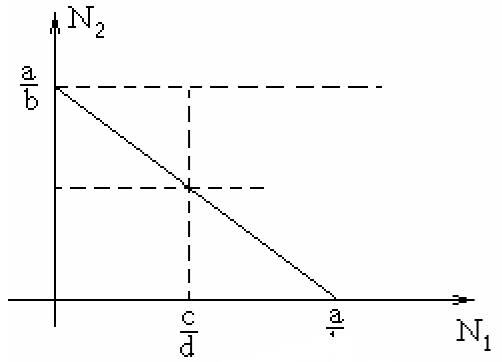


Рис. 5.3. Положення другий нерухомої крапки

Це умова при позитивних a, b, c, d й k – рівносильно нерівності

$$\frac{a}{k} > \frac{c}{d}. \qquad (5.3)$$

Отже, крапка спокою з позитивними координатами (що відповідає співіснуванню жертв і хижаків) буде лише в тому випадку, коли ємність середовища для жертв буде більше, ніж ємність середовища для хижаків, тобто популяція жертви повинна бути достатньої для того, щоб прокормити хижаків.
Досліджуємо характер крапки спокою :

$$W = \begin{pmatrix} a - 2kN_1 - bN_2 & -bN_2 \\ dN_2 & -c + dN_1 \end{pmatrix}_{\left(\frac{c}{d}\ \frac{ad-kc}{bd}\right)} = \begin{pmatrix} a - 2k\frac{c}{d}\frac{ad - kc}{d} & -b\frac{c}{d} \\ \frac{ad - kc}{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k\frac{c}{d} & -b\frac{c}{d} \\ \frac{ad - kc}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det W = b\frac{c}{d}\frac{ad - kc}{b} = \frac{c}{d}(ad - kc) > 0,$$

тому що виконані умови (5.3), а $TrW = -\frac{kc}{d} < 0$.

У силу критерію асимптотичної стійкості для систем 2-го порядку досліджувана нерухома крапка стійка.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}TrW \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}.$$

$$D = (TrW)^2 - 4\det W = (\frac{kc}{d})^2 - 4\frac{c}{d}(ad - kc) = c^2\left[(\frac{k}{d})^2 + 4\frac{k}{d} - 4\frac{a}{c}\right] = c^2\left[(\frac{k}{d} + 2)^2 - 4(1 + \frac{a}{c})\right].$$

Бачимо, що дискримінант D може бути як позитивним, так і рівним нулю й негативним. Залежно від знака D руху системи (5.2) до стійкого положення рівноваги $\left(\frac{c}{d} \quad \frac{ad-kc}{bd}\right)$ будуть або по спіралі, у випадку $D < 0$ (тобто положення рівноваги – стійкий фокус, а коливання системи загасають, і процес стає стаціонарним), або, у випадку $D \geq 0$, досліджувана крапка спокою – стійкий вузол, тобто коливання відсутні. Таким чином, введення члена $-k_1^2$ у рівняння для жертви при виконанні умов (5.3) веде до загасання коливань системи.

Знак дискримінанта D залежить від співвідношень параметрів a,b,c,d й k.

Для визначення цих співвідношень позначимо $k/d = r$, $a/c = s$. Тоді

$$D = c^2[(r + 2)^2 - 4(1+ s)].$$

Із сказаного вище випливає, що досліджуване положення рівноваги буде стійким фокусом, якщо

$$\begin{cases} D < 0\ ; \\ 0 < r < s \end{cases} \tag{5.4}$$

це умова (5.3).

Положення рівноваги буде стійким вузлом, якщо

$$\begin{cases} D \geq 0; \\ 0 < r < s. \end{cases} \tag{5.5}$$

У системі координат r,s побудуємо графік функції $D = 0$ (мал. 5.4).

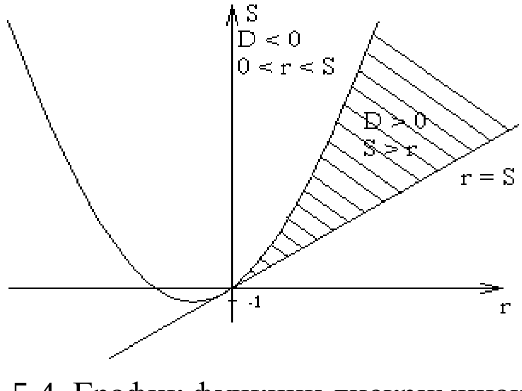


Рис. 5.4. График функции дискриминанта D

На мал. 5.4 парабола – це та множина крапок (r,s), для яких виконується умова $D = 0$. Поза параболою $D > 0$, а усередині параболи $D<0$. Для крапок із заштрихованої області виконані умови (5.5), а для крапок тієї частини внутрішності параболи, що лежить в 1-м октанті, виконані умови (5.4).

Чи є ще нерухомі крапки для системи (5.2), крім розглянутих (0,0) і $\frac{c}{d} \quad \frac{ad-kc}{bd}$?

Якщо є, то досліджувати їхній характер і дати екологічну інтерпретацію.

Розглянемо наступну модель "хижак – жертва" з наявністю притулку (**модель 2в**).

Припустимо, що до умов задачі (5.1) додане умова, що частина особин жертви може знайти притулок, укриття від хижака. Система рівнянь у цьому випадку буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = aN_1 - b(N_1 - N_r)N_2\,; \\ \dot{N}_2 = -cN_2 + d(N_1 - N_r)N_2\,, \end{cases} \tag{5.6}$$

де $N_r < N_1$ – число особин жертви, що знайшли притулок.

Передбачається самостійно провести дослідження динаміки рішення системи (5.1) у випадках, коли :

а) $N_r = k_1$, тобто чисельність жертви, що знаходить притулок, становить якусь постійну частку її загальної чисельності;

б) $N_r = \text{const}$, тобто чисельність жертви, що знаходить притулок, постійна.

Розглянемо наступну модель "хижак – жертва" з вилученням частини популяції (**модель 2г**).

Модель 2г виходить такою модифікацією задачі (5.1): до кожного рівняння для N_i додається член $-\varepsilon_i N_i$, що відповідає вилученню частини популяції ("збору врожаю"). Такі члени виникають, наприклад, при описі впливу рибальства на популяції риб або інсектицидів при вивченні популяції комах.

Система рівнянь у цьому випадку буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = [(a - \varepsilon_i) - bN_2]N_1\,; \\ \dot{N}_2 = [-(c + \varepsilon_i) + dN_1]N_2\,. \end{cases}$$

Застосування МЕТОДу ЕКОЛОГІЧНОЇ (БІОЛОГІЧНОЇ) АНАЛОГІЇ

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1(a - by_2); \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_2(-c + dy_1). \end{cases}$$

Модель може бути використана при аналізі циклічності динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції приведе до затоварення й падіння цін.

Тема 6. Модель мобілізації

Модель мобілізації одержала свою назву з області моделювання соціальних процесів. Але для збереження традиції спочатку розглянемо екологічну модель.

Позначимо через $y(t)$ – чисельність популяції. Якщо темпи приросту популяції зменшуються в міру росту чисельності популяції, то модель прийме вид

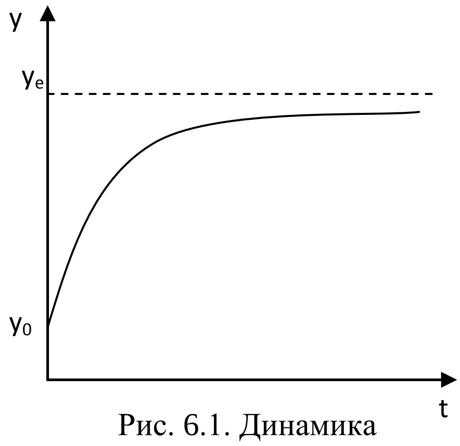


Рис. 6.1. Динамика численности популяции

$$\frac{dy}{dt} = y_e - y\ ,$$

де $y_e = \text{const}$, визначає темпи приросту.

Якщо $\frac{dy}{dt} = 0$, те $y_e - y = 0$, $y^* = y_e$ – стаціонарне рішення, до якого прагне популяція. При початкових умовах $t = 0,\quad y(0) = y_0,\ y_0 < y_e$. Рішенням диференціального рівняння є $y(t) = y_e + (y_0 - y_e)\ell^{-t}$. Графічне відображення рішення наведене на мал. 6.1.

Під терміном «політична або соціальна мобілізація» у соціології розуміється залучення людей у політичну партію, звернення до якої-небудь віри, участь у якому-небудь русі (боротьба за мир, екологія й ін.).
Якщо через $y(t)$ позначити частку мобілізованого населення, то $(1 - y(t))$ – частка немобілізованого населення. Швидкість зміни мобілізованого населення можна виразити

$$\frac{dy}{dt} = A - B,$$

де A – частина знову мобілізованого населення;
B – втрати раніше мобілізованого населення.

$A = g(1 - y)$, де g – коефіцієнт агитируемости або ефективності агітації;
$B = hy$, де h – коефіцієнт вибуття.
Підставляючи A и B, одержуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = g(1 - y) - hy.$$

Після перетворення $\frac{dy}{dt} = g - (g + h)y$.
Стаціонарним рішенням цього диференціального рівняння є $y_e = \frac{g}{g + h}$.
Після диференціювання одержуємо рішення у вигляді функції

$$y(t) = y^* + (y_0 - y^*)\ell^{-(g+h)t},$$

графік якої наведений на мал. 6.2.
Таким чином, змінна $y(t)$ змінюється в часі монотонно, асимптотически наближаючись до свого стаціонарного рішення $y_e = \frac{g}{g + h}$.

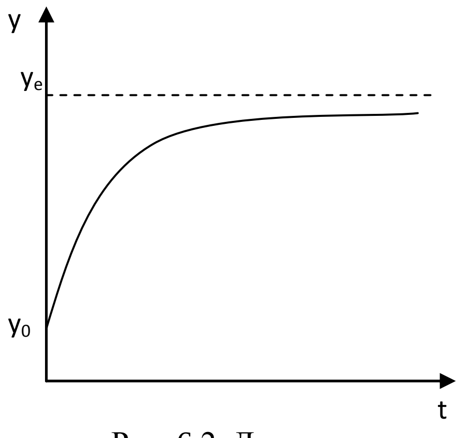


Рис. 6.2. Динамика мобилизованного населения

В економічній області до даної моделі може привести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування, наприклад

холодильників. Позначимо через $y(t)$ – холодильники, що перебувають у населення деякого міста в t – періоді; T років – середній строк роботи одного холодильника; I – число закупів населенням щорічно.
Кількість щорічних покупок змінюється слабко, тому динаміка загального числа холодильників, який користується населення, визначається рівнянням $\frac{dy}{dt} = I - qy$, де q – коефіцієнт вибуття холодильників, у найпростішому випадку $q = \frac{1}{T}$.
Зі $\frac{dy}{dt} = 0$ знаходимо рівноважне рішення $y^* = \frac{I}{q} = IT$, до якого прагне загальне рішення.
Рішенням цього рівняння є функція $y(t) = y_e + (y_0 - y_e)\ell^{-qt}$.

Отриманий результат застосовується на практиці для оцінки забезпеченості населення товарами тривалого користування, якщо кількість щорічних покупок змінюється слабко. Наприклад, при щорічному продажі в деякому місті 50 тис. холодильників, середній термін служби яких становить близько 10 років, загальне число холодильників у населення становить близько 500 тис. шт. Ця інформація дозволяє, наприклад, на основі статистики ремонтів визначити попит населення на ремонтні послуги.

Тема 7. Модель Кюрасао

Метод аналогій може також використатися для виводу однієї екологічної моделі з іншої. Існують різні методи боротьби з небажаним біологічним видом. Один з них, відомий як «метод боротьби Кюрасао», полягає в наступному. У популяцію, що проживає в деякому ареалі і яку хочуть придушити, регулярно вводять стерильних особин (вони беруть участь у внутрішньовидовій боротьбі). Ці стерильні особини не беруть участь у процесі відтворення, але разом з усіма іншими беруть участь у внутрішньовидовій боротьбі, тим самим знижуючи швидкість природного росту популяції.
Модель Кюрасао виходить із моделі (1.5), якщо ввести наступні позначення:
– $N_1(t)$ – число нормальних особин;
– $N_2(t)$ – число стерильних особин;
– $g = h = 1$ – коефіцієнти ненажерливості;
– $m = n$ – чутливість до корму;
a – коефіцієнт природного приросту;
k – коефіцієнт, що характеризує швидкість введення стерильних особин у популяцію. Тоді модель Кюрасао виглядає в такий спосіб:

$$\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a - m\cdot(N_1 + N_2)); \\ dN_2/dt = N_2(k - m\cdot(N_1 + N_2)). \end{cases}$$

За аналогією $p = \frac{a}{m}$ й $q = \frac{k}{m}$ – параметри виживаності.
Якщо $a > k$, то нормальна популяція не гине, навіть якщо N_{20} дуже велике.
Більше того, стерильні особини в цьому випадку незалежно від величини N_{20} вимирають.

Якщо ж $a < k$, то нормальна популяція вимирає, а популяція стерильних особин збільшується і її чисельність досягає свого максимального значення $N_2 = k/m$.
Відзначимо, що після того, як чисельність $N_1(t)$ практично стане дорівнює нулю, можна припинити уведення нових особин. Тоді популяція стерильних особин також буде знищена згодом за рахунок смертності.
Якщо $a = k$ – обидві популяції будуть співіснувати.
У наукознавстві аналогічна математична задача виникає, наприклад, при аналізі наукового потенціалу деякого творчого колективу, поповнюваного некваліфікованими кадрами.
Як економічна аналогія розглянутої біологічної моделі може служити закупівля негідного встаткування або встаткування, що через короткий проміжок часу стає таким через відсутність, наприклад, запасних частин.

Тема 8. Модель конверсії

За аналогією з моделлю епідемії (Бейли) можна досліджувати структурні зміни в промисловості, які супроводжуються скороченням питомої ваги виробництва одних товарів і збільшенням інших. На мал. 8.1 представлена схема моделі конверсії.

Рис. 8.1. Концептуальна схема моделі конверсії

Для створення моделі конверсії введемо наступні позначення:
–$N_1(t)$ – потужності підприємства, що працює по старих технологіях;
–$N_2(t)$ – потужності підприємства, що перебуває в стадії перепрофілювання;
–$N_3(t)$ – потужності підприємства, використовувані для випуску нової продукції.
Для спрощення аналізу припустимо, що сумарні виробничі потужності постійні й рівні $N_S(t)$: $N_S(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$ і початкові умови приймемо наступні:
при t=0 $N_1(0) = N_{10}$; $N_2(0) = N_{20}$; $N_3(0) = 0$.
У цьому випадку модель прийме вид

$$\frac{dN_1}{dt} = \begin{cases} -aN_1,\ N_1(t) > N^*; \\ 0,\ N_1(t) \le N^*; \end{cases} \qquad (8.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \begin{cases} aN_1 - bN_2,\ N_1(t) > N^*; \\ -bN_2,\ N_1(t) \le N^*; \end{cases} \qquad (8.2)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = bN_2, \qquad (8.3)$$

де *a* – коефіцієнт, що задає темпи скорочення потужності $N_1(t)$;
b – коефіцієнт, що задає темпи уведення $N_3(t)$;
N^* – заданий рівень потужності для виробництва оборонної продукції.
Рівняння (8.1) означає скорочення потужностей, використовуваних для виробництва оборонної продукції, з початкового рівня до більше низького (цільового) значення N^* з темпом скорочення *a*.

$$\frac{dN_1}{dt} = -aN_1 \ \rightarrow\ \int \frac{dN_1}{dt} = \int -aN_1 \ \rightarrow\ \ln N_1 = -at + c \ \rightarrow\ c = \ln N_1 + at \ \rightarrow$$

$$\rightarrow N_1(t) = \ell^{-at+\ln N_{10}} \ \rightarrow\ N_1(t) = \ell^{-at} \cdot \ell^{\ln N_{10}} \ \rightarrow\ N_1(t) = N_{10}\ell^{-at}.$$

Тому змінна $N_1(t)$ зменшується протягом часу T за законом $N_1(t) = N_{10}e^{-at}$ до величини N^* , після чого вона залишається постійної.

$$e^{-aT} = \frac{N^*}{N_{10}} \Rightarrow -aT = \ln\frac{N^*}{N_{10}} \Rightarrow T = -\frac{1}{a}\ln\frac{N^*}{N_{10}} \Rightarrow T = \frac{1}{a}\ln\frac{N_{10}}{N^*}.$$

Період спаду випуску оборонної продукції дорівнює $T = \ln(N_{10}/N^*)/a$.

Рівняння (8.2) визначає динаміку потужностей, що перебувають у стадії перепрофілювання й реконструкції. Швидкість зміни їхнього числа росте через скорочення виробництва оборонної продукції й падає у зв'язку із закінченням реконструкції. Тому динаміка змінної $N_2(t)$ протягом періоду T задається рівнянням

$$\frac{dN_2}{dt} + bN_2 = aN_{10}\ell^{-at}.$$

Його рішенням є функція

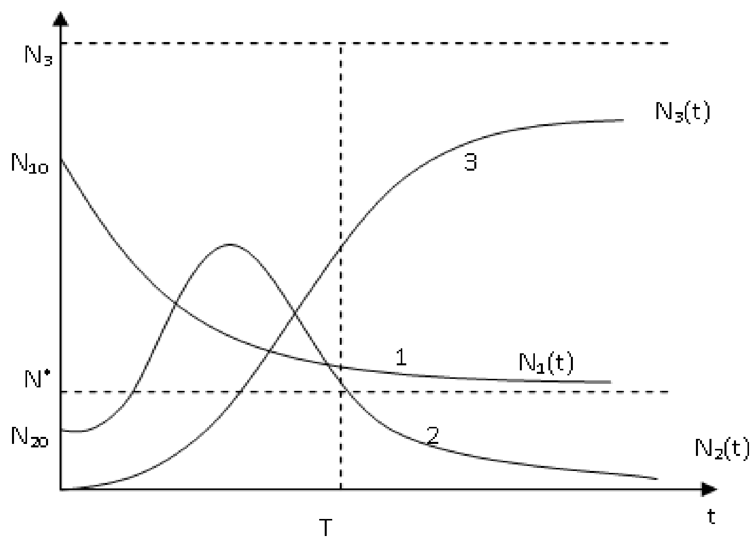
$$N_2(t) = \frac{(b-a)N_{20} - aN_{10}}{b-a}\ell^{-bt} + \frac{aN_{10}}{b-a}\ell^{-at}. \qquad (8.4)$$

При $t > T$ динаміка потужностей

$$\frac{dN_2}{dt} = -bN_2 \ \rightarrow \ln N_2 = -bt + c \ \rightarrow\ c = \ln N_2 = bt \ \rightarrow\ \ln N_2 = -bt + \ln N_2(T) + bT \ \rightarrow$$

$\rightarrow \ln N_2 = \ln N_2(T) + b(T-t) \ \rightarrow\ N_2 = N_2(T)\ell^{b(T-t)}$, $N_2(t)$ визначається експонентою $N_2 = N_2(T)\ell^{-b(t-T)}$, де $N_2(T)$ обчислюється по формулі (8.4).

Як бачимо, значення параметрів a й b безпосередньо пов'язані з характерними часами процесів скорочення виробництва оборонної продукції й налагодженням випуску ТНП. Рівняння (8.3) задає динаміку потужностей, використовуваних для виробництва нової продукції. У силу сталості сумарних потужностей маємо $N_3 = N_S - N_1 - N_2$, де $N_1(t)$, $N_2(t)$ – уже отримані рішення. Отже, потужності N_1, використовувані для виробництва оборонної продукції, скорочуються до заданого рівня N^* (лінія 1 на мал. 8.2), а потужності N_3, використовувані для виробництва товарів народного споживання, збільшуються (лінія 3).



РРис. 8.2. Динаміка потужностей у моделі конверсії

Що стосується об'єму потужностей, що перебувають у стадії перепрофілювання й реконструкції, то характер їхньої динаміки (лінія 2) визначається початковими умовами й значеннями технологічних параметрів *a* й *b*. Перший з них задає темпи скорочення потужностей N_1, а другий – темпи уведення потужностей N_3.

З аналізу отриманого рішення треба, що при більших значеннях параметрів *a* (швидке скорочення випуску оборонної продукції до нового заданого рівня) і малих значеннях параметра *b* (повільне уведення нових потужностей – тривалий період перепрофілювання) $N_2(t)$ спочатку росте, досягає максимуму, а потім повільно зменшується (лінія 2 на мал. 8.2). У результаті цього сумарні значення активних потужностей $N_1(t)$ і $N_3(t)$ спочатку падають, досягають деякого мінімального значення й тільки після цього починають повільно рости.

Очевидно, можна знайти чимало соціально-економічних процесів, що розвиваються за схемою, зображеної на мал. 8.1. Наприклад, у випадку розгляду процесу професійної перепідготовки кадрів блок «Виробництво оборонної продукції» варто замінити на блок «Працюючі по старій спеціальності», блок «Реконструкція» - на блок «нової професії, ЩоНавчаються,», блок «Виробництво ТНП» - на блок «Працюючі по новій спеціальності». Точно так само можна використати схему мал. 3.3 для моделювання процесів переходу підприємств від державної форми власності до приватного.

Тема 9. Модель епідемії

Розглянемо популяцію, у якій поширюється хвороба. Нехай *N* – чисельність популяції, постійна величина. Уважаємо, що зараження відбувається при безпосередньому контакті хвора й здорових і смертність відсутня.

Розглянемо математичну модель епідемії хвороби без імунітету (**модель 9а**). Популяція складається із двох груп: здорові (N_1) і хворі (N_2). Якщо $Z(N_1,N_1)$ і $V(N_1,N_1)$ – швидкість зараження й видужання відповідно, то систему рівнянь можна записати у виде

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -Z + V; \\ N_2 = Z - V; \\ N = N_1 + N_2. \end{cases} \qquad (9.1)$$

Покладемо, що всі хворі розбиті на дві групи – хворих, але невиявлених, виявлених й ізольованих, тобто допускають не до контакту. Нехай β – частка хворих, що виявляють органами охорони здоров'я за одиницю часу. Тоді в контакт можуть вступати $(1\text{-}\beta)N_2$ хворих й N_1 здорових. За одиницю часу виберемо *T*– час ізоляції хворих (час лікування). Уважаємо, що здорова людина може заразитися з імовірністю, пропорційній частці захворілих серед всіх, допущених до контакту. Отже, в одиницю часу може заразитися стільки людина:

$$Z = \alpha \frac{(1-\beta)N_1 N_2}{N_1 + (1-\beta)N_2}.$$

Тут α – кількість контактів в одиницю часу розраховуючи на особину. Тепер опишемо швидкість видужання *V* (число вилікуваних в одиницю часу). Считая, що всі захворілі виліковуються, одержуємо, що V = $=\beta N_2$, тобто в обрану одиницю часу виліковуються βN_2 особин. З іншого боку, швидкість видужання залежить і від стратегії виявлення захворілих. Припустимо, що щодо цієї стратегії виконані наступні гіпотези:

1) є певна частка захворілих D, що самостійно звертаються до лікаря;

2) органами охорони здоров'я проводиться профілактична перевірка населення на предмет виявлення захворювання. Якщо в одиницю часу обстежиться A особин, то вважаємо, що число виявлених хворих серед них дорівнює AN_2/N (пропорційно частці захворілих);

3) припускаємо, що кожний з виявлених указав ще на *Із* хворих, що були з ним у контакті.

Тоді $V = C(DN_2 + AN_2/N) = \beta N_2$ – число виявлених хворих в одиницю часу. Якщо $З=2$, то $\beta = 2(D + A/N)$.

Знайдемо нерухомі крапки для системи (9.1). Умовою нерухомості буде рівність $Z = V$.

$$\frac{(1-\beta)N_1N_2}{N_1+(1-\beta)N_2} = \beta N_2;$$

$$\alpha\frac{(1-\beta)N_1}{N_1+(1-\beta)N_2} = \beta;$$

$$\alpha(1\text{-}\beta)N_1 = \beta(N_1 + (1\text{-}\beta)N_2).$$

Очевидно, що крапка (0,0) є нерухомою крапкою.

$$\alpha(1\text{-}\beta)N_1 = \beta(\beta N_1 + (1\text{-}\beta)N_2);$$

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2}.$$

Звідси бачимо, що нерухомими будуть всі крапки, що лежать на прямій, для яких виконане умова $N_1 + N_2 = N$.
На мал. 9.1 крапка А є шуканою нетривіальною нерухомою крапкою для системи (9.1).

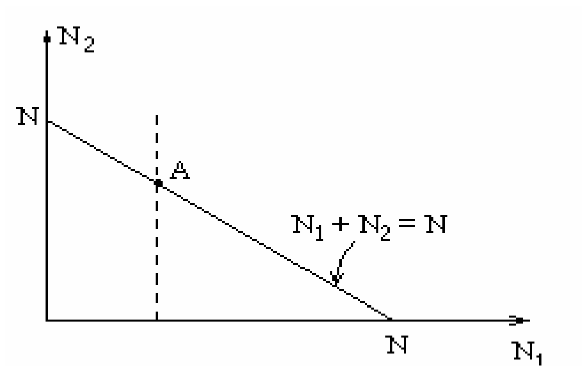


Рис. 9.1. Положення шуканої нетривіальної крапки для досліджуваної системи

Координати крапки А: $\left(\frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2} \quad \frac{(\alpha-\alpha\beta-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2}\right)$.

Помітимо, що повинне бути виконане нерівність α - $\alpha\beta$ - $\beta^2 > 0$, інакше пряма буде лежати в лівій напівплощині і єдиному положенні рівноваги за змістом

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha-\alpha\beta-\beta^2}$$

нашої задачі буде лише початок координат.
Таким чином, крапка А (нетривіальне положення рівноваги) буде мати позитивні координати, що необхідно для нашої задачі, якщо виконано умову α - $\alpha\beta$ - β^2 > 0; звідси одержуємо

$$\beta < \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

При виконанні цієї умови положення

$$N_1 = \frac{\beta(1-\beta)N}{\alpha - \alpha\beta - \beta^2}$$

рівноваги (0,0) буде нестійким (що відповідає поширенню епідемії), а положення рівноваги А - стійким.
Якщо ж

$$\beta > \frac{\alpha}{1+\alpha},$$

то єдиним положенням рівноваги буде початок координат, причому стійким. Таким чином, при виконанні цієї умови епідемії не виникне.

Число контактів в одиницю часу α залежить від конкретної хвороби й визначається для кожної хвороби за статистичним даними. Наприклад, у випадку поширення венеричних захворювань або СПИДа, по даним США, α = 8,5 контактів на місяць розраховуючи на особину.
ПРИКЛАД. Припустимо, що в деякій популяції поширюється захворювання. Нехай α = 8,5 на місяць, 30 % захворілих звертається до лікаря (тобто D = 0,3). Уважаємо також, що кожен виявлений хворий назве хоча б одного захворілого (тобто $З$ = 2). Який відсоток популяції повинен бути обстежений, щоб не виникло епідемії ?

Умова виникнення епідемії: $\beta < \frac{\alpha}{1+\alpha}$.
Т. к. у нашому прикладі β = 2·(0,3 + A/N) , то для предотвращения эпидемий должно выполняться условие 2(0,3 + A/N) > 8,5/9,5, отсюда получаем A>0,15, т.е. эпидемии не возникнет, если будет обследовано в единицу времени около 15 % всей популяции.
Далі розглянемо математичну модель епідемії хвороби з імунітетом **<u>(модель 9б).</u>**
Нехай тепер серед популяції поширюється хвороба, що залишає після себе стійкий імунітет. Тоді популяція складається із трьох груп: здорові, але піддані інфекції (N_1), хворі (N_2) і здорові, але вже перехворілою хворобою, тобто із придбаним імунітетом (N_3). У цьому випадку система для опису поширення буде мати вид

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -rN_1N_2; \\ N_2 = rN_1N_2 - sN_2; \\ N = N_1 + N_2 + N_з. \end{cases} \qquad (9.2)$$

Початкові умови для цієї задачі:

$$N_1(0) = N_1^0,\ N_2(0) = N_2^0,\ N_3(0) = 0.$$

Тут швидкість зараження $V(N_1,N_2) = r_1N_2$, де r − коефіцієнт зараження. Швидкість видужання $W(N_{1,}N_2) = s_2$, де s − коефіцієнт видужання, що показує, яка частка із захворілих видужала й придбала імунітет.

Помітимо, що в цьому випадку система не має нерухомих крапок. Тому та теорія, що використалася дотепер, незастосовна. Для проведення дослідження динаміки системи знайдемо рішення системи.

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{\frac{dN_2}{dt}}{\frac{dN_1}{dt}} = \frac{rN_1N_2 - sN_2}{-rN_1N_2} = -1 + \frac{s}{rN_1}.$$

Одержуємо рівняння з разделяющимися змінними:

$$dN_2 = (-1 + \frac{s}{rN_1})dN_1;$$

$$N_2 = -N_1 + \frac{s}{r}LnN_1 + C,$$

де $З$ − довільна постійна.

Рішення задачі Коші одержимо, виразивши з останнього рівняння константу $Із$ для даних початкових умов.

$$C = N_2^0 + N_1^0 - \frac{s}{r}LnN_1^0 .$$

Звідси рішення вихідної задачі:

$$N_2 = -N_1 + \frac{s}{r}LnN_1 + N_2^0 + N_1^0 - \frac{s}{r}LnN_1^0 .$$

Тому що при $t = 0$, $N_1^0 + N_2^0 = N$, одержуємо

$$N_2 = N - N_1 + \frac{s}{r}Ln\frac{N_1}{N_1^0}. \qquad (9.3)$$

Розглядаючи поводження функції N_2 при різних співвідношеннях для $\frac{s}{r}$, можемо бачити, як міняється число захворілих.

Зобразимо у фазовій площині N_1, N_2 інтегральну криву (9.3), тобто зобразимо ту криву з фазового портрета системи (9.2), що задовольняє початковим умовам задачі. Для побудови продифференцируем рівняння (9.3) по N_1.

$$\frac{dN_2}{dN_1} = -1 + \frac{s}{rN_1}.$$

Розглядаючи N_2 як функцію від N_1, знайдемо крапки екстремуму цієї функції. Необхідна умова для існування екстремуму функції - це рівність нулю похідної функції . Похідна дорівнює 0 при

$$N_1 = \frac{s}{r}.$$

Друга похідна

$$\frac{d^2N_2}{dN_1^2} = -\frac{s}{rN_1^2} < 0,$$

$$N_1 = \frac{s}{r}.$$

Тому при $N_1 = \frac{s}{r}$ функція N_2, досягає максимуму:

$$N_2^{\max} = N - \frac{s}{r} + Ln\frac{s}{rN_1^0} = N - \frac{s}{r}(1 - Ln\frac{s}{rN_1^0}) = N - \frac{s}{r}(1 + Ln\frac{r}{sN_1^0}).$$

На мал. 9.2 представлена крива (9.2).
Розвиток епідемії залежить від початкових умов N_1^0.

Бачимо, що якщо $N_1^0 \le \frac{s}{r}$, те загальне число хворих $N_2(t)$ убуває й за кінцевий час зникає зовсім, якщо ж $N_1^0 > \frac{s}{r}$, те число хворих спочатку зростає до максимального значення

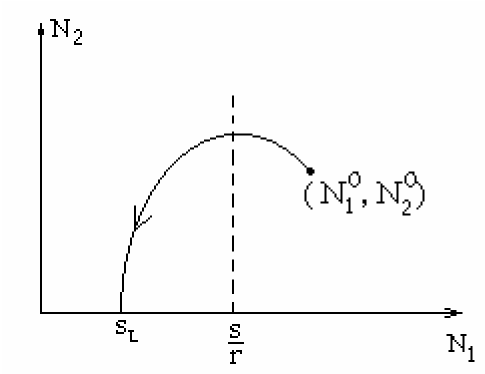


Рис. 9.2. Графік досліджуваної залежності

$$N - \frac{s}{r}(1 + Ln(\frac{r}{s}N_1^0)),$$

а лише потім убуває до повного зникнення.
ВПРАВА Знайти число здорових (які не боліли) після закінчення спалаху епідемії (тобто знайти $\lim\limits_{t\to\infty} N_1(t)$).

Тести для самоконтролю

Для перевірки освоєння вивченого матеріалу пропонується вибрати одна правильна відповідь на кожне запропоноване питання.

1. У моделі Мальтуса розглядається:

а) конкуренція видів за той самий ресурс, запаси якого обмежені;
б) конкуренція усередині популяції за той самий ресурс, запаси якого обмежені;
в) популяція, чисельність якої залежить не тільки від внутрішньовидової боротьби, але й від вилову;
г) ріст чисельності популяції при надлишку їжі й відсутності інших обмежуючих факторів;
д) поширення серед популяції хвороби, що послабляє стійкий імунітет.

2. Математично модель Мальтуса виглядає в такий спосіб:

а) $\begin{cases} dN_1/(N_1dt) = a - m(N_1 + N_2), \\ dN_2/(N_2dt) = M(t)/N_2(t) - m(N_1 + N_2); \end{cases}$

б) $dN_1(t)/dt + dN_2(t)/dt + dN_3(t)/dt = 0$;

в) $dy/dt = y(a-by)-Q$;

г) $\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a-m(gN_1+hN_2)), \\ dN_2/dt = N_2(b-n(gN_1+hN_2)); \end{cases}$

д) $\dfrac{dN}{dt} = r\cdot N.$

3. Модель логістичного росту - це:

а) модель Мальтуса;

б) модель Кюрасао;

в) модель Ферхюльста;

г) модель Бейли;

д) модель Вольтерра.

4. У моделі логістичного росту розглядається:

а) конкуренція видів за той самий ресурс, запаси якого обмежені;

б) падіння темпів росту, пов'язане із внутрішньовидовою боротьбою й обмеженістю ресурсів;

в) популяція, чисельність якої залежить не тільки від внутрішньовидової боротьби, але й від вилову;

г) ріст чисельності популяції при надлишку їжі й відсутності інших обмежуючих факторів;

д) поширення серед популяції хвороби, що послабляє стійкий імунітет.

5. Якщо модель Ферхюльста записана в такий спосіб $\dfrac{dN}{dt} = r\cdot N\cdot\dfrac{K-N}{K}$**, то** K **означає:**

а) чисельність популяції в момент часу *t*;

б) швидкість росту чисельності популяції;

в) число особин у популяції, що народжуються в одиницю часу;

г) число особин у популяції, що вмирають в одиницю часу;

д) ємність даного середовища, тобто максимальну чисельність популяції, що може жити на даній території.

6. Математично модель «збір урожаю» виглядає в такий спосіб:

а) $\dfrac{dN}{dt} = r\cdot N$;

б) $S(t)+I(t)+R(t)=N$;

в) $dy/dt = y(a-by)-Q$;

г) $\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a-m\cdot(N_1+N_2)), \\ dN_2/dt = N_2(k-m\cdot(N_1+N_2)); \end{cases}$

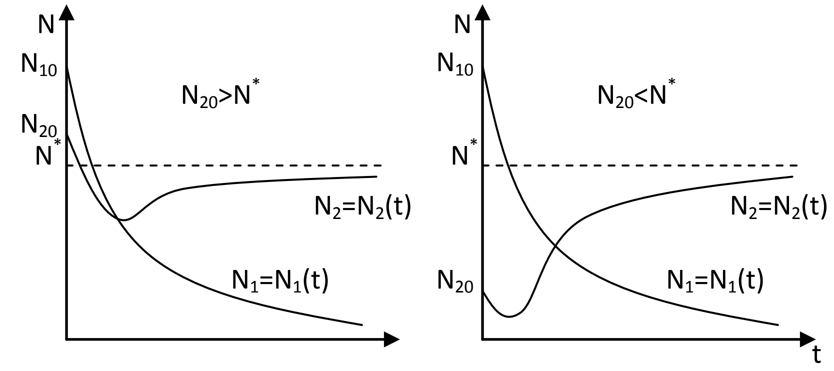
д) $\begin{cases} dN_1/(N_1dt) = a-m(N_1+N_2); \\ dN_2/(N_2dt) = M(t)/N_2(t)-m(N_1+N_2). \end{cases}$

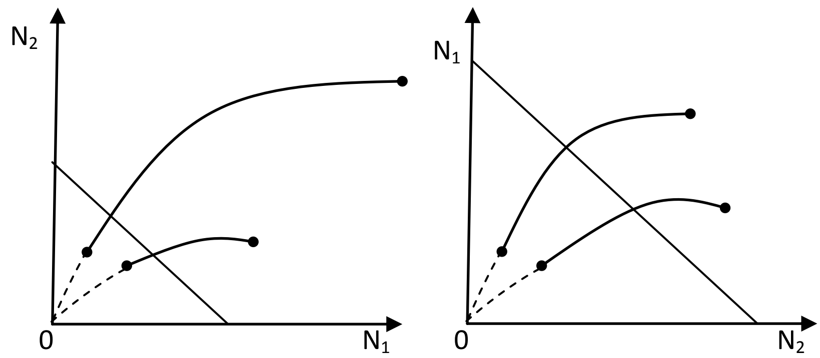
7. Якщо модель міжвидової конкуренції записати $\begin{cases} dN_1/dt = a-m\cdot F(N_1,N_2), \\ dN_2/dt = b-n\cdot F(N_1,N_2), \end{cases}$ **то** $F(N_1,N_2)$ **означає:**

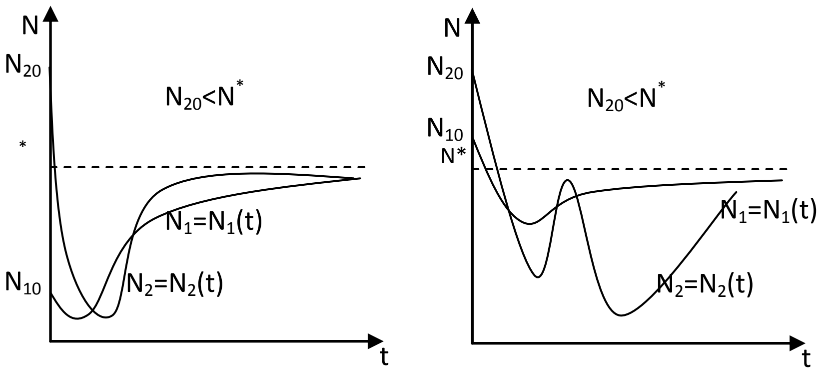
а) кількість корму, що з'їдає всіма особинами в одиницю часу;

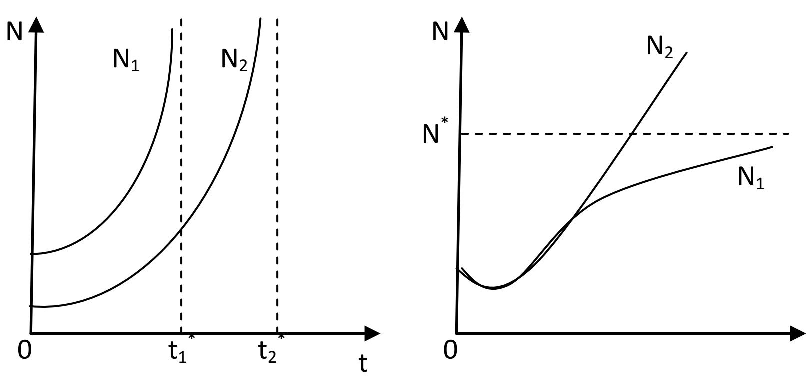
б) коефіцієнт, що визначає чутливість популяцій до недоліку корму;
в) коефіцієнт ненажерливості;
г) коефіцієнт природної смертності;
д) коефіцієнт природного приросту чисельності популяцій в умовах достатку їжі.

8. У моделі міжвидової конкуренції динаміка популяцій першого й другого виду у випадку, якщо параметр виживаності однієї популяції більше параметра виживаності іншої популяції (*p*<*q*), виглядає в такий спосіб:

а) 

б) 

г) 

д) 

9. Модель «хижак - жертва» у випадку, якщо між особинами одного виду немає суперництва, математично виглядає так:

а) $\begin{cases} dN_1/dt = (a - bN_2)N_1, \\ dN_2/dt = (-c + dN_1)N_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} dN_1/dt = (a - kN_1 - bN_2)N_1, \\ dN_2/dt = (-c + dN_1)N_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} dN_1/dt = aN_1 - b(N_1 - N_r)N_2, \\ dN_2/dt = -cN_2 + d(N_1 - N_r)N_2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a - m(gN_1 + hN_2)), \\ dN_2/dt = N_2(b - n(gN_1 + hN_2)); \end{cases}$

д) $\dfrac{dN}{dt} = r \cdot N$.

10. Якщо частина особин жертви може знайти притулок (укриття від хижака), то математично модель «хижак - жертва» виглядає в такий спосіб:

а) $\begin{cases} dN_1/dt = (a - bN_2)N_1, \\ dN_2/dt = (-c + dN_1)N_2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} dN_1/dt = (a - kN_1 - bN_2)N_1, \\ dN_2/dt = (-c + dN_1)N_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} dN_1/dt = aN_1 - b(N_1 - N_r)N_2, \\ dN_2/dt = -cN_2 + d(N_1 - N_r)N_2; \end{cases}$

г) $\dfrac{dN}{dt} = r \cdot N$;

д) $\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a - m(gN_1 + hN_2)), \\ dN_2/dt = N_2(b - n(gN_1 + hN_2)). \end{cases}$

11. У моделі $\begin{cases} dN_1/dt = (a - bN_2)N_1 \\ dN_2/dt = (-c + dN_1)N_2 \end{cases}$ коефіцієнт b означає:

а) швидкість розмноження (інтенсивність росту) при відсутності хижаків;
б) ємність середовища для жертви;
в) коефіцієнт збільшення біомаси хижаків у випадку вдалого полювання (чим більше жертв, тим більше біомаса хижаків);
г) інтенсивність вимирання хижаків при відсутності жертв;
д) коефіцієнт втрати біомаси жертв хижаків.

12. Суть моделі епідемії Бейли полягає в наступному:

а) Чисельність популяції (наприклад, «череди промислових риб») залежить не тільки від внутрішньовидової боротьби, але й від вилову.

б) У популяцію, що проживає в деякому ареалі і яку хочуть придушити, регулярно вводять стерильних особин. Ці стерильні особини не беруть участь у процесі відтворення, але разом з усіма іншими беруть участь у внутрішньовидовій боротьбі, тим самим знижуючи швидкість природного росту популяції.

в) Один вид є кормом для іншого. Число хижаків буде рости доти, поки в них буде досить їжі. Збільшення поголів'я хижаків приведе до зменшення популяції жертв. Коли жертв стане мало, чисельність хижаків почне зменшуватися. Внаслідок цього з деякого моменту почнеться ріст жертв, що через якийсь час викличе ріст хижаків, – цикл замкнув.

г) У деякому ареалі живуть два види. Ці види взаємодіють, тобто ріст чисельності однієї популяції позначається на чисельності іншої. Види конкурують за ту саму їжу, запаси якої обмежені. З ростом чисельності популяції скорочується кількість корму, внаслідок чого відбувається зниження темпів росту кожної популяції.

д) У популяції поширюється хвороба, що послабляє стійкий імунітет. Чисельність популяції – є постійна величина. Зараження відбувається при безпосередньому контакті хворих і здорових. Смертність відсутня.

13. Модель епідемії хвороби з імунітетом (Бейли) математично виглядає так:

а) $$\begin{cases} dN_1/dt = (r - aN_2)N_1, \\ dN_2/dt = (-q + bN_1)N_2; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} dS/dt = \begin{cases} -\alpha S, \text{ если } I(t) > I^*, \\ 0, \text{ если } I(t) \le I^*; \end{cases} \\ dI/dt = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{ если } I(t) > I^*, \\ -\beta I, \text{ если } I(t) > I^*; \end{cases} \\ dR/dt = \beta I; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} dN_1/dt = N_1(a - m(gN_1 + hN_2)), \\ dN_2/dt = N_2(b - n(gN_1 + hN_2)); \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} dS/dt = \begin{cases} -\alpha S, \text{ если } I(t) > I^*, \\ 0, \text{ если } I(t) \le I^*; \end{cases} \\ dI/dt = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{ если } I(t) > I^*, \\ -\beta I, \text{ если } I(t) > I^*; \end{cases} \end{cases}$$

д) $$\frac{dN}{dt} = r \cdot N.$$

14. Відповідно до методу екологічної аналогії модель Мальтуса:

а) аналогічна моделі поширення реклами;

б) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;

в) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;

г) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;

д) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;

е) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;

є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

15. Відповідно до методу екологічної аналогії модель «Збір урожаю»:

а) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;

б) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;

в) аналогічна моделі поширення реклами;

г) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;

д) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;

е) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;

є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

16. Відповідно до методу екологічної аналогії модель мобілізації:

а) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;

б) аналогічна моделі поширення реклами;

в) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;

г) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;

д) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;

е) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;

є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

17. Відповідно до методу екологічної аналогії модель Ферхюльста:

а) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;

б) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;

в) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;

г) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;

д) аналогічна моделі поширення реклами;

е) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;

є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

18. Відповідно до методу екологічної аналогії модель міжвидової конкуренції:
а) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;
б) аналогічна моделі поширення реклами;
в) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;
г) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;
д) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;
е) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;
є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

19. Відповідно до методу екологічної аналогії модель епідемії Бейли:
а) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;
б) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;
в) аналогічна моделі поширення реклами;
г) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;
д) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;
е) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;
є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

20. Відповідно до методу екологічної аналогії модель «хижак - жертва»:
а) дозволяє зробити оцінку темпів росту національного доходу;
б) аналогічна моделі поширення реклами;
в) може бути використана й для оцінки впливу скорочення фінансування утворення й науки на процеси в суспільстві;
г) дозволяє досліджувати процес розвитку приватних фірм, які конкурують із державними підприємствами;
д) дозволяє провести дослідження ситуації споживання населенням товарів тривалого користування;
е) описує процес переходу підприємств від державної до приватної форми власності;
є) може бути використана при аналізі циклічної динаміки цін. Ріст цін стимулює збільшення пропозиції товарів. У свою чергу ріст пропозиції веде до затоварення й падіння цін.

Список рекомендованої літератури до модулю 3

1. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны. Диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 232 с.

2. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.

3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука,1987. –160 с.

4. *В.Вольтерра.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука,1976. – 256 с.

5. *Лебедев В.В.* Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997. – 224 с.

6. *Могилев А.В.* Информатика: Учеб. пособие для студ. пед. вузов/ *А.В. Могилев, Н.И. Пак;* Под ред. *Е.К. Хеннера.* – М.: ACADEMA, 2003. – 816 с.

Змістовний матеріал до практичного модуля індивідуального завдання

Виконання індивідуального завдання полягає у розробці власного бізнес-плану. На сторінці індивідцального завдання за цим модулем студент викладає:

- файл опису та аналізу параметрів бізнес-проекту у форматі MS WORD, Цей файл розробляється на основі адгоритму, викладеного у конспекті лекцій;
- файл розрахунків показникв бізнес-плану у форматі MS EXCEL, файл розробляється на основі методики, викладеної у Модулі 2 цих методичних вказівок;
- Файл презентації або резюме бізнес-плану у форматі MS WORD або у форматі PDF.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни

“ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА БІЗНЕС ПЛАНУВАННЯ ”

очної, заочної та дистанційної форми навчання

спеціальність спеціальність: 073 «Менеджмент»

Рівень вищої освіти: бакалавр

ст. викл. Чернишов О.С. - Одеса, ОДЕКУ

Підп. до друку Формат Папір

Умовн. друк. арк.. Тираж Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макету

Одеський державний екологічний університет

65016, Одеса, вул. Львівська, 15