

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ХОМЕНКО Г. В.

ГІДРОДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ПРИРОДНИХ ПРОЦЕСІВ

Конспект лекцій

Одеса
Одеський державний екологічний університет
2014

ББК 26.23
УДК 551.509.313
X76

Дати дозвіл на використання в навчальному процесі в електронному вигляді (протокол №2 від 30.10. 2014 р.)

Хоменко Г. В.

Гідродинамічне моделювання природних процесів: конспект лекцій. Одеса, Одеський державний екологічний університет, 2014. 203 с.

В конспекті лекцій викладаються фізичні та математичні аспекти гідродинамічного моделювання атмосферних процесів для короткострокового прогнозу погоди.

Велика увага приділяється питанням параметризації процесів підсіткового масштабу та сучасним гідродинамічним моделям, які використовуються в прогностичній практиці зарубіжних країн та України.

Розглядаються також питання якості різних атмосферних моделей та наводяться порівняльні оцінки справджуваності прогнозів основних елементів погоди.

Конспект лекцій призначений для студентів магістерського рівня підготовки за напрямом «Гідрометеорологія».

ISBN 978-966-186-037-6

© Хоменко Г.В., 2014
© Одеський державний екологічний університет, 2020

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. Основні рівняння динаміки атмосферних процесів	
1.1 Рівняння в локальній декартовій системі координат. Початкові та межові умови.....	7
1.2 Рівняння гідротермодинаміки в системі з загальною вертикальною координатою.....	12
1.2.1 Рівняння в ізобаричній системі координат.....	21
1.2.2 Рівняння в σ (сигма) – системі координат.....	27
1.2.3 Рівняння в ізентропічній системі координат.....	39
Розділ 2. Моделі за повними рівняннями для баротропної та барокліної атмосфери	
2.1 Повні рівняння баротропної моделі атмосфери.....	46
2.2 Рівняння баротропної моделі в σ – системі координат	49
2.3 Рівняння барокліної моделі в P – системі координат.....	51
2.4 Інтегрування повної системи рівнянь гідротермодинаміки.....	55
2.5 Шахові сітки та використання їх при чисельній реалізації прогностичних моделей.....	58
2.6 Проблема початкових та межових умов в прогностичних моделях за повними рівняннями.....	66
Розділ 3. Інтегральні властивості моделей за повними рівняннями	
3.1 Інтегральні інваріанти баротропної моделі в P – координатах.....	71
3.2 Інтегральні інваріанти моделі для барокліної атмосфери в ізобаричній системі координат.....	78
3.3 Інваріанти адіабатичного руху.....	83
3.3.1 Закони збереження ентропії і потенціального вихору.....	85
3.3.2 Теорема Ертеля.....	91
Розділ 4 Чисельне розв’язання рівнянь гідротермодинаміки	
4.1 Оцінка точності скінченнорізницевої апроксимації похідних.....	98
4.2 Явні, неявні і напівнеявні скінченнорізничеві схеми.....	102
4.3 Скінченнорізничеві схеми рівнянь гідротермодинаміки та методи їх побудови.....	106
4.4 Критерій обчислювальної стійкості для лінійних диференціальних рівнянь.....	109
4.5 Дослідження обчислювальної стійкості на прикладі лінійного рівняння адвекції.....	113
Розділ 5. Принципи параметризації атмосферних процесів підсіткового масштабу.....	116
5.1 Способи параметризації променистого теплообміну.....	118
5.1.1 Плоскопаралельна модель переносу радіації.....	120
5.1.2 Параметризація променистого теплообміну на основі інтегральних функцій пропускання.....	123
5.1.3 Методика розрахунку припливу тепла за рахунок довгохвильової радіації.....	125

5.2 Параметризація процесів турбулентного теплообміну.....	131
5.2.1 Параметризація дрібномасштабної турбулентності.....	135
5.2.2 Параметризація планетарного граничного шару атмосфери.....	137
5.2.3 Параметризація процесів вихрової (середньомасштабної) турбулентності.....	142
5.3 Параметризація процесів великомасштабної конденсації.....	144
Розділ 6. Сучасні оперативні прогностичні моделі.....	148
6.1 Основні відомості про чисельні моделюючі системи.....	148
6.1.1 Моделююча система ARPEGE-ALADIN.....	148
6.1.2 Моделююча система MM5.....	151
6.1.3 Вибір критеріїв для порівняння двох моделей.....	156
6.2 Спільний порівняльний аналіз прогностичних можливостей моделей ALADIN і MM5.....	158
6.2.1 Параметризація процесів підсіткового масштабу у моделі MM5..	158
6.2.2 Параметризація процесів підсіткового масштабу у моделі ALADIN.....	161
6.3 Адаптація чисельних мезомасштабних моделей до умов України.....	163
6.3.1 Проблема вибору схеми телескопізації.....	163
6.3.2 Схема телескопізації в моделі MM5.....	163
6.3.2.1 Формування горизонтальних і вертикальних сіток.....	165
6.3.2.2 Рельєф, категорії підстильної поверхні і маски океан – континент.....	167
6.3.3 Схема телескопізації в моделі ARPEGE-ALADIN.....	173
6.3.3.1 Формування горизонтальних і вертикальних сіток.....	173
6.3.3.2 Процеси на підстильній поверхні і маски океан – континент.....	174
6.4 Скінченнорізницева модель WRF.....	175
6.4.1 Загальні відомості про модель.....	176
6.4.2 Вихідна система рівнянь моделі.....	178
6.4.3 Параметризації, що використовуються в моделі.....	181
6.4.4 Тайфунний блок моделі.....	181
6.4.5 Вихідна продукція	183
6.5 Загальні відомості про ансамблеві прогнози погоди.....	184
Розділ 7. Порівняльна оцінка якості атмосферних моделей різного масштабу.....	190
Основна література.....	203
Додаткова література.....	203

ВСТУП

В останні десятиріччя здобуті великі досягнення в області гідродинамічних методів прогнозу погоди, які стали можливими завдяки швидкому розвитку комп'ютерної техніки і значним успіхам у дослідженні фізики атмосферних процесів різних масштабів.

Метеорологічні центри розвинутих країн світу в теперішній час оснащені потужними суперкомп'ютерами, що дозволяє постійно удосконалювати існуючі прогностичні моделі атмосфери, будувати нові і упроваджувати їх в оперативну синоптичну практику. Удосконалення гідродинамічних моделей пов'язано з більш детальною та більш фізичною обґрунтованою параметризацією процесів підсіткового масштабу, збільшенням розділення в горизонтальній і вертикальній площині, залученням різноманітних джерел гідрометеорологічної інформації тощо.

Основні питання побудови прогностичних моделей в спрощеному вигляді (фільтровані моделі) і сіткові методи їх реалізації розглядаються в курсі «Гідродинамічні методи прогнозу погоди» на бакалаврському рівні.

В даному конспекті лекцій для студентів магістерського рівня підготовки узагальнені теоретичні та практичні матеріали щодо дисципліни «Гідродинамічне моделювання природних процесів».

В першому та другому розділах викладаються принципи побудови прогностичних моделей, які базуються на використанні повної системи рівнянь гідротермодинаміки. Надається вивід цих рівнянь в системах координат, що набули широкого застосування в сучасних оперативних моделях, а також в наукових дослідженнях.

Третій розділ присвячений інтегральним властивостям моделей за повними рівняннями. Тут розглядаються енергетичні і адіабатичні інваріанти, які визначають фізичний зміст відповідної прогностичної моделі і мають велике значення при виборі схем скінченнорізницевої апроксимації просторових похідних.

Оскільки реалізація прогностичних моделей виконується в основному чисельними методами, в четвертому розділі розглядаються питання щодо скінченнорізницевої апроксимації просторових та часових похідних, побудови скінченнорізничевих схем і методів оцінки обчислювальної стійкості останніх.

В п'ятому розділі викладені методи параметризації таких процесів підсіткового масштабу як турбулентний обмін теплом, імпульсом і вологою в граничному шарі атмосфери. Слід відзначити, що в теперішній час існує велика кількість методів параметризації ефектів підсіткових процесів в моделях атмосфери, тому в конспекті розглядаються найбільш прості і прозорі для розуміння студентів види параметризації променистого теплообміну, процесів у граничному шарі атмосфери і

процесів конденсації. Зокрема, розглядаються принципи параметризації турбулентного обміну на основі моделі, яка була розроблена вченими Одеського гідрометеорологічного інституту В.А.Шнайдманом і А.Г. Тарнопольським.

Велика увага приділяється обговоренню сучасних моделей чисельного прогнозу, які в оперативному режимі використовуються в країнах Західної Європи, США, а також в Росії та Україні. Ці моделі (ALADIN, MM5, WRF) відрізняються методами чисельної реалізації, параметризації, розділенням по горизонталі і вертикалі, заданням початкових та межових умов, територією, для якої розраховуються прогностичні поля. Для моделі MM5 розглядається проблема адаптації її до умов України. Доцільність ознайомлення студентів з варіантом моделі WRF, яка пристосована до Далекосхідного регіону Росії пояснюється тим, що саме ця модифікація включає блок, призначений для прогнозу інтенсивності і переміщення такого небезпечного синоптичного об'єкта як тайфун. В цьому ж розділі в загальних рисах описуються принципи побудови ансамблевих прогнозів погоди, які в останні роки інтенсивно розвиваються і упроваджуються в оперативну практику.

В заключному сьомому розділі викладені результати порівнювальної оцінки успішності різних моделей, продукція яких використовується в багатьох зарубіжних країнах та в Україні. Оцінки зроблені в ГМЦ Росії за даними прогнозів таких елементів погоди, як температура, вітер (складові та вектор швидкості), вологість у поверхні землі, тиск на рівні моря та опади. Результати оцінок представлені у вигляді таблиць, які будуть використані на практичних заняттях з даної дисципліни. Оскільки порівнювальний аналіз моделей здійснюється постійно, вказані таблиці будуть відповідно оновлюватися.

Детальне викладення найбільш важливих питань щодо сучасного прогнозування погоди чисельними методами допоможе студентам зрозуміти фізичний зміст оперативних моделей, шляхи їх чисельної реалізації та способи використання їх продукції в синоптичній практиці. Тому даний конспект лекцій буде корисним для самостійної роботи студентів при підготовці до поточного та підсумкового контролю знань, а також при виконанні практичних завдань.

1 ОСОВНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ АТМОСФЕРНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Рівняння в локальній декартовій системі координат

Для дослідження атмосферних процесів – еволюції полів швидкості вітру, тиску і температури – використовується система рівнянь гідродинаміки і переносу тепла стосовно до макромасштабних процесів. Особливістю цієї системи, яка відрізняє її від звичайних рівнянь гідродинаміки, є наявність в рівняннях руху відхиляючої сили обертання Землі.

Локальне розглядання процесів на обмежених територіях з горизонтальними розмірами порядку декількох кілометрів дозволяє земну поверхню в границях області визначення розв'язання ідеалізувати у вигляді площини і користуватися у вихідних рівняннях прямокутною (а не сферичною) системою координат.

В локальній декартовій системі координат вісь z спрямована в zenit, а осі x та y вибираються довільно в площині, яка перпендикулярна до місцевої вертикалі. Якщо вісь x спрямована по дотичній до широтного кола на схід, а вісь y по дотичній до меридіана на північ, то така система координат в метеорології називається стандартною системою координат. Як звичайно, одиничні вектори по осях координат позначаються відповідно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

В такій системі координат векторне рівняння руху для одиничного об'єму має вигляд

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \nabla p - \Pi \vec{V}, \quad (1.1)$$

де \vec{V} – вектор швидкості з компонентами u, v, w ; p – атмосферний тиск; ρ – густина; $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ – умовний диференціальний оператор; Π – оператор турбулентного обміну; \vec{F} – масові сили. Рівняння (1.1) має зрозуміле фізичне тлумачення, яке ґрунтується на другому законі Ньютона, а саме: масові сили, сила баричного градієнта і сила турбулентної в'язкості зрівноважуються силою інерції $\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$.

Для повної визначеності рівняння (1.1) запишемо вирази для масових сил \vec{F} і диференціального оператора Π . При цьому із масових сил будемо враховувати тільки силу Коріоліса \vec{F}_c і силу тяжіння \vec{F}_g .

$$\vec{F}_c = -2\rho(\vec{\omega} \times \vec{V}), \quad (1.2)$$

$$\vec{F}_g = -\rho g \vec{k}. \quad (1.3)$$

Вираз (1.3) показує, що сила тяжіння має тільки вертикальну складову, оскільки вона спрямована перпендикулярно до горизонтальної площини ($\rho g \cdot \vec{i} = \rho g \cdot \vec{j} = 0$).

Отже, вектор \vec{F} визначається як алгебраїчна сума векторів \vec{F}_c і \vec{F}_g , тобто

$$\vec{F} = -2\rho(\vec{\omega} \times \vec{V}) - \rho g \vec{k}. \quad (1.4)$$

Значно більш складним є питання про вираз для сил турбулентної в'язкості. Оскільки точний опис турбулентного обміну для процесів синоптичного масштабу пов'язаний з великими принциповими труднощами, в задачах прогнозу погоди часто використовують найбільш просту напівемпіричну теорію турбулентності, яка пов'язує сили турбулентної в'язкості з середніми швидкостями частинки в об'ємі рідини, що досліджується.

Відомо, що механізм вертикального турбулентного обміну суттєво відрізняється від механізму горизонтального обміну, тому математично вони описуються по різному. Представимо запис сил турбулентної в'язкості в такому вигляді

$$\Pi \vec{V} = -\frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} - K_s \rho \Delta \vec{V}, \quad (1.5)$$

$$\text{де} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В (1.5) перший член в правій частині описує підсумковий ефект турбулентного тертя за рахунок вертикальної неоднорідності поля швидкості \vec{V} , а другий член – за рахунок його горизонтальної неоднорідності; K_s і K_z – коефіцієнти турбулентності, які описують інтенсивність переносу кількості руху турбулентними вихорами

відповідно в горизонтальній і вертикальній площині. Величини K_s і K_z є емпіричними характеристиками поля швидкості \vec{V} . В більшості метеорологічних задач K_z розглядається як функція висоти, а $K_s = \text{const}$; конкретний вираз для цих величин надається на основі різних моделей.

З урахуванням виразів (1.4), (1.5) рівняння (1.1) запишеться так

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p - 2\rho(\vec{\omega} \times \vec{V}) - g\rho\vec{k} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + K_s \rho \Delta \vec{V}. \quad (1.6)$$

Для розв'язання задач векторне рівняння (1.6) записується в скалярній формі. Тоді воно буде еквівалентним системі трьох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2(\omega_y w - \omega_z v) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial u}{\partial z} + K_s \Delta u; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x w - \omega_z u) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial v}{\partial z} + K_s \Delta v; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - 2(\omega_x v - \omega_y u) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial w}{\partial z} + K_s \Delta w. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В стандартній системі координат маємо

$$\omega_x = 0; \quad \omega_y = \omega \cdot \cos \varphi; \quad \omega_z = \omega \sin \varphi, \quad (1.8)$$

де φ – широта. Введемо позначення $2\omega \sin \varphi = \ell$, $2\omega \cos \varphi = \ell_1$, де ℓ і ℓ_1 – параметри Коріоліса.

З урахуванням цих позначень система (1.7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v - \ell_1 w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial u}{\partial z} + K_s \Delta u; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial v}{\partial z} + K_s \Delta v; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial w}{\partial z} + K_s \Delta w. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ця система рівнянь руху не є замкненою, тому що вона містить три рівняння і п'ять невідомих функцій u, v, w, p, ρ (при умові, що K_s і K_z відомі). Доповнимо (1.9) рівняннями припливу тепла, нерозривності і стану. В результаті одержимо таку систему

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v - \ell_1 w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial u}{\partial z} + K_s \Delta u; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial v}{\partial z} + K_s \Delta v; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_z \rho \frac{\partial w}{\partial z} + K_s \Delta w; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0; \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (K_T)_z \rho \frac{\partial T}{\partial z} + (K_T)_s \Delta T; \\ P &= \rho RT.\end{aligned}\tag{1.10}$$

В системі (1.10) T – температура повітря, γ_a – сухоадіабатичний градієнт, c_p – питома теплоємність повітря при сталому тиску, ε – приплив тепла до одиниці маси повітря, який будемо вважати відомим; $(K_T)_z$, $(K_T)_s$ – коефіцієнти турбулентності для температури, які характеризують інтенсивність переносу внутрішньої енергії газу турбулентними вихорами в вертикальному і горизонтальному напрямках відповідно. Як і коефіцієнти K_s і K_z , коефіцієнти $(K_T)_z$, $(K_T)_s$ будемо вважати відомими.

Нагадаємо, що відповідно до теорії турбулентності коефіцієнти $(K_T)_z$ і $(K_T)_s$ виражаються через K_s і K_z як, де α_1 , α_2 – емпіричні константи.

Система (1.10) складається із шести рівнянь і містить шість невідомих функцій, тобто є замкненою, і при заданих початкових та межових умовах може бути розв'язана. Але вона є досить складною, тому що представляє собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку. Проте для великомасштабних рухів вільної атмосфери ця система суттєво спрощується. Як відомо, у вільній

атмосфері, тобто вище граничного шару атмосфери, сили турбулентної в'язкості малі і тому ними можна нехтувати. На основі аналізу характерних масштабів або порядків метеорологічних величин можна показати, що третє рівняння руху можна записати у формі рівняння статики. З урахуванням сказаного система рівнянь (1.10) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0; \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dP}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}; \\ P &= \rho RT.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Відзначимо, що при запису системи (1.11) ураховано, що для помірних широт u або $v \gg w$, тобто член $\ell_1 w$ малий в порівнянні з членом ℓv і ним можна нехтувати.

Якщо вважати, що приплив тепла відомий, то система (1.11) містить шість невідомих і складається із шести рівнянь, тобто є замкненою і може бути розв'язана. Для отримання єдиного розв'язку треба задати початкові та межові умови.

Початкові умови можна записати у вигляді

$$f(x, y, z, t) = f(x, y, z, t_0),\tag{1.12}$$

де f – метеорологічні величини, від яких є похідні за часом t в системі (1.11), тобто u, v, ρ і T ; t_0 – строк спостережень.

Межові умови за вертикальною координатою задамо відносно складової швидкості w . Нижня межа умова (НМУ) задається на поверхні землі при $z = 0$; верхня межа умова (ВМУ) – на досить великій висоті (при $z \rightarrow \infty$). Ці межові умови мають вигляд

$$\text{НМУ при } z=0 \quad w=0; \quad (1.13)$$

$$\text{ВМУ при } z \rightarrow \infty \quad \rho w=0 \text{ або } w=0. \quad (1.14)$$

Межова умова (1.14) забезпечує збереження маси повітря в атмосфері. В цьому легко переконатися, якщо рівняння нерозривності проінтегрувати по всій товщі атмосфери.

Межові умови за горизонтальними координатами x, y , так звані бічні межові умови (БМУ), треба ставити так, щоб вони були узгоджені з розв'язком задачі на бічних поверхнях області прогнозу. Але доводиться ставити межові умови в значній мірі довільно, оскільки ми не маємо необхідних відомостей про еволюцію метеорологічних величин на межах області прогнозу. Тут можна використовувати різні підходи. Найбільш простий з них полягає у тому що, на межі задаються складові швидкості вітру u і v , температура T і тиск P . Значення цих метеорологічних величин вважаються незмінними з часом. Проте такий метод постановки межових умов має суттєвий недолік, а саме: в тих точках межі, де вектор швидкості спрямований поза область прогнозу, завдання межової умови, яка не узгоджена з самим полем, приведе до виникнення гравітаційних та акустичних хвиль. Ці хвилі розповсюджуються в різні сторони від місця свого виникнення і можуть суттєво переколювати поля метеорологічних величин в області визначення розв'язку. Для того, щоб уникнути цього джерела похибок, використовуються різні методи. Наприклад, введення шару штучної в'язкості, який безпосередньо прилягає до межі. Хвильове збурення, потрапляючи в цей шар, згасає і, таким чином, не повертається в область прогнозу. Існують інші підходи до рішення цього питання, але вони будуть розглядатися при вивченні конкретних моделей.

1.2 Рівняння гідротермодинаміки в системі з узагальненою вертикальною координатою

Стандартна система координат, в якій представлена система (1.11) має деякі недоліки з точки зору розміщення розрахункової сітки:

1) область інтегрування є необмеженою стосовно до вертикальної осі z , оскільки верхньої межі для z не існує; інакше кажучи декартова система координат є напівнескінченною за вертикальною координатою, тобто при інтегруванні рівнянь ми повинні ставити межові умови на нескінченності;

2) реальна підстильна поверхня не збігається з рівневою поверхнею $z=0$, а це потребує нерівномірного розміщення вузлів сітки поблизу нижньої кінематичної межі.

Для того, щоб виключити такі недоліки, замість z вводиться більш зручна для чисельного розв'язання прогностичних задач вертикальна координата, яку позначимо буквою η . Ця координата повинна мати такі властивості:

η однозначно пов'язана з z , тобто η монотонно зростає або зменшується у залежності від змін координати z ;

η є однією із залежних змінних або функцій.

Отже, координата декартової системи (будемо називати її „старою”) – це x, y, z, t ; для координат η – системи (тобто „нової”) введемо позначення $x_\eta, y_\eta, \eta, t_\eta$.

Отримаємо формули, за допомогою яких можна буде переводити рівняння гідротермодинаміки із однієї системи координат в іншу.

Нехай f – будь-яка залежна змінна, тобто метеорологічна величина. Тоді функцію $f(x, y, z, t)$ в новій системі координат позначимо як $f_\eta = f_\eta[x_\eta, y_\eta, \eta(x, y, z, t), t_\eta]$. Оскільки в одній точці в заданий момент часу може бути тільки одне значення метеорологічної величини (незалежно від того, відносно якої системи координат отримана ця величина), виконується тотожність

$$f(x, y, z, t) = f_\eta(x_\eta, y_\eta, \eta, t_\eta)$$

або докладніше

$$f(x, y, z, t) = f_\eta[x_\eta(x), y_\eta(y), \eta(x, y, z, t), t_\eta(t)] \quad (1.15)$$

Формули переходу від декартової системи координат (ДСК) до η – системи (η СК) одержуються лише для похідних; для самих функцій вони не потрібні, тому що при розв'язанні задачі в (ДСК) метеорологічні величини беруться на рівневих поверхнях $z = \text{const}$, а в системі з вертикальною координатою η – на поверхнях $\eta = \text{const}$. Отже, продиференціюємо тотожність (1.15) по незалежних змінних x, y, t

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial f_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_{\eta}}{\partial y_{\eta}} \frac{dy_{\eta}}{dy} + \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_{\eta}}{\partial t_{\eta}} \frac{dt_{\eta}}{dt} + \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Аналогічно продиференціюємо (1.15) за змінною z

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (1.19)$$

Формули (1.16) – (1.19) використаємо для отримання виразу для індивідуальної похідної, яка в декартових координатах має вигляд

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.20)$$

Підставимо в (1.20) вирази (1.16) – (1.19) для відповідних похідних

$$\frac{df_{\eta}}{dt_{\eta}} = \frac{\partial f_{\eta}}{\partial t_{\eta}} \frac{dt_{\eta}}{dt} + \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial f_{\eta}}{\partial x_{\eta}} \frac{dx_{\eta}}{dx} + u \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial f_{\eta}}{\partial y_{\eta}} \frac{dy_{\eta}}{dy} + v \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial f_{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}.$$

Об'єднаємо в цьому рівнянні підкреслені члени і перепишемо його з урахуванням того, що $\frac{dt_{\eta}}{dt} = 1$, отримаємо

$$\frac{df_{\eta}}{dt_{\eta}} = \frac{\partial f_{\eta}}{\partial t_{\eta}} + u \frac{\partial f_{\eta}}{\partial x_{\eta}} \frac{dx_{\eta}}{dx} + v \frac{\partial f_{\eta}}{\partial y_{\eta}} \frac{dy_{\eta}}{dy} + \frac{\partial f_{\eta}}{\partial y_{\eta}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right). \quad (1.21)$$

Вираз в круглих дужках формули (1.21) являє собою повну похідну від вертикальної координати за часом, тобто є аналогом вертикальної швидкості в ηCK . Для цієї швидкості введемо позначення $\dot{\eta}$

$$\dot{\eta} \equiv \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + w \frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (1.22)$$

Отже, з урахуванням (1.22) вираз для повної похідної $\frac{df_{\eta}}{dt_{\eta}}$ набуває вигляду

$$\frac{df_\eta}{dt_\eta} = \frac{\partial f_\eta}{\partial t_\eta} + u \frac{\partial f_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + v \frac{\partial f_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \dot{\eta} \frac{\partial f_\eta}{\partial \eta} \quad (1.23)$$

Відзначимо, що при одержанні формул (1.16) – (1.19) для функцій f і f_η не використовувалися ніякі обмеження, тобто ці формули можна застосовувати до будь-якої функції. Візьмемо у якості f геопотенціал Φ поверхні $\eta = \text{const}$. Тоді в декартовій системі відліку $\Phi = gz$ не залежить від x, y, t (ці координати і z незалежні); в η –системі $f_\eta = \Phi_\eta = gH$, де H – висота поверхні $\eta = \text{const}$, яка є функцією просторових координат і часу, тобто $H = H(x_\eta, y_\eta, \eta, t_\eta)$.

Застосуємо формули (1.16) – (1.19) до функції Φ

$$\begin{aligned} g \frac{\partial z}{\partial x} &= g \left(\frac{\partial H}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right); \\ g \frac{\partial z}{\partial y} &= g \left(\frac{\partial H}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right); \\ g \frac{\partial z}{\partial z} &= g \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}; \\ g \frac{\partial z}{\partial t} &= g \left(\frac{\partial H}{\partial t_\eta} \frac{dt_\eta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Після скорочення g і урахування того, що $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$, а $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, із формул (1.24) знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} = - \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx}; \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} = - \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy}; \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial t_\eta} = - \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial t_\eta}.$$

Із третьої формули рівностей (1.24) отримаємо вираз для похідної від η за вертикальною координатою z

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1} = g \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1}. \quad (1.26)$$

Отже, ми отримали всі співвідношення, які необхідні для перетворення системи рівнянь динаміки атмосфери із декартової в η – систему координат. Застосуємо їх до рівнянь системи (1.11)

1.Рівняння стану завдяки виконанню тотожності (1.15) в новій системі не відрізняється від свого виразу в декартових координатах, тобто

$$p_\eta = \rho_\eta R T_\eta, \quad (1.27)$$

де $p_\eta, \rho_\eta, T_\eta$ – тиск, густина та абсолютна температура на поверхні $\eta = \text{const}$.

2.Рівняння статки $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ відповідно до (1.19), (1.26) має вигляд

$$\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} = -\rho_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta}. \quad (1.28)$$

Отримаємо це рівняння. Для цього застосуємо формулу переходу (1.19) до функції p (тиску)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \text{ або з урахуванням рівняння статки із системи (1.11)}$$

$$\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\rho_\eta g. \quad (1.29)$$

Підставимо в (1.29) вираз для $\frac{\partial \eta}{\partial z}$ із (1.26) і запишемо його відносно похідної $\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1} = -\rho_\eta g \quad \text{або} \quad \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} = -\rho_\eta g \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} = -\rho_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta},$$

де $\Phi_\eta = gH_\eta$ – геопотенціал поверхні $\eta = \text{const}$.

3. В рівняннях руху лівої частини записуються згідно з формулою (1.23), а для запису правих частин треба до похідних $\frac{\partial p}{\partial x}$ і $\frac{\partial p}{\partial y}$ застосувати формули переходу (1.16), (1.17) відповідно. Отримаємо спочатку вираз для $\frac{\partial p}{\partial x}$. Згідно з формулою (1.16)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.30)$$

Підставимо в (1.30) вираз для $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ із (1.25), отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} - \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx}. \quad (1.31)$$

Тепер застосуємо до функції p формулу переходу (1.19) і знайдемо вираз для $\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \text{звідки} \quad \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (1.32)$$

З урахуванням рівняння статки і формули (1.26) вираз (1.32) набуває вигляду

$$\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} = -\rho_\eta g \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad \text{або} \quad \frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} = -\rho_\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (1.33)$$

Підставимо тепер (1.33) в (1.31) і одержимо остаточний вираз для $\frac{\partial p}{\partial x}$ в ηCK

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} - \rho_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx}. \quad (1.34)$$

За аналогією

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} - \rho_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy}. \quad (1.35)$$

Використовуючи вирази для $\frac{\partial p}{\partial x}$ та $\frac{\partial p}{\partial y}$ і формулу для повної похідної (1.23), запишемо рівняння горизонтального руху в новій системі координат

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial t_\eta} + u_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + v_\eta \frac{\partial u_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \dot{\eta} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_\eta} \frac{\partial p_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} - \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial t_\eta} + u_\eta \frac{\partial v_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + v_\eta \frac{\partial v_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \dot{\eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho_\eta} \frac{\partial p_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} - \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} \quad (1.37)$$

4. Рівняння припливу тепла в η – системі представимо за допомогою (1.23) у вигляді

$$\frac{\partial T_\eta}{\partial t_\eta} + u_\eta \frac{\partial T_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + v_\eta \frac{\partial T_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \dot{\eta} \frac{\partial T_\eta}{\partial \eta} = \frac{R}{C_p} \frac{T_\eta}{p_\eta} \frac{dp_\eta}{dt} + \frac{\varepsilon_\eta}{C_p \rho_\eta} \quad (1.38)$$

5. Для виводу рівняння нерозривності для стисливого середовища запишемо його в декартовій системі координат

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.39)$$

і розглянемо детально перетворення додатка $\frac{\partial w}{\partial z}$. Оскільки $w = \frac{dz}{dt}$, то $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)$ або згідно з формулою (1.19) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z_\eta}{\partial t_\eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z}$, але відповідно до формули (1.26) $\frac{\partial \eta}{\partial z} = g \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1}$. З урахуванням цього виразу формула для $\frac{\partial w}{\partial z}$ набуває вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{dz_\eta}{dt_\eta} \right) g \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \text{ або } \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi_\eta}{dt_\eta} \right) \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1}. \quad (1.40)$$

Представимо в (1.40) $\frac{d\Phi_\eta}{dt_\eta}$ у вигляді суми частинних похідних і продиференціюємо отриманий вираз по η

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 \Phi_\eta}{\partial \eta \partial t_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + u_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} \right) + \right. \quad (1.41)$$

$$\left. \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + v_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right]$$

В (1.41) об'єднаємо підкреслені члени, сума яких дорівнює повній похідній від функції $\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta}$; в результаті отримаємо

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \left[\frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right]. \quad (1.42)$$

Тепер, скористаємось формулами переходу (1.16) (1.17) для похідних $\frac{\partial u}{\partial x}$ і

$\frac{\partial v}{\partial y}$ виразами для $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ і $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ із (1.25), підставимо отримані вирази та (1.42) у

вихідне рівняння (1.39) і після нескладних математичних перетворень отримаємо рівняння нерозривності в η СК

$$\frac{1}{\rho_\eta} \frac{d\rho_\eta}{dt_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial v_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (1.43)$$

Рівняння (1.43) значно спрощується, якщо скористатися рівнянням статки (1.28). Продиференціюємо це рівняння по t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{dp_\eta}{d\eta} \right) &= -\rho_\eta \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial \rho_\eta}{\partial t_\eta} \\ \text{або} \quad \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \frac{d\rho_\eta}{dt_\eta} + \rho_\eta \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right) &= -\frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Поділимо ліву частину (1.44) на $\rho_\eta \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)$, а праву на $-\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta}$ (відповідно до рівності (1.28)) і отримаємо

$$\frac{1}{\rho_\eta} \frac{d\rho_\eta}{dt_\eta} + \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} \right) = \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right) \quad (1.45)$$

З урахуванням (1.45) рівняння нерозривності в η СК (1.43) набуває спрощеного вигляду

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial v_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{d}{dt_\eta} \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1.46)$$

Отже, система рівнянь гідротермодинаміки в системі відліку з узагальненою вертикальною координатою η має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{du_\eta}{\partial t_\eta} &= -\frac{1}{\rho_\eta} \frac{\partial p_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} - \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{\partial x} + \ell v_\eta; \\ \frac{dv_\eta}{\partial t_\eta} &= -\frac{1}{\rho_\eta} \frac{\partial p_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} - \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{\partial y} - \ell v_\eta; \end{aligned}$$

$$\frac{dp_\eta}{\partial \eta} = -\rho_\eta \frac{d\Phi_\eta}{d\eta}; \quad (1.47)$$

$$\frac{dT_\eta}{\partial t_\eta} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T_\eta}{p_\eta} \frac{dp_\eta}{dt_\eta} = \frac{\varepsilon_\eta}{C_p \rho_\eta};$$

$$\left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_\eta}{\partial x_\eta} \frac{dx_\eta}{dx} + \frac{\partial v_\eta}{\partial y_\eta} \frac{dy_\eta}{dy} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} = 0.$$

1.2.1 Рівняння в ізобаричній системі координат

При побудові гідродинамічних моделей зручно використовувати ізобаричну систему координат (ІСК), тому що в цій системі рівняння гідротермодинаміки мають більш простий вигляд і вона легко перетворюється в систему з меншою кількістю невідомих.

В цій системі роль вертикальної координати відіграє тиск p або тиск, який відноситься до стандартного тиску $P_0 = 1000 \text{ гПа}$

$$\zeta = \frac{p}{P_0}. \quad (1.48)$$

Координатна вісь ζ перпендикулярна до ізобаричної поверхні і спрямована в сторону зростання тиску, тобто зверху униз. Осі x_ζ, y_ζ розташовані не в горизонтальній площині $z = \text{const}$, а на ізобаричній поверхні $p = \text{const}$ або $\zeta = \text{const}$. Точніше, осі x_ζ, y_ζ спрямовані по дотичній до ізобаричної поверхні відповідно з заходу на схід і з півдня на північ. Таким чином, x_p, y_p – це ейлерові координати, які характеризують положення точки на даній ізобаричній поверхні, а вертикальна координата ζ – лагранжева координата, тому ізобаричну систему координат (ζ СК) можна назвати квазілагранжевою.

Відзначимо також, що ІСК не є ортогональною, але дуже близька до ортогональної, оскільки кут між напрямком вертикального градієнта тиску

і місцевою вертикаллю складає звичайно декілька десятитисячних часток радіана ($5 \cdot 10^{-5} \div 5 \cdot 10^{-4}$) рад.

Отримаємо рівняння динаміки атмосфери в ІСК. Будемо вважати, що узагальнена вертикальна координата $\eta = \zeta$, і використаємо рівняння в η СК, які отримані в розділі 1.2.1. При цьому, урахуємо, що завдяки малому нахилу ізобаричній поверхні відносно горизонтальної площини з великою точністю виконуються рівності $x = x_\zeta$, $y = y_\zeta$ і, отже,

$$\begin{aligned}\frac{dx_\eta}{dx} &= \frac{dx_\zeta}{dx} = 1 \\ \frac{dy_\eta}{dy} &= \frac{dy_\zeta}{dy} = 1\end{aligned}\tag{1.49}$$

Якщо тепер в рівняннях (1.27), (1.29), (1.36) – (1.38), (1.43) змінити індекс η на ζ , то з урахуванням рівностей (1.49) отримаємо систему рівнянь в ζ СК.

1. Рівняння стану (1.27) набуває вигляду

$$P_0\zeta = \rho_\zeta RT_\zeta\tag{1.50}$$

і зв'язує лише дві функції ρ і T , які відносяться до поверхні $\zeta = const$. У подальшому індекс ζ для метеорологічних величин будемо опускати, тобто рівняння (1.50) будемо записувати в такому вигляді

$$P_0\zeta = \rho RT.\tag{1.51}$$

2. Рівняння статки (1.29) після заміни ρ із (1.51) запишеться так

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.\tag{1.52}$$

3. В рівняннях (1.36), (1.37) при $P = const$ похідні $\frac{\partial p}{\partial x}$ і $\frac{\partial p}{\partial y}$ дорівнюють нулю і тоді ці рівняння перетворюються на такі

$$\frac{\partial u}{\partial t_\zeta} + u \frac{\partial u}{\partial x_\zeta} + v \frac{\partial u}{\partial y_\zeta} + \dot{\omega} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\zeta} + \ell v; \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_\zeta} + u \frac{\partial v}{\partial x_\zeta} + v \frac{\partial v}{\partial y_\zeta} + \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_\zeta} - \ell v;$$

де $\dot{\omega} = \frac{d\zeta}{dt}$ або $\dot{\omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{P_0} \right) = \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dt} = \frac{\tau}{P_0}$, де $\tau = \frac{dp}{dt}$ – ізобарична вертикальна швидкість або аналог вертикальної швидкості в ІСК. Запишемо вираз для $\dot{\omega}$ через геопотенціал

$$\dot{\omega} = \frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^{-1} \left(gw - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x_\zeta} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y_\zeta} \right). \quad (1.54)$$

Розмірність цієї величини обернена розмірності часу, тобто s^{-1} . Оскільки τ є дуже малою величиною, то її відносять до порівняно великих інтервалів часу (6, 12, 24 год). Досить часто при обчисленні вертикальних швидкостей треба переходити від ζ до тиску p і тоді ωP_0 виражають в гПа/12год. Можна показати, що в формулі (1.54) член gw значно більший решти членів, тому приблизно

$$\dot{\omega} = \frac{gw}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}}. \quad (1.55)$$

Оскільки $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} < 0$, то із (1.55) випливає, що знаки $\dot{\omega}$ і w протилежні: при нисхідних вертикальних рухах $w < 0, \dot{\omega} > 0$, а при висхідних – навпаки.

4. З урахуванням того, що $\frac{\partial p}{\partial \eta} = P_0 \frac{\partial p}{\partial \zeta} = const$, рівняння нерозривності (1.43) набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x_\zeta} + \frac{\partial v}{\partial y_\zeta} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.56)$$

Дійсно, при заміні η на ζ похідна $\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}$ не перетворюється на похідну $\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta}$ або $\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}$, де $\dot{\omega} = \frac{d\zeta}{dt} = \dot{\zeta}$. Останній доданок в рівнянні (1.46) дорівнює нулю, оскільки похідна $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p_\eta}{\partial \eta} \right) = 0$. Покажемо це. Замінімо η на ζ , при цьому опустимо індекси η і ζ біля функції p . Отримаємо таке

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial \zeta} \text{ або, оскільки } \zeta = \frac{p}{P_0}, \text{ похідна}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial \frac{p}{P_0}} = P_0 \frac{\partial p}{\partial p} = P_0 = \text{const.}$$

$$\text{Отже похідна } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) = \frac{d}{dt} (P_0) = 0.$$

5. В рівнянні припливу тепла в системі (1.47), використовуючи вираз (1.23) розкриємо спочатку індивідуальну похідну від температури

$$\frac{\partial T}{\partial t_\zeta} + u \frac{\partial T}{\partial x_\zeta} + v \frac{\partial T}{\partial y_\zeta} + \dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{(\varkappa - 1) T}{\varkappa} \frac{dp}{p dt} = \frac{\varepsilon}{C_p \rho} \quad (1.57)$$

Перепишемо підкресленні члени рівняння (1.57) і при цьому урахуємо, що останній член лівої частини можна представити у вигляді

$$-\frac{(\varkappa - 1) T}{\varkappa} \frac{dp}{p dt} = -\frac{(\varkappa - 1) T}{\varkappa} \frac{P_0}{p P_0} \frac{dp}{dt} = -\frac{(\varkappa - 1) T}{\varkappa} \frac{d\zeta}{\zeta dt} = -\frac{(\varkappa - 1) T}{\varkappa} \frac{\dot{\omega}}{\zeta}; \quad (1.58)$$

В доданок $\dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta}$ введемо вертикальний градієнт температури $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$.

Для цього використаємо формулу переходу для похідної по z $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}$, відкіля $\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^{-1}$, або з урахуванням виразу (1.26) та

виразу для вертикального градієнта температури $\frac{\partial T}{\partial z} = -\gamma$ маємо

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $\dot{\omega}$ і замінімо координату η на ζ , отримаємо

$$\dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = -\frac{\gamma}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \dot{\omega} = \frac{\gamma}{g} \frac{RT}{\zeta} \dot{\omega}. \quad (1.59)$$

Об'єднаємо тепер підкреслені члени в рівнянні (1.57) і запишемо їх з використанням результатів перетворень (1.58) і (1.59), тобто

$$\dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{(\kappa - 1)T}{\kappa} \frac{dp}{p} \frac{dt}{dt} = \frac{\gamma}{g} \frac{RT}{\zeta} \dot{\omega} - \frac{(\kappa - 1)T}{\kappa} \frac{\dot{\omega}}{\zeta}$$

або, якщо урахувати, що сухоадіабатичний градієнт

$$\gamma_a = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{g}{R};$$

останній вираз можна представити в такому вигляді

$$\dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{(\kappa - 1)T}{\kappa} \frac{dp}{p} \frac{dt}{dt} = -\frac{RT}{g\zeta} \dot{\omega} (\gamma_a - \gamma). \quad (1.60)$$

Підставимо (1.60) в рівняння (1.57) і отримаємо рівняння припливу тепла в ζ СК.

$$\frac{\partial T}{\partial t_\zeta} + u \frac{\partial T}{\partial x_\zeta} + v \frac{\partial T}{\partial y_\zeta} - \frac{RT}{g\zeta} \dot{\omega} (\gamma_a - \gamma) = \frac{\varepsilon}{C_p \rho} \quad (1.61)$$

У випадку коли в якості незалежної змінної використовується потенціальна температура θ , рівняння припливу тепла запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \theta}{\partial t_\zeta} + u \frac{\partial \theta}{\partial x_\zeta} + v \frac{\partial \theta}{\partial y_\zeta} + \dot{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\theta}{T} \frac{\varepsilon}{C_p \cdot \rho} \quad (1.62)$$

Перепишемо рівняння, які отримані в ζ СК, у вигляді системи. При цьому індекс ζ будемо опускати.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u; \\ T &= -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} \dot{\omega} (\gamma_a - \gamma) &= \frac{\varepsilon}{Cp\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Початкові умови для цієї системи рівнянь записуються так

$$f(x, y, \zeta, t) = f(x, y, \zeta, t_0), \quad (1.64)$$

де $f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ T \text{ або } H \end{Bmatrix}$, t_0 - строк спостережень.

Межові умови за вертикальною координатою набувають вигляду

$$\text{НМУ при } \zeta = 1 \quad \dot{\omega} = \frac{g}{RT_0} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (1.65)$$

$$\text{ВМУ при } \zeta \rightarrow 0 \quad \dot{\omega} \rightarrow 0. \quad (1.66)$$

На закінчення відзначимо основні переваги ізобаричної системи координат перед декартовою:

- система рівнянь ГТД в ізобаричних координатах складається із п'яти рівнянь і є замкненою; в декартових координатах замкнена система складається із шести рівнянь;
- в рівняннях горизонтального руху члени, які описують силу баричного градієнта, при переході до ізобаричної системи стають лінійними;

- рівняння статички однозначно зв'язує абсолютну температуру T і висоту поверхні H , тому за допомогою цього рівняння можна зменшувати кількість невідомих, виключаючи з них T або H ;
- найбільш спрощений вигляд при переході до ізобаричної системи набуває рівняння нерозривності, яке в декартових координатах складається із семи членів, із яких шість нелінійні, а в ізобаричній системі це рівняння містить всього три члени і всі вони лінійні (четверте рівняння в системі (1.63)).

Отже, система рівнянь в ізобаричних координатах (1.63) має значно простіший вигляд, ніж в декартовій (система (1.11)).

Недоліком ізобаричної системи є некоректність нижньої межевої умови. Оскільки за нижню межу атмосфери в цій системі береться ізобарична поверхня $P=1000$ гПа, або $\zeta=1$, то вважається, що вона збігається з поверхнею землі, де тиск може значно відрізнитися від значення 1000 гПа. Якщо взяти відхилення від 1000 гПа ± 50 гПа (від'ємний знак для циклонів, а додатний – для антициклонів), то похибка у визначенні нижньої межі може досягати 5%

$$\left(\frac{100\% \cdot (\pm 50 \text{ гПа})}{1000 \text{ гПа}} = \pm 5\% \right)$$

Верхня межева умова, якщо вона задається на рівнях, де тиск близький до нуля, є досить точною і тому інтегрування прогностичних рівнянь виконують, як правило, зверху вниз, тобто від $P=0$ до $P=1000$ гПа або від $\zeta=0$ до $\zeta=1$.

1.2.2 Рівняння в σ (сигма) – системі координат

Декартова система координат x, y, z, t та ізобарична x_p, y_p, z_p, t_p або $x_\zeta, y_\zeta, z_\zeta, t_\zeta$ мають той принциповий недолік, що поверхня землі не збігається ні з рівнем $z = \text{const}$, ні з ізобаричною поверхнею $\zeta = \text{const}$. Ця обставина може викликати труднощі при опису атмосферних рухів безпосередньо біля підстильної поверхні. У зв'язку з цим при побудові гідродинамічних моделей використовується так звана сигма (σ) – система координат (σ СК), яка вперше була уведена Філіпсом (США) в 1957р. Роль вертикальної координати тут відіграє відношення тиску p в точці,

що розглядається, до тиску p_s на рівні підстильної поверхні (землі чи океану), який є функцією горизонтальних координат і часу

$$p_s = p_s(x, y, t). \quad (1.67)$$

Таким чином, σ – це безрозмірна вертикальна координата

$$\sigma = \frac{p}{p_s} \quad (1.68)$$

Осі x_σ, y_σ лежать на поверхні $\sigma = \text{const}$, яка має малий нахил до горизонтальної площини (як і ізобарична поверхня), тому виконуються приблизні рівності

$$x_\sigma \approx x_p \approx x; y_\sigma \approx y_p \approx y. \quad (1.69)$$

Цілком точно виконується рівність

$$t_\sigma = t_p = t. \quad (1.70)$$

Продемонструємо графічно, що σ – система координат враховує макромасштабні нерівності підстильної поверхні. На рисунку 1.1 зображений вертикальний розріз гори.

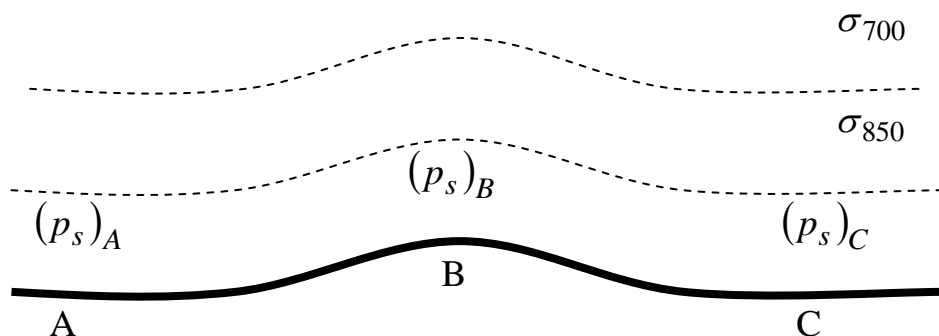


Рис. 1.1 - Форми земної поверхні (—————) та поверхня $\sigma = \text{const}$ для ізобаричних поверхонь $P=850$ і $P=700$ гПа (- - - - -)

В точці В, яка знаходиться на вершині гори, тиск p_s нижчий, ніж в точках А і С, що розташовані біля її підніжжя (відомо що, тиск з висотою завжди знижується), і тому виконується нерівність $(p_s)_A > (p_s)_B < (p_s)_C$.

Для вертикальної координати σ , яка дорівнює відношенню $\frac{p}{p_s}$, це співвідношення буде протилежним, тобто $\sigma_A < \sigma_B > \sigma_C$, тому що залежність σ від приземного тиску p_s обернено пропорційна. Наприклад, для ізобаричної поверхні $p=850$ гПа координата σ в точках А, В і С розраховується за формулами

$$\sigma_A = \frac{850}{(p_s)_A}; \quad \sigma_B = \frac{850}{(p_s)_B}; \quad \sigma_C = \frac{850}{(p_s)_C}.$$

Аналогічні формули можна записати для будь-якої ізобаричної поверхні ($p=700, p=500$ і тд.).

Рисунок 1.1 показує що, поверхні $\sigma=\text{const}$ повторюють форму рельєфу місцевості.

Наведемо приклад: нехай в точках А і С тиск на поверхні землі (а не на рівні моря) складає 1000 гПа, в точці В – 950 гПа. У відповідності до вказаних формул σ для ізобаричної поверхні 850 буде дорівнювати:

$\sigma_A = 0.85$; $\sigma_B = 0.95$; $\sigma_C = 0.85$; для поверхні $p=700$ гПа відповідно 0.70; 0.74; 0.70.

Для переходу від ізобаричної системи координат до σ –системи отримаємо формули переходу. Для цього використаємо рівність яка аналогічна рівності (1.15) в розділі 1.2.1

$$f_p(x_p, y_p, p, t_p) = f_\sigma[x_\sigma(x_p), y_\sigma(y_p), \sigma(x_p, y_p, p, t_p), t_\sigma(t_p)] \quad (1.71)$$

f_p – будь яка метеорологічна величина, що визначається в ізобаричній системі координат, а f_σ – в сігма системі. Рівність (1.71) показує, що незалежно від системи координат, відносно якої розглядається точка розрахунку, в цій точці в даний момент часу можна отримати тільки одне значення метеорологічної величини f , тобто $f_p = f_\sigma$.

Продиференціюємо рівність (1.71) за правилами диференціювання складних функцій (при цьому аргументи, від яких залежать функції f_p і f_σ , будемо опускати для скорочення запису); в результаті отримаємо формули

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_p}{\partial x_p} &= \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{dx_p} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_p}; \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_p} &= \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_\sigma} \frac{dy_\sigma}{dy_p} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y_p};\end{aligned}\tag{1.72}$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial p} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p};$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial t_p} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t_\sigma} \frac{dt_\sigma}{dt_p} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t_p}.$$

Ми бачимо, що формули (1.72) мають такий само вигляд, як і формули (1.16-1.19). Ураховуючи вирази (1.69) та (1.70), одержимо такі рівності

$$\frac{dx_\sigma}{dx_p} = \frac{dy_\sigma}{dy_p} = \frac{dt_\sigma}{dt_p} = 1$$

З урахуванням цих рівностей формули переходу (1.72) запишуться таким чином

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_p}{\partial x_p} &= \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_p}; \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_p} &= \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y_p}; \\ \frac{\partial f_p}{\partial p} &= \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}; \\ \frac{\partial f_p}{\partial t_p} &= \frac{\partial f_\sigma}{\partial t_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t_p}.\end{aligned}\tag{1.73}$$

Подібно тому, як ми використали формули (1.16-1.19) для отримання повної (індивідуальної) похідної $\frac{df}{dt}$ в системі з узагальненою вертикальною координатою, отримаємо тепер вираз для цієї похідної в σ -системі за допомогою формул переходу (1.73).

Отже, запишемо вираз для $\frac{df}{dt}$ в ізобаричних координатах

$$\frac{df_p}{dt_p} = \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + u \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + v \frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial f_p}{\partial p} \quad (1.74)$$

Підставимо в (1.74) вирази (1.73)

$$\frac{df_\sigma}{dt_\sigma} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t_p} + u \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_p} \right) + v \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y_p} \right) + \tau \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}$$

або, якщо в цьому виразі згрупувати члени, які містять в собі похідну $\frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma}$, і винести її за дужки, отримаємо

$$\frac{df_\sigma}{dt_\sigma} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t_p} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x_p} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial \sigma}{\partial p} \right). \quad (1.75)$$

В дужках в правій частині (1.75) ми отримали повну похідну за часом від величини σ , тобто

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t_p} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x_p} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (1.76)$$

Відомо, що повна похідна за часом від вертикальної координати є вертикальною швидкістю. Нагадаємо, що лінійна швидкість в декартових координатах $w = \frac{dz}{dt}$, вертикальна швидкість в ізобаричних координатах

$$\tau = \frac{dp}{dt} \text{ або } \dot{\omega} = \frac{d\zeta}{dt}, \text{ тоді за аналогією } \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}. \quad (1.77)$$

В формулі (1.77) вертикальна швидкість в σ -системі позначена як $\dot{\sigma}$. Таким чином, з урахуванням формули (1.76) і позначення (1.77) вираз для повної похідної (1.75) набуває вигляду

$$\frac{df_\sigma}{dt_\sigma} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial f_\sigma}{\partial y_\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} \quad (1.78)$$

Отже, за допомогою виразу (1.78) можна представити в σ -системі ліві частини всіх прогностичних рівнянь, що входять до складу системи (1.47). Наприклад, в першому рівнянні руху (1.36) ліва частина матиме вигляд

$$\frac{du_\sigma}{dt_\sigma} = \frac{\partial u}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial u}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial u}{\partial y_\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma},$$

де u – зональна швидкість вітру на поверхні $\sigma = \text{const}$.

Для того, щоб записати праві частини рівнянь руху в σ –системі, використаємо також формули переходу (1.73), але в якості функції f_p візьмемо геопотенціал $\Phi_p = gH_p$ ізобаричної поверхні $p = \text{const}$, де H_p – висота цієї поверхні, а в якості функції f_σ – геопотенціал поверхні $\sigma = \text{const}$, тобто $\Phi_\sigma = gH_\sigma$. Тоді перші дві формули із (1.73) запишуться так

$$g \frac{\partial H_p}{\partial x_p} = g \frac{\partial H_\sigma}{\partial x_\sigma} + g \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_p}; \quad (1.79)$$

$$g \frac{\partial H_p}{\partial y_p} = g \frac{\partial H_\sigma}{\partial y_\sigma} + g \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y_p}. \quad (1.80)$$

Пам'ятаючи, що $\sigma = \frac{p}{p_s}$, отримаємо похідні $\frac{\partial \sigma}{\partial x_p}$ і $\frac{\partial \sigma}{\partial y_p}$.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{p}{p_s} \right) = \frac{1}{p_s} \frac{\partial p}{\partial x_p} - \frac{p}{p_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial x_p}, \quad (1.81)$$

аналогічно

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y_p} = \frac{\partial}{\partial y_p} \left(\frac{p}{p_s} \right) = \frac{1}{p_s} \frac{\partial p}{\partial y_p} - \frac{p}{p_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial y_p}. \quad (1.82)$$

В отриманих виразах $\frac{\partial p}{\partial x_p} = \frac{\partial p}{\partial y_p} = 0$, тому, що p, x_p, y_p – незалежні

координати ізобаричної системи; з урахуванням сказаного а також позначення (1.68) формули (1.81), (1.82), набувають вигляду

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_p} = -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y_p} = -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma}. \quad (1.83)$$

Підставимо (1.83) відповідно в рівняння (1.79), (1.80) і отримаємо вирази для баричного градієнта в σ –системі координат, а саме

$$g \frac{\partial H_p}{\partial x_p} = g \frac{\partial H_\sigma}{\partial x_\sigma} - g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma}; \quad (1.84)$$

$$g \frac{\partial H_p}{\partial y_p} = g \frac{\partial H_\sigma}{\partial y_\sigma} - g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma}. \quad (1.85)$$

Запишемо в остаточному вигляді рівняння горизонтального руху в σ –системі координат, підставляючи вирази для повної похідної (1.78) і для складових баричного градієнта (1.84) і (1.85) в перші два рівняння системи (1.47),

$$\frac{\partial u}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial u}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial u}{\partial y_\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -g \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} + lv; \quad (1.86)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial v}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -g \frac{\partial H}{\partial y_\sigma} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma} - lu. \quad (1.87)$$

Індекси σ біля H в цих рівняннях ми опустили, тому що залишилася лише величина H_σ , яка є висотою поверхні $\sigma = const$. Для запису рівняння статички в σ –системі запишемо третю формулу із (1.73) для функцій H_p і

$$H_\sigma, \text{ тобто } \frac{\partial H_p}{\partial p} = \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \text{ або з урахуванням того, що } \sigma = \frac{p}{p_s},$$

отримаємо

$$\frac{\partial H_p}{\partial p} = \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{p_s} \right) = \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{p_s} \frac{\partial p}{\partial p} \right) = \frac{1}{p_s} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma}, \quad (1.88)$$

але $\frac{\partial H_p}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}$; з урахуванням рівняння стану останній вираз

$$\text{набуває вигляду } \frac{\partial H_p}{\partial p} = -\frac{RT}{pg}.$$

Підставимо цей вираз в (1.88) і запишемо його відносно температури T

$$-\frac{RT}{pg} = \frac{1}{p_s} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \text{ або } T = \frac{pg}{p_s R} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma} \text{ і остаточно з урахуванням того, що } \frac{p}{p_s} = \sigma, \text{ маємо}$$

$$T = \frac{\sigma g}{R} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \sigma}. \quad (1.89)$$

Це і є рівняння статки в σ -системі координат. Воно зв'язує абсолютну температуру повітря з висотою поверхонь $\sigma = \text{const}$.

Отримаємо тепер рівняння нерозривності в системі, що розглядається. Для цього запишемо це рівняння в ізобаричній системі координат

$$\frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} + \frac{\partial \tau}{\partial P} = 0. \quad (1.90)$$

Скористуємося формулами переходу (1.73) і за їх допомогою запишемо похідні, які входять до складу рівняння (1.90), тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_p} &= \frac{\partial u}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_p}; \\ \frac{\partial v}{\partial y_p} &= \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y_p}; \\ \frac{\partial \tau}{\partial p} &= \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Врахуємо, що в виразах (1.91) похідна від σ по x_p дорівнює

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{p}{p_s} \right) = \frac{1}{p_s} \frac{\partial p}{\partial x_p} - \frac{p}{p_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial x_p}.$$

Оскільки p та x_p - незалежні координати, похідна $\frac{\partial p}{\partial x_p} = 0$, тому останній вираз запишеться так

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_p} = -\frac{p}{p_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} = -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_p}. \quad (1.92)$$

Аналогічно

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y_p} = -\frac{p}{p_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial y_p} = -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y_p}. \quad (1.93)$$

Отже, з урахуванням (1.91) - (1.93) рівняння нерозривності (1.90) набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_p} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} = 0 \quad (1.94)$$

Це рівняння не можна вважати рівнянням нерозривності в σ -системі координат, тому що в ньому присутня ізобарична вертикальна швидкість τ . Тому запишемо вираз для τ , візьмемо похідну $\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}$ і перетворимо її таким чином, щоб вона містила залежні і незалежні величини тільки в новій системі координат.

Ми знаємо, що $\tau = \frac{\partial p}{\partial t}$. Введемо в цю рівність вертикальну координату σ .

$$\sigma = \frac{p}{p_s}, \text{ відкіля } p = \sigma p_s. \quad (1.95)$$

З урахуванням останньої рівності

$$\tau = \frac{d}{dt}(\sigma p_s) = \sigma \frac{dp_s}{dt} + p_s \frac{d\sigma}{dt} = \sigma \left(\frac{dp_s}{dt} + u \frac{dp_s}{dx_p} + v \frac{dp_s}{dy_p} \right) + p_s \cdot \dot{\sigma}, \quad (1.96)$$

де $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ – вертикальна швидкість в σ -системі координат.

Продиференціюємо (1.96) по σ , отримаємо

$$\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[p_s \dot{\sigma} + \sigma \left(\frac{\partial p_s}{\partial t_p} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_p} \right) \right] = \dot{\sigma} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t_p} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_p} \right) +$$

$$\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t_p} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_p} \right).$$

Візьмемо похідну по σ в останньому члені цього рівняння і в других похідних змінимо порядок диференціювання. В результаті отримаємо

$$\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{dp_s}{dt} + \sigma \left(\frac{\partial}{\partial t_p} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + u \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_p} + v \frac{\partial}{\partial y_p} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} \right), \quad (1.97)$$

$$\text{де } \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial p_s}{\partial t_p} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_p}.$$

Оскільки тиск біля поверхні землі не залежить від вертикальної координати $\left(\frac{\partial p_s}{\partial \sigma} = 0 \right)$, підкреслені члени в рівнянні (1.97) є нульовими і тому вираз для $\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}$ набуває вигляду

$$\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{dp_s}{dt_p} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_p}. \quad (1.98)$$

Підставимо тепер (1.98) в рівняння (1.94), врахуємо при цьому, що $\frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{p_s}$, і отримаємо такий вираз

$$\frac{\partial u}{\partial x_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_p} + \frac{p_s}{p_s} \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dt_p} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y_p} = 0$$

Після скорочення підкреслених членів маємо рівняння нерозривності в σ -системі координат

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dt} = 0 \quad (1.99)$$

або

$$p_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \right) + \frac{dp_s}{dt} = 0 \quad (1.100)$$

В цих рівняннях індекс σ біля координат опущено, тому що всі похідні представлені в σ -системі координат і в такому позначенні немає необхідності.

Рівняння (1.100) можна представити в дивергентній формі. Для цього розкриємо дужки в першому члені цього рівняння і запишемо другий член через частинні похідні

$$p_s \frac{\partial u}{\partial x} + p_s \frac{\partial v}{\partial y} + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial p_s}{\partial t} + u \frac{\partial p_s}{\partial x} + v \frac{\partial p_s}{\partial y} = 0. \quad (1.101)$$

З урахуванням того, що

$$p_s \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p_s}{\partial x} = \frac{\partial (up_s)}{\partial x}; \quad p_s \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial p_s}{\partial y} = \frac{\partial (vp_s)}{\partial y}; \quad p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial (p_s \dot{\sigma})}{\partial \sigma},$$

рівняння (1.101) набуває вигляду

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial (up_s)}{\partial x} + \frac{\partial (vp_s)}{\partial y} + \frac{\partial (p_s \dot{\sigma})}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.102)$$

Отже, ми отримали в σ -системі координат рівняння горизонтального руху (1.86), (1.87), рівняння статки (1.89) і рівняння нерозривності (1.100) або (1.102). Отримаємо тепер рівняння припливу тепла.

В чисельних моделях рівняння припливу тепла найчастіше використовується в термінах потенціальної температури. В адіабатичному наближенні це рівняння має вигляд

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Згідно з формулою (1.78) це рівняння в σ -системі координат запишеться таким чином

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \quad (1.103)$$

$$\text{де } \theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \equiv T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}. \quad (1.104)$$

Запишемо тепер систему рівнянь гідротермодинаміки в σ -системі координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y} - lu, \\ T &= -\frac{g}{R} \sigma \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial p_s}{\partial t} + u \frac{\partial p_s}{\partial x} + v \frac{\partial p_s}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} &= -p_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= 0 \\ \theta &= T \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad \sigma_0 = \frac{p_0}{p_s} = \frac{1000}{p_s} \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

Відмітимо, що в системі (1.105), індекс σ при незалежних змінних x, y, t опущено, як і в системі (1.63), опущено індекс ζ .

Початкові умови для цієї системи рівнянь мають вигляд

$$f(x, y, \sigma, t) = f(x, y, \sigma, t_0), \quad (1.106)$$

$$\text{де, } f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p_s \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad t_0 - \text{строк спостережень.}$$

Враховуючи те, що $\sigma = \frac{p}{p_s}$, можна легко отримати вирази для межових умов за вертикальною координатою:

на нижній межі при $z=0$ $p = p_s$ або при $\sigma = \frac{p_s}{p_s} = 1$ $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}(1) = 0$;

на верхній межі при $z \rightarrow \infty$ $p = 0$ і тоді при $\sigma = \frac{0}{p_s} = 0$ $\frac{d\sigma}{dt}$ також дорівнює нулю, тобто $\dot{\sigma} = 0$.

Отже, нижня та верхня межові умови запишуться в такому вигляді

$$\text{НМУ} \quad \text{при } \sigma = 1 \quad \dot{\sigma} = 0, \quad (1.107)$$

$$\text{ВМУ} \quad \text{при } \sigma = 0 \quad \dot{\sigma} = 0. \quad (1.108)$$

Таким чином, в σ - системі координат маємо нульові умови на нижній і верхній межах шару атмосфери, для якого будується гідродинамічна модель. Такі прості, але цілковито коректні умови, істотно спрощують розв'язання прогностичної задачі.

1.2.3 Рівняння в ізентропічній системі координат

В ізентропічній системі координат роль вертикальної координати відіграє потенціальна температура θ (тета), тому цю систему називають також тета-системою координат (θ СК). Відомо, що потенціальна – це температура повітря, яка приведена до стандартного тиску $P_0 = 1000$ гПа відповідно до сухоадіабатичного закону. Інакше кажучи, θ – це температура, яку набуває ненасичена повітряна частинка, якщо вона опускається (підіймається) до ізобаричної поверхні $P_0 = 1000$ гПа без теплообміну з навколишнім середовищем.

Ізентропічна система координат також відноситься до квазілагранжових систем: θ – лагранжова координата, а x_θ, y_θ – аналоги горизонтальних координат, які лежать в площині, що є дотичною до ізентропічної поверхні $\theta = \text{const}$. Оскільки нахил цих поверхонь малий, вважається, що $x_\theta \approx x, y_\theta \approx y$, а $\theta = \theta(x, y, z, t)$. Вказана система пов'язана з ізентропічним аналізом, тобто з аналізом карт топографії ізентропічних поверхонь $\theta = \text{const}$, і в цьому сенсі вона аналогічна ізобаричній системі координат, яка пов'язана з аналізом карт баричної топографії. Отримаємо основні рівняння динаміки атмосфери в ізентропічній системі координат.

Запишемо рівняння для потенціальної температури і знайдемо із нього температуру T , тобто

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}, \text{ відкіля } T = \theta \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (1.109)$$

де $P_0 = 1000$ гПа.

Прологарифмуємо (1.109)

$$\ln T = \ln \theta + \frac{\kappa-1}{\kappa} (\ln p - \ln 1000),$$

а тепер продиференціюємо за часом, отримаємо

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \quad (1.110)$$

Запишемо вираз (1.110) відносно першого доданка правої частини, тобто

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

або, якщо помножити обидві частини останнього рівняння на T , отримаємо

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt}. \quad (1.111)$$

Нагадаємо, що $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, тому $\frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{\frac{c_p}{c_v} - 1}{\frac{c_p}{c_v}} = \frac{c_p - c_v}{c_v}$ або після скорочення

маємо $\frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{R}{c_p}$. З урахуванням рівняння стану, відповідно до

якого $p = \rho RT$ і формули для сухоадіабатичного градієнта $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$

рівняння (1.111) набуває такого вигляду

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt}. \quad (1.112)$$

Згідно з п'ятим рівнянням системи (1.11) права частина рівняння (1.112) дорівнює виразу $\frac{\varepsilon}{c_p \rho}$, який описує зовнішні припливи (оттоки) тепла. З урахуванням цього рівняння (1.112) можна переписати у вигляді

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{\varepsilon}{c_p \rho} \quad (1.113)$$

Ми отримали рівняння припливу тепла в термінах потенціальної температури, яке показує, що зміни потенціальної температури в рухомій повітряній масі обумовлені лише зовнішнім припливом (оттком) тепла.

В рівнянні (1.113) $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$, де $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ – аналог вертикальної швидкості в ізентропічній системі координат.

Із рівняння (1.113) випливає, що у випадку відсутності припливу тепла $\frac{d\theta}{dt} = 0$, тобто потенціальна температура є консервативною характеристикою рухомих повітряних частинок.

Введемо функцію Екснера

$$\pi = c_p \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (1.114)$$

і використаємо її для перетворення рівняння припливу тепла (1.71). Урахуємо при цьому, що

$$\theta = \frac{c_p}{\pi} T, \quad (1.115)$$

і перепишемо рівняння (1.71) такому вигляді

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{\pi \rho}. \quad (1.116)$$

Введемо, крім того, функцію Монтгомері

$$M = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT + gz, \quad (1.117)$$

де z – висота ізентропічної поверхні $\theta = \text{const}$. Функцію M можна записати також в такому вигляді

$$M = \pi\theta + gz, \quad (1.118)$$

тому, що $\pi \cdot \theta = c_p \cdot \frac{p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{P_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \cdot T \frac{P_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$; після скорочення отримаємо $\pi\theta = c_p T$

або $\pi\theta = \frac{c_p}{R} RT$. Якщо помножити і розділити праву частину останньої рівності на c_v і урахувати, що $R = c_p - c_v$, можна отримати таке

$$\theta = \frac{\frac{c_p}{c_v}}{\frac{c_p - c_v}{c_v}} RT = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT.$$

На основі співвідношення (1.28) при $\eta = \theta$ рівняння статки в θ СК набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (1.119)$$

Отримаємо ще одну форму рівняння статки. Для цього знову прологарифмуємо вираз (1.109) і локально продиференціюємо результат по змінній θ , отримаємо

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (1.120)$$

З використанням рівняння (1.19) перепишемо (1.120)

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Підставимо в цю формулу вираз для θ у вигляді

$$\theta = T \left(\frac{P_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (1.121)$$

і отримаємо

$$\frac{R\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \frac{R\kappa}{\kappa-1} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (1.122)$$

Оскільки κ можна представити як

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{c_p}{R},$$

то, (1.122) перетворюється до такого вигляду

$$c_p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial \theta} (c_p T + \Phi) = \frac{\partial}{\partial \theta} (c_p T + gz).$$

Таким чином, отримується більш зручна форма рівняння статки в θ – системі координат

$$\pi = \frac{\partial M}{\partial \theta}. \quad (1.123)$$

Рівняння нерозривності з урахуванням (1.46) запишеться у вигляді

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{або}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1.124)$$

Для запису рівнянь руху в θ – системі координат треба в рівняннях (1.36), (1.37), які представлені в системі з загальною вертикальною координатою η , перетворити доданки $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ і $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$. Для цього прологарифмуємо вираз для θ (1.121) і локально продиференціюємо

результат по x та по y при умові, що ці осі лежать на ізентропічній поверхні $\theta = \text{const}$. В такому випадку $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$. Тоді

$$0 = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$0 = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

або

$$c_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Ураховуючи ці співвідношення, запишемо рівняння руху в θ -системі координат

$$\frac{du}{dt} = -c_p \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v = -\frac{\partial}{\partial x} (c_p T + gz) + \ell v;$$

$$\frac{dv}{dt} = -c_p \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u = -\frac{\partial}{\partial y} (c_p T + gz) - \ell v$$

або з використанням функції Монтгомері

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial x} + \ell v; \quad (1.125)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial y} - \ell u. \quad (1.126)$$

Ізентропічна система координат зручна при розгляданні адіабатичних процесів, коли $\frac{d\theta}{dt} = 0$, що дає можливість виключити вертикальну швидкість. Дійсно, якщо $f = f(x, y, \dot{\theta}, t)$, то при адіабатичному процесі

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (1.127)$$

Використовуючи формулу (1.127), можна досить просто отримати рівняння гідротермодинаміки для випадку адіабатичних рухів, в яких будуть відсутні доданки з вертикальною швидкістю $\dot{\theta}$. В цьому полягає перевага ізентропічної системи координат в порівнянні з ізобаричною. Але θ – системі притаманні і суттєві недоліки: по-перше значно складніше сформулювати межові умови по θ , ніж по координатах p, ζ , або z ; по-друге, потенціальна температура безпосередньо не вимірюється, тобто вона розраховується. За вказаними причинами θ – система координат практично не використовується в гідродинамічному прогнозі, проте в цій системі зручно виконувати аналіз атмосферних процесів (наприклад, з використанням потенціального вихору, який не змінюється на ізентропічних поверхнях $\theta = const$, і виконує роль трасера). Тому цю систему звичайно застосовують в наукових дослідженнях.

2 МОДЕЛІ ЗА ПОВНИМИ РІВНЯННЯМИ ДЛЯ БАРОТРОПНОЇ І БАРОКЛІННОЇ АТМОСФЕРИ

Неперетворені рівняння гідротермодинаміки в метеорології називають повними (в науковій літературі їх також називають примітивними), а прогностичні моделі, які побудовані на основі цих рівнянь – негеострофічними або моделями за повними рівняннями, хоча в більшості негеострофічних моделей третє рівняння руху використовується у вигляді рівняння статики, тобто у спрощеному вигляді.

2.1 Повні рівняння баротропної моделі атмосфери

На перших етапах розвитку чисельних методів прогнозу як найбільш прості (фільтровані), так і значно складніші моделі (за повними рівняннями) будувалися для баротропної атмосфери.

Повні рівняння баротропної атмосфери і в теперішній час досить широко використовуються при моделюванні атмосферних процесів. Один із варіантів цих рівнянь називають рівняннями „мілкої води”. Отримаємо ці рівняння шляхом таких міркувань.

Розглянемо тонкий шар однорідної ідеальної рідини ($\rho = \text{const}$), яка обмежена знизу горизонтальною поверхнею $z=0$, а зверху – вільною поверхнею висотою $h(x, y, t)$, вище якої розташоване середовище з дуже малою густиною. Тоді на вільній поверхні $p = p_h = \text{const}$ (рис. 2.1).

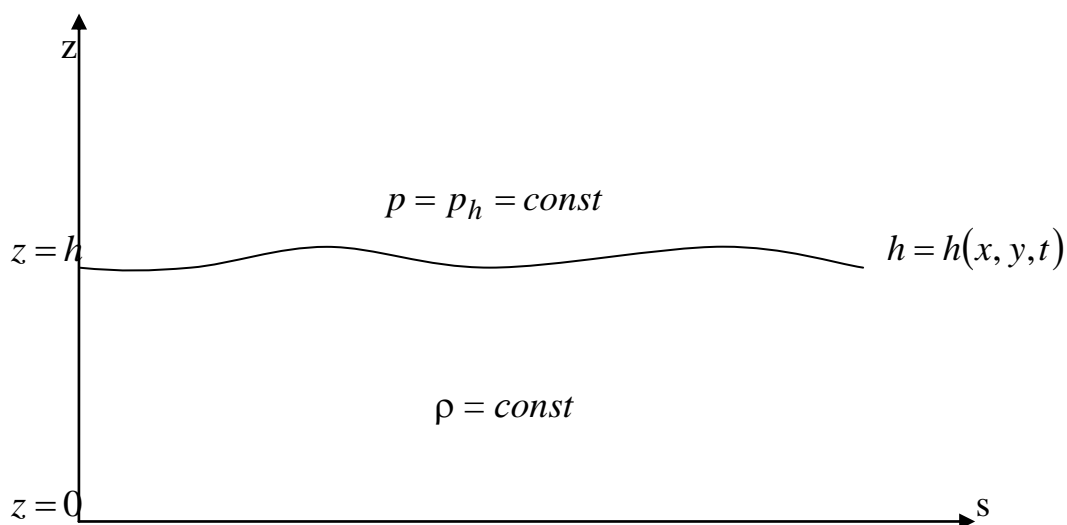


Рис. 2.1 – Вертикальний розріз однорідної атмосфери

Оскільки $\rho = const$, із рівняння статики $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho g) = 0 \quad (2.1)$$

де s - горизонтальні координати x та y .

Із рівності (2.1) випливає, що горизонтальний градієнт тиску $\frac{\partial p}{\partial s}$ не змінюється з висотою в шарі атмосфери, що розглядається тому складові геострофічного вітру u_g і v_g , які визначаються градієнтами $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x}$ відповідно, також не змінюються з висотою

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0.$$

Відомо, що в вільній атмосфері реальний (фактичний) вітер близький до геострофічного, тому можна вважати, що і реальний вітер не залежить від висоти, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0. \quad (2.2)$$

Відповідно до формул переходу від декартової системи координат до ізобаричної похідна

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho g \frac{\partial h}{\partial s} \quad \text{або} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = g \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (2.3)$$

де $\Phi = gh$ - геопотенціал поверхні $h(x, y, t)$; s - це горизонтальна координата x або y .

З урахуванням (2.2) і (2.3) для середовища, що розглядається (мілкої води), рівняння руху набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ відповідно до (2.1) не залежать від висоти.

Система (2.4) складається з двох рівнянь і містить три невідомі (шукані) величини u, v, Φ . Таким чином, ця система не є замкненою і тому її треба доповнювати ще одним рівнянням з тими ж невідомими, що і в системі (2.4). Для отримання такого рівняння скористуємося рівнянням нерозривності, яке для стисливого середовища в декартових координатах має вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (2.5)$$

Для середовища, де $\rho = \text{const}$, рівняння (2.5) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Проінтегруємо останнє рівняння по z від 0 до h , тобто від поверхні землі до вільної поверхні h

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \text{ або}$$

$$\int_{w_0}^{w_h} dw = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int_0^h dz, \text{ або}$$

$$w \Big|_{w_0}^{w_h} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot z \Big|_0^h.$$

Після підстановки границь інтегрування отримаємо

$$w_{z=h} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.6)$$

Зауважимо, що при одержанні рівняння (2.6) була врахована рівність (2.2), тобто незалежність u і v від висоти, а також нижня межа умова: при $z=0$ вертикальна швидкість $w=0$. На висоті h вважається, що частинки повітря, які знаходяться на вільній поверхні, не залишають цю поверхню, а коливаються разом з нею, тому вертикальну швидкість частинок можна виразити через висоту h , тобто через висоту шару атмосфери, який

розглядається. Оскільки h є функцією горизонтальних координат і часу, тобто $h = h(x, y, t)$, маємо

$$w_{z=h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2.7)$$

Підставимо (2.7) в (2.6) і введемо геопотенціал вільної поверхні $\Phi = gh$, в результаті отримаємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.8)$$

або в дивергентній формі

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

Рівняння (2.4) і (2.8) являють собою замкнену систему рівнянь мілкої води, яка використовується при моделюванні атмосферних процесів, зокрема при побудові прогностичних моделей. Наприклад, на основі вказаних рівнянь можна за допомогою сіткових методів прогнозувати швидкість вітру і геопотенціал кроками за часом. При цьому необхідно задавати початкові умови

$$f(x, y, t) = f(x, y, t_0),$$

де $f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{Bmatrix}$, t_0 - строк спостережень, і ставити межеві умови. Наприклад,

$$\text{у вигляді: } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_M = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_M = 0$$

2.2 Рівняння баротропної моделі в σ – системі координат

Рівняння для цієї моделі отримуються із рівнянь руху та нерозривності в σ – системі координат (див. розділ 1.2.3).

Для баротропного середовища густина є функцією лише тиску, тобто $\rho = f(p)$. Наприклад, при $T = \text{const}$ із рівняння стану маємо

$\rho = \frac{p}{RT}$. Оскільки $RT = const$, із останньої рівності випливає, що $\rho = f(p)$. В такому випадку

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\Phi + RT \ln p); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + RT \ln p).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Якщо продиференціюємо рівняння (2.10) по σ і поміняємо порядок диференціювання, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \equiv 0; \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \equiv 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Праві частини в (2.11) дорівнюють нулю, тому що

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.$$

Таким чином, в баротропному середовищі складові градієнту тиску, а отже, і геострофічний вітер не залежить від σ і їх можна відносити до будь якого рівня $\sigma = const$. Реальний вітер близький до геострофічного, тому в рівняннях руху члени $\dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma}$ можна вважати рівними нулю. Тоді для будь-якого рівня $\sigma = const$ рівняння руху можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell_v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell_u.\end{aligned}\tag{2.12}$$

При $\sigma = 1$, тобто на поверхні землі

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_s}{\partial y} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - \ell u.\end{aligned}\tag{2.13}$$

де $\rho_s = f(p_s)$, Φ_s – геопотенціал поверхні Землі, p_s – приземний тиск.

Система (2.13) містить три невідомі величини u, v, p_s . Для замикання цю систему треба доповнити ще одним рівнянням з такими ж невідомими. Отримаємо його з рівняння нерозривності

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(up_s) + \frac{\partial}{\partial y}(vp_s) + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

Проінтегруємо це рівняння по σ в границях від 0 до 1, урахуємо при цьому межові умови (при $\sigma=0$ і $\sigma=1$ $\dot{\sigma}=0$) і незалежність складових вітру u і v від σ , отримаємо

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial(up_s)}{\partial x} + \frac{\partial(vp_s)}{\partial y} = 0.\tag{2.14}$$

Рівняння (2.13), (2.14) складають замкнену систему, яка дозволяє за початковими даними $(u^{t_0}, v^{t_0}, p_s^{t_0})$ і бічними межовими умовами розраховувати майбутні значення метеорологічних величин u, v, p_s кроками за часом. Підкреслимо, що межові умови за вертикальною координатою не задаються, тому що шукані функції (u, v, p_s) не залежать від вертикальної координати σ , тобто майбутні складові швидкості вітру описують рухи у всьому шарі атмосфери, який зверху обмежується поверхнею $h(x, y, t)$.

2.3 Рівняння бароклінної моделі в p – системі координат

Сучасні оперативні моделі чисельного прогнозу полів метеорологічних величин ґрунтуються на використанні повної системи рівнянь гідротермодинаміки. Це стало можливим завдяки досягненням в

області динамічної метеорології і обчислювальної математики, які дозволили зняти обмеження фільтрованих моделей щодо зв'язків полів вітру і тиску і перейти до побудови моделей за повними рівняннями.

Розглянемо в загальних рисах процедуру прогнозу полів метеорологічних величин в рамках різних моделей. Для цього запишемо систему рівнянь гідротермодинаміки в ізобаричних координатах для великомасштабних рухів вільної атмосфери, тобто без урахування сил в'язкості; не будемо також враховувати і неадіабатичний приплив тепла ε . При таких припущеннях система рівнянь гідротермодинаміки суттєво спрощується і набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\ T &= -\frac{pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{Rp} \tau &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

В системі (2.15) $c^2 = \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma)$ - параметр статичної стійкості; решта умовних позначень – загальноприйняті. Система (2.15) з п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими (u, v, τ, H, T) є замкненою і дозволяє розрахувати значення перелічених невідомих в будь-який момент часу у межах області інтегрування.

Ця система включає три прогностичних рівняння, які містять в собі похідні за часом і два діагностичних. За допомогою прогностичних рівнянь можна розрахувати майбутні значення складових швидкості вітру u, v і температури T . Діагностичні рівняння дозволяють за прогностичними значеннями функцій u, v, T визначити решту функцій: τ і H .

Для розв'язання системи (8.10) необхідно задати початкові умови. Вони задаються для тих метеорологічних величин, від яких в системі рівнянь є похідні за часом, тобто для функцій u, v, T .

$$\begin{aligned}
u(x, y, p, t) &= u(x, y, p, t_0); \\
v(x, y, p, t) &= v(x, y, p, t_0); \\
T(x, y, p, t) &= T(x, y, p, t_0) \\
\text{або } H(x, y, p, t) &= H(x, y, p, t_0),
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

де t_0 - строк спостережень. Початкові значення $H(x, y, p, t_0)$ визначаються за допомогою рівняння статички; для цього треба задавати тиск на рівні моря. Значення τ розраховується за допомогою рівняння нерозривності.

Початкові умови, які задаються для розв'язання системи (2.15), представляють собою тривимірні поля трьох метеорологічних величин (u, v, T) або (u, v, H) , які можна одержати за даними вимірювань на мережі аерологічних станцій.

Межові умови повинні віддзеркалювати вплив навколишнього середовища на процеси в області інтегрування, які описуються рівняннями системи (2.15). Розглянемо спочатку умови за вертикальною координатою.

1. На верхній межі атмосфери доцільно поставити умову відсутності потоку маси, тобто

$$\rho w|_{z \rightarrow \infty} = 0 \text{ або, оскільки } \rho \neq 0, w|_{z \rightarrow \infty} = 0,$$

де $w = \frac{dz}{dt}$ - лінійна вертикальна швидкість. Відомо, що при $z \rightarrow \infty$ тиск дорівнює нулю, тому на верхній межі атмосфери виконується умова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{2.17}$$

Ця рівність означає, що тиск на досить великих висотах змінюється тільки по вертикалі.

Ізобарична вертикальна швидкість

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \text{ або}$$

з урахуванням (2.17) і рівняння статички

$$\tau|_{p \rightarrow 0} = w \frac{\partial p}{\partial z} = -w \rho g.$$

Оскільки $\rho w = 0$ при $z \rightarrow \infty$, то на верхній межі атмосфери, тобто при $p = 0$ виконується умова: $\tau = 0$. Отже верхню межу умову можна записати у такому вигляді

$$\text{при } p = 0 \quad \tau = 0. \quad (2.18)$$

2. На нижній межі атмосфери, яка при відсутності нерівностей поверхні Землі ототожнюється з рівнем $z = 0$, також береться умова $\rho w = 0$ або $w = 0$. Це означає, що вираз для лінійної вертикальної швидкості

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{g} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d(gz)}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

дозволяє записати нижню межу умову у вигляді:

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (2.19)$$

Але в ізобаричній системі координат за нижню межу береться не рівень $z = 0$, а ізобарична поверхня $p = P_0 = 1000$ гПа. Для того, щоб умову (2.19) можна було б використовувати в ізобаричній системі координат, вважається, що поверхня 1000 гПа збігається з рівнем $z = 0$, і тоді умова (2.19) записується таким чином

$$\begin{aligned} \text{при } p = P_0 \quad \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \quad \text{або} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + \tau \frac{\partial H}{\partial p} &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

де $H \equiv z$ - лінійна висота ізобаричної поверхні $p = P_0 = 1000$ гПа. З урахуванням рівняння статики, відповідно до якого $\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{RT}{pg}$, нижня межа умова (2.20) в ізобаричних координатах остаточно записується так

$$\text{при } p = P_0 \quad \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{RT_0}{P_0 g} \tau_0 = 0, \quad (2.21)$$

де T_0 , τ_0 - температура повітря і ізобарична вертикальна швидкість на поверхні $p = P_0 = 1000$ гПа.

Бічні межові умови задаються в залежності від того, для якої території реалізується модель. Так, для глобальних моделей бічні межові умови не потрібні. В моделях для обмежених територій бічні умови отримуються різними способами. Один з них ґрунтується на використанні так званих вкладених сіток. При використанні цього способу для усієї області, яка охоплює обмежену територію (прогностичну область) і сусідні райони (наприклад, для півкулі), будується прогностична фонові скінченнорізницева модель, яка реалізується на сітці з великими кроками. В межах області прогнозу будується сітка з меншими кроками (вкладена сітка), на якій за методом скінченних різниць розв'язуються рівняння тієї ж моделі, що і на грубій сітці (груба – це сітка з відносно великими кроками). Необхідні для дрібної сітки бічні межові умови визначаються за допомогою фонові моделі з грубим розподілом.

Зауважимо, що схеми інтегрування рівнянь моделей на декількох вкладених одна в одну сітках з усе меншими кроками дістали назву телескопічних.

Найбільш прості умови на бічних межах Γ мають вигляд

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_M = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_M = 0 \quad (2.22)$$

Ці умови означають сталість шуканих функцій (u, v, T) на бічних межах, що в помірних широтах не відповідає реальним процесам. Тому такі умови називають фіктивними. Умови (2.22) більш придатні для екваторіальних широт, де часова мінливість метеорологічних величин значно менша в порівнянні з помірними широтами.

2.4 Інтегрування повної системи рівнянь гідротермодинаміки в адіабатичному наближенні

Запишемо систему (2.15) так, що локальні похідні і сила Коріоліса залишаться в лівих частинах рівнянь, а суми решти членів запишуться у вигляді F_u, F_v, F_T .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v &= F_u; \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \ell u &= F_v; \\
\frac{\partial T}{\partial t} &= F_T; \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0; \\
T &= -\frac{pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

де

$$F_u = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right); \tag{2.24}$$

$$F_v = -\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right); \tag{2.25}$$

$$F_T = -\left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{c^2}{Rp} \tau\right). \tag{2.26}$$

Із системи (2.23) видно, що для її розв'язання необхідно визначити функції F_u, F_v, F_T . Формули (2.24) – (2.26) показують, що для визначення вказаних функцій, треба мати значення ізобаричної вертикальної швидкості τ , якої немає в даних спостережень. Тільки після того, як буде знайдено τ , можна проінтегрувати прогностичні рівняння системи (2.23), тобто рівняння руху і припливу тепла.

Для розв'язання системи (2.23) методом сіток в області прогнозу будується просторово-часова сітка, вузли якої розташовуються на ізобаричних поверхнях. Положення цих вузлів у просторі і в часі визначається безрозмірними координатами: $i = \frac{x}{\delta x}$; $j = \frac{y}{\delta y}$; $k = \frac{p}{\delta p}$ і

$s = \frac{t}{\delta t}$, де $\delta x, \delta y, \delta p$ - просторові кроки по координатах x, y, z відповідно, а δt - часовий крок.

Алгоритм розв'язання системи (2.23) з заданими початковими і межовими умовами можна представити таким чином.

1. Диференціальні рівняння системи (2.23) замінюються їх скінченнорізницеви́ми аналогами, при цьому використовуються певні схеми інтегрування за часом (явні, неявні, напівнеявні).

2. Шляхом інтегрування рівняння нерозривності з використанням початкових даних (полів вітру $u_{i,j,k}^{t_0}$, $v_{i,j,k}^{t_0}$) у вузлах сітки визначаються значення ізобаричної вертикальної швидкості $\tau_{i,j,k}^{t_0}$.

3. З використанням отриманих полів $\tau_{i,j,k}^{t_0}$ і початкових даних для температури і геопотенціалу ($T_{i,j,k}^{t_0}$, $\Phi_{i,j,k}^{t_0}$) обчислюються праві частини прогностичних рівнянь $(F_u)_{i,j,k}^{t_0}$, $(F_v)_{i,j,k}^{t_0}$, $(F_T)_{i,j,k}^{t_0}$.

4 Використовуючи скінченнорізнице́ву апроксимацію похідних за часом і сіткові значення правих частин F_u, F_v, F_T , за допомогою прогностичних рівнянь обчислюються майбутні значення складових швидкості вітру і температури $u_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $v_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $T_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, тобто прогностичні значення метеовеличин на кінець кроку за часом. При цьому при обчисленні цих величин у вузлах, найближчих до бічних меж, використовуються задані бічні умови.

5 Потім, використовуючи отримані значення $u_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $v_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, за допомогою рівняння нерозривності і верхньої межевої умови (2.18) розраховуються сіткові значення ізобаричної вертикальної швидкості на кінець першого часового кроку $\tau_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$.

Для визначення висоти H ізобаричної поверхні $P_0=1000$ гПа в момент часу $t_0 + \delta t$ використовується нижня межева умова (2.21). Значення $H_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$ усіх ізобаричних поверхонь, які розташовані вище, визначаються за допомогою отриманих значень $T_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$ із рівняння статки

$$H(p) = \frac{R}{g} \int_p^{P_0} \frac{T}{p} dp = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{P_0}{p}. \quad (2.27)$$

Таким чином, визначаються сіткові значення всіх п'яти метеорологічних величин в момент часу $t_0 + \delta t$: $u_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $v_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $T_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $H_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $\tau_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$.

Процедура чисельного інтегрування повторюється кроками за часом, доки не будуть одержані значення вказаних метеорологічних величин у вузлах сітки на заданий момент часу прогнозу. Така процедура

називається методом інтегрування кроками за часом. Суть цього методу полягає в тому, що інтегрування системи рівнянь виконується в границях одного часового кроку, якщо в моделях за повними рівняннями може скласти декілька хвилин. Для того, щоб отримати прогностичні поля, наприклад, на добу вперед, треба 24 години розділити на часові кроки, а потім проінтегрувати систему рівнянь послідовно для всіх часових інтервалів. При цьому для кожного часового кроку початкові дані беруться на попередньому кроці.

Зауважимо, що сітки, які використовуються при побудові скінченнорізницевого схем, повинні задовольняти багатьом вимогам, таким як узгодженість, точність, економічність обчислень, збіжність і стійкість розв'язань скінченнорізницевого рівнянь. Тому для побудови гідродинамічних моделей використовуються просторово-часові сітки спеціальної структури, на яких різні метеорологічні величини можуть розташовуватись в різних вузлах сітки. Такі сітки вперше були запропоновані Еліасеном і дістали назву розхитаних (шахових) сіток. Розглянемо структуру одного із видів таких сіток.

2.5 Шахові сітки та використання їх при чисельній реалізації прогностичних моделей

Існує декілька варіантів сіток, розхитаних за простором і за часом. На сітках, які розхитані тільки за простором, різні метеорологічні величини (залежні змінні) розташовуються в різних точках, але в кожний наступний момент часу обчислюються у тих же точках, де вони розташовуються у попередній момент часу. Сітки, які розхитані тільки за часом, передбачають обчислення усіх залежних величин в одних точках в один момент часу, але в інших точках в різні моменти часу. На сітках, які розхитані за простором і за часом, залежні змінні розташовуються в різних точках сітки в один момент часу і в незбіжних точках в різні моменти часу.

Для прикладу розглянемо сітку, яка розхитана за часом. Такою може бути сітка, яка складається з двох квадратних сіток з кроком $\delta x = \delta y = \delta r$, які в свою чергу зсунуті одна відносно другої на крок (δr) . У вузлах однієї з цих сіток розташовуються усі залежні змінні (в одних і тих самих збіжних точках), а у вузлах другої сітки обчислюються центральні скінченні різниці, тобто похідні. На звичайних сітках (нерозхитаних) усі залежні змінні, тобто метеорологічні величини та їх похідні обчислюються і розташовуються в усіх точках (вузлах) сітки.

На рисунку (2.2) зображена частина шахової сітки, яка складається з двох звичайних сіток з подвійним кроком по x і y , тобто вони зсунуті на один крок по x і y .

Вузли однієї сітки позначені „ноликами”, а другої – „хрестиками”

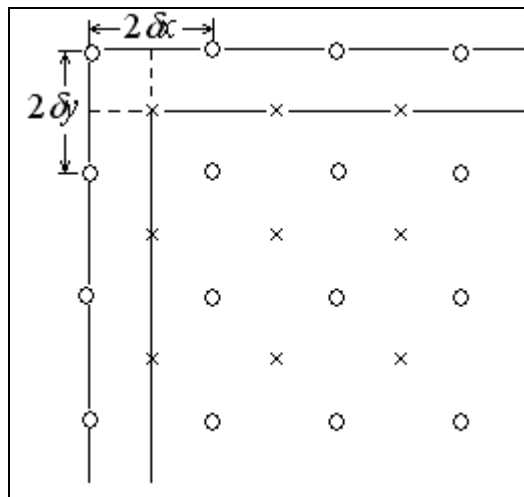


Рис. 2.2 – Схема шахової сітки з подвійним кроком

Вихідна інформація розташовується у вузлах однієї сітки, а величини, які обчислюються, розташовуються у вузлах другої сітки. За рахунок цього досягається зменшення кількості залежних змінних і обсягу обчислень.

Для отримання вихідних даних в тих вузлах, де вони потрібні для обчислення похідних центральними різницями, використовуються оператори осереднення \bar{f}^r , які в загальному вигляді можна представити так:

$$\bar{f}^r = \frac{1}{2}(f_{q+1} + f_{q-1}), \quad (2.28)$$

$$f_r = \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (2.29)$$

де r - розмірна координата (x, y, p, t) ; q - відповідна безрозмірна координата (i, j, k, s) ; f - значення залежних змінних (метеорологічних величин): u, v, τ, T, H ; індекс r в (2.28) означає координату, за якою здійснюється осереднення, а індекс r унизу в (2.29) означає координату, за якою визначається похідна; δr - крок сітки.

Представимо формули для розрахунку метеовеличин та їх похідних у вузлі „хрестик” за вихідними даними у вузлах – „ноликах”. Отже,

значення деякої метеорологічної величини f відомі у чотирьох вузлах – „ноликах”, які оточують точку розрахунку – „хрестик” (рис. 2.3).

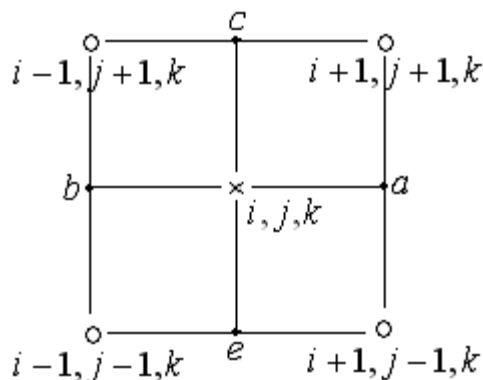


Рис. 2.3 – Шаблон для розрахунку метеорологічних величин та їх похідних у вузлі шахової сітки з кроком d

Для представлення скінченною різницею першої похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$ у вузлі з координатами i, j, k треба мати значення функції f у точках a і b , а для похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ необхідні дані в точках c і e , тоді

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j,k} \approx \frac{f_a - f_b}{2d}; \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j,k} \approx \frac{f_c - f_e}{2d}. \quad (2.31)$$

Але функція f відома лише у вузлах „ноликах”. Якщо використати формулу (2.28), можна розрахувати значення f в точках a і b , тобто в цих точках можна отримати середні значення функції f , при цьому осереднення здійснюється по координаті y

$$\bar{f}_a^y = \frac{1}{2}(f_{i+1,j+1,k} + f_{i+1,j-1,k}). \quad (2.32)$$

$$\bar{f}_b^y = \frac{1}{2}(f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k}). \quad (2.33)$$

Підставимо (2.32), (2.33) в вираз (2.30), отримаємо

$$\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^y \equiv (\bar{f}_x^y)_{i,j,k} \approx \frac{1}{4d} (f_{i+1,j+1,k} + f_{i+1,j-1,k} - f_{i-1,j+1,k} - f_{i-1,j-1,k}) \quad (2.34)$$

Для першої похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ у вузлі i, j, k треба отримати f_c і f_e шляхом осереднення по координаті x , тобто

$$\bar{f}_c^x = \frac{1}{2} (f_{i-1,j+1,k} + f_{i+1,j+1,k}); \quad (2.35)$$

$$\bar{f}_e^x = \frac{1}{2} (f_{i-1,j-1,k} + f_{i+1,j-1,k}). \quad (2.36)$$

Після підстановки (2.35), (2.36) в формулу (2.31) отримаємо

$$\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial y} \right)_{i,j,k}^x \equiv (\bar{f}_x^y)_{i,j,k} \approx \frac{1}{4d} (f_{i-1,j+1,k} + f_{i+1,j+1,k} - f_{i-1,j-1,k} - f_{i+1,j-1,k}). \quad (2.37)$$

Похідну за вертикальною координатою (наприклад, p) через скінченні різниці можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial p} \right)_{i,j,k}^{xy} \equiv (\bar{f}_p^{xy})_{i,j,k} \approx \frac{\bar{f}_{i,j,k+1}^{xy} - \bar{f}_{i,j,k-1}^{xy}}{p_{k+1} - p_{k-1}}, \quad (2.38)$$

де $\bar{f}_{i,j,k+1}^{xy}$ і $\bar{f}_{i,j,k-1}^{xy}$ - значення функції на рівнях $k+1$, $k-1$, які визначаються як середні із значень величини f в чотирьох вузлах – „ноликах”, оточуючих вузол – „хрестик” на відповідних рівнях (рис. 2.4).

Для кращого розуміння процедури обчислення за формулою (2.38) розглянемо рисунок, на якому зображені шаблони для розрахунку похідних і осереднених величин в точці – хрестика. Цей вузол, як і оточуючі вузли – нолики на усіх рівнях k , $k+1$ і $k-1$ мають одні й ті ж координати. Для того щоб обчислити центральну похідну за вертикальною координатою p , треба мати інформацію на трьох ізобаричних поверхнях (p_{k-1}, p_k, p_{k+1}) , тоді розрахована похідна буде віднесена до поверхні p_k . Для отримання однобічної похідної достатньо мати інформацію на двох рівнях p_k і p_{k+1} або p_k і p_{k-1} . Таку похідну можна відносити до будь-якого з перелічених рівнів.

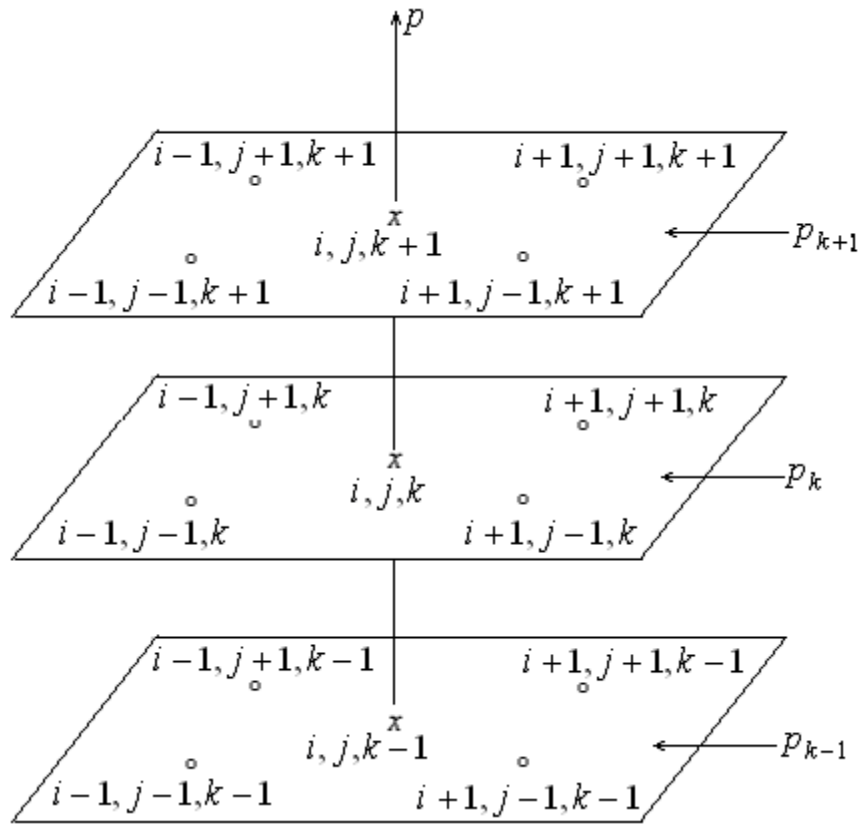


Рис. 2.4 – Розташування вузлів сітки на різних ізобаричних поверхнях

(i, j, k - координати вузла, для якого розраховується похідна $\frac{\partial f}{\partial p}$)

Повернемося до центральної різниці для похідної $\frac{\partial f}{\partial p}$ (2.38). Для її отримання в точці з координатами i, j на рівні k треба мати значення функції f у вузлах – хрестиках на рівнях $k+1$ і $k-1$, тобто в точках з координатами $i, j, k+1$ та $i, j, k-1$. Але інформація є тільки у вузлах – ноликах, тому для отримання значень f в точках $i, j, k+1$ та $i, j, k-1$ треба застосувати операцію осереднення, тобто

$$\bar{f}_{i,j,k+1}^{xy} = \frac{1}{4} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i-1,j+1,k+1} + f_{i-1,j-1,k+1} + f_{i+1,j-1,k+1}).$$

Аналогічно на рівні $k-1$ отримаємо

$$\bar{f}_{i,j,k-1}^{xy} = \frac{1}{4} (f_{i+1,j+1,k-1} + f_{i-1,j+1,k-1} + f_{i-1,j-1,k-1} + f_{i+1,j-1,k-1}).$$

Підставляючи ці вирази в формулу (2.38), отримаємо значення похідної по вертикальній координаті p з осередненням по координатах x та y .

Якщо похідна замінюється не центральними різницями, а однобічними, то достатньо інформацію мати на двох рівнях k і $k+1$, або k і $k-1$. Тоді формула для похідної за вертикальною координатою буде мати такий вигляд

$$\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial p}}\right)_{i,j,k+1}^{xy} = (\bar{f}_p^{xy})_{i,j,k+1} \approx \frac{1}{4(p_{k+1} - p_k)} \left[(f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i-1,j+1,k+1} + f_{i-1,j-1,k+1} + f_{i+1,j-1,k+1}) - (f_{i+1,j+1,k} + f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k} + f_{i+1,j-1,k}) \right]$$

Цю похідну можна відносити до рівня $k+1$ або k , тоді це буде однобічна різниця. Відзначимо, що в сучасних моделях шахові сітки можуть складатися також із двох сіток, зсунутих відносно одна одної на півкроку $\left(\frac{d}{2}\right)$. Тоді індекси, які вказують координати вузлів сітки, будуть половинними. Наприклад, формула осереднення буде мати вигляд

$$\bar{f}_q^r = \frac{1}{2} (f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (2.39)$$

Вираз для першої похідної запишеться як

$$(f_r)_q \approx \frac{1}{\delta r} (f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (2.40)$$

На закінчення нагадаємо скінченнорізницеві аналоги для першої похідної у вузлі звичайної сітки, які найчастіше використовуються при розв'язанні системи рівнянь гідротермодинаміки. Для спрощення запису скористуємося узагальненою розмірною координатою r якій відповідає безрозмірна координата q , тобто

$$r = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z, p \\ t \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \\ s \end{Bmatrix}.$$

В цьому випадку представлення похідних однобічними і центральними різницями матиме вигляд

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_{q+1} - f_q);$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_q - f_{q-1});$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1});$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}}).$$

При запису диференціальних рівнянь в скінченнорізницевого вигляді виникає необхідність в осередненні функцій по деякій координаті або по декількох з них. В найбільш простому варіанті при осередненні по двох точках на одній координатній осі використовується така формула

$$\bar{f}_q^r = \frac{1}{2}(f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (2.41)$$

Для подвійного осереднення будемо мати

$$\bar{\bar{f}}_q^{rr} = \frac{1}{4}(f_{q+1} + 2f_q + f_{q-1}) \quad (2.42)$$

і для похідної з осередненням

$$(\bar{f}_r^r)_q = \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}) \quad (2.43)$$

Скінченнорізницеві вирази (2.41) – (2.43) використовуються для апроксимації і згладжування на звичайних сітках.

Формули (2.34), (2.37) використовуються для скінченнорізницевого представлення похідних у вузлах шахової сітки, яка складається з двох звичайних сіток, що зсунуті одна відносно другої на один крок. Для

осереднення по координатах x та y на такій сітці використовується формула

$$\bar{f}_{i,j,k}^{xy} = \frac{1}{4} (f_{i+1,j+1,k} + f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k} + f_{i+1,j-1,k})$$

Якщо шахова сітка складається з двох сіток, зсунутих на пів кроку, то в формулах для розрахунку перших похідних будуть присутні половинні індекси

$$\bar{f}_{i,j,k}^{xy} = \frac{1}{4} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right)_{i,j,k}^y &\equiv \left(\bar{f}_x^y \right)_{i,j,k} \approx \frac{1}{\delta x} (\bar{f}_{i+\frac{1}{2},j,k}^y - \bar{f}_{i-\frac{1}{2},j,k}^y) = \\ &= \frac{1}{2\delta x} (f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right)_{i,j,k}^x &\equiv \left(\bar{f}_y^x \right)_{i,j,k} \approx \frac{1}{\delta y} (\bar{f}_{i,j+\frac{1}{2},k}^x - \bar{f}_{i,j-\frac{1}{2},k}^x) = \\ &= \frac{1}{2\delta y} (f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}). \end{aligned}$$

Відзначимо, що на точність чисельного інтегрування рівнянь гідротермодинаміки за методом сіток впливають помилки скінченнорізницевої апроксимації похідних і за простором, і за часом. Але вплив помилок скінченнорізницевої апроксимації похідних за простором значно більший, ніж вплив апроксимації похідних за часом. Тому при побудові скінченнорізницевих схем для рівнянь гідротермодинаміки слід перш за все приділяти увагу точності похідних за просторовими координатами.

2.6 Проблема початкових та межових умов в прогностичних моделях за повними рівняннями

В першому розділі відзначалося, що для глобальних моделей межові умови за горизонтальними координатами, тобто бічні межові умови, не потрібні. З точки зору постановки цих межових умов глобальні моделі є найбільш доцільними. Але при чисельній їх реалізації виникає проблема задання початкових умов, оскільки на більшій частині земної кулі розташовані моря і океани, над якими інформації про стан атмосфери дуже мало. Існують способи отримання додаткової інформації (це метеорологічні спостереження на комерційних та інших судах, супутникові спостереження тощо), але об'єм інформації про стан атмосфери над водною поверхнею значно менший ніж над континентальною частиною земної кулі.

Очевидно, що прогностичні моделі для обмеженої території є більш економічними ніж глобальні. Крім того, на обмеженій території можна використовувати дрібні сітки, завдяки чому збільшується точність прогнозу. Однак при цьому виникає проблема, яка пов'язана з постановкою бічних межових умов. Якщо бічні межові умови (БМУ) поставлені недостатньо коректно, на межах області прогнозу і поблизу них виникають хвилі з великою амплітудою, які розповсюджуються усередину області визначення розв'язків рівнянь моделі і перекручують прогноз.

Треба відзначити, що в будь-якій моделі повинні ураховуватися процеси, які відбуваються не тільки на межах області прогнозу, а і на територіях, що межують з цією областю, тому що атмосферні процеси на обмеженій території завжди пов'язані з процесами над іншими районами земної кулі. В принципі існує два підходи до постановки БМУ.

Перший підхід полягає в тому, що всі залежні змінні розраховуються на бічних межах шляхом використання спрямованих всередину області прогнозу скінченних різниць по x і y таким чином, щоб для їх обчислення потрібні були тільки сіткові значення метеорологічних величин на межах і в найближчих до меж внутрішніх вузлах сітки ABCD (рис. 2.5).

Другий підхід до постановки бічних межових умов для прогнозу на обмеженій території ураховує процеси над суміжними з прогностичною областю територіями. Цей підхід ґрунтується на використанні вкладених сіток. При цьому для усій території, яка охоплює прогностичну область і суміжні з нею райони, будується фонові скінченнорізницева модель, яка реалізується на сітці з грубим розділенням. В границях області прогнозу будується більш дрібна (вкладена) сітка (рис. 2.5), на якій за методом

скінченних різниць реалізується та ж модель, що і на сітці з грубим розділенням. Необхідні для моделі на дрібній сітці БМУ отримуються із фонові моделі з грубим розділенням.

При чисельному інтегруванні рівнянь моделі на вкладених сітках використовуються два методи. Перший метод передбачає тільки одностороннє урахування впливу процесів, які описуються на грубій сітці в оточуючих районах, на процеси, що моделюються на дрібній сітці, а оберненим впливом нехтують. Цей метод називається методом односторонньої взаємодії.

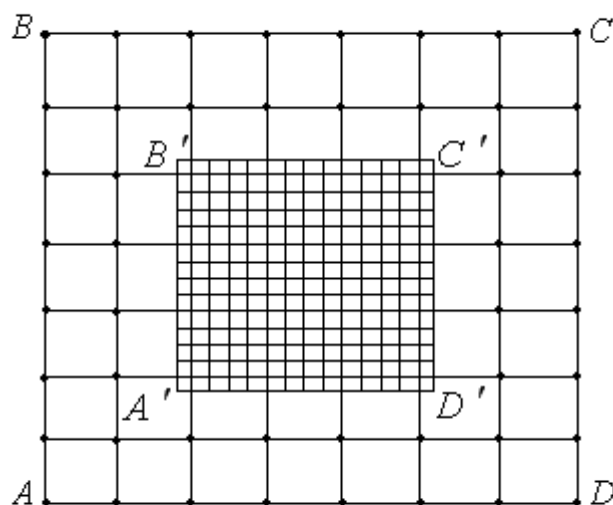


Рис. 2.5 – фонові (груба) сітка $ABCD$ і вкладена (дрібна) $A'B'C'D'$. Лінії AB, BC, CD, AD – межі грубої сітки; $A'B', B'C', C'D', A'D'$ – межі дрібної сітки

В загальних рисах інтегрування рівнянь моделі на вкладених сітках за допомогою методу односторонньої взаємодії можна пояснити так. Спочатку виконується інтегрування фонові моделі на грубій сітці на певний інтервал часу, наприклад t_1 . При цьому значення залежних змінних запам'ятовуються на кожному часовому кроці у вузлах грубої сітки, які розташовані на межі між зовнішньою і внутрішньою сітками. По цим значенням залежних змінних в межах вузлах грубої сітки на часових кроках в границях інтервалу часу t_1 обчислюються значення відповідних величин в межах вузлах дрібної сітки в ті моменти часу, які відповідають часовим крокам вкладеної моделі. Обчислення виконується шляхом інтерполяції у просторі і у часі.

Потім інтегруються рівняння моделі на дрібній сітці на інтервал часу t_1 з використанням межевих значень, які отримані на основі фонові

моделі шляхом інтерполяції в межах вузлів дрібної сітки. Така процедура повторюється до тих пір, доки не будуть отримані прогностичні значення метеорологічних величин на строк прогнозу.

Таким чином, при використанні методу односторонньої взаємодії інтегрування рівнянь на грубій сітці здійснюється незалежно від вкладеної моделі.

Другий метод інтегрування рівнянь моделі на вкладених сітках, який отримав назву методу двохсторонньої взаємодії, передбачає врахування двохсторонньої взаємодії між процесами на грубій і дрібній сітках.

При використанні цього методу інтегрування рівнянь моделі на грубій і дрібній сітках тісно пов'язані між собою. Процедура інтегрування тут така. Обчислюються прогностичні значення залежних змінних на кінець одного часового кроку у вузлах грубої сітки. По їх значенням шляхом інтерполяції розраховуються значення в межах вузлів дрібної сітки. Потім інтегруються рівняння моделі на дрібній сітці на інтервал часу, який дорівнює часовому кроці на грубій сітці. Після цього знову інтегруються рівняння фонові моделі, але з використанням результатів вкладеної моделі, тобто результатів на дрібній сітці.

Фізично більш обґрунтованим є метод двохсторонньої взаємодії, тому що зовнішній потік, який описується фонові моделлю, тобто на грубій сітці, не тільки впливає на атмосферні процеси у внутрішній області, а і сам підлягає оберненому впливу.

Слід відзначити, що при використанні обох описаних методів виникають значні труднощі. Так, при застосуванні методу односторонньої взаємодії одна із труднощів полягає в тому, що на межі, що розділяє грубу і дрібну сітки, на основі фізики атмосферних процесів слід задавати змінні тільки там, де здійснюється вплив зовні (в місцях втоку у внутрішню область). Тобто не можна задавати умови на всій межі дрібної сітки на основі розв'язків на грубій сітці, тому що в цьому випадку матиме місце перевизначення межах умов (задаються зайві умови), що приводить до великих помилок, а іноді і до „вибуху” чисельного розв'язання.

При реалізації методу двохсторонньої взаємодії основна трудність полягає в узгодженості розв'язків на грубій та дрібній сітках, необхідність якої обумовлена різницею фазових швидкостей. В фоновій моделі описуються великомасштабні (повільні) хвилі, а вкладена модель описує короткі, тобто швидкі хвилі. Тому хвилі, які представляються на обох сітках, при переході з грубої сітки на дрібну прискорюються, а при переході з дрібної сітки на грубу – сповільнюються. Завдяки тому, що фазові швидкості на сітках з різним розділенням відрізняються, виникають помилки розв'язків на грубій сітці; цей ефект називається обчислювальним заломленням.

Мають місце і інші труднощі при використанні методів односторонньої та двохсторонньої взаємодії, але ми не будемо їх розглядати. Відзначимо тільки, що в багатьох наукових роботах з гідродинамічних методів прогнозу погоди пропонуються методи, які дозволяють зменшувати вплив шумів поблизу меж на розвязки рівнянь моделей.

В теперішній час прогностичні моделі на вкладених сітках широко використовуються в прогностичних центрах багатьох країн, але найбільш широко вкладені сітки застосовуються при моделюванні тропічних циклонів. В моделях тропічних циклонів часто використовуються декілька вкладених одна в одну сіток зі зростаючим розділенням, в тому числі і таких сіток, які переміщуються разом з тропічним циклоном.

Схеми інтегрування моделей на декількох вкладених одна в одну сітках зі зростаючим розділенням мають назву *телескопічних*.

Якщо система рівнянь моделі для обмеженої території розв'язується без врахування результатів моделювання процесів в оточуючих районах, тобто не на вкладених сітках, то значення незалежних змінних на бічних межах можна розраховувати за допомогою рівнянь моделі. Однак такий спосіб задання бічних межевих умов не знайшов широкого застосування. Проте, для кращого розуміння фізичної суті БМУ наведемо приклад найпростіших умов на бічних межах М

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_M = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_M$$

Як відзначалося вище, ці умови свідчать про незмінність шуканих функцій (u , v , T) на бічних межах, що не відповідає реальним процесам, тому такі умови називаються фіктивними. При використанні таких умов поблизу бічних меж відбувається перекидання розв'язків рівнянь моделі. Для зменшення впливу цього перекидання на якість чисельного прогнозу використовуються різні способи, які передбачають плавний перехід від незмінних значень залежних величин на межах до величин, які змінюються згідно з розв'язками прогностичних рівнянь у внутрішніх вузлах сіткової області.

На закінчення відзначимо, що похибки в початкових даних впливають на точність чисельних прогнозів, при цьому помилки в прогностичних полях метеорологічних величин зростають зі збільшенням інтервалу часу, на якій розраховується прогноз.

Основні шляхи зменшення впливу на прогноз похибок в початкових даних такі

- збільшення кількості аерологічних станцій над океанами, а також над малоосвітленими ділянками суші;

- розробка чисельних схем прогнозу, які є стійкими відповідно до початкових даних;
- розробка більш досконалих способів обробки даних спостережень з використанням об'єктового аналізу.

На питанні про точність спостережень ми не зупиняємося, тому що вона не є головним джерелом помилок прогнозів в тропосфері. Проте треба мати на увазі, що вимірювання тиску на більш високих рівнях пов'язані зі значними похибками. Так, для прогнозів в стратосфері (особливо, починаючи з поверхні 100 гПа) похибки вимірювань є основним джерелом помилок чисельного аналізу і прогнозу полів метеорологічних величин.

3. ІНТЕГРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛЕЙ ЗА ПОВНИМИ РІВНЯННЯМИ

Інваріантними називаються величини, які зберігаються при русі. Простою інваріантною величиною є потенціальна температура, яка не змінюється з часом при адіабатичному русі. При вертикальних рухах частинок повітря, коли обмін різними субстанціями з навколишнім середовищем обмежений або взагалі відсутній, зберігається кількість водяної пари до рівня конденсації. Тоді інваріантом таких рухів є масова частка водяної пари q . Відомо також, що при горизонтальних рухах повітряних мас в баротропній атмосфері у відсутності тертя зберігається абсолютний вихор, який вважається інваріантом квазігеострофічної моделі для середнього рівня баротропної атмосфери.

При скінченнорізницевій апроксимації і побудові схем чисельного інтегрування повних рівнянь повинні виконуватися деякі вимоги. Одна з них полягає в тому, що в системах скінченнорізницевого рівнянь, які називаються чисельними моделями, повинні зберігатися інтегральні властивості відповідних систем диференціальних рівнянь, тобто математичних моделей.

3.1 Інтегральні інваріанти баротропної моделі мілкої води

Розглянемо інтегральні властивості моделі, яка базується на системі рівнянь мілкої води (2.4), (2.8). Будемо вважати, що область визначення розв'язку являє собою прямокутник зі сторонами, які орієнтовані паралельно осям координат x і y ; довжини цих сторін складають $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ (рис. 3.1)

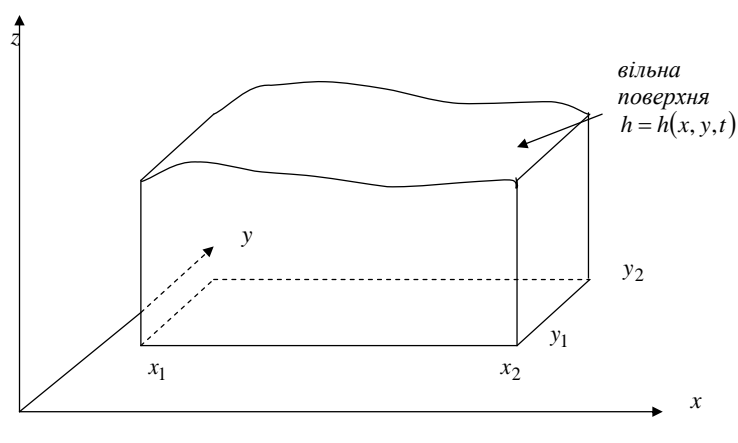


Рис. 3.1 – Область визначення розв'язку рівнянь мілкої води

На межах області поставимо умови

$$u|_{x=x_1} = u|_{x=x_2} = v|_{y=y_1} = v|_{y=y_2} = 0, \quad (3.1)$$

які означають, що через бічні межі немає переносу.

Випишемо рівняння (2.9)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

і проінтегруємо його по площині від x_1 до x_2 і від y_1 до y_2 .

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} dx dy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} dy dx. \quad (3.3)$$

Оскільки в лівій частині (3.3) подвійний інтеграл береться від похідної $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, а x, y і t — незалежні змінні, то можна поміняти місцями процедури

інтегрування і диференціювання, тобто можна винести оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ за знак інтеграла

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx dy. \quad (3.4)$$

Інтеграли в правій частині дорівнюють нулю (відповідно до межових умов (3.1)). Дійсно,

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} d(u\Phi) dy,$$

$$\text{але } \int_{x_1}^{x_2} d(u\Phi) = u\Phi \Big|_{x_1}^{x_2} = u_{x_2} \Phi_{x_2} - u_{x_1} \Phi_{x_1}, \text{ де } u_{x_2} = u_{x_1} = 0.$$

Таким чином, підінтегральна функція в $\int_{y_1}^{y_2}$ дорівнює нулю і отже, перший подвійний інтеграл в правій частині (3.3) дорівнює нулю. Завдяки межовим умовам (3.1) нульовим буде і другий подвійний інтеграл в правій частині рівняння (3.3), яке відповідно до сказаного набуває вигляду

$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy = 0$ або з урахуванням (3.4) маємо $\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx dy = 0$, відкіля випливає, що

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx dy = \text{const} \quad (3.5)$$

Таким чином, величина в лівій частині виразу (3.3) є інтегральним інваріантом моделі мілкої води. Умова (3.5) означає, що в об'ємі $V = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot h$ зберігається маса повітря (але тільки при межових умовах (3.1)). Дійсно, маса M в об'ємі V визначається інтегралом

$M = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \rho dz dx dy$, де ρ – густина повітря, яку можна винести за знак інтегралу, тому що вона є сталою величиною в моделі, що розглядається, тобто

$$M = \rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h dz dx dy. \quad (3.6)$$

В (3.6) $\int_0^h dz = z \Big|_0^h = (h - 0) = h$. Підставимо цей результат в (3.6), при цьому помножимо і поділимо його на силу тяжіння g , отримаємо

$$M = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx dy, \quad (3.7)$$

де $\Phi = gh$ – геопотенціал вільної поверхні h , яка обмежує шар однорідної атмосфери зверху (рис. 3.1). Відповідно до (3.5) подвійний інтеграл є

константою; оскільки ρ і g теж сталі величини, із (3.7) випливає, що $M = const$, що і потрібно було доказати.

Далі покажемо, що для мілкої води існує енергетичний інваріант. Для цього отримаємо рівняння для кінетичної енергії одиниці маси

$E = \frac{u^2 + v^2}{2}$ для випадку двовимірного руху. Рівняння для кінетичної енергії отримується із рівнянь горизонтального руху

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell v.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Помножимо перше рівняння системи (3.8) на u , а друге – на v

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + vu \frac{\partial u}{\partial y} &= -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell uv; \\ v \frac{\partial v}{\partial t} + uv \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= -v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell vu.\end{aligned}$$

Перепишемо ці рівняння в іншому вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell uv &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \ell vu &= 0.\end{aligned}$$

Тепер складемо ліві частини цих рівнянь і згрупуємо члени з однаковими змінними диференціювання, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \Phi \right] + v \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \Phi \right] = 0 \tag{3.9}$$

Введемо позначення для кінетичної енергії

$$E_k = \frac{u^2 + v^2}{2}. \quad (3.10)$$

Тоді з урахуванням (3.10) вираз (3.9) набуває вигляду

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}(E_k + \Phi) + v \frac{\partial}{\partial y}(E_k + \Phi) = 0 \quad (3.11)$$

Помножимо рівняння (3.11) на Φ , а рівняння (3.2) спочатку на Φ , а потім на E_k , отримаємо

$$\Phi \frac{\partial E_k}{\partial t} + u \Phi \frac{\partial}{\partial x}(E_k + \Phi) + v \Phi \frac{\partial}{\partial y}(E_k + \Phi) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{2} \right) + \Phi \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) + \Phi \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi) = 0, \quad (3.13)$$

$$E_k \frac{\partial \Phi}{\partial t} + E_k \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) + E_k \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi) = 0. \quad (3.14)$$

Підсумуємо рівняння (3.12)-(3.14) і запишемо суми таким чином

$$\begin{aligned} & \underbrace{\Phi \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{2} \right) + E_k \frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{\text{---}} + \underbrace{u \Phi \frac{\partial}{\partial x}(E_k + \Phi) + \Phi \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) + E_k \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi)}_{\text{---}} + \\ & + \underbrace{v \Phi \frac{\partial}{\partial y}(E_k + \Phi) + \Phi \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi) + E_k \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi)}_{\text{---}} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Суми підкреслених членів в цьому рівнянні можна записати так

$$\Phi \frac{\partial E_k}{\partial t} + E_k \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial E_k \Phi}{\partial t}; \quad (3.16)$$

$$\Phi \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) + E_k \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) = (E_k + \Phi) \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} \quad (3.17)$$

$$\Phi \frac{\partial}{\partial y}(\nu \Phi) + E_k \frac{\partial}{\partial y}(\nu \Phi) = (E_k + \Phi) \frac{\partial(\nu \Phi)}{\partial y}. \quad (3.18)$$

Підставимо (3.16)-(3.18) в (3.15), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{2} \right) + \frac{\partial(E_k \Phi)}{\partial t} + \underbrace{u \Phi \frac{\partial}{\partial x}(E_k + \Phi)} + \underbrace{(E_k + \Phi) \frac{\partial(u \Phi)}{\partial x}} + \\ + \underbrace{\nu \Phi \frac{\partial}{\partial y}(E_k + \Phi)} + \underbrace{(E_k + \Phi) \frac{\partial(\nu \Phi)}{\partial y}} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

В цьому рівнянні суми підкреслених членів являють собою похідні від добутків $(u \Phi) \cdot (E_k + \Phi)$ і $(\nu \Phi) \cdot (E_k + \Phi)$. З урахуванням цього зауваження (3.19) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E_k \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial x} [u \Phi (E_k + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y} [\nu \Phi (E_k + \Phi)] = 0. \quad (3.20)$$

Якщо тепер рівняння (3.20) проінтегрувати по x і y в границях від x_1 до x_2 та від y_1 до y_2 , то з урахуванням нульових межових умов (3.1) будемо мати

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E_k \Phi \right) dx dy = 0. \quad (3.21)$$

Отже, вираз

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E_k \Phi \right) dx dy = \text{const} \quad (3.22)$$

є інтегральним інваріантом моделі мілкої води.

Для виявлення фізичного змісту цього інваріанту розглянемо вираз для кінетичної \bar{E}_k і потенціальної $\bar{\Pi}$ енергії маси повітря в об'ємі $V = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot h$

$$\bar{E}_k = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \rho E_k dz dx dy$$

або з урахуванням того, що $\rho = const$ та E_k від висоти не залежить (див. розділ 2.1), а $\int_0^h dz = \frac{1}{g} \Phi$, отримаємо такий вираз для \bar{E}_k

$$\bar{E}_k = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} E_k \Phi dx dy. \quad (3.23)$$

Запишемо тепер вираз для потенціальної енергії повітряної маси в об'ємі V

$$\bar{\Pi} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \rho g z dz dx dy \quad (3.24)$$

В цьому виразі $\int_0^h z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^h = \frac{h^2}{2}$. Підставимо цей вираз в (3.24)

$$\bar{\Pi} = \rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} g \frac{h^2}{2} dx dy = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi^2}{2} dx dy. \quad (3.25)$$

Таким чином, сума кінетичної та потенціальної енергії в об'ємі V дорівнює

$$\bar{E}_k + \bar{\Pi} = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E_k \Phi \right) dx dy, \quad (3.26)$$

відкіля

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E_k \Phi \right) dx dy = \frac{g}{\rho} (\bar{E}_k + \bar{\Pi}).$$

Тобто с точністю до множника $\frac{g}{\rho}$ подвійний інтеграл

$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E_k \Phi \right) dx dy$, який є інваріантною величиною моделі мілкої води, відзначається як сума кінетичної і потенціальної енергії маси повітря в об'ємі V .

3.2 Інтегральні інваріанти моделі для бароклічної атмосфери в ізобаричній системі координат

Використаємо систему рівнянь горизонтального руху без урахування сил в'язкості в p -системі координат.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u.$$

Отримаємо з цих рівнянь рівняння для кінетичної енергії так, як це зроблено в розділі 3.1.

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + u \frac{\partial E_k}{\partial x} + v \frac{\partial E_k}{\partial y} + \tau \frac{\partial E_k}{\partial p} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (3.27)$$

В (3.27) $E_k = \frac{u^2 + v^2}{2}$ – кінетична енергія одиничної маси двовимірного руху.

Для одержання рівняння для питомої ентальпії $E = c_p T$ скористаємося рівнянням припливу тепла в адіабатичному наближенні

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tau \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} = 0 \quad (3.28)$$

Помножимо рівняння (3.28) на c_p і урахуємо, що $\frac{RT}{p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial p}$, (із рівняння статистики); в результаті отримаємо

$\frac{\partial}{\partial t}(c_p T) + u \frac{\partial}{\partial x}(c_p T) + v \frac{\partial}{\partial y}(c_p T) + \tau \frac{\partial}{\partial p}(c_p T) + \tau \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$, або, приймаючи до уваги позначення для ентальпії, перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \tau \frac{\partial E}{\partial p} + \tau \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \quad (3.29)$$

Підсумуємо рівняння (3.27) і (3.29) і отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_k + E) + u \frac{\partial}{\partial x}(E_k + E + \Phi) + v \frac{\partial}{\partial y}(E_k + E + \Phi) + \tau \frac{\partial}{\partial p}(E_k + E + \Phi) = 0.$$

З урахуванням рівняння нерозривності останнє рівняння можна записати в дивергентній формі

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_k + E) + \frac{\partial}{\partial x}[u(E_k + E + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(E_k + E + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial p}[\tau(E_k + E + \Phi)] = 0 \quad (3.30)$$

Виконаємо тепер інтегрування (3.30) в границях об'єму $V = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot (p_s - 0)$, тобто в області паралелепіпеда, ребра якого орієнтовані по координатних осях x, y, p . По висоті цей паралелепіпед простягається від підстильної поверхні, де $p = p_s$, до верхньої межі атмосфери, де $p = 0$; p_s – приземний тиск є функцією горизонтальних координат і часу, тобто $p_s = p_s(x, y, t)$.

Межові умови на границях паралелепіпеда за горизонтальними координатами мають вигляд

$$u|_{x_1} = u|_{x_2} = v|_{x_1} = v|_{x_2} = 0. \quad (3.31)$$

Вертикальні межові умови запишемо так:

$$\text{ВМУ при } p = 0 \quad \tau = 0; \quad (3.32)$$

$$\text{НМУ при } p = p_s \quad \tau_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial p_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial p_s}{\partial y} \quad (3.33)$$

Відзначимо, що маса елементарного об'єму $dx dy dz$ дорівнює $\rho dx dy dz$ або в ізобаричній системі координат вираз для цієї маси має вигляд $-\frac{1}{g} dx dy dp$ (в виразі $dx dy dz$ диференціал dz отримується із рівняння статики).

Отже, проінтегруємо рівняння (3.30) по масі в границях паралелепіпеда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial t} (E_k + E) dp dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_k + E + \Phi)] dp dx dy + \right. \\ & \left. + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial y} [v(E_k + E + \Phi)] dp dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial x} [\tau(E_k + E + \Phi)] dp dx dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

В рівнянні (3.34) виконаємо спочатку інтегрування по вертикальній координаті p з урахуванням межових умов (3.32), (3.33) і того, що p_s є функцією x, y, t .

$$\begin{aligned} & \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial t} (E_k + E) dp = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} (E_k + E) dp - \frac{\partial p_s}{\partial t} (E_k + E)_s; \\ & \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_k + E + \Phi)] dp = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{p_s} u(E_k + E + \Phi) dp - \frac{\partial p_s}{\partial x} [u(E_k + E + \Phi)]_s; \\ & \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial y} [v(E_k + E + \Phi)] dp = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{p_s} v(E_k + E + \Phi) dp - \frac{\partial p_s}{\partial y} [v(E_k + E + \Phi)]_s; \\ & \int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial p} [\tau(E_k + E + \Phi)] dp = [\tau(E_k + E + \Phi)]_s, \end{aligned}$$

де нижній індекс s у квадратних дужках показує, що величини, які знаходяться в дужках, відносяться до рівня p_s , тобто до поверхні землі. Підставимо тепер отримані співвідношення в (3.34).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} (E_k + E) dp + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{p_s} u(E_k + E + \Phi) dp + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{p_s} v(E_k + E + \Phi) dp - \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} (E_s + E)_s + \right. \right. \\ & \left. \left. + u_s \frac{\partial p_s}{\partial x} (E_k + E + \Phi)_s + v_s \frac{\partial p_s}{\partial y} (E_k + E + \Phi)_s - \tau_s (E_k + E + \Phi)_s \right] \right\} dx dy = 0 \quad (3.35) \end{aligned}$$

Перетворимо вираз в квадратних дужках з використанням нижньої межевої умови (3.33), тобто підставимо (3.33) в останній член в квадратних дужках

$$\begin{aligned}\tau_s(E_k + E + \Phi)_s &= \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial p_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) (E_k + E + \Phi)_s = \\ &= \frac{\partial p_s}{\partial t} (E_k + E) + \Phi_s \frac{\partial p_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial p_s}{\partial x} (E_k + E + \Phi) + v_s \frac{\partial p_s}{\partial y} (E_k + E + \Phi)\end{aligned}\quad (3.36)$$

Бачимо, що в цьому виразі є члени, які подібні членам в квадратних дужках. Ці члени мають від'ємні знаки і тому скорочуються (підкреслені члени в виразах (3.35), (3.36)). Таким чином, в квадратних дужках виразу (3.35) залишається лише один член

$$-\Phi_s \frac{\partial p_s}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_s p_s}{\partial t}.\quad (3.37)$$

В (3.37) враховано те, що Φ_s – геопотенціал підстильної поверхні не залежить від часу t .

Підставимо (3.37) в (3.35)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} (E_k + E) dp + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{p_s} u (E_k + E + \Phi) dp + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{p_s} v (E_k + E + \Phi) dp + \frac{\partial \Phi_s p_s}{\partial t} \right\} dx dy = 0\end{aligned}\quad (3.38)$$

У виразі (3.38) підкреслені члени дорівнюють нулю згідно з бічними межевими умовами (3.31). Дійсно, якщо перший підкреслений інтеграл записати після розкриття фігурних дужок, то отримаємо

$$\frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{p_s} u (E_k + E + \Phi) dp dx dy$$

Оскільки x, y, p – незалежні змінні, порядок інтегрування можна міняти

$\frac{1}{g} \int_0^{p_s} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_k + E + \Phi)] dx dy dp$, але $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_k + E + \Phi)] dx$ дорівнює інтегралу від повного диференціалу, тобто

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_k + E + \Phi)] dx = u \Big|_{x_1}^{x_2} (E_k + E + \Phi) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Після підстановки відповідно до межових умов (3.32) швидкість u при $x = x_1$ та $x = x_2$ дорівнює нулю. Аналогічно можна показати, що і другий підкреслений член у виразі (3.38) дорівнює нулю.

З урахуванням сказаного перепишемо вираз (3.38)

$$\frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} (E_k + E) dp + \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi_s p_s}{\partial t} dx dy = 0 \text{ або}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} (E_k + E) dp dx dy + \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy \right] = 0 \quad (3.39)$$

Оскільки часова похідна дорівнює нулю, вираз в квадратних дужках є сталою, тобто інваріантною величиною.

Для пояснення фізичного змісту цього інваріанта запишемо (3.39) у вигляді $\frac{\partial}{\partial t} (\overline{E_k} + \overline{E} + \overline{p_s \Phi_s}) = 0$, відкіля випливає, що

$$\overline{E_k} + \overline{E} + \overline{p_s \Phi_s} = \text{const}, \text{ де } \overline{E_k} = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} E_k dp dx dy; \overline{E} = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} c_p T dp dx dy \text{ і}$$

$$\text{нарешті } \overline{p_s \Phi_s} = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy.$$

Потенціальна енергія в об'ємі, що розглядається дорівнює

$$\overline{\Pi} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} g z \rho dz dx dy = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} \Phi dp dx dy = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy + \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} R T dp dx dy.$$

Знайдемо суму

$$\overline{E} + \overline{p_s \Phi_s} = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} C_v T dp dx dy + \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{p_s} R T dp dx dy + \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy.$$

Перший інтеграл в цьому виразі являє собою внутрішню енергію E_g , яку містить розглянутий об'єм; сума двох інших інтегралів дорівнює сумарній потенціальній енергії. Таким чином, інваріантна величина для барокліної моделі за повними рівняннями при межових умовах (3.32), (3.33) складається із сумарної кінетичної енергії плоского руху, внутрішньої і потенціальної енергії маси повітря в об'ємі V

$$(\overline{E_k} + \overline{E_g} + \overline{\Pi}) = const. \quad (3.40)$$

Можна показати, що для даної моделі зберігається також маса повітря в області інтегрування. Зміна конфігурації прогностичної області або перехід до другої системи координат не порушують консервативних властивостей диференціальної задачі.

Відмітимо, що для будь-якої моделі при визначених спрощуючих припущеннях (адіабатичність атмосферних процесів, відсутність в'язкості і потоку маси через межі) повинен мати місце хоча б один інтегральний інваріант. Якщо урахувати неадіабатичність або в'язкість, або ставити інші межові умови, інваріантність порушується.

При використанні скінченнорізницевої схем, які володіють властивістю зберігати інтегральні інваріанти диференціальної задачі, з'являється можливість контролювати обчислювальну стійкість процесу чисельного інтегрування рівнянь: бистра зміна (зростання чи зменшення) інваріантів в процесі інтегрування свідчить про незадовільність вибраної схеми інтегрування. В першому випадку загрозою є „вибух” розв'язання (отримання хаотичного набору дуже великих чисел), в другому випадку розв'язання буде дуже швидко затухати, в результаті поля метеовеличин, що прогножуються, можуть виявлятися практично бездивергентними.

3.3 Інваріанти адіабатичного руху

Характерний час τ_0 генерації кінетичної енергії синоптичних процесів має порядок тижня (5-10 діб). В цьому можна переконатися, використовуючи таке співвідношення

$$\tau_0 = \frac{E}{\frac{\partial E}{\partial t}},$$

де E – повна кінетична енергія рухів атмосфери ($E = 10^{21}$ Дж); $\frac{\partial E}{\partial t}$ – швидкість перетворення потенціальної енергії атмосфери в кінетичну ($\frac{\partial E}{\partial t} = 2 \cdot 10^{12}$ кВт).

Типовий час дисипації кінетичної енергії синоптичних процесів приблизно такого ж порядку. Терміни прогнозу $\tau \leq \tau_0$ природно називати короткими, а терміни $\tau > \tau_0$ – довгими. Таким чином, при побудові короткотермінових прогнозів саме за їх визначенням можна не враховувати притоки енергії і її дисипацію, тобто можна використовувати адіабатичне наближення. Для теоретичних досліджень можливість використання адіабатичного наближення особливо важлива через те, що в цьому випадку вихідна система рівнянь добре досліджена і практична реалізація прогностичних моделей, що побудовані на їх базі, не викликає особливих труднощів.

У зв'язку з цим, викликає інтерес розв'язання задач, що пов'язані з використанням адіабатичного наближення в динаміці великомасштабних атмосферних процесів. При розв'язанні таких задач використовуються деякі спеціальні характеристики атмосферних процесів, які при адіабатичних процесах за часом залишаються сталими. Такі характеристики звуться адіабатичними інваріантами. Змінювання їх за часом для атмосферних процесів, що спостерігаються фактично, повинно протікати досить повільно і свідчити про неадіабатичні впливи (тертя, теплообмін). Нижче обговорюються питання про знаходження адіабатичних інваріантів атмосферних процесів.

Задачі, що пов'язані з отриманням адіабатичних інваріантів, є надзвичайно важливими через наступні обставини:

- в інваріантних величинах відображена сутність (фізичний зміст) адіабатичних моделей прогнозу – це їх змістовне „навантаження”;
- при практичній реалізації конкретних прогностичних моделей слід відбирати такі різницеві схеми, які б забезпечили зберігання фізичного змісту прогностичних моделей, тобто були б адекватні диференціальним моделям. Інакше кажучи, адіабатичні інваріанти є також свого роду критерієм (регулятором) різницевих моделей прогнозу.

Для адіабатичних процесів справедливі два закони збереження:

- при русі будь-якого об'єму повітря V в ньому зберігається ентропія $\int S \rho dV$ (S – ентропія, що віднесена до одиничної маси, ρ – густина);

- у об'ємі повітря V , що рухається, зберігається „вихровий заряд” $\int (\vec{\Omega}_a \nabla S) dV$ де $\vec{\Omega}_a = \vec{k}(\Omega_z + 2\omega_z)$ – абсолютний вихор швидкості, тобто закони збереження можна представити у вигляді

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{d(\Omega_a \cdot \nabla S)}{dt} = 0.$$

„Питома завихреність” $q = \frac{(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla S)}{\rho}$ називається потенціальним вихором. Закон збереження $\frac{dq}{dt} = 0$ вперше отриманий Ертелем. Нагадаємо, що ентропія є функцією стану і її повний диференціал дорівнює

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

де dQ – приплив тепла до одиничної маси сухого повітря; T – абсолютна температура. Вираз для питомої ентропії має вигляд

$$S = C_p \ln \theta, \quad (3.41)$$

де θ – потенціальна температура; розмірність $[S] = \text{м}^{-2} \text{с}^{-2} \text{К}^{-1}$.

3.3.1 Закони збереження ентропії і потенціального вихору

Докажемо спочатку консервативність потенціальної температури θ . Випишемо рівняння адіабатичності у вигляді:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p p} \cdot \frac{dp}{dt} = 0$$

або з урахуванням того, що $\frac{R}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{c_v}{c_p} \equiv \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, де $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$, дістанемо

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (3.42)$$

Похідну $\frac{dT}{dt}$ за допомогою рівняння стану ($T = \frac{p}{R\rho}$) можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} \equiv \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho R} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{R\rho^2} \frac{d\rho}{dt}.$$

Тоді підставляючи останню рівність в (3.42), дістанемо

$$\frac{1}{\rho R} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{R\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\rho R} \frac{dp}{dt} = 0.$$

Помножимо обидві частини отриманої рівності на ρR і згрупуємо перший і третій члени

$$\frac{dp}{dt} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0, \text{ або } \frac{1}{\kappa} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$$

або після множення останнього рівняння на $\frac{\kappa}{p}$, дістанемо $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{\kappa}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$.

Останню рівність можна записати у вигляді $\frac{d}{dt}(\ln p) - \frac{d}{dt}(\ln \rho^\kappa) = 0$; або

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0; \text{ із цієї рівності випливає, що не } \frac{1}{\rho} \ln \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const} \text{ або}$$

$\ln \frac{p^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho} = \text{const}$, відкіля випливає сталість відношення

$$\frac{p^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho} = \text{const}. \quad (3.43)$$

Якщо ввести потенціальну температуру:

$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ де $(p_0 = 1000 \text{ гПа})$, то після логарифмування і диференціювання за часом цього співвідношення отримаємо,

$$\ln \theta = \frac{\kappa-1}{\kappa} \ln p_0 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \ln p + \ln T, \quad \frac{d}{dt}(\ln \theta) = \frac{d}{dt}(\ln T) - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{d}{dt} \ln p, \quad \text{або}$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}.$$
 Якщо помножити обидві частини цього рівняння на T , його можна записати в такому вигляді

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{(\kappa-1)T}{\kappa} \frac{dp}{p dt}.$$
 Порівняння цього співвідношення з рівнянням (3.42) показує, що для адіабатичних процесів $\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0$, але оскільки $T \neq 0$, то нулю дорівнює $\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt}$, тобто $\frac{d}{dt}(\ln \theta) = 0$, відкіля випливає, що $\ln \theta \equiv \text{const}$, а це означає, що

$$\theta = \text{const}. \quad (3.44)$$

Якщо перейти до ентропії (S) , то отримаємо

$$dS = c_p d \ln \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = c_p d \ln \theta; \text{ внаслідок (3.43) } \frac{dS}{dt} = 0, \text{ тобто}$$

$$S = \text{const} \quad (3.45)$$

І тоді об'єднуючи (3.43)-(3.45), маємо

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p^\frac{1}{\kappa}}{\rho} \theta = S \equiv \text{const}. \quad (3.46)$$

Перелічені інваріанти отримані тільки на базі рівняння адіабатичності. На основі аналізу рівняння вихору (тобто тільки з рівнянь динаміки атмосфери), в якому відкинуті зсувні члени, а дивергенція замінювалась відповідно до геометричного тлумачення, неважко отримати динамічний інваріант:

$$\Omega_a \cdot \delta S = \text{const}. \quad (3.47)$$

Тут δS – площа поперечного перетину вихрової трубки. Об'єднуючи ці два підходи $\frac{d\Omega_a}{dt} + \Omega_a \cdot D_s = 0$, або через те, що $D_s = -\frac{\partial \tau}{\partial p}$

$$\frac{1}{\Omega_a} \frac{d\Omega_a}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial p} \quad \text{відкіля} \quad \frac{d}{dt}(\ln \Omega_a) = \frac{\partial \tau}{\partial p} \quad (3.48)$$

Тут виключимо τ за допомогою рівнянь квазістатисти і адіабатичності $T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$; $\frac{d(\ln \theta)}{dt} = 0$. З рівняння для потенціальної температури

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad \text{знайдемо абсолютну температуру} \quad T = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad \text{Але з}$$

рівняння статистики в ізобаричній системі координат $T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$. Тоді

$$\theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \text{або} \quad \theta = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}; \quad \text{після}$$

логарифмування виразу для θ отримаємо таку рівність

$$\begin{aligned} \ln \theta &= -\frac{1}{R} \left[\ln p + \ln \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \frac{\kappa-1}{\kappa} \ln p_0 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \ln p \right] = \\ &= -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\ln p_0}{R} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \frac{\ln p}{R} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa} - 1 \right) = \\ &= -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\ln p_0}{R} - \frac{1}{R} \ln \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{\ln p}{\kappa R}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Рівняння адіабатичності $\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0$ або $\frac{d}{dt} \ln \theta = 0$ запишемо в частинних похідних

$$\frac{d}{dt}(\ln \theta) = \frac{\partial}{\partial t}(\ln \theta) + u \frac{\partial}{\partial x}(\ln \theta) + v \frac{\partial}{\partial y}(\ln \theta) + \tau \frac{\partial}{\partial p}(\ln \theta) \equiv 0.$$

Продиференціюємо останнє рівняння по p

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial t} (\ln \theta) + u \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) + v \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta) + \tau \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) + \\ & + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta) + \frac{\partial \tau}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) = 0. \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що сума перших чотирьох членів є повна похідна від функції $\frac{\partial}{\partial p} \ln \theta$, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) \right] + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta) = - \frac{\partial \tau}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta). \quad (3.50)$$

В рівнянні (3.50) сума членів $\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta)$ дорівнює нулю при

$$u = u_g = - \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; v = v_g = - \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial x} (\ell = \text{const}). \text{ Дійсно:}$$

$$- \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta),$$

але в свою чергу, виходячи з (3.49)

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln \theta) = - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = - \frac{1}{R} \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial p}; \quad \frac{\partial}{\partial y} (\ln \theta) = - \frac{1}{R} \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial p}.$$

$$\text{І тоді } \frac{1}{\ell} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial p} \frac{1}{R} \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial p} - \frac{1}{\ell} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial p} \frac{1}{R} \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial p} = 0.$$

Отже, з рівняння (3.50) дістанемо $\frac{\partial \tau}{\partial p} = - \frac{1}{\frac{\partial}{\partial p} \ln \theta} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial p} \ln \theta \right)$. Підставимо

$$\text{вираз для } \frac{\partial \tau}{\partial p} \text{ в рівняння вихору (3.48); } \frac{d}{dt} (\ln \Omega_a) + \frac{d}{dt} \left[\ln \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) \right] = 0,$$

або $\frac{d}{dt} \ln \left[\Omega_a \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) \right] = 0$. Отже, добуток

$$\Omega_a \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) = \text{const} \quad (3.51)$$

є інваріантом. З урахуванням (3.45) рівняння (3.51) можна переписати у вигляді:

$$\Omega_a \frac{\partial S}{\partial p} = \text{const}. \quad (3.52)$$

Відповідно до (3.41) останні інваріанти являють собою потенціальний вихор, тобто

$$q = \Omega_a \frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) \equiv \Omega_a \frac{\partial S}{\partial p} \quad (3.53)$$

Підкреслимо ще раз, що потенціальний вихор і ентропія з часом в повітряній частинці, що рухається, зберігаються, якщо відсутні тертя та теплообмін.

Інваріант (3.53) можна надати і в такій формі. Через те, що

$$\frac{\partial}{\partial p} (\ln \theta) = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}, \quad \text{але} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial}{\partial p}, \quad \text{звідки} \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Оскільки

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}, \quad \text{то} \quad \ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} (\ln p_0 - \ln p), \quad \text{або} \quad \text{після}$$

диференціювання по z дістанемо:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\gamma}{T} + \frac{\rho g R}{c_p p R T} = -\frac{\gamma}{T} + \frac{\gamma_a}{T} = \frac{1}{T} (\gamma_a - \gamma). \quad \text{Тоді}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} (\gamma_a - \gamma); \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\theta}{T} (\gamma_a - \gamma); \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \frac{1}{T} (\gamma_a - \gamma);$$

Останню рівність можна записати у вигляді $\frac{\partial}{\partial p} \ln \theta = -\frac{1}{\rho g T} (\gamma_a - \gamma)$ і з урахуванням (6.51) отримаємо

$$q = \frac{\Omega_a}{\rho} \frac{\theta}{g T} (\gamma - \gamma_a) = \frac{\Omega_a}{g \rho} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} (\gamma - \gamma_a).$$

Як легко бачити розмірність q , тобто $[q] = \text{Кмкг}^{-1}\text{с}$. В більш загальній формі теорема про консервативність q була доведена Ертелем. Нижче приводиться це доведення.

3.3.2 Теорема Ертеля

Нехай деяка скалярна величина задовольняє рівнянню типу

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon. \quad (3.54)$$

Величиною φ може бути будь яка функція, наприклад потенціальна температура θ або масова частка водяної пари q , що задовольняє рівнянням $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon_\theta}{c_p}$; $\frac{dq}{dt} = \varepsilon_q$, де $\varepsilon_\theta, \varepsilon_q$ – питомі притоки тепла і водяної пари. Можна показати, що скалярний добуток абсолютного вихору швидкості $\vec{\Omega}_a$ на повну похідну від градієнта скаляра φ має вигляд

$$\vec{\Omega}_a \frac{d}{dt} (\nabla \varphi) = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \frac{d\varphi}{dt} - [(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V}] \nabla \varphi, \quad (3.55)$$

де, як вказувалося вище,

$$\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega} + 2\vec{\omega}, \quad (3.56)$$

$$\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w. \quad (3.57)$$

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Рівняння абсолютного вихору $\vec{\Omega}_a$ у векторній формі має вигляд:

$$\frac{d\vec{\Omega}_a}{dt} = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) + (\nabla \times \vec{F}). \quad (3.58)$$

де \vec{F} – сила тертя. Перетворимо (3.58) з урахуванням рівняння нерозривності

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (3.59)$$

і залучаючи додатково тотожне співвідношення

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \right) = \frac{d\vec{\Omega}_a}{dt} - \vec{\Omega}_a \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (3.60)$$

Рівняння (3.58) можна переписати з урахуванням (3.59)

$$\frac{d\vec{\Omega}_a}{dt} = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} + (\nabla \times \vec{F}),$$

яке перетворюється із залученням (3.60) до вигляду

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \right) = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} + (\nabla \times \vec{F}), \quad (3.61)$$

або розгорненому вигляді

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}}{\rho} \right) = [(\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}) \cdot \nabla] \vec{V} + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} + (\nabla \times \vec{F}). \quad (3.62)$$

Помножимо (3.61) скалярно на $\nabla \varphi$:

$$\rho \left[\nabla \varphi \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \right) \right] = [(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V}] \nabla \varphi + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} \nabla \varphi + (\nabla \times \vec{F}) \cdot \nabla \varphi. \quad (3.63)$$

Тепер додамо (3.63) і (3.55):

$$\rho \left[\nabla \varphi \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \right) \right] + \vec{\Omega}_a \frac{d}{dt} (\nabla \varphi) = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} \nabla \varphi + (\nabla \times \vec{F}) \cdot \nabla \varphi \quad (3.64)$$

В (3.64) перетворимо ліву частину

$$\rho \left[\nabla \varphi \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \right) \right] + \vec{\Omega}_a \frac{d}{dt} (\nabla \varphi) = \rho \frac{d}{dt} + \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \varphi \right). \quad (3.65)$$

Дійсно $\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \varphi \right) = \frac{\vec{\Omega}_a \cdot \rho}{\rho} \frac{d}{dt} (\nabla \varphi) + \rho \nabla \varphi \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \right)$. Враховуючи (3.65) і (3.54) перепишемо (3.64)

$$\rho \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \varphi \right] = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} \nabla \varphi + (\nabla \times \vec{F}) \cdot \nabla \varphi. \quad (3.66)$$

Скалярний добуток

$$q = \frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{\rho} \left(\Omega_{ax} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Omega_{ay} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Omega_{az} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.67)$$

і зветься потенціальним вихором.

Із (3.66) витікає, що потенціальний вихор в повітряній масі, що рухається, є інваріантом

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad \text{тобто} \quad q = \left(\frac{\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \varphi \right) = \text{const} \quad (3.68)$$

при таких умовах:

- φ також є інваріантом, тому що в (3.54) $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$; наприклад, потенціальна температура θ при адіабатичному процесі або псевдопотенціальна температура θ_p при псевдоадіабатичному процесі; масова частка водяної пари q в ненасиченому вологому повітрі або питомий вологовміст в насиченому;
- сила тертя мала ($F \approx 0$);

- середовище баротропне - $\rho(p)$. В цьому випадку градієнти - $\nabla\rho$ і $-\nabla p$ зберігаються за напрямком (в цьому випадку, як відомо, векторний добуток дорівнює нулю). Цьому задовольняє і менш „жорстка” умова – достатньо поставити умову, щоб величина φ залежала тільки від ρ і p (тобто була термодинамічною функцією $\varphi = \varphi(\rho, p)$). В останньому випадку

$$\nabla\varphi \equiv \text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\nabla\rho + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\nabla p, \quad (3.69)$$

а $(\nabla\rho \times \nabla p) = \nabla \times \varphi$. Але тоді

$$\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv \text{rot grad}\varphi \equiv 0. \quad (3.70)$$

Оскільки поверхня $\varphi = \text{const}$ (зокрема, $\theta = \text{const}$) нахилена під невеликим кутом до горизонтальної поверхні, то $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \gg \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ і

$$q \approx \frac{\Omega_{az}}{\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (3.71)$$

або в нашому випадку

$$q \approx \frac{\Omega_{az}}{\rho} \frac{\partial\theta}{\partial z}. \quad (3.72)$$

Згадуючи, що

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} = \theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}, \quad (3.73)$$

та логарифмуючи і диференціюючи по z (3.73) дістанемо

$$\ln \theta = \ln T + \frac{\kappa - 1}{\kappa} (\ln p_0 - \ln p);$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\gamma}{T} + \frac{R}{c_p} \frac{\rho g}{\rho R T} = -\frac{\gamma}{T} + \frac{1}{T} \frac{g}{c_p} = \frac{1}{T} (\gamma_a - \gamma).$$

Звідси

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} (\gamma_a - \gamma). \quad (3.74)$$

Підставляючи (3.74) в (3.72), дістанемо

$$q = \frac{\Omega_{az}}{\rho} \frac{\theta}{T} (\gamma_a - \gamma) = \frac{\Omega_{az}}{\rho} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} (\gamma_a - \gamma). \quad (3.75)$$

Таким чином, потенціальний вихор, визначений співвідношенням (3.75), також є інваріантом.

Сам термін „потенціальний вихор” навряд чи можна уважати вдалим, оскільки величина q не має розмірність вихору

$$[q] = \frac{c^{-1}}{\kappa^2} \frac{m^3 K}{m} = K m^2 \kappa^2^{-1} c^{-1}.$$

Деякі аргументи на користь такого визначення зводять до того, що згідно (3.67) $\left(q = \frac{\vec{\Omega}_a}{\rho} \nabla \varphi \right)$, якщо при руханні частинки повітря q зберігається, але при цьому відстань між поверхнями $\varphi = const$ збільшується ($\nabla \varphi$ зменшується), то складова вихору $\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho}$ збільшується і, навпаки, при збільшенні $\nabla \varphi$ тобто (відстань між поверхнями $\varphi = const$ зменшується) відношення $\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho}$ зменшується. Величину q , таким чином, можна характеризувати як деякий потенціальний запас завихреності, що пов'язана з градієнтом φ , який може реалізуватися при видаленні поверхонь $\varphi = const$ одна від одної.

Порівнювальний аналіз рівняння (3.61) для $\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho}$ (а, отже, і потенціального вихору) і рівняння (3.58) для абсолютного вихору ($\vec{\Omega}_a$) показує, що дивергенція швидкості вітру не впливає на змінювання

потенціального вихору в протилежність абсолютному і відносному вихору.

Потенціальний вихор відповідно до (3.66) змінюється під впливом: притоку тепла ε (якщо поверхнями φ є ізентропічні поверхні $\theta = \text{const}$) або притоку водяної пари (при $q = \text{const}$); бароклінності атмосфери і сил тертя.

Потенціальний вихор $\frac{\vec{\Omega}_a \nabla \varphi}{\rho}$ називають ще питомою завихреністю, а величину $\int (\vec{\Omega}_a \nabla \varphi) dV$, де V – об’єм – вихровим зарядом.

Оскільки функції φ і Ω_a є адіабатичними інваріантами, тобто консервативними характеристиками рухомих частинок повітря, при адіабатичних процесах, то такі дві незалежні функції зручно прийняти як лагранжеві координати повітряних частинок. Відповідні координатні поверхні роділяють атмосферу на вихрові трубки, через стінки яких повітря не протікає. Отже, адіабатична еволюція атмосфери буде полягати тільки в деформації таких трубок, а передобчислення цих деформацій є основою короткотермінових прогнозів погоди.

Як одну з лагранжевих координат зручно взяти також потенціальну температуру θ . Оскільки θ швидше за все змінюється за вертикаллю, то її можна взяти в якості вертикальної координати. За другу координату можна прийняти питому завихреність $\frac{\vec{\Omega}_a}{\rho}$ (або пропорційну величину, як

наприклад, запропонував О.М. Обухов, $q \approx (\Omega_z + \ell) \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a - \gamma^*} \frac{p^*}{p}$, де $\gamma^*(\theta)$ і

$p^*(\theta)$ – стандартні значення p і γ на поверхнях $\theta = \text{const}$, тобто характеристики стандартної атмосфери). Через те, що $\Omega_a \approx (\Omega_z + \ell)$ і $|\Omega_z| \ll \ell$, а переносний вихор дуже змінюється вздовж меридіану, то $\tilde{\Omega}$ можна використовувати як координату – географічну широту.

На закінчення відзначимо, що в залежності від характеру змін скаляра φ і потенціального вихору q атмосферні процеси можна розділити на два класи:

- повільні (довгоперіодні) рухи глобального синоптичного масштабів, які описуються полями φ і q , і їх повільною еволюцією за часом, а поля інших величин адаптовані до полів φ і q , тобто визначаються за полями φ і q з синхронних співвідношень, що не містять похідні за часом;
- швидкі (короткоперіодні) рухи – звукові, внутрішні і поверхневі гравітаційні та інерційні хвилі, – при яких коливання полів φ і q відсутні (по крайній мірі, в лінійному наближенні).

В останні роки набуває поширення така характеристика завихреності, як енстрофія:

$$\frac{\Omega^2}{\rho} = \frac{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}{\rho}. \quad (3.76)$$

4 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ГІДРОТЕРМОДИНАМІКИ

4.1 Оцінка точності скінченнорізницевою апроксимації похідних

Рівняння гідротермодинаміки, які використовуються для побудови прогностичних моделей атмосфери, належать до нелінійних диференціальних рівнянь. Методів точного розв'язання таких рівнянь не існує (за винятком окремих випадків), тому для їх розв'язання використовуються наближені чисельні методи, одним із яких є метод сіток.

Суть методу сіток полягає у тому, що замість неперервного простору, яким є атмосфера, вводиться дискретний простір, складений із множини точок; неперервний час також замінюється дискретним, тобто множиною точок на осі часу. Сукупності точок просторових і часових мають назву просторово – часових сіток. Положення цих точок, які називаються вузлами сітки, визначається безрозмірними координатами

$$i = \frac{x}{\delta x}, \quad j = \frac{y}{\delta y}, \quad k = \frac{z}{\delta z} \text{ (або } k = \frac{p}{\delta p}, \text{ або } k = \frac{\zeta}{\delta \zeta}), \quad s = \frac{t}{\delta t},$$

де $\delta x, \delta y, \delta z (\delta p, \delta \zeta)$ - кроки за простором (відстань між сусідніми точками на координатних осях); δt - крок за часом, тобто відстань між сусідніми вузлами на осі часу. В методі сіток поля метеорологічних величин замінюються множиною дискретних сіткових значень функцій $f_{i,j,k}^s$.

Сітки можуть розрізнятися за кількістю вузлів, розміром кроків, структурою комірок, а також за способом розташування метеовеличин у вузлах сітки. Оскільки, відповідно до методу сіток, значення метеорологічних величин відомі в дискретних точках, похідні в диференціальних рівняннях можуть бути розраховані тільки за допомогою скінченних різниць.

Похідна, яка представлена як відношення скінченних різниць, називається скінченнорізницевим аналогом цієї похідної, а процедура заміни похідної скінченною різницею – скінченнорізницевою апроксимацією.

Диференціальні рівняння і межові умови, в яких похідні замінені на скінченні різниці, називають скінченнорізницевими схемами. Системи скінченнорізницевих рівнянь називають також чисельними моделями.

Сукупність диференціальних рівнянь гідротермодинаміки і межових умов, які представлені в скінченнорізницевому вигляді на множині вузлів

сітки в області визначення розв'язків, являє собою замкнену систему алгебраїчних рівнянь.

Таким чином, метод сіток дозволяє крайову задачу з початковими умовами для диференціальних рівнянь звести до системи алгебраїчних рівнянь, методи розв'язання яких добре розроблені.

Для подальшого викладення питань з методу сіток зручно ввести замість *неперервних* просторових координат x, y, z (або p) загальну розмірну координату r , якій відповідає безрозмірна координата

$$q = \frac{r}{\delta r},$$

де $\delta r = \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z, \delta p \end{Bmatrix}$ - просторовий крок сітки по відповідних координатних осях;

$q = \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$ - дискретні безрозмірні координати по осях x, y, z (або p).

Загальні координати r або q в принципі можна використовувати для скінченнорізницевого представлення і часових похідних, але ми будемо їх застосовувати в основному для апроксимації просторових похідних.

Відзначимо, що безрозмірні координати сусідніх вузлів сітки, які знаходяться на відстані одного кроку, відрізняються на одиницю, тому що

$$\frac{r + \delta r}{\delta r} = \frac{r}{\delta r} + \frac{\delta r}{\delta r} = q + 1 \quad \text{або} \quad \frac{r - \delta r}{\delta r} = \frac{r}{\delta r} - \frac{\delta r}{\delta r} = q - 1.$$

В чисельних методах найбільш часто використовуються такі формули для заміни похідних:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \frac{1}{\delta r} (f_q - f_{q-1}), \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \frac{1}{\delta r} (f_{q+1} - f_q), \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \frac{1}{2\delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (4.3)$$

де f - будь-яка метеорологічна величина.

В формулах (4.1), (4.2) використано однобічні різниці, а в (4.3) – центральні. Похідні, які отримані за формулами (4.1) - (4.3), можна віднести до будь-якої точки на інтервалах $(q-1) \div q$, $q \div (q+1)$ і $(q-1) \div (q+1)$ відповідно, але найбільш точним буде представлення похідної методом центральних різниць для точки q (рис. 4.1).

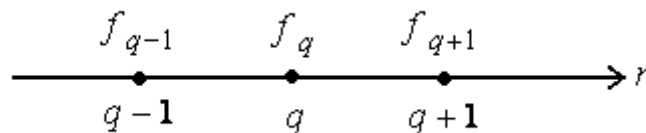


Рис. 4.1 – Розташування вузлів сітки на осі r

Оцінка точності заміни похідних скінченними різницями виконується за допомогою розкладення функції f в ряд Тейлора навколо точки q , тобто функція f розкладається в ряд Тейлора в точці $r \pm \delta r$ для однобічних різниць і в точках $r + \delta r$, $r - \delta r$ - для центральної різниці.

Продемонструємо процедуру оцінювання точності скінченнорізницевої апроксимації (4.1). Для цього представимо функцію f у вигляді ряду Тейлора в точці $r - \delta r$ або $q-1$

$$f_{q-1} = f_q - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \frac{(\delta r)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q \frac{(\delta r)^3}{3!} + \dots \quad (4.4)$$

Точність або помилка скінченнорізницевої апроксимації ε являє собою різницю між похідною, яка представлена в скінченних різницях $\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^a$, і

точним її значенням $\frac{\partial f}{\partial r}$, тобто

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^a - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \quad \text{або} \quad \varepsilon = \frac{f_q - f_{q-1}}{\delta r} - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \quad (4.5)$$

Підставимо ряд (4.4) в вираз для ε (4.5)

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta r} [f_q - f_q + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \delta r - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{3!} - \dots] - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \quad \text{або,}$$

якщо розкрити квадратні дужки і скоротити подібні члени, отримаємо

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{6} - \dots - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q.$$

В цьому виразі похідні $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q$ скорочуються і залишаються члени, які містять другу, третю і так далі похідні. Оскільки порядок кожного наступного члена зменшується, найбільшим членом є перший, тобто $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \cdot \frac{\delta r}{2}$. Саме цей член і визначає точність або помилку апроксимації

однобічної (спрямованої назад) різниці (4.1). Таким же членом визначається точність і спрямованої вперед однобічної різниці (4.2).

Оцінку точності прийнято давати у вигляді порядку (степеня) просторового кроку для просторових похідних або часового кроку – для похідних за часом. Так, для однобічних різниць (4.1), (4.2) точність або помилка апроксимації $\varepsilon = O(\delta r)$ або $\varepsilon = O(\delta t)$, тобто точність дорівнює першому порядку по δr і δt . Апроксимація центральними різницями (4.3) має другий порядок точності $\varepsilon = O((\delta r)^2)$, $\varepsilon = O((\delta t)^2)$.

При обчисленні похідних за допомогою скінченнорізницевого виразів за будь-якими даними може виникати ще одна помилка, яка обумовлена похибками вимірювань метеорологічних величин або помилками розрахунків, за допомогою яких отримані вихідні данні.

Якщо помилки в значеннях функції f в точках, які використовуються при обчисленні похідних, відомі, тоді можна оцінити помилку в визначенні похідної. Так, якщо $(\delta f)_{q+1}$ і $(\delta f)_{q-1}$ - абсолютні величини помилок в значеннях f в точках $q+1$ і $q-1$, і якщо ці величини незалежні (тобто випадкові) і дорівнюють δf , то з їх урахуванням формула (4.3) запишеться у вигляді

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{(f + \delta f)_{q+1} - (f + \delta f)_{q-1}}{2\delta r} = \frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2\delta r} + \frac{2\delta f}{2\delta r} \quad \text{або}$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2\delta r} + \frac{\delta f}{\delta r}$, де $\frac{\delta f}{\delta r}$ – помилка у визначенні центральної різниці за рахунок похибок у вихідних даних.

Таким чином, похідні, які одержані за допомогою наближених виразів і обчислені за конкретними даними, містять помилки двох типів: апроксимації і неточності саміх даних.

4.2 Явні, неявні і напівнеявні скінченнорізницеві схеми

При заміні диференціальних рівнянь, в яких є похідні за часом, скінченнорізницевими аналогами розрізняють явні, неявні і напівнеявні схеми.

Явні – це такі схеми, в яких невідома (шукана) метеорологічна величина (функція) виражається через відомі величини в явному вигляді. Розглянемо цю схему на прикладі лінійного однорідного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (4.6)$$

де f - будь-яка метеорологічна величина; c - швидкість (стала додатна величина). Віднесемо це рівняння до точки q, s , тобто до точки з координатою q за простором і до моменту часу s :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s + c \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^s = 0. \quad (4.7)$$

Якщо до просторової похідної застосовувати центральну різницю, а до похідної за часом – однобічну різницю і центральну, то отримаємо такі скінченнорізницеві рівняння:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0$$

З цих виразів можна отримати значення метеорологічної величини в наступний момент часу f_q^{s+1}

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - c \delta t \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r}; \\ f_q^{s+1} &= f_q^{s-1} - c \delta t \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{\delta r} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Оскільки значення функції f в даний момент часу s і попередній $s-1$ відомі, то за допомогою формул (4.8) можна обчислити функцію f в майбутній момент часу $s+1$:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\alpha}{2}(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s); \quad (4.9)$$

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \alpha(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s), \quad \text{де} \quad \alpha = \frac{c \delta t}{\delta r}. \quad (4.10)$$

Неявні – це такі схеми, в яких шукана функція не може бути виражена через відомі величини явно. В таких схемах похідні за часом і решта членів диференціального рівняння відносяться до різних моментів часу. При цьому можливі різні варіанти апроксимації:

1. Похідна за часом відноситься до моменту s , а решта членів рівняння – до моменту $s+1$, тобто

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_q^s + c \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q^{s+1} = 0. \quad (4.11)$$

Якщо застосувати для апроксимації (4.11) формулу (4.9), то отримаємо таке скінченнорізницеве рівняння:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\alpha}{2}(f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}); \quad (4.12)$$

Із (4.12) видно, що невідомі величини f_q^{s+1} , f_{q+1}^{s+1} , f_{q-1}^{s+1} мають місце і в правій, і в лівій частинах рівняння, тобто шукана функція f_q^{s+1} не визначається тільки через відомі величини, як в формулах (4.9), (4.10), тому схема носить назву неявної.

2. Другий варіант апроксимації отримаємо у випадку, коли похідну за часом віднести до моменту часу s , а решту членів рівняння виразити

через значення функцій в різні моменти часу, включаючи момент $s+1$. Тоді рівняння (4.6) можна записати так

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s-1} \right], \quad (4.13)$$

Якщо тепер в рівнянні (4.13) до похідних застосувати спосіб апроксимації (4.10), отримаємо таку скінченнорізницьову схему

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \frac{\alpha}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1} + f_{q+1}^{s-1} - f_{q-1}^{s-1}). \quad (4.14)$$

Явні схеми (4.9), (4.10) дозволяють сіткову функцію f_q^{s+1} визначити в один захід, тобто шляхом одноразового використання скінченнорізницьового рівняння.

За допомогою неявних схем (4.12), (4.14) не можна обчислити невідому функцію f_q^{s+1} в одній точці q , тому що невідомими в цих схемах є також функції f_{q+1}^{s+1} , f_{q-1}^{s+1} . Однак, якщо застосувати ці схеми для усіх внутрішніх вузлів сітки з індексами $q=1,2,\dots,n-1$ і скористатися межовими умовами у вузлах $q=0$ і $q=n$ (наприклад, у вигляді $f_0^s = f_0^0$; $f_n^s = f_n^0$), то отримаємо замкнену систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими сітковими функціями f_q^{s+1} в усіх внутрішніх вузлах $q=1,2,\dots,n-1$ (n - кількість вузлів сітки на осі r). Розв'язання цієї системи дозволяє обчислити шукані значення сіткової функції f_q^{s+1} в усіх внутрішніх вузлах сітки.

Напівнеявні – це такі схеми, в яких всі лінійні члени або їх частина відносяться до поточного моменту часу s і майбутнього $s+1$ і представляються як осереднені за часом. Наприклад, рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F \quad (4.15)$$

можна представити так: $\frac{\partial f}{\partial t} = F_L + F_{нл}$, де F_L - лінійні члени, а $F_{нл}$ - нелінійні члени рівняння (4.15). За допомогою напівнеявної схеми

інтегрування за часом рівняння (4.15) запишемо у загальному вигляді

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{\delta t}{2} \left[(F_q^s)_l + (F_q^{s+1})_l \right] + (F_q^s)_{nl} \delta t;$$

Тобто в останньому рівнянні лінійні члени відносяться до двох моментів часу: теперішнього часу - s і майбутнього - $s + 1$.

Наведемо приклад напівнеявної схеми для першого рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v. \quad (4.16)$$

Представимо (4.16) у вигляді (4.15), при цьому лінійний член ℓv перенесемо в ліву частину:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = F, \quad (4.17)$$

$$\text{де } F = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right).$$

Напівнеявна схема для рівняння (3.17) буде мати вигляд

$$\frac{u_{i,j,k}^{s+1} - u_{i,j,k}^s}{\delta t} + \frac{\ell}{2} (v_{i,j,k}^s + v_{i,j,k}^{s+1}) = F_{i,j,k}^s. \quad (4.18)$$

Із рівняння (4.18) видно, що до двох моментів часу s та $s + 1$ віднесено тільки один лінійний член, який описує силу Коріоліса; решта членів віднесена до даного моменту s . Якщо в правій частині (4.17) для скінченнорізницевого представлення похідних використати центральні різниці, то функція F набуває вигляду:

$$F_{i,j,k}^s = -\left[u_{i,j,k}^s \frac{(u_{i+1,j,k}^s - u_{i-1,j,k}^s)}{2\delta x} + v_{i,j,k}^s \frac{(u_{i,j+1,k}^s - u_{i,j-1,k}^s)}{2\delta y} + \tau_{i,j,k}^s \frac{(u_{i,j,k+1}^s - u_{i,j,k-1}^s)}{(p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1})} + \frac{\Phi_{i+1,j,k}^s - \Phi_{i-1,j,k}^s}{2\delta x} \right].$$

4.3 Скінченнорізницеві схеми рівнянь гідротермодинаміки та методи їх побудови

Будь-яке неоднорідне диференціальне рівняння можна представити таким чином

$$Lf = \varphi, \quad (4.19)$$

де L - диференціальний оператор (наприклад, такий $\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$); f - невідома функція (розв'язок); φ - задана (відома) функція, або функція, яку можна обчислити за відомими даними. Так, в першому рівнянні руху, яке відповідно до (4.19) можна записати як

$$Lu = F_u, \quad (4.20)$$

оператору L в ізобаричній системі координат відповідає оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial p}$; функції f відповідає зональна складова (u) швидкості вітру, а правій частині – решта членів першого рівняння руху, тобто

$$\varphi \equiv F_u = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell v \right). \quad (4.21)$$

Функцію F_u можна обчислити за початковими даними, тому її можна вважати відомою величиною. В формі (4.19) можна записати не тільки диференціальні рівняння в частинних похідних, але й звичайні диференціальні рівняння як лінійні, так і нелінійні. В рівняннях гідротермодинаміки незалежні величини – це часова і просторова координати. Розглянемо основні питання щодо побудови скінченнорізницевих схем на прикладі рівняння (4.19).

Будемо вважати, що оператор L включає до себе похідні за простором і часом. Просторові незалежні змінні, як і раніше, визначимо через r . З урахуванням цього функції f і φ запишуться у вигляді

$$f = f(r, t); \quad \varphi = \varphi \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right].$$

Розв'язок рівняння (4.19) будемо вивчати в області змін просторових незалежних змінних D , яка окреслена межею Γ і часом D_t

(рис. 4.2). Область D може бути об'ємом (тобто тривимірною областю), поверхнею (у випадку двовимірної задачі) або лінією, якщо задача одновимірна. Згідно з цим, межі Γ для обмежених областей D (тривимірних, двовимірних, одновимірних) являють собою поверхні, лінії, точки. Розв'язок рівняння (4.19) в області D буде однозначним, якщо підкорити його початковим умовам (при $t = t_0$) і умовам на межі Γ , тобто межовим умовам.

В загальному вигляді початкові та межові умови для рівняння (4.19) можна записати так:

- початкові умови: $f(r, t) = f(r, t_0)$ в області D , (4.22)

де t_0 - початковий момент часу, а r змінюється в границях $0 < r < R$;

- межові умови: $f(r, t) = F(r, t)$ на $\Gamma_r \times D_t$, (4.23)

де $F(r, t)$ - значення функції $f(r, t)$ на межах, тобто при $r = 0$ та $r = R$ і $0 < t \leq T$ (рис.4.2).

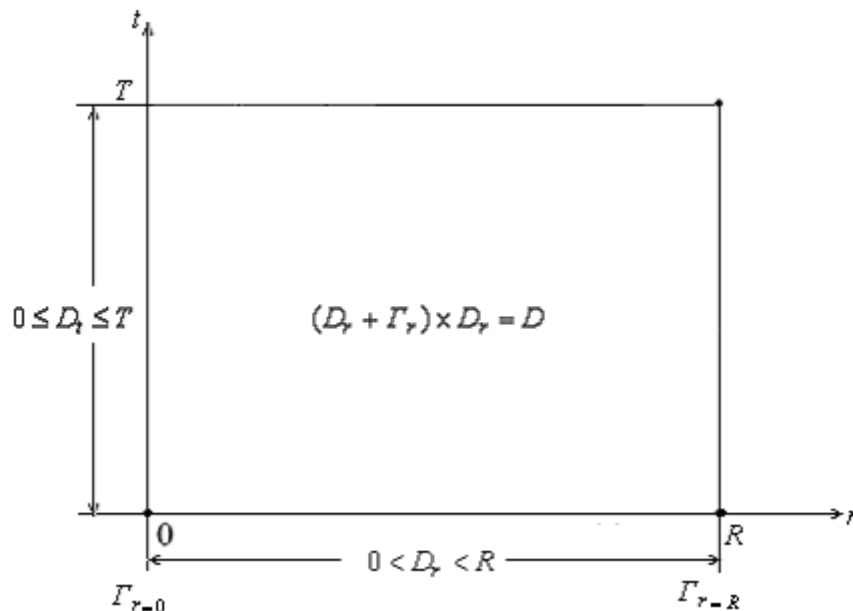


Рис. 4.2 – Неперервна область визначення функції f в площині r, t

Важливо підкреслити, що область визначення шуканої функції $f(r, t)$ є неперервною, тобто координати r, t неперервні і можуть приймати будь-які значення в області визначення функції $f(r, t)$, яка також є неперервною.

Задачу отримання розв'язку диференціального рівняння, яке підкоряється початковим і межовим умовам, називають змішаною крайовою задачею або нестационарною крайовою задачею.

Наближений розв'язок диференціального рівняння, який отримується за допомогою скінченнорізницевого методу, називається

чисельним, а різниця між чисельним f_q^s і точним $f(r,t)$ рішеннями – помилкою чисельного розв’язання ε

$$\varepsilon = f_q^s - f(r,t). \quad (4.24)$$

Оскільки точний розв’язок в загальному випадку невідомий, то невідома і похибка чисельного розв’язання. Однак можна оцінити точність скінченнорізницевої схеми, за допомогою якої одержано чисельний розв’язок. Ця точність характеризується похибкою скінченнорізницевої апроксимації диференціального рівняння.

Пояснимо поняття похибки апроксимації диференціального рівняння скінченнорізницевою схемою на прикладі задачі (4.19), (4.22), (4.23). Для того, щоб скінченнорізницевий метод застосувати до цієї задачі, необхідно неперервні координати r, t замінити дискретними, тобто ввести координати

$$q = \frac{r}{\delta r}, \quad s = \frac{t}{\delta t}.$$

Крім цього, неперервну область $(D_r + \Gamma_r) \times D_t$ зміни аргументів r і t слід замінити дискретною (сітковою) областю, тобто просторово-часовою сіткою $(D_q + \Gamma_q) \times D_s$, вузли якої є точками з координатами q і s . На цій сітці визначаються сіткові функції f_q^s і сітковий оператор L_q .

Таким чином, після скінченнорізницевої апроксимації похідних, диференціальній задачі (4.19), (4.22), (4.23) буде відповідати скінченнорізницева задача

$$L_q f_q^s = \varphi_q^s, \quad \text{де } q = 0, 1, 2, \dots, Q; \quad (4.25)$$

початкові умови: $f_q^s = f_q^0$ в області D_q при $s = 0$,

$$q = 1, 2, \dots, Q - 1; \quad (4.26)$$

межові умови: $f_q^s = F_q^s$ на межі $\Gamma_q \times D_s$, де q приймає значення 0 і Q , а $s = 1, 2, \dots, S$.

$$(4.27)$$

На рисунку 4.3 зображена сіткова область, $(D_q + \Gamma_q) \times D_s$ яка відповідає неперервній області на рисунку 4.2.

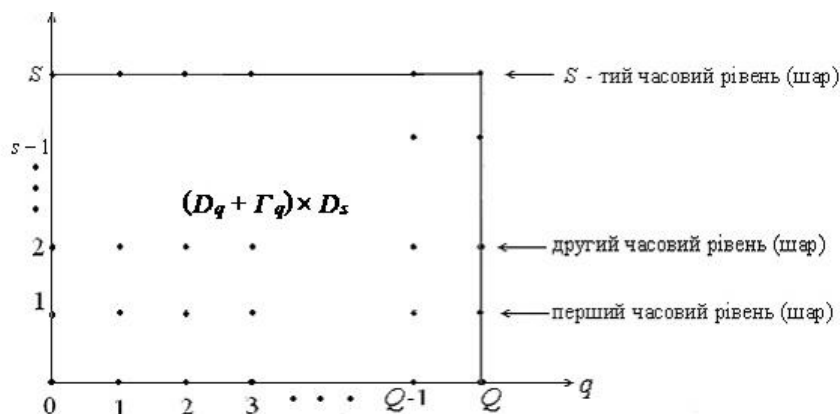


Рис. 4.3 – Дискретна (сіткова) область визначення сіткової функції f_q^s

Розв'язок задачі (4.25) – (4.27) буде близький до точного, якщо схема (4.25) задовольняє умовам обчислювальної стійкості і збіжності.

Апроксимація диференціального рівняння скінченними різницями оцінюється так само, як і апроксимація скінченними різницями похідних, тобто за допомогою розкладення в ряд Тейлора функції $f(q\delta r, s\delta t)$ біля точок з координатами $(q+1)\delta r$ і $(s+1)\delta t$. Після підстановки рядів скінченнорізничевого рівняння із останнього віднімається диференціальне рівняння. Отримана таким способом різниця і є помилкою апроксимації ε диференціального рівняння (4.19) скінченнорізницевим рівнянням (4.25).

Нагадаємо, що помилка апроксимації оцінюється степенем кроків δr і δt в головних із відкинутих членів ряду Тейлора; її називають також порядком точності апроксимації або просто порядком апроксимації. Якщо, наприклад, в головних із відкинутих членів ряду Тейлора δr і δt мають перший степінь, то порядок апроксимації буде першим по δr і δt , тобто $\varepsilon = O(\delta r, \delta t)$.

Якщо скінченнорізницева схема диференціального рівняння має принаймні перший порядок точності апроксимації, то така схема називається узгодженою.

4.4 Критерій обчислюваної стійкості для лінійних диференціальних рівнянь

Перед тим, як пояснити суть методу кроків за часом, надамо деякі визначення, які необхідні для подальшого викладення матеріалу.

Сукупність вузлів просторово-часової сітки, які лежать на площині або на прямій і відповідають фіксованому моменту часу, називаються часовим шаром або рівнем.

За кількістю часових рівнів (шарів) і точок у просторі, які використовуються в скінченнорізницевих схемах, схеми можуть бути двошаровими, тришаровими і т.ін., двоточковими, триточковими тощо.

Для області визначення розв'язку задачі (4.25)...(4.27) часові рівні являють собою сукупність точок на осі r з індексами $q=0,1,2,\dots,Q$ при фіксованому часі t , тобто індексі s . Розташування часових рівнів в двовимірній сітковій області представлено на рисунку 4.3. Видно, що нульовому часовому рівню ($s=0$) відповідають початкові умови (у вузлах $q=1,2,3,\dots,Q-1$), а вузлам $q=0$ і $q=Q$ - межові умови; часовому рівню S відповідає момент часу, на який розраховується прогноз.

Розглянемо реалізацію методу кроків за часом на прикладі лінійного неоднорідного диференціального рівняння адвекції.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = F \quad (c > 0), \quad (4.28)$$

де $f = f(r, t)$ - шукана функція (розв'язок); $F = F(r, t)$ - відома функція; c - швидкість вітру (стала додатна величина).

Початкові і межові умови запишемо у вигляді

$$f(r, t) = f(r, 0) \text{ при } t = 0, \quad 0 < r < R; \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } r = 0 \text{ і } r = R, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.30)$$

Умова (4.30) свідчить про те, що значення функції f на межах, тобто у вузлах $r=0$ і $r=R$ не змінюються з часом, тобто від кроку до кроку за часом.

Скінченнорізницева схема задачі (4.28) – (4.30) має, наприклад такий вигляд

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\delta r} = F_q^s, \quad (4.31)$$

де $q = 0, 1, 2, \dots, Q$; $s = 0, 1, 2, \dots, S$;

Згідно з (4.29), (4.30) початкові та межові умови мають вигляд

$$f_q^s = f_q^0 \text{ при } s = 0; \quad q = 1, 2, \dots, Q - 1. \quad (4.32)$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} = 0 \text{ при } q = 0 \text{ і } q = Q; \quad s = 0, 1, 2, \dots, S \quad (4.33)$$

За допомогою рівняння (4.31), початкових (4.32) і межових (4.33) умов можна послідовно визначити розв'язок на часових рівнях (шарах) $s = 1, 2, \dots, S$ (рис. 4.3).

$$\begin{aligned} f_q^2 &= f_q^1 - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^1 - f_{q-1}^1) + \delta t F_q^1 \\ f_q^2 &= f_q^1 - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^1 - f_{q-1}^1) + \delta t F_q^1, \\ &\text{на деякому часовому рівні} \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \delta t F_q^s, \text{ і т.д.} \end{aligned} \quad (4.34)$$

.....

і, нарешті, на рівні S $f_q^S = f_q^{S-1} - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^{S-1} - f_{q-1}^{S-1}) + \delta t F_q^{S-1}$

де $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, S - час, на який розраховується прогноз.

Із виразів (4.34) видно, що чисельний розв'язок f_q^s задачі (4.31) – (4.33), який визначається на двовимірній сітці, надається набором розв'язків на одновимірних сітках з індексами точок $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, одержаних при фіксованих індексах s . Тобто чисельний розв'язок, визначений на двовимірній сітці в площині ROT, розшарувався і замінився послідовністю розв'язань f^1, f^2, \dots, f^S , які визначаються на одновимірних сітках.

В розглянутій задачі шукана сіткова функція на наступному часовому рівні $s + 1$ в точці q , тобто f_q^{s+1} , однозначно виражається через значення цієї функції на попередньому часовому рівні s у двох точках $q - 1$ і q і відому сіткову функцію F_q .

Відзначимо, що при заміні в рівнянні (4.31) просторової похідної $\frac{\partial f}{\partial r}$ однобічною різницею, спрямованою назад, в розв'язанні (4.34) використовується права межа умова (при $q = 0$), а ліва взагалі не використовується. А якщо скінченнорізницеве представлення похідної виражається через різницю, спрямовану вперед, то в (4.34), використовується лише ліва межа умова (при $q = Q$). Обидві межові

умови в розв'язанні задачі (4.31) – (4.33) будуть задіяні в тому разі, коли похідна $\frac{\partial f}{\partial r}$ виражається через центральні різниці.

Процедури послідовного одержання розв'язань від попереднього часового рівня до наступного називають кроковим методом або методом кроків за часом.

Усі гідродинамічні моделі реалізуються методом кроків за часом. При цьому часові кроки не можна задавати довільно, тому що вони пов'язані з просторовими кроками співвідношенням, яке має назву критерія Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ)

$$K\Phi\Lambda = \frac{c_{\max} \delta t}{\delta r} \leq 1, \quad (4.35)$$

δt - часовий крок; δr - просторовий крок; c_{\max} - максимальна швидкість розповсюдження хвиль, які ураховуються моделлю.

Критерій (4.35) можна записати інакше

$$\delta t \leq \frac{\delta r}{c_{\max}}. \quad (4.36)$$

Наприклад, якщо $\delta r = 300 \text{ км}$, а $c_{\max} \approx 150 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ (з такою швидкістю можуть розповсюджуватися хвилі Россбі), то відповідний цим умовам часовий крок буде дорівнювати

$$\delta t \leq \frac{300 \text{ км}}{150 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}} = 2 \text{ год}.$$

З фізичної точки зору часовий крок, який входить до КФЛ, мусить бути таким, щоб хвилі, враховані моделлю, не встигали впродовж цього кроку виходити за межі області АВ навколо точки прогнозу (рис. 4.4)

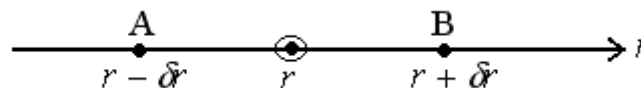


Рис. 4.4 – Околиця АВ точки прогнозу

На рисунку r - точка прогнозу; $r + \delta r$, $r - \delta r$ - сусідні вузли сітки.

Якщо за час δt (тобто за досить великий час) хвиля виходить із області АВ, то її вплив на точку прогнозу модель не ураховує. Отже, якщо модель враховує тільки повільні хвилі, наприклад, Россбі (в геострофічних моделях), то часовий крок може бути досить великим (порядку години або двох). Якщо ж модель враховує швидкі хвилі (наприклад, гравітаційні), то крок може складати всього декілька хвилин.

4.5 Дослідження обчислювальної стійкості на прикладі лінійного рівняння адвекції

Скінченнорізницева схема називається стійкою, якщо її чисельний розв'язок з кожним часовим кроком наближається до точного, тобто чисельний розв'язок обмежений.

Треба відзначити, що розробка стійких скінченнорізницевих схем для нелінійних рівнянь пов'язана зі значними труднощами. Аналіз стійкості можна виконати лише для лінійних або лінеаризованих нелінійних рівнянь, або для деяких простих нелінійних рівнянь. При цьому стійкість скінченнорізницевої схеми для лінеаризованого рівняння не означає, що ця схема буде стійкою для відповідного нелінійного рівняння.

Існує декілька методів дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем. Наприклад, використовується прямий метод, в якому умова стійкості збігається з критерієм стійкості КФЛ. При аналізі стійкості деяких нелінійних скінченнорізницевих схем використовується енергетичний метод.

В даному розділі ми розглянемо метод Неймана, який використовується при аналізі обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем для лінійних диференціальних рівнянь, точні розв'язки яких відомі (наприклад, для лінійних рівнянь адвекції).

Метод Неймана передбачає підстановку точних розв'язків в скінченнорізницеву схему, а аналіз стійкості зводиться до оцінки множника переходу, який зв'язує амплітуди збурень на сусідніх часових рівнях.

Точні розв'язки лінійних рівнянь виражаються сумою частинних розв'язків, які представлені хвильовими гармоніками. Це дозволяє аналізувати стійкість для кожної гармоніки. Стійкість скінченнорізницевої схеми для кожної гармоніки означає стійкість скінченнорізницевої схеми в цілому.

Застосуємо метод Неймана для оцінки обчислювальної стійкості явної схеми лінійного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (c = \text{const}). \quad (4.37)$$

Явну схему інтегрування представимо у вигляді

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\delta r} = 0 \quad (c > 0) \quad \text{або}$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c\delta t}{\delta r}(f_q^s - f_{q-1}^s). \quad (4.38)$$

Введемо позначення $\mu = c \frac{\delta t}{\delta r}$ і перепишемо рівняння (4.38)

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu f_q^s + \mu f_{q-1}^s. \quad (4.39)$$

Точний розв'язок рівняння (4.37) представимо у вигляді хвильової гармоніки, тобто

$$f(r, t) = A(t) e^{ikr}. \quad (4.40)$$

Для дискретних аргументів розв'язок (4.40) має вигляд

$$f_q^s = A^s e^{ikq\delta r} \quad (4.41)$$

Підставимо (4.41) в схему (4.39), скоротимо одержаний результат на множник $e^{ikq\delta r}$, отримаємо

$$A^{s+1} = (1 - \mu + \mu e^{-ik\delta r}) A^s \quad (4.42)$$

Відповідно до формули Ейлера

$$e^{-ik\delta r} = \cos(k\delta r) - i \sin(k\delta r).$$

З урахуванням цього виразу співвідношення (4.42) приймає вигляд

$$A^{s+1} = (1 - \mu + \mu \cos k\delta r - i\mu \sin k\delta r) \cdot A^s. \quad (4.43)$$

Введемо позначення: $(1 - \mu + \mu \cos k\delta r - i\mu \sin k\delta r) = \lambda$, тоді вираз (4.43) можна записати так

$$A^{s+1} = \lambda A^s \quad \text{або} \quad |A^{s+1}| = |\lambda| \cdot |A^s|, \quad (4.44)$$

λ - множник переходу (являє собою комплексне число), $|\lambda|$ - модуль λ .

Відомо, що модуль комплексного числа $a = a_r + ia_i$ дорівнює

$$|a| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2},$$

де a_r - дійсна частина, а a_i - уявна частина величини a .

В нашому випадку $\lambda_r = (1 - \mu + \mu \cos k\delta r)$, а $\lambda_i = \mu \sin k\delta r$, тому

$$|\lambda| = \sqrt{(1 - \mu + \mu \cos k\delta r)^2 + \mu^2 \sin^2 k\delta r} = \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\delta r)} \quad (4.45)$$

Аналіз (5.45) показує, що

при $\mu \rightarrow 0$ ($\delta t \rightarrow 0$) $|\lambda| \rightarrow 1$,

при $\mu > 1$ $|\lambda| > 1$, а (4.46)

при $0 < \mu \leq 1$ $|\lambda| \leq 1$ (4.47)

Із (4.44) видно, що чисельний розв'язок буде обмеженим або стійким, якщо амплітуда з часом не буде зростати, тобто множник переходу буде задовольняти умові $|\lambda| \leq 1$

В точному розв'язку (4.40) амплітуда не змінюється, тому що

$$A(t) = A(0)e^{ikct}, \quad \lambda = e^{ikct} \equiv \cos(kct) + i\sin(kct), \text{ а модуль}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2(kct) + \sin^2(kct)} = 1 \quad (4.48)$$

Якщо $|\lambda| > 1$, то амплітуда чисельного розв'язку необмежено зростає в процесі інтегрування методом кроків за часом.

Таким чином, умова (4.46) означає нестійкість чисельного розв'язання. При виконанні умови (4.47) амплітуда обмежена або не змінюється; ця умова забезпечує обмеженість, тобто стійкість чисельного розв'язання.

В залежності від значення модуля множника переходу $|\lambda|$ схеми поділяються на нестійкі ($|\lambda| > 1$), нейтральні ($|\lambda| = 1$), дисипативні ($|\lambda| < 1$). Умови (4.46), (4.47) збігаються з критерієм лінійної стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві, тому що

$$\mu = c \frac{\delta t}{\delta r}.$$

Схеми, стійкість яких залежить від величини μ (співвідношення), називають умовно стійкими. Схеми, стійкість яких не пов'язана з виконанням яких-небудь умов, називаються абсолютно стійкими.

Оскільки дисипативні і нейтральні схеми забезпечують обмежені розв'язання, то відповідно до визначення обчислювальної стійкості ці схеми слід віднести до стійких.

5 ПРИНЦИПИ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ АТМОСФЕРНИХ ПРОЦЕСІВ ПІДСІТКОВОГО МАСШТАБУ

Відомо, що прогностичні моделі описують перш за все великомасштабні атмосферні процеси, для чисельної реалізації гідродинамічних моделей використовується сітка точок з горизонтальним кроком, який позначимо δr . За допомогою такої сітки ураховуються атмосферні процеси з горизонтальним масштабом $\nu \geq 4\delta r$. Відзначимо що тут і далі масштаб λ ототожнюється з довжиною хвилі відповідних коливань. Отже, якщо крок сітки дорівнює 250 км, то за її допомогою ураховуються процеси, горизонтальні масштаби яких перевищують 1000 км. Якщо горизонтальні масштаби атмосферних процесів менші, то вони залишаються неврахованими. Навіть при значному зменшенні кроку сітки, наприклад до 25 км, „поза моделлю” залишається досить широкий спектр атмосферних процесів. Це всі процеси мікро – і мезомасштабу, які в подальшому будемо називати *процесами підсіткового масштабу*. До таких процесів відносяться процеси променистого, турбулентного і фазового теплообміну, а також процеси конвекції, конденсації, опадоутворення та інші.

Безпосереднє урахування цих процесів в моделях великомасштабних атмосферних рухів не є доцільним з ряду причин. По-перше, включення таких процесів до моделей потребує зменшення кроків сітки до розміру, меншого ніж $\frac{1}{4}$ характерного масштабу явища, що розглядається. Це в свою чергу спричиняє збільшення загальної кількості вузлів сітки. Крім того, відомо, що будь-яка прогностична задача розв’язується кроками за часом, а часові кроки залежать від просторових згідно з критерієм Фрідрікса-Куранта-Леві (ФКЛ). Тому зменшення горизонтальних кроків тягне за собою зменшення і кроків за часом. Таким чином, у випадку урахування „підсіткових” процесів при чисельній реалізації моделі розрахунки виконуються в значно більшій кількості вузлів сітки і для значно більшої кількості кроків за часом. Ця обставина може привести до того, що задачу чисельного інтегрування рівнянь моделі не можна буде реалізувати в рамках відведеного часу, навіть на самих суперпотужних ЕОМ. По друге, не всі процеси мікро – і мезомасштабу можуть бути описані за допомогою точних диференціальних рівнянь, а в такому випадку включення їх в модель стає неможливим.

Для уникнення цих труднощів в гідродинамічних методах прогнозу погоди у сіддесяті-вісімдесяті роки минулого сторіччя вченими був розроблений новий напрямок в удосконаленні чисельних прогнозів, який отримав назву *параметризації атмосферних процесів „підсіткового”*

масштабу. Мета цього напрямку полягає в тому, щоб знаходити зв'язки між фізичними параметрами, які розраховуються при інтегруванні прогностичних рівнянь моделі, з деякими характеристиками сумарного впливу процесів підсіткового масштабу на великомасштабні атмосферні процеси. Тобто під терміном „параметризація” розуміють описання фізичних процесів, які не ураховуються моделлю, шляхом використання параметрів моделі – характеристик великомасштабних процесів.

В рамках параметризації розробляються методи розрахунку таких величин: F_x, F_y – членів рівнянь горизонтального руху, які описують вплив турбулентної в'язкості на прискорення повітряних частинок; $\varepsilon, \varepsilon_n$ – припливів тепла і вологи; R, H, Q – складових теплового балансу та інших змінних, які входять в рівняння прогностичної моделі. Результатом параметризації можуть бути також методи розрахунку і якихось інших величин, наприклад, таких, що входять до межових умов.

