

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський державний екологічний університет

Л.Д. Гончарова

***МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ
МЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ***

Конспект лекцій

Одеса
2019

УДК. 551.510
Г65

Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти і науки України як конспект лекцій (протокол № 5 від 26 грудня 2019 р.).

Гончарова Л. Д.

Методи аналізу випадкових метеорологічних процесів: Конспект лекцій. Одеськ. державний екологічний ун-тет. Одеса; 2019. 105 с.

Конспект лекцій призначений для магістрів, які навчаються за спеціальністю «Науки про Землю», спеціалізації «Кліматологія». У ньому представлені елементи математичного апарату теорії випадкових функцій, основою якого є ідея розгляду фіксованих миттєвих значень метеорологічних процесів як окремих реалізацій. Детально розглянуто широке коло питань щодо числових (статистичних) характеристик випадкових функцій та законів їх розподілу. Представлені основні положення щодо аналітичного опису стаціонарних випадкових процесів. Розглядається спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції та апроксимація коваріаційних функцій стаціонарного випадкового процесу. Показана оцінка спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу та взаємної спектральної щільності двох процесів за експериментальними даними. Представлена методика дослідження статистичної структури нестаціонарних випадкових процесів та наведені приклади застосування інтегрального перетворення Фур'є для виявлення «прихованих» періодичностей у випадковому процесі. Розглядається методика згладжування нестаціонарних випадкових процесів з використанням різних вагових множників.

У конспекті використано теоретико-ймовірнісний підхід до вивчення метеорологічних процесів з використанням апарату теорії випадкових функцій при вирішенні наукових та практичних задач, які набули найбільш широкого застосування в «Науках про Землю».

УДК. 551.510

© Л.Д. Гончарова, 2019
© Одеський державний екологічний університет, 2019

ВСТУП

Загальна сутність екологічних проблем, де б та коли б вони не виникали, полягає в неузгодженості, розладі між тим рівнем перетворення природи, який є історично необхідним для розв'язання проблем соціально-історичного прогресу, які стоять перед людством, і тією широтою та глибиною врахування об'єктивних зв'язків і законів природи, якою людство реально володіє на даному етапі свого розвитку. І в XXI столітті людина вперше реально зрозуміла, що вона є жителем планети і може, і повинна думати та діяти в новому – планетарному аспекті.

Виникає запитання: чи треба керувати природою? Так, треба. Але людству дістався в керування дуже складний та норовливий об'єкт. Як стверджував англійський філософ Френсіс Бекон: «Природою можна керувати лише підкоряючись їй».

Один із засновників кібернетики сформулював правило, відповідно до якого, керування може бути ефективним лише у тому випадку, коли керуюча система не менш складна, ніж керована. В перекладі на екологічну мову це означає, що ефективно керувати природою можна лише тоді, коли пізнані фізичні закони та взаємозв'язки в оточуючому людину середовищі, а якщо пізнано не все, то керувати можна лише пізнаним. Культура технологічна, що створила людину, потребує збагачення культурою екологічною, яка збереже людину.

У зв'язку з цим практика ставить перед природничими науками задачу пізнання законів, які б дозволили керувати процесами, що відбуваються на Землі в її географічних сферах. Фізичні та хімічні процеси, що виникають і розвиваються в складових кліматичної системи (атмосфера, гідросфера, літосфера, кріосфера, біосфера) вивчаються багатьма науками. Але гідрометеорологічні науки, які входять до складу наук про Землю, відділяються певними особливостями напряму розвитку та методологією досліджень.

Як відомо, гідрометеорологічні величини і явища зумовлюються фізичними процесами різних просторових і часових масштабів – від масштабів, притаманних загальній циркуляції атмосфери чи океану, до масштабів турбулентних вихорів. Чинники, які зумовлюють їх зародження та розвиток, – це ті чи інші прояви законів збереження імпульсу, маси й енергії. Проте їх реалізація у визначений момент часу й у визначеній точці простору часто проявляється як випадкові явища. Тому результати випадкових вимірювань і спостережень, опрацьовані за відповідний проміжок часу, розглядаються як сукупність значень випадкової величини або статистичний ряд. Отже аналіз особливостей змінення тієї чи іншої випадкової величини за часом чи у просторі проводиться як статистичний аналіз випадкових величин (випадкових функцій).

У природничих науках поняття «статистичний аналіз» означає аналіз масових явищ, що базується на застосуванні методів теорії ймовірності. Пізнання якісних законів розвитку цих явищ неможливе без аналізу їх кількісної сторони. Статистична методологія призначена об'єднати якісну та кількісну сторони складних гідрометеорологічних явищ та процесів і досліджувати сукупність факторів у взаємозв'язку. Вона дозволяє зображувати фізичний процес у цілому, враховуючи тенденції розвитку та різноманітність форм природних об'єктів.

Розуміння основних положень та задач статистичної обробки випадкових метеорологічних процесів можливе лише на базі знань, здобутих в дисциплінах: «Вища математика (розділ «Теорія ймовірностей та математична статистика»)), «Фізика атмосфери», «Астрономія», «Кліматологія», «Синоптична метеорологія», «Динамічна метеорологія» та інші.

