

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.Л.ПОНОМАРЕНКО

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Одеса 2012

ЗМІСТ

Передмова.....	3
ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ПРОЕКЦІЙНЕ КРЕСЛЕННЯ	
1 Основні методи проектування геометричних форм на площині.....	4
1.1 Центральне проектування.....	4
1.2 Паралельне проектування.....	4
1.3 Ортогональні проекції та система прямокутних кординат, октанти.....	5
1.4 Перехід від простору до плоскої системи – метод Монжа.....	6
2 Проектування точки.....	7
2.1 Визначення точки.....	7
2.2 Різноманітні положення точки у просторі тригранного кута.....	9
2.3 Побудова третьої проекції точки по двох заданих.....	9
3 Проектування прямої лінії.....	10
3.1 Пряма загального положення.....	11
3.2 Прямі частинного положення.....	11
3.3 Визначення довжини відрізка і кутів її нахилу до площин проекцій.....	14
3.4 Взаємне розташування двох прямих.....	15
3.5 Сліди прямої.....	17
4 Площини.....	19
4.1 Способи завдання площини.....	19
4.2 Сліди площини.....	20
4.3 Площина загального положення.....	21
4.4 Окремі випадки положення площини.....	22
4.5 Пряма і точка в площині.....	24
4.6 Проекції плоских фігур.....	27
4.7 Прямі особливого положення в площині.....	31
4.8 Взаємне положення прямої і площини.....	35
4.9 Взаємне розташування площин.....	37
4.10 Перетин прямої із площиною.....	41
5 Способи перетворення проекційного креслення.....	44
5.1 Спосіб обертання.....	44
5.2 Спосіб сполучення.....	47
5.3 Спосіб зміни площин проекцій.....	49
5.4 Спосіб плоскопаралельного переміщення.....	54

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Інженерна графіка» є однією з інженерних дисциплін підготовки спеціалістів по інформаційним управляючим системам і технологіям. Вона повинна підготувати студентів до уміння володіти «міжнародною технічною мовою» яка дозволяє розробляти і читати схеми електричні, збірні креслення пристроїв та деталей, крім цього формує вміння виконувати конструкторські документи (графічні, текстуальні) в відповідності з вимогами і правилами Єдиної системи конструкторської документації.

Мета дисципліни – підготовка майбутніх фахівців в галузі "Комп'ютерні науки".

Завдання дисципліни, як одного з напрямків геометрії та основ технічного креслення, полягає в вивченні форм предметів, які нас оточують, відношень між ними та встановлення відповідних закономірностей і застосування до розв'язку практичних задач.

Дисципліна "Інженерна графіка" належить до загальноосвітніх інженерних дисциплін підготовки фахівців з напрямку 6.050101 "Комп'ютерні науки".

Статус дисципліни : вибіркова (цикл Б) у напрямку бакалаврської підготовки «Комп'ютерні науки».

Дисципліна "Інженерна графіка" базується на вивченні дисципліни «Математика» (розділ «Аналітична геометрія»).

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні *знати*:

- основних способів побудови проєкційних креслень;
- рішення геометричних задач побудовою проєкційних креслень;
- застосування методів нарисної геометрії в дослідженнях практичних і теоретичних питань науки і техніки;
- основні методи побудови моделей об'єктів і процесів в умовах комп'ютерного проектування.

Студенти повинні *вміти*:

- визначати основні технічні рішення за допомогою графічного уявлення, використовуючи матеріали завдання;
- визначати склад функцій системи, що проєктується, комплексів задач, що реалізуються в кожній підсистемі за допомогою матеріалів завдання;
- розробляти рішення до складу інформації, її обсягам, засобам її організації, використовуючи матеріали держстандартів та форми вихідної документації;
- розробляти рішення по складу програмного забезпечення, алгоритмом процедур і операцій комп'ютерного проектування.

Дисципліни "Інженерна графіка" забезпечена підручниками, має методичне забезпечення у вигляді методичних вказівок, розроблених в ОДЕКУ. Вивчення дисципліни закінчується заліком.

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ПРОЕКЦІЙНЕ КРЕСЛЕННЯ

1 Основні методи проектування геометричних форм на площині

Під проектуванням мається на увазі процес, у результаті якого виходять зображення (проекції на площині), тобто коли через характерні крапки фігури проводяться промені до перетинання їх із площиною, і отримані точки від перетину променів із площиною з'єднують прямими або кривими лініями відповідним чином.

1.1 Центральне проектування

Нехай у просторі буде площина Π_1 назвемо її площиною проєкцій. Візьмемо яку-небудь точку S , яка не належить площині проєкції Π_1 .

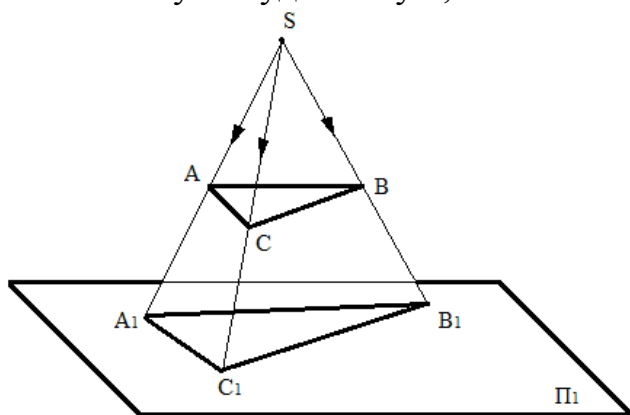


Рисунок 1

Назвемо її **центром проєкції** (рис. 1). Щоб спроектувати фігуру ABC , яку називають **оригіналом**, треба провести із точки S через точки A , B , C прямі, які називають **променями, які проєктують**, до перетину їх із площиною Π_1 , у точках A_1 , B_1 , C_1 . З'єднавши їх послідовно прямими лініями, одержимо фігуру $A_1B_1C_1$.

Це буде **центральна проєкція** $A_1B_1C_1$ даної фігури ABC на площину проєкції Π_1 . Таке зображення дає уявлення тільки про

форму предмета а не про його розміри. Тому центральні проєкції в машинобудівному кресленні майже не застосовуються.

1.2 Паралельне проектування

При паралельному проектуванні, як і у випадку центрального проектування, беруть площину проєкцій Π_1 , а замість центра проєкцій S задають напрямок проектування.

Задаємо напрямок проектування S не паралельно площини Π_1 вважаючи, що точка S – центр проектування, віддалена в нескінченність. Оригінал проектування та ж фігура ABC , розташована в просторі (рис. 2)..

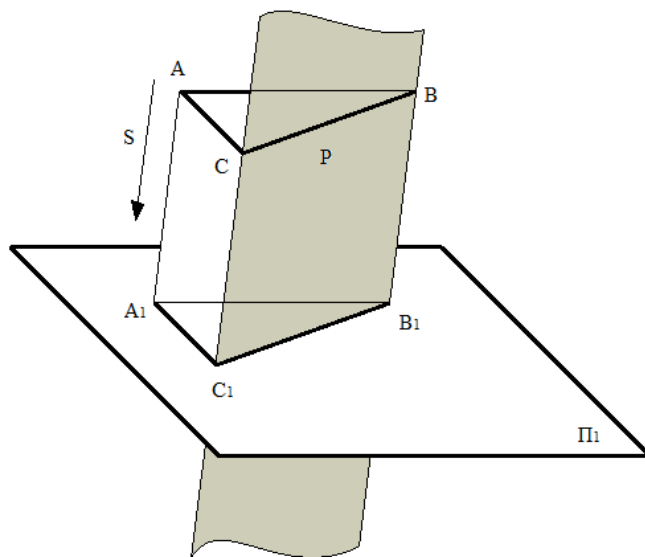


Рисунок 2

Щоб спроектувати фігуру ABC , проводимо через точки A , B , C паралельно напрямку проектування S промені, що проектують, до перетинання їх із площиною проекції Π_1 , у точках A_1 , B_1 , C_1 . Точки A_1 , B_1 , C_1 , з'єднаємо прямими лініями, одержимо фігуру $A_1B_1C_1$; це буде паралельна проекція фігури ABC на площину Π_1 . Це процес паралельного проектування. Якщо оригіналом є пряма лінія, то всі проектуючі промені точок цієї прямої будуть розташовуватися в одній площині, яка називається

проекуючою площиною. Площина P , що проходить через проектуючі прямі BB_1 і CC_1 перетинає площину проекції Π_1 по прямій. Цю пряму можна розглядати як проекцію прямої, заданої точками B і C .

Залежно від напрямку проектування S до площини проекцій паралельне проектування розділяють на **прямокутне** (ортогональне) і **косокутне** проектування.

Прямокутне проектування, коли напрямок проектування S із площиною проекцій становить прямий кут.

Косокутне проектування, коли напрямок проектування становить із площиною проекцій кут менше 90° .

1.3 Ортогональні проекції та система прямокутних координат, октанти.

Прямокутні проекції. Прямокутне проектування – це окремий випадок паралельного проектування. Метод ортогональних проекцій називають методом Монжа, тому що вперше він був викладений Гаспаром Монжем. Цей метод є найпоширенішим при складанні технічних креслень. Він не дає наочності зображення, але є простим і зручним при виконанні креслення, дає високу точність і легкий для вимірювання.

Метод Монжа – це прямокутна паралельна проекція на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій. Такий комплекс двох зв'язаних між собою ортогональних проекцій виявляє положення предмета, що проектується в просторі. Таке креслення називають комплексним кресленням.

При виконанні, ортогонального креслення для однозначного визначення оригінала у просторі необхідно мати три взаємно

перпендикулярні площини проектування Π_1 Π_2 Π_3 . Просторова модель координатних площин проекцій (рис. 3).

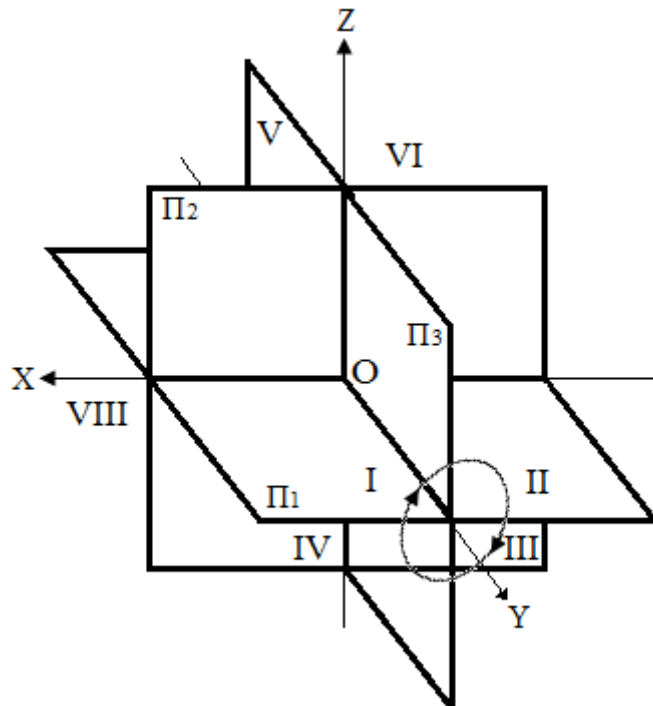


Рисунок 3

Площина Π_1 – горизонтальна площина проекції;

Площина Π_2 – фронтальна площина проекції;

Площина Π_3 – профільна площина проекції;

Лінії перетину площин проекцій утворюють осі координат .

Вісь x називають віссю абсцис, вісь y – віссю ординат, вісь z – віссю аплікат. Точка перетину координатних осей береться за початок координат і позначається буквою O (перша буква латинського слова Origin – початок).

При цьому позитивним напрямком осей координат вважають для осі x – вліво від

початку координат, для осі y в бік глядача від площини Π_2 , ось z нагору від площини Π_1 . Протилежні напрямки осей вважаються негативними.

Координатні площини розділяють простір на вісім частин – октантів. Октанти умовно прийнято нумерувати римськими цифрами. Кожний з октантів є прямокутним тригранником, у якого гранями служать частини площин проекцій (називаються полами), а ребрами координатні осі. Для технічних креслень використовують перший октант.

1.4 Перехід від простору до плоскої системи – метод Монжа.

Площинна модель координатних площин проекцій (епюр)

Користуватися просторовим макетом для відображення ортогональних проекцій геометричних фігур незручно через його громіздкість, а також через те, що на площинах Π_1 і Π_3 буде перекручування форми й розмірів фігури, що проектується.

Тому замість зображення на кресленні просторового макета користуються **епюром**, тобто кресленням, складеним із двох або більше пов'язаних між собою ортогональних проекцій геометричної фігури.

Перетворення просторового макета в епюр здійснюється шляхом сполучення площин Π_1 і Π_3 із фронтальною площиною проекцій Π_2 . Для

сполучення площини Π_1 повертаємо її на 90° навколо осі x за годинниковою стрілкою. А профільну площину Π_3 повертаємо навколо осі z також на кут 90° проти годинникової стрілки. Разом з полами проекцій буде переміщатися й ось y , при цьому ось y , що належить горизонтальній площини проекцій, після обертуту сполучиться з віссю z , а ось y профільної площини з віссю x .

2 Проектування точки

2.1 Визначення точки

Нехай дана в просторі точка A та три взаємно перпендикулярні площини проекції.

Положення точки A в просторі визначається трьома координатами (x , y , z), що показують на яку відстань точка віддалена від площин проекцій.

Щоб визначити ці відстані необхідно через точку A провести прямі перпендикулярні до площин проекцій (рис. 4). Точки перетинів A_1 , A_2 , A_3 , отримані в результаті перетину прямих із площинами проекцій називаються ортогональними проекціями.

A_1 – горизонтальна проекція точки A .

A_2 – фронтальна проекція точки A .

A_3 – профільна проекція точки A .

Вимірявши отримані відрізки AA_1 , AA_2 , і AA_3 одержимо значення аплікати z , ординати y і абсциси x точки A відповідно.

Прямі AA_1 , AA_2 , AA_3 називають проектуючими прямими.

AA_1 – горизонтально проектуюча пряма.

AA_2 – фронтально проектуюча пряма.

AA_3 – профільно проектуюча пряма.

Дві проектуючі прямі, проходячи через точку A , визначають площину, яку називають проектуючою. Щоб одержати епюр точки A , перетворимо просторовий макет, розгорнемо площини проекцій (рис. 5)..

Фронтальна проекція точки A_2 залишається на місці, тому що належить площині Π_2 . Горизонтальна проекція A_1 разом з горизонтальною площиною проекції опуститься вниз і розташується на одному перпендикулярі до осі x із фронтальною проекцією A_2 .

Профільна проекція A_3 буде обертатися разом з Π_3 і розташується на одному перпендикулярі до осі z із фронтальною проекцією A_2 і віддалена від осі z на таку ж відстань, як горизонтальна проекція A_1 віддалена від осі x .

Відзначимо, що на комплексному кресленні, прямі, які з'єднують (зв'язують) дві проекції однієї й тієї ж точки, називаються **лініями проекційного зв'язку**. A_1A_2 – **вертикальна лінія зв'язку**; A_2A_3 – **горизонтальна лінія зв'язку**; третя лінія складається з двох прямих: горизонтальної A_1A_{13} і вертикальної $A_{13}A_3$, тому що вісь y при сполученні площин Π_2 і Π_3 як би роздвоюється й на комплексному кресленні

зображується двічі, вона називається **горизонтально-вертикальною лінією зв'язку**. Така лінія зв'язку зображується ламаною лінією, що складає прямий кут, вершина якого лежить на бісектрисі $O k$ кута, яку називають **постійною прямою** комплексного креслення.

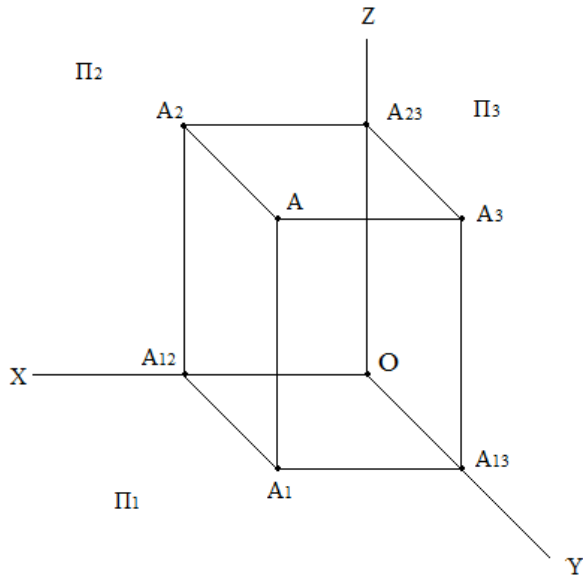


Рисунок 4

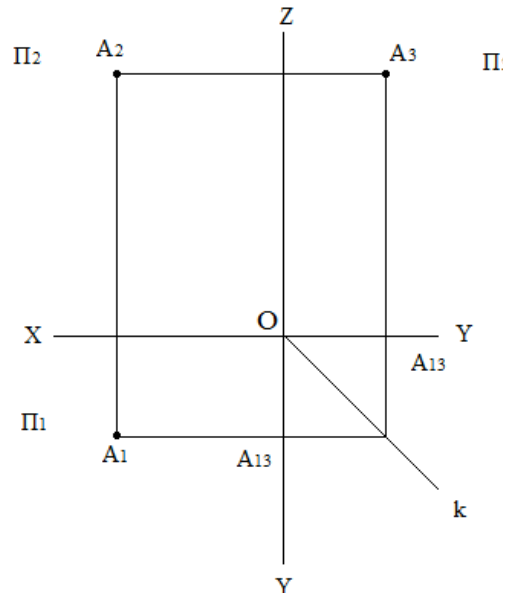


Рисунок 5

Так, на комплексному кресленні встановлюються три лінії зв'язку:
Горизонтальна лінія зв'язку, перпендикулярна осі проекції z , на ній завжди розташовуються **фронтальна** A_2 і **профільна** A_3 проекції;

вертикальна лінія зв'язку, перпендикулярна осі проекції x , на ній завжди розташовуються **горизонтальна** A_1 і **фронтальна** A_2 проекції ;

горизонтально-вертикальна лінія зв'язку, перпендикулярна осям проекцій y , на ній завжди розташовуються **горизонтальна** A_1 і **профільна** A_3 проекції точки A .

Отже горизонтальна проекція $A_1 (x, y)$ точки A визначається абсцисою x і ординатою y ; її фронтальна проекція $A_2 (x, z)$ – абсцисою x і аплікатою z , а профільна проекція $A_3 (y, z)$ – ординатою y і аплікатою z . Таким чином ми бачимо, що положення точки в просторі цілком визначається положенням її двох ортогональних проекцій.

Як наслідок цього – по двох заданих ортогональних проекціях точки завжди можна побудувати третю ортогональну проекцію.

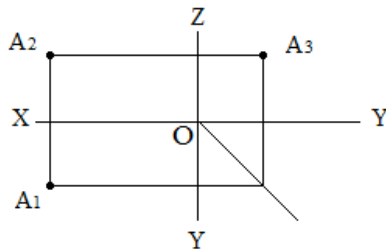
Складемо таблицю, у якій укажемо які знаки мають координати точок, розташованих у різних квадрантах

Користуючись цією таблицею та знаючи напрямок для позитивного та негативного значення координатних осей, а також враховуючи властивості проекцій точки, можна вказати на епюрі проекції точки, якщо відомі її координати, або визначити, у якому октанті розташовані точка і

на яку відстань вона віддалена від координатних площин проєкцій, якщо будуть задані хоча б дві її ортогональні проєкції.

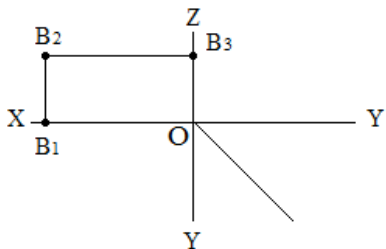
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	-	-	+	+	-	-	+
Y	+	+	+	+	-	-	-	-
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

2.2 Різноманітні положення точки у просторі трьохгранного кута



Комплексні креслення точок, по-різному розташованих щодо площин Π_1 , Π_2 , Π_3 у першому октанті (рис. 6).

Точка A розташована в просторі, тобто має висоту, глибину й ширину. Всі три проєкції A_1 , A_2 , A_3 точки A розташовані на деякій відстані від осей x , y , z .



Точка B розташована на площині Π_2 , тобто має тільки висоту й ширину. Фронтальна проєкція B_2 збігається із самою точкою B , горизонтальна проєкція B_1 знаходиться на осі x , профільна проєкція B_3 — на осі z .

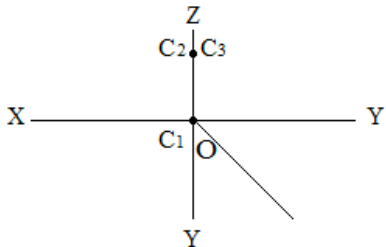
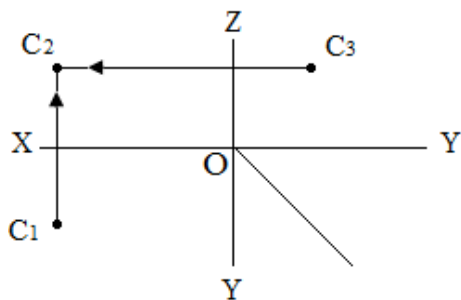


Рисунок 6

Точка C розташована на осі z , тобто має висоту. Фронтальна проєкція C_2 і профільна C_3 збігаються із самою точкою C , горизонтальна проєкція C_1 знаходиться в точці O — початку осей проєкцій.

2.3 Побудова третьої проєкції точки по двох заданих.



По двох даних проєкціях точки завжди можна побудувати її третю проєкцію, використовуючи постійну пряму креслення. Всі побудови краще виконувати із застосуванням рейсшини й косинця з рівними катетами (45° , 45° , 90°).

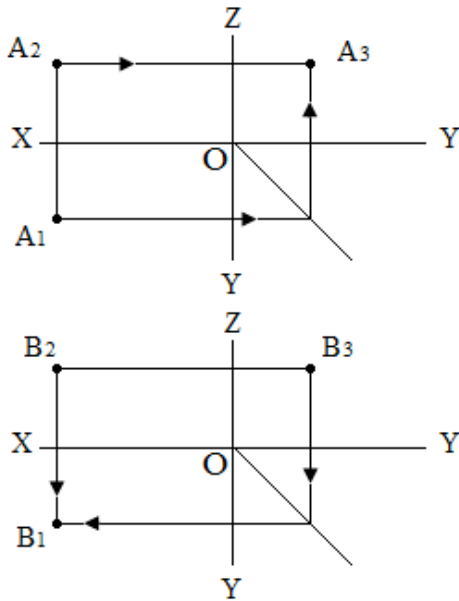


Рисунок 7

Розглянемо три випадки знаходження третьої проекції точки, коли дві її проекції задані різними проекціями (рис. 7):

Дано проекції A_2 і A_1 точки A , треба побудувати профільну проекцію A_3 .

Дано проекції B_2 і B_3 , треба побудувати горизонтальну проекцію B_1 .

Дано проекції C_1 і C_3 , треба побудувати фронтальну проекцію C_2 .

3 Проектування прямої лінії

При проектуванні прямої лінії проєктуючі промені всіх точок прямої розташуються в одній площині, яку називають **проєктуючою**.

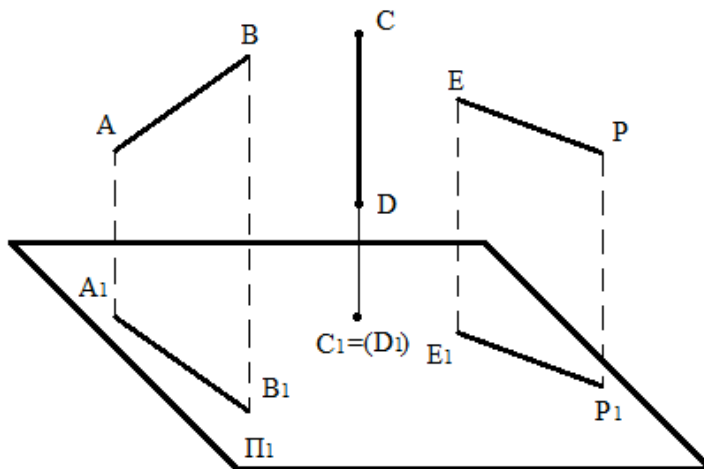


Рисунок 8

Ця площина перетинає площину проєкцій по прямій лінії, а тому проєкцією прямої лінії на площину в загальному випадку є **пряма лінія** (рис. 8). В окремому випадку, коли пряма збігається з напрямком проєктування S , вона проєктується в **точку**.

Розглянемо різне розташування відрізків у просторі, їхні проєкції на площину Π_1 . Відрізок AB розташований похило до площини Π_1 , його проєкція $A_1B_1 < AB$. Відрізок CD перпендикулярний до площини Π_1 , його проєкція точка $C_1 = (D_1)$. Відрізок EP паралельний до площини Π_1 , його проєкція E_1P_1 дорівнює відріzk EP .

Пряма в просторі може займати різні положення щодо площин проєкцій, розглянемо їх.

3.1 Пряма загального положення

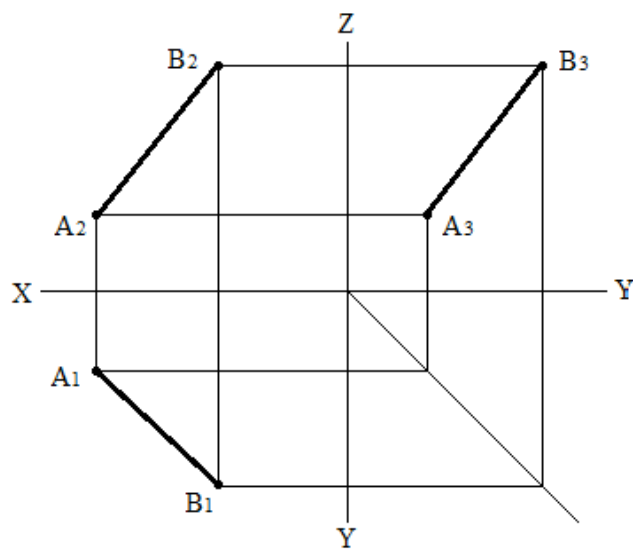


Рисунок 9

Пряма, не паралельна ні одній площині проєкцій, називається **прямою загального положення**. Проєкції A_2B_2 , A_1B_1 і A_3B_3 прямої AB загального положення завжди похилі до всіх осей проєкцій (рис. 9).

Всі проєкції відрізка менші істинної довжини відрізка AB .

3.2 Прямі частинного положення

Пряма, розташована паралельно якій-небудь площині проєкцій, називається **прямою рівня**. Для прямих рівня введені назви: **горизонтальна**, або **горизонталь**, паралельна горизонтальній площині проєкції Π_1 , (рис.10 , а).

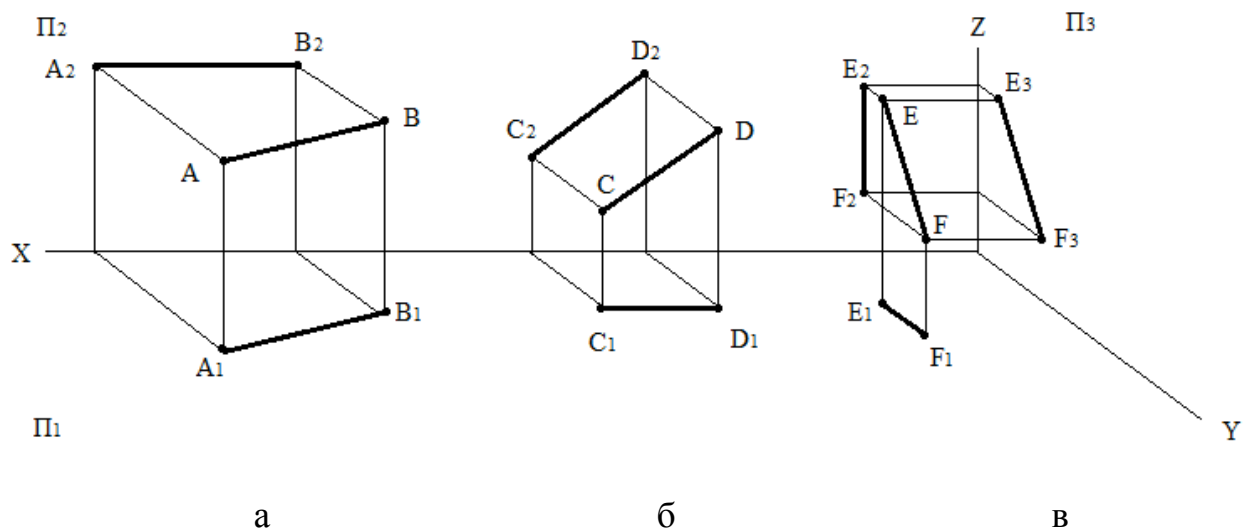


Рисунок 10

Фронтальна, або **фронталь**, паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 (рис. ,10 б).

Профільна – паралельна профільній площині проєкцій Π_3 (рис. 10 в).

Відрізки прямих рівня проєктують у натуральну величину на ту площину проєкцій, якій вони паралельні. Проєкції відрізків, рівні тим, що проєктуються, на комплексному кресленні будемо позначати буквами російського алфавіту НВ.

Треба вміти по комплексному кресленню визначати положення геометричного елемента, що знаходиться в просторі, стосовно площин проекцій.

Розглянемо й прочитаємо комплексні креслення прямих рівня.

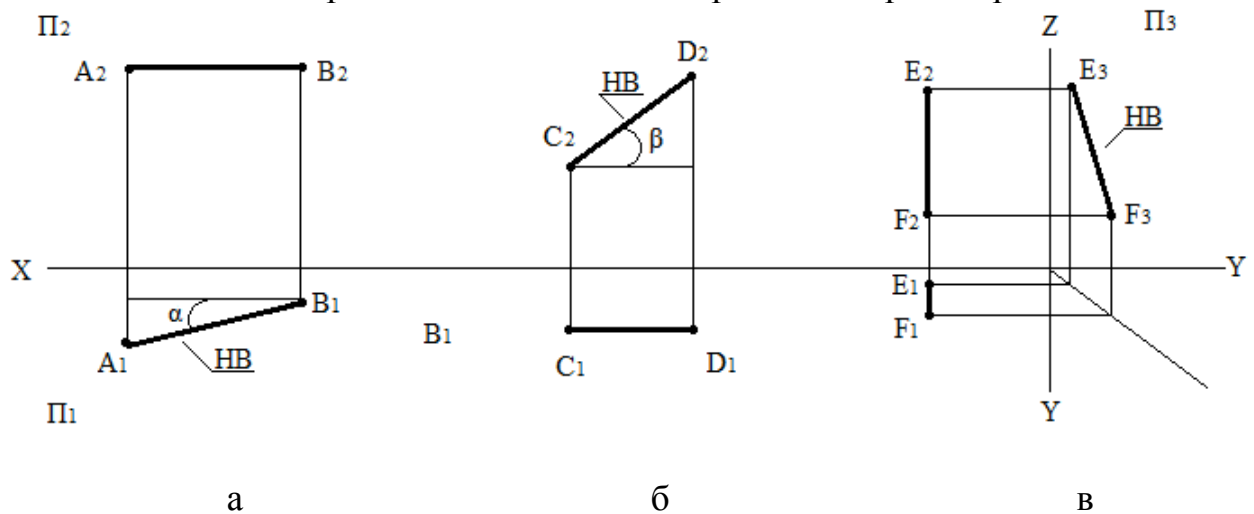


Рисунок 11

Горизонтальна пряма (рис.11,а). Фронтальна проекція прямої, що паралельна осі x , підтверджує паралельність прямої площини Π_1 , $A_1B_1 = AB$; A_2B_2 менше відрізка AB , профільна проекція A_3B_3 паралельна осі y і також менше AB .

Фронтальна пряма (рис.11,б). Горизонтальна проекція прямої, паралельної осі x , підтверджує паралельність прямої площини Π_2 ; $C_2D_2 = CD$; C_3D_3 менше відрізка CD і профільна проекція паралельна осі z .

Профільна пряма (рис.11,в). Фронтальна проекція прямої, паралельної осі z , підтверджує паралельність прямої площини Π_3 ; $E_3P_3 = EP$; E_2P_2 менше відрізка EP .

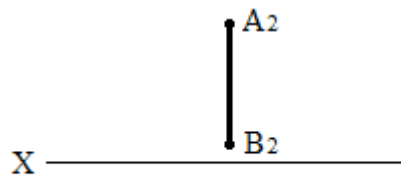
Проектуючі прямі

Пряма, розташована перпендикулярно до будь-якої площини проекцій, називається **проектуючою прямою**. Помітимо, що **проектуюча пряма** є в той же час і **прямою рівня**. Проектуючі прямі, залежно від їхньої перпендикулярності площини проекцій називаються:

горизонтально проектуючою – перпендикулярна площини Π_1 ,

фронтально проектуючою – перпендикулярна площини Π_2 ;

профільно проектуючою – перпендикулярна площини Π_3 .

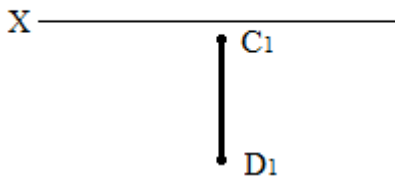


Всі точки такої прямої проєктують на одну площину проєкцій у точку, а на дві інші – відрізками, рівними їхній натуральній величині.

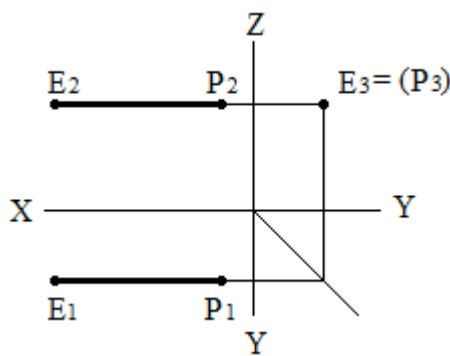
• $A_1 = (B_1)$

а

• $C_2 = (D_2)$



б



в

Рисунок 12

Розглянемо комплексні креслення проєктуючих прямих.

Горизонтально проєктуюча пряма (рис.12, а). Горизонтальна проєкція вироджується в точку, підтверджуючи перпендикулярність прямої площини Π_1 . Фронтальна проєкція $A_2B_2 = AB$.

Фронтально проєктуюча пряма (рис.12,б). Фронтальна проєкція перетворюється в точку, підтверджуючи перпендикулярність площини Π_2 . Горизонтальна проєкція $C_1D_1 = CD$.

Профільно проєктуюча пряма (рис.12,в). Профільна проєкція перетворюється в точку, підтверджуючи перпендикулярність площини Π_3 . Фронтальна проєкція E_2P_2 і горизонтальна E_1P_1 , рівні EP .

До особливих випадків треба віднести положення прямих, коли вони належать самим площинам проєкцій (рис 13).

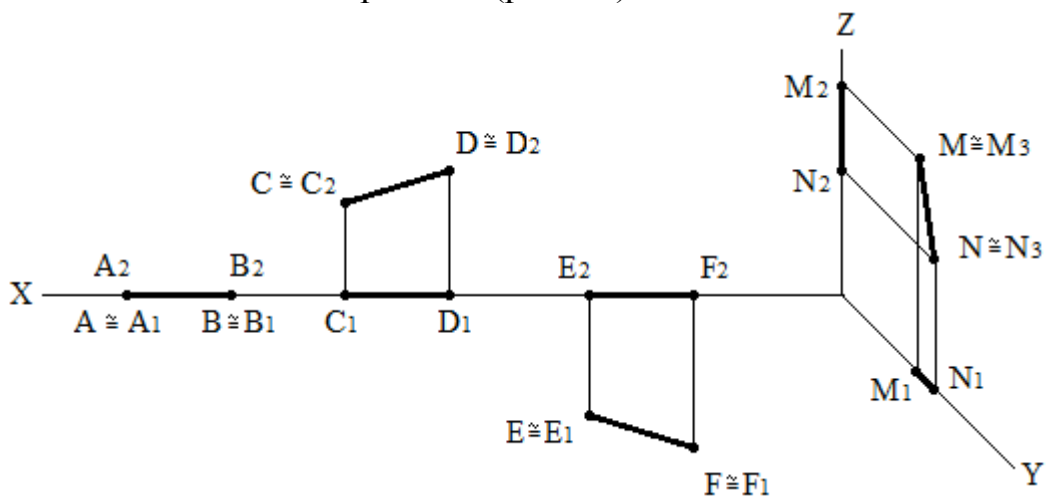


Рисунок 13

Характерною ознакою для таких прямих на комплексному кресленні буде: при проектуванні на три площини із трьох дві проекції повинні розташовуватися на осях проекцій.

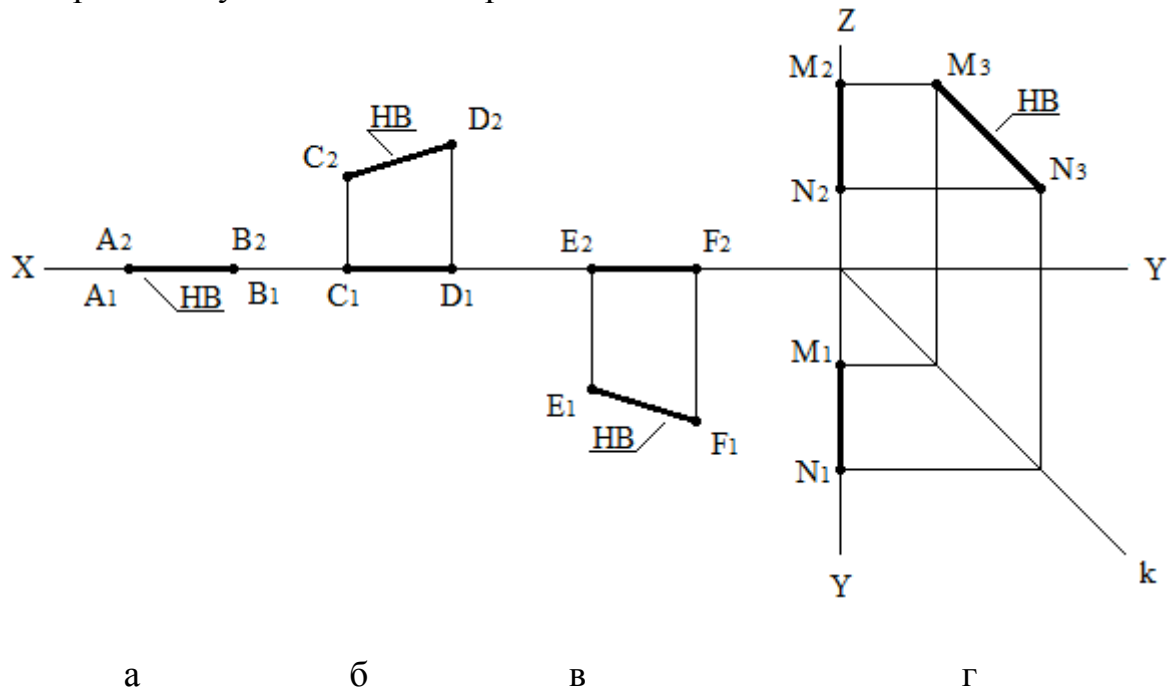


Рисунок 14

Випадок 1 (рис.14,а). Пряма AB належить осі x (площинам Π_1 і Π_2). Горизонтальна проекція A_1B_1 , і фронтальна проекція A_2B_2 збігаються з віссю x $A_2B_2=A_1B_1=AB$.

Випадок 2 (рис.14,б). Пряма CD належить площині Π_2 . Фронтальна проекція C_2D_2 збігається із прямою CD , а горизонтальна C_1D_1 – з віссю x ; $C_2D_2=CD$.

Випадок 3 (рис.14,в). Пряма EP належить площині Π_1 горизонтальна проекція E_1P_1 збігається із прямою EP і $E_1P_1=EP$, фронтальна збігається з віссю x .

Випадок 4 (рис.14,г). Пряма MN належить площині Π_3 . Профільна проекція M_3N_3 збігається із прямою MN , фронтальна M_2N_2 збігається з віссю z , а горизонтальна M_1N_1 – з віссю y .

3.3 Визначення довжини відрізка і кутів її нахилу до площин проекцій

Довжина відрізка прямої більше довжини проекції цього відрізка. Виключення становить той випадок, коли відрізок прямої паралельний проекції цього відрізка. На рис. 15 дане наочне зображення проектування відрізка AB прямої на площину Π_1 , за допомогою площини σ . Якщо в площині σ провести пряму AC , паралельну A_1B_1 одержимо прямокутний трикутник ABC , один катет

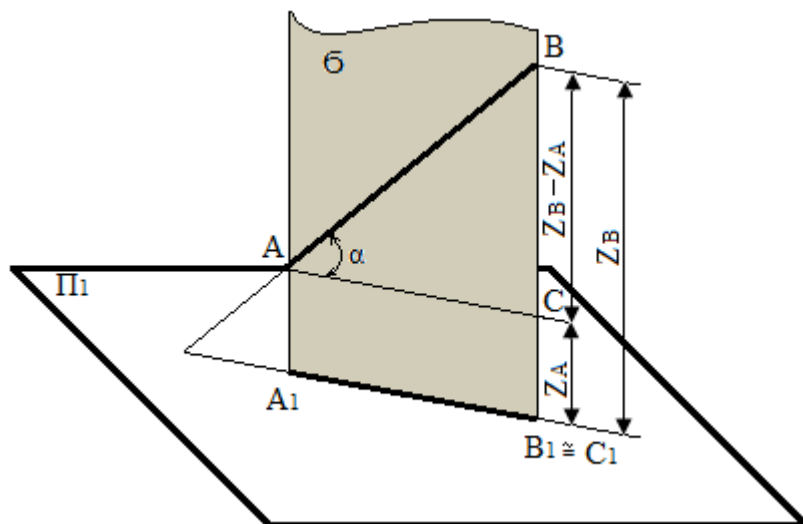


Рисунок 15

до перетину її з лінією зв'язку в точці C_2 – вершині прямокутного трикутника $A_2B_2C_2$. Взявши проекцію A_1B_1 за катет прямокутного трикутника, із точки B_1 проводять перпендикуляр і на ньому відкладають другий катет $B_1\overline{B}_1$, що дорівнює $z_2 - z_1$.

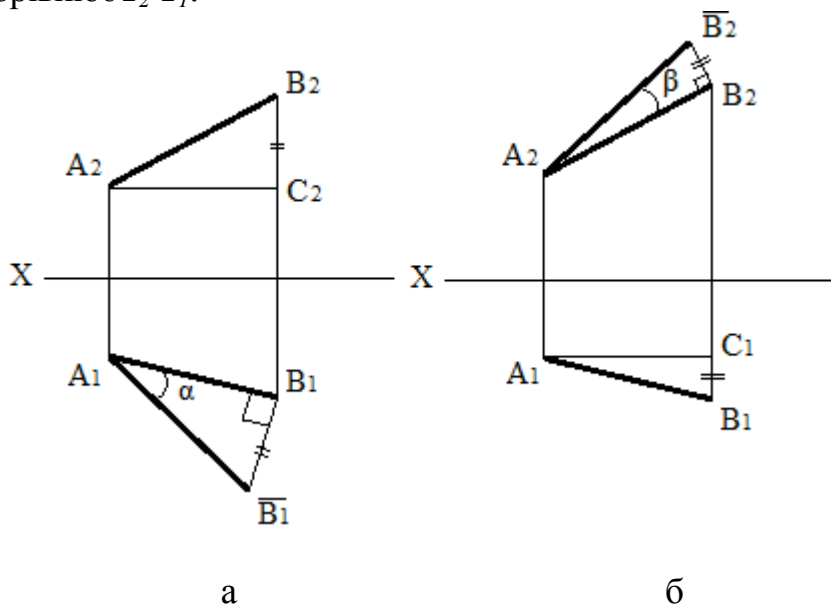


Рисунок 16

якого $AC = A_1B_1$,
другий – $BC = z_2 - z_1$
гіпотенуза AB дорівнює
довжині відрізка AB .

Визначимо по
двох проекціях відрізка
його довжину за
допомогою
прямокутного
трикутника (рис 16 а).

Через точку A_2
проводять пряму,
паралельну осі x ,

Точку $\overline{B}_1$
з'єднують прямою з
точкою A_1 .
Гіпотенуза $\overline{B}_1A_1$,
побудованого
трикутника
 $A_1B_1\overline{B}_1$ виражає
дійсну величину
відрізка AB . Кут α є
кутом нахилу
відрізка AB прямої
до площини Π_1 .

Аналогічно
розглянутій
побудові

можна визначити натуральну величину відрізка прямої AB , прийнявши за катет прямокутного трикутника фронтальну проекцію A_2B_2 (рис. 16,б). Кут β є кутом нахилу відрізка AB прямій до площини Π_2 .

3.4 Взаємне розташування двох прямих

Дві прямі в просторі можуть бути: взаємно паралельними, перетинатися, схрещуватися.

За ознаками на комплексному кресленні можна судити про взаємне положення двох прямих у просторі.

Паралельні прямі. Якщо дві прямі в просторі паралельні одна одній, то на комплексному кресленні їхні однойменні проекції також паралельні.

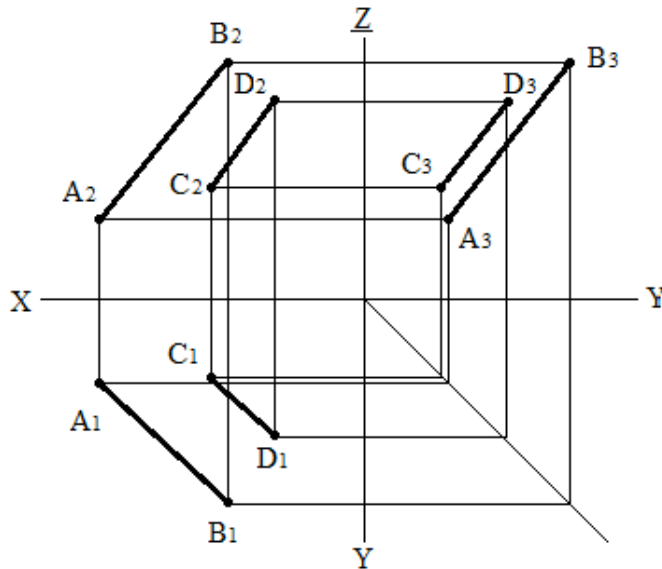


Рисунок 17

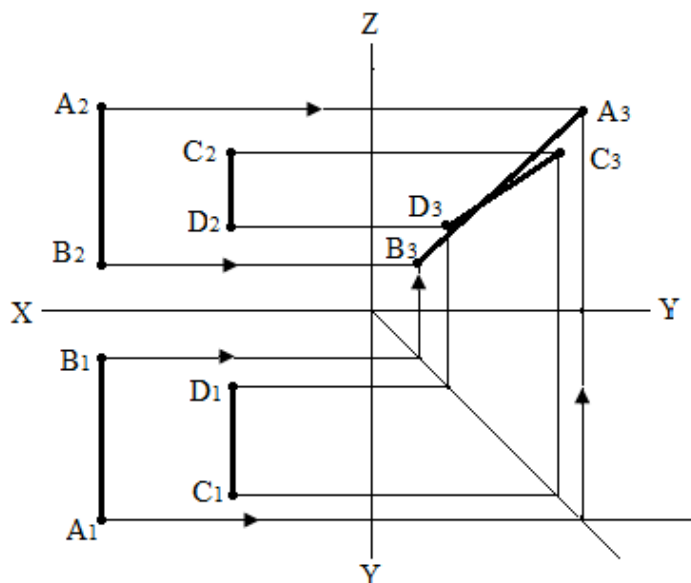


Рисунок 18

На рис. 18 наведений такий випадок. Дві прямі паралельні до площини Π_3 . Незважаючи на те, що фронтальні проекції A_2B_2 і C_2D_2 і горизонтальні A_1B_1 і C_1D_1 , паралельні, прямі в просторі не паралельні, тому що побудовані профільні проекції A_3B_3 і C_3D_3 виявилися не паралельними.

Справедливо й зворотний висновок: якщо на комплексному кресленні однойменні проекції прямих на будь-яку площину проекцій паралельні, то прямі в просторі паралельні.

На рис.17 дане комплексне креслення двох паралельних прямих AB і CD загального положення. Фронтальні проекції A_2B_2 і C_2D_2 , горизонтальні A_1B_1 і C_1D_1 , і профільні A_3B_3 і C_3D_3 паралельні. Отже, прямі AB і CD у просторі паралельні.

Такий висновок можна зробити, якщо паралельні прямі загального положення.

Виключенням є прямі, які паралельні до одної якої-небудь площини проекцій.

Робити висновок про їхню паралельність можна тільки після побудови третьої проекції.

Перерізні прямі. Якщо дві прямі в просторі перетинаються, то на комплексному кресленні їхні однойменні проекції перетинаються й точки перетину цих проекцій лежать на одній лінії зв'язку.

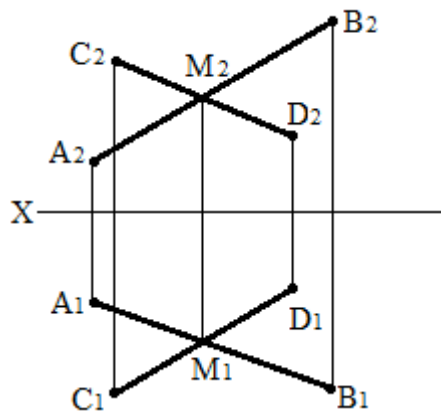


Рисунок 19

зв'язку і є проекціями їхньої загальної точки. Отже, прямі AB і CD перетинаються.

Перехресні прямі. Якщо дві прямі в просторі не паралельні та не перетинаються, то вони схрещуються. У перехресних прямих на комплексному кресленні однойменні проекції можуть перетинатися, але

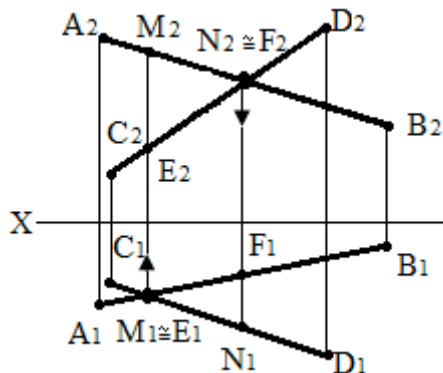


Рисунок 20

точки їхнього перетину не будуть лежати на одній лінії зв'язку. На рис. 20 комплексне креслення двох перехресних прямих AB і CD . Однойменні фронтальні проекції A_2B_2 і C_2D_2 і однойменні горизонтальні проекції A_1B_1 і C_1D_1 перетинаються. Точки їхнього перетину не розташовані на одній лінії зв'язку і їх не можна вважати загальними для двох прямих AB і CD . Отже, прямі AB і CD не перетинаються, а схрещуються.

3.5 Сліди прямої

Точки перетину прямої із площинами проекцій називаються **слідами прямої** (рис 21). Точку M перетину прямої із площиною Π_1 називають

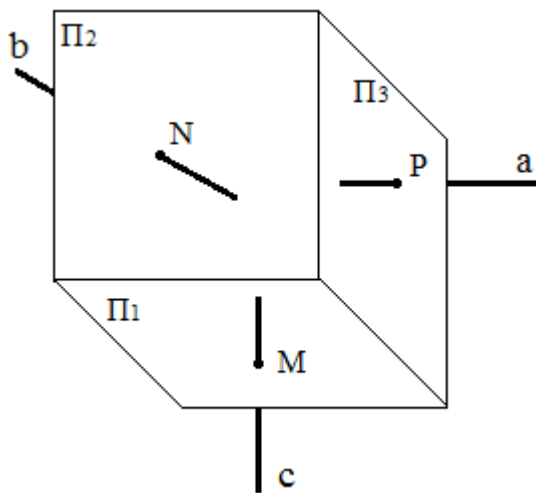


Рисунок 21

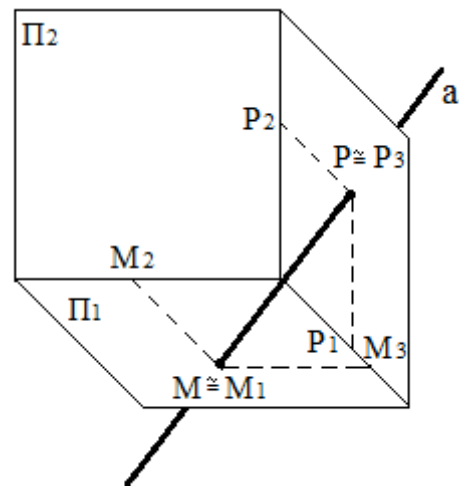


Рисунок 22

горизонтальним слідом прямої, точку N перетину прямої b із площиною Π_2 називають **фронтальним слідом прямої**, точку P перетину прямої a із площиною Π_3 **профільним слідом прямої**.

На рис. 22 пряма a перетинає площини Π_1 і Π_3 . Проекція M_1 , горизонтального сліду M збігається із самим слідом, фронтальна проекція M_2 лежить на осі x , а профільна проекція M_3 – на осі y . Проекція P_3 профільного сліду P збігається із самим слідом, фронтальна проекція P_2 лежить на осі z , а горизонтальна проекція P – на осі y .

Побудова слідів прямих на комплексному кресленні

На рис. 23,а дане наочне зображення знаходження слідів прямої AB загального положення, а на рис. 23,б – комплексне креслення.

Для знаходження фронтальної проекції N_2 фронтального сліду N , спочатку знаходять його горизонтальну проекцію N_1 , продовжують горизонтальну проекцію A_1B_1 до перетину з віссю x , одержують горизонтальну проекцію N_1 сліду N , із точки N_1 , проводять лінію зв'язку до перетину із продовженням фронтальної проекції A_2B_2 одержують точку N_2 – фронтальну проекцію фронтального сліду; вона збігається із самим слідом ($N = N_2$). Для знаходження горизонтального сліду M_1 , спочатку треба знайти його фронтальну проекцію M_2 . Продовжують фронтальну проекцію A_2B_2 до перетину з віссю x , одержують точку M_2 – фронтальну проекцію горизонтального сліду M . Із точки M_2 проводять лінію зв'язку до перетину із

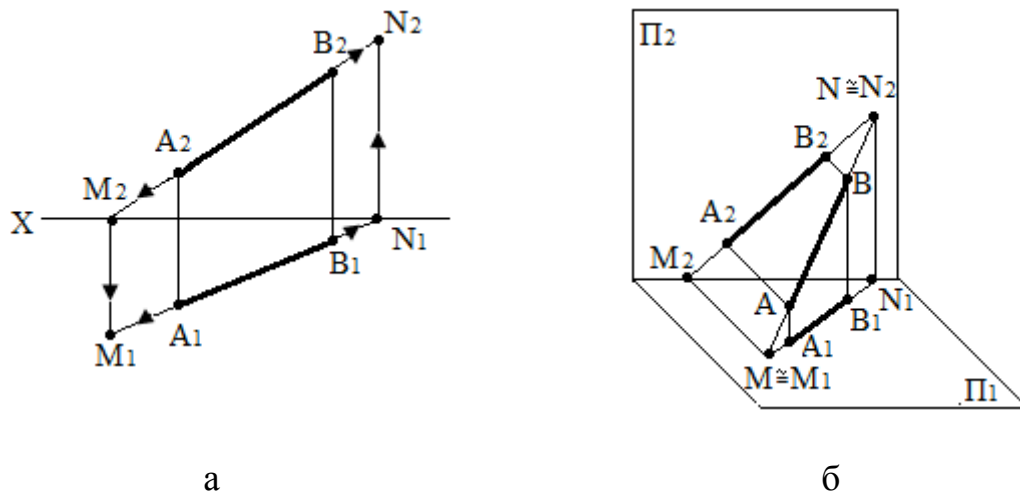


Рисунок 23

продовженням горизонтальної проекції A_1B_1 одержують точку M_1 , – горизонтальну проекцію горизонтального сліду; вона збігається із самим слідом ($M = M_1$).

4 Площини

4.1 Способи завдання площини

Поверхня, утворена рухом прямої, що переміщається паралельно самої собі по нерухомій прямій, є **площиною** (рис. 24)

Лінія K – **утворююча**, а лінія a – **напрямна**.

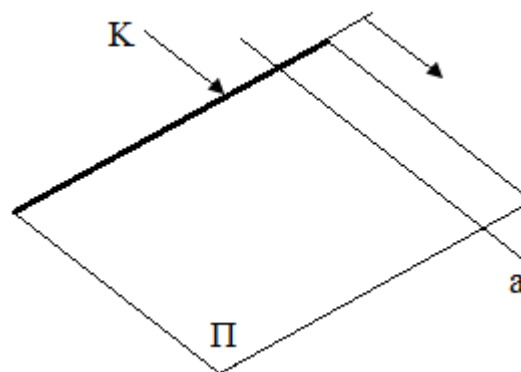


Рисунок 24

З елементарної геометрії відомо, що положення площини цілком визначається, коли задані: три точки, що не належать одній прямій (рис. 25 а); пряма й точка поза її (рис. 25 б); дві прямі, що перетинаються (рис. 25 в); дві паралельні прямі (рис. 25 г); будь-яка плоска фігура (рис. 25 д).

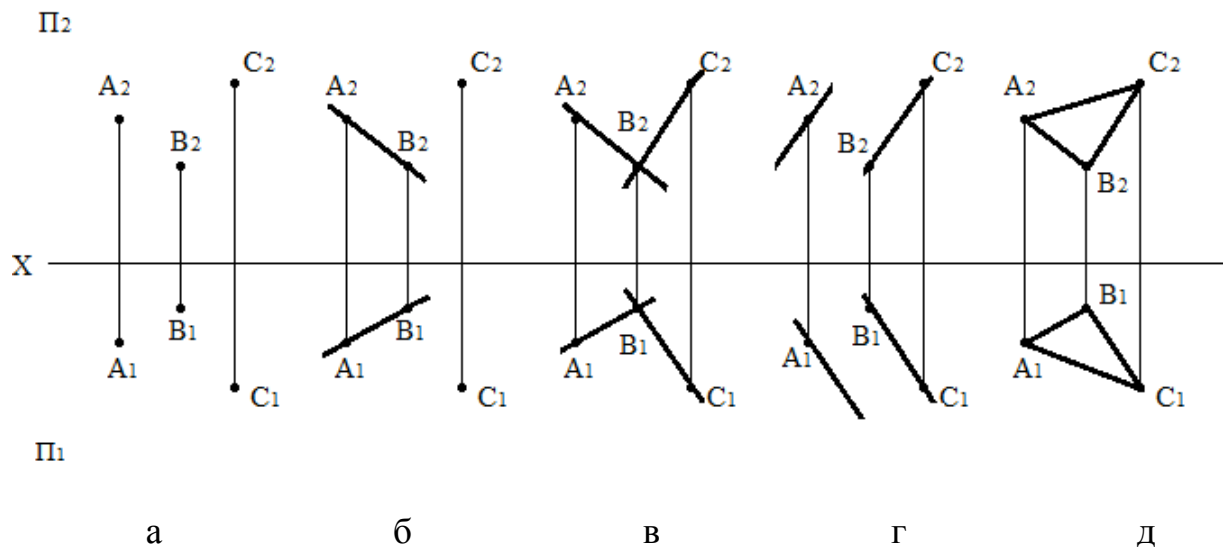


Рисунок 25

Як видно з комплексних креслень, кожен з перерахованих способів завдань допускає можливість переходу від одного способу до іншого.

4.2 Сліди площини

Слідами площини називаються прямі лінії перетину цієї площини із площинами проекцій. На (рис. 26) наведений випадок, коли площина β перетинає площини проекцій Π_1, Π_2, Π_3 по прямих k, l, m .

Пряма k перетину площини із площиною Π_1 , називається **горизонтальним слідом**. Пряма l перетину площини β із площиною Π_2 – **фронтальним слідом**. Пряма m перетину площини β із площиною Π_3 – **профільним слідом**.

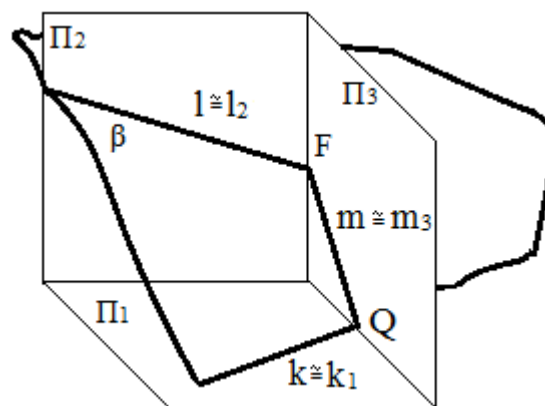


Рисунок 26

Точки F, Q перетину слідів площини β з осями проекції z, y називаються **точками сходу слідів** площини. Слід площини, як пряма, що одночасно належить даній площині і площині проекцій, має одну свою проекцію, що збігається із самим слідом, а дві інші – співпадаючі з осями проекцій (рис. 27).

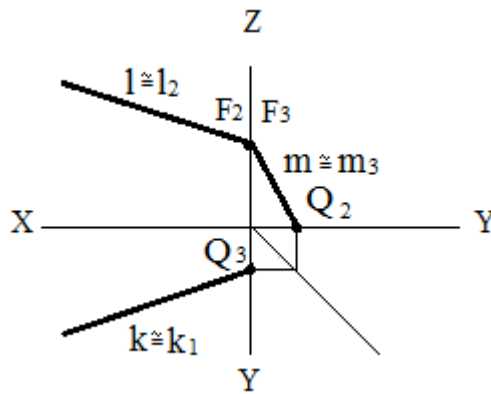


Рисунок 27

Залежно від положення площини в просторі тригранного кута їх розділяють на площини **загального положення** та **приватного положення**. Площини приватного положення розділяються на **проектуючи** і площини рівня.

4.3 Площина загального положення

Площина, не перпендикулярна й не паралельна ні однієї із площин проєкцій, тобто похила до всіх площин проєкцій, називається площиною **загального положення**. Сліди площини загального положення нахилені до осей проєкцій.

На рис. 28 наведена площина β , вона розташована у випадковому положенні стосовно площин Π_1 , Π_2 , Π_3 і, будучи безмежною, перетинає площини проєкцій по прямих лініях ℓ , κ , m , утворивши трикутник (трикутник слідів), сторони якого є слідами площини β – ℓ **фронтальний слід** (при перетині із площиною Π_2);

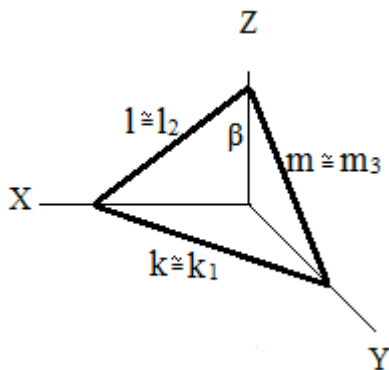


Рисунок 28

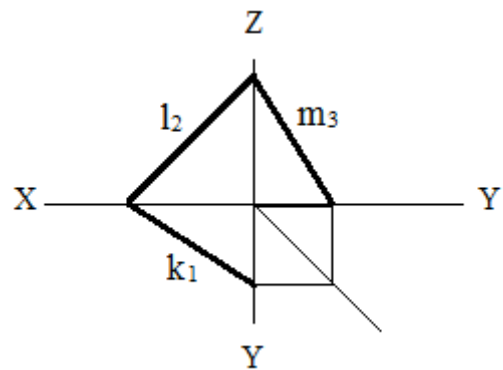


Рисунок 29

κ – **горизонтальний** слід (при перетині із площиною Π_1);

m – **профільний** слід (при перетині із площиною Π_3). Площина загального положення на комплексному кресленні зображується проєкціями слідів, розташованими похило до осей проєкцій (рис. 29).

4.4 Окремі випадки положення площини

Проектуючі площини.

Площина, перпендикулярна до однієї площини проєкцій, називається **проекуючою**.

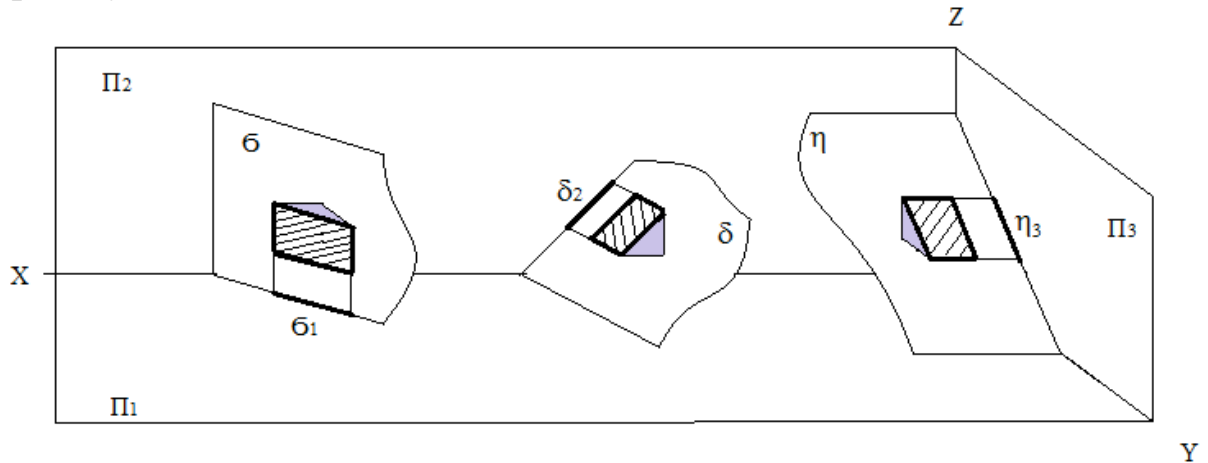


Рисунок 30

На рис. 30 – наочне зображення трьох випадків положення проектуючих площин, що проводять через грань призми.

Горизонтально проектуюча площина σ (рис. 31 а), тобто площина, яка перпендикулярна до площини Π_1 . Із площинами Π_2 і Π_3 площина σ утворює довільні кути.

Горизонтально проектуюча площина σ на комплексному кресленні зображується прямою лінією – **горизонтальною проєкцією**. Горизонтальні проєкції ліній і фігур, що належать до площини σ , збігаються з її горизонтальною проєкцією σ_1 , дві інші проєкції зображуються **не рівними дійсній величині**.

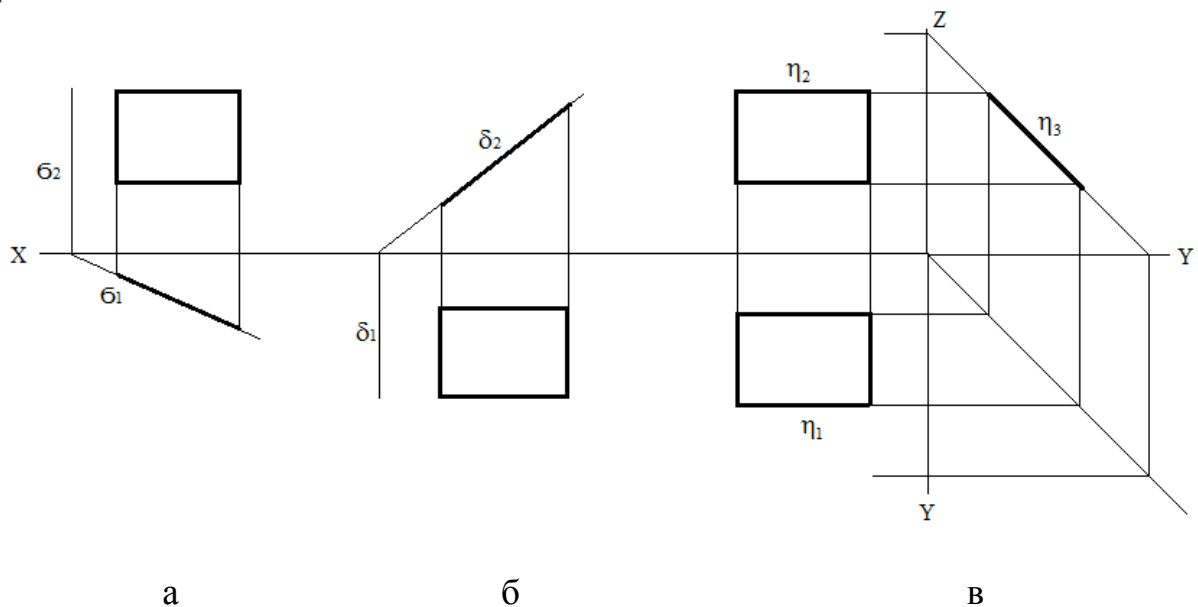


Рисунок 31

Фронтально проектуюча площина δ (рис 31 б), тобто площина, перпендикулярна площини Π_2 . Із площинами проєкцій Π_1 , Π_3 площина δ утворить довільні кути. Фронтально проектуюча площина δ на комплексному кресленні зображується прямою лінією – **фронтальною проєкцією δ_2** .

Фронтальні проєкції ліній і фігур, що належать до площини δ збігаються з її фронтальною проєкцією δ_2 , інші проєкції зображуються **не рівними дійсній величині**.

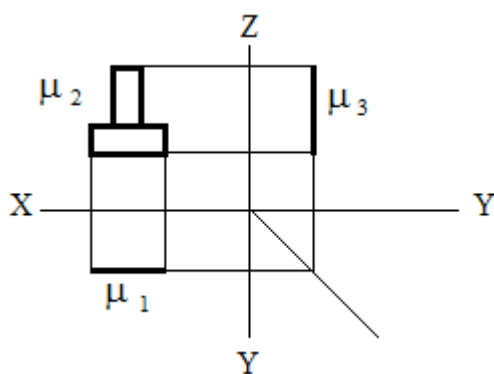
Профільно проектуюча площина, η' (рис 31 в), тобто площина, перпендикулярна до площини Π_3 . Із площинами проєкцій Π_1 і Π_2 вона має довільні кути. Профільна проєкція зображується прямою лінією – **профільною проєкцією η'_3** . Профільні проєкції ліній і фігур, що належать до площини η' , збігаються з її профільною проєкцією η'_3 , інші **проєкції зображуються з перекручуваннями**.

Площина, паралельна до якої-небудь площини проєкцій, називається **площиною рівня**. Всі точки площини рівня рівно віддалені від відповідної площини проєкцій.

Фронтальна площина рівня μ , тобто площина, паралельна площини Π_2 і перпендикулярна площинам Π_1 та Π_3 .

Горизонтальна площина рівня λ , тобто площина, паралельна до площини Π_1 і перпендикулярна площинам Π_2 і Π_3 .

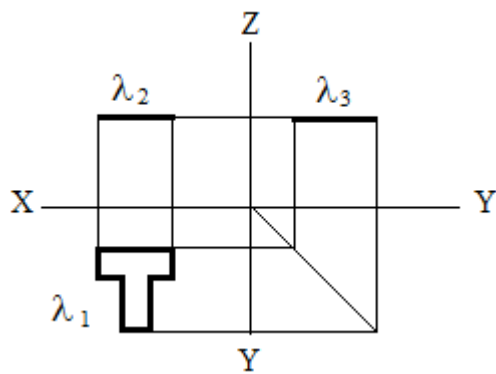
Профільна площина рівня ν' , тобто площина, паралельна до площини Π_3 і перпендикулярна площинам Π_1 та Π_2 .



а

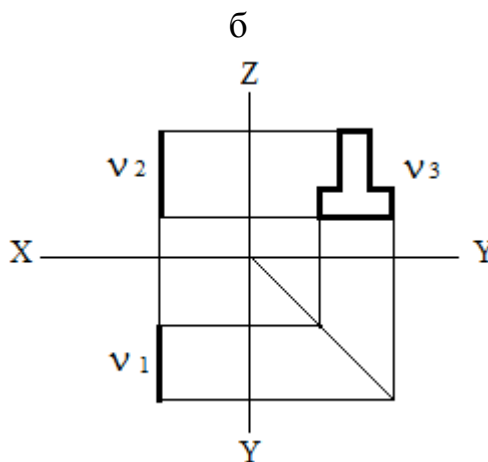
Площини рівня, паралельні до однієї площини проєкцій, у той же час перпендикулярні двом іншим площинам.

Їх називають **тому двоякопроектуєчими**. Внаслідок цього площини рівня на комплексному кресленні зображуються своїми проєкціями –



прямими, паралельними відповідним осям проєкцій.

Проекції μ_1 і μ_3 фронтальної площини рівня μ паралельні осям проєкцій x і z (рис. 32а); проекції λ_2 і λ_3 горизонтальної площини рівня λ паралельні осям проєкцій x і y (рис. 32б); проекції v_1 і v_3 , профільної площини рівня v ; паралельні осям z і y , (рис. 32в).



Особливість площин рівня полягає в тому, що пряма, крива лінія або фігура, що належать цим площинам, проєктуються на паралельну їй площину проєкцій без перекручування, тобто в дійсну величину, а на дві інші – прямими лініями, що збігаються із проєкціями даної площини.

в
Рисунок 32

4.5 Пряма і точка в площині

З геометрії відомо, що пряма належить площини в тому випадку, якщо вона проходить: через дві точки, що належать цієї площині; через точку площини паралельно будь-якої прямої цієї площини.

Пряма n належить площині Π_1 тому що вона проходить через дві точки A та B , що належать площини Π_1 , (рис. 33 а).

Пряма m також належить площині Π_1 , тому що вона проходить через точку E , що належить площини Π_1 і паралельна прямій CD також приналежної цієї площині (рис. 33 б).

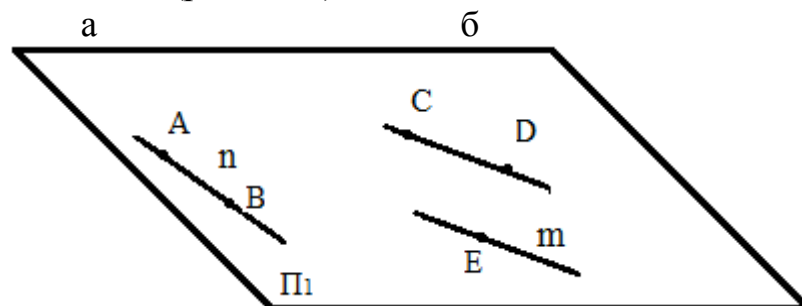


Рисунок 33

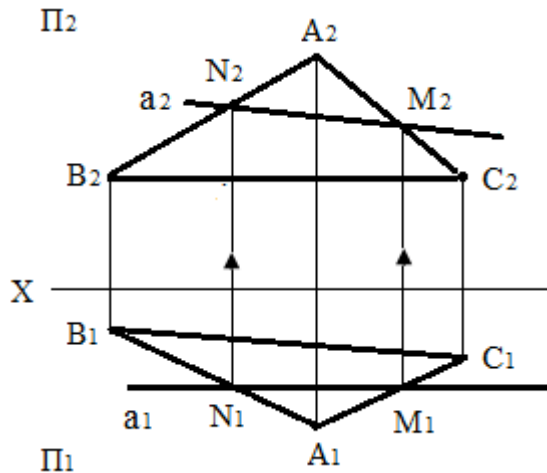


Рисунок 34

N_1N_2 і M_1M_2 фронтальні проекції N_2 і M_2 точок N і M ; через проекції N_2 і M_2 проводять пряму – фронтальну проекцію a_2 прямої a .

Пряма a належить площині трикутника, тому що дві її точки N і M належать трикутнику ABC .

Точка в площині

Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій, що належить площині.

На рис 35. точка M належить площині трикутника ABC , тому що вона лежить на медіані BD трикутника.

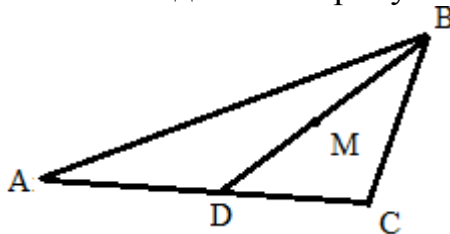


Рисунок 35

Визначення точки в площині.

Розглянемо два приклади, коли точка D належить до площини загального положення (рис. 36,а) і фронтально проєктуючої площини (рис. 36, б).

На комплексному кресленні (рис. 34) площина загального положення задана трикутником ABC .

Потрібно побудувати пряму, що належить цієї площині. Горизонтальна проекція a_1 , прямої a дана, вона перетинає проекції A_1B_1 і A_1C_1 сторін трикутника ABC у точках M та $N(M_1$ і $N_1)$.

Порядок побудови: визначають за допомогою вертикальних ліній зв'язку

Отже, щоб на комплексному кресленні побудувати точку, що належить площині, треба попередньо побудувати проекції прямої, що належить площині, а потім проекції точки на цих проекціях.

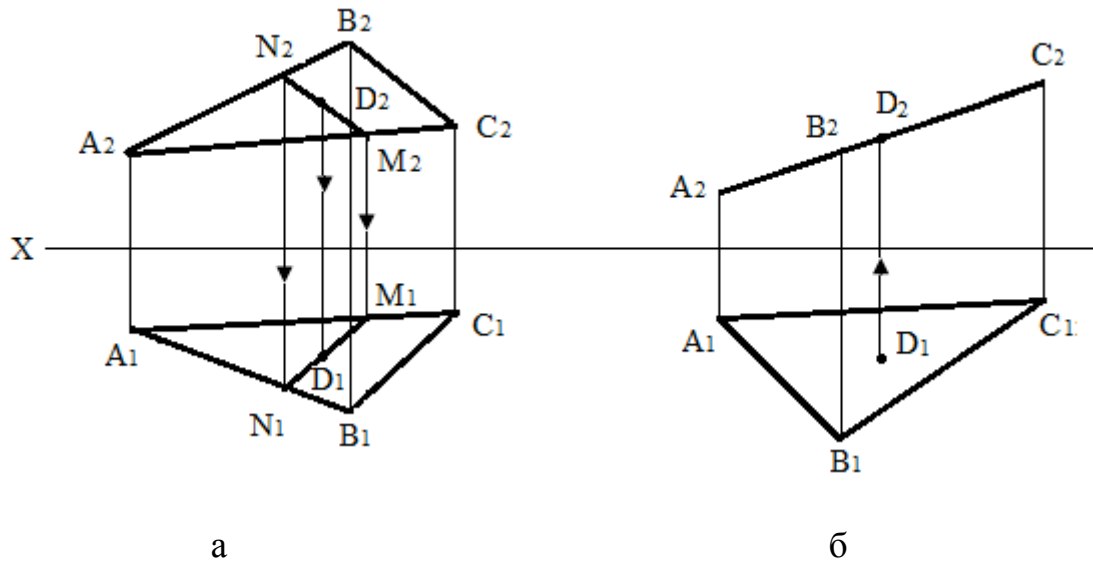


Рисунок 36

У першому випадку необхідний **посередник** – **пряма NM** ; у другому – посередник не потрібен, тому що одна із проєкцій точки завжди буде знаходитися **на проєкції проєктуючої площини**.

Площина загального положення задана трикутником ABC і поза ним задана точка D .

Треба перевірити, чи належить точка D площині трикутника ABC (рис. 37).

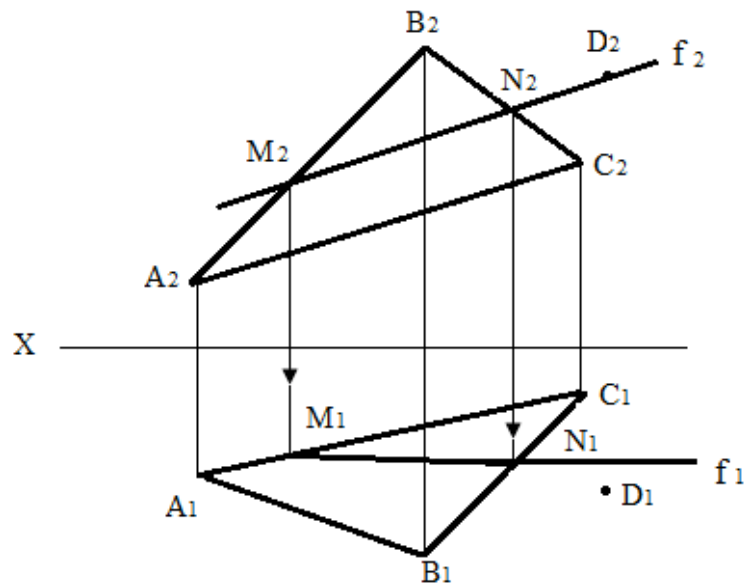


Рисунок 37

Порядок перевірки:

– проводять через будь-яку проекцію точки, наприклад, через D_2 , допоміжну пряму f_2 , що перетинає фронтальні проекції двох сторін трикутника в точках M_2 і N_2 ;

– визначають за допомогою лінії зв'язку горизонтальні проекції M_1 і N_1 , точок M і N ;

– проводять через точки M_1 і N_1 пряму – горизонтальну проекцію, допоміжної прямої f ; проекція f_1 прямої не пройшла через проекцію D_1 , точки D ; отже, точка D не належить площині трикутника ABC , тому що одна з її проекцій D_1 , не лежить на однойменній проекції f_1 , прямої f , що належить площині трикутника ABC .

4.6 Проекції плоских фігур

Плоскими фігурами називаються фігури, всі точки яких належать одній площині. Контури фігур, обмежені прямими лініями, називають **прямолінійними** (трикутники, чотирикутники й багатокутники), а контури фігур, які обмежені кривими лініями – **криволінійними** (коло, овали, еліпси й ін.). Побудова плоских фігур зводиться до побудови проекцій точок контуру фігур і послідовному їхньому з'єднанню відповідними лініями.

Проекції фігури можуть бути:

фігурою, що дорівнює фігурі, що проектується, якщо вона розташована в площині рівня, тобто паралельно площині проекцій;

відрізком прямої, якщо вона розташована в проектуючій площині, тобто перпендикулярної до площини проекцій;

фігурою, що не дорівнює фігурі, що проектується (менше), якщо вона розташована в площині, похилої до площини проекцій.

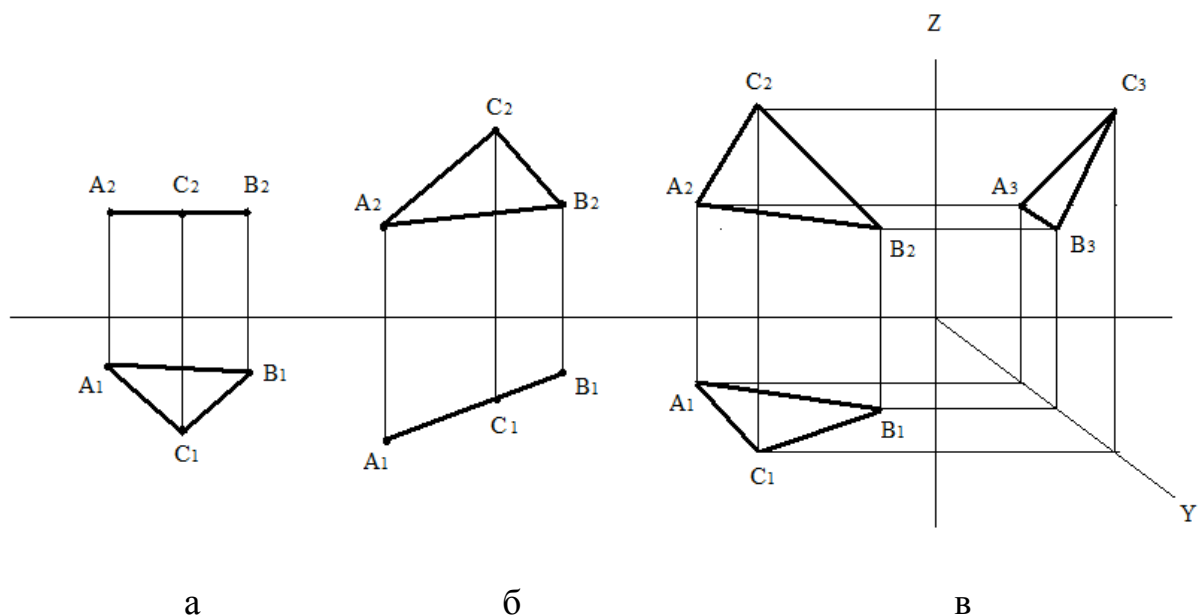


Рисунок 38

На комплексному кресленні (рис. 38) наведене проектування трикутника ABC , коли його площина по-різному розташована до площин проєкцій. По проєкціях трикутника можна визначити його положення щодо площин проєкцій:

- площина трикутника паралельна площині проєкцій Π_1 , (рис. 38 а);
- площина трикутника перпендикулярна площині проєкцій Π_1 , (рис. 38 б);
- площина трикутника розташована під довільним кутом до площин проєкцій Π_1 , Π_2 і Π_3 (рис. 38 в).

Проектування чотирикутника. Проектуючи плоский чотирикутник (або багатокутник), виконується умова приналежності всіх точок проєктуючої фігури до однієї площини.

Якщо є проєкції $A_2B_2C_2D_2$ і $A_1B_1C_1D_1$, (рис. 39) чотирикутники $ABCD$, то для перевірки його площинності потрібно на проєкціях провести діагоналі, і якщо точки їхнього перетину будуть знаходитися на одній вертикальній лінії зв'язку, то чотирикутник буде плоским. У цьому випадку, точки M_2 і M_1 , не знаходяться на одній лінії зв'язку, отже, діагоналі чотирикутника не перетинаються й не належать його площині. Звідси – заданий проєкціями чотирикутник, не плоска фігура.

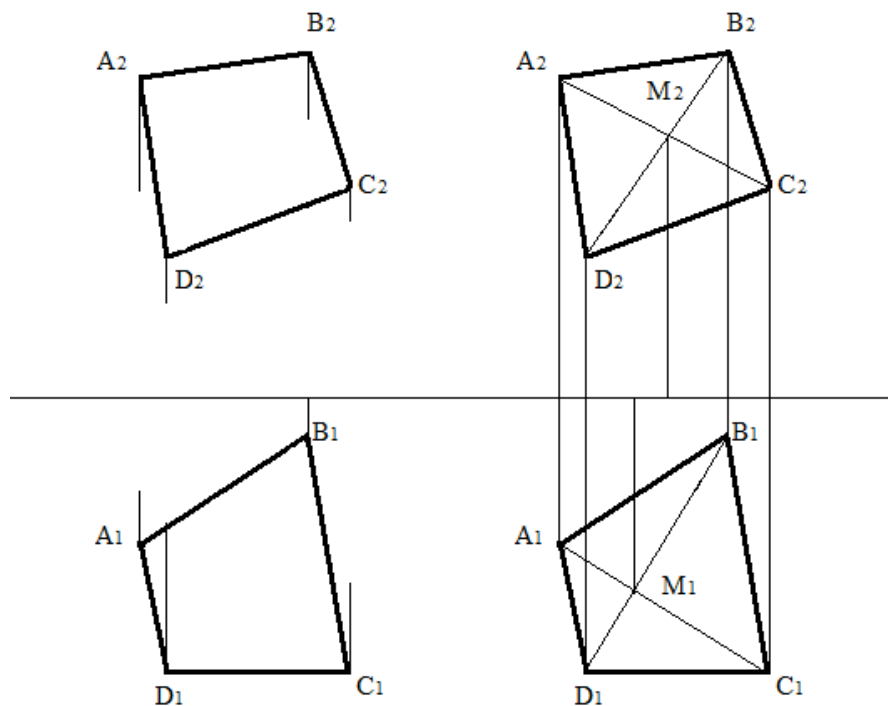


Рисунок 39

На рис. 40 наведені проєкції плоского чотирикутника $ABCD$. Діагоналі AC і BD перетинаються, підтверджуючи площинність чотирикутника.

Проектування багатокутника. Нехай площина багатокутника задана його фронтальною проекцією $A_2B_2C_2D_2E_2$ та горизонтальною проекцією B_1A_1 і A_1E_1 двох його суміжних сторін (рис. 41).

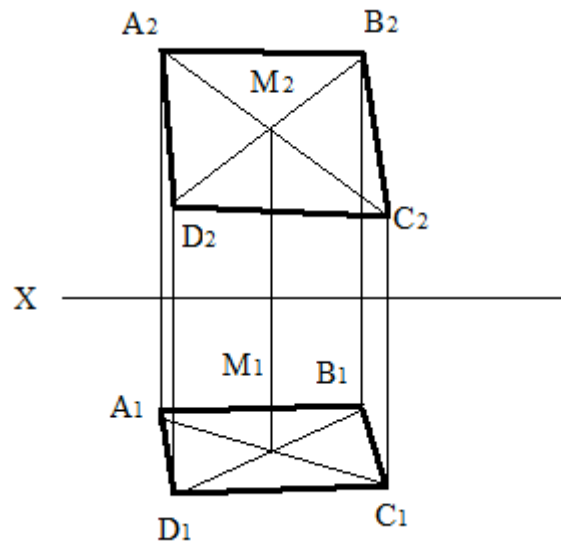
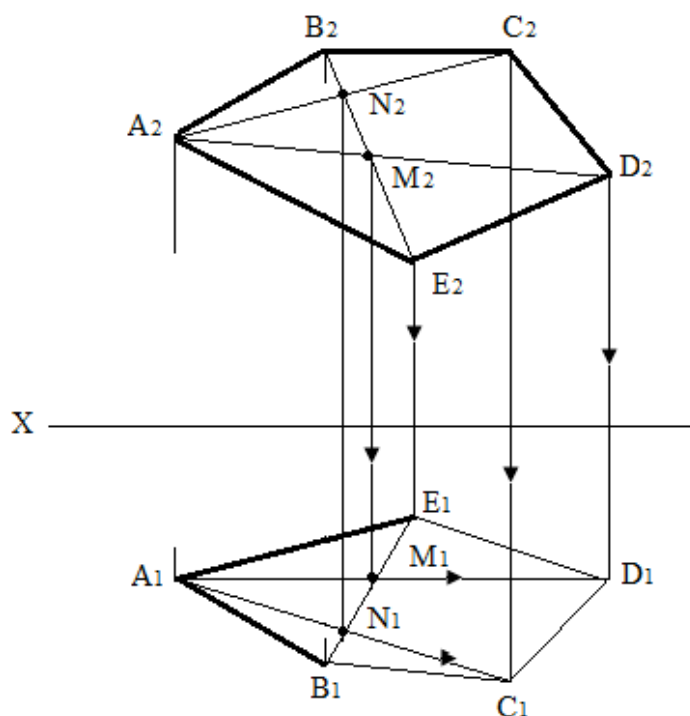


Рисунок 40



Для побудови повної горизонтальної проекції багатокутника з'єднують прямою точки B_2 з E_2 та B_1 з E_1 . Отримують проекції діагоналі BE , потім із точки A_2 проводять прямі, з'єднуючи точки A_2 з C_2 та A_2 з D_2 – фронтальні проекції діагоналей AC і AB . Вони перетнуться в точках M_2 і N_2 із проекцією B_2E_2 діагоналі. Після знаходять горизонтальні проекції M_1 і N_1 точок M , N і із точки A_1 через точки M_1 і N_1 проводять промені.

Рисунок 41

На променях визначають відсутні горизонтальні проекції D_1 і C_1 , вершин D і C . З'єднують прямими лініями точки D_1 із C_1 , C_1 з D_1 і D з E_1 одержують повну горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1D_1E_1$, багатокутника $ABCDE$.

Проектування кола. Проекції кола можуть бути:

- окружністю (контуром кола), коли площина кола паралельна площині проєкцій;
- відрізком прямої, коли площина кола перпендикулярна площині проєкцій;
- еліпсом, коли площина кола розташована під деяким кутом до площини проєкцій.

На рис. 42 а наведені проєкції кола, площина якого паралельна до площини Π_1 , внаслідок чого горизонтальна проєкція зображується без перекручування, колом, а фронтальна проєкція відрізком прямої, рівним діаметру кола, паралельно осі проєкцій x . На рис. 42 б наведені проєкції кола, площина якого паралельна площині Π_2 . Побудова проєкцій кола, розташованого у фронтально проєктуючій площині δ , наведена на рис. 43 .

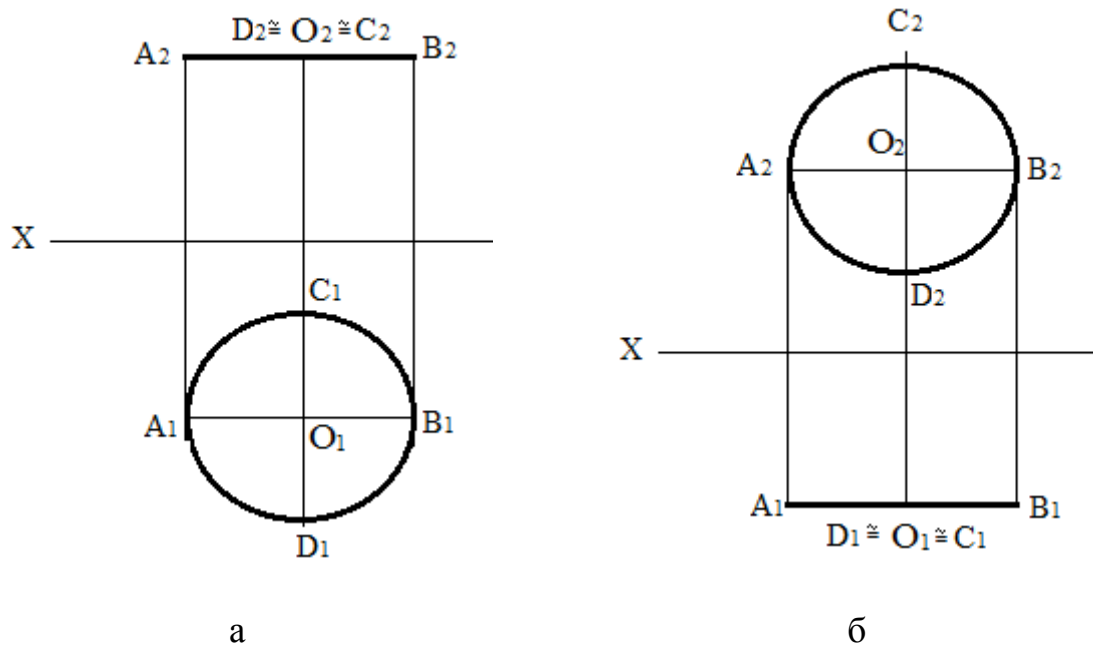
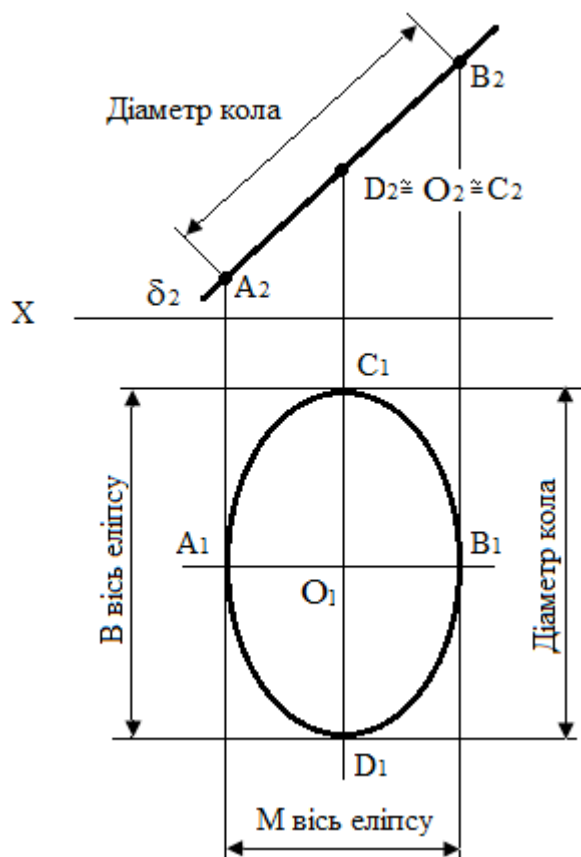


Рисунок 42

Побудова проєкцій зводиться до зображення проєкцій двох перпендикулярних діаметрів AB і CD окружності (конттуру кола).



Діаметр CD паралельний до площини Π_1 , і перпендикулярний до площини Π_2 . Горизонтальна проекція C_1D_1 – відрізок прямої (більша вісь еліпса), дорівнює діаметру кола, перпендикулярний до осі x . Фронтальна проекція C_2D_2 збігається із точкою O_2 – проекцією центра кола. Діаметр AB паралельний до площини Π_2 і нахилений до площини Π_1 . Фронтальна проекція A_2B_2 – відрізок прямої, дорівнюючий діаметру кола, що збігається із проекцією δ_2 площини δ . Горизонтальна проекція A_1B_1 – відрізок прямої (мала вісь еліпса), паралельної осі проекції x .

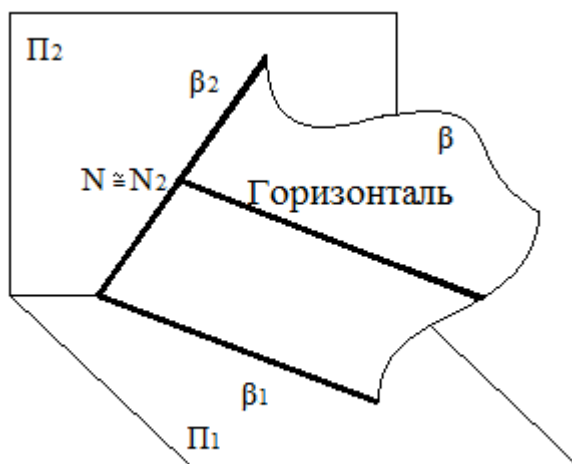
По отриманих осях A_1B_1 і C_1D_1 , еліпса робимо його побудову (відоме з геометричного креслення).

Рисунок 43

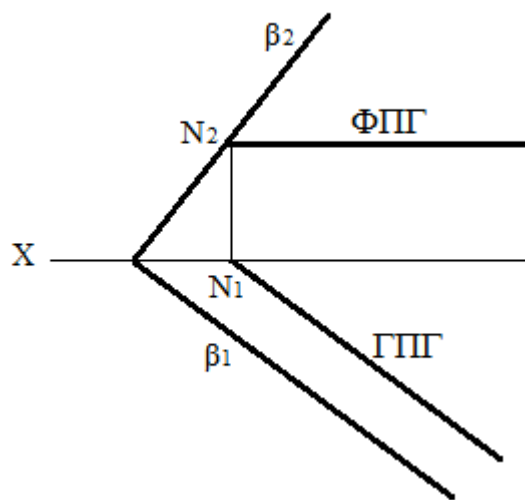
4.7 Прямі особливого положення в площині

До числа особливих прямих у площині ставляться: горизонталь, фронталь і лінія ската. Розглянемо дві перші з них.

Горизонталь площини – пряма, що належить даній площині й паралельна горизонтальній площині проекцій Π_1 .



а



б

Рисунок 44

На рис. 44 а наведене наочне зображення положення горизонталі в площині β загального положення, а на рис. 44 б побудова горизонталі на комплексному кресленні. Умовимося фронтальну проекцію горизонталі позначати ФПГ, а горизонтальну проекцію горизонталі – ГПГ. На сліді β_2 площини β узята довільна точка $N (N_1N_2)$ – слід горизонталі. Через точку N_2 , проводять пряму паралельно осі проекцій x фронтальну проекцію (ФПГ) горизонталі, а із точки N_1 – пряму паралельно проекції сліду β_1 сліду β – горизонтальну проекцію (ГПГ) горизонталі. Пряма, проведена через точку N паралельно сліду β_1 , належить площині β і є горизонталлю цієї площини.

Характерні ознаки розташування проекцій горизонталі на комплексному кресленні:

– горизонтальна проекція, горизонталі (ГПГ), паралельна проекції β_1 горизонтального сліду k площини β ;

– фронтальна проекція горизонталі (ФПГ) паралельна осі проекції x .

Горизонталі даної площини (а їхня множина) паралельні між собою. Паралельні і їхні однойменні проекції.

Фронталь площини – пряма, що належить даній площині й паралельна фронтальній площині проекцій Π_2 . На рис. 45 а наведене наочне зображення положення фронталі в площині β загального положення, а на рис. 45 б – побудова на комплексному кресленні.

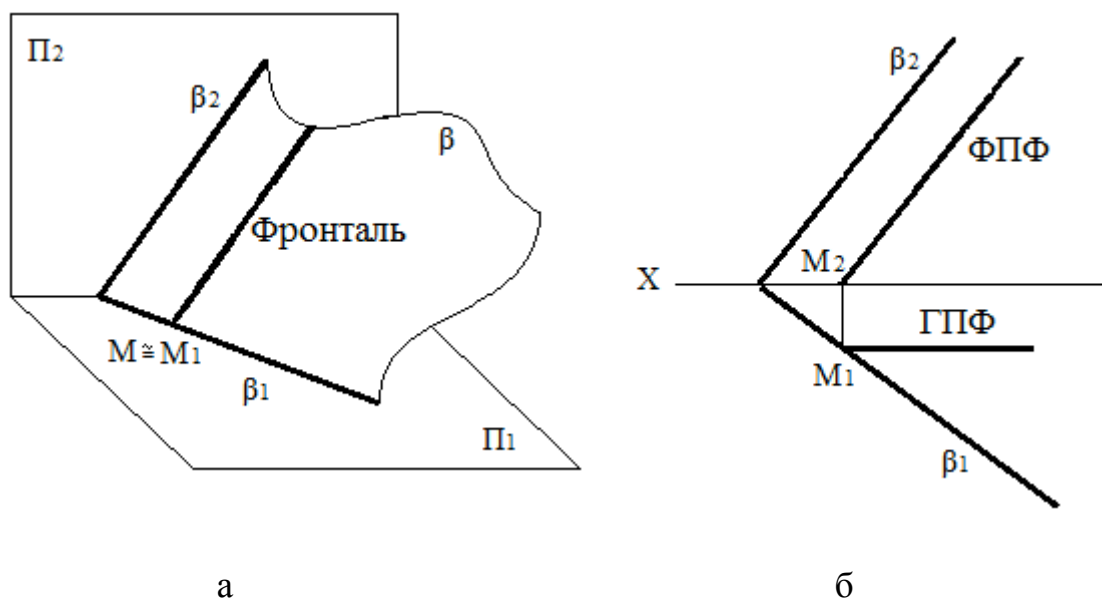


Рисунок 45

Умовимося фронтальну проекцію фронталі позначати ФПФ, а горизонтальну проекцію фронталі – ГПФ. На сліді β_1 площини β узята точка $M (M_1 i M_2)$ – слід фронталі. Через точку M_1 проводять пряму паралельно осі проекцій x горизонтальну проекцію фронталі (ГПФ), а із точки M_2 – пряму паралельно проекції β_2 сліду β – фронтальну проекцію фронталі (ФПФ). Пряма, проведена через точку M паралельно сліду β_2 ,

належить площині β і є фронталлю цієї площини. Характерні ознаки розташування проєкцій фронталі на комплексному кресленні:

- горизонтальна проєкція фронталі (ГПФ) паралельна осі проєкцій x ;
- фронтальна проєкція фронталі (ФПФ) паралельна проєкції β_2 фронтального сліду β площини β .

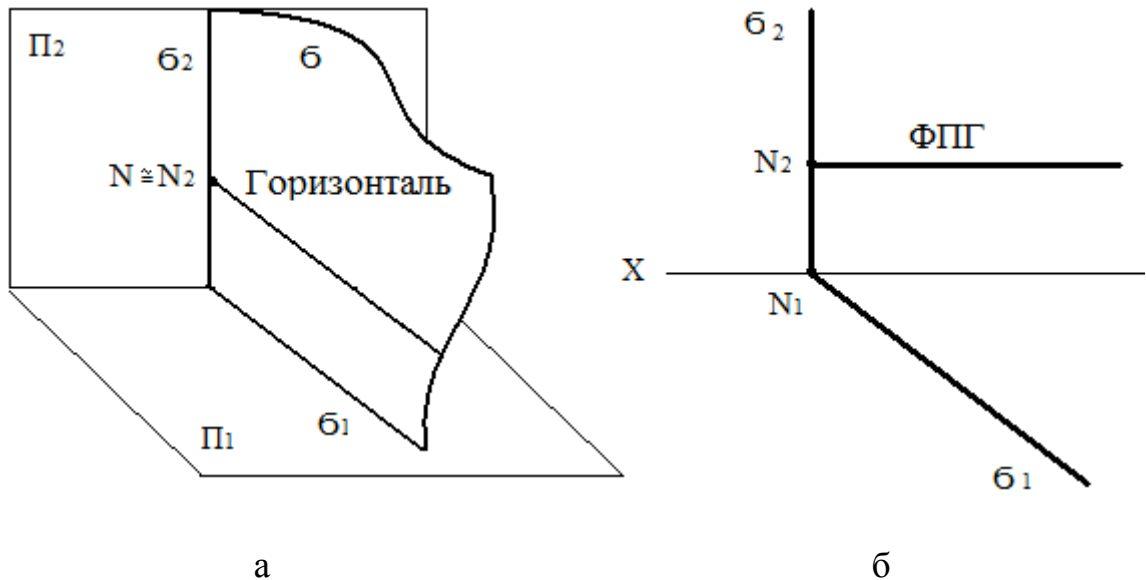


Рисунок 46

Особливі лінії в проєкуючих площинах. Характерні ознаки розташування горизонталей на комплексному кресленні.

Горизонтально проєкуюча площина σ ,

Горизонталь (рис. 46 а) ФПГ – паралельна осі x ;

ГПГ – на проєкції σ_1 , сліду площини σ (рис. 46 б).

Фронталь (рис. 47 а) ФПФ перпендикулярна осі x ;

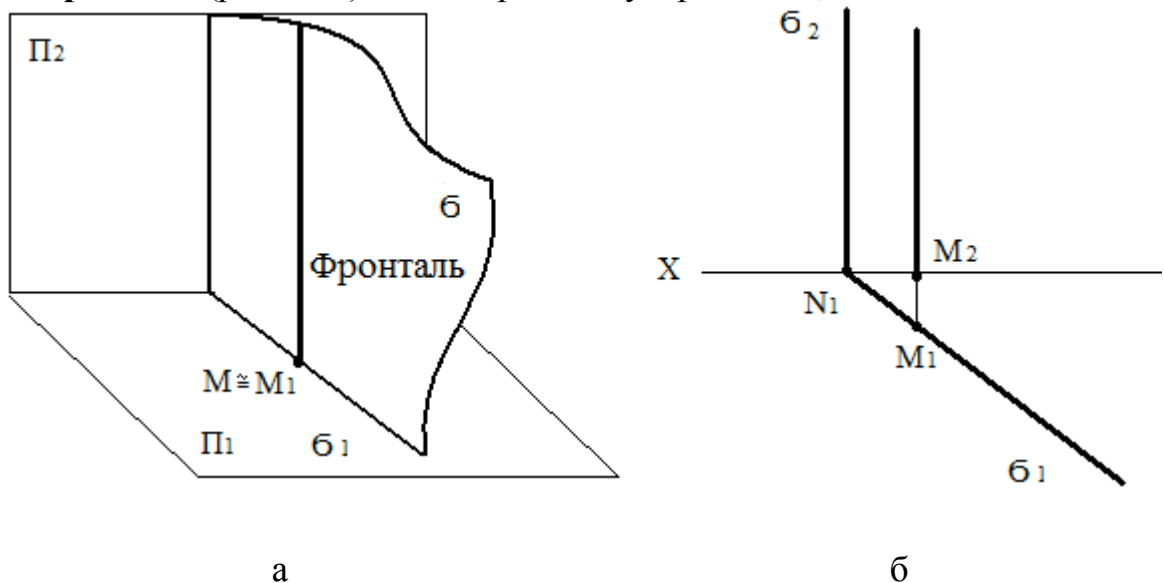


Рисунок 47

ГПФ – точка на проєкції σ_1 площини σ (рис. 47 б).

Фронтально проєктуюча площина δ .

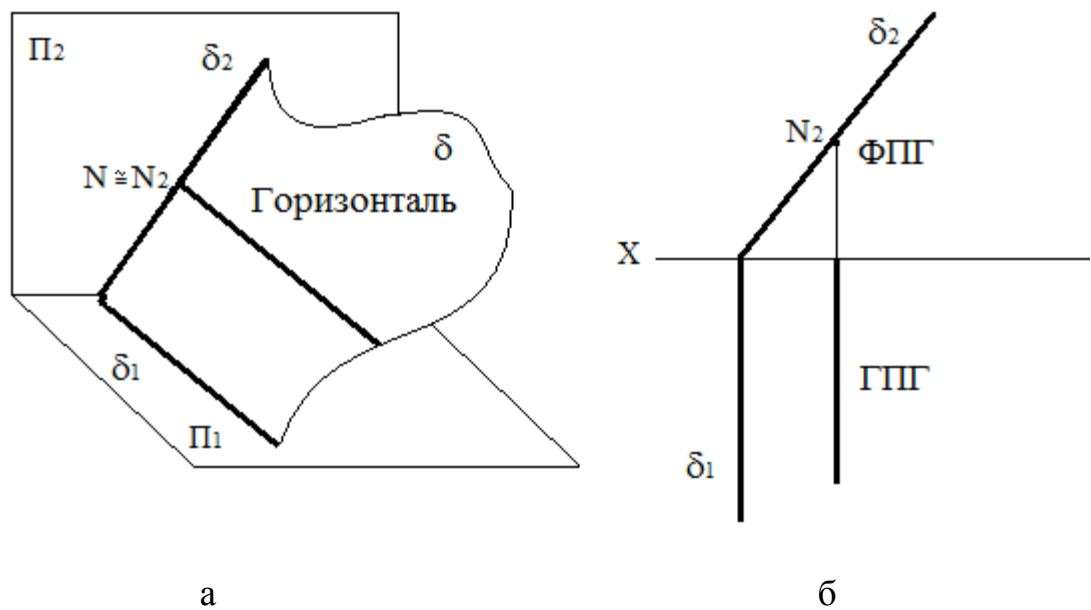


Рисунок 48

Горизонталь (рис. 48 а) ФПГ – точка на проєкції δ_1 площини δ ;
ГПГ – перпендикулярна осі x (рис. 48 б).

Фронталь (рис. 49 а) ФПФ – на проєкції δ_2 площини δ ;
ГПФ – паралельна осі x (рис. 49 б).

Лінія найбільшого нахилу, лінія скату

До прямих, що займають особливе положення в площині відносять горизонталі, фронталі, профільні прямі й лінії найбільшого нахилу до площин проєкцій. Ці лінії називають головними лініями площини.

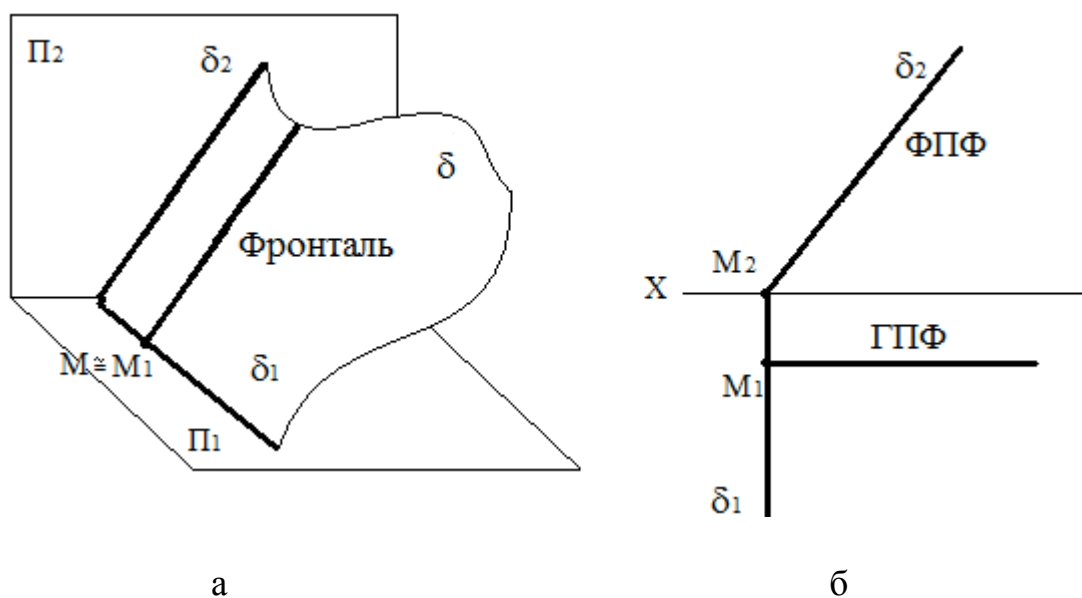


Рисунок 49

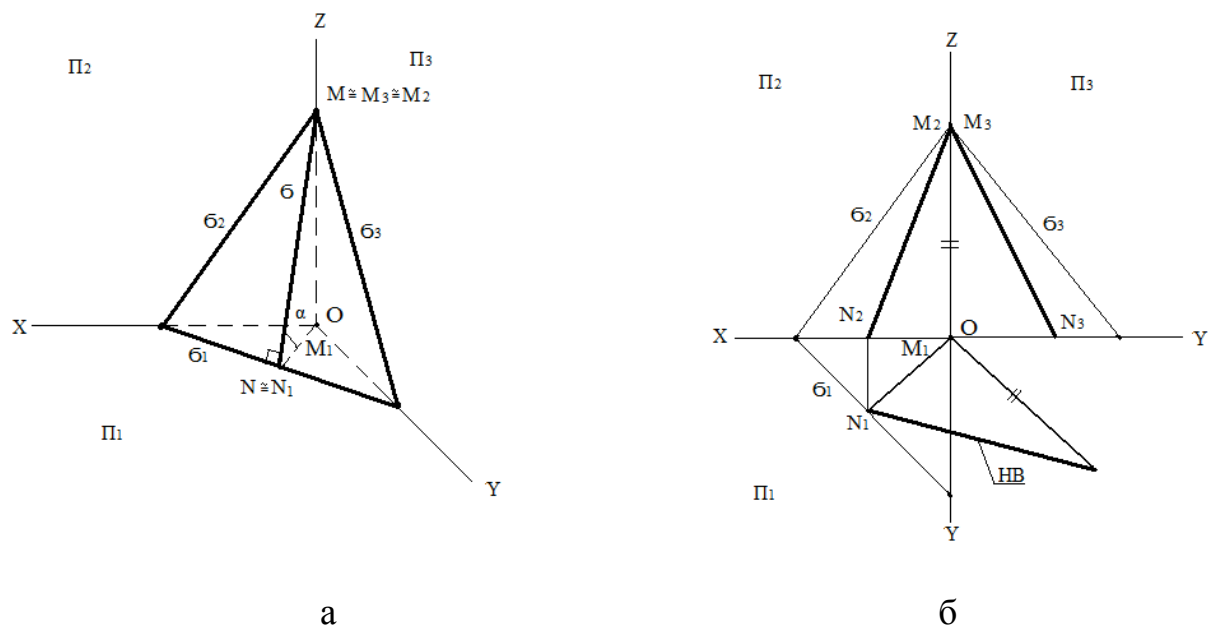


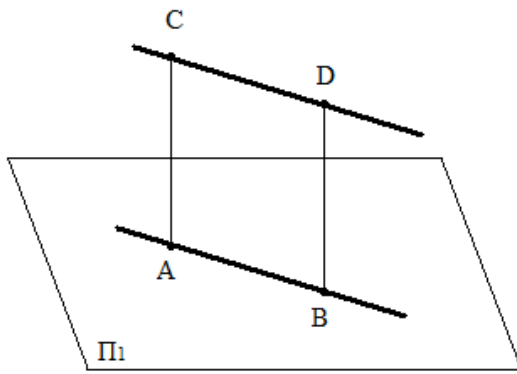
Рисунок 50

Лініями найбільшого нахилу площини до площин Π_1 , Π_2 , Π_3 називають прямі, що лежать у ній і перпендикулярні або до горизонталей площини, або до їх фронталей, або до їх профільних прямих. Відповідно визначається нахил площини до площин Π_1 , Π_2 , Π_3 .

Лінія найбільшого нахилу до площини Π_1 , називається лінією скату. Лінія скату MN площини σ , заданої слідами показана на рис. 50. Відповідно до правил проєктування прямого кута M_1N_1 перпендикулярна σ . Тому кут MNM_1 є лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами σ і Π_1 . Отже, лінія скату площини може служити для визначення кута нахилу цієї площини до площини проєкції Π_1 . Кут між лінією скату і її горизонтальною проєкцією є лінійним кутом між площиною, який належить лінія скату, і площиною проєкцій Π_1 .

4.8 Взаємне положення прямої і площини

Пряма, паралельна до площини. З геометрії відомо: пряма паралельна до площини, якщо вона (пряма) паралельна якій-небудь прямій, що належить до цієї площині.



Пряма CD паралельна до площини Π_1 тому що вона паралельна прямій AB , що належить площині Π_1 , тому, що дотримано умову – $CA = DB$; $CD \parallel AB$ (рис. 51).

У тому випадку, коли треба через дану точку провести пряму, паралельну до даної площини, спочатку в даній площині

Рисунок 51

проводять довільну пряму, а потім уже через задану точку проводять пряму, їй паралельну.

Через задану точку M треба провести пряму, паралельну до площини трикутника ABC (рис. 52). У площині трикутника ABC ($A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$) проводять довільну пряму EF (E_1F_1 , E_2F_2), а потім через дану точку M (M_1 M_2) проводять пряму MN (M_1N_1 , M_2N_2) паралельно до прямої EF . Пряма MN буде паралельна до площини трикутника, тому що вона паралельна прямій EF , що належить до площини трикутника ABC . Для проведення прямої паралельно до площини можна використовувати особливі лінії площини (горизонталь або фронталь).

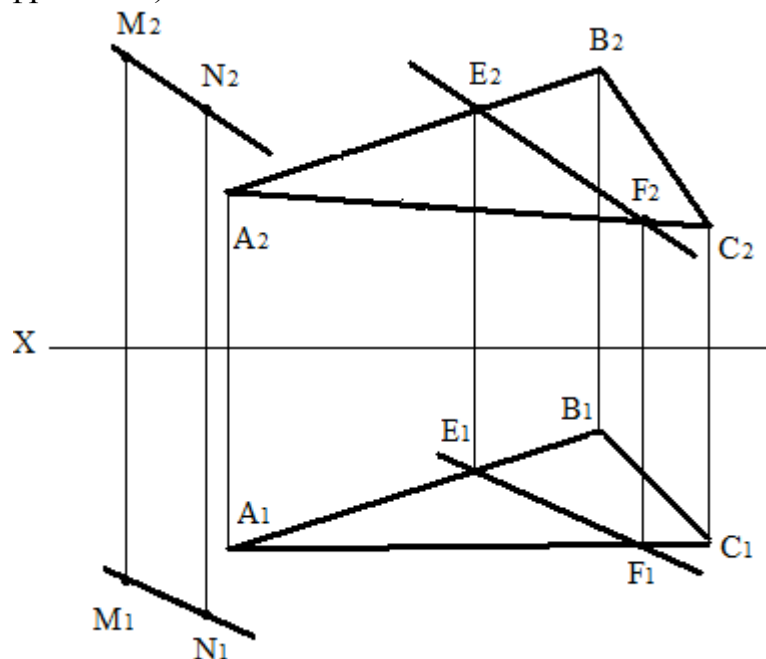


Рисунок 52

На рис. 53 наведене комплексне креслення, коли як допоміжна лінія використана фронталь. Спочатку зображують проекції фронтали, а потім – проекції прямої лінії паралельно проекціям фронтали.

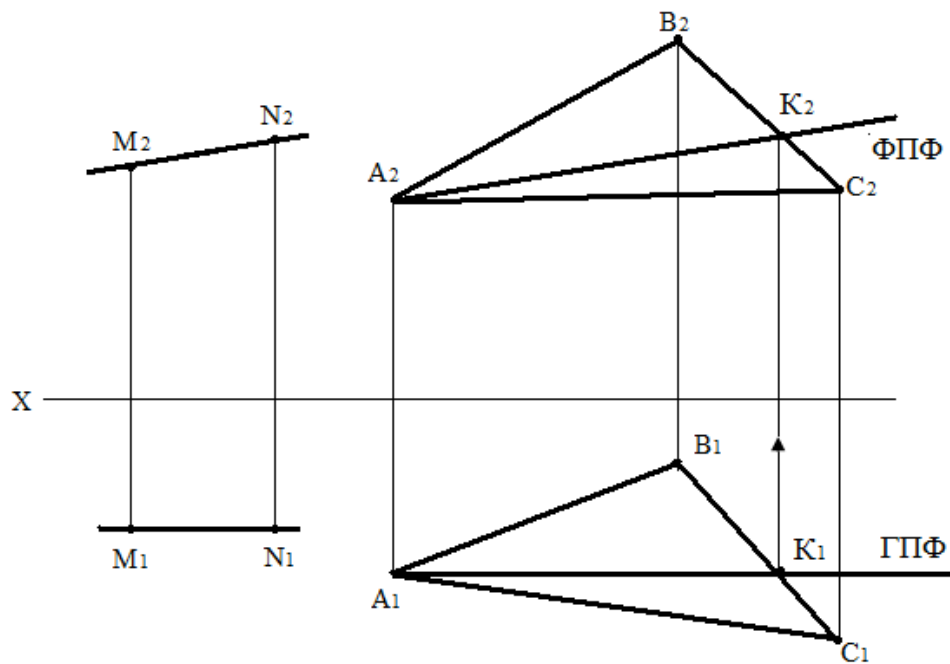


Рисунок 53

Пряма MN паралельна до площини трикутника ABC , тому що однойменні горизонтальні й фронтальні проекції прямої й фронти паралельні ($M_2N_2 \parallel A_2K_2$; $M_1N_1 \parallel A_1K_1$).

4.9 Взаємне розташування площин

Паралельні площини. Дві площини паралельні, якщо дві пересічні прямі однієї площини паралельні двом пересічним прямим іншої площини. Площини β і β' паралельні між собою, тому що пересічні прямі AB , BC і DE , EF паралельні (рис. 54).

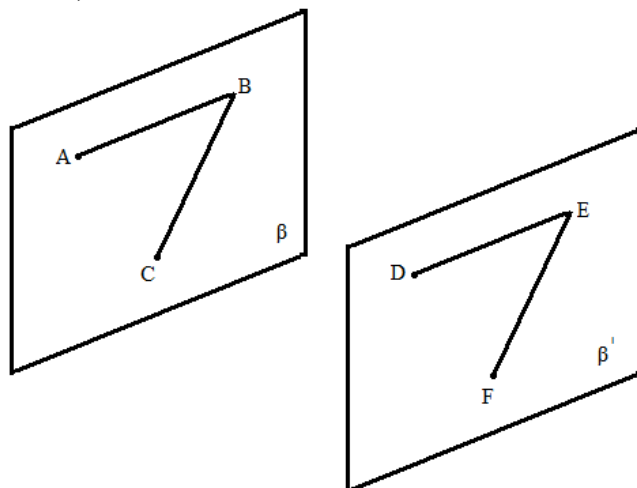


Рисунок 54

Дві паралельні площини перетинаються із третьою площиною по паралельних прямим.

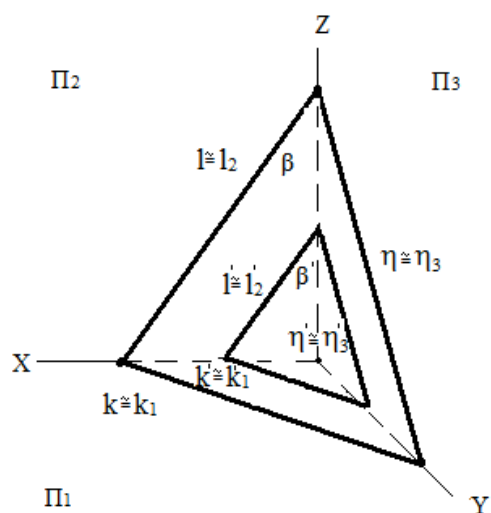


Рисунок 55

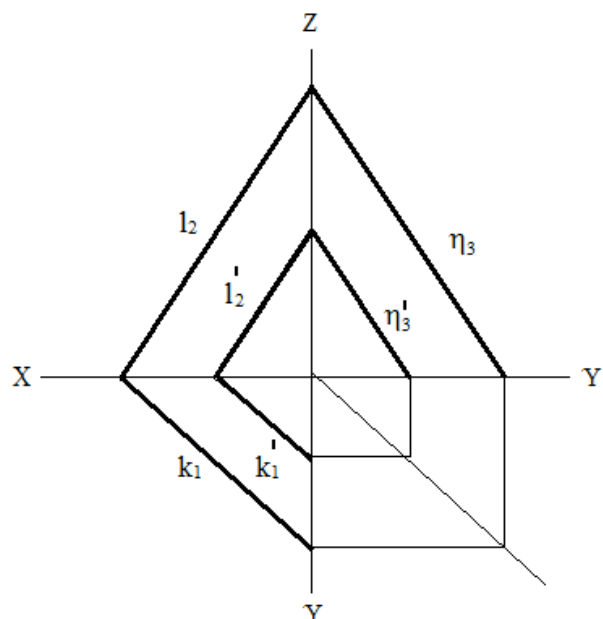


Рисунок 56

Коли дві площини паралельні, то їхні однойменні сліди також паралельні (рис. 55). Площини β і β' загального положення паралельні між собою. Їх однойменні фронтальні (ℓ і ℓ') горизонтальні (κ й κ') і профільні (η і η') сліди паралельні. На комплексному кресленні паралельних площин всі три проекції слідів повинні бути відповідно паралельні. На рис. 56 – комплексне креслення двох паралельних площин β і β' загального положення. Однойменні проекції їхніх слідів паралельні: $\ell_2 \parallel \ell'_2$; $\kappa_1 \parallel \kappa'_1$.

Паралельність проекцій слідів на двох площинах проекцій не завжди доводить паралельність площин.

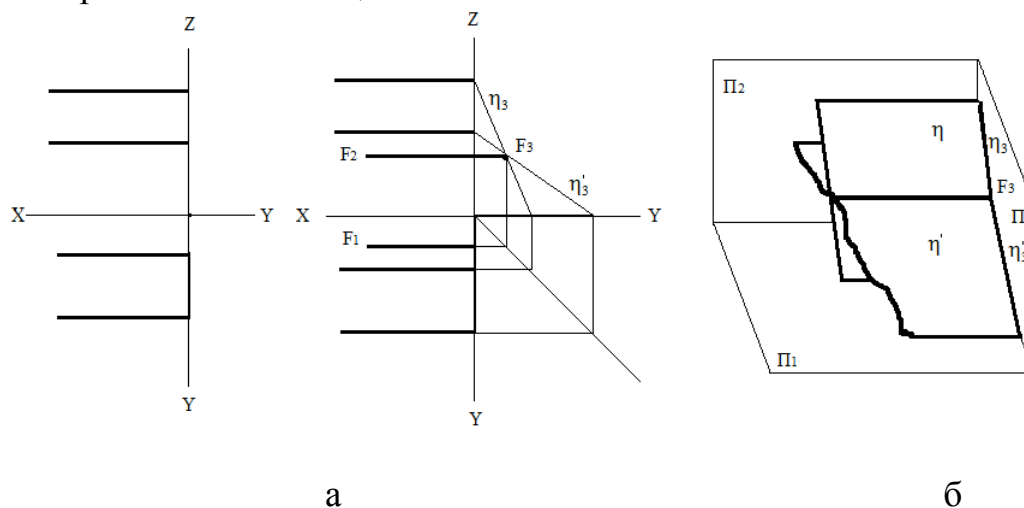


Рисунок 57

На рис. 57 дві профільно проектуючі площини, η і η' задані паралельними однойменними проекціями слідів на площинах проекцій Π_1 і Π_2 . Але вони не можуть визначати паралельність площин η і η' . Треба побудувати проекції слідів цих площин на третю площину проекцій Π_3 , і

якщо вони виявляться паралельними, то й задані площини паралельні (рис. 57 а). Профільні проекції η_z і $|\eta'_z|$ перетинаються. Із цього випливає, що задані двома паралельними проекціями слідів площини η і $|\eta'|$ у цьому випадку не паралельні (рис. 57 б).

Пересічні площини. Якщо площини не паралельні, то вони перетинаються по прямій лінії, яка одночасно належить обома площинам. Пряма визначається двома точками. Якщо з'єднати прямою дві точки, одночасно приналежні кожній із площин, то пряма буде належати обома площинам і буде їхньою лінією перетину. Так, пряма MN , по якій перетинаються площини трикутників ABC і DE (рис. 58), проходить через точки M та N .

Точки M та N належать як площині, заданою трикутником ABC , так і площині, заданою трикутником DEF . Точки перетину проекцій однойменних слідів даних площин будуть загальними точками пересічних площин.

На рис. 59 а наведені пересічні площини γ та β загального положення. Однойменні фронтальні сліди ℓ_2 і ℓ'_2 площин γ і β перетинаються в точці N , а однойменні горизонтальні сліди k та k' – у точці M .

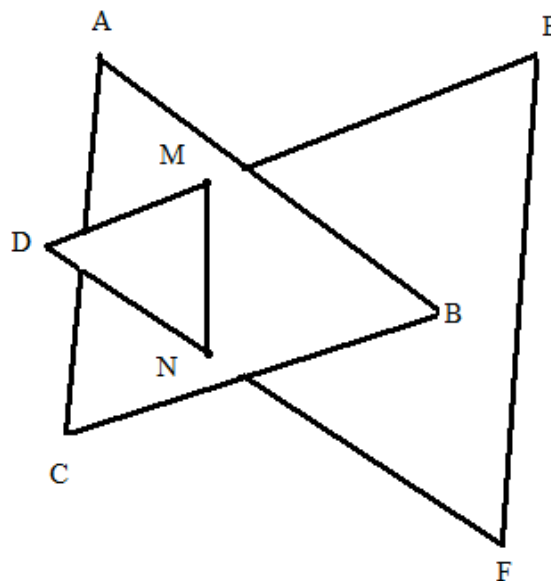
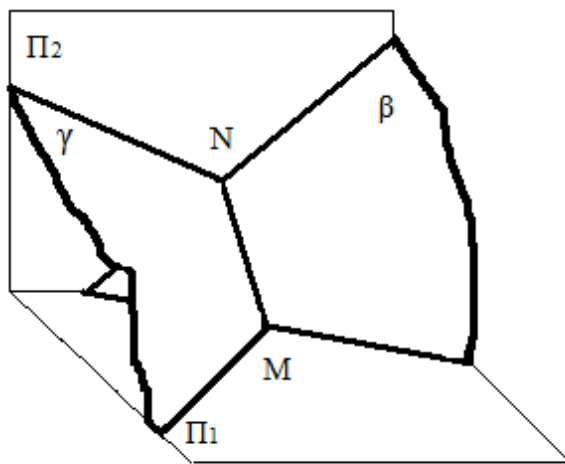
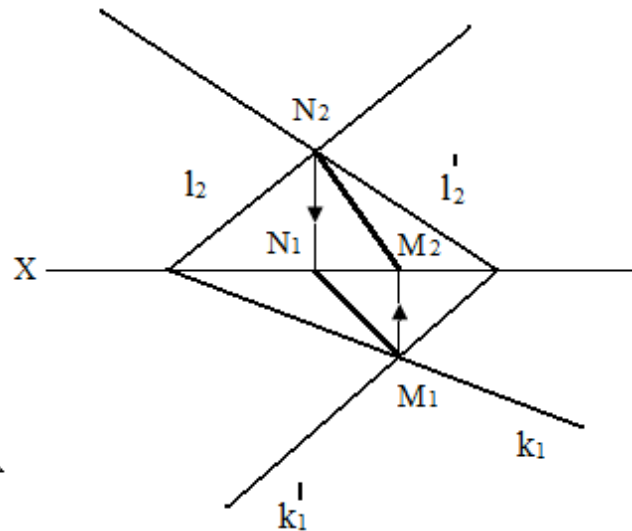


Рисунок 58



а



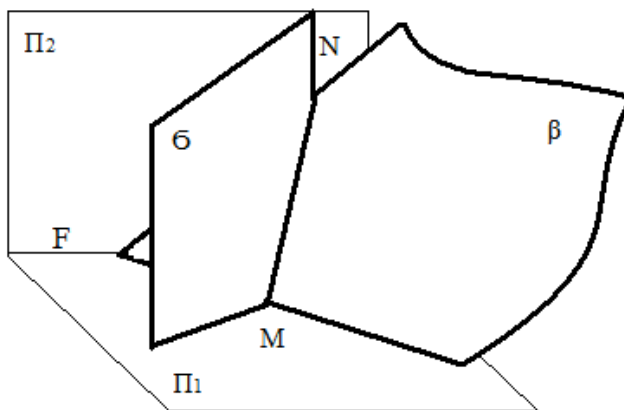
б

Рисунок 59

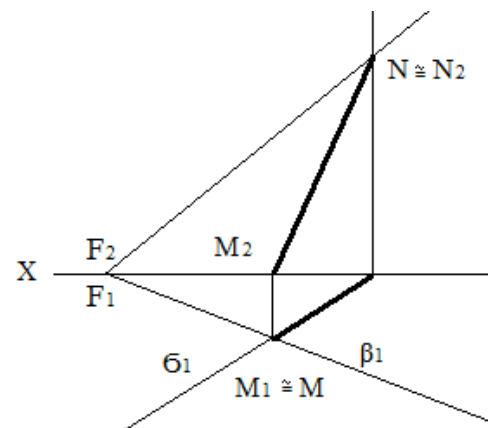
Отже, точки M та N належать як площині β , так і площині γ . Пряма, що проходить через точки M та N є лінією перетину площин γ і β .

Знаходження лінії перетину пересічних площин γ і β загального положення, заданих проекціями слідів (рис. 59 б). Визначають проекції точок N і M перетину однойменних проекцій l_2l_2' і k_1k_1' прямих, що належать одночасно площинам γ і β . У той же час точка N належить і площині Π_2 , фронтальна проекція N_2 збігається із самою точкою, а горизонтальна N_1 лежить на осі x . Точка M належить площині Π_1 , горизонтальна проекція M_1 збігається із самою точкою, а фронтальна M_2 лежить на осі x . Однойменні проекції N_2M_2 і N_1M_1 прямої IM – лінії перетину площин γ і β .

Знаходження лінії перетину площин β (загального положення) і σ (горизонтально проєктуючої) (рис. 60).



а



б

Рисунок 60

Будують проекції точок N і M перетину слідів площин β і σ . З'єднують отримані однойменні проекції M_2 з N_2 і M_1 з N_1 прямими лініями, які виявляють проекції M_2N_2 і M_1N_1 лінії перетину площин β і σ . Помітимо, що горизонтальна проекція M_1N_1 лінії перетину MN , як розташована в горизонтально проєктуючій площині, зливається із проєкцією σ_1 площини σ .

4.10 Перетин прямої із площиною

Коли пряма не належить площині й не паралельна їй, то вона перетинає цю площину. Дані пряма AB і площина Π_1 (рис. 61).

Для визначення точки, у якій пряма AB перетинає площину Π_1 потрібно:

- провести через пряму AB яку-небудь допоміжну площину-посередник (краще проєктуючу). У цьому випадку візьмемо горизонтально проєктуючу площину σ ,
- знайти лінію перетину MN , по якій допоміжна площина σ перетинає площину Π_1 ;
- визначити точку K перетину прямої AB із площиною проєкцій Π_1 .

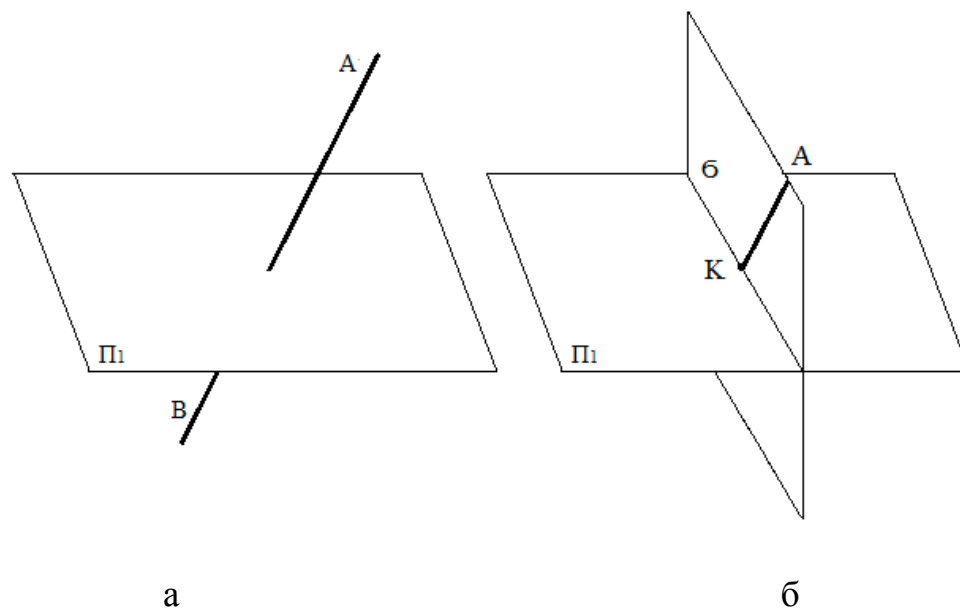
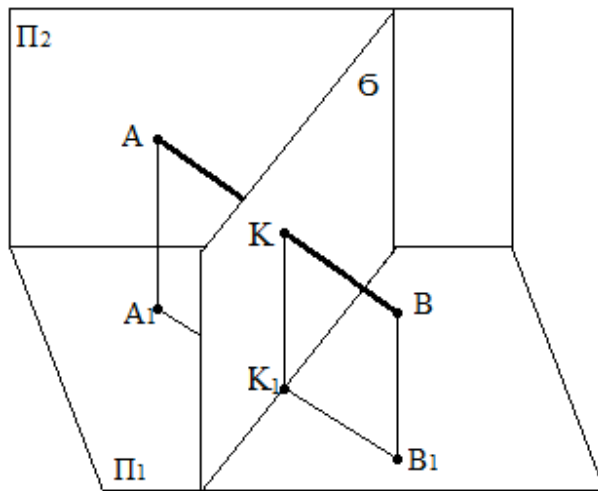


Рисунок 61

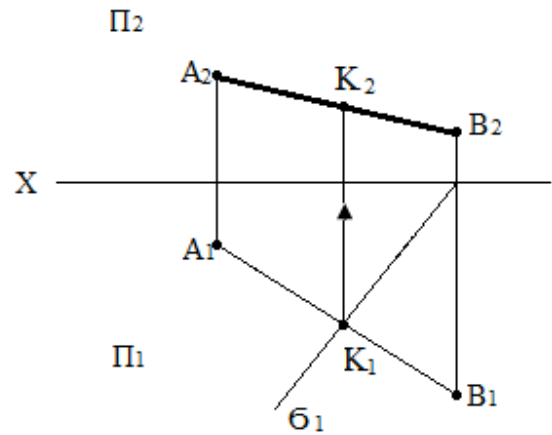
Перетин прямої загального положення із проєктуючою площиною. На рис. 62 зображена пряма загального положення AB , що перетинає горизонтально проєктуючу площину σ .

Розглянемо перетин прямої AB загального положення з горизонтально проєктуючою площиною σ . Треба визначити, як побудовані проекції K_1 і K_2 точки їхнього перетину. Горизонтальна проекція K_1 виявляється без побудови, вона знаходиться в точці перетину горизонтальної проекції A_1B_1 прямої AB із проєкцією σ_1 площини σ .

Фронтальна проекція K_2 визначається вертикальною лінією зв'язку K_1K_2 проведеної із точки K_1 , і розташовується на фронтальній проекції A_2B_2 прямій AB .



а



б

Рисунок 62

Перетин прямої загального положення із площиною загального положення.

На комплексному кресленні (рис. 63) пряма EF (E_1F_1 E_2F_2) загального положення перетинає площину загального положення, задану трикутником $ABC(A_1B_1C_1 A_2B_2C_2)$.

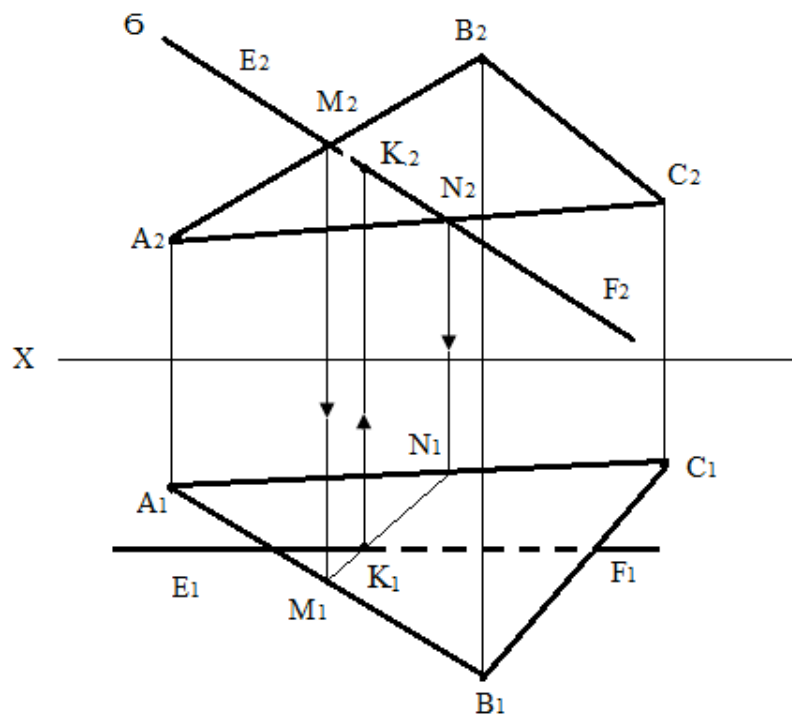


Рисунок 63

У цьому випадку допоміжною площиною (посередником) є фронтально проектуюча площина $\sigma(\sigma_2)$, що перетинає площину трикутника по відрізку MN (M_1N_1 M_2N_2).

Перетин горизонтальної проекції M_1N_1 , відрізка MN з горизонтальною проекцією E_1F_1 даного відрізка EF з'явиться горизонтальною проекцією точки перетину K з площиною, заданою трикутником ABC . Фронтальна проекція K_2 впливає шляхом проведення вертикальної лінії зв'язку K_1K_2 із точки K_1 до перетину із фронтальною проекцією M_2N_2 відрізка MN .

Перетин горизонтально проектуючої прямої із площиною загального положення.

На комплексному кресленні (рис. 64) – горизонтально проектуюча пряма, i (i_1i_2) перетинає площину загального положення, задану трикутником ABC ($A_1B_1C_1$ $A_2B_2C_2$). У цьому випадку взята горизонтально проектуюча площина $\sigma(\sigma_1)$, що проходить через проекцію B_1 – вершину B трикутника ABC (для зручності побудови) і горизонтальну i_1 проекцію прямої i .

Горизонтальна проекція K_1 точки перетину прямої із заданою площиною збігається з горизонтальною проекцією i .

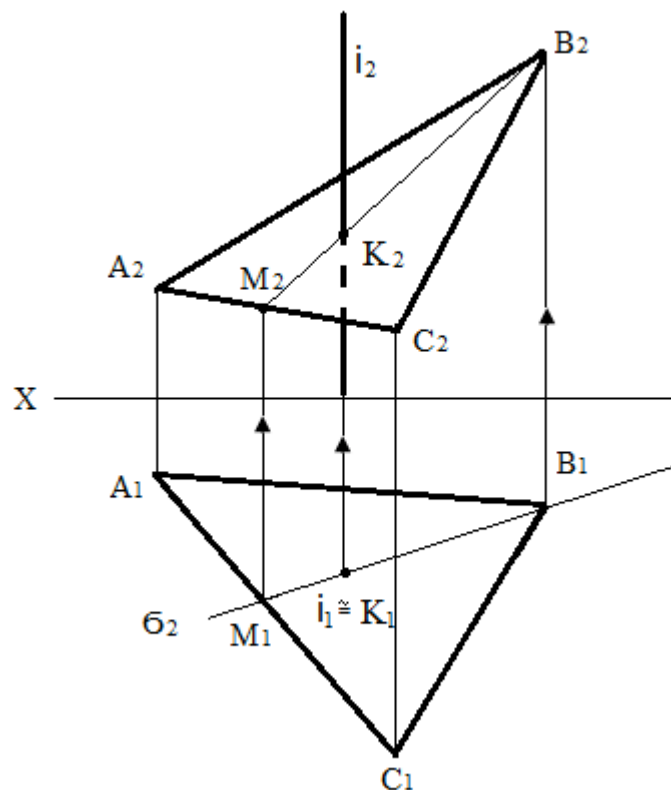


Рисунок 64

Фронтальна проекція лежить у точці K_2 перетину фронтальної проекції M_2N_2 із проекцією i_2 , що задана прямою i .

5 Способи перетворення проєкційного креслення

5.1 Спосіб обертання.

Спосіб обертання полягає в тому, що геометричний елемент, що проєкується, (точка, пряма, фігура та ін.) переміщують із загального положення в частинне для вирішення поставленої задачі. Нехай точка A обертається навколо осі i (рис. 65), тоді:

– шлях, (траєкторія) обертання точки A лежить у **площині обертання** (ПО), перпендикулярної осі обертання i ;

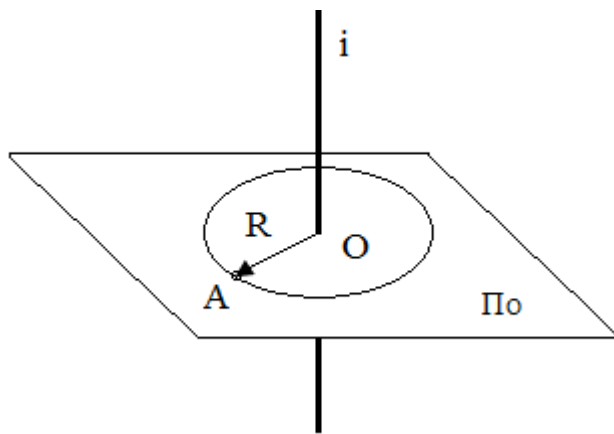
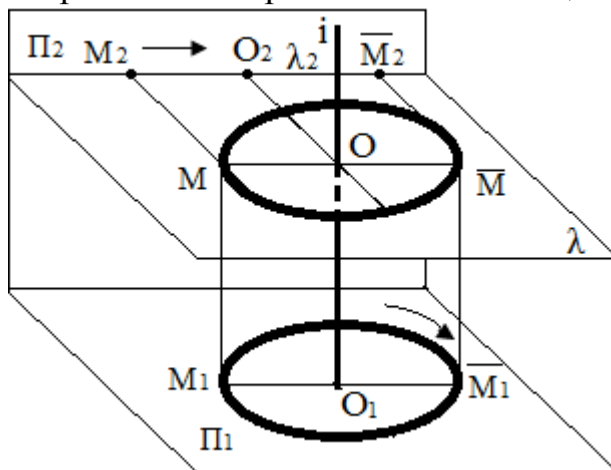


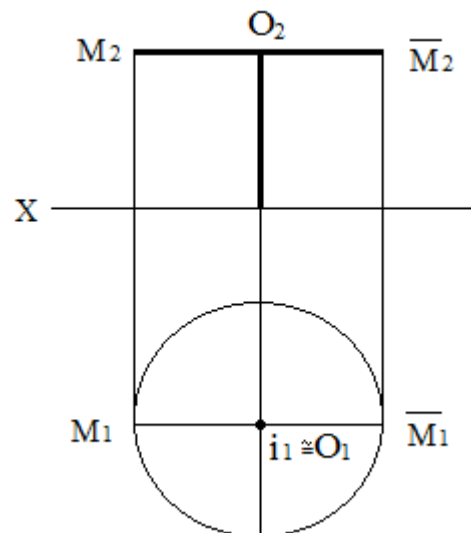
Рисунок 65

– точка O перетину осі обертання i із площиною обертання (ПО) є **центром обертання**; – пряма, що з'єднує точку A з точкою O , центром обертання, називається **радіусом обертання**. Шлях обертання точки A є колом. При побудові проєкцій точки проєкується і її траєкторія шляху. Точка обертального елемента, що лежить на осі обертання, залишається нерухомою.

Обертання точки. На рис. 66 а, – наочне зображення обертання точки M навколо осі i , перпендикулярної до площини Π_1 . Точка M обертається в горизонтальній площині рівня λ .



а



б

Рисунок 66

Траєкторія рухомої точки M – коло, що проектується на площину Π_1 , без **перекручування колом** тому, що лежить у площині, паралельній до площини Π_1 , а на площину Π_2 – **відрізком прямої**, що збігається із проекцією λ_2 площини λ . Таким чином, якщо вісь обертання перпендикулярна до площини Π_1 , то проекція M_1 точки M буде переміщатися по колу, проекція M_2 – по прямій, паралельній осі x (рис. 66 б).

Дії залишаються аналогічними, якщо вісь обертання перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 . Якщо вісь обертання i , перпендикулярна до площини Π_2 , то проекція N_2 точки N буде переміщатися по колу, а проекція N_1 по прямій, паралельній осі x .

На рис. 67 виконаємо комплексні креслення обертання точок A та B . Точку A повернемо на 135° по руху годинникової стрілки навколо осі, перпендикулярної до площини Π_1 , а точку B на 93° проти годинникової стрілки навколо осі i перпендикулярної до площини Π_2 .

Побудова для точки A . Із точки O_1 , радіусом O_1A_1 проводять дугу в заданому напрямку, потім відкладають кут 135° , одержують точку $\bar{A}_1$ – горизонтальну проекцію переміщеної точки A . Із точки A_1 проводять вертикальну лінію зв'язку до перетину в точці $\bar{A}_2$ з горизонтальною лінією зв'язку, проведеної із точки A_2 . Точка $\bar{A}_2$ – фронтальна проекція переміщеної точки A . Аналогічний порядок побудови і для точки B .

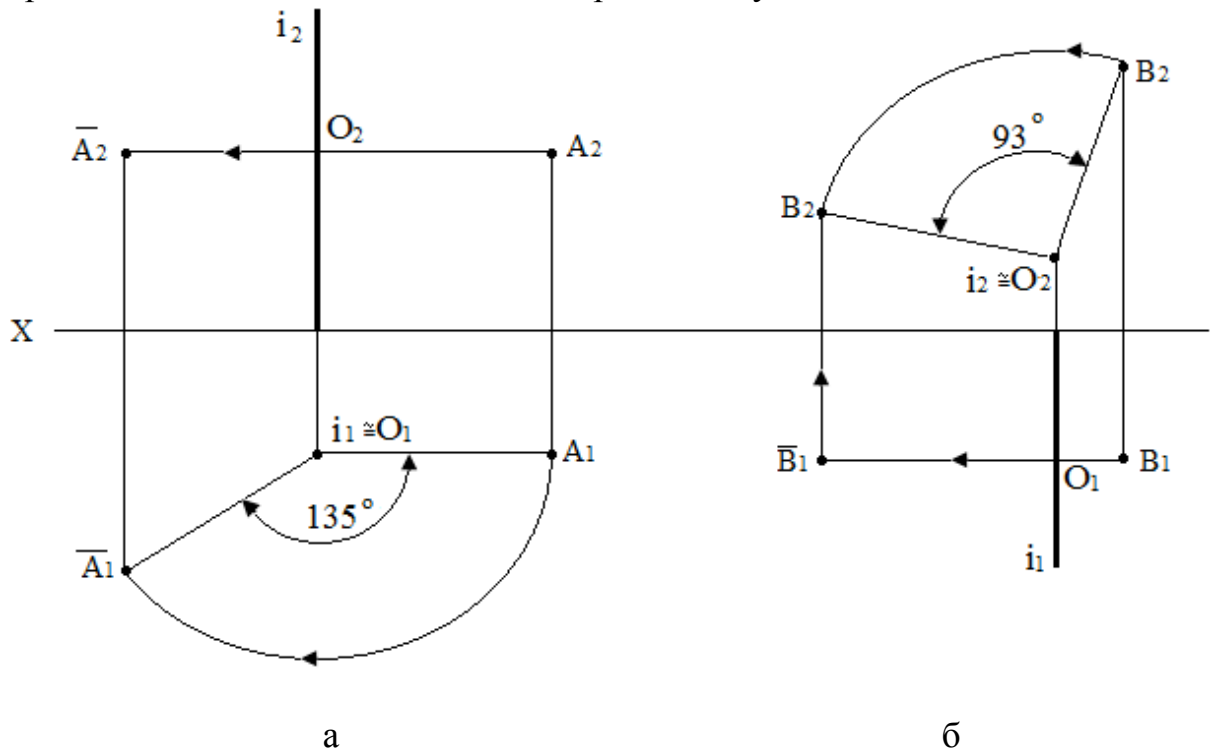


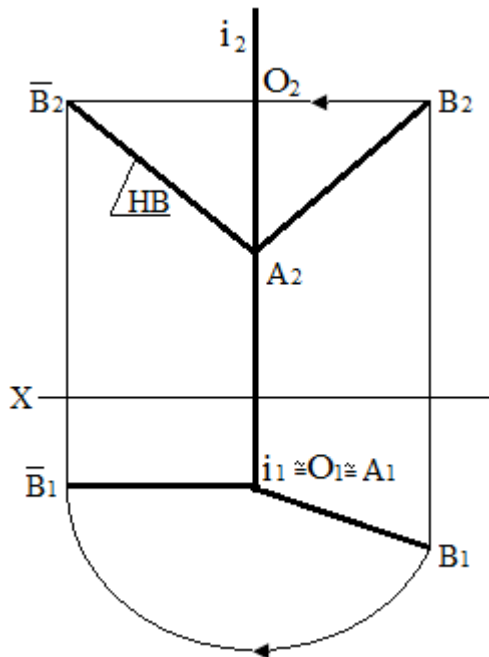
Рисунок 67

Обертання відрізка прямої. Пряма визначається двома точками, тому задача зводиться до обертання двох довільних точок прямої на той самий кут і проведенню прямої через повернені точки.

Задача значно спрощується, якщо вісь обертання провести через одну із крайніх точок відрізка. Потрібно повернути тільки другу крайню точку відрізка, тому що перша точка знаходиться на осі обертання і не змінить свого положення. З'єднують прямою повернену точку з нерухомою, одержують нове положення відрізка.

Визначення дійсної величини відрізка.

У даному прикладі мета обертання відрізка прямої загального положення – визначення його дійсної величини. На рис. 68 методом



обертання визначена величина відрізка AB прямої загального положення. Проекцію A_1B_1 обертають до паралельного положення до осі x , потім визначають нову фронтальну проекцію $\overline{B_2}A_2$ відрізка AB , для цього із точки $\overline{B_1}$ проводять вертикальну лінію зв'язку, а із точки B_2 – горизонтальну пряму лінію. Точка $\overline{B_2}$ їхнього перетину – фронтальна проекція переміщеної точки B . З'єднують прямою точку $\overline{B_2}$ з нерухомою точкою A_2 .

Рисунок 68

Проекції $A_1\overline{B_1}$ – нові проекції поверненого відрізка AB .

Проекція $A_2\overline{B_2}$ – дійсна величина відрізка AB .

Визначення натуральної величини фігури, розташованої в проектуючій площині.

Виконаємо (рис. 69) – комплексне креслення знаходження дійсної величини трикутника ABC , розташованого в горизонтально проектуючій площині σ .

Горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ трикутника ABC повертають до паралельного положення до осі x . Пряма $\overline{C_1}B_1A_1$ – горизонтальна проекція поверненого трикутника. Із точок $\overline{C_1}$ і $\overline{B_1}$ проводять вертикальні лінії зв'язку, а із точок B_2 і C_2 горизонтальні прямі лінії. Перетин проведених ліній зв'язку, точки $\overline{C_2}$ та $\overline{B_2}$ з'єднують прямими лініями із точкою A_2 . Отриманий трикутник $A_2\overline{B_2}\overline{C_2}$ – фронтальна проекція трикутника ABC ,

вона виявляє його дійсну величину, по якій можна визначити форму, площу, довжину сторін і величину кутів трикутника.

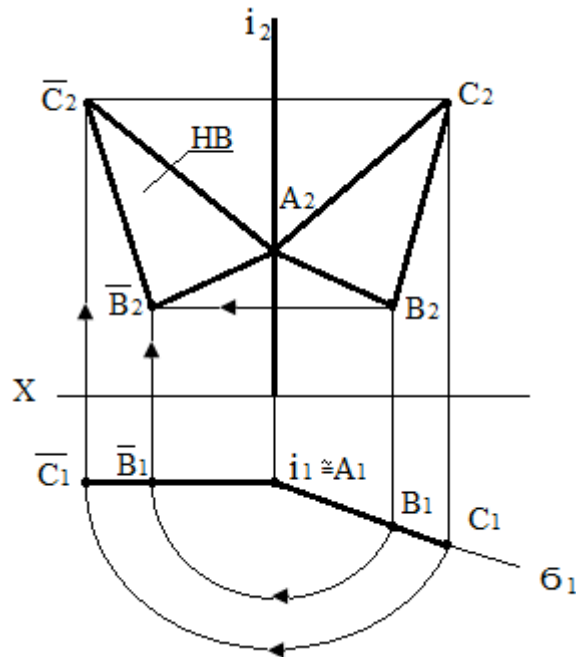


Рисунок 69

5.2 Спосіб сполучення.

Спосіб сполучення полягає в тому, що площина, задану слідами, обертають навколо одного із слідів цієї площини до сполучення з відповідною площиною проекцій.

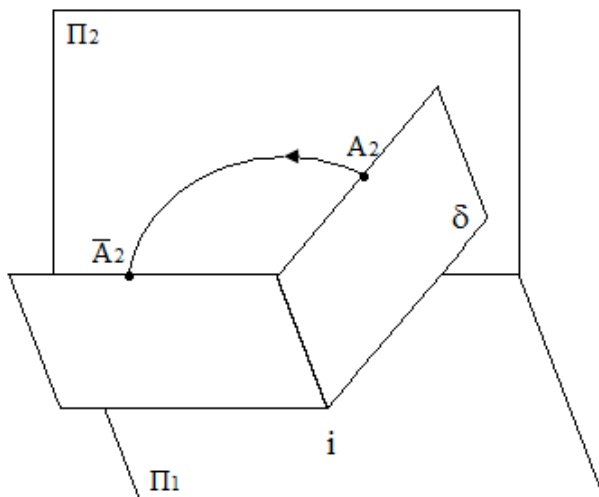


Рисунок 70

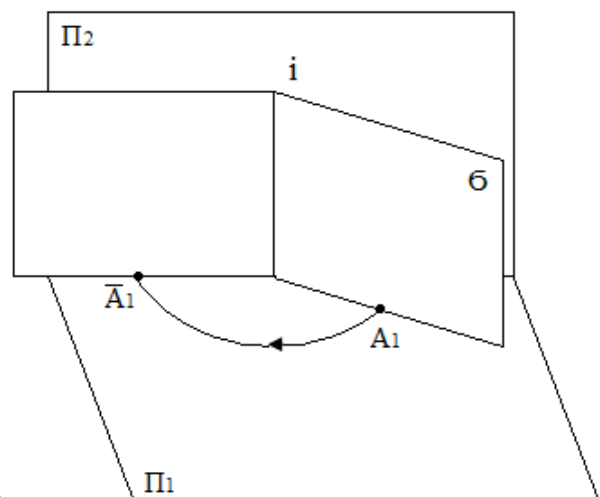


Рисунок 71

Тоді всі лінії й фігури, що лежать у заданій площині, зобразяться на відповідних площинах проекцій без перекручування. Горизонтальний слід площини є однією з її горизонталей, а фронтальний слід – однією з її фронталей, отже, обертання площини навколо одного з її слідів можна

розглядати як окремий випадок способу обертання. Обертаючи задану площину δ навколо її горизонтального сліду, площину сполучають із площиною проєкцій Π_1 , (рис. 70), а обертаючи задану площину σ навколо її фронтального сліду – із площиною проєкцій Π_2 (рис. 71).

Сполучення проєктуючих площин виконується досить просто, тому що сліди їх у просторі утворюють прямий кут. Він зберігається і при сполученні.

Сполучення проєктуючих площин, у яких лежать фігури.

Сполучення фронтально проєктуючої площини δ з розташованим у ній чотирикутником із площиною проєкцій Π_1 (рис. 72). За вісь обертання приймають горизонтальний слід площини δ . Фронтальна проєкція δ_2 площини δ разом із фронтальною проєкцією $A_2B_2C_2D_2$ чотирикутника за допомогою дуг, проведених відповідними радіусами із точки E , сходу слів, як із центра, сполучаються з віссю x ($\delta_2C_2D_2B_2A_2$). Із точок $C_2D_2B_2A_2$ проводять прямі перпендикулярно, а із точок $A_1B_1C_1D_1$ – паралельно осі x .

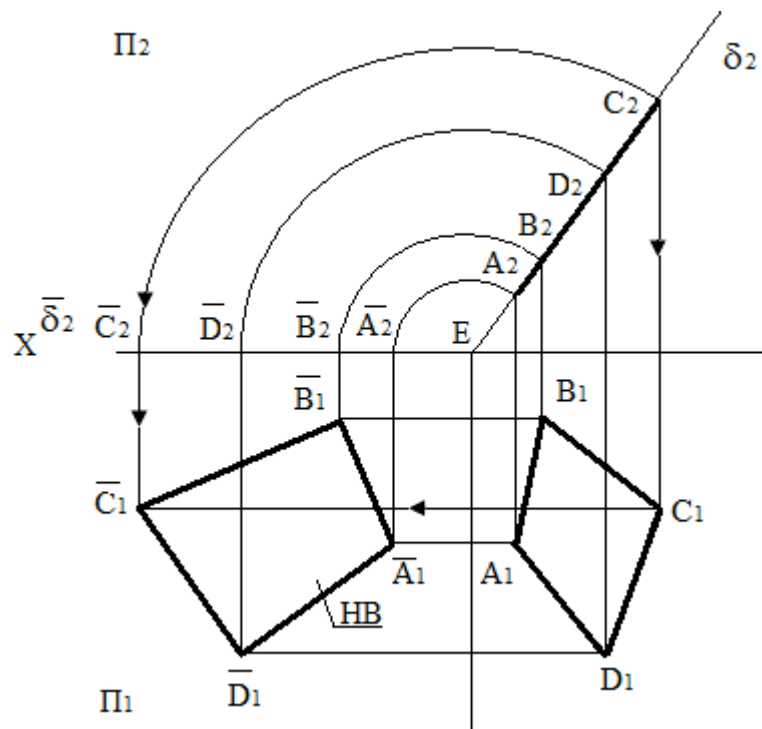


Рисунок 72

У перетині прямих одержують точки $\overline{A_1B_1C_1D_1}$ – сполучені горизонтальні проєкції вершин чотирикутника.

З'єднані послідовно прямими лініями точки $\overline{A_1B_1C_1D_1}$ дадуть фігуру, рівну дійсній величині заданого чотирикутника, по якій можна визначити його форму, довжину сторін і величину кутів чотирикутника.

Сполучення фронтально проєктуючої площини δ з розташованим у ній чотирикутником із площиною проєкції Π_2 (рис. 73). Сполучають

горизонтальний слід площини δ із площиною проєкцій Π_2 . Для цього проводять пряму із точки E перпендикулярно до проєкції δ_2 площини δ .

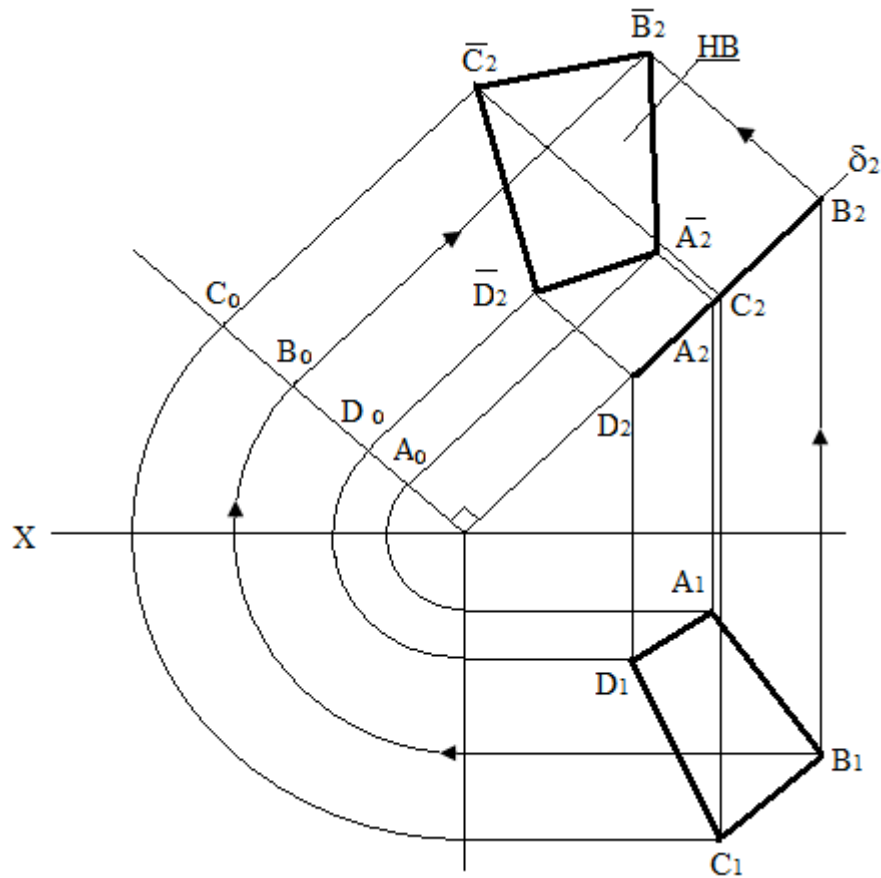


Рисунок 73

На сполученому сліді за допомогою відповідних дуг, проведених із точки E , як із центра, одержують точки $A_0D_0B_0C_0$. Із точок $D_2C_2A_2B_2$ проводять прямі перпендикулярно, а із точок $A_0D_0B_0C_0$ – паралельно проєкції δ_2 . У перетині прямих одержують точки $\overline{A_2B_2C_2D_2}$ – сполучені фронтальні проєкції вершин чотирикутника. З'єднані послідовно прямими лініями точки $\overline{A_2B_2C_2D_2}$ – дадуть фігуру, рівну дійсній величині заданого чотирикутника, по ній можна визначити форму, площу, сторони і величину кутів чотирикутника.

5.3 Спосіб зміни площин проєкцій.

Спосіб зміни площин проєкцій полягає в тому, що основну систему площин проєкцій, у якій є проєкції оригіналу, замінюють новою системою двох взаємно перпендикулярних площин, причому положення оригіналу залишається колишнім.

На рис. 74 а, б наведені приклади переходу системи площин проєкцій $\Pi_1\Pi_2$ до систем $\Pi_1\Pi_4$ і $\Pi_2\Pi_4$, щораз у новій системі площин проєкцій з'являється нова вісь проєкцій – пряма лінія перетину площин

проекцій. На рис. 75 а, б наведені приклади їхнього утворення і позначення.

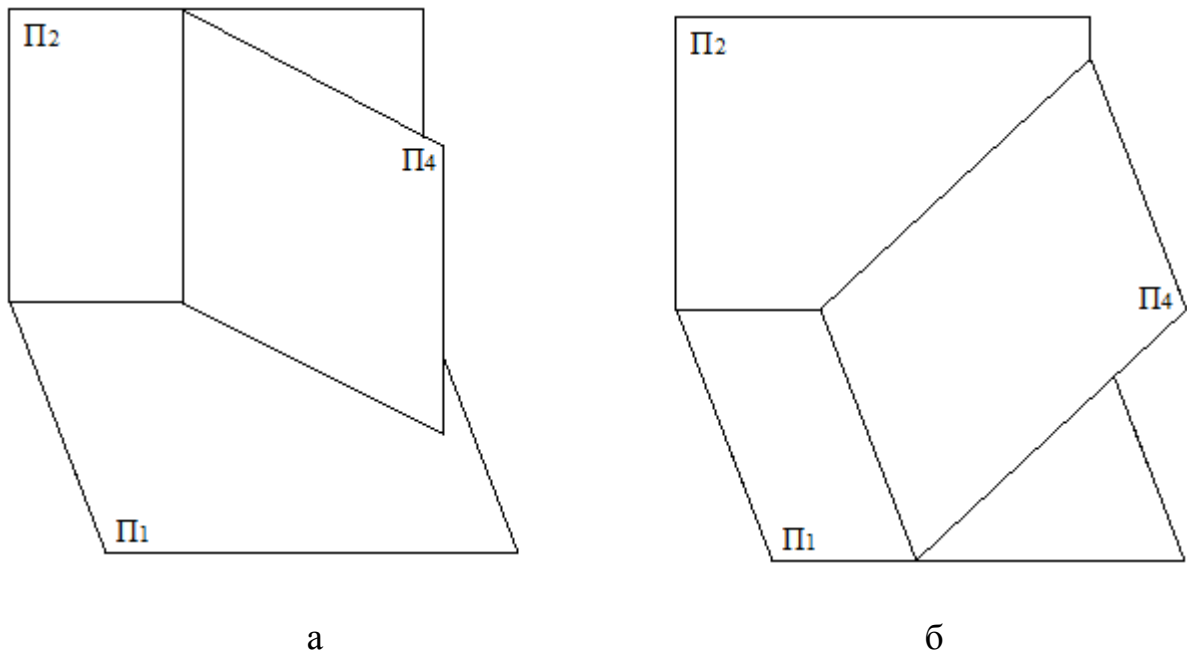


Рисунок 74

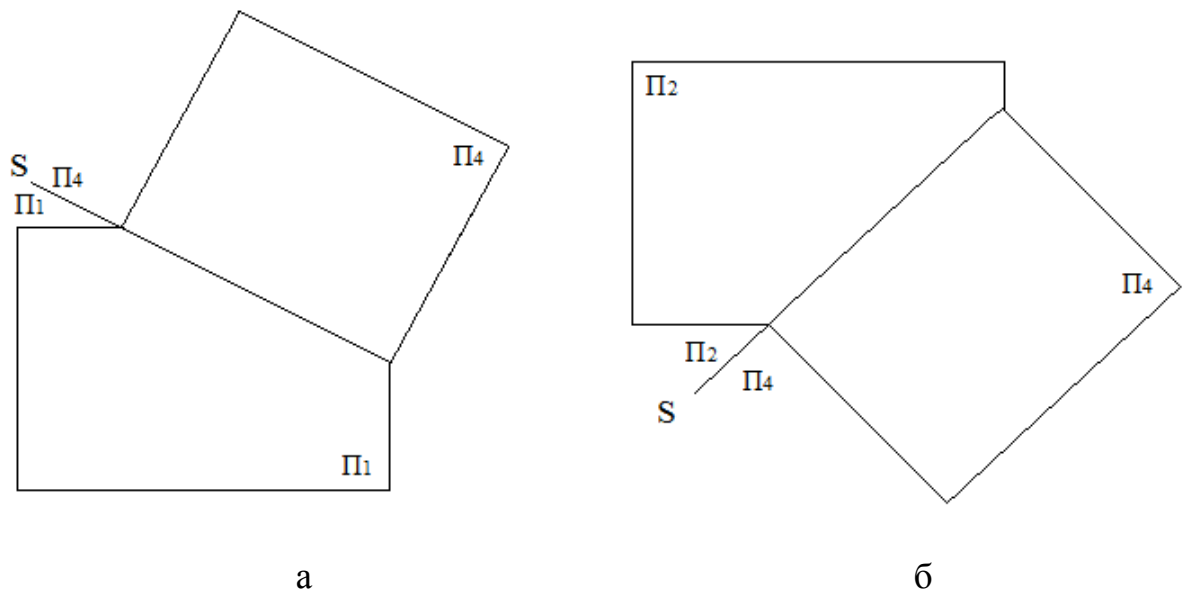


Рисунок 75

Помітимо, що не можна замінити дві площини проєкцій відразу, заміну площин можна робити тільки в послідовному порядку.

Заміна фронтальної площини проєкцій. На рис. 76 – наочне зображення системи $\Pi_1\Pi_2$ і точка A в просторі. Замість площини Π_2 узята нова площина Π_4 , перпендикулярна до Π_1 . Утворилася нова система площин $\Pi_1\Pi_4$ з новою віссю s . Провівши через точки проєктуючий промінь на площину Π_4 , одержимо нову проєкцію A_4 точки A .

На наочному зображенні видно, що залишаються незмінними:

- горизонтальна проекція A_1 ;
- висота A_2A_{12} точки A , тобто координата z_A .

Перейдемо до комплексного креслення. На рис. 77 дано комплексне креслення побудови проекції точки A на площині Π_4 .

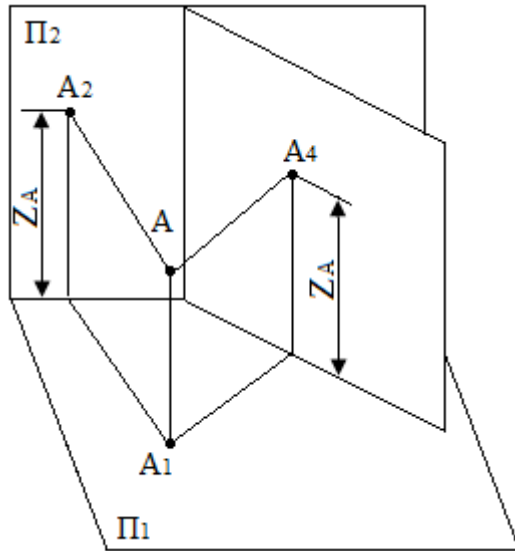


Рисунок 76

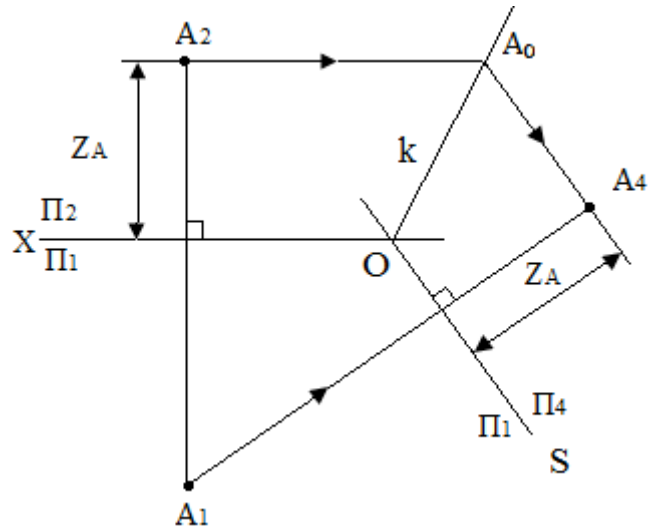


Рисунок 77

Проводять нову вісь s_{14} , а із точки A_1 перпендикулярно до осі проводять лінію зв'язку і на ній від точки A_{14} відкладають відрізок $A_{14}A_2=A_{12}A_2$. Точка A_4 нова проекція точки A на площині Π_4 . Прямі A_2A_0 і A_0A_4 – лінії зв'язку, а бісектриса k – стала пряма креслення.

Заміна горизонтальної площини проекції. На рис. 78 – наочне зображення проектування точки на нову площину проєкцій Π_4 (система

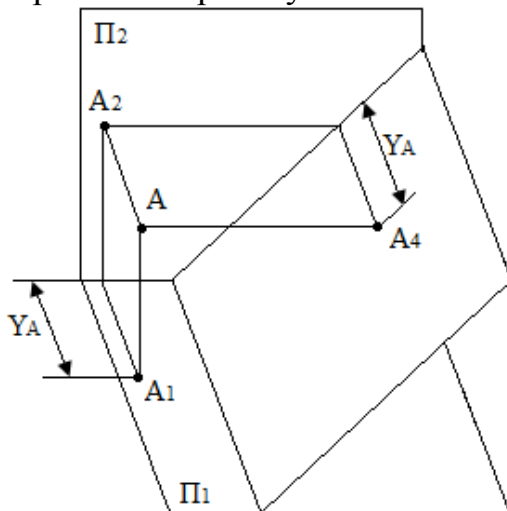


Рисунок 78

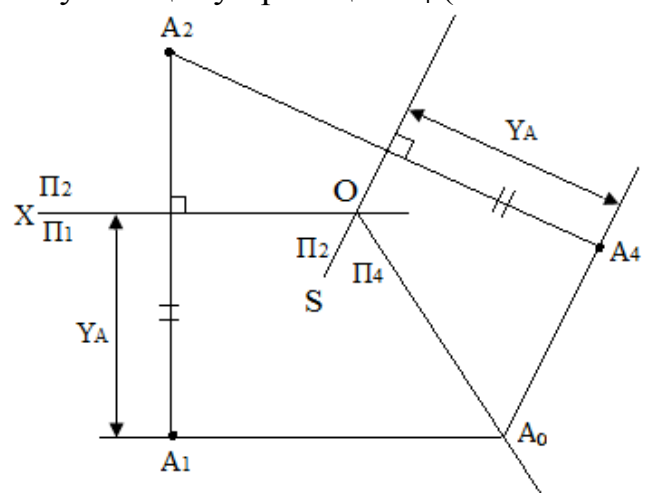


Рисунок 79

$\Pi_2\Pi_4$). Побудова комплексного креслення аналогічна попередньому.

У цьому випадку незмінними залишаються проекція A_2 і координата y (рис. 79). Познайомившись із побудовою нових проєкцій точок при зміні

площин проєкцій, можна побудувати нові проєкції ряду точок, тобто лінії і плоскі фігури.

Задачі, розв'язувані способом зміни площин проєкцій.

Приклад 1. Задача перетворення – визначити довжину відрізка.

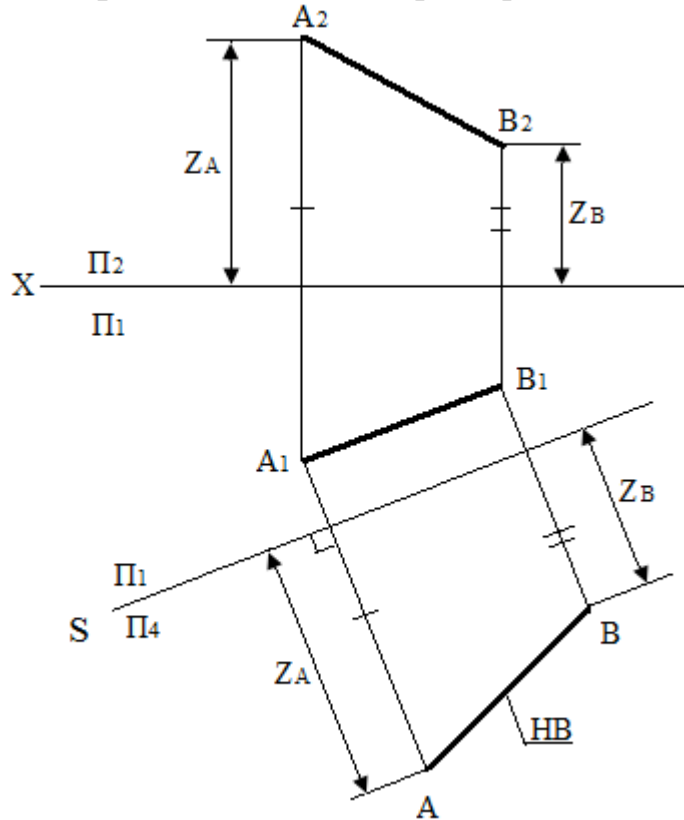


Рисунок 80

Застосування системи $\Pi_1\Pi_4$ (рис. 80). На комплексному кресленні площина Π_2 замінена площиною Π_4 . Причому нова площина повинна бути паралельна відрізку AB , тоді нова вісь s повинна розташуватися паралельно до горизонтальної проєкції A_1B_1 (проводиться на будь-якій відстані від проєкції A_1B_1). Проектують точки A та B на площину Π_4 , одержують проєкції A_4 і B_4 . З'єднують ці точки прямою. Нова проєкція відрізка AB буде дорівнювати його дійсній величині. Координати z точок A та B залишаються незмінними.

Приклад 2.

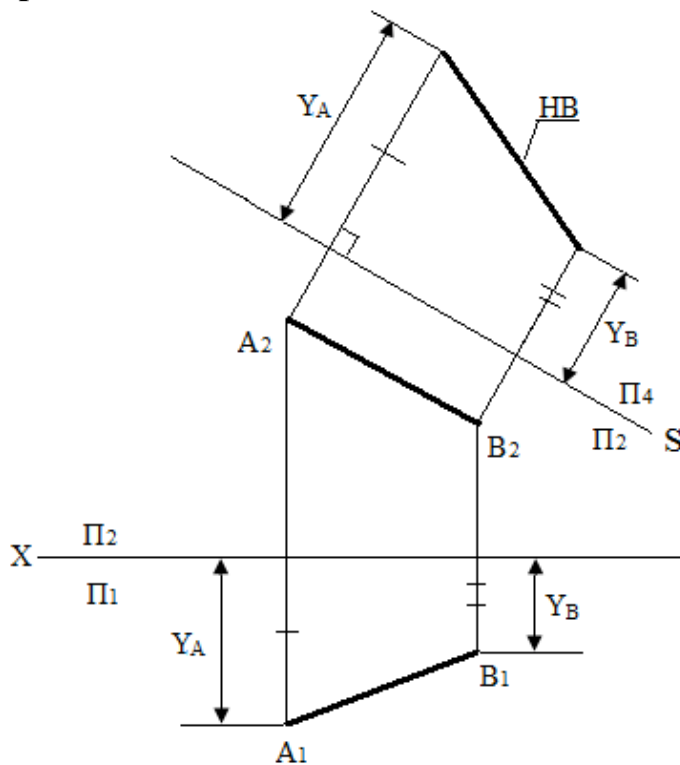


Рисунок 81

Приклад 3.

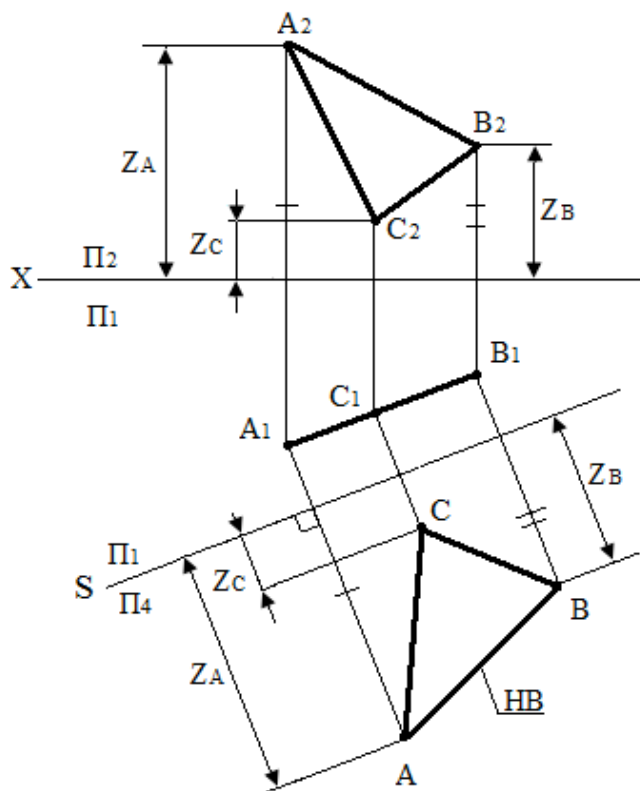


Рисунок 82

Задача перетворення — визначити довжину відрізка. Застосування системи P_2P_4 (рис. 81). У цьому випадку площина P_1 замінена площиною P_4 . Нова вісь s паралельна до фронтальної проекції A_2B_2 , і нова проекція A_4B_4 у системі P_2P_4 буде дорівнювати довжині відрізка AB . Координати у точок A та B залишаються незмінними.

Задача перетворення — визначити натуральний вид трикутника (рис. 82). У розглянутому випадку може бути застосована тільки система P_1P_4 . Площина заданого трикутника перпендикулярна до площини P_1 . Вона належить проектуючій площині σ (σ_I), тому площина P_2 можна замінити лише на площину P_4 так, щоб вона була паралельна до площини трикутника, тобто площини σ . Нова вісь s розташовується паралельно проекції трикутника ABC . На проведені із точок $A_1B_1C_1$ лініях зв'язку, користуючись координатами z точок ABC , знаходять нову проекцію

$A_4B_4C_4$ трикутника. Проекція $A_4B_4C_4$ представляє натуральний вид трикутника ABC , по якому можна визначити його площу, сторони та кути.

5.4 Спосіб плоскопаралельного переміщення.

Плоскопаралельним рухом фігури в просторі називається таке її переміщення, при якому всі точки даної фігури переміщуються в площинах, паралельних до однієї із площин проекцій.

При плоскопаралельному переміщенні відрізка або фігури одна із проекцій, не змінюючи виду і величини, переміщається в площині проекції – міняється лише положення цієї проекції щодо осі проекцій. Інші проекції точок відрізка і фігури переміщуються по прямих, паралельних осі проекцій (у площинах рівня).

Користуючись цими властивостями, можна застосовувати спосіб обертання, не задаючись осями обертання і не встановлюючи величини радіусів обертання. Отже, при всякому переміщенні точки в горизонтальній площині рівня фронтальна проекція її пересувається паралельно осі. При будь-якому переміщенні точки у фронтальній площині рівня горизонтальна проекція її пересувається паралельно осі x . Рішення задачі способом плоскопаралельного переміщення спрощує побудову, дає можливість розташовувати проекції на вільному полі креслення, (креслення займає більше площі), уникаючи тим самим накладення проекцій, що є важливою перевагою цього способу при вирішенні складних задач.

Переміщення відрізка прямої. На рис. 83 показано застосування способу плоскопаралельного переміщення для визначення натуральної величини відрізків AB і CD .

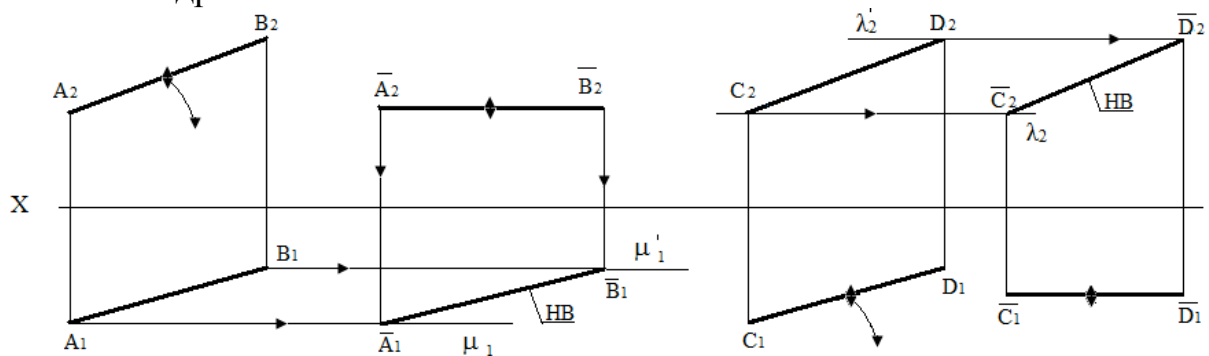


Рисунок 83

Для відрізка AB . Переміщують відрізок AB із загального положення в горизонтальній площині рівня. Для цього фронтальну проекцію A_2B_2 переміщують у положення $\overline{A_2B_2}$ паралельне до осі x . У горизонтальній площині проекцій точки A_1 і B_1 переміщуються по прямих, паралельних до осі x (проекціям горизонтальних площин рівня μ_1 і μ_1' тобто проекція A_1 точки A перейде в $\overline{A_1}$, точка B_1 у точку $\overline{B_1}$. У результаті горизонтальна

проекція $\overline{A_1 B_1}$, переміщеного відрізка дорівнює натуральній величині відрізка AB .

Для **відрізка CD** . Переміщують відрізок CD із загального положення у відрізок фронтального рівня. Для цього, горизонтальну проекцію $C_1 D_1$ переміщують у положення $\overline{C_1 D_1}$ паралельне до осі x . У фронтальній площині проєкцій точки C_2 і D_2 переміщуються по прямих, паралельних осі x_{12} (проекціям горизонтальних площин рівня λ_2 і λ'_2 , тобто проєкція C_2 точки C перейде в $\overline{C_2}$, точка D_2 – у точку $\overline{D_2}$. Проекція $\overline{C_2 D_2}$ – натуральна величина відрізка CD .

Переміщення плоскої фігури, що належить проєктуючої площини. На рис. 84 показано застосування способу плоскопаралельного переміщення при визначенні форми і величини відсіку фронтально проєктуючої площини, заданого чотирикутником $ABCD$.

Фронтальну проєкцію $A_2 B_2 C_2 D_2$ переміщуємо у вільному місці поля креслення в положення $\overline{A_2 B_2 C_2 D_2}$, тоді чотирикутник виявиться в горизонтальній площині рівня і його нова горизонтальна проєкція виявляє його форму й розміри.

Для одержання нової горизонтальної проєкції $\overline{A_1 B_1 C_1 D_1}$, досить проєкції $A_1 B_1 C_1 D_1$ вершин чотирикутника перемістити по прямих, паралельних осі x до вертикальних ліній зв'язку, проведених із точок $\overline{A_2 B_2 C_2 D_2}$. Проекція $\overline{A_1 B_1 C_1 D_1}$ чотирикутника – натуральна його величина.

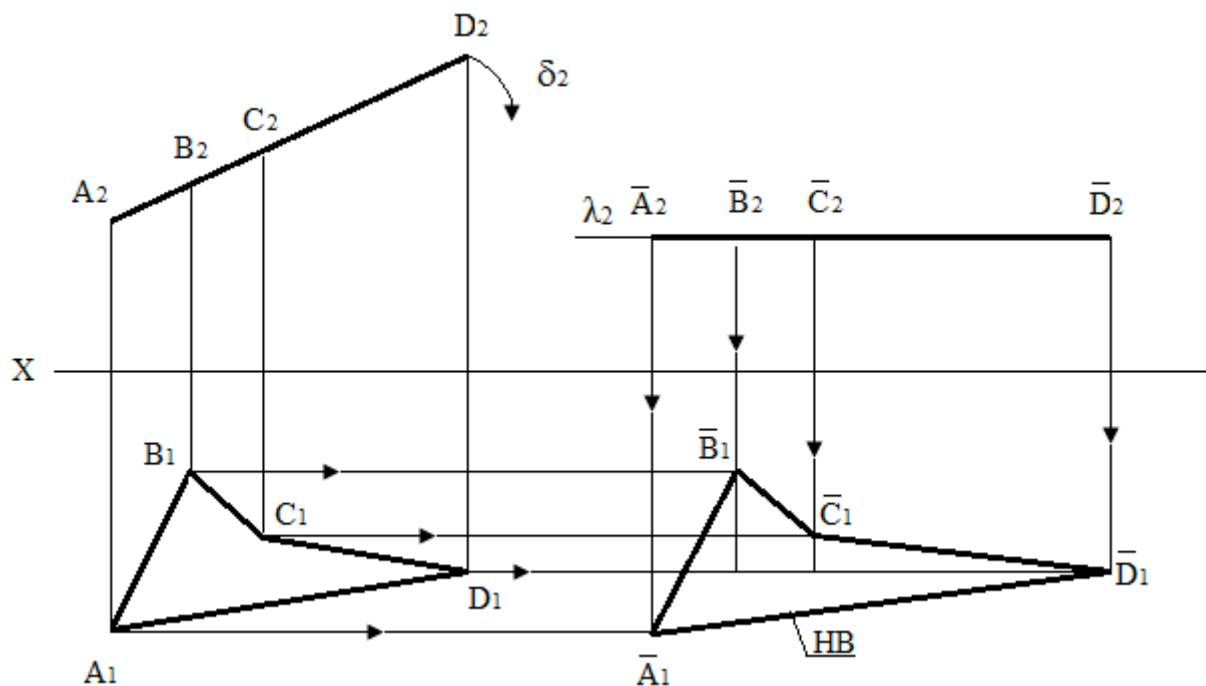


Рисунок 84

На рис. 85 показане застосування способу плоскопаралельного переміщення для визначення натуральної величини відсіку горизонтально проєктуючої площини σ , заданого трикутника ABC .

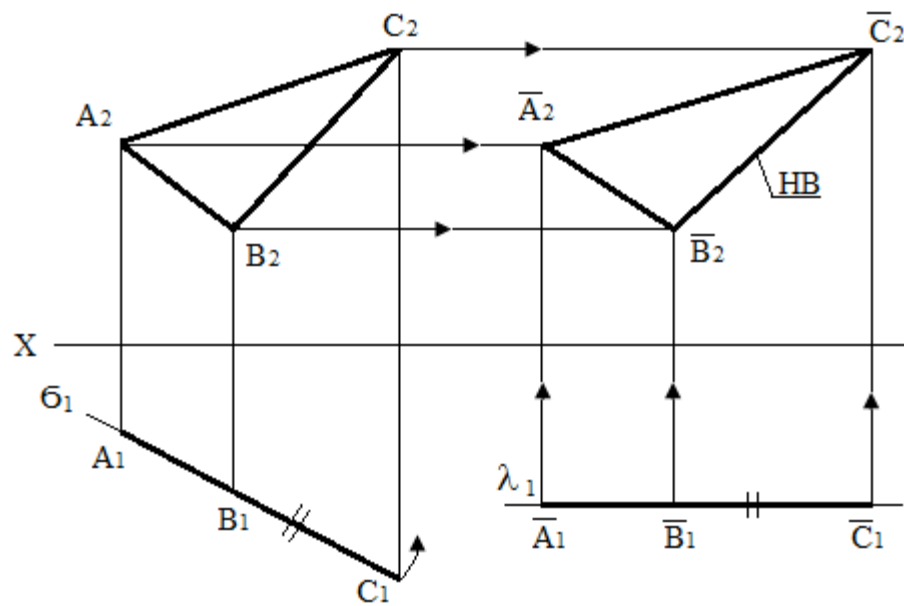


Рисунок 85