Для того, щоб виразити члени, які описують приплив (відтік) тепла, кількості руху, водяної пари та інших субстанцій через незалежні змінні прогностичної моделі, треба добре знати відповідні фізичні процеси і ступінь впливу їх на погоду та клімат. Відомо, що погодоутворювальні процеси формуються за рахунок сил, які діють в атмосфері, тобто під впливом динамічних факторів. Але в формуванні цих процесів велику роль відіграють специфічні форми нагрівання та охолодження атмосфери. На початок розвитку чисельних прогнозів вважалося, що процеси теплообміну відіграють другорядну роль в порівнянні з динамічними ефектами. Це було пов'язано з тим, що рухи синоптичного масштабу, такі, як циклони і антициклони, є переважно нестационарними і їх розвиток відбувається головним чином за рахунок перетворення потенціальної енергії в кінетичну. Але рухи глобального масштабу квазістационарні і генеруються переважно зовнішнім нагріванням і охолодженням, яке пов'язано з розділом суші і моря та динамічними ефектами, що обумовлені орографією. Без відповідного уявлення членів, які описують нагрів і тертя, прогностичні моделі ураховують лише динамічні аспекти, і для рухів глобального масштабу навіть при прогнозі на добу можуть виникати серйозні помилки. Оскільки кліматичні характеристики є результатом квазістационарних атмосферних рухів, то правильне урахування членів, що описують нагрівання і тертя, стає ще більш важливим для відтворення глобального клімату.

Зміни кількості тепла в одиничній масі повітря за одиницю часу за рахунок зовнішнього припливу тепла в рівнянні першого початку термодинаміки можуть бути представлені так

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\rho} (\varepsilon_{\Pi} + \varepsilon_m + \varepsilon_{\phi}), \quad (5.1)$$

де $\varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_m, \varepsilon_{\phi}$ – приплив тепла (до одиничного об’єму за одиницю часу), який обумовлений сонячною та атмосферною радіацією, турбулентною дифузією і фазовими переходами води в атмосфері відповідно.

Аналогічно член \vec{F} , який описує тертя в рівняннях горизонтального руху, може бути представлений у вигляді суми швидкості зміни кількості руху на одиницю маси в результаті великомасштабного тертя \vec{F}_{λ} і переносу \vec{F}_s , яке обумовлене рухами масштабу, меншого ніж крок сітки.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\lambda} + \vec{F}_s, \quad (5.2)$$

Відзначимо, що дисипація кількості руху через процеси тертя біля поверхні землі потрапляє в категорію \vec{F}_{λ} , а вертикальний перенос кількості руху в купчастих хмарах відноситься до \vec{F}_s . Інтегрування сили тертя в усій атмосфері дає від’ємну величину, що свідчить про стік енергії.

В даному розділі розглянемо окремі атмосферні процеси, які ураховуються в прогностичних моделях шляхом параметризації. Нагадаємо ще раз, що під терміном „параметризація” розуміють описання процесів підсіткового масштабу за допомогою параметрів моделі, тобто змінних, які характеризують великомасштабні течії.

5.1 Способи параметризації променистого теплообміну

Практично вся енергія атмосферних рухів генерується завдяки радіації, що приходить від Сонця і скорочено називається *інсоляцією*.

Інсоляція на верхній межі атмосфери складає приблизно $1365 \frac{Вт}{м^2}$ на

площадку $1 м^2$, яка перпендикулярна до сонячного променя, при середній відстані від Землі до Сонця. Це значення відомо як *сонячна стала*. Середній потік сонячної енергії, перпендикулярний до земної поверхні, складає біля $350 \frac{Вт}{м^2}$, тому що площа поверхні в чотири рази більша

площі поперечного перерізу сфери. Із цієї кількості енергії біля 33% відбивається атмосферою та хмарами і частково – земною поверхнею.

Частка енергії у відсотках, яка відбивається назад в космічний простір, називається планетарним *альбедо Землі*. Приблизно 20% енергії поглинається атмосферою і 47% поверхнею Землі.

Вимірювання показують, що середня температура Землі і атмосфери помітно не змінюється від року до року, тому енергія, яка отримується Землею повинна повертатися у космічний простір. Це остаточне повернення енергії відбувається у формі низькотемпературної інфрачервоної радіації із системи Земля – атмосфера і називається *земною радіацією*.

Член ε_{Π} в формулі (5.1), який описує нагрівання або охолодження за рахунок радіації, може бути розділений на дві частини

$$\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_{\Pi\kappa} + \varepsilon_{\Pi\partial} \quad (5.3)$$

де $\varepsilon_{\Pi\kappa}$ – інтенсивність нагрівання за рахунок поглинання інсоляції, а $\varepsilon_{\Pi\partial}$ – інтенсивність нагрівання або охолодження за рахунок довгохвильової радіації, яка випромінюється поверхнею Землі і атмосферою.

Для розрахунку переносу радіації треба знати кількість поглинаючого або випромінюючого газу у вертикальному стовпі з одиничним поперечним перерізом, який розташований між двома розглядуваними рівнями. Ця величина називається *оптичною товщиною або поглинаючою масою*. Найчастіше ураховуються три основні поглинаючі гази в атмосфері: водяна пара, вуглекислий газ та озон. Оптична товщина поглинаючого газу може бути обчислена, якщо відомий його об'ємний вміст як функція висоти.

Швидкість нагрівання внаслідок поглинання інсоляції може бути записана у вигляді

$$\varepsilon_{\Pi\kappa} = \frac{\partial s(z)}{\partial z} \quad (5.4)$$

де $s(z)$ – спрямований до низу потік сонячної енергії, який досяг деякого рівня z і змінився в результаті поглинання основними поглинаючими газами і відбивання внаслідок розсіювання атмосферними молекулами, порохом та хмарами.

Інтенсивність нагрівання (охолодження), яке обумовлено довгохвильовою радіацією $\varepsilon_{\Pi\partial}$, можна виразити такою формулою

$$\varepsilon_{\Pi\theta} = -\frac{\partial}{\partial z} [F^{\uparrow}(z) - F^{\downarrow}(z)], \quad (5.5)$$

де $F^{\uparrow}(z), F^{\downarrow}(z)$ – сумарні довгохвильові потоки на висоті z , які спрямовані відповідно уверх та униз. При ясному небі ці потоки можна розрахувати, якщо відомі поглинаючі властивості атмосфери, яка містить водяну пару та вуглекислий газ, і якщо відомий вертикальний розподіл тиску та температури.

В теперішній час існує велика кількість способів урахування променистого теплообміну в прогностичних і циркуляційних моделях атмосфери, але ми будемо розглядати класичні, способи, які найбільш зрозумілі з точки зору фізики процесів переносу і перетворення променистої енергії в системі Земля – атмосфера.

5.1.1 Плоскопаралельна модель переносу радіації

В цій моделі, яка відома як модель Шварцшильда – Емдена, вважається, що радіація може бути представлена у вигляді плоскопаралельних потоків довгохвильової низхідної F^{\downarrow} і висхідної F^{\uparrow} радіації і короткохвильової низхідної радіації S . Рівняння переносу для вказаних потоків запишуться у вигляді

$$\frac{\partial F^{\downarrow}}{\partial z} = \alpha \rho_{\Pi} (F^{\downarrow} - B); \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial F^{\uparrow}}{\partial z} = \alpha \rho_{\Pi} (B - F^{\uparrow}); \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\beta \rho_{\Pi}}{\cos \theta_0} S, \quad (5.8)$$

де α і β – інтегральні коефіцієнти поглинання для потоків довгохвильової і короткохвильової радіації відповідно; ρ_{Π} – густина поглинаючої речовини; $B = \sigma T^4$ – інтегральний потік випромінювання абсолютно чорного тіла при абсолютній температурі T ; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}^4}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ – стала Стефана – Больцмана; θ_0 – зенітний кут Сонця.

Для розв'язання системи (5.6)-(5.8) задаються межові умови у вигляді:

нижня межа умова (НМУ)

$$\text{при } z=0 \quad B = \delta \sigma T_o^4; \quad (5.9)$$

верхня межа умова (ВМУ)

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad F^\downarrow = 0; \quad s = S^0(1 - \bar{A})\cos\theta_0. \quad (5.10)$$

В формулах (5.9), (5.10) δ – відносна випромінювальна здатність підстильної поверхні для довгохвильової радіації, T_0 – температура земної поверхні, S^0 – сонячна стала, \bar{A} – альbedo системи Земля – атмосфера; θ_0 – зенітна відстань Сонця.

Якщо ввести змінну

$$u = \int_0^z \rho_n dz' \quad (5.11)$$

розв'язання рівнянь (5.6)-(5.8) при межових умовах (5.9)-(5.10) запишеться у вигляді

$$F^\downarrow(u) = -\alpha \int_u^{u_\infty} e^{-\alpha(u'-u)} B(T) du'; \quad (5.12)$$

$$F^\uparrow(u) = \delta \sigma T_0^4 e^{-\alpha u} + \alpha \int_0^u e^{-\alpha(u-u')} B(T) du'; \quad (5.13)$$

$$S(u) = S^0(1 - \bar{A}) \cdot \cos\theta_0 e^{-\beta(u_\infty - u)}. \quad (5.14)$$

В формулах (5.11)-(5.14) u' – поглинаюча маса, яка являє собою кількість поглинаючої речовини в стовпі атмосфери з одиничним поперечним перерізом висотою від земної поверхні до будь-якого рівня z' ; ρ_n – густина поглинаючої речовини. Для довгохвильової радіації – це густина водяної пари, а для короткохвильової – густина озону. Із розв'язків (5.12)-(5.14) видно, що u є змінною інтегрування, тобто інтегрування рівнянь переносу радіації виконується по поглинаючих масах.

На основі рівнянь (5.6)-(5.8) отримаємо таке рівняння для припливу тепла до одиничного об'єму за рахунок променистого теплообміну

$$\varepsilon_n = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (S + F^\downarrow - F^\uparrow)}{\partial z} = \alpha \rho_n (F^\downarrow + F^\uparrow - 2B) + \beta \rho_n^s S. \quad (5.15)$$

В (5.15) R – радіаційний баланс на будь-якому рівні. Як видно із формули (5.15), він являє собою різницю висхідних і нисхідних потоків радіації.

Більш детальна параметризація переносу променистої енергії на основі плоскопаралельної моделі запропонована була Г.І. Марчуком, який увів в розглядання окремі спектральні інтервали i . Рівняння переносу променистої енергії в такому випадку записуються у вигляді

$$\frac{\partial F_i^\downarrow}{\partial z} = \alpha_i \rho_n (F_i^\downarrow - B), \quad \frac{\partial F_i^\uparrow}{\partial z} = \alpha_i \rho_n (B - F_i^\uparrow), \quad \frac{\partial S_i}{\partial z} = \frac{\beta_i \rho_n}{\cos \theta_0} S_i, \quad (5.16)$$

де індексом i позначені величини, які відносяться до певного спектрального інтервалу. В якості межових умов використовуються такі:

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad F_i^\downarrow = 0, \quad S_i = \chi_i S^0 \cos \theta_0; \quad (5.17)$$

$$\text{при } z = 0 \quad F_i^\uparrow = \eta_i B(T_0), \quad (5.18)$$

де χ_i та η_i – частки довгохвильової і сонячної радіації у відповідному спектральному інтервалі. Розв'язання рівнянь (5.16) при межових умовах (5.17), (5.18) можна записати у вигляді

$$F_i^\downarrow(z) = \alpha_i \int_0^\infty B(T) e^{-\alpha_i \int_z^{z'} \rho_n dz''} \rho_n dz';$$

$$F_i^\uparrow(z) = \eta_i B(T_0) e^{-\alpha_i \int_0^z \rho_n dz''} + \alpha_i \int_0^z B(T) e^{-\alpha_i \int_{z'}^z \rho_n dz''} \rho_n dz';$$

$$S_i(z) = \chi_i S_0 \cos \theta_0 \cdot e^{-\frac{\beta_i}{\cos \theta_0} \int_z^\infty \rho_n dz''},$$

де z' і z'' – змінні інтегрування.

Радіаційний баланс на висоті z являє собою результат підсумування за усіма спектральними інтервалами

$$R = \sum_{i=1}^n (S_i + F_i^{\downarrow} - F_i^{\uparrow}),$$

де n – кількість інтервалів.

5.1.2 Параметризація променистого теплообміну на основі інтегральних функцій пропускання

Під інтегральною функцією пропускання $P(\zeta)$ розуміють відношення повного потоку радіації $F(z)$, який надходить до шару товщиною δz , що містить у собі масу ζ поглинаючих і випромінюючих речовин, до повного потоку радіації, виходячого із цього шару - $F(z + \delta z)$, тобто відношення

$$P(\zeta) = \frac{F(z)}{F(z + \delta z)}. \quad (5.19)$$

Такі функції пропускання можуть бути визначені за допомогою спеціальних експериментів та розрахунків.

Для довгохвильової радіації відомі інтегральні функції пропускання (Шехтер Ф.Н.)

$$P(\zeta) = 0,471 \cdot e^{-0,696\sqrt{\zeta}} + 0,529 \cdot e^{-8,94\sqrt{\zeta}} \quad (5.20)$$

та Х. Нійліск

$$P(\zeta) = 0,515 \cdot e^{-0,8\sqrt{\zeta}} + 0,485 \cdot e^{-2,0\sqrt{\zeta}} \quad (5.21)$$

Процес переносу короткохвильової радіації може описуватись за допомогою функції пропускання В. Меллера та В.Г. Кастрова

$$P_k(\zeta) = 1 - 0,09\zeta^{0,303} \quad (5.22)$$

При використанні інтегральних функцій пропускання для повних (інтегральних) потоків радіації і припливу тепла до одиниці об'єму (ε_{Π}) мають місце такі вирази

$$F^{\downarrow}(u) = - \int_u^{u_{\infty}} B(T) dP(u' - u); \quad (5.23)$$

$$F^{\uparrow}(u) = \delta B(T_0)P(u) + \int_0^u B(T)dP(u-u') - (1-\delta) \int_0^{u_{\infty}} B(T)dP(u'+u); \quad (5.24)$$

$$S(u) = S_0(1 - \bar{A})\cos\theta_0 P_k\left(\frac{u_{\infty} - u}{\cos\theta_0}\right); \quad (5.25)$$

Відомо, що приплив (стік) променистої енергії до одиничного об'єму за одиницю часу дорівнює похідній від радіаційного балансу по вертикальній координаті z , тобто

$$\varepsilon_L = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(S + F^{\downarrow} - F^{\uparrow})}{\partial z}. \quad (5.26)$$

Відмітимо, що в співвідношеннях (5.23)-(5.25) в поглинаючих масах u , u' урахується тільки кількість водяної пари. Кількість інших поглинаючих і випромінюючих речовин (вуглекислий газ та озон) ураховуються за допомогою коефіцієнтів, які входять в формули для функції пропускання; u та u' маса водяної пари в стовпі атмосфери одиничного поперечного перерізу висотою від земної поверхні ($z=0$) до розрахункового рівня z та будь-якого рівня z' відповідно; u_{∞} – маса водяної пари в стовпі від поверхні землі до рівня, який вважається верхньою межею атмосфери; θ_0 – зенітна відстань Сонця. Як видно із формул (5.23)-(5.25), ζ приймає значення u , $(u-u')$, $(u'-u)$, $(u'+u)$.

Методи параметризації, що розглянуті, можуть бути узагальнені для випадків хмарної атмосфери. Найбільш просто це робиться для нескінченних по горизонталі хмарних шарів. Уважаючи, що в самій хмарі ефективне випромінювання $F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$ і потік короткохвильової радіації S дорівнюють нулю, можна проінтегрувати рівняння переносу променистої енергії окремо для надхмарної і підхмарної частин атмосфери і для хмарних шарів. Потім можна розраховувати для кожного рівня радіаційний баланс і приплив тепла до окремих шарів.

У випадку несутільної хмарності розрахунок припливу тепла може бути виконаний в два етапи: на першому етапі розраховується приплив тепла для ясного неба, а на другому – для суцільній хмарності. Приплив тепла при кількості хмар описується співвідношенням

$$\varepsilon_L^{\bar{N}} = \frac{N}{10} \varepsilon_L^{10} + \left(1 - \frac{N}{10}\right) \varepsilon_L^0, \quad (5.27)$$

де N – кількість хмар в балах, ε_l^{10} , ε_l^0 - приплив тепла для суцільної хмарності і ясного неба відповідно.

5.1.3 Методика розрахунку припливу тепла за рахунок довгохвильової радіації

Як видно із формули (5.26), для розрахунку припливу тепла, який обумовлений перетворенням в атмосфері довгохвильової радіації, треба спочатку обчислити потоки цієї радіації F^\uparrow та F^\downarrow за формулами (5.23), (5.24).

Для побудови алгоритму розрахунку вказаних величин зручно ввести поняття оптичної товщини шару атмосфери ζ , яка дорівнює масі поглинаючої речовини в шарі атмосфери між розрахунковим рівнем і випромінюючим, тобто ζ – це товщина шару, яка виражається кількістю поглинаючої речовини у відповідному атмосферному шарі (в нашому випадку поглинаюча речовина – це водяна пара).

Отже в залежності від того, для якої радіації розраховуються потоки, оптична товщина ζ може набувати таких значень:

для висхідної радіації F^\uparrow $\zeta = m - u$;

для нисхідної F^\downarrow $\zeta = u - m$;

для відбитої радіації $\zeta = u + m$,

де $u \equiv m$ – це поглинаюча маса для розрахункового рівня, тобто маса водяної пари у вертикальному стовпі атмосфери з одиничним поперечним перерізом, який розташований між підстильною поверхнею та розрахунковим рівнем. Якщо розрахунковим рівнем є поверхня землі, то $u \equiv m = 0$; для верхньої межі атмосфери $u \equiv m = M$, де M – маса водяної пари в стовпі атмосфери з одиничним поперечним перерізом від поверхні землі до верхньої межі атмосфери.

З урахуванням перелічених позначень формули (5.23), (5.24) переписуться у вигляді

$$F^\downarrow(m) = - \int_m^M B(T) dP(u - m). \quad (5.29)$$

$$F^\uparrow(m) = B(T_0)P(m) + \int_0^m B(T) dP(m - u) + (1 - a) \int_0^M B(T) dP(u + m). \quad (5.30)$$

В формулах (5.29), (5.30) величина $u = \int_0^{z'} \rho_n \sqrt{\frac{p}{p_0}} dz'$ – це ефективна

поглинаюча маса, тобто поглинаюча маса з урахуванням залежності поглинаючої здатності атмосфери від атмосферного тиску; $B(T)$ – інтегральний потік випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі T ; T_0 – температура земної поверхні; $P(\zeta)$ – функція пропускання для довгохвильової радіації (5.20) або (5.21).

Як видно з формули (5.29), нисхідний потік довгохвильової радіації складається з випромінювання усіх рівнів, які розташовані вище розрахункового рівня m , тому $u - m > 0$.

Щодо рівняння (5.30), то його перший член описує випромінювання підстильної (земної) поверхні, яке досягає розрахункового рівня m , другий – власне випромінювання шару атмосфери між земною поверхнею та рівнем m , яке складається із випромінювання всіх рівней, що знаходяться нижче розрахункового ($m - u > 0$). Внесок кожного рівня пропорційний випромінюванню абсолютно чорного тіла при відповідній температурі та приращенню функції пропускання в нескінченно тонкому шарі du . Третій член рівняння (5.30) описує долю відбитої від земної поверхні довгохвильової радіації, яка надійшла від шару атмосфери оптичної товщини u , відбилася від земної поверхні і досягла розрахункового рівня m .

Формули (5.29), (5.30) спрощуються для двох граничних випадків, а саме:

1) – на верхній межі атмосфери, де $m = M$, висхідний потік який складається із випромінювання земної поверхні та всієї атмосфери

$$F^{\uparrow}(M) = B(T_0)P(M) + \int_0^M B(T)dP(M - u). \quad (5.31)$$

Низхідний потік на верхній межі атмосфери відсутній, тобто

$$F^{\downarrow}(M) = 0. \quad (5.32)$$

Ефективне випромінювання являє собою різницю між висхідною та низхідною радіацією ($F_{ef} = F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$) і в цьому випадку збігається з випромінюванням, яке йде в світовий простір.

$$F_{ef}(M) = F^{\uparrow}(M); \quad (5.33)$$

2) – на підстильній поверхні $m=0$.

Висхідний потік являє собою власне випромінювання земної поверхні

$$F^{\uparrow}(0) = B(T_0). \quad (5.34)$$

Нисхідний потік або противипромінювання атмосфери

$$F^{\downarrow}(0) = \int_M^0 B(T) dP(\zeta) \quad (5.35)$$

Ефективне випромінювання підстильної поверхні

$$F_{ef}(0) = B(T_0) - F^{\downarrow}(0) \quad \text{або} \quad F_{ef}(0) = B(T_0) - \int_M^0 B(T) dP(\zeta) \quad (5.36)$$

Відомо, що при чисельному інтегруванні (а в нашому випадку розрахунки можна виконувати лише таким способом) інтеграли замінюються сумами, тому обчислення ефективних поглинаючих мас здійснюється за формулою

$$u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha \left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right) \cdot \left(\frac{P_k}{P_{cm}} \right)^{\frac{1}{2}} (P_{k+1} - P_k), \quad (5.37)$$

де $\alpha = 3,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^2$ – коефіцієнт, який отримується при переході від густини водяної пари ρ_n до її масової частки q і заміні змінної інтегрування z на P у формулі (5.11); k – номер рівня, для якого розраховується поглинаюча маса u ; n – кількість рівнів; P_k, P_{k+1} – атмосферний тиск на рівнях k і $k+1$ відповідно; $P_{cm}=1000$ гПа. Нагадаємо, що поглинаючі маси, які обчислюються з урахуванням впливу тиску повітря, називаються ефективними. Формула (5.37) вказує на те, що чисельне інтегрування виконується з використанням методу трапецій.

Формули (5.23) для $F^{\uparrow}(u)$ і (5.24) – для $F^{\downarrow}(u')$ з урахуванням закону Стефана – Больцмана при використанні методу трапецій можна представити у вигляді

$$F^{\downarrow}(u_k) = \sum_{i=k}^{k+h} \frac{\sigma}{2} (T_i^4 + T_{i+1}^4) [P(u_i - u_k) - P(u_{i+1} - u_k)]; \quad (5.38)$$

$$F^{\uparrow}(u_k) = \sigma T_0^4 P(u_k) + \sum_{i=k}^{k-h} \frac{\sigma}{2} (T_i^4 + T_{i-1}^4) [P(u_k - u_i) - P(u_k - u_{i-1})]; \quad (5.39)$$

В формулах (5.38), (5.39) k – номер розрахункового рівня; змінна $h=1,2,3,\dots,n$, де n – кількість рівнів, які розташовані вище розрахункового рівня k в формулі (5.38) і нижче – в формулі для висхідної довгохвильової радіації (5.39); $u_k \equiv u'$ – поглинаюча маса або оптична товщина розрахункового рівня.

Ефективне випромінювання або інтегральний повний потік довгохвильової радіації на розрахунковому рівні k обчислюється за формулою

$$F_{ef}(u_k) = F^{\uparrow}(u_k) - F^{\downarrow}(u_k). \quad (5.40)$$

Приплив тепла за рахунок довгохвильової радіації на будь-якому k -тому рівні можна розрахувати, якщо відомі значення ефективного випромінювання на усіх n рівнях. Отже,

$$\varepsilon_k = - \left(\frac{\partial F_{ef}}{\partial z} \right)_k = - \frac{(F_{ef})_{k+1} - (F_{ef})_k}{z_{k+1} - z_{k-1}}, \quad (5.41)$$

де $k=0,1,2,3,\dots,n-1$.

Відмітимо, що *приплив (відтік)* будь-якої субстанції (водяної пари, радіації, тепла, вологи і т.ін.) виражається через дивергенцію сумарного потоку відповідної субстанції. Наприклад, приплив тепла

$$\varepsilon_m = -\text{div} \vec{Q} = - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right),$$

де \vec{Q} – сумарний потік тепла який виникає під дією якихось факторів; Q_x, Q_y – потоки тепла в горизонтальній площині; Q_z – вертикальний потік тепла. Коли мова йде про променистий потік тепла; то можна нехтувати горизонтальними потоками радіації, тому що вони компенсуються протилежно спрямованими потоками і тоді в формулі для припливу тепла за рахунок променистого теплообміну залишається лише похідна за

вертикальною координатою z . Пояснимо це за допомогою формул. Позначимо сумарний *потік* довгохвильової радіації через \vec{F}_{dx} тоді приплив тепла за рахунок цієї радіації запишеться у вигляді

$$\varepsilon_{dx} = -\operatorname{div} \vec{F}_{dx} = -\left[\frac{\partial (F_{dx})_x}{\partial x} + \frac{\partial (F_{dx})_y}{\partial y} + \frac{\partial (F_{dx})_z}{\partial z} \right],$$

де $(F_{dx})_x, (F_{dx})_y, \partial (F_{dx})_z$ – потоки довгохвильової радіації по осях x, y, z відповідно. Згідно з законом Стефана – Больцмана випромінювання кожної частинки повітря пропорційне четвертому степені абсолютної температури повітря. Оскільки в горизонтальній площині температура змінюється в значній мірі менше, ніж у вертикальній, то можна вважати, що горизонтальні потоки компенсуються протилежно спрямованими потоками майже однакової інтенсивності. В такому випадку

$$\varepsilon_{dx} = -\frac{\partial (F_{dx})_z}{\partial z}.$$

В нашому випадку вертикальний потік довгохвильової радіації $(F_{dx})_z = F^\uparrow - F^\downarrow$, тобто

$$\varepsilon_{dx} = -\frac{\partial}{\partial z} (F^\uparrow - F^\downarrow) = -\frac{\partial F_{ef}}{\partial z}$$

Радіаційний баланс для довгохвильової радіації є величина обернена F_{ef} , тобто

$$R_{dx} = -F_{ef} \text{ або } R_{dx} = -(F^\uparrow - F^\downarrow) = (F^\downarrow - F^\uparrow)$$

З використанням радіаційного балансу R_{dx} приплив тепла за рахунок довгохвильової радіації розраховується за формулою

$$\varepsilon_{dx} = -\frac{\partial R_{dx}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (F^\downarrow - F^\uparrow).$$

Таким чином, для розрахунку функції пропускання $P(\zeta)$, потоків $F_k^\uparrow, F_k^\downarrow$, ефективного випромінювання $(F_{ef})_k$ і припливу тепла ε_k на будь якому рівні k треба виконати такі дії:

1. Привести формули для u_k , $F_k^\uparrow, F_k^\downarrow$ та ε_k до робочого вигляду, тобто всі сталі величини з урахуванням їх порядків і розмірностей звести до одного коефіцієнту так, щоб для вказаних величин отримати такі розмірності:

$$[u] = \frac{\kappa \mathcal{Z}}{m^2}; \quad [F] = \frac{Bm}{m^2}; \quad [\varepsilon] = \frac{Bm}{m^3}.$$

2. За даними радіозондування (варіанти пропонується викладачем) розрахувати масову частку водяної пари q для всіх рівнів k .

3. Розрахувати δu , тобто поглинаючі маси між рівнями, які визначені даними радіозондування.

4. Для всіх рівнів розрахувати поглинаючі маси u .

5. Для розрахункового рівня, вказаного викладачем, обчислити функцію ζ , яка приймає значення u_k , $(u_k - u_i)$, $(u_i - u_k)$ або відповідно $-m$, $(u - m)$, $(m - u)$.

6. Розрахувати функцію пропускання $P(\zeta)$ для довгохвильової радіації за формулою Ф. Шахтер.

7. За даними про абсолютну температуру і функцію пропускання для всіх n рівнів розрахувати потоки висхідної F^\uparrow і нисхідної F^\downarrow радіації для розрахункового рівня u_k або m .

8. За формулою (5.40) обчислити ефективне випромінювання F_{eff} .

9. Нарешті, обчислити приплив тепла, пов'язаний з довгохвильовим випромінюванням земної поверхні і шарів атмосфери, що розташовані вище і нижче розрахункового рівня (формула 5.41).

Із формули (5.41) випливає, що температура повітря на розрахунковому рівні буде збільшуватися за рахунок довгохвильової радіації, якщо потік F^\downarrow буде більший ніж F^\uparrow .

Розрахунки короткохвильової радіації для безхмарної атмосфери зводяться до обчислення потоку прямої радіації, який завжди є нисхідний. Як видно із формули (5.25), для обчислення S на рівні u_k (тобто m) треба розрахувати функцію ζ , яка для випадку короткохвильової радіації набуває значення $\frac{(M - m)}{\cos \theta_0}$, і за формулою Кастрова знайти функцію

пропускання $P(\zeta)$, а потім з урахуванням сонячної сталої, зенітної відстані Сонця та альbedo системи Земля – атмосфера отримати значення потоку короткохвильової радіації S .

Отже, при безхмарному небі радіаційний баланс складається із потоків довгохвильової радіації, які розраховуються за формулами (2.10), (5.39), і потоку короткохвильової радіації S . Променистий приплив тепла

ε_{np} визначається через похідну по вертикальній координаті z від радіаційного балансу

$$\varepsilon_{np} = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (F \downarrow + S - F \uparrow) \quad (5.42)$$

Таким чином, по прогностичних полях температури і водяної пари які розраховуються в гідродинамічних моделях для багатьох рівнів, можна обчислити потоки довгохвильової і короткохвильової радіації та оцінити променистий приплив тепла ε_{np} .

5.2 Параметризація процесів турбулентного обміну

З курсу „Теорія граничного шару атмосфери” відомо, що рівняння гідротермодинаміки для турбулентної атмосфери отримуються шляхом осереднення рівнянь для миттєвих величин за допомогою правил осереднення Рейнольда. В результаті в осереднених рівняннях з’являються члени, які описують сили турбулентної в’язкості, турбулентний приплив тепла та водяної пари.

Отже, запишемо систему рівнянь для турбулентної атмосфери відносно осереднених величин \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{T} , при цьому знак осереднення опустимо.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + l_v - l_1 w + F_x; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - l u + F_y; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + l_1 u + F_z; \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{C_p P} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{C_p \rho} (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{\Phi}) + \frac{1}{C_p \rho} \varepsilon_T;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \varepsilon_{II} + \frac{1}{\rho} \varepsilon_{III}.$$

де q – масова частка водяної пари, ε_{Π} – приплив водяної пари за рахунок молекулярного вологообміну.

В системі (5.43) прийняті також такі позначення

$$\begin{aligned} F_x &= -\left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial z}\right); \\ F_y &= -\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial z}\right); \\ F_z &= -\left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

є складовими сили турбулентної в'язкості, які віднесені до одиничної маси. Величини

$$\varepsilon_T = -C_p \rho \left(\frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} \right); \quad (5.45)$$

$$\text{та} \quad \varepsilon_{\Pi T} = -\rho \left(\frac{\partial \overline{u'q'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'q'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'q'}}{\partial z} \right); \quad (5.46)$$

являють собою припливи тепла та водяної пари, віднесених до одиничного об'єму і обумовлених переносом внутрішньої енергії і водяної пари турбулентними вихорами. Всі величини F , ε_T , $\varepsilon_{\Pi T}$ визначаються методами параметризації. В розділі 5.1 були розглянуті найбільш прості методи параметризації променистого теплообміну, тобто методи визначення величини ε_{Π} в рівнянні припливу тепла. В цьому розділі розглянемо спочатку методи, які дозволяють параметризувати сили турбулентної в'язкості F , припливу тепла ε_T і водяної пари $\varepsilon_{\Pi T}$, що обумовлені процесами дрібномасштабної турбулентності; в (5.44 - 5.46) u' , v' , w' , T' , q' – пульсації метеорологічних величин, що виникають завдяки переносу відповідних субстанцій турбулентними вихорами: $f' = f - \bar{f}$, де f – миттєве значення будь-якої метеорологічної величини, а \bar{f} – її осереднене значення.

Найбільш простий метод параметризації процесів дрібномасштабної турбулентності базується на використанні к-теорії, тобто на використанні концепції коефіцієнта турбулентності. Згідно з цією концепцією існує аналогія між турбулентним і молекулярним переносом різних субстанцій: кількості руху, тепла, водяної пари тощо. Однак на відміну від

молекулярного переносу, де коефіцієнт обміну є скалярною величиною, яка визначається лише властивостями повітря, коефіцієнт турбулентного обміну описується тензором і змінюється в широких границях в залежності від особливостей процесу.

Відповідно до к-теорії або полуемпіричної теорії турбулентності вектор турбулентного потоку \vec{Q}_f будь-якої скалярної величини f , віднесеної до одиниці об'єму, представляється у вигляді

$$\vec{Q}_f = \overline{\vec{V}' \cdot f'} = -\vec{k} \cdot \nabla f. \quad (5.47)$$

де $\vec{V}' = \vec{V} - \bar{\vec{V}}$ - відхилення вектора вітру \vec{V} від його середнього значення $\bar{\vec{V}}$; $f' = f - \bar{f}$ - відхилення величини f від її середнього значення; $\vec{k} = [k_{i,j}]$ - тензор коефіцієнта турбулентності; індекси i, j приймають значення 1, 2, 3 і відповідають трьом координатам, тобто координатам x, y, z ; ∇ - умовний векторний диференціальний оператор $\left(\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Нагадаємо, що вектор ∇ застосований до скалярної величини (наприклад, f) дає градієнт цієї величини:

$$\nabla f = \text{grad } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Враховуючи, що

$$\vec{V}' = \vec{i} u' + \vec{j} v' + \vec{k} w', \quad (5.48)$$

вирази для турбулентних потоків імпульсу $\rho \overline{\vec{V}' u'}$, $\rho \overline{\vec{V}' v'}$, $\rho \overline{\vec{V}' w'}$ по осях x, y, z згідно з формулами (5.47), (5.48) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \rho \overline{\vec{V}' u'} &= \vec{i} \overline{\rho u' u'} + \vec{j} \overline{\rho v' u'} + \vec{k} \overline{\rho w' u'} = -\vec{i} \rho K_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \vec{j} \rho K_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \vec{k} \rho K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \\ \rho \overline{\vec{V}' v'} &= \vec{i} \overline{\rho u' v'} + \vec{j} \overline{\rho v' v'} + \vec{k} \overline{\rho w' v'} = -\vec{i} \rho K_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \vec{j} \rho K_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \vec{k} \rho K_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}; \\ \rho \overline{\vec{V}' w'} &= \vec{i} \overline{\rho u' w'} + \vec{j} \overline{\rho v' w'} + \vec{k} \overline{\rho w' w'} = -\vec{i} \rho K_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \vec{j} \rho K_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \vec{k} \rho K_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Згідно з (5.47) та (5.48) рівняння для турбулентного потоку тепла запишеться так

$$\begin{aligned} H &= C_p \rho \overline{V'\theta'} = \vec{i} C_p \rho \overline{u'\theta'} + \vec{j} C_p \rho \overline{v'\theta'} + \vec{k} C_p \rho \overline{w'\theta'} = \\ &= -\vec{i} C_p \rho K_x \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} - \vec{j} C_p \rho K_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \vec{k} C_p \rho K_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

а рівняння для турбулентного потоку водяної пари набуває вигляду

$$\begin{aligned} Q &= \rho \overline{V'q'} = \vec{i} \rho \overline{u'q'} + \vec{j} \rho \overline{v'q'} + \vec{k} \rho \overline{w'q'} = \\ &= -\vec{i} \rho K_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} - \vec{j} \rho K_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} - \vec{k} \rho K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Зазначимо, що від'ємний знак в остаточних виразах для турбулентних потоків кількості руху, тепла і водяної пари з'являється тому, що потоки субстанцій завжди спрямовані проти градієнтів відповідних величин.

Отже, із співвідношень (5.49) випливає, що

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -K_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \overline{v'u'} = -K_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \overline{w'u'} = -K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \\ \overline{u'v'} &= -K_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad \overline{v'v'} = -K_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \overline{w'v'} = -K_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}; \\ \overline{u'w'} &= -K_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad \overline{v'w'} = -K_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, \quad \overline{w'w'} = -K_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Із співвідношення (5.50) отримаємо

$$\overline{u'\theta'} = -K_x \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}; \quad \overline{v'\theta'} = -K_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}; \quad \overline{w'\theta'} = -K_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (5.53)$$

І нарешті, із співвідношення (5.51) випливає, що

$$\overline{u'q'} = -K_x \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}; \quad \overline{v'q'} = -K_y \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}; \quad \overline{w'q'} = -K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}. \quad (5.54)$$

В виразах (5.52), (5.53), (5.54) K_x , K_y , K_z - коефіцієнти турбулентності, які відповідають осям x , y , z .

Підставляючи вирази (5.52) в формули для складових сили турбулентної в'язкості, отримаємо

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z}; \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial v}{\partial z}; \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Формула для турбулентного припливу тепла (5.45) з урахуванням виразів (5.53) набуває вигляду

$$\varepsilon_T = C_p \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \quad (5.56)$$

Після підстановки (5.54) в формулу (5.46) отримаємо вираз для турбулентного припливу водяної пари

$$\varepsilon_{PT} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} \right). \quad (5.57)$$

Отже, формули (5.55) – (5.57) описують зв'язок вкладів турбулентності в припливи кількості руху, тепла і вологи з градієнтами осереднених значень швидкості, температури і масової долі водяної пари; ці формули є основою для отримання співвідношень для параметризації відповідних процесів. Зазначимо, що знак осереднення у вказаних формулах опущено.

5.2.1 Параметризація дрібномасштабної турбулентності

Атмосферну турбулентність можна розділити на два класи: дрібномасштабну турбулентність, горизонтальний масштаб якої має порядок метрів, і вихрову (середньомасштабну) турбулентність, горизонтальний масштаб якої змінюється від 100 км (для рухів мезомасштабу) до 1000 кілометрів (для рухів підсиноптичного масштабу).

Методи параметризації процесів дрібномасштабної та вихрової турбулентності суттєво відрізняються, тому будемо розглядати їх окремо

Спочатку розглянемо методику, яка дозволяє параметризувати дрібномасштабну турбулентність. Відзначимо, що такого типу турбулентність пов'язана з хаотичним переміщенням елементарних об'єктів повітря (діаметром порядку десятків сантиметрів). Такі об'єми повітря виділяються із основного потоку під дією нерівностей підстильної поверхні або температурних контрастів. Вони хаотично рухаються і називаються турбулентними вихорами.

Згідно з напівемпіричною теорією турбулентності вихор, який проходить відстань l (шлях зміщення), повністю зміщується з навколишнім повітрям і припиняє своє існування. При цьому відбувається передача властивостей (температури, вологості, тощо) від одних об'єктів до інших. Дрібномасштабна турбулентність суттєво впливає на великомасштабні процеси.

В різних моделях атмосфери звичайно приймається, що для невеликих площин, порядку $(\delta r)^2 \approx 10^4 \text{ км}^2$, $K_x = K_y = K_1 = \text{const}$, $K_z = K(z) = K$. В такому випадку вирази для F та ε в співвідношеннях (5.55) – (5.57) спрощуються і набувають вигляду:

$$F_x = K_1 \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}, \quad F_y = K_1 \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z}, \quad F_z = K_1 \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\varepsilon_T = C_P \rho K_1 \nabla^2 \theta + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \theta}{\partial z}; \quad \varepsilon_{IT} = \rho \left(K_1 \nabla^2 q + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial q}{\partial z} \right), \quad (5.58)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двовимірний оператор Лапласа.

Якщо в виразах (5.58) u , v , θ , q – осереднені величини, які відомі у вузлах сітки, а коефіцієнти турбулентності K_1 і K визначаються за гіпотезою Прандтля, тобто в залежності від шляху зміщення l , то порядок останніх членів в кожному з цих виразів значно перевищує порядок членів з похідними за горизонтальними координатами. Наприклад, при кроках $\delta z = 1 \text{ км}$, а $\delta x = \delta y \equiv \delta r = 100 \text{ км}$ і при умові, що $0(u) = 0(v) \equiv V$ маємо

$$O\left(\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}\right) = K \frac{V}{(\delta z)^2}; \quad O(K_1 \nabla^2 u) = K \frac{V}{(\delta r)^2}. \quad (5.59)$$

Відношення порядків цих членів в (5.59) при $K_1 = K$ дорівнює

$$\frac{O\left(\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{O\left(K_1 \nabla^2 u\right)} = \frac{K \frac{V}{(\delta z)^2}}{K_1 \frac{V}{(\delta r)^2}} = \frac{(\delta r)^2}{(\delta z)^2} = \frac{10^{10} \text{ м}^2}{10^6 \text{ м}^2} = 10^4.$$

Таким чином, з великим ступенем точності члени, що описують дрібномасштабну турбулентність, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}; & F_y &= \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_T &= C_p \rho \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \theta}{\partial z}; & \varepsilon_{\text{ПТ}} &= \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

5.2.2 Параметризація планетарного граничного шару

Граничний шар атмосфери (ГША) в великій мірі формується під дією підстільної поверхні і тому відрізняється великими градієнтами метеорологічних величин.

Висоту ГША можна приблизно оцінити виходячи із того, що в цьому шарі порядки сил турбулентної в'язкості і Коріоліса приблизно однакові, тобто

$$O\left(\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}\right) = O(lv) \quad \text{або} \quad K \frac{V}{(\delta z)^2} = lV. \quad (5.61)$$

Будемо розглядати δz як висоту ГША, введемо для неї позначення h . Тоді із (5.61) отримаємо

$$h^2 = \frac{K}{l}, \quad \text{відкіля} \quad h = \sqrt{\frac{K}{l}}. \quad (5.62)$$

При характерних значеннях коефіцієнта турбулентності ($K = 10 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$) і параметра Коріоліса ($l = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) маємо $h \approx 330 \text{ м}$. Більш детальні оцінки висоти ГША базуються на його визначенні як шару, на верхній межі якого фактичний вітер дорівнює геострофічному. Товщина такого шару коливається приблизно в границях 1-1,5 км.

Вперше спосіб параметризації ефектів ГША в прогностичних моделях був запропонований І.А. Кибелем. Цей ефект був включений в квазігеострофічну модель для барокліної атмосфери за допомогою межових умов на нижньому рівні моделі у вигляді

$$\text{при } P = P_0 \quad w = w_h, \quad (5.63)$$

де w_h - вертикальна швидкість на верхній межі ГША, яка обумовлена турбулентною в'язкістю. Ця швидкість визначається шляхом розв'язання рівнянь горизонтального руху при умовах стаціонарності процесу, горизонтальної однорідності поля вітру і відсутності великомасштабних вертикальних рухів. В такому випадку рівняння горизонтального руху мають вигляд

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + lv + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}; \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - lu + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Межові умови по вертикалі для розв'язання системи (5.64) задаються таким чином:

при $z = 0$ $u = v = w = 0$ – умова прилипання на земній поверхні;

при $z \rightarrow \infty$ u, v обмежені.

В сучасних прогностичних моделях, які базуються на системі повних рівнянь гідротермодинаміки врахування дрібномасштабної турбулентності в ГША виконується шляхом обчислення її внесків в зміни швидкості вітру, температури і вологості, тобто шляхом розрахунку величин F_x , F_y , ϵ_T , ϵ_{PT} в ГША.

Найбільш простим способом параметризації ГША є напівемпіричний, згідно з яким використовуються рівняння (5.60). Якщо замінити в (5.60) перші похідні по z від величин $K \frac{\partial u}{\partial z}$, $K \frac{\partial v}{\partial z}$, $K \frac{\partial \theta}{\partial z}$ і $K \frac{\partial q}{\partial z}$ скінченними різницями, використовуючи при цьому їх значення на нижній (при $z = 0$) та верхній (при $z = h$) межах ГША, то рівняння (5.60) набувають вигляду

$$F_x = \frac{1}{h} \left[\left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right)_h - \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \right];$$

$$F_y = \frac{1}{h} \left[\left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right)_h - \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \right];$$

$$\varepsilon_T = \frac{C_p \rho}{h} \left[\left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_h - \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 \right];$$

$$\varepsilon_{ПТ} = \frac{\rho}{h} \left[\left(K \frac{\partial q}{\partial z} \right)_h - \left(K \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 \right],$$

де індексами h і 0 позначені члени, які відносяться відповідно до верхньої межі ГША ($z = h$) і поверхні землі ($z = 0$). Приймаючи, що при $z = h$ вертикальні турбулентні потоки кількості руху, тепла і водяної пари дорівнюють нулю, знаходимо

$$F_x = -\frac{1}{h} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = -\frac{1}{\rho h} \tau_{x0}; \quad F_y = -\frac{1}{h} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = -\frac{1}{\rho h} \tau_{y0};$$

$$\varepsilon_T = -\frac{C_p \rho}{h} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 = \frac{H_0}{h}; \quad \varepsilon_{ПТ} = -\frac{\rho}{h} \left(K \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 = \frac{Q_0}{h},$$

де $\tau_{x0} = \rho K \frac{\partial u}{\partial z}$, $\tau_{y0} = \rho K \frac{\partial v}{\partial z}$ - вертикальні потоки кількості руху по осях x та y ; $H_0 = -C_p \rho K \frac{\partial \theta}{\partial z}$, $Q_0 = -\rho K \frac{\partial q}{\partial z}$ - вертикальні потоки тепла і водяної пари біля земної поверхні.

Таким чином, для визначення величин F_x , F_y , ε_T і $\varepsilon_{ПТ}$ в ГША достатньо розрахувати турбулентні вертикальні потоки відповідних субстанцій біля земної поверхні. Для цих потоків існують різні параметризаційні формули, які тут не наводяться.

Вченими Одеського гідрометеорологічного інституту професорами Шнайдманом В.А. і Тарнопольським А.Г. були розроблені методи параметризації ефектів ГША на основі розв'язання системи рівнянь гідротермодинаміки, яка складається із рівнянь горизонтального руху, рівнянь припливу тепла і водяної пари, а також рівняння балансу кінетичної енергії турбулентності. Для кращого розрахунка тут ми представимо найбільш просту модель, яка побудована для стаціонарного горизонтально однорідного ГША, де відсутні променистий теплообмін і фазові перетворення вологи. При цьому горизонтальна однорідність ГША

передбачає рівність нулю горизонтальних градієнтів вітру, температури і водяної пари, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (5.65)$$

При умові стаціонарності процесів ($\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} = 0$), відсутності великомасштабних вертикальних рухів ($\bar{w} = 0$) і з урахуванням (5.65) система рівнянь для ГША матиме вигляд

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + lv + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z}; \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - lu + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial q}{\partial z} = 0;$$

$$K \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \beta K \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial E}{\partial z} - \varepsilon_D = 0.$$

де $E = \frac{1}{2} \left[\overline{(u')^2 + (v')^2 + (w')^2} \right]$ - кінетична енергія турбулентних

пульсацій складових швидкості; риса зверху означає осереднення; $\beta = \frac{g}{\theta}$ - параметр плавучості; u, v, θ - значення складових швидкості вітру і потенціальної температури для осередненого потоку; ε_D - швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентних вихорів в тепло, яка відбувається за рахунок дії сил тертя між повітряним потоком і підстильною поверхнею. Для визначення коефіцієнту турбулентності K використовується ряд співвідношень із теорії розмірностей і подібності.

На основі розв'язання системи (5.66) авторами моделі отримані порівняно прості формули для всіх характеристик ГША, включаючи

турбулентні потоки (кількості руху, тепла і водяної пари), коефіцієнт турбулентності K , висоту ГША. Всі вказані характеристики використовуються для параметризації ефектів ГША в прогностичних моделях і виражаються через три параметра, які характеризують великомасштабні рухи, а саме

1) число Росбі

$$Ro = \frac{V_g}{lz_0}, \quad (5.67)$$

2) зовнішній параметр стратифікації

$$M = \frac{g}{lV_g} \frac{\delta\theta}{\theta_0}, \quad (5.68)$$

3) внутрішній параметр стратифікації

$$\mu_0 = \frac{M - 2,5\chi\alpha^4(\gamma_a - \gamma_h) \cdot g/l^2\theta_0}{1,14\chi[\lg(Ro \cdot \chi) - 1,14]}. \quad (5.69)$$

Тут і далі $\delta\theta = \theta_h - \theta_0$ - різниця потенціальної температури на верхній межі ГША і біля земної поверхні; γ_h - вертикальний градієнт температури при $z = h$; z_0 - параметр шорсткості; χ - геострофічний коефіцієнт тертя

$$\chi = \frac{v^*}{\alpha V_g} = a(\lg Ro)^2 + b \lg Ro + c, \quad (5.70)$$

де v^* - динамічна швидкість; $\alpha = 0.38$; $a = 0.00405$; $b = -0.068$; $c = 0.37$.

Формули для турбулентних потоків, які виражаються через вказані параметри, мають вигляд

$$\tau_{x0} = \rho\alpha^2\chi V_g (u_g \cos \alpha - v_g \sin \alpha),$$

$$\tau_{y0} = \rho\alpha^2\chi V_g (u_g \sin \alpha + v_g \cos \alpha),$$

$$H_0 = -\frac{C_p \rho l}{g} V_g^2 \chi^2 \theta_0 \mu_0, \quad (5.71)$$

$$Q_0 = \rho C_D V_{1000} (q_{1000} - q_{850}).$$

В формулах (5.71) α – кут між векторами геострофічного і фактичного вітру

$$\alpha = a_1 \lg(Ro)^2 + b_1 \lg Ro + C_1,$$

де $a_1=1$, $b_1=-15$, $C_1=82$, а $C_D=10^{-3}$ – коефіцієнт опору; V_g і V_{1000} – значення модуля швидкості геострофічного вітру на верхній межі ГША і на поверхні 1000гПа; q_{1000} , q_{850} – значення масової частки водяної пари на поверхнях 1000 і 850гПа.

В розглянутій методиці можна враховувати барокліність ГША. Для цього вводиться середній горизонтальний градієнт температури $\Gamma = \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right|$ (n – нормаль до ізотерм) і з його допомогою враховується зміна з висотою сили баричного градієнта. Більш складний метод, розроблений також авторами В.А. Шнайдманом і А.Г. Тарнапольським, базується на розв'язанні системи рівнянь для нестационарного горизонтально неоднорідного ГША, в якому присутні великомасштабні вертикальні рухи і променистий приплив тепла. Але ми тут обмежуємося викладенням найбільш простого і тому найбільш прозорого для розуміння методу параметризації ефектів ГША в прогностичних моделях.

5.2.3 Параметризація процесів вихрової (середньомасштабної) турбулентності

З вихровою середньомасштабною турбулентністю пов'язаний обмін різними субстанціями, який виникає в результаті переміщення вихорів (з вертикальною віссю), горизонтальні розміри яких не перевищують $4\delta r$. Такі рухи можуть бути безпосередньо описані чисельною моделлю за вихідними полями осереднених величин, заданих у вузлах сітки з кроком δr . Це пов'язано з тим, що осереднення вихідних рівнянь гідротермодинаміки здійснюється по площі приблизно $(\delta r)^2$, і тому такі рівняння враховують рухи підсіткового масштабу, до яких відносяться рухи в невеликих улоговинах та гребенях з горизонтальною протяжністю порядку $2\delta r$, деякі мезомасштабні рухи, а також частина гравітаційних хвиль.

Незважаючи на те, що процеси середньомасштабної і великомасштабної вихрової турбулентності суттєво відрізняються, загальні підходи до їх параметризації є схожими. Цей підхід зводиться до того, що члени рівнянь моделі які містять відхилення величин від середніх

значень, виражаються через осереднені величини у вузлах сітки, тобто через параметри основної моделі.

Але існує принципова відмінність у проявах процесів турбулентності різних масштабів. Так, при розвитку дрібномасштабної турбулентності енергія передається від рухів дрібних масштабів до рухів ще більш дрібних масштабів і в остаточному підсумку переходить в тепло, тобто має місце дисипативний процес. При вихрових турбулентних рухах середнього та великого масштабів можуть здійснюватися два протилежних процеси:

- передача енергії від рухів більших масштабів до рухів менших масштабів, тобто відбувається дифузійний процес;
- передача енергії від рухів дрібних масштабів до рухів більших масштабів; це так званий процес з від'ємною в'язкістю, який відіграє велику роль при інтенсифікації циклонів і формуванні інтенсивних зональних течій в помірних широтах, зокрема, струминних течій.

В найбільш простому випадку параметризація вихрової турбулентності може бути зведена до використання співвідношень, які описують вплив вихрової горизонтальної в'язкості на великомасштабну циркуляцію

$$\begin{aligned} F_x &= K_\Omega \nabla^2 u; & F_y &= K_\Omega \nabla^2 v; \\ \varepsilon_T &= C_p \rho K_\Omega \nabla^2 \theta; & \varepsilon_{PT} &= \rho K_\Omega \nabla^2 q, \end{aligned} \quad (5.72)$$

де ∇^2 – плоский оператор Лапласа; індекс Ω при відповідних коефіцієнтах турбулентності означає, що вони описують вплив середньомасштабної турбулентності на поля вітру, температури і вологості.

Інакше кажучи, коефіцієнти K_Ω характеризують інтенсивність переносу кількості руху, тепла і водяної пари середньомасштабними вихорами. Коефіцієнти K_Ω визначаються головним чином за допомогою емпіричних даних. Наприклад, в моделях загальної циркуляції атмосфери в якості K_Ω використовується величина пропорційна модулю лапласіана від осереднених величин

$$K_\Omega = K_0 |\nabla^2 u|,$$

де K_0 - стала величина (наприклад, $K_0 = 10^{15} \text{ м}^3$).

Більш загальний вираз для опису ефекту сил горизонтальної вихрової турбулентності може бути отримано на основі теорії двовимірної турбулентності. Згідно з цією теорією приймається, що сили горизонтальної вихрової в'язкості обумовлені деформацією (D) і описуються такими виразами в сферичній системі координат

$$F_{\lambda} = \frac{1}{\alpha \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (K_{\Omega} D_T) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} (K_{\Omega} D_S), \quad (5.73)$$

де

$$D_T = \frac{1}{\alpha \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} v_{\varphi} \cos \varphi \right),$$

$$D_S = \frac{1}{\alpha \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} v_{\varphi} \cos \varphi \right), \quad (5.74)$$

$$D = \left(D_T^2 + D_S^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad K_{\Omega} = \gamma \alpha^2 D.$$

Коефіцієнт α зв'язується з кроком сітки, а γ визначається емпіричним шляхом ($\gamma \approx 0,18$).

5.3 Параметризація процесів великомасштабної конденсації

Утворення хмарності і опадів відбувається в більшості випадків за рахунок процесів конденсації при підйому повітря при макромасштабних і мезомасштабних процесах. Процеси конденсації описуються за допомогою параметризації.

Для параметризації конденсації при процесах синоптичного масштабу обчислюється осереднена по площі вертикальна швидкість w або її аналог $\tau = \frac{dP}{dt}$ шляхом інтегрування основних рівнянь моделі атмосфери, тобто незалежним від параметризації способом. Нижче викладається один із варіантів параметризації конденсації при крупно масштабному процесі в припущенні, що аналог вертикальної швидкості є відомим.

Для виводу параметризаційних співвідношень не будемо розглядати адвективні процеси, а також всі види припливу тепла і вологи, крім їх припливів, які обумовлені фазовими перетвореннями вологи.

В якості одного із основних візьмемо рівняння припливу тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{C_p \rho} \varepsilon. \quad (5.75)$$

При вказаних припущеннях

$$\varepsilon = \varepsilon_{\Phi} = \mathcal{L} \cdot m, \quad (5.76)$$

де \mathcal{L} - теплота конденсації, m – швидкість конденсації (зміна кількості водяної пари в одиниці об'єму за одиницю часу).

З урахуванням того, що $\tau = \frac{dP}{dt}$, а $\gamma_a = \frac{g}{C_p}$ рівняння припливу тепла (5.75) перепишемо у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p \rho} \tau + \frac{\mathcal{L} m}{C_p \rho}. \quad (5.77)$$

Будемо вважати, що конденсація водяної пари відбувається, коли відносна вологість досягає 100%, тобто коли водяна пара стає насиченою.

Очевидно, що коли ρ_n - густина насиченої водяної пари, то

$$m = -\frac{d\rho_n}{dt}. \quad (5.78)$$

Використаємо рівняння стану для насиченої водяної пари

$$E = R_n \rho_n T \quad \text{відкіля} \quad \rho_n = \frac{E}{R_n T}, \quad (5.79)$$

де R_n - питома газова стала для водяної пари, E – парціальний тиск насиченої водяної пари. Продиференціюємо (5.79) за часом і підставимо в (5.78)

$$m = -\left(\frac{1}{R_n T} \frac{dE}{dt} - \frac{E}{R_n T^2} \frac{dT}{dt} \right).$$

З урахуванням того, що E залежить тільки від температури, яка змінюється з часом, можна записати

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (5.80)$$

Підставимо (5.80) в формулу для m , отримаємо таку рівність

$$m = -\frac{E}{R_n T^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_0 T} - 1 \right) \frac{dT}{dt}.$$

Введемо далі замість m величину $C = \frac{m}{\rho}$ - швидкість конденсації водяної пари в одиниці маси повітря

$$C = -\frac{E}{\rho R_n T^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_0 T} - 1 \right) \frac{dT}{dt}. \quad (5.81)$$

Підставимо тепер в вираз (5.81) величину $\frac{dT}{dt}$ із співвідношення (5.77) і отримаємо

$$C = \frac{E}{\rho_n R_n T^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_n T} - 1 \right) \left(\frac{\tau}{C_p \rho} + \frac{\mathcal{L}}{C_p} C \right).$$

Відзначимо, що

$$\frac{1}{\rho T} = \frac{R}{P}, \text{ а } \frac{R}{R_n} \frac{E}{P} = q_m,$$

де q_m - масова частка насиченої водяної пари. Тоді виходить, що C є функцією лише змінних P і T , тобто $C = F(P, T)\tau$. Функція $F(P, T)$ виражається через відомі параметри і тому може бути затабульована.

$$F(P, T) = \frac{\frac{q_m}{P} \left(\frac{R}{C_p} - \frac{\mathcal{L}}{C_p T} \frac{R}{R_n} \right)}{1 + \frac{q_m \mathcal{L} (\mathcal{L} - R_n T)}{C_p R_n T^2}}. \quad (5.82)$$

Приплив тепла і зміни температури за рахунок фазових переходів води в атмосфері можуть бути знайдені із співвідношень (5.75), (5.76)

$$\varepsilon_\Phi = \mathcal{L} \rho C, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_\Phi = \frac{\varepsilon_\Phi}{C_p \rho}. \quad (5.83)$$

Кількість опадів, які випали із одиничного стовпа повітря протягом часу t , можна розрахувати за формулою

$$W = \frac{1}{g} \int_0^t \int_P^0 \frac{dq_m}{dt} dP dt, \quad (5.84)$$

$$\text{де } \frac{dq_m}{dt} = -\frac{1}{\rho} m = -C.$$

Отже, ми розглянули найбільш прості, в якійсь мірі класичні методи параметризації процесів підсіткового масштабу в моделях гідродинамічного прогнозу погоди.

Слід відзначити, що в теперішній час існує велика кількість параметризацій цих методів, які доцільно розглядати при вивченні конкретних моделей гідродинамічного прогнозу погоди. Але з деякими методами параметризації різних підсіткових процесів можна ознайомитися в підручнику «Гідродинамічні методи прогнозу погоди» (автори Хоменко Г.В., Хохлов В.М. Одеса: «Екологія», 2008 р.).

6 СУЧАСНІ ОПЕРАТИВНІ ПРОГНОСТИЧНІ МОДЕЛІ

Сучасне суспільство і його господарська діяльність не аби як залежать від атмосферних впливів. Потепління глобального клімату, яке відбувається і супроводжується регіональними і локальними змінами, значною мірою змінило характер погодних процесів в останні десятиліття. В умовах змін клімату зросли нестійкість погодних систем і інтенсивність метеорологічних явищ. Тому в розвинутих країнах світу в теперішній час виділяються значні кошти на розвиток систем спостережень погоди та її прогнозування.

Слід зазначити, що серед існуючих методів прогнозу в останні десятиріччя велике значення набули саме чисельні гідродинамічні методи, на основі яких побудована велика кількість прогностичних моделей з різними рівнями фізико-математичної постановки задачі, прогнозу і способами їх чисельної реалізації, різним ступеням економічності експлуатації, тощо.

Нижче приведені короткі відомості про моделі, які використовуються в багатьох країнах Європи (це моделюючий комплекс ARPEGE-ALADIN), а також в Америці, Росії та Україні (це моделююча система MM5).

6.1 Основні відомості про чисельні моделюючі системи

6.1.1 Моделююча система ARPEGE-ALADIN

У Європі найбільш успішними вважаються чисельні прогнози, підготовлені в Європейському Центрі Середньострокових Прогнозів Погоди (ECMWF) (далі ЄЦ). Цей Центр був створений у середині 70-х рр. XX сторіччя країнами Європейського співтовариства на їхні внески завдяки інтелектуальним зусиллям вчених, фахівців з фізики атмосфери й обчислювальної математики. Ключовим моментом у його розвитку можна вважати залучення для роботи над окремими структурами моделі іноземних фахівців із усіх країн Європи й Америки. Країни, члени цього «пула», а також вчені, що приймали участь у розробці окремих блоків моделі, одержали можливість використовувати створену колективними зусиллями чисельну модель у своїх країнах. Україна офіційно не брала

участь у діяльності ЄЦ, однак її вченим була надана можливість стажування і, таким чином, був отриманий доступ до програмної продукції ЄЦ. Великий внесок у розвиток моделі ЄЦ внесли французькі вчені, саме ними був зроблений один з найважливіших блоків - блок засвоєння даних.

Модель ЄЦ, що передана в Meteo France (МФ), називається в Англії IFS (Integrated Forecast System), а у Франції - ARPEGE (аббревіатура по-французьки). Від цієї головної моделі бере свій початок: регіональна модель для обмеженої території (Limited Area Model), що ідентична базовій, тому що в ній використовуються ті ж основні рівняння і параметризації процесів підсіткових масштабів. Ця модель одержала назву ALADIN. Її основне призначення - дати прогноз для території окремих країн і локальний прогноз при бічних межових умовах, із глобальної моделі.

Модель ARPEGE (ECMWF) є спектрально-різницевою. По широті використовується спектральне розкладання, а по довготі - розкладання по поліномах Лежандра. По вертикалі вводиться гібридна система: поблизу підстильної поверхні в граничному шарі використовується σ -координата, а вище - декартова. Усього використовується 31 рівень. Усікання спектра проводиться для 199 гармонік, що відповідає горизонтальним розмірам близько 200 км. При використанні процедури Stretch усікання поблизу полюса відбувається значно «далі» у 3.5 рази, тобто близько 700 гармонік. Сам полюс зміщується на територію Франції.

Регіональна модель ALADIN є біспектральною моделлю, оскільки по обох горизонтальних координатах використовується спектральне розкладання. Кількість рівнів по вертикалі - 31. Усікання залежить від можливостей користувача, його ЕОМ і обраних розмірів області. Для більшості районів Європи мінімальне розділення складає майже 10 км. Природно, що вибір заданої місцевості визначає відповідні перетворення вихідних даних і додатку спектрального методу.

Що стосується схем інтегрування за часом, то в моделі ARPEGE-ALADIN використовується суміш схем: Ейлерова, явна схема leap-frog, напівнеявна схема, лагранжева, leap-frog-напівнеявна і двошарова. Слід також зазначити, що в цій моделі використовуються тільки ті параметризації процесів підсіткового масштабу, що розроблялися ще для моделі ECMWF у 70-х роках, зокрема: температури і вологості на поверхні Землі, сніжного покриву, замерзання/танення ґрунтової вологи.

Значно збідненими здаються використовувані характеристики ґрунтів і рослинного покриву.

Обчислення спочатку проводилися на EOM Cray-1, в теперішній час використовується супер-EOM Fujitsu, але можуть використовуватися EOM і більш низького класу, робочі станції і ПК (Nec, Dec Alpha, Sun Ultra, Pentium III, SGI). Очевидно, що на таких комп'ютерах можуть проводитися розрахунки тільки для обмеженої території, тобто за допомогою моделі ALADIN.

У 1996 р. МФ виступила з ініціативою об'єднання національних прогностичних центрів, що експлуатують її програмні продукти, у рамках проекту ARPEGE-ALADIN. У Меморандумі розуміння [2] оголошується про створення Клуба користувачів регіональної моделі ALADIN. У нього ввійшли 14 країн: Франція, Бельгія, Португалія, Австрія, Польща, Угорщина, Чехія, Словаччина, Хорватія, Словенія, Болгарія, Румунія, Молдавія і Марокко. Основні розрахунки по глобальній моделі ARPEGE проводяться в Тулузі, регіональні - у Марокко, Чехії, Польщі, Румунії і Болгарії. Кількість учених, задіяних у різних країнах Клуба, коливається від 3 до 11, однак у Молдавії офіційно відповідальна одна людина.

У згаданому Меморандумі перелічуються основні принципи членів Клуба, усього їх вісім, але тут відзначимо лише деякі:

1. «Один - за всіх і всі - за одного». Це означає, що ніяких авторських прав країни Клуба не мають. Всі отримані результати є загальною власністю.
2. Програмна і прогностична продукція не може бути передана в треті країни, тим більше з комерційними цілями.
3. Усі нові розробки повинні бути перевірені і впроваджені в кожній з країн Клуба.
4. Усі країни, члени Клубу, в обов'язковому порядку беруть участь у щорічних робочих нарадах, де відбуваються колективні обговорення діяльності кожної з них. Користувачі моделі ALADIN повинні, як мінімум, представити статистику справджуваності прогнозів для своєї території.
5. Клуб не закритий для нових членів, але одного бажання вступити недостатньо. Розроблена й існує дуже тверда система вступу нових членів Клуба, наприклад, відсутність «вето» третини учасників Клубу чи однієї з країн, що контролює більш третини внеску в проект. Рекомендація МФ може мати більшу вагу.

Усе програмне забезпечення для роботи з регіональною моделлю передається **безкоштовно** новому члену (країні) Клубу, причому даний

регіональний варіант моделі ARPEGE має 25 каталогів з описом вмісту програмних блоків. Також **безкоштовно** відбувається постачання двічі на добу міжовими умовами для замовленої області даної регіональної моделі, а також *compress-file* з даними спостережень, що містяться в зведеннях TEMP, SYNOP, AIREP, BOUY і інших. Система засвоєння даних також входить до комплексу програмного продукту, що передається і тому користувач може самостійно виконувати об'єктивний аналіз в межах заданої області. Досвід показує, що час, потрібний на засвоєння різних даних спостережень, виявляється на порядок більший часу самого обчислювального процесу.

Від нового члена Клубу потрібно: забезпечення себе обчислювальними потужностями, сучасними каналами зв'язку і наявність групи вчених і фахівців по підтримці моделі і поширенню її продукції, а також для проведення наукових досліджень.

6.1.2 Моделююча система MM5

Цей комплекс є програмним продуктом Пенсильванського університету і Національного Центра Атмосферних Досліджень США (PSU/NCAR)[3,4], початкові розробки якого відносяться до середини 70-х рр. XX сторіччя і зв'язані з ім'ям відомого фахівця в області мезометеорології Р.Антеса. У 1978 р. з'явилася узагальнююча публікація, присвячена опису можливостей моделі для мезометеорологічних досліджень атмосфери і поширення домішок. З тих пір відбулося багато змін, зв'язаних з розширенням її застосування. Ось деякі з них: можливість багатоцільового використання, негідростатичність динаміки, що дозволяє використання моделі для масштабів у кілька км, здатність проводити обчислення на машинах з пам'яттю, що розширюється і розподіляється, чотиривимірне засвоєння даних і включення більшої кількості фізичних процесів. В даний час ця модель відома як модель MM5 (*мезометеорологічна модель n'ятого покоління*), що підтримується кількома допоміжними програмами. Вони об'єднані під назвою «моделюючий комплекс MM5».

Слід зазначити, що інформація про нього міститься на сайтах в Інтернеті, головний з яких MM5 Home page (див. наприклад, www.mmm.ucar.edu, www.meso.com.mm5). За цими адресами міститься різноманітна інформація про модельний комплекс (фізична і математична

постановки, властивості моделюючої системи, основні програмні функції, останні зміни і удосконалення, вимоги до установки і запуску на різних обчислювальних комплексах, прогностичні продукти, докладна бібліографія, звіти про робочі семінари і багато чого іншого). Варто відмітити, що **даний модельний комплекс**, хоча і створювався в одній країні зусиллями двох колективів вчених, у даний час **широко використовується і розвивається в багатьох країнах світу завдяки застосуванню сучасних комп'ютерних технологій з використанням мережі Інтернет**. Судячи з приведеного списку користувачів моделі, вона знайшла застосування практично в усіх університетах США, в ряді урядових закладів та дослідницьких інститутів у Північній і Південній Америці, Океанії, Азії, Європі й Африці. Власне кажучи, **в подальшій розробці моделі і її іспитів бере участь багатотисячний багатонаціональний колектив вчених і практиків, що дозволяє говорити про моделюючий комплекс ММ5 як про комплекс, що самонастроюється і найбільш широко використовується у світі**. Важливою рисою є також його модульний принцип, який означає, що при використанні моделі для конкретної місцевості вибирається один з відповідних комплектуючих програмних модулів або створюється власний, котрий потім передається в загальне користування. Документація для різних програм, що використовується у модельному комплексі, розміщена на відповідних сайтах і доступна користувачам.

Схематична діаграма, що показана на рис.6.1 може допомогти розумінню повної системи моделювання. Схема показує порядок виконання програм і необхідні дані, для уявлення про їхні функції.

Дані біля землі і на ізобаричних поверхнях інтерполюються в горизонтальній площині за допомогою програм (TERRAIN і REGRID) із широтно–

довготної сітки в область з високим розділенням у проекціях Меркатора, Ламберта чи полярної стереографічної проекції. Оскільки звичайна інтерполяція не забезпечує мезомасштабних деталей, проінтерпольовані дані можуть бути повторно оброблені (програми RAWINS чи LITTLE_R) за даними наземних і аерологічних спостережень на стандартній мережі станцій, але з використанням методики Cressman або мультиквадратичної схеми. Програма INTERPF виконує вертикальну інтерполяцію зі стандартних ізобаричних поверхонь на рівні в σ -системі координат, а INTERPB – у зворотну сторону. Сигма поверхні поблизу підстильної поверхні повторюють конфігурацію рельєфа, а поверхні на більш високих

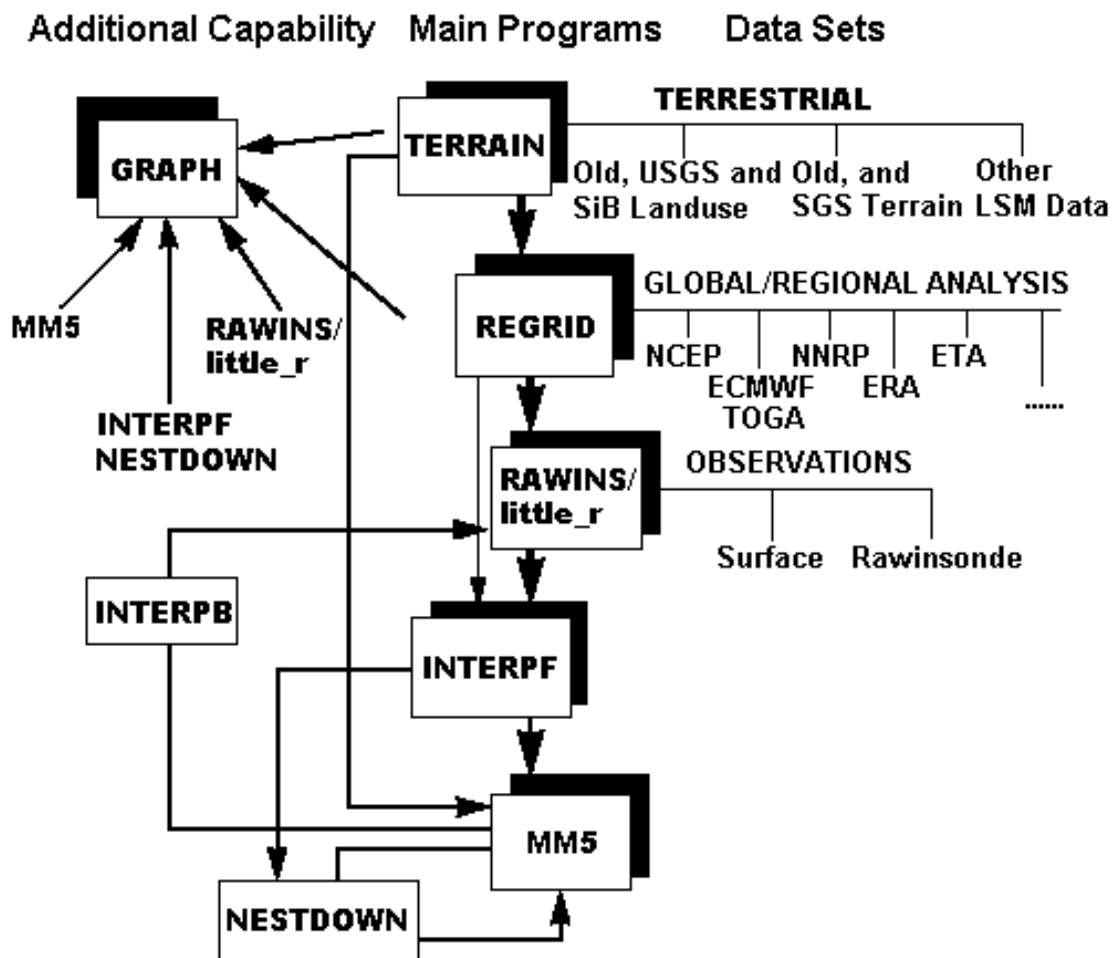


Рис. 6.1 – Моделююча система MM5

рівнях наближаються до ізобаричних. Програма NESTDOWN служить для створення більш дрібної сітки на базі грубої сітки. Програма REGRID/DATAGRID створює перше наближення полів на ізобаричних поверхнях у вузлах сітки з вузлів іншої моделі. Основна програма MM5 виконує інтегрування за часом, а програми GRAPH/RIP здійснюють графічне відображення вихідних полів після роботи основної програми. Оскільки вертикальне і горизонтальне розділення і розмір області - перемінні, то в модельному пакеті програм застосовують розміри, що відповідають перемінній оперативної пам'яті. У розрахунках використовуються деякі зовнішні запам'ятовуючі пристрої.

Оскільки MM5 - регіональна модель, то вона вимагає задання початкових і граничних умов при виконанні розрахунків. Для того, щоб

відтворити граничні умови на період обчислення, необхідно мати протягом усього періоду, доки ведеться інтегрування моделі, значення величин у граничних вузлах сітки.

Перелічимо й інші властивості модельного комплексу MM5.

Модель може бути використана в прогностичних цілях і при оцінці кліматичного режиму.

Маються дві версії моделі п'ятого покоління й обидві доступні: MM5V2 і MM5V3, які відрізняються прийняттям гіпотези квазістатичності чи відмовлення від неї з використанням повного третього рівняння руху.

Модель MM5 може бути використана для широкого спектра досліджень, включаючи як прогностичне моделювання, так і чотирирівне засвоєння даних для різних атмосферних процесів (мусонів, тропічних і позатропічних циклонів). Вона може бути застосована для процесів з найменшими розмірами мезо- β і мезо- γ масштабів (2-200 км), тобто бути придатною для дослідження таких явищ як конвективні системи, фронти, берегові і морські бризи, гірсько-долинні циркуляції і міські острови тепла.

Рівняння інтегруються чисельно за допомогою скінченнорізницевого методу. При цьому просторові похідні апроксимуються за допомогою центральних різниць з другим порядком точності на сітці В (Аракави–Лемба). Для похідних за часом використовується схема leap-frog другого порядку точності, хоча для окремих доданків використовується схема розщеплення. Справа в тім, що в деяких рівняннях містяться доданки, що відповідають за швидкі хвилі, які повинні обчислюватися з більш коротким часовим кроком. У той же час деякі радіаційні доданки можуть залишатися постійними протягом близько 30 хвилин.

Такі характеристики підстильної поверхні, як висота над рівнем моря, види земної поверхні, тип ґрунту, температура ґрунту, частка рослинності, маски суша-море можуть бути взяті з глобальної бази даних з 30" розділенням.

Дається можливість гнучкого і множинного вкладення сіток, що можуть бути сконструйовані від глобального масштабу до розміру хмари в рамках однієї моделі. При цьому вони можуть бути створені двома шляхами: безліч вкладень і вкладень, що рухаються, або модель високого розділення дрейфує до моделі з більш грубою сіткою.

Введення реальних даних може здійснюватися з використанням стандартних спостережень (відомості про погоду наземних станцій, аерологічні повідомлення), а також з використанням даних глобальних чи

регіональних моделей (або як перше наближення для об'єктивного аналізу, або як граничні умови, тобто глобальні аналізи NCEP і ECMWF, ре-аналізи NCEP/NCAR і ECMWF, дані моделі NCEP ETA).

Система дозволяє провести чотиривимірний об'єктивний аналіз.

Система дозволяє здійснити вибір відповідної і кращої параметризації фізичних процесів підсіткового масштабу. У зв'язку з цим перелічимо види параметризацій фізичних процесів, які доступні користувачам MM5. Вони підрозділені на чотири групи:

- **фізика опадів** (схеми параметризації купчастих хмар і схеми з явним розділенням мікрофізики);
- **планетарний граничний шар** (bulk – формула, схема Blackadar, схеми по класифікації Mellor-Yamada 1.5-порядку/рівень-2.5, Eta схема, схема MRF, схема Gayno-Seaman);
- **процесів приземного шару** (потоки кількості руху, явного і прихованого тепла, прогноз поверхневої температури за допомогою рівняння теплового балансу, типи поверхні суші, 5-шарова модель ґрунту, процеси на поверхні суші);
- **випромінювання атмосфери** (просте охолодження, схема Dudhia для довго- і короткохвильової частини спектра, схеми випромінювання NCAR/CCM2 і RRTM для довгохвильового випромінювання).

Система моделювання MM5 може бути реалізована на різних комп'ютерних платформах: Cray, SGI, IBM, DEC, Sun, HP і ПК під Linux. Допускається розпаралелювання на машинах з пам'яттю, що розширюється, і з розподіленою пам'яттю.

Цікаві висновки розповсюджувачів модельного комплексу MM5. Вони вважають, що мінімальний рівень знань, яким повинні володіти потенційні користувачі, не надто високий. Їхні вимоги виглядають так:

- користувач повинен мати деякий досвід чисельного моделювання атмосфери;
- користувач повинен мати розуміння фізики атмосфери на рівні MS;
- користувач повинен знати основи ОС UNIX;
- користувач повинен знати основи алгоритмічної мови FORTRAN 77 і 90;

Ніякий попередній досвід по використанню моделі MM5 не потрібен. Настійно рекомендується кожному новому користувачу вивчити моделюючу систему MM5 по керівництву в системі on line.

6.1.3 Вибір критеріїв для порівняння двох моделей

Кожна з розглянутих моделей має свої достоїнства і недоліки, що тут, однак, не обговорюються. Наша задача запропонувати методику порівняння зазначених вище двох оперативних моделей прогнозу.

Для початку сформулюємо кожний з пунктів, за якими передбачається проводити порівняння, а потім обґрунтуємо свій вибір:

- а) вимоги, що висуваються до обчислювальної техніки;
- б) вихідна інформація, необхідна для роботи моделі;
- в) існуючі в моделі методи фізичної параметризації різних атмосферних процесів;
- г) можливість внесення змін у програмному комплексі, тобто наявність вихідних текстів програми і всіх модулів, що входять до неї;
- д) горизонтальний і вертикальний розподіл отриманих прогностичних полів.

Виконання вимог, що висуваються до обчислювальної техніки, пов'язане з найбільшими матеріальними витратами. Природно, що перевагу варто віддати тій оперативній моделі прогнозу, для реалізації якої потрібний комп'ютер, який можна порівняно недорого придбати в наших умовах. Ідеальним є варіант запуску моделі на звичайному персональному комп'ютері з приблизно такими характеристиками: операційна система – Windows чи Unix (Linux), процесор – Pentium із внутрішньою частотою близько 1 ГГц, оперативна пам'ять – не менш 1 Гб; ємність твердого диска (дискового масиву) – близько 320 Гб.

Питання прийому вихідних даних також є важливим. Ясно, що організація центра прийому поточної інформації в даний час неможлива і тому планується одержувати необхідну інформацію за допомогою Інтернету. Ця інформація в даний час існує для вільного доступу на сайтах багатьох метеорологічних центрів. При виборі моделі варто приділити увагу тому, наскільки «гнучкою» є процедура введення й адаптації даних в моделі, тобто можливість використання як результатів об'єктивного аналізу, так і даних зі спостережних станцій. Також бажаним є використання в моделі метеорологічної інформації з метеорологічних супутників і РЛС.

Оскільки основною задачею для нас є одержання якісного прогнозу погоди в Україні, Азово-Чорноморському басейні і в районі Одеси, то реалізація методів фізичної параметризації атмосферних процесів стосовно до нашого географічного регіону є обов'язковою. Тут задача

ускладнюється тим, що орографія території України досить складна: існують як рівнинні (наприклад, центральні області), так і гірські райони (Карпати і Крим), а також досить протяжна прибережна смуга. Ясно, що деякі поля прогнозованих метеорологічних величин (наприклад, приземної температури, вітру, опадів) будуть у зв'язку з цим зазнавати істотну горизонтальну неоднорідність, що і необхідно виявити в моделі. А це можливо тільки при використанні конкретних методів прогнозу. Тому бажано внесення змін у програмні модулі з метою доповнення їхніми методами параметризації і прогнозу, що є найбільш придатними для території України, але відсутні у вихідному варіанті оперативної моделі прогнозу. Іншими словами, необхідні вихідні тексти програми, написані за допомогою стандартної мови програмування (наприклад, Fortran чи C). У цьому випадку можна стати повноцінним учасником процесу використання оперативної моделі, обмінюватися своїми результатами з іншими користувачами за допомогою форумів в Інтернеті, що, у свою чергу, може підвищити міжнародний науковий авторитет як авторів роботи, так і університету в цілому.

Нарешті, однією з важливих також є одержання прогностичних полів над деякими географічними районами з великим горизонтальним розподілом. Наприклад, горизонтальний крок над всією областю прогнозу (Європа) можна прийняти рівним 100 км, над Україною – 30 км, Одеською областю – 10 км і Одесою – 2 км. Використання такого методу вкладених сіток в оперативній моделі є однією з пріоритетних умов при виборі схеми реалізації моделі прогнозу. Задачі насичення вихідних даних мезометеорологічною інформацією повинні вирішуватись, як уже вказувалося вище, за допомогою адаптації в моделі даних супутникових, радіолокаційних і інших спостережень.

Отже, із сказаного спливає, що методика порівняння існуючих моделюючих систем і вибору оптимальної оперативної моделі прогнозу ґрунтується на якісних і кількісних характеристиках. Передбачається порівнювати не тільки точність розрахунку прогностичних полів кожною моделлю, а їхні різні вимоги і характеристики.

Для порівняльного аналізу розглянемо методи параметризації процесів підсіткового масштабу в моделях MM5 і ALADIN.

6.2 Спільний порівняльний аналіз прогностичних можливостей моделей aladin і мм5

Фізичній параметризації атмосферних процесів у чисельних моделях приділяється велика увага. При цьому, як правило, надається можливість вибору тієї чи іншої схеми параметризації конкретного процесу за бажанням користувача.

6.2.1 Параметризація процесів підсіткового масштабу у моделі ММ5.

Горизонтальна дифузія. У моделі ММ5 використовується дві схеми параметризації – другого і четвертого порядку. Перша схема застосовується тільки для рядків і стовпців поблизу бічних меж області з найбільшим кроком по горизонталі, друга – усередині цієї області, а також усередині областей з дрібнішим кроком. Обидва типи параметризації базуються на розрахунку коефіцієнта горизонтальної дифузії, заснованому на методі Дж.Смагоринського. Для забезпечення обчислювальної стійкості коефіцієнт горизонтальної дифузії обмежується максимальною величиною, що залежить від обраних кроків по горизонталі і часу.

Планетарний граничний шар (ПГШ). Приземна температура в моделі ММ5 розраховується з рівняння теплового балансу поверхні Землі на основі методу, розробленого Блекадаром. За цим методом зміна поверхневої температури згодом залежить від теплоємності підстильної поверхні і наступних величин:

а) радіаційного балансу – алгебраїчної суми приземних потоків короткохвильового (Q_s) і довгохвильового випромінювань (I_s). Q_s залежить від альbedo підстильної поверхні, сонячної постійної, зенітного кута і коефіцієнта пропускання; I_s – це результуючий потік довгохвильової радіації, що обчислюється як різниця потоків на верхній і нижній межах шару. При наявності хмарності використовується схема параметризації, що враховує припливи короткохвильової і довгохвильової радіації. Кількість хмар кожного рівня при цьому залежить від відносної вологості;

б) потоку тепла до підстильної поверхні. Перенос тепла внаслідок молекулярної провідності залежить від постійного коефіцієнта переносу тепла, теплоємності підстильної поверхні і різниці поверхневої температури і температури на нижній межі діяльного шару ґрунту; остання приймається постійною протягом періоду інтегрування;

в) потоків явного і прихованого тепла. Ці потоки параметризуються декількома способами в залежності від обраної параметризації ПГШ. В моделі MM5 такими параметризаціями є:

- інтегральна аеродинамічна параметризація Дірдорффа, що є дуже економічною з погляду машинного часу. У цій схемі потоки залежать від стійкості атмосфери (від числа Річардсона), швидкості вітру й інших параметрів, а приземний потік вологи, крім того, - від типу підстильної поверхні;

- модель високого розділення Блекадара використовується для прогнозу вертикального перемішування, кількості руху, потенціальної температури, відношення суміші, хмарних вологи і льоду. Потоки вологи розраховуються за теорією подібності. У моделі в залежності від числа Річардсона можливі чотири випадки: стійкість, механічно змушена турбулентність, нестійкість – змушена конвекція і нестійкість - вільна конвекція. Перші три випадки відносяться до нічних умов, при яких звичайно відзначається стійка чи слабко нестійка стратифікація.

У моделі розраховується більшість параметрів граничного шару:

- вертикальна дифузія. Для передбачення прогностичних перемінних вище шару перемішування використовується *K-теорія*;

- волога вертикальна дифузія. Ця схема подібна попередній, але в ній явно враховується вологість при розрахунку коефіцієнта вертикальної дифузії.

Тут також потрібно відзначити, що при розрахунку прогностичних змінних у планетарному граничному шарі враховується стан підстильної поверхні, що задається окремим масивом даних, які мають різне горизонтальне розділення.

Корекція сухої конвекції. У деяких випадках у модельній атмосфері виникають нададіабатичні шари. Тоді, якщо не використовується схема параметризації ПГШ Блекадара, застосовується проста схема для виключення таких шарів. Коли вертикальний градієнт потенціальної температури перевищує критичний, дані зондування коректуються так, щоб не змінювалася середньозважена температура, а вертикальний градієнт потенціальної температури після корекції дорівнював би критичному. При цьому вологість у відкоректованих шарах передбачається такою, що не змінюється по вертикалі.

Фізика опадів. У MM5 існує кілька схем трактування фізики опадів, що підрозділяються на дві групи: явні схеми і неявні. У моделі MM5 також передбачена можливість скласти прогноз, коли вологість розглядається як пасивна субстанція, чи коли не приймаються до уваги тільки ефекти реалізації прихованого тепла. Послідовно опишемо основні

схеми.

а) Процеси опадів роздільного масштабу. Ці схеми активізуються кожного разу, коли досягається насичення у вузлах розрахункової сітки. Найпростішим шляхом є вилучення перенасичення (опадів) і додавання прихованого тепла в рівняння термодинаміки. Більш складними є наступні схеми:

- явний розрахунок еволюції хмарних крапель, дощових крапель, снігу і льоду, у якій розглядаються процеси при температурі нижче 0°C . У цій схемі враховуються процеси випаровування, конденсації і сублімації.

- схема змішаної фази, у якій може існувати переохолоджена вода при температурі нижче 0°C та сніг, що не розтанув, – вище 0°C .

б) Неявні схеми параметризації купчастої хмарності:

- схема Куо. У цій схемі кількість конвективного переносу вологості визначається за допомогою вертикально проінтегрованої конвергенції вологості. Зворотний зв'язок з процесами великого масштабу (вертикальний розподіл нагрівання і зволоження) визначається за допомогою нормалізованих вертикальних профілів конвективного нагрівання і зволоження і дивергенції вертикального вихрового потоку водяної пари, зв'язаного з купчастою конвекцією. У відповідності з цим переписується рівняння термодинаміки.

- змінена схема Аракави-Шуберта. У MM5 використовується схема, яка удосконалена Греллом і ін., що дозволяє успішно використовувати схему для мезомасштабних моделей у помірних широтах. Задача параметризації поділяється на три частини: статичне регулювання, динамічне регулювання і зворотний зв'язок. Перша частина звичайно містить у собі модель хмар і розраховує термодинамічні властивості хмар, друга визначає кількість і положення конвективних осередків і третя визначає вертикальний розподіл шарів нагрівання і зволоження.

- схема Грелла є дуже простою, вона розроблена для запобігання помилок першого порядку. Хмари розглядаються як дві сталі циркуляції з залученням у них повітря знизу і зверху. За винятком залучення в нижній і верхній частинах хмари не існує прямого перемішування між внутрішньо-хмарним і навколишнім повітрям. У цій схемі потік маси постійний з висотою і не існує залучення чи витікання маси уздовж крайки хмари;

- параметризація дрібної конвекції. Ця схема створена для параметризації планетарного граничного шару при наявності дрібної конвекції і веж купчастих хмар, що не дають опадів. Вона розроблена у випадку, коли не використовуються схеми параметризації ПГШ більш високого порядку, а також процесів дрібної конвекції в середній тропосфері, що є наслідком інших ефектів підсіткового масштабу

(наприклад, радіаційного вихолоджування вершин хмар). Деякі елементи цієї параметризації ґрунтуються на схемі Аракави-Шуберта, інші – на схемі Грелла. Хмари при цьому характеризуються великим перемішуванням, з них не випадають опади і не має місця залучення знизу конвективного утворення. Вони є результатом впливу тільки процесів підсіткового масштабу.

Атмосферна радіація. У MM5 передбачені схеми параметризації довгохвильової і короткохвильової радіації, що взаємодіє з атмосферою, полями хмарності й опадів, а також з підстильною поверхнею.

Схема довгохвильової радіації базується на методі широкосмугової випромінювальної здатності. Швидкість радіаційного нагрівання на всіх рівнях моделі розраховується як функція спрямованих нагору і вниз потоків, що, в свою чергу, залежать від вмісту в шарі повітря води в різних фазах і вуглекислого газу.

Схема короткохвильової радіації. Спрямована вниз складова короткохвильового потоку розраховується з врахуванням:

зенітного кута Сонця, який впливає на величину спрямованої вниз складової і довжину шляху;

хмари, що має своє альbedo і коефіцієнт поглинання;

ясне небо, де існує розсіювання і поглинання водяною парою.

Розраховані по схемах атмосферної радіації сонячний і інфрачервоний потоки використовуються в бюджеті енергії земної поверхні.

6.2.2 Параметризації процесів підсіткового масштабу у моделі ALADIN

У моделі ALADIN, так само як у MM5, існують різні схеми параметризації фізичних процесів. У діючій версії моделі ефекти підсіткових процесів включені безпосередньо в рівняння динаміки атмосфери. Коротко опишемо деякі з них.

Для випадку, коли повна маса зберігається (використовується для короткострокового прогнозу), припускається, що випаровування з підстильної поверхні компенсується потоком сухого повітря з атмосфери. Аналогічно компенсується потік за рахунок опадів, чим досягається сталість маси. У рівнянні нерозривності присутній турбулентний вертикальний потік маси. Рівняння кількості руху і вологи містить турбулентні потоки за рахунок дифузії й опадів. Рівняння термодинаміки містить у собі вертикальну і горизонтальну дифузії і всі підсіткові

джерела тепла: за рахунок опадів і випаровування, за рахунок нагрівання рідких опадів, за рахунок радіаційного нагрівання й ін.

Розрахунок прогностичних перемінних у планетарному граничному шарі виконується за допомогою *K-теорії* і теорії подібності Моніна-Обухова. При цьому враховуються відмінність сухої і вологої атмосфери, а також варіації в стійкості атмосфери і вплив дрібної конвекції.

Також у моделі ALADIN враховується вплив орографії на повітряні течії. При цьому приймаються до уваги підйом чи опускання повітря, а також процеси блокування.

У моделі ALADIN вплив підстильної поверхні враховується за допомогою параметрів ґрунту, типу вегетації рослин, їхніх фізичних характеристик, а також шляхом розрахунків наступних прогностичних змінних: температури приземного шару повітря, підстильної поверхні і рослин, температури ґрунту, вмісту вологи в приземному шарі повітря і в ґрунті. Приземна температура розраховується за схемою, подібною до тієї, що використана у MM5.

Для врахування впливу глибокої конвекції в моделі ALADIN використовується схема, що базується на параметризації Куо. Також у моделі враховуються опади, що формуються за рахунок великомасштабних процесів і конвективної діяльності.

Приплив тепла за рахунок радіації враховується так само, як і в моделі Європейського Центра Середньострокових прогнозів погоди. При цьому можливе врахування радіації від Місяця.

У цілому ж, в обох розглянутих моделях фізична параметризація атмосферних процесів досить різноманітна й охоплює широкий спектр процесів. Однак реалізація цих параметризацій відрізняється внаслідок різних підходів до складання чисельних прогнозів. Нагадаємо, що MM5 заснована на скінченнорізницевій апроксимації рівнянь гідротермодинаміки, а ALADIN є спектральною моделлю.

Оскільки система MM5 спочатку розроблялася для досліджень у реальному режимі часу, то для її роботи необхідні наступні дані:

- топографія і характеристики підстильної поверхні (у категоріях);
- сіткові атмосферні дані, що, принаймні, містять у собі такі перемінні: вітер, температура, відносна вологість і геопотенціальна висота на ізобаричних поверхнях: 1000, 850, 700, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100 гПа, а також метеорологічні величини поблизу підстильної поверхні;
- дані спостережень, що містять аерологічні (радіозонди) і приземні відомості.

6.3 Адаптація мезомасштабних моделей до умов України

6.3.1 Проблема вибору схеми телескопізації

Якість чисельних прогнозів погоди значною мірою залежить від просторового розділення модельної сітки. При великому кроці сітки доводиться використовувати ті або інші способи параметризації підсіткових масштабів, щоб неявним образом врахувати атмосферні процеси, розміри яких менше відстані між вузлами сітки. Такий підхід містить певну помилку опису макромасштабних процесів і виключає можливість опису еволюції дрібномасштабних процесів. У той же час використання модельної сітки з дрібним кроком для області дослідження з великим просторовим кроком, у порівнянні з розмірами континентів, обмежується поточними комп'ютерними ресурсами. Тільки кілька провідних світових центрів мають можливість виконувати чисельні розрахунки з високим розділенням (до 10 км) у глобальній області.

Одним із шляхів рішення даної проблеми може бути підхід, що отримав назву телескопізація сіток. Його суть полягає у використанні декількох взаємно- або односпрямовано зв'язаних сіток з різними розмірами і розділеннями. Це дозволяє моделювати еволюцію макромасштабних процесів над глобальною або континентальною областю з великим кроком і потім передавати крайові умови на певні обмежені області з високим розділенням, зберігаючи при цьому безперервність розвитку процесів і забезпечуючи можливість її детального чисельного опису над досліджуваною обмеженою областю.

На практиці такий підхід може бути реалізований декількома способами. Розглянемо два з них, практично реалізованих у двох типах чисельних моделей: MM5 і ARPEGE-ALADIN [1, 4].

6.3.2 Схема телескопізації в моделі MM5

Модель MM5 підтримує можливість багаторазової і паралельної телескопізації сіток, до дев'яти областей на чотирьох рівнях одночасно. При односпрямованій передачі інформації від материнської області до дочірньої співвідношення між розділенням сіток може бути довільним. У

той же час, при взаємодії між областями, на їхні просторові розділення накладається жорстке співвідношення 1:3. У цьому випадку інформація від материнської області дочірній передається через межі останньої, а зворотний зв'язок здійснюється через загальні точки всередині дочірньої області. Взаємодія між областями може задаватися для будь-якого довільного відрізка часу в межах інтервалу інтегрування. Використання телескопізації в моделі вимагає попередньої підготовки відповідних файлів топографії, масок океан-континент і підстильної поверхні для кожної області, що використовується у процесі моделювання.

Для реалізації тестових чисельних розрахунків над територією України була обрана дво-рівнева схема телескопізації для областей, показаних на рисунках 6.2 та 6.3. Розміри і межі областей визначалися на основі таких міркувань. Материнська область грубого розділення включає Північну Атлантику і Європу, Середземне і Чорне моря, Скандинавію і Східно-Європейську рівнину. Ці регіони є ключовими для формування і розвитку синоптичних процесів, що впливають на погодні умови над Україною. Дочірня область покриває безпосередньо територію України та прилеглу акваторію Чорного та Азовського морів.

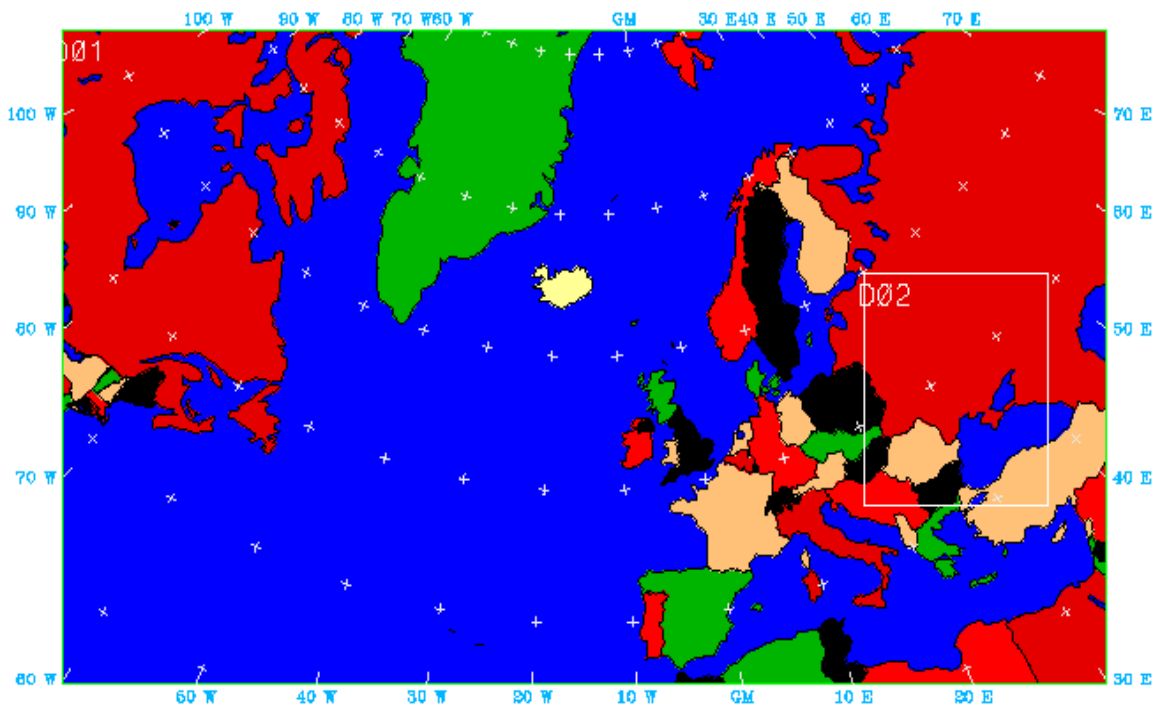


Рис. 6.2 – Материнська область з грубим розділенням

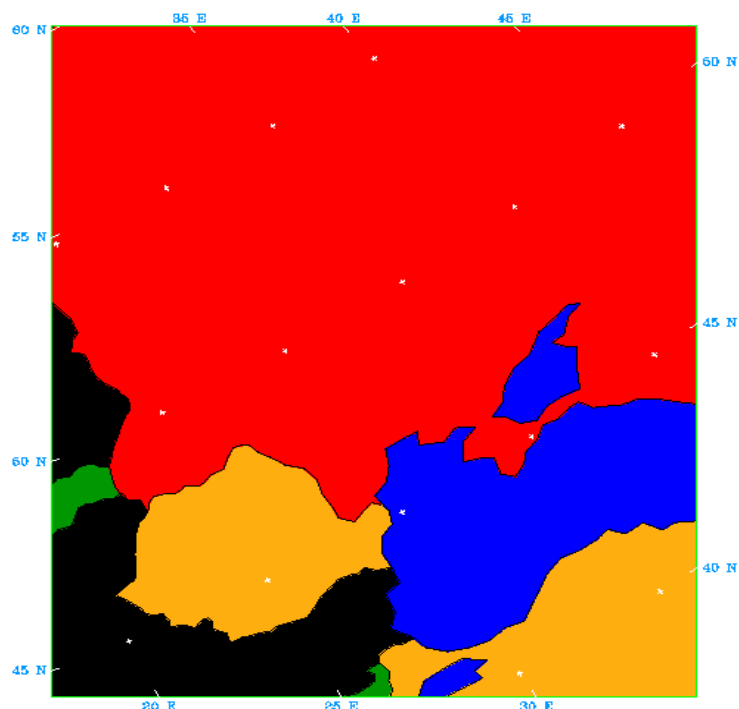


Рис. 6.3 – Дочірня область з дрібним розділенням (вона виділена на рис. 6.2 у вигляді прямокутника)

6.3.2.1 Формування горизонтальних і вертикальних сіток

У моделі ММ5 використовується горизонтальна сітка Аракави-Лемба з рознесенням векторних і скалярних величин. У силу програмно-алгоритмічних особливостей реалізації моделі, розмір сітки може досягати величини 199 x 199 вузлів. Допускається використання сіток і більшого розміру, але це супроводжується залученням додаткових комп'ютерних ресурсів, доступних не на всіх платформах. При реалізації моделі для території України використовуються такі розміри сіток, які покривають описані вище області.

Материнська область грубого розділення від Північної Америки до Уралу має розмір 199 x 119 із кроком сітки 45 км. Дочірня область безпосередньо над Україною містить 106 x 127 вузлів із кроком 15 км. Положення материнської області задається за допомогою двох вхідних параметрів: центральної широти і центральної довготи області. Розміщення дочірньої області усередині материнської визначається через координати нижнього лівого кута сітки. Найбільш придатної для збереження співвідношень між довжинами і площами в середніх широтах є конформна проекція Ламберта.

У моделі MM5 реалізується вертикальна σ -система координат. Така вертикальна координатна система забезпечує форму нижньої межі відповідно до рельєфу місцевості, тоді як верхня зберігається плоскою для кожної з обраних проекцій. Проміжні рівні послідовно вирівнюються від нижньої границі до верхньої. Їхнє положення визначається безрозмірною величиною, σ , що задається співвідношенням

$$\sigma = (p - p_t) / (p_s - p_t),$$

де p_s – тиск біля поверхні землі;

p_t – тиск на рівні який вважається верхньою межею атмосфери (як правило 10 або 100 гПа);

p – тиск на відповідному модельному рівні.

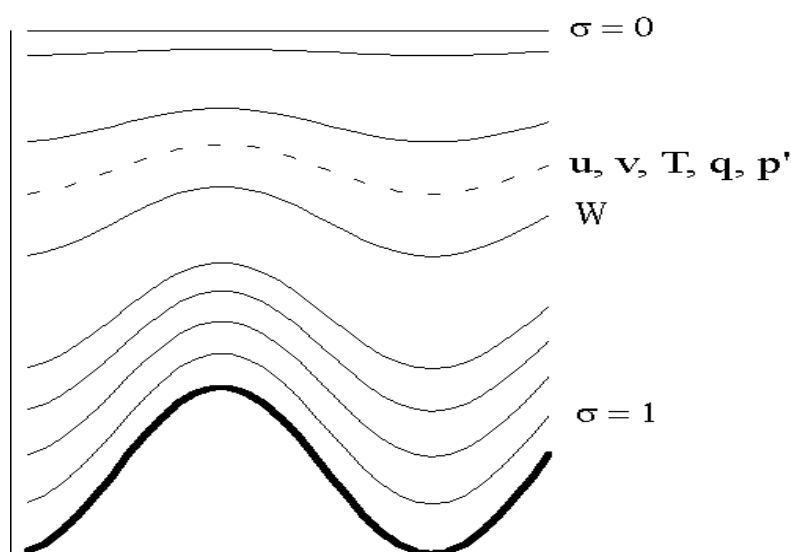


Рис. 6.4 – Вертикальна σ -система координат

Вертикальне розділення у моделі задається списком величин σ між значеннями 0 і 1, причому необов'язково з рівномірним кроком (рис.6.4). Це дозволяє задавати більш детальне розділення у граничному шарі, і збільшувати крок з висотою, зберігаючи комп'ютерні ресурси. Усі модельні змінні, за винятком вертикальної швидкості, розраховуються для центрів відповідних виділених шарів і відносяться до половинних рівнів. Вертикальна швидкість розраховується на повних вертикальних рівнях. Загальне число рівнів не залежить від конфігурації моделі і визначається тільки доступними обчислювальними потужностями. У тестових експериментах задається 23 рівня по вертикалі, з яких 8 розташовані в граничному шарі. Прогностичні поля можуть бути представлені як на σ -рівнях моделі, так і на стандартних та додаткових ізобаричних поверхнях. Відповідна інтерполяція виконується по стандартній процедурі в одному з модулів моделі при заданні необхідних параметрів.

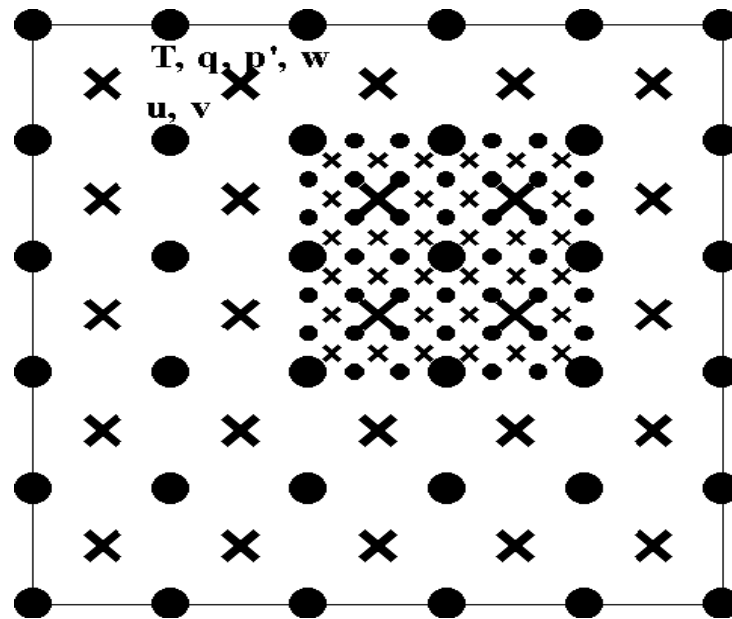


Рис. 6.5 – Горизонтальна сітка Аракави-Лемба

6.3.2.2 Рельєф, категорії підстильної поверхні і маски океан-континент

Визначення крайових умов на нижній границі виконується в модулі TERRAIN. Ця процедура формує файл, що містить дані про підвищення підстильної поверхні, типах ґрунтів, рослинному покритті, вертикальних профілях температури у верхньому шарі ґрунту, масках суша-море. Вся інформація файлу представляється в оцифрованому вигляді в узлах обраної сітки після інтерполяції даних з файлів глобального покриття. Ці вихідні файли доступні для 6 розділень: 1^0 , $30'$, $10'$, $5'$, $2'$ і $30''$. У залежності від розділення для материнської і дочірньої моделей обираються відповідні файли глобального розділення, відмінні для різних рівнів телескопізації. У тестових експериментах використовувались файли 10-хвилинного розділення для материнської області, і 5-хвилинного розділення для дочірньої області над Україною. Обрана інформація може бути представлена також у графічному вигляді як карти рельєфу підстильної поверхні і берегової лінії (рисунки 6.6 та 6.7), а також карти типів ґрунту і рослинного покриття (рисунки 6.8 та 6.9). Для виконаних розрахунків використовується найбільш повне джерело, що містить 25 категорій підстильної поверхні (табл. 6.1). Кожна категорія поверхні має відповідні значення альbedo, вологості, випромінювальної здатності, параметра шорсткості і термічної інерції для двох сезонів, теплого і холодного.

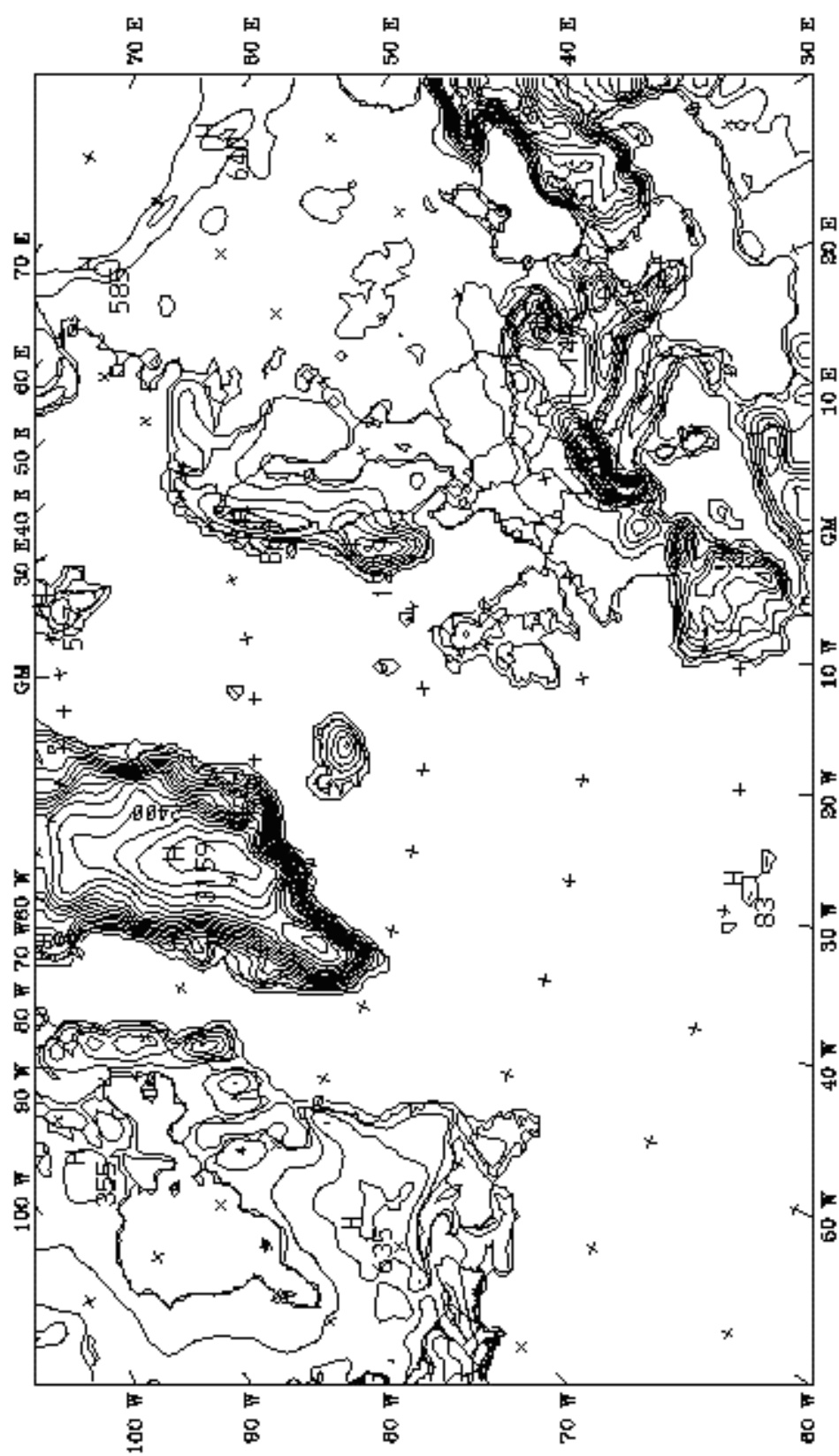


Рис. 6.6 – Висоти рельєфу для материнської області

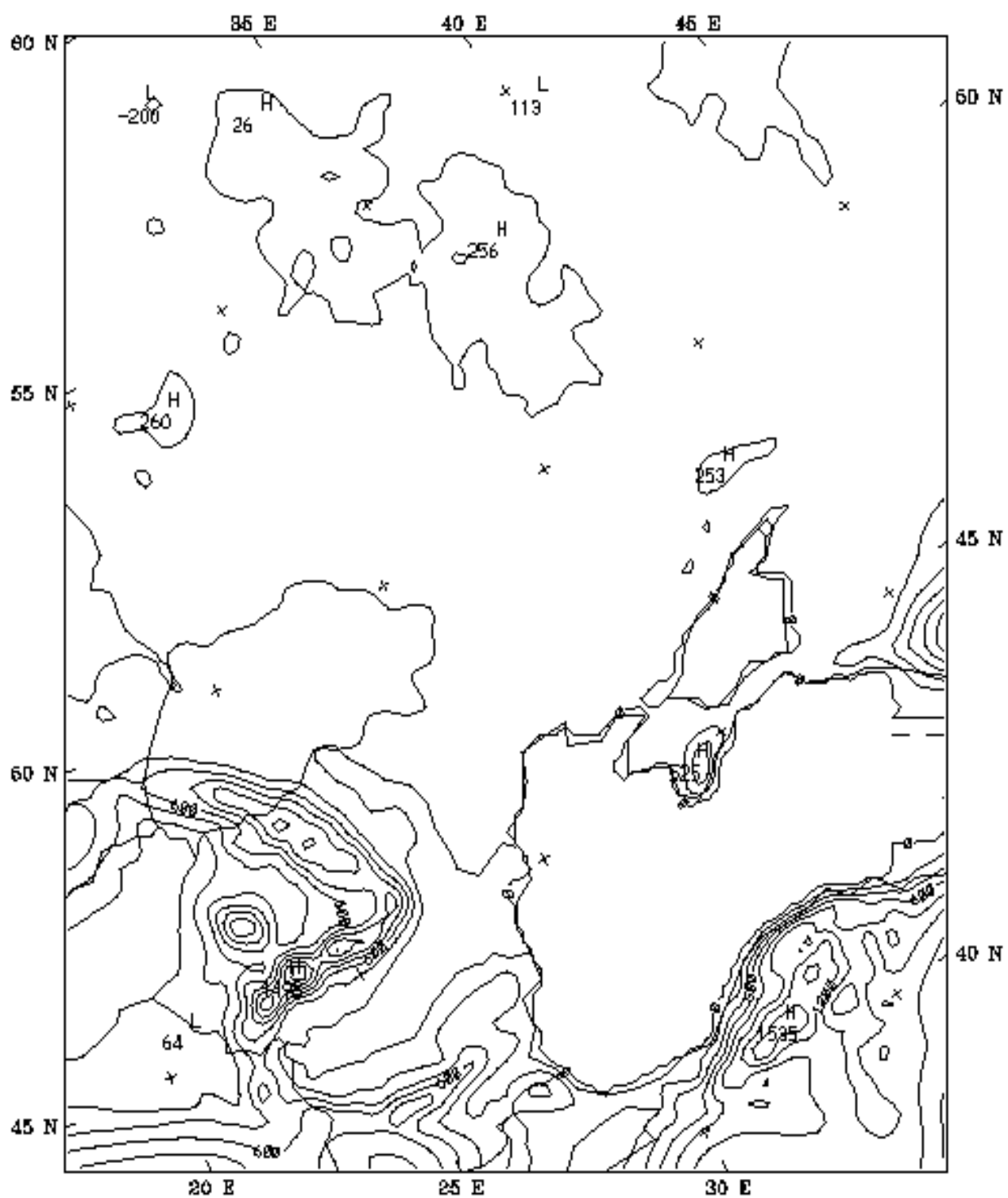


Рис. 6.7 – Висоти рельєфу для дочірньої області

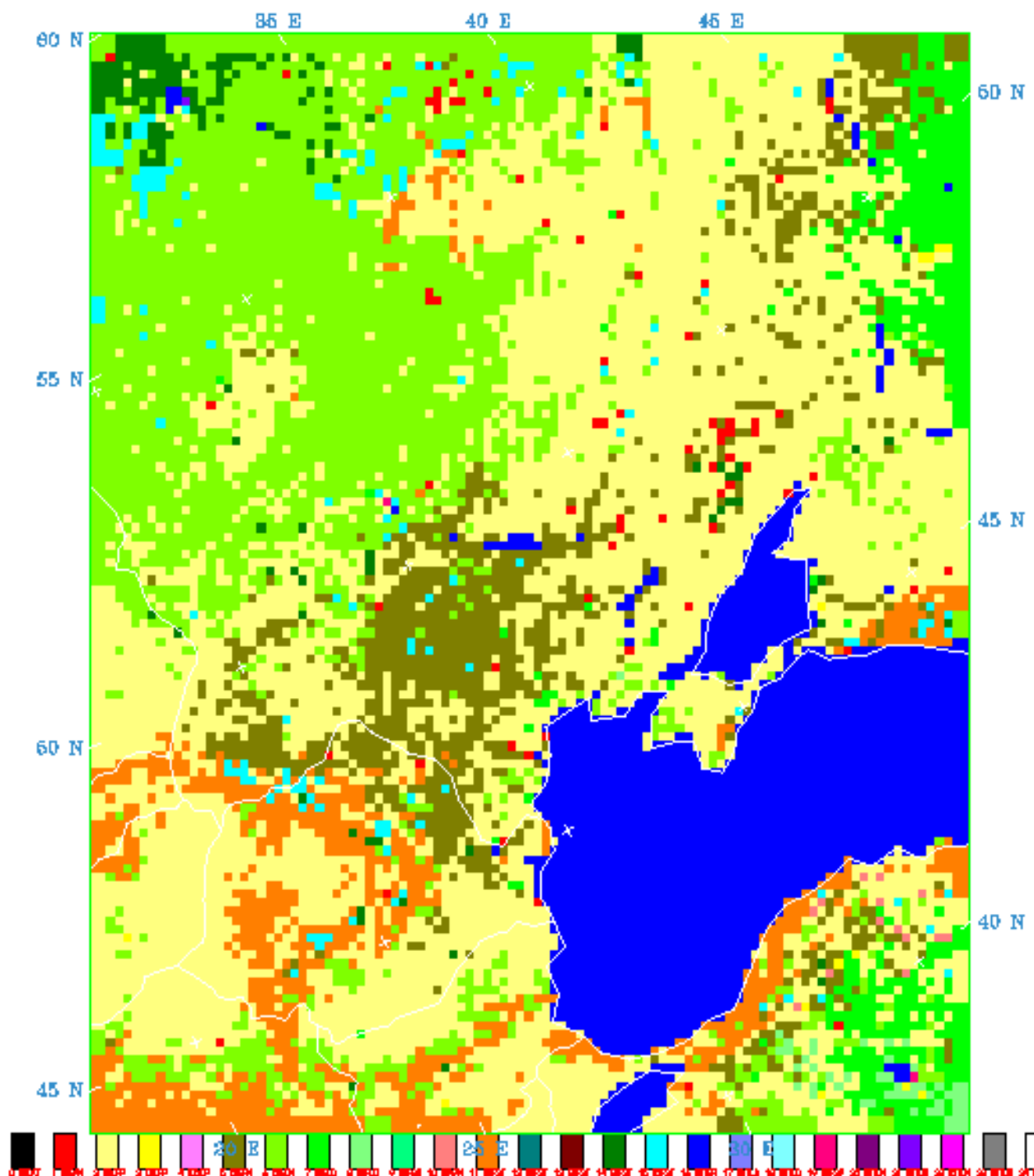


Рис. 6.9 – Типи підстильної поверхні для дочірньої області

Таблиця 6.1. – Типи та характеристики підстильної поверхні для моделі ММ5

№ п/ п	Опис ПП	Альбедо (%)		Вологість (%)		Випромінювал ьна здатність (% при 9 нм)		Параметр шорсткост і (см)		Термічна інерція (Дж см ⁻² Кс ^{-1/2})	
		Літо	Зим а	Літ о	Зим а	Літо	Зима	Літо	Зим а	Літо	Зима
1	Міська застройка	18	18	5	10	88	88	50	50	0.13	0.13
2	С/г угіддя	17	23	30	60	92	92	15	5	0.17	0.17
3	Область, що зайнята травою	19	23	15	30	92	92	12	10	0.13	0.17
4	Листовий ліс	16	17	30	60	93	93	50	50	0.17	0.21
5	Хвойний ліс	12	12	30	60	95	95	50	50	0.17	0.21
6	Змішаний ліс	14	14	35	70	95	95	40	40	0.21	0.25
7	Вода	8	8	100	100	98	98	0.01	0.01	0.25	0.25
8	Область, що зайнята болотами чи волога земля	14	14	50	75	95	95	20	20	0.25	0.25
9	Пустеля	25	25	2	5	85	85	10	10	0.08	0.08
10	Тундра	15	70	50	90	92	92	10	10	0.21	0.21
11	Тривалий лід	55	70	95	95	95	95	5	5	0.21	0.21
12	Тропічний ліс	12	12	50	50	95	95	50	50	0.21	0.21
13	Савана	20	20	15	15	92	92	15	15	0.13	0.13

6.3.3 Схеми телескопізації в моделі ARPEGE-ALADIN

ARPEGE-ALADIN – це об'єднана система двох моделей, глобальної спектральної і бі-спектральної моделі для обмеженої території. Така система працює за таким принципом. На першому етапі виконується інтегрування глобальної спектральної моделі ARPEGE, що вимагає значних комп'ютерних ресурсів, і яке можливо тільки на платформах Meteo-France. Діагностичні і прогностичні поля моделі ARPEGE використовуються як початкові і граничні для моделі високого розділення по обмеженій території ALADIN. Кожна країна, учасниця проекту, одержує такі початкові і граничні умови для своєї території і виконує потрібні розрахунки на власних платформах.

6.3.3.1 Формування горизонтальних і вертикальних сіток

Горизонтальне розділення в таких розрахунках може досягати 3-5 км, і залежить, головним чином, від наявних комп'ютерних потужностей. На відміну від MM5, на етапі телескопізації немає будь-яких твердих обмежень, що накладаються на кратність вузлів у межах загальної частини сітки для материнської і дочірньої областей. Оптимальні границі в моделі ALADIN визначаються, головним чином, відповідно до розташування вузлів сітки Гаусса, що використовується в моделі ARPEGE, а також дотриманням умови бі-періодичності. Сітка Гаусса одна з двох типів сіток, яка використана у глобальних спектральних моделях. Вона забезпечує покриття сфери комірками однакового розміру. При цьому кількість вузлів уздовж кола широти зменшується до полюса, а крок по довготі в градусах не залишається сталим. У силу таких особливостей, не всяке число вузлів сітки Гаусса може бути обране для формування модельної області, а отже, і не всяке усікання по хвильовому числу реалізовано. На сьогоднішній день ECMWF і Meteo-France в оперативній практиці використовують усікання T511. Припустимими також можуть бути усікання для глобальних спектральних моделей: T213, T199, T149, T119, T106, T95, T79, T63, T42, T31, T21.

Інтегрування моделі високого розділення по обмеженій території виконується на сітці Lanczos, сумісної із сіткою Гаусса. Вона має основну і буферні зони. Бі-спектральна модель накладає визначені вимоги на

дотримання умови бі-періодичності при заповненні області моделювання за відомою інформацією на граничних зонах. Для дотримання цієї умови ALADIN оператор реалізується в два етапи. Спочатку, використовуючи граничні значення на кожній стороні області, отримані з ARPEGE, виконується інтерполяція за допомогою сплайн-функцій по напрямках північ-південь та захід-схід і попереднє заповнення області моделювання. Потім ітераційним шляхом, з використанням 9-точкового оператора Лапласа, провадиться згладжування, після дії якого одержують результуючі поля.

У моделюючій системі ARPEGE/ALADIN використовується прогресивна гібридна сітка по вертикалі. Вона поєднує в собі особливості двох типів вертикальних сіток, z -системи і σ -системи вертикальних координат. Перша має перевагу при опису атмосферних процесів, безпосередньо зв'язаних із впливом орографії підстильної поверхні. Друга забезпечує правильну форму координатної площини на верхній границі. За допомогою вагових коефіцієнтів обидва типи вертикальних координат поєднуються в єдину систему, забезпечуючи плавний перехід від z -системи координат біля поверхні Землі до σ -системи координат на верхній межі.

6.3.3.2 Процеси на підстильній поверхні і маски океан-континент

Для опису процесів, що протікають на підстильній поверхні, у моделі ALADIN використовується французька схема взаємодії ґрунту й атмосфери ISBA. Ця схема містить у собі параметризацію обміну енергією і вологістю через поверхню суші. В ній використовується мінімальний набір параметрів, що, забезпечує надійний опис фізичних процесів на континентальній поверхні. Він включає термічні особливості і характеристики вологовмісту ґрунтів відповідно до їх складу, а також термічну інерцію різних типів рослинного покриття і його здатність впливати на процеси випаровування з ґрунту в залежності від опадів і точки роси. Вихідна класифікація ґрунтів і рослинного покриття в схемі ISBA включає 53 типи рослинності і 23 типи ґрунтів. Ця глибоко специфічна схема бере до уваги не тільки тип рослинності та її фракцію, але і такі характеристики як індекс листя і глибину кореневої системи, тобто фактори, що мають визначений вплив на динаміку турбулентного

обміну, процеси випаровування і вологообміну на підстильній поверхні. Усі типи ґрунтів і рослинного покриття об'єднані у чотири категорії, що безпосередньо застосовуються в моделі ALADIN:

- водяна поверхня,
- крижане покриття,
- відкритий ґрунт,
- рослинне покриття.

Маски океан-континент забезпечують поділ підстильної поверхні на континентальну і морську. Інформація про границю суша-море зберігається у файлах з розподілом від 1 до 0.10^0 у залежності від регіону. Передбачено також уведення файлів користувача з довільним розділенням. Набір вторинних параметрів забезпечує деталізацію основних категорій. Вони включають усю необхідну інформацію про характеристики ґрунту (вологонасиченість, теплоємність, тепло- та вологопровідність), про рослинне покриття (індекс листа, швидкість перерозподілу вологи, параметр шорсткості для температури) і таке інше. У залежності від розв'язуваних задач інтегрування моделі може виконуватися з різним ступенем деталізації опису процесів на підстильній поверхні та взаємодії її з атмосферою, і до повного відключення цього блоку.

Далі розглядається ще одна прогностична модель WRF, яка використовується в оперативній практиці Росії та України. Але тут викладена одна із версій моделі WRF-NMM, яка адаптована до умов далекосхідного регіону Росії і включає блок для прогнозу тайфунів; в цьому полягає особливість цієї версії.

6.4 Скінченнорізницева модель WRF

Чисельний регіональний прогноз полів метеовеличин і тропічних циклонів здійснюється на основі негідростатичної мезомасштабної моделі WRF-NMM. Тут WRF є скороченням від Weather Research and Forecasting. Друга складова цієї скороченої назви моделі означає її динамічне ядро (NMM є скороченням від Nonhydrostatic Mesoscale Model). Це динамічне ядро було розроблено в NCEP.

Модель WRF-NMM почала експлуатуватися в NCEP (США) з 2006 року.

В Гідрометцентрі Росії експерименти по складанню прогнозів за допомогою моделі WRF-NMM було розпочато в 2009 р.

В Далекосхідному науково-дослідному гідрометеорологічному інституті (ДВНІГМІ) модель WRF-NMM була зібрана і адаптована під далекосхідний регіон співробітниками відділу метеорології і тропічних циклонів (ВМТЦ) В.В. Крохіним і А.Ю. Філем в 2011 році. Експерименти по складанню прогнозів за моделлю WRF-NMM розпочалися в цьому ж році. Технологія і методологія розрахунку прогнозів за цією моделлю була розроблена у ВМТЦ і ОМА ФГБУ «ДВНІГМІ» і функціонує на обчислювальних засобах ФГБУ «ДВНІГМІ». Прогностична продукція моделі має статус експериментальної і не є офіційним прогнозом Гідрометеорологічного центру.

6.4.1 Загальні відомості про модель

Автоматизована оперативна технологія короткострокового (до 72 годин) прогнозу полів метеовеличин і тропічних циклонів за допомогою моделі WRF-NMM була реалізована для території Далекого Сходу, далекосхідних морів і північно-західної частини Тихого океану. Область прогнозу (основна, материнська сітка) з центром (30°пн.ш., 140°сх.д.) була обмежена приблизно 10°півд.ш.– 65°півн.ш. і 100°сх.д.– 170° зх.д. В тайфунній версії моделі WRF-NMM (Hurricane WRF, HWRF) положення області прогнозу може декілька зміщуватися з урахуванням розташування прогнозованого тропічного циклону.

Прогнози розраховуються по регіональній негідростатичній моделі WRF з динамічним ядром NMM з 43 рівнями по вертикалі і горизонтальним розділенням 27/9 км.

В даному варіанті моделі WRF-NMM прийняті наступні рівні (всього 43) з безрозмірними висотами $\frac{p}{p_0}$, де p – тиск на відповідному рівні,

$p_0 = 1000$ гПа.

1.0000000, .9919699, .9827400, .9721600, .9600599, .9462600, .9306099,
 .9129300, .8930600, .8708600, .8462000, .8190300, .7893100, .7570800,
 .7224600, .6856500, .6469100, .6066099, .5651600, .5230500, .4807700,
 .4388600, .3978000, .3580500, .3200099, .2840100, .2502900, .2190100,
 .1902600, .1640600, .1403600, .1190600, .1000500, .0831600, .0682400,
 .0551200, .0436200, .0335700, .0248200, .0172200, .0106300, .0049200,
 .0000000.

Отже, на нижньому рівні тиск складає 1000 гПа, а на рівні, що приймається за верхню межу атмосфери, тиск дорівнює нулю.

В звичайній (не ураганній) версії моделі материнська область розрахунку включає 216х342 вузлів з розділенням по горизонталі 0,18 градуса (близько 7 км); вкладена область розрахунку складається з 307х634 вузлів з розділенням 0,06 градуса, близько 9 км (рис. 6.10).

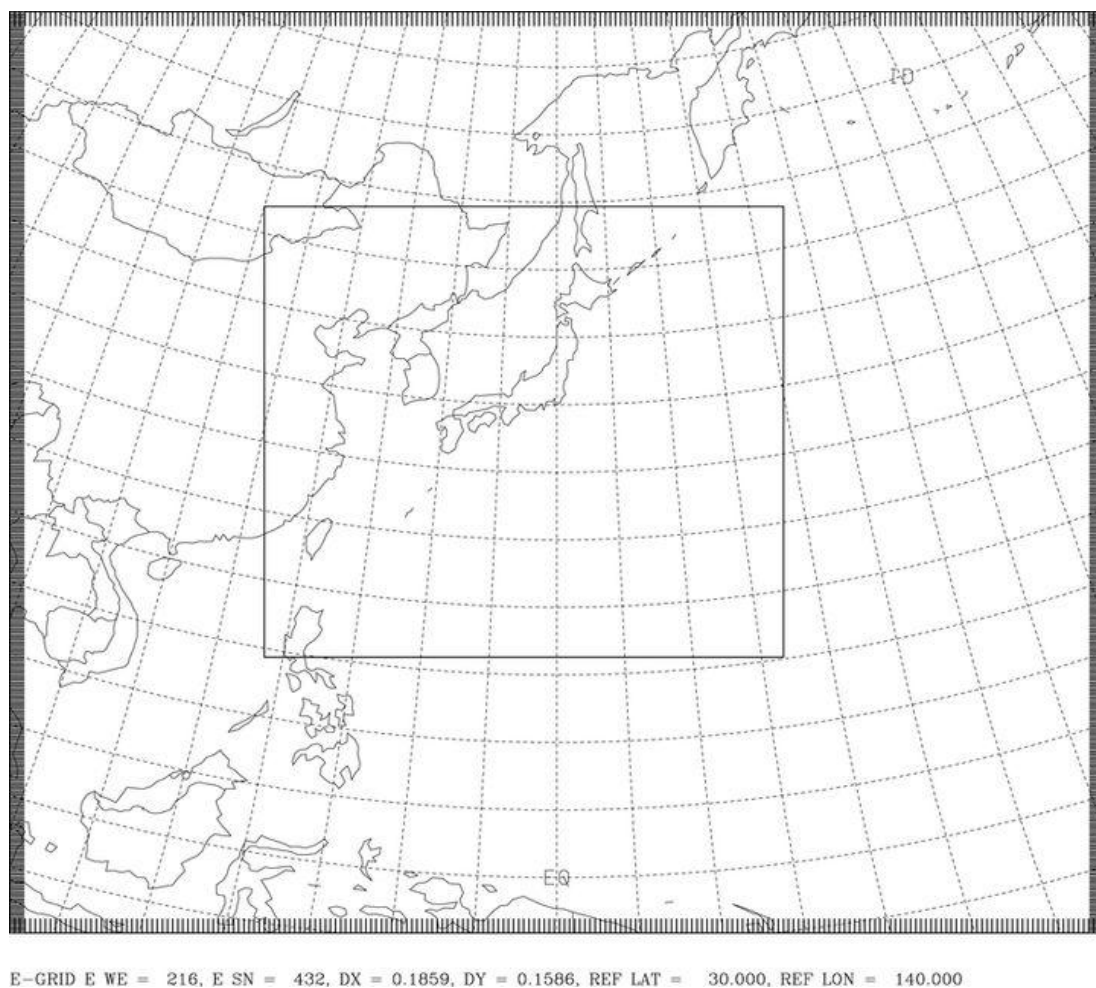


Рис. 6.10 – Область розрахунку 307х634 вузлів з розділенням 0,06 градуса (біля 9 км)

В тайфунній версії моделі (Hurricane WRF, HWRF) материнська область розрахунку включає 216х342 вузлів з розділенням 0,18 градуса, а вкладена область розрахунку переміщується разом з вихором тропічного циклону, при цьому кількість вузлів області складає 60х100 вузлів з розділенням 0,06 градусf (рис. 6.11).

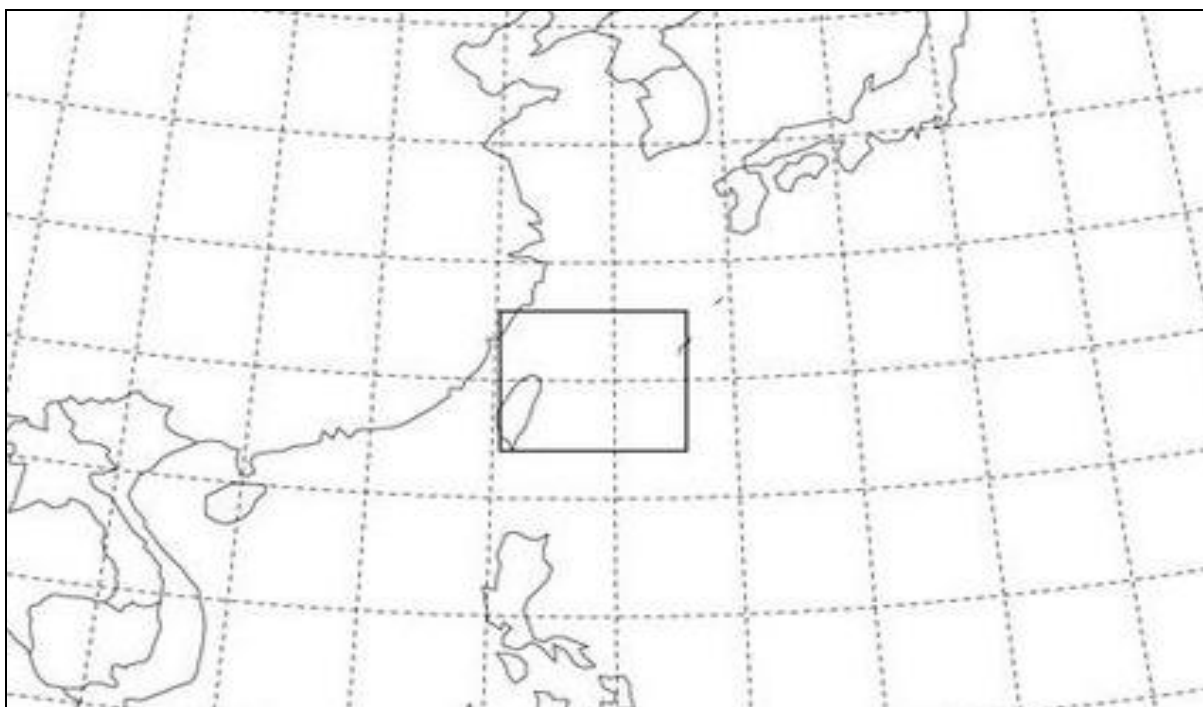


Рис. 6.11 – Область розрахунку 60х100 вузлів з розділенням 0,06 градуса (біля 9 км)

6.4.2 Вихідна система рівнянь моделі

Особливості моделі WRF-NMM полягають в тому, що в ній в явному вигляді відокремлені члени, які присутні в гідростатичних моделях, від членів, що з'являються внаслідок врахування негідростатичності.

В спрощеному вигляді система прогностичних і діагностичних рівнянь моделі WRF-NMM в σ -системі координат на площині трансформованої широтно-довготної проекції містить 9 рівнянь і 9 невідомих, тобто є замкненою. Вона має наступний вигляд:

1) рівняння руху (по горизонталі) в векторній формі:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -(1 - \varepsilon)\nabla_s \Phi - \alpha \vec{k} \times \vec{f},$$

2) рівняння збереження маси в негідростатичному формулюванні:

$$w = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla_s \Phi + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right),$$

3) рівняння збереження маси в гідростатичному формулюванні:

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \left(\nabla_s \vec{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial t} \right) = 0,$$

4) рівняння негідростатичності (відношення вертикального прискорення до прискорення вільного падіння):

$$\varepsilon = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla_s w + \dot{\sigma} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right),$$

5) проміжне рівняння припливу тепла:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_1 = -\vec{V} \cdot \nabla_s T - \dot{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\alpha}{C_p} \left[\vec{V} \cdot \nabla_s p - (1 + \varepsilon) \int \nabla_s (\mu \vec{V}) d\sigma' \right],$$

6) остаточне рівняння припливу тепла:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_2 = \frac{\alpha}{C_p} \left[\frac{\partial p}{\partial t} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial \pi}{\partial t} \right],$$

7) проміжне рівняння тенденції геопотенціалу:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\mu \alpha,$$

8) рівняння руху для вертикальної швидкості:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\mu(1 + \varepsilon),$$

9) діагностичне рівняння стану:

$$\alpha = \frac{RT}{p}.$$

У вищенаведених рівняннях прийняті такі умовні позначення:

$\mu = \pi_s - \pi_t$, де π_s та π_t – гідростатичний тиск відповідно біля земної поверхні і на рівні, який приймається за верхню межу атмосфери;

\vec{V} – вектор горизонтальної швидкості;

$g = 9,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ – прискорення вільного падіння;

$R = 287,04 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ – питома газова стала для сухого повітря;

C_p – питома теплоємність при постійному тиску;

$\dot{\sigma}$ – вертикальна швидкість в σ -системі координат;

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{P_s} \right);$$

∇_s – плоский, тобто двовимірний диференціальний, оператор в σ -системі;

α – питомий об'єм

Невідомими є:

$\Phi(x, y, \pi, t)$ – геопотенціал поверхонь $\pi = \text{const}$;

$T(x, y, \pi, t)$ – температура повітря;

$p_s(x, y, t)$ – приземний тиск;

$\vec{V}(x, y, \pi, t)$ – швидкість вітру;

$p = p(x, y, \pi, t)$ – повний тиск (гідростатичний і негідростатичний);

w – вертикальна швидкість;

q – вологість повітря;

e – параметр негідростатичності.

В повному вигляді вихідна система рівнянь також включає джерела (стоки) в рівняннях руху і припливу тепла. Також додаються рівняння перенесення вологи в різних фазових станах.

Чисельне розв'язання системи рівнянь моделі WRF-NMM виконується за допомогою скінченнорізницевої апроксимації похідних у вузлах розхитаної “Е” сітки Аракави.

В моделі WRF-NMM використовуються повернені сферичні координати, коли екватор зміщується в середину області розрахунків. Такі координати використовуються також в моделях Eta (США) і в локальній моделі LM-COSMO (Метеорологічна служба Німеччини, Гідрометцентр Росії). Ці координати зручні тим, що при порівняно невеликих розмірах області, характерних для локальних і регіональних моделей, розрахунки виконуються на майже рівномірній (в лінійному значенні) широтно-довготній сітці. Всі плоскі оператори, які присутні в рівняннях, є операторами в сферичній системі координат.

6.4.3 Параметризації, що використовуються в моделі

Параметризації радіації і розрахунку опадів використовують різні геофізичні, хімічні і астрономічні дані, наприклад пору року і доби, зенітний кут сонця, вміст озону в одиничному стовпі атмосфери, альbedo підстильної поверхні тощо.

Для параметризації мікрофізичних процесів використовується схема Феррье.

Параметризаційна схема для довгохвильової і короткохвильової радіації враховує поглинання водяною парою, діоксидом вуглецю, озоном, а також мікрофізичні ефекти.

Для параметризації приземного шару використовується схема Моніна-Обухова, яка базується на теорії розмірності і подібності; при цьому використовується масштаб шорсткості, отриманий Зілітінкевичем.

Параметризація планетарного граничного шару атмосфери здійснюється шляхом включення в модель схеми високого розділення з неявним представленням шару залучення як частини нелокального по К шару змішення.

Для параметризації конвекції і хмарності використовується схема Аракави-Шуберта, яка заснована на підході „потoku маси”.

Для взаємодії ґрунт-атмосфера використовується одношарова схема «GFDL SLAB».

Параметризація впливу урбанізації не задіяна в цій моделі.

Моделлю засвоюється рельєф з кроком в 30 секунд.

6.4.4 Тайфунний блок моделі

Як початкова інформація про наявність (або відсутність) тропічних циклонів північно-західної частини Тихого океану використовуються дані текстових телеграм З'єднаного центру попередження про тайфуни США (Joint Typhoon Warning Centre, JTWC), які оперативно обновлюються на серверах Глобальної системи прогнозів Національного центру екологічного прогнозу США.

У ВМТЦ ведеться безперервний моніторинг тропічних циклонів північно-західної частини Тихого океану, прямо або побічно впливаючих на російський Далекий Схід і далекосхідні моря, тобто зону відповідальності ДВНІГМІ. Шляхом обробки обширного емпіричного матеріалу був визначений так званий тривожний район, тобто географічна

область знаходження ТЦ, які в наступні трое діб можуть впливати на Далекий Схід.

У випадку наявності тропічного циклону в тривожному районі, запускається тайфунний варіант моделі WRF-NMM – модель Hurricane WRF (HWRf). Від звичайної моделі WRF-NMM модель HWRf відрізняється наявністю блоку ініціалізації вихору тропічного циклону і рухомою вкладеною сіткою, що базується на системі стеження за областю тропічного циклону (рис. 6.12).

Тропічні циклони в своїй більшості розвиваються над океанами, територія яких погано висвітлена метеорологічними даними. Через це тропічні циклони виявляються недостатньо глибокими і розмитими, вони також слабо виражаються за даними об'єктивного аналізу метеорологічних полів або зовсім не виявляються. Для того, щоб належним чином описати тропічні циклони в початкових полях моделі, необхідно вирішити так звану задачу ініціалізації тропічного циклону (ініціалізації вихору).

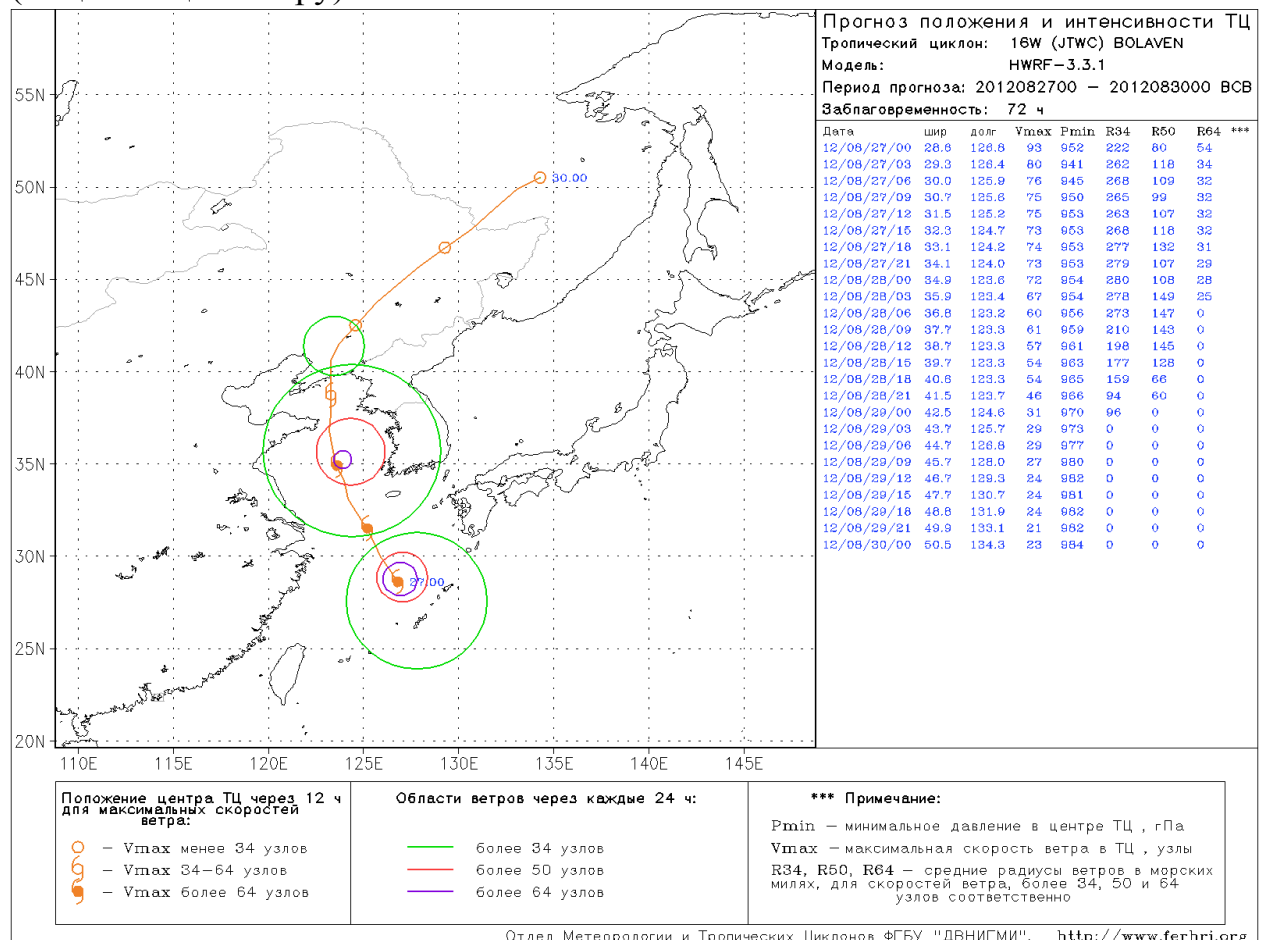


Рис. 6.12 - Прогноз положення та інтенсивності тропічного циклону за період 27–30 серпня 2012 р., здійснений в ФГБУ «ДВНІГМІ» за допомогою моделі HWRf

В схемі ініціалізації для моделі HWRF, розробленої в Лабораторії геофізичної гідродинаміки (GFDL) Принстонського університету США, передбачається розділення початкового поля аналізу на фоновий потік і, власне, циркуляцію самого тропічного циклону, яка надалі будується з двох складових: симетричної і несиметричної циркуляції. Далі йде виділення області з циркуляцією тропічного циклону, перенесення центру тропічного циклону в точку з істинними координатами, видалення початкової і упрощення «циркуляції штучного тропічного циклону». При цьому «штучний тропічний циклон» може бути не цілком узгоджений з оточуючим його потоком, і моделі звичайно потрібен якийсь час для відновлення нормальної структури тропічного циклону (звичайно 6-12 годин).

6.4.5 Вихідна продукція

Поля всіх основних метеорологічних величин:

геопотенціал, вітер (компоненти та швидкість і напрям), температура, вологість на двадцяти п'яти стандартних ізобаричних поверхнях 1000, 975, 950, 925, 900, 875, 850, 825, 800, 775, 750, 700, 650, 600, 550, 500, 450, 400, 350, 300, 250, 200, 150, 100, 50 гПа;

приземні поля:

приземний тиск (тиск на рівні моря), вітер на висоті 10 м, температура на висоті 2 м, опади: за кожні три години та накопичені від початкового терміну до поточного (вказаного на карті) часу.

Форма представлення прогнозів основних метеовеличин:

- всі поля в цифровому вигляді (формат: GRIB1) з часовим інтервалом 3 години;
- карти-слайди приземні: приземний тиск і опади (тригодинні і накопичені) з часовим інтервалом 3 години (рис. 6.13);
- карти-слайди висотні: відносна вологість на рівні 850 гПа з часовим інтервалом 3 години.

Comb: Acc Total precip (shaded-in) & MSLP (hPa) 20120827 00Z Tau 030

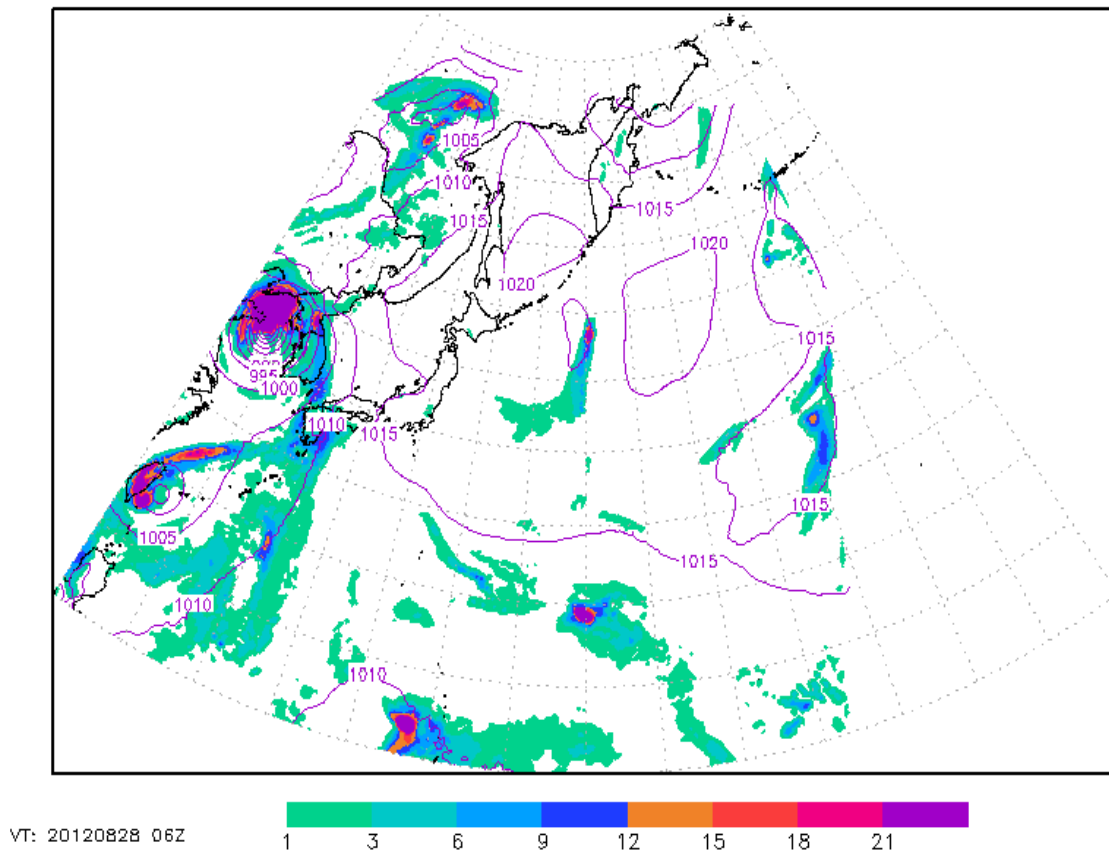


Рис. 6.13 - Приземна карта-слайд з полем приземного тиску (гПа) та накопичених опадів (мм/6 год.) біля поверхні землі за 6 год. 28 серпня 2012 р

6.5 Загальні відомості про ансамблеві прогнози погоди

Найбільш перспективними і сучасними методами чисельного прогнозу погоди є ансамблеві методи. Вони дозволяють не лише точніше прогнозувати еволюцію стану атмосфери, але і дати споживачеві принципово нову інформацію — апріорну оцінку якості прогнозу. Ансамблеві системи прогнозу можуть бути реалізовані тільки на потужній суперкомп'ютерній техніці. Нині вони активно розвиваються в різних країнах світу, включаючи Росію.

Точність чисельного прогнозу погоди залежить від просторово-часового розділення моделі атмосфери, а також від точності і повноти параметризацій процесів підсіткового масштабу. В той же час можливості підвищення розділення моделі і уточнення параметризацій на практиці завжди обмежені потужністю наявних комп'ютерних ресурсів. Крім того, для прогнозу потрібні дані спостережень за станом атмосфери, які здійснюються по всьому світу в єдині фіксовані строки і передаються в метеорологічні центри. Обчислення по моделі атмосфери, що засновані на цих даних, мають бути завершені впродовж строго обмеженого інтервалу часу. Наприклад, в Гідрометцентрі Росії на добовий прогноз відводиться не більше 20 хвилин. Адже прогноз ще потрібно встигнути передати по каналах зв'язку і своєчасно донести до споживача. Саме тому програмне забезпечення моделей атмосфери давно вже переорієнтоване на використання багатопроцесорних і багатоядерних систем. І саме тому провідні метеорологічні центри світу оснащені потужними суперкомп'ютерами. Так, безумовний лідер в прогнозах погоди на терміни до 14 днів - Європейський центр середньострокових прогнозів погоди (ЕЦСПП) має у своєму розпорядженні два кластери по 8320 ядер кожен з максимальною продуктивністю по 156.42 Tflops, які займають 25 і 26 місце в списку Top500 найпотужніших комп'ютерів світу. У першій сотні цього списку знаходяться і комп'ютерні системи американської і англійської метеослужб. У кінці 2008 року суперкомп'ютерна система з двох комп'ютерів з максимальною продуктивністю 16 і 11 Tflops була встановлена в Росгідрометі (комп'ютери не входять в Top500, проте займають 8 і 12 місце в списку Top50 найпотужніших комп'ютерів СНД). Це дозволило збільшити просторово-часове розділення сучасних моделей атмосфери і збільшити точність чисельного прогнозування погоди метеослужбою Росії. Крім того, саме завдяки суперкомп'ютеру з'явилася можливість впровадження в оперативну практику Гідрометцентру Росії нового перспективного методу прогнозу — ансамблевого. Зупинимось на цьому детальніше.

Існує два основні підходи до розв'язання задачі чисельного прогнозу погоди — детермінований і ансамблевий. У першому випадку проводиться одноразове інтегрування системи рівнянь моделі атмосфери з використанням інформації про початковий стан атмосфери, яка отримується за допомогою спеціальних процедур засвоєння даних спостережень, а також, даних, що вважаються найбільш наближеними до

істинного стану атмосфери. У другому — виконується багатократне інтегрування рівнянь однієї або декількох моделей атмосфери з використанням декількох наборів, «збурених» в межах помилки спостережень даних про початковий стан атмосфери. Ансамблевий прогноз вимагає в десятки разів більших комп'ютерних ресурсів, проте саме цей підхід вважається в теперішній час найбільш перспективним і фізично обґрунтованим. Пояснюється це так.

Для того, щоб моделювати майбутній стан атмосфери, потрібно знати її стан у поточний момент часу. Проте початковий стан атмосфери неможливо описати точно, тому що число даних спостережень недостатнє (і завжди буде недостатнє) в порівнянні з числом ступенів свободи атмосфери; крім того, спостереження неоднорідно розподілені в просторі і в часі, містять інструментальну помилку тощо. Це має принципове значення, оскільки із-за хаотичної і нелінійної природи атмосферних процесів навіть дуже малі помилки у визначенні початкового стану атмосфери можуть привести до істотних помилок в опису її еволюції. Додамо до цього ще неточність даних про стан земної поверхні і недосконалість самих моделей атмосфери. Усе це призводить до того, що результати чисельних прогнозів завжди містять (і завжди будуть містити) деяку невизначеність (неточність). І сьогодні Всесвітня Метеорологічна Організація ставить перед прогностичними центрами завдання: надати споживачеві не лише максимально точний прогноз, але і дати оцінку його невизначеності або достовірності. Форма представлення даних про невизначеність різна — це альтернативні сценарії розвитку ситуації, вірогідності різних явищ погоди, визначення областей, де прогноз виявляється найменш точним тощо. Особливо важлива така інформація у випадку екстремальних явищ погоди (зливи, сильні пориви вітру, різкі зниження температури і тому подібне). Застосування ансамблевого підходу дозволяє вирішити таке завдання.

Уперше ансамблеві системи прогнозу погоди були впроваджені в оперативну практику ЕЦСПП і метеорологічної служби США в 1992 році. І відтоді ансамблеві методи постійно розвиваються, а розміри ансамблів і просторово-часового розділення моделей, які оперативно використовуються у багатьох країнах світу, збільшуються з удосконаленням комп'ютерів. Максимальне число членів ансамблю — 51 при просторовому розділенні моделі близько 50 км — в теперішній час в системі ЕЦСПП. У 2007-2008 році ансамблева система

середньострокового прогнозу погоди була реалізована і в російській метеослужбі. Система заснована на використанні спектральної моделі атмосфери Гідрометцентру Росії, ансамбль включає 13 членів. Реалізація системи на суперкомп'ютері схематично представлена на рис. 6.14. Найближчим часом планується збільшення розміру ансамблю до 32 членів, поліпшення розділення спектральної моделі і додаткове використання скінченнорізницевої моделі. Кожен екземпляр завдання - «модель» буде реалізована на 32 процесорних елементах (PE), а усього для роботи системи їх знадобиться 1024. При цьому один з двох потужних комп'ютерів Росгидромета буде зайнятий практично повністю.

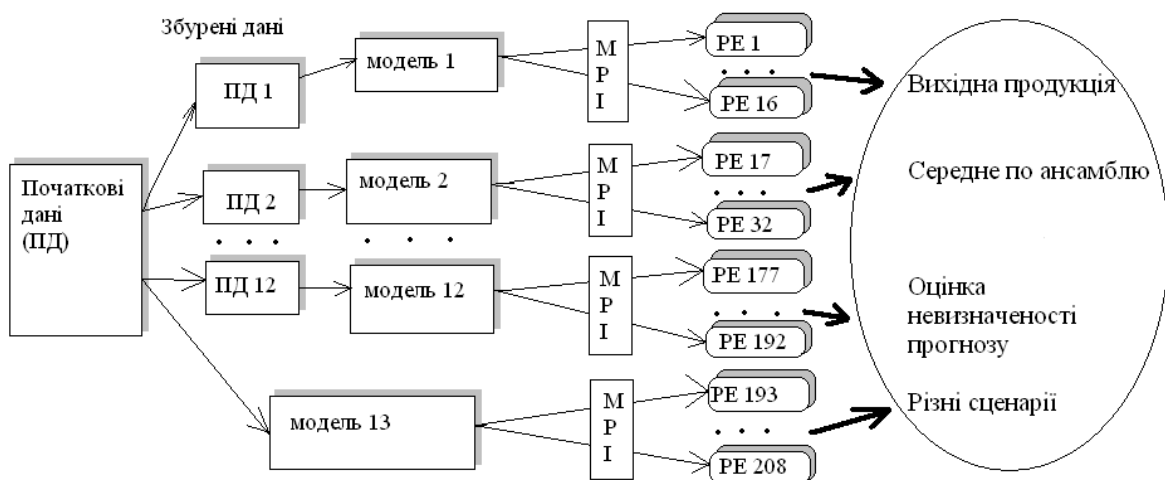


Рис. 6.14 - Конфігурація ансамблевої системи прогнозу на терміни до 14 діб, що реалізується в Гідрометцентрі Росії в теперішній час (для розрахунків потрібні 208 процесорних елементів одночасно)

Ансамблева система прогнозу дозволяє не лише точніше передбачити стан атмосфери, але і показати, де і коли прогноз заслуговує більшої або меншої довіри. Тому продукція ансамблевої системи значно різноманітніша, ніж продукція систем детермінованого прогнозу. Приклади її наведені на рис. 6.15, 6.16. Розкид ансамблю (середньоквадратичне відхилення усіх членів ансамблю прогнозів від середнього) вважається мірою невизначеності прогнозу.

Таким чином, використання ансамблевого методу прогнозу, що стало можливим з появою в Росгидрометі суперкомп'ютера, дає можливість отримати нову важливу інформацію про очікувану погоду.

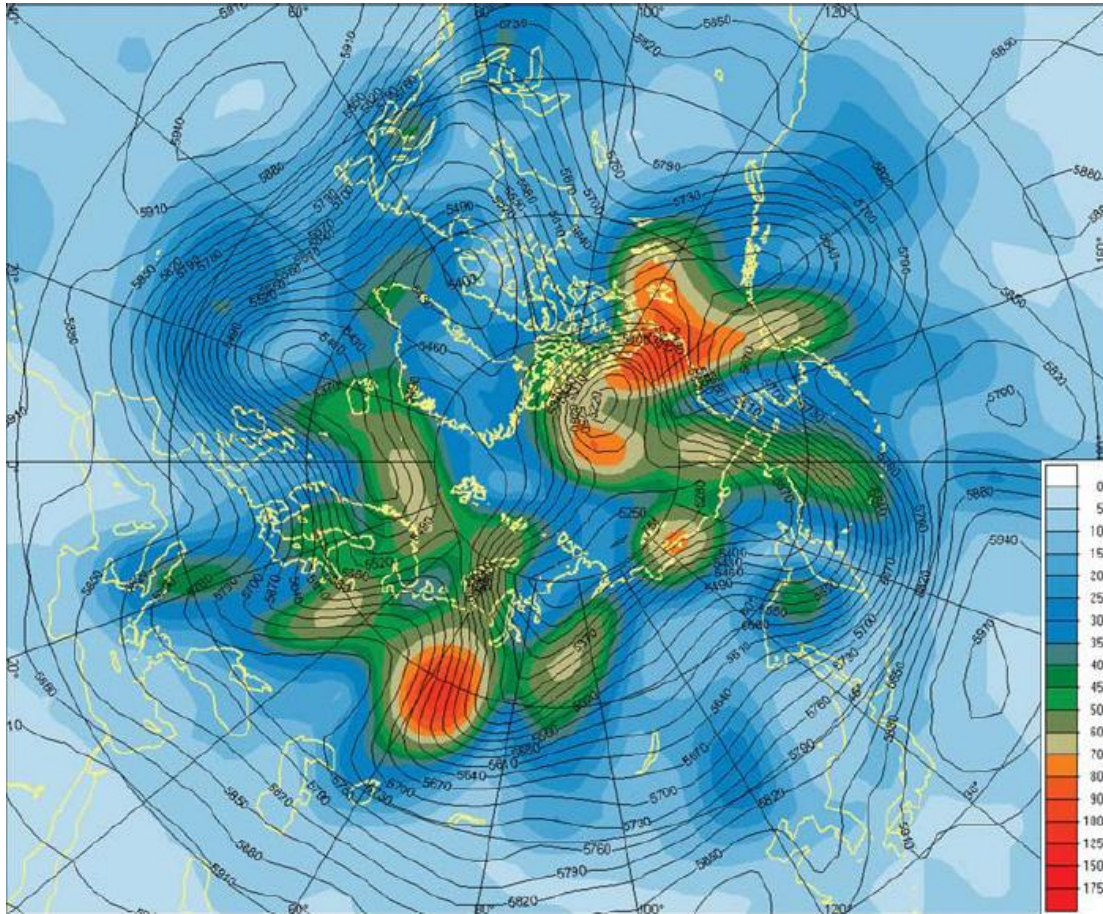


Рис. 6.15 - Висота ізобаричної поверхні 500 гПа. Середнє по ансамблю (ізолінії) і розкид ансамблю (колір). Прогноз найменш достовірний в областях з максимальним розкидом



Рис. 6.16 - Прогноз еволюції температури і тиску в Москві.

Примітка: Різними кольорами приведені прогнози за допомогою окремих членів ансамблю. Чим сильніше розходяться лінії, тим гірше передбачається значення метеорологічної змінної

Рисунок 6.16 показує, що ансамблевий проноз приземної температури є найбільш точним при передбачуваності до 96 годин, тобто до чотирьох діб;

Щодо приземного тиску, то тут високий ступінь достовірності зберігається при прогнозі на більш тривалий час (до п'яти діб); найгіршим прогноз приземного тиску стає при завчасності дев'ять діб і більше. Цей результат можна пояснити тим, що поле тиску є більш гладким і має меншу часову мінливість в порівняння з полем температури.

7 ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА ЯКОСТІ АТМОСФЕРНИХ МОДЕЛЕЙ РІЗНОГО МАСШТАБУ

В Гідрометцентрі Росії постійно проводиться порівняльна оцінка успішності вітчизняних і зарубіжних чисельних моделей атмосфери для основних елементів погоди (у поверхні Землі): температури повітря, опадів, тиску на рівні моря, вітру, вологості повітря.

В даному розділі представлені результати оцінок, які виконувалися для прогнозів завчасністю до 3 діб, що стартують в 00 ч ВСЧ, по території Росії (45-65° півн.ш., 27-57° сх.д.), яка відповідає європейській її частині. Оцінка прогнозів проводилася за даними 432 синоптичних станцій, розташованих на цій території, дані спостережень яких поступають в Гідрометцентр Росії. Велика частина з цих станцій - це станції Російської Федерації, але включені також станції України, Республіки Білорусь і Фінляндії. Період оцінки для температури повітря - з 1 липня по 15 вересня 2007 р., для інших метеорологічних елементів - з 1 червня по 15 вересня 2007 р.

Оцінювалися наступні моделі:

1. Глобальні:

- UKMO (Великобританія, в м. Ексетер знаходиться Метеоцентр Великобританії);
- NCEP (США);
- DWD (ФРН, в м. Оффенбах знаходиться Метеоцентр ФРН);
- T85L31 (спектральна модель Гідрометцентру Росії);
- PLAV - полулагранжева з постійним дозволом (автор - М.А. Толстих).

2. Регіональні:

- REGION (автор - В. М. Лосев);
- PLAV2 - полулагранжева зі змінним дозволом (автор - М.А. Толстих).

3. Мезомасштабні

- MM5 (відповідальний - К.Г. Рубінштейн);
- MM5 (відповідальний - Г. Ю. Калугіна, Московське гідрометбюро);
- ETA - model (відповідальний - И.В. Тросников);
- WRFZ (відповідальний - Р. Б. Зарипов);
- WRFJ (відповідальний - В. Д. Жупанів);
- Мезомасштабна модель (автор - Д.Я. Прессман).

Прогнози зарубіжних глобальних моделей поступають в Гідрометцентр Росії в коді GRIB у вузлах сітки 1,25°, 1°, 1,5° по широті і довготі відповідно для прогнозів UKMO, NCEP і DWD. Слід зазначити, що реальна сітка в цих моделях має крок 30-40 км на глобусі. Модель T85L31

має просторовий крок $\sim 2,5^\circ$ по широті і довготі, модель PLAV $0,72 \times 0,9^\circ$, модель PLAV2 ~ 40 км, регіональна модель ~ 75 км. Для мезомасштабних моделей просторовий крок складає від 15 до 20 км, і тільки в моделі Д.Я. Прессмана крок сітки дорівнює 10 км (ця модель охоплює територію лише 30×30 вузлів сітки, що приблизно відповідає території Московської області, і має завчасність прогнозу тільки до 36 год).

Відмітимо, що в усі моделі включена досить досконала система обліку різноманітних припливів тепла і неадіабатичних чинників, що дозволяє досить успішно давати прогноз таких складних метеоелементів, як приземна температура повітря і опади.

Моделі MM5, ETA - model, WRF розроблені в США. При оперативній експлуатації використовувалися поля американського об'єктивного аналізу і бічні межові умови з глобальних моделей США, які передавалися по Інтернету (відповідне програмне забезпечення вбудоване в ці моделі).

У мезомасштабній моделі Прессмана як бічні межові умови використовуються прогнози UKMO. Відповідальні за розрахунки по мезомасштабних моделях мали можливість варіювати численними зовнішніми параметрами цих моделей з метою досягнення кращих результатів прогнозів. Розрахунок прогнозів проводився на обчислювальних системах ГОЦ Росгидромета : Itanium, Tiger, Xeon та ін.

Для уніфікації оцінки успішності прогнозів усі мезомасштабні моделі (окрім моделі Прессмана) робили запис прогнозів усіх метеорологічних елементів, що перевірялися, через 6 годин для вищезгаданої області - Європейської території Росії (ЄТР) в сітці точок 81×121 вузлів з кроком $0,25^\circ$ по широті і довготі. Потім для усіх моделей робилася білінійна інтерполяція метеорологічних величин з прогностичних полів на станції і виконувалося подальше порівняння з фактичними даними спостережень. Усі дані фактичних спостережень пройшли через систему контролю в ході оперативного об'єктивного аналізу і не мали грубих помилок.

Крім того, була зроблена спроба в експериментальному режимі розрахувати прогнози приземної температури повітря і опадів по методу багатомодельного ансамблю. Для реалізації цього методу у випадку прогнозу температури повітря необхідно мати на кожній станції заздалегідь накопичений архів прогнозів температури (15-20 найближчих днів) різної завчасності по різних моделях.

Тоді розрахунок прогностичного значення метеовеличину робиться по формулі:

$$f = \sum_{j=1}^J W_j (f_j - c_j), \quad (7.1)$$

де f - будь-яка прогнозована змінна, j - номер схеми, що бере участь в ансамблі, J - кількість схем в ансамблі, W_j - вага j -ої схеми, c_j - середня

(систематична) помилка j -ої схеми.
Ваги в (7.1) задаються формулою

$$W_j = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{j=1}^J \sigma_j^{-2}}, \quad (7.2)$$

де σ_j - середньоквадратична помилка прогнозу j -ої схеми після віднімання її систематичної помилки. Розрахунок вагів робиться за даними архіву.

Для розрахунку прогнозів температури по методу багатомодельного ансамблю були відібрані зарубіжні моделі UKMO, NCEP і DWD, ті що дають кращі результати, і що задовольняють оперативним вимогам. Розраховувалися два варіанти ансамблів (UKMO, NCEP) і (UKMO, NCEP, DWD).

Усі фактичні і прогностичні значення метеорологічних величин на станціях для порівнювальних моделей записувалися в спеціальну базу даних з тривалим терміном зберігання, що полегшувало подальшу оцінку.

Оцінки проводилися окремо для:

- м. Москва (станція Всеросійський Виставковий Центр);
- приблизно для території Московської області (21 станція);
- обласних міст Центрального федерального округу (ЦФО): 17 станцій, включаючи ВВЦ, м. Москва;
- по усіх 432 станціях вибраної території (ЄТР).

У приведених нижче таблицях. 1-14 представлені оцінки прогнозів по усіх моделях для температури повітря (t), тиску на рівні моря (p), вітру (w) і точки роси (td). Був розрахований звичайний набір характеристик успішності прогнозів. Позначення в таблицях (BIAS, RMS, ABS, OTNO, ≤ 1 , ≤ 2 , ≤ 3 , > 3) відповідали середній, середньоквадратичній, середній абсолютній і відносній помилкам, а також відсотку забезпеченості прогнозів, що мають помилки менше або більше деяких порогових значень: 1, 2, 3°C (1, 2, 3 гПа або 1, 2, 3 м/с). N - кількість оцінених прогнозів. Слід зазначити, що з технічних причин число N для різних моделей виявилось не однаковим, що дещо понизило загальну достовірність порівняння.

З таблиць 1-5 витікає, що в середньому успішність прогнозів температури повітря на 48 і 72 год. дещо вищий, ніж на 36 і 60 год., що пояснюється впливом добового ходу температури, який недостатньо адекватно враховується в даних моделях атмосфери. Жирним шрифтом відмічені кращі показники успішності прогнозів.

У таблицях 6-10 представлені показники успішності прогнозів тиску на рівні моря із завчасністю від 24 до 72 год. З порівнюваних моделей атмосфери найменші похибки були у моделей UKMO, WRFZ, REGION.

Таблиця 1. - Оцінки прогнозів температури повітря (°C) на 24 год. по Московській області (21 станція)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	0,35	1,75	1,35	0,48	49	77	92	8	1612
NCEP	0,08	1,93	1,51	0,54	42	72	89	11	1528
DWD	1,05	2,16	1,73	0,62	36	66	84	16	1591
T85L	-0,49	2,52	1,94	0,70	36	61	79	21	1612
REGION	0,16	2,08	1,63	0,58	40	70	84	16	1591
PLAV	0,80	2,46	1,96	0,71	32	60	79	21	1612
PLAV2	0,98	2,61	2,11	0,76	29	55	75	25	1612
MM5R	-0,13	2,11	1,65	0,58	40	70	86	14	1382
MM5K	-0,12	2,04	1,54	0,55	46	72	86	14	1612
ETA	-0,45	2,89	2,17	0,79	34	60	75	25	1067
WRFZ	0,07	1,74	1,34	0,47	50	77	91	9	1507
WRFJ	0,85	1,91	1,47	0,52	44	75	89	11	1152
Pressman	-0,04	1,77	1,37	0,49	48	77	91	9	1612
An(UKMO,NCEP)	0,01	1,49	1,20	0,43	49	83	96	4	1612
An(UKMO,NCEP,DWD)	0,00	1,40	1,11	0,40	52	86	97	3	1612

Таблиця 2. - Оцінки прогнозів температури повітря (°C) на 36 год. по Московській області (21 станція)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	0,04	1,95	1,45	0,42	48	76	89	11	1611
NCEP	0,33	2,29	1,71	0,50	42	69	83	17	1527
DWD	0,80	2,55	1,94	0,55	35	63	80	20	1590
T85L	-0,35	3,37	2,77	0,80	22	43	61	39	1611
REGION	-0,35	2,48	2,06	0,59	27	55	77	23	1590
PLAV	-0,61	3,00	2,45	0,71	24	48	67	33	1611
PLAV2	-2,61	3,73	3,16	0,91	17	33	52	48	1611
MM5R	-2,49	3,48	2,90	0,84	19	39	56	44	1380
MM5K	-2,35	3,36	2,72	0,78	23	44	62	38	1611
ETA	1,39	2,82	2,16	0,65	34	59	73	27	1068
WRFZ	-0,81	2,19	1,78	0,51	33	65	85	15	1486
WRFJ	1,15	2,36	1,81	0,50	39	65	81	19	1130
Pressman	0,79	2,20	1,64	0,47	45	70	85	15	1611
An(UKMO,NCEP)	-0,11	1,81	1,37	0,39	48	78	91	9	1611
An(UKMO,NCEP,DWD)	-0,12	1,82	1,41	0,41	44	75	91	9	1611

Таблиця 3. – Оцінки прогнозів температури повітря (°C) на 48 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTN O	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	0,44	2,01	1,56	0,45	42	71	87	13	32886
NCEP	0,65	2,33	1,81	0,52	37	65	82	18	31173
DWD	1,02	2,36	1,86	0,53	35	63	81	19	32464
T85L	–0,26	3,01	2,40	0,68	27	51	69	31	32886
REGION	0,45	2,51	1,99	0,57	33	59	78	22	32457
PLAV	1,46	3,23	2,57	0,73	26	48	65	35	32886
PLAV2	1,48	3,31	2,62	0,75	26	47	65	35	32886
MM5R	–0,68	2,49	1,96	0,56	34	61	79	21	28169
MM5K	–0,39	2,41	1,89	0,54	35	62	80	20	32886
ETA	0,03	3,08	2,33	0,69	30	54	72	28	21781
WRFZ	0,17	2,11	1,65	0,47	40	68	85	15	30321
WRFJ	1,44	2,57	2,03	0,58	32	59	77	23	23081
An(UKMO,NCEP)	0,01	1,74	1,37	0,39	45	76	91	9	32886
An(UKMO,NCEP, DWD)	0,00	1,67	1,31	0,38	46	78	93	7	32886

Таблиця 4. - Оцінки прогнозів температури повітря (°C) на 60 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	0,43	2,59	1,89	0,48	40	66	81	19	32919
NCEP	1,00	2,91	2,21	0,57	31	57	75	25	31217
DWD	0,70	2,71	2,02	0,51	36	62	79	21	32491
T85L	–0,35	3,61	2,87	0,73	23	43	60	40	32919
PLAV	–0,92	3,49	2,80	0,72	22	43	61	39	32919
PLAV2	–2,97	4,34	3,63	0,93	15	30	45	55	32919
MM5R	–2,53	3,83	3,20	0,82	17	34	52	48	28242
WRFZ	–0,85	2,67	2,08	0,53	32	57	77	23	29933
WRFJ	1,49	3,05	2,27	0,56	32	57	74	26	22658
An(UKMO,NCEP)	–0,10	2,24	1,64	0,42	43	71	85	15	32919
An(UKMO,NCEP, DWD)	–0,11	2,14	1,59	0,41	42	72	87	13	32919

Таблиця 5. - Оцінки прогнозів температури повітря (°C) на 72 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	0,49	2,24	1,74	0,50	39	66	83	17	32886
NCEP	0,69	2,54	1,98	0,57	35	60	78	22	31173
DWD	1,08	2,56	2,01	0,57	33	59	78	22	32466
T85L	-0,25	3,72	2,99	0,85	22	41	58	42	32886
PLAV	1,56	3,59	2,85	0,81	23	44	60	40	32886
PLAV2	1,59	3,57	2,83	0,81	23	44	61	39	32886
MM5R	-0,83	2,75	2,17	0,61	30	56	74	26	28184
WRFZ	0,11	2,29	1,79	0,50	37	64	82	18	29898
WRFJ	1,49	2,84	2,22	0,64	30	55	73	27	22232
An(UKMO,NCEP)	-0,02	1,93	1,52	0,43	41	71	88	12	32886
An(UKMO,NCEP, DWD)	-0,02	1,86	1,46	0,42	43	73	89	11	32886

Таблиця 6. - Оцінки прогнозів тиску на рівні моря (гПа) на 24 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	-0,57	1,13	0,89	0,26	66	94	99	1	45295
NCEP	-0,79	1,33	1,06	0,29	56	89	98	2	43596
DWD	-0,75	1,38	1,08	0,30	57	88	97	3	45295
T85L	-0,08	1,59	1,19	0,38	55	84	94	6	45295
REGION	-0,20	1,18	0,91	0,27	66	92	98	2	44870
PLAV	-0,53	1,65	1,24	0,39	53	82	94	6	45295
PLAV2	-0,23	1,83	1,39	0,42	48	78	91	9	45295
MM5R	0,06	1,25	0,95	0,28	65	91	98	2	40211
MM5K	-0,35	1,18	0,90	0,27	67	93	98	2	44445
ETA	-0,50	1,65	1,35	0,37	43	80	95	5	34281
WRFZ	-0,60	1,17	0,92	0,27	65	93	99	1	37260
WRFJ	-0,99	1,50	1,22	0,36	49	84	96	4	34713

Таблиця 7. - Оцінки прогнозів тиску на рівні моря (гПа) на 36 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	−0,40	1,25	0,96	0,31	63	90	98	2	45390
NCEP	−0,90	1,57	1,27	0,35	47	82	96	4	43694
DWD	−0,92	1,73	1,33	0,39	49	79	93	7	44540
T85L	0,68	2,27	1,78	0,46	37	65	83	17	45390
REGION	−0,29	1,38	1,07	0,32	58	88	97	3	44965
PLAV	−1,50	2,34	1,87	0,47	33	62	82	18	45390
PLAV2	−0,30	1,85	1,43	0,43	46	76	91	9	45390
MM5R	0,49	1,77	1,37	0,41	48	77	91	9	40302
MM5K	−0,03	1,54	1,18	0,34	54	84	95	5	44539
ETA	−0,43	1,93	1,53	0,44	41	73	89	11	34357
WRFZ	0,10	1,29	0,99	0,31	62	90	98	2	36890
WRFJ	−1,03	1,78	1,42	0,43	44	76	92	8	34362

Таблиця 8. - Оцінки прогнозів тиску на рівні моря (гПа) на 48 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	−0,53	1,59	1,23	0,36	52	82	95	5	45295
NCEP	−1,09	1,95	1,58	0,43	38	71	90	10	43593
DWD	−1,35	2,25	1,76	0,47	37	66	84	16	45295
T85L	−0,09	2,77	2,08	0,53	35	61	77	23	45295
REGION	−0,09	1,65	1,25	0,38	52	82	94	6	44868
PLAV	−0,89	2,45	1,87	0,50	37	64	82	18	45295
PLAV2	0,64	2,60	1,99	0,51	34	62	80	20	45295
MM5R	0,28	2,00	1,51	0,42	45	74	88	12	40205
MM5K	−0,22	1,83	1,39	0,40	48	78	91	9	44448
ETA	−0,93	2,31	1,84	0,49	33	63	84	16	34279
WRFZ	−0,79	1,75	1,35	0,39	49	78	92	8	36832
WRFJ	−1,57	2,40	1,95	0,51	30	59	81	19	34294

Таблиця 9. - Оцінки прогнозів тиску на рівні моря (гПа) на 60 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	-0,20	1,78	1,34	0,39	50	79	92	8	45391
NCEP	-1,07	2,15	1,71	0,46	36	67	86	14	43696
DWD	-1,04	2,44	1,86	0,50	37	65	82	18	44549
T85L	0,55	3,39	2,63	0,58	26	48	66	34	45391
PLAV	-1,81	3,13	2,46	0,56	26	50	69	31	45391
PLAV2	-0,31	2,44	1,84	0,49	38	66	83	17	45391
MM5R	0,68	2,41	1,86	0,50	37	64	81	19	39899
WRFZ	-0,03	1,81	1,37	0,40	49	78	91	9	36466
WRFJ	-1,38	2,51	1,98	0,52	33	60	79	21	33939

Таблиця 10. - Оцінки прогнозів тиску на рівні моря (гПа) на 72 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	0,32	2,24	1,69	0,46	41	69	85	15	45298
NCEP	-1,11	2,48	1,97	0,51	32	60	79	21	43599
DWD	-1,29	3,03	2,31	0,57	30	55	73	27	45298
T85L	-0,25	3,88	2,96	0,62	25	46	62	38	45298
PLAV	-1,51	3,43	2,64	0,59	27	48	66	34	45298
PLAV2	0,34	2,92	2,21	0,55	32	57	75	25	45298
MM5R	0,57	2,73	2,06	0,53	35	60	77	23	39797
WRFZ	-0,69	2,22	1,71	0,46	39	68	85	15	36431
WRFJ	-1,53	2,93	2,31	0,56	28	53	72	28	33886

Прогноз приземного вітру і вологості в деяких моделях не передобчислюється. У разі наявності прогнозів вітру оцінювалася векторна помилка швидкості вітру. З таблиць 11 і 12 витікає, що усі моделі систематично завищують швидкість вітру (середня помилка вітру дорівнює абсолютній помилці в усіх моделях).

Таблиця 11. - Оцінки прогнозів вітру (w м/с) на 24 год. по ЦФО
(17 станцій)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	2,12	2,37	2,12	0,49	15	49	80	20	1788
NCEP	1,89	2,12	1,89	0,46	17	59	88	12	1723
DWD	2,28	2,52	2,28	0,52	11	41	78	22	1754
T85L	2,03	2,27	2,03	0,47	14	51	85	15	1788
PLAV	2,00	2,32	2,00	0,46	22	55	81	19	1788
PLAV2	1,95	2,26	1,95	0,45	23	56	83	17	1788
MM5R	2,78	3,08	2,78	0,65	10	30	57	43	1586
MM5K	2,36	2,62	2,36	0,54	12	39	71	29	1755
ETA	2,46	2,78	2,46	0,60	12	39	70	30	1353
WRFZ	2,33	2,63	2,33	0,56	12	44	76	24	1472
WRFJ	2,22	2,50	2,22	0,55	13	47	80	20	1373

Таблиця 12. - Оцінки прогнозів вітру (w м/с) на 36 год. по ЦФО
(17 станцій)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	2,37	2,74	2,37	0,35	15	44	72	28	1774
NCEP	2,31	2,69	2,31	0,34	15	48	75	25	1708
DWD	2,53	2,96	2,53	0,37	13	43	68	32	1742
T85L	2,47	2,90	2,47	0,36	15	44	71	29	1774
PLAV	2,47	2,88	2,47	0,36	14	44	70	30	774
PLAV2	2,31	2,69	2,31	0,34	15	48	74	26	1774
MM5R	2,66	3,07	2,66	0,37	13	39	64	36	1575
MM5K	2,60	3,01	2,60	0,39	12	39	67	33	1741
ETA	3,07	3,57	3,07	0,43	9	31	55	45	1342
WRFZ	3,09	3,54	3,09	0,44	8	29	54	46	1441
WRFJ	2,98	3,41	2,98	0,41	9	30	55	45	1341

Помилки при прогнозі вологості (температури точки роси) виявилися помітно вищі, ніж при прогнозі температури повітря (таблиця. 13 і 14).

Таблиця 13. - Оцінки прогнозів вологості (t_d °C) на 24 год. по ЦФО
(17 станцій)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤1	≤2	≤3	>3	N
UKMO	1,90	2,94	2,24	0,59	31	56	74	26	1679
NCEP	-1,51	2,51	1,93	0,55	36	62	79	21	1614
PLAV	0,56	2,39	1,82	0,48	39	65	81	19	1679
PLAV2	2,05	3,01	2,45	0,65	24	46	67	33	1679
MM5R	-0,56	1,87	1,45	0,38	46	74	90	10	1476
MM5K	-0,72	2,04	1,57	0,41	43	71	87	13	1645
ETA-model	-2,84	4,27	3,24	0,81	27	43	56	44	1239
WRFZ	0,06	1,63	1,24	0,33	52	80	93	7	1378
WRFJ	0,23	1,58	1,21	0,34	53	81	94	6	1277

Таблиця 14. - Оцінки прогнозів вологості ($t_d^{\circ}\text{C}$) на 36 год. по ЦФО (17 станцій)

МОДЕЛІ	BIAS	RMS	ABS	OTNO	≤ 1	≤ 2	≤ 3	> 3	N
UKMO	0,87	2,38	1,81	0,46	39	66	81	19	1682
NCEP	-1,06	2,64	2,07	0,52	32	58	77	23	1614
PLAV	2,94	4,69	3,77	0,96	15	32	48	52	1682
PLAV2	3,68	4,80	3,96	1,01	14	28	43	57	1682
MM5R	-0,09	2,58	1,98	0,51	35	61	79	21	1479
MM5K	-0,04	2,48	1,91	0,49	36	61	79	21	1650
ETA-model	-0,67	2,67	1,95	0,48	38	63	80	20	1240
WRFZ	0,54	2,46	1,93	0,49	34	62	78	22	1364
WRFJ	1,08	2,46	1,96	0,50	32	60	78	22	1261

Спроба зробити задовільний ансамблевий прогноз опадів по формулах (7.1) і (7.2) виявилася малоуспішною. Тому для прогнозу опадів був застосований багатомодельний ансамблевий метод, заснований на байєсовському підході, запропонований співробітником Гідрометцентру Росії В.А. Гордіним. Він же запропонував метод оцінки успішності прогнозів кількості опадів. Нехай x - фактична кількість фактичних опадів, виміряних на станції (мм), а y - прогностична кількість опадів для тієї ж станції. Погрішність пропонується оцінювати наступною емпірично підбраною безрозмірною величиною:

$$F(x, y) = \frac{(x - y)^2}{(x + y)^{3/2}} (1_{\text{мм}})^{-1/2}. \quad (7.3)$$

Критерій (7.3) підібраний так, що абсолютна похибка прогнозу менш значуща, коли і прогноз, і фактичне значення більші. На наступному етапі була побудована байєсовська схема прогнозу кількості опадів, коли відомі два предиктора (поки найкраща версія - використання UKMO, NCEP). Оптимізація параметрів схеми робилася чисельно за критерієм (7.3), на архіві даних 2800 станцій за друге півріччя 2006 р. Подальша перевірка показала, що в результаті оптимізації параметрів схеми прогнозу опадів вона покращується і в сенсі інших критеріїв оцінки прогнозу кількості опадів, що використалися раніше. Це у свою чергу підтверджує доцільність використання критерію (7.3).

Недолік байєсовського підходу - необхідність порівняно великого ансамблю для навчання. Тому в ансамбль доводиться включати різні географічні зони, різні сезони і, можливо, прогнози за схемами, що зазнали якісь зміни.

Для опадів оцінювався факт наявності опадів за відомими критеріями

(позначення в таблицях): U , U , U , P , P , P_{ir} , тобто загальна справджуваність, справджуваність прогнозу «опадів» і «без опадів», попередженість випадків з опадами, без опадів (усі ці значення в %) і критерій якості Пирси-Обухова. При оцінці прогнозу кількості опадів були розраховані середня (cr/os) і середня абсолютна помилки (ab/os) в мм/12 год. N , як і раніше, - кількість оцінених прогнозів. Оцінка успішності прогнозів опадів проводилася для завчасностей 18, 30, 42, 54 і 66 годин, оскільки на ЄТР виміри півдобових опадів робляться в 6 і 18 год. ВСЧ, тобто робляться порівняння опадів за синхронні терміни. У таблиці. 15-19 представлені характеристики успішності прогнозів опадів по станціях ЦФО і ЄТР.

Таблиця 15. - Оцінки прогнозів опадів (мм) на 18 год. по ЦФО (17 станцій)

МОДЕЛІ	U	U_{oc}	$U_{\bar{o}o}$	P_{oc}	$P_{\bar{o}o}$	P_{ir}	cr/os	ab/os	N
UKMO	57,7	35,5	98,1	97,2	45,4	0,43	1,50	2,09	1793
NCEP	75,8	49,1	93,0	82,0	73,8	0,56	0,53	1,46	1725
DWD	77,8	52,3	89,4	69,1	80,5	0,50	-0,42	1,04	1793
T85L	79,9	58,2	85,7	52,6	88,3	0,41	-0,30	1,09	1793
REGION	80,2	60,8	84,4	46,1	90,8	0,37	-0,26	1,18	1777
PLAV	69,7	42,9	93,1	84,4	65,2	0,50	-0,14	1,16	1793
PLAV2	59,6	36,3	96,1	93,6	49,1	0,43	1,57	2,41	1793
MM5R	77,3	50,9	92,8	80,7	76,3	0,57	0,08	1,18	1574
MM5K	77,2	51,2	94,4	85,9	74,5	0,60	0,42	1,48	1759
ETA	78,3	53,9	88,6	66,5	82,0	0,48	0,01	1,25	1354
WRFZ	78,9	52,7	95,4	87,8	76,2	0,64	0,18	1,16	1490
WRFJ	75,5	52,7	91,4	81,1	73,5	0,55	-0,42	1,18	1369
An(UKMO, NCEP)	81,5	58,8	90,8	72,4	84,3	0,57	0,83	1,59	1793

Таблиця 16. - Оцінки прогнозів опадів (мм) на 30 год. по ЦФО (17 станцій)

МОДЕЛІ	U	U_{oc}	$U_{\bar{o}o}$	P_{oc}	$P_{\bar{o}o}$	P_{ir}	cr/os	ab/os	N
UKMO	73,5	44,0	94,5	84,9	70,4	0,55	0,51	1,55	1789
NCEP	76,3	47,5	94,0	82,9	74,4	0,57	0,02	1,37	1721
DWD	73,4	42,7	89,8	69,1	74,6	0,44	-0,27	1,27	1789
T85L	78,9	50,9	87,0	53,2	85,9	0,39	-0,13	1,41	1789
REGION	77,4	48,0	86,1	50,5	84,9	0,35	-0,48	1,24	1772
PLAV	66,2	36,7	91,6	79,0	62,7	0,42	-0,29	1,33	1789
PLAV2	56,2	32,1	96,0	93,0	46,1	0,39	1,22	2,36	1789
MM5R	75,9	45,9	89,2	65,2	78,9	0,44	-0,09	1,39	1571
MM5K	74,4	44,7	91,3	74,3	74,4	0,49	-0,33	1,15	1755
ETA	82,6	60,0	89,3	62,6	88,2	0,51	-0,34	1,18	1350
WRFZ	82,0	55,5	93,1	76,8	83,4	0,60	-0,19	1,15	1469
WRFJ	79,2	56,2	88,8	67,7	82,9	0,51	-0,80	1,23	1365
An(UKMO, NCEP)	84,0	61,1	91,7	70,9	87,6	0,59	0,30	1,42	1789

Таблиця 17. - Оцінки прогнозів опадів (мм) на 42 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	U	U_{oc}	$U_{\bar{o}o}$	P_{oc}	$P_{\bar{o}o}$	Pir	cr/os	ab/os	N
UKMO	61,5	38,0	96,5	94,1	51,1	0,45	1,24	2,09	44673
NCEP	76,0	50,6	92,3	80,9	74,4	0,55	0,48	1,64	42997
DWD	76,6	51,5	85,9	57,3	82,8	0,40	-0,32	1,30	44659
T85L	75,1	48,8	86,5	61,1	79,6	0,41	-0,01	1,50	44675
REGION	75,4	49,0	84,8	53,4	82,4	0,36	-0,24	1,37	44255
PLAV	64,7	39,2	91,8	83,6	58,7	0,42	0,12	1,53	44675
PLAV2	57,8	35,4	93,9	90,4	47,4	0,38	1,61	2,61	44675
MM5R	73,3	47,7	90,0	75,7	72,5	0,48	0,07	1,46	39654
MM5K	73,7	46,6	89,2	71,1	74,4	0,46	0,27	1,58	43839
ETA	77,6	54,0	88,2	67,1	81,1	0,48	-0,04	1,41	33792
WRFZ	75,5	48,1	93,0	81,4	73,7	0,55	0,24	1,40	36314
WRFJ	73,6	50,7	90,0	78,3	71,9	0,50	-0,43	1,24	33796
An(UKMO, NCEP)	78,5	54,8	87,4	62,1	83,7	0,46	0,43	1,56	44673

Таблиця 18. - Оцінки прогнозів опадів (мм) на 54 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	U	U_{oc}	$U_{\bar{o}o}$	P_{oc}	$P_{\bar{o}o}$	Pir	cr/os	ab/os	N
UKMO	79,6	51,2	89,3	61,9	84,3	0,46	0,50	1,57	44095
NCEP	73,9	43,3	92,4	77,6	72,9	0,51	0,19	1,32	42432
DWD	74,4	42,6	88,7	63,1	77,4	0,40	0,03	1,36	44061
T85L	75,1	43,0	87,3	56,5	80,0	0,37	0,19	1,46	44097
PLAV	62,7	33,6	91,4	79,5	58,2	0,38	0,18	1,40	44097
PLAV2	57,0	31,3	93,5	87,2	48,9	0,36	1,36	2,31	44097
MM5R	74,4	44,1	88,1	62,6	77,7	0,40	0,05	1,41	37896
WRFZ	78,1	47,7	91,1	69,4	80,4	0,50	-0,03	1,14	35847
WRFJ	76,2	48,9	86,7	58,8	81,4	0,40	-0,45	1,10	32973
An(UKMO, NCEP)	78,6	49,4	89,8	64,8	82,3	0,47	0,26	1,41	44095

При аналізі таблиць справджуваності прогнозів t і p досить легко визначити найбільш успішні моделі. При прогнозі опадів це зробити значно важче зважаючи на велике число критеріїв оцінки.

Загалом, результати порівняння показали наступне:

- показники успішності прогнозів температури повітря у усіх моделей виявилися практично порівнянними один з одним, не виявивши помітної переваги мезомасштабних і регіональних моделей перед глобальними;

- з представлених мезомасштабних моделей найкращі показники успішності прогнозів мала модель WRFZ;
- високі показники успішності прогнозів окремих метеорологічних величин мали дві вітчизняні моделі (мезомасштабна модель Д.М. Прессмана, регіональна модель В. М. Лосева, Гідрометцентр Росії) і мезомасштабна модель;
- експериментальні прогнози температури повітря Гідрометцентру Росії на основі ансамблю двох або трьох глобальних оперативних моделей (UKMO, NCEP, DWD) мали кращі результати по усіх оцінюваних територіях і для усіх завчасностей прогнозів;
- експериментальні прогнози опадів з використанням ансамблевого підходу також мали високу справджуваність.

Таблиця 19. - Оцінки прогнозів опадів (мм) на 66 год. по ЕТР (432 станції)

МОДЕЛІ	U	U_{oc}	$U_{\bar{o}o}$	P_{oc}	$P_{\bar{o}o}$	Pir	cr/os	ab/os	N
UKMO	65,8	40,3	91,8	83,4	60,1	0,44	1,80	2,72	44262
NCEP	74,5	48,5	90,6	76,2	73,9	0,50	0,47	1,71	43005
DWD	75,1	49,1	84,3	52,5	82,4	0,35	-0,34	1,35	44603
T85L	72,2	44,6	85,0	58,0	76,8	0,35	0,08	1,65	44683
PLAV	60,2	35,7	88,7	78,5	54,3	0,33	0,23	1,69	44683
PLAV2	55,9	34,3	92,1	87,9	45,6	0,34	1,56	2,65	44683
MM5R	71,6	46,2	87,6	70,1	72,1	0,42	0,11	1,59	38020
WRFZ	73,5	46,2	91,1	77,1	72,4	0,49	0,27	1,49	35941
WRFJ	71,4	48,0	87,2	71,6	71,3	0,43	-0,43	1,30	33397
An(UKMO, NCEP)	76,1	50,7	90,0	73,7	76,8	0,51	0,96	2,10	44262

Таким чином, можна вважати, що отримані результати виявляються попередніми і не можуть дати однозначної відповіді, яка мезомасштабна модель є кращою, тому в ГМЦ Росії:

- продовжуються порівняльні оцінки прогнозів метеорологічних величин по моделях в інші сезони року з метою визначення базової регіональної/мезомасштабної моделі, яка буде задовольняти вимогам високої якості вихідної продукції, оперативності, технологічності і можливості експлуатації моделей в регіональних центрах Росгідромета.

Основна література

1. Ківганов А.Ф. та ін. Гідродинамічні моделі прогнозу погоди і сіткові методи їх реалізації. – Одеса: ТЕС, 2002. – 179с.
2. Ківганов А.Ф. Хвильові процеси в атмосфері. – Одеса. АО БАХВА, 2001. – 180с.
3. Хоменко Г.В., Хохлов В.М. Гідродинамічні методи прогнозу погоди. – Одеса: Екологія, 2008. – 338с.
4. Практикум з гідродинамічних методів прогнозу погоди. – Одеса: ТЕС, 2012. – 206с.
5. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 376с.
6. Матвеев Л.Т. Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 295с.
7. Мезингер Ф., Аркава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Пер. с англ. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 136с.

Додаткова література

1. Динамика погоды. Пер. с англ. /Под ред. С. Манабе. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 420с.
2. Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики. – М.: Наука, 1969. – 184с.
3. Лосев В.И. Региональная гидродинамическая модель Гидрометцентра России // «80 лет Гидрометцентру России» // Сборник научных трудов. М.: Триада ЛТД, 2010, с. 36-58.
4. Крохин В.В., Ламаш Б.Е. Использование численной модели высокого разрешения WRF для прогноза траектории и эволюции тайфунов северо-западной части Тихого океана. – Вестник ДВО РАН, №3, 2012. – С. 42-48.
5. Багров А.Н. Сравнительная оценка успешности прогнозов элементов погоды на основе ряда отечественных и зарубежных моделей атмосферы различного масштаба // «Результаты испытания новых и усовершенствованных технологий, моделей и методов гидрометеорологических прогнозов» // Информационный сборник №35, 2010. – С. 3-20.

Навчальне електронне видання

ХОМЕНКО Галина Василівна

ГІДРОДИНАМІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ПРИРОДНИХ ПРОЦЕСІВ

Конспект лекцій

Видавець і виготовлювач

Одеський державний екологічний університет
вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016
тел./факс: (0482) 32-67-35
E-mail: info@odeku.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 5242 від 08.11.2016