Стрімка математизація різних сфер людської діяльності, безупинне ускладнення систем та процесів, з якими стикається сучасна людина, зумовлює широке застосування методів математичної статистики і теорії випадкових процесів при вирішенні наукових та практичних задач. Впровадження в практику людської діяльності статистичних методів обробки інформації дозволяє врахувати всю різноманітність зв'язків та факторів, які чинять вплив на процеси, що відбуваються в різних оболонках Землі.

Вже протягом декількох десятиріч науки про Землю розвиваються у напрямі широкого використання математичного апарату теорії випадкових функцій. Основою цього є ідея розгляду фіксованих миттєвих значень метеорологічних процесів та просторових полів як окремих реалізацій деякого випадкового процесу або випадкового поля. Такий підхід дозволяє відмовитися від розгляду особливостей окремих миттєвих значень метеорологічних полів, залежність яких від просторових координат, а також їх часовий хід носять вельми складний та заплутаний характер, і перейти до розгляду деяких осереднених властивостей статистичної сукупності їх реалізацій, що відповідають деякій сукупності фіксованих зовнішніх умов.

Теоретико-ймовірнісний підхід до вивчення метеорологічних явищ з використанням апарату теорії випадкових функцій виявився досить ефективним у теорії турбулентності при створенні методики довгострокових прогнозів погоди, при об'єктивному аналізі метеорологічних полів, оцінці репрезентативності даних спостережень, точності вимірних приладів, при розв'язанні питань раціоналізації розміщення мережі метеостанцій, а також при вирішенні багатьох інших завдань.

Це привело до необхідності розширення курсу теорії ймовірності при підготовці магістрів і включення спеціальної дисципліни «Методи аналізу випадкових метеорологічних процесів», яка є складовою частиною

державного стандарту другого (магістерського) рівня вищої освіти. Цей курс є фаховою дисципліною в галузі знань 10 «Природничі науки», спеціальності 103 «Науки про Землю», спеціалізації «Кліматологія» в Одеському державному екологічному університеті.

Знайомство з даною дисципліною дає можливість вирішувати широке коло питань, які сформовані в розділах: «Поняття випадкової величини та закони її розподілу», «Поняття про випадкові функції та закони їх розподілу» «Імовірнісні характеристики випадкової функції», «Стаціонарні випадкові функції та їх імовірнісні характеристики», «Визначення характеристик випадкової функції по експериментальних даних», «Спектральний аналіз стаціонарної випадкової функції», «Взаємний спектральний аналіз», «Дослідження нестационарних випадкових процесів», «Виявлення періодичностей, які утримуються у випадкових процесах», «Згладжування часових послідовностей шляхом ковзного осереднення». У конспекті лекцій розглядаються головним чином ті аспекти теорії випадкових функцій, які знайшли найбільш широке застосування в «Науках про Землю».

Мета вивчення дисципліни «Методи аналізу випадкових метеорологічних процесів» – надати знання про методи дослідження випадкових процесів, якими є ряди фізичних величин у залежності від часу чи координат тривимірного простору.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання: визначення випадкової функції, закони розподілу та ймовірнісні характеристики випадкових функцій; визначення стаціонарності випадкових функцій та ймовірнісні характеристики стаціонарних випадкових функцій; ергодична властивість стаціонарних випадкових функцій; властивості ймовірнісних характеристик випадкових функцій; спектральний аналіз стаціонарних випадкових процесів; властивості лінійного перетворення стаціонарного випадкового процесу; методи дослідження нестационарних випадкових процесів; методи виявлення прихованих періодичностей у часових рядах випадкових величин; методи згладжування часових послідовностей нестационарних випадкових процесів.

Студент повинен вміти: розраховувати ймовірнісні характеристики випадкової функції на основі множини її реалізацій; розраховувати ймовірнісні характеристики випадкових функцій, володіючих властивістю ергодичності; проводити комплексний аналіз отриманих результатів; розраховувати спектральні щільності випадкових процесів та проводити їх аналіз; розраховувати характеристики взаємного спектрального аналізу й виявляти особливості взаємозв'язків між двома випадковими процесами; проводити статистичний аналіз нестационарних випадкових процесів.

Дисципліна має забезпечити такі компетенції.

Соціально-особистісні: здатність до презентації власних і колективних

результатів професійної та науково-дослідної діяльності.

Інструментальні: навички отримання, збереження, обробки, поширення професійної та науково-технічної інформації; володіння навичками використання спеціалізованих програмних засобів.

Загальнонаукові: готовність використовувати сучасні досягнення науки і передових технологій у науково-дослідній діяльності.

Загально-професійні: здатність інтерпретувати, оформляти, представляти і доповідати результати виконаної роботи.

Спеціалізовано-професійні: знання теоретичних основ змін і коливань клімату під впливом природних та антропогенних чинників; здатність та вміння використовувати методи статистичного аналізу випадкових метеорологічних процесів для дослідження особливостей клімату окремих регіонів Землі та змін і коливань клімату; уміння на базі статистичних методів дослідження надати ймовірнісний кліматичний прогноз; знання компонентів кліматичної системи Землі, їх взаємозв'язки та фізичні механізми реалізації цих взаємозв'язків.

На сьогоднішній день досягнуті достатньо великі успіхи в зборі, систематизації та узагальненні емпіричної інформації, яка характеризує клімат різного просторового та часового масштабу. Але розосередженість вихідної інформації ускладнює вивчення структури та мінливості сучасного клімату і потребує статистичного підходу, за допомогою якого можна використати для дослідження багаторічний архів даних, а це є серйозним резервом покращення якості довгострокових прогнозів погоди.

Конспект лекцій відповідає програмі дисципліни «Методи аналізу випадкових метеорологічних процесів» і складено на основі використання визначеної кількості першоджерел. Він знайомить магістрів з особливостями гідрометеорологічних процесів та статистичними методами їх дослідження з урахуванням специфіки самої інформації, а також сучасних досягнень у галузі статистичної обробки гідрометеорологічних даних.

1. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА ТА ЗАКОНИ ЇЇ РОЗПОДІЛУ

1.1 Особливості вихідної інформації для проведення статистичних досліджень

Випадковою величиною називають таку величину, яка при проведенні ряду експериментів в однакових умовах може кожного разу набирати того чи іншого значення, попередньо невідомо, якого саме [3].

Виділяють випадкові величини дискретні, коли всі можливі значення випадкової величини можна заздалегідь перерахувати, тобто перенумерувати числами натурального ряду, та випадкові величини неперервні, коли всі можливі значення випадкової величини повністю заповнюють деякий проміжок числової осі, і відповідно їх неможливо перенумерувати [3].

Прикладом дискретної випадкової величини може бути кількість днів з небезпечними метеорологічними чи гідрологічними явищами. Дискретною буде і будь-яка випадкова величина, яка може набирати тільки цілих або раціональних значень. При цьому множина можливих дискретних значень такої випадкової величини буде нескінченною.

Прикладом неперервної випадкової величини може бути «наприклад», температура повітря, атмосферний тиск, складові вектору швидкості вітру або їх відхилення від середньої багаторічної норми. В якості випадкових величин можуть виступати похибки приладів, за допомогою яких проводяться вимірювання. Як правило, ці похибки будуть представляти собою випадкові величини неперервного типу [3].

Будемо позначати випадкові величини великими літерами латинської абетки: X, Y, Z, \dots , а їх можливі значення – x, y, z, \dots

При застосуванні методів теорії ймовірності в гідрометеорологічних дослідженнях використовують статистичні сукупності. Коли кажуть про статистичні сукупності, то мають на увазі дві категорії [2]:

- генеральна сукупність;
- статистичний ряд (вибірка).

Термін «генеральна сукупність» визначає необмежену кількість незалежних значень випадкової величини, які підпорядковуються одному закону розподілу. Властивості випадкових величин, які представляються генеральною сукупністю, визначаються параметрами цієї випадкової величини.

Статистичний ряд (вибірка) – обмежена кількість значень випадкової величини, здобутих випадковим чином із генеральної сукупності. Тому статистичні ряди називають вибірками з генеральної сукупності і важливою характеристикою кожної з них є її об'єм (n). Під терміном «об'єм сукупності випадкової величини» розуміють кількість членів, що складають

цю сукупність. В гідрометеорологічних дослідженнях використовуються ряди як великих ($n > 50$), так і малих ($n < 50$) об'ємів [2].

Задача дослідника полягає в тому, щоб за допомогою вибірки розрахувати деякі оцінки параметрів (числові характеристики), які б вірогідно характеризували той чи інший випадковий процес. У зв'язку з цим емпіричні дослідження в науках про Землю мають першорядне значення. На їх основі встановлюються закономірності, притаманні певним характеристикам найбільш мінливих оболонок Землі – атмосфери та гідросфери. Фізичні параметри стану цих двох оболонок кліматичної системи складають гідрометеорологічну інформацію.

Знання комплексу відповідних статистичних алгоритмів та вміння правильно їх використовувати при аналізі цієї інформації допоможе вирішенню актуальних задач утворення, змінення і прогнозування гідрометеорологічних процесів.

Емпіричні дані є критеріями істинності закономірностей, рівнянь гідродинаміки, особливостей метеорологічних чи гідрологічних процесів та інше.

Таким чином, *гідрометеорологічна інформація* має важливі *особливості*, які зумовлюються характером процесів, що спостерігаються в перелічених сферах Землі [2].

Перша з них полягає в тому, що процеси в океані чи атмосфері мають просторові й часові масштаби, які набагато перевищують можливості окремої людини стосовно збирання та узагальнення інформації про їх стан. Тому дані про процеси в навколишньому середовищі, що збираються з різних регіонів Землі та за тривалі періоди часу, мають надзвичайну цінність для дослідників.

Друга особливість зумовлюється тим, що в науках про Землю, особливо гідрометеорологічних, є дуже обмежені можливості проведення активного експерименту з природними об'єктами. Отже, аналіз накопичених даних стає головним джерелом досліджень і єдиним засобом перевірки теоретичних висновків та визначених закономірностей.

Особливості об'єктів, що досліджуються, та методів дослідження підкреслюють важливість систем збирання і накопичення гідрометеорологічної інформації та систем забезпечення доступу до неї багатьох користувачів.

Збирання даних про атмосферу та гідросферу здійснюється, по-перше, з метою оперативного доведення інформації до підрозділів гідрометеорологічної служби, які займаються обслуговуванням різних галузей господарства (прогнози погоди, штормові попередження тощо) і, по-друге, для накопичення, з метою узагальнення характеристик про гідрометеорологічний режим та проведення наукових досліджень.

Гідрометеорологічні дані – це кількісні характеристики стану атмосфери та гідросфери. Внаслідок значної мінливості у просторі і за

часом фізичних параметрів атмосфери та гідросфери, для спостереження за їх станом з метою вивчення закономірностей процесів, що відбуваються, і, найголовніше, з метою їх прогнозування, необхідні численні вимірювання стану цих середовищ. Відомо, що основним джерелом гідрометеорологічної інформації є результати строкових і спеціальних метеорологічних та гідрологічних спостережень і вимірювань, дані аерологічного та ракетного зондування атмосфери, дані експедиційних досліджень і таке інше.

Значення сукупності гідрометеорологічних величин у певний момент часу визначається станом атмосфери та гідросфери, який зумовлюється дією комплексу фізичних причин. Взагалі кажучи, основні гідрометеорологічні величини є неперервні величини. Це, наприклад, атмосферний тиск, температура і густина повітря, гігрометричні характеристики, швидкість вітру; густина, температура, солоність, швидкість руху води океану тощо. В деяких вимірювальних системах втілюється неперервна реєстрація значень тих чи інших фізичних величин. Але в більшості випадків гідрометеорологічні величини вимірюються на світовій мережі метеорологічних чи гідрологічних станцій та постів через деякі проміжки часу, що встановлюються Всесвітньою Метеорологічною організацією (ВМО) чи особистою програмою досліджень.

Гідрометеорологічні ряди можуть складатися не тільки з величин безпосередньо виміряних. Їх членами можуть бути й величини, отримані в результаті узагальнювання первинних вимірювань чи спостережень.

Треба зауважити, що і у випадку неперервної реєстрації гідрометеорологічної інформації на тих чи інших носіях, перед статистичною обробкою цієї інформації доводиться виконувати її *дискретизацію (квантування)*. Цей процес зводиться до складання рядів значень гідрометеорологічної величини у визначені інтервали часу [4].

Однією з важливих ознак рядів є інтервал дискретності. Як правило, ряди гідрометеорологічних величин є еквідистантними, тобто члени рядів визначаються через будь-який заданий інтервал часу (година, доба, місяць, рік тощо). В деяких випадках при розв'язуванні конкретних задач ряди можуть формуватися з членів, розташованих на різних відстанях одне від одного.

Важливою властивістю вибірки є характеристика її складових. Такими характеристиками можуть бути безпосередні значення гідрометеорологічних параметрів, кількість днів і випадків з атмосферними явищами, їх тривалість, інтенсивність тощо.

Гідрометеорологічні величини можуть бути скалярними або векторними.

В останньому випадку ряд являє собою два або більше (в загальному випадку – N) рядів синхронних скалярних характеристик випадкової величини.

Таким чином, ряди гідрометеорологічних величин складаються з членів, кожен з яких є результатом чи безпосереднього вимірювання або спостереження, чи узагальнювання спостережень за деякий інтервал часу конкретного року.

Отже для гідрометеорологічних досліджень, а також безпосереднього застосування такої інформації в різних галузях господарства, формується велика множина сукупностей випадкових величин, які розрізняються однією або декількома ознаками, а саме [4]:

- інтервалом дискретності;
- об'ємом сукупності (вибірки);
- характеристикою значень випадкової величини – членів ряду.

Кожен фізичний параметр атмосфери чи гідросфери залежить один від одного, а також від зовнішніх впливів і випадковим чином змінюється за часом та у просторі, утворюючи випадкові поля або послідовності.

Обробка та аналіз систем випадкових величин проводиться за допомогою спеціально розробленого апарату досліджень, який становить методи математичної статистики. Тому гідрометеорологічна інформація повинна задовольняти вимоги, котрі висуваються до статистичної інформації [2].

Перш за все, кожен ряд повинен бути однорідний. Це означає, що всі члени ряду з визначною ймовірністю повинні належати до однієї генеральної сукупності, тобто підпорядковуватися одному закону розподілу. У дійсності, в деяких випадках гідрометеорологічні ряди містять члени, які не задовольняють сформульовані вимоги. Їх називають «викидами». «Викиди», як правило, виникають тоді, коли спостерігаються аномальні погодні або кліматичні умови.

Наступною вимогою до рядів гідрометеорологічних величин є незв'язність їх членів. Це означає, що статистична залежність між ними повинна бути відсутньою. Прийняття чи не прийняття цієї вимоги залежить від характеру задачі, що розв'язується. Якщо йдеться про статистичну оцінку моментів розподілу випадкових величин, то члени вихідних рядів повинні бути незв'язними, оскільки методи статистичного оцінювання параметрів спираються на теореми теорії ймовірностей, які, як правило, ставлять вимогу про незалежність значень випадкової величини.

Зазначену вимогу задовольняють шляхом вибору такого інтервалу дискретності, для якого статистична залежність є незначною (але для цього треба мати апріорну інформацію), або проводити операцію рандомізації (від англійського терміну «*random approximation*» – випадкове наближення). Для останньої може використовуватися відповідна таблиця випадкових чисел або комп'ютерна програма генерації випадкових чисел [4].

Інша справа, коли ставиться задача дослідження внутрішньої часової статистичної структури гідрометеорологічних величин. Тоді використовуються вихідні часові ряди визначеної дискретності, саме такої,

щоб статистична залежність між членами ряду проявлялася в тій чи іншій мірі.

Важливе значення при розрахунках оцінок параметрів має об'єм сукупностей. Статистичний *ряд* повинен *мати представництво*, тобто бути дійсно вибіркою з генеральної сукупності і мати такий об'єм, який дозволяв би провести оцінку параметрів із заданою точністю, тобто отримати вірогідні оцінки. Це можна зробити тільки тоді, коли об'єми вибірок (згідно з так званім законом великих чисел) є досить великими. Але такі сукупності гідрометеорологічних величин не завжди можна сформулювати.

В гідрометеорології часто виникає ситуація, коли ряди мають малі об'єми. Це зумовлюється терміном, протягом якого організуються спостереження. В такому випадку потрібно проводити оцінку вірогідності отриманого статистичного параметра.

Метеорологічні (або гідрологічні) ряди необхідно подавати у найбільш зручному для аналізу вигляді, в залежності від задачі, що розв'язується.

Первинною формою зображення гідрометеорологічної інформації є *простий статистичний ряд*, значення котрого розташовуються в хронологічній послідовності. Такий ряд випадкової величини X об'єму n має вигляд:

$$X : x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n, \quad (1.1)$$

де

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$ – конкретні значення випадкової величини X , тобто конкретні значення вибірки X .

Якщо значення випадкової величини представлені в певній послідовності (в бік збільшення або в бік зменшення їх значень), то такий ряд називають *ранжованим*.

Вихідні дані гідрометеорологічних величин подаються у вигляді *простого* статистичного ряду головним чином у тих випадках, коли задача дослідження полягає у вивченні особливостей їх часової мінливості. Якщо така задача не ставиться, то ряди випадкових величин можуть зображуватися у більш компактній формі – у вигляді *згрупованого ряду*. Особливо це має сенс робити в тому випадку, коли об'єм вибірки є великим, при вирішенні задач з апроксимації емпіричних розподілів теоретичними законами, а також для розв'язання інших прикладних задач гідрометеорології.

1.2 Поняття про закон розподілу випадкової величини та форми його представлення

В якості універсальної характеристики випадкової величини (як для дискретної так і для неперервної) використовують інтегральний закон розподілу [3].

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яку відповідність між можливими значеннями випадкової величини та їх імовірностями. Для випадкової величини закон розподілу є вичерпною характеристикою. Знання закону, якому підпорядковується та чи інша гідрометеорологічна величина, дає можливість методично правильно організувати дослідження статистичної структури цих величин, які є основними ознаками кліматичного чи гідрологічного режиму регіону, що досліджується. Підібравши закон розподілу до статистичного ряду (вибірки), можна розрахувати ймовірність того, що випадкова величина знаходиться у заданому інтервалі або ймовірність того, що випадкова величина набере значення менше (більше) від деякого конкретного числа з області значень цієї випадкової величини [2].

Дослідження законів розподілу гідрометеорологічних величин має велике практичне значення. Як уже зазначалося неодноразово, в основних ланках кліматичної системи (атмосфері та гідросфері) постійно відбуваються зміни їх фізичного стану, а кількісні характеристики цього стану, такі, наприклад, як температура повітря чи води, атмосферний тиск, хмарність, вологість повітря, кількість опадів, річний стік та інші розглядаються як випадкові величини.

Задача дослідника полягає у тому, щоб серед множини випадкових подій чи явищ виявити закономірності, відкинувши несуттєві події. А це можна зробити шляхом побудови моделей фізичних параметрів, які висвітлюють властивості цих випадкових величин, які, як відомо, містяться у законі розподілу.

Таким чином, вичерпною характеристикою будь-якого випадкового процесу є закон розподілу, знання якого дає можливість правильно розтлумачити сенс того чи іншого статистичного моменту та на основі цього методично правильно організувати вивчення гідрометеорологічних особливостей регіону, що досліджується.

У більшості випадків закони розподілу випадкових величин неможливо визначити апріорно тільки шляхом аналізу відомих фізичних властивостей. Тип розподілу та його параметри визначаються шляхом статистичної обробки експериментальних даних. Найбільш поширеним є метод їх групування, при якому вся множина значень випадкової величини

розділяється на ряд неперетинних часткових інтервалів, а потім підраховується кількість значень ряду, що потрапили до кожного часткового інтервалу. Але таким шляхом будується і згрупований ряд. Отже *згрупований ряд має сенс емпіричного розподілу випадкової величини, графічним зображенням якого є гістограма або полігон.*

Таким чином, вивчення особливостей статистичної структури гідрометеорологічних величин базується на інформації, в якості якої виступають статистичні ряди (вибірки), що сформовані за результатами вимірювань та спостережень [2].

Згрупований ряд, як емпіричний розподіл, апроксимують аналітичним виразом, який відбиває властивості генеральної сукупності. У зв'язку з цим, основним етапом статистичного аналізу гідрометеорологічної інформації є підбір закону розподілу за даними статистичної сукупності. Ця задача розв'язується шляхом апроксимації емпіричного розподілу таким теоретичним законом, який би у визначеному сенсі найкращим чином відповідав емпіричному розподілу.

Закон розподілу випадкової величини X може визначатися у вигляді *функції розподілу $F(x)$ або щільності ймовірності $f(x)$* . Часто його представляють сукупністю *інтервальних ймовірностей p_i або інтервальних теоретичних частот \tilde{m}_i* [2].

1.2.1 Функція розподілу та її властивості

Функція розподілу є найбільш загальною формою аналітичного представлення закону розподілу. Вона зазначає ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення, меншого від фіксованого дійсного числа x . Для неперервної випадкової величини це визначення має вигляд [2]:

$$F(x) = P(X < x) . \quad (1.2)$$

Ймовірність того, що $X < x$ залежить від x , отже $F(x)$ є функцією від x . Тому $F(x)$ і називається *функцією розподілу* (інтегральний закон розподілу).

Неперервна випадкова величина має неперервну чи кусково-неперервну функцію розподілу; графік цієї функції має форму плавної кривої (рис. 1.1).

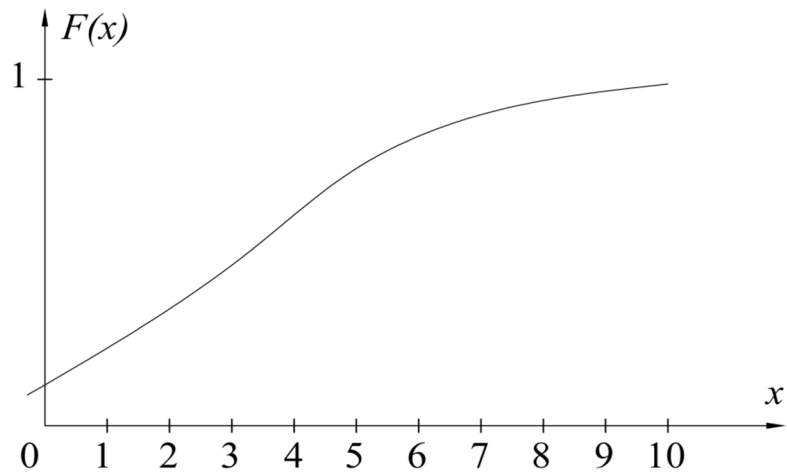


Рис. 1.1 – Функція розподілу неперервної випадкової величини

Для дискретної випадкової величини X , яка може набувати значень $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i), \quad (1.3)$$

де нерівність $x_i < x$ під знаком суми означає, що підсумування поширюється на всі значення x_i , менші за x .

Функція розподілу має стрибок у тих точках, де випадкова величина набирає конкретних значень. В інтервалах між значеннями випадкової величини функція $F(x)$ є сталою. Сума всіх стрибків функції розподілу дорівнює одиниці. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини є розривна східчаста ламана (рис. 1.2).

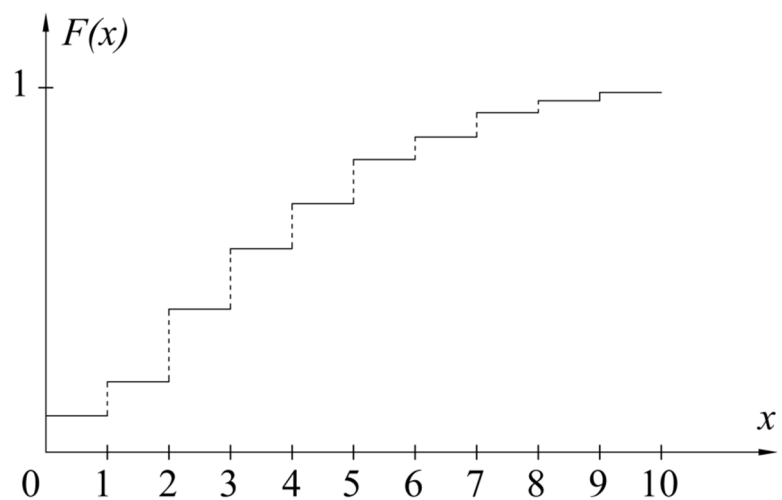


Рис. 1.2 – Функція розподілу дискретної випадкової величини

Розглянемо загальні властивості функції розподілу [2].

1. Функція розподілу $F(x)$ є невід'ємною функцією з областю значень

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (1.4)$$

Ця властивість випливає з визначення функції розподілу як імовірності здійснювання події $X < x$.

2. На мінус нескінченності функція розподілу $F(x)$ дорівнює нулю, а на плюс нескінченності – функція розподілу дорівнює одиниці, тобто

$$F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1. \quad (1.5)$$

Ця властивість стає очевидною при геометричній інтерпретації функції розподілу (див. рис. 1.1). Якщо точка x необмежено пересувається ліворуч, то попадання X ліворуч від x у границі стає неможливою подією. Тому можна вважати, що ймовірність цієї події прагне до нуля, тобто

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0. \quad (1.6)$$

При необмеженому пересуванні точки x праворуч, попадання випадкової точки X праворуч від x у границі стає вірогідною подією. Тому можна вважати, що ймовірність цієї події прагне до одиниці, тобто

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1. \quad (1.7)$$

3. Імовірність попадання випадкової величини в інтервал $[\alpha, \beta]$ дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1.8)$$

4. Функція розподілу випадкової величини є неспадною функцією

$$F(\beta) \geq F(\alpha), \text{ якщо } \beta > \alpha. \quad (1.9)$$

Очевидно,

$$P(X > x) = 1 - F(x). \quad (1.10)$$

Функція розподілу, як і будь-яка ймовірність, є безрозмірною величиною.

Неперервну випадкову величину можна задати не тільки функцією розподілу, але й щільністю ймовірностей (диференціальний закон

розподілу). Розглянемо цю форму подання закону розподілу випадкової величини.

1.2.2 Щільність імовірності та її властивості

Нехай випадкова величина X визначається функцією розподілу $F(x)$. Згідно з третьою властивістю функції розподілу ймовірність попадання цієї величини в елементарний інтервал $[x; x + \Delta x]$ дорівнює [2]:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x). \quad (1.11)$$

Розділимо обидві частини на Δx :

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \quad (1.12)$$

Вважаючи, що функція розподілу неперервна, перейдемо до границі за умови $\Delta x \rightarrow 0$. Тоді отримаємо похідну від функції розподілу, яка й називається *щільністю ймовірності*

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \quad (1.13)$$

Крива, що зображує щільність імовірності випадкової величини $f(x)$, називається *кривою розподілу*.

Тепер можна навести визначення *неперервної випадкової величини*: випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на всій осі OX , а щільність розподілу $f(x)$ існує всюди, за винятком скінченної кількості точок.

Розглянемо *властивості щільності ймовірності* [2].

1. Щільність імовірності є функцією невід'ємною :

$$f(x) \geq 0. \quad (1.14)$$

Ця властивість впливає безпосередньо з визначення цієї функції як похідної від неспадної функції $F(x)$.

2. Імовірність попадання неперервної випадкової величини X до інтервалу $[\alpha; \beta]$ дорівнює :

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (1.15)$$

3. Функцію розподілу можна виразити через щільність імовірності за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (1.16)$$

4. Інтеграл у нескінченних межах від щільності ймовірності дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (1.17)$$

Геометрично це означає, що площа між кривою розподілу та віссю абсцис дорівнює одиниці.

Оскільки практика ставить перед природничими науками задачу пізнання законів, які б дозволили керувати процесами, що відбуваються на Землі в її географічних сферах, то необхідно вміти реалізовувати статистичні алгоритми при розв'язанні прикладних задач.

Як відомо, фізичні та хімічні процеси, що виникають і розвиваються в складових кліматичної системи (атмосфера, гідросфера, літосфера, кріосфера, біосфера) вивчаються багатьма науками. Але гідрометеорологічні науки, які входять до складу наук про Землю, відділяються певними особливостями напряму розвитку та методологією досліджень.

1.3 Числові (статистичні) характеристики випадкової величини

Закон розподілу випадкової величини є її вичерпною характеристикою. Однак його не завжди вдається встановити і часто використовують окремі числові характеристики, які відбивають суттєві риси розподілу випадкової величини. В якості таких характеристик розглядають моменти розподілу різного порядку.

З теорії ймовірності відомо, що основні властивості випадкових величин характеризуються початковими, центральними та основними моментами розподілу різних порядків. Вони є параметрами генеральних сукупностей випадкових величин. На основі статистичної сукупності (вибірки) можна знайти статистичні оцінки (числові характеристики) цих параметрів. За статистичною методологією отримані по вибірках оцінки параметрів повинні задовольняти три вимоги: незсуненості, ефективності та умотивованості.

Оскільки гідрометеорологічні процеси є функціями неперервних аргументів, то наведемо нижче основні формули для моментів розподілу неперервних випадкових величин [3].

Початковий момент 1-го порядку для неперервної випадкової величини X визначається таким чином:

$$M[X] = m_x = \nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (1.18)$$

де $f(x)$ – щільність імовірності випадкової величини X .

Відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M[X]$ називають центрованою випадковою величиною і позначають X^0

$$X^0 = X - m_x. \quad (1.19)$$

Центральним моментом розподілу l -го порядку $\mu_l[X]$ випадкової величини X називають початковий момент l -го порядку центрованої випадкової величини

$$\mu_l[X] = m_l \left[X^0 \right] = M \left[X^l \right] = M \left[(X - m_x)^l \right]. \quad (1.20)$$

Центральний момент l -го порядку є математичне сподівання l -го степеня центрованої випадкової величини.

Для неперервної випадкової величини X центральний момент l -го порядку визначається рівнянням

$$\mu_l[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^l f(x) dx. \quad (1.21)$$

Центральний момент 2-го порядку називають дисперсією випадкової величини і позначають

$$\mu_2[X] = D[X] = \sigma_x^2 = M \left[(X - m_x)^2 \right]. \quad (1.22)$$

Для неперервної випадкової величини X

$$\mu_2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \sigma_x^2. \quad (1.23)$$

Дисперсія випадкової величини є характеристика розсіювання випадкової величини біля математичного сподівання. Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Щоб мати характеристику

розсіювання з розмірністю випадкової величини, використовують середній квадратичний відхил: $\sigma[X] = \sigma_x$, $\sigma_x \sqrt{D_x}$.

Третій центральний момент дає змогу отримати коефіцієнт асиметрії, який є мірою скосу кривої розподілу відносно кривої нормального розподілу

$$A_s = \frac{\mu_3[X]}{\sigma_x^3}. \quad (1.24)$$

Четвертий центральний момент дає змогу визначити коефіцієнт ексцесу, який характеризує стислість чи витягнутість кривої розподілу випадкової величини відносно кривої нормального розподілу

$$E = \frac{\mu_4[X]}{\sigma_x^4} - 3. \quad (1.25)$$

Запитання для самоперевірки

1. Яким вимогам повинна відповідати статистична інформація?
2. Що називають випадковою величиною? Які випадкові величини (за типом) можуть використовуватися в статистичних дослідженнях?
3. Якими властивостями володіє гідрометеорологічна інформація?
4. Поясніть термін «дискретизація (квантування)» вихідної інформації?
5. Якими ознаками характеризується випадкова величина, до якої застосовуються методи математичної статистики?
6. Що є первинною формою зображення випадкової статистичної інформації?
7. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
8. За яких умов вважається, що випадкова величина повністю визначена?
9. Що виступає «інтегральним» та «диференціальним» законом розподілу?
10. Яким вимогам повинні відповідати статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності, розраховані на основі вибірок?
11. Який сенс математичного сподівання (дисперсії) випадкової величини та з яким моментом розподілу воно (вона) має зв'язок?

2. ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ

2.1 Визначення випадкової функції

У попередньому розділі розглядалися особливості та закономірності розподілу випадкових величин, тобто величин, можливі значення яких є числа. Однак часто доводиться опрацьовувати експерименти, результати яких характеризуються не числами, а функцією деякого аргументу. Наприклад, швидкість вітру в деякій точці простору випадковим чином змінюється за часом. Результат вимірювання швидкості вітру за деякий інтервал часу є не число, а функція часу, при чому ця функція від експерименту до експерименту змінюється випадковим чином.

В останні роки спостерігається широке використання в метеорології математичного апарату теорії випадкових функцій. Суттєвий внесок у цей напрям дослідження внесли Колмогоров А.М., Обухов О.М., Монін А.С., Яглом А.М., Юдін М.І., Гандін Л.С., Багров Н.О., Дроздов О.О., Борисенков Є.П., Альохін Ю.М. та інші [3].

Випадковою функцією $X(t)$ аргументу t називається функція, ординати якої для будь-яких фіксованих значень аргументу є випадковою величиною. У загальному випадку випадкова функція складається з системи реалізацій, які відбивають результати окремих експериментів. При цьому не випадкова функція, що отримана в результаті окремого експерименту, називається *реалізацією випадкової функції*. При кожному повторенні ми отримуємо нову реалізацію.

Таким чином, випадкову функцію можна розглядати як множину її реалізацій. Такий статистичний підхід вельми зручний при вивченні багатьох процесів фізики, техніки, біології та добре показує сенс процесів гідрометеорології [3].

Характерною особливістю атмосфери є неупорядкований турбулентний характер рухів, які відбуваються в ній, що призводить до суттєвої мінливості метеорологічних параметрів як у часі, так і у просторі. При цьому інтенсивність турбулентних пульсацій мають місце як для макромасштабних процесів, так і для рухів самого малого масштабу. Наявність турбулентності призводить до того, що початкові умови не визначають повністю протікання процесу, і, таким чином, експерименти, які проведені за однакових зовнішніх умов будуть приводити до різних результатів [3].

Припустимо, що в один і той же день та годину кожного року протягом деякого інтервалу часу проводять вимірювання температури повітря в даній точці атмосфери. При кожному такому вимірюванні ми отримуємо температуру як функцію від часу $T(t)$. Функції, що отримані при повторюванні експериментів, будуть відрізнятися одна від одної. Кожну функцію $T_i(t)$, отриману при i -му експерименті, можемо розглядати як

окрему реалізацію, а множину всіх отриманих функцій дає нам сукупність спостережених реалізацій випадкової функції [3].

Аналогічно й інші метеорологічні величини – атмосферний тиск, складові вектору швидкості вітру і т. п. можна розглядати як випадкові функції часу і просторових координат.

На рис. 2.1 наведені криві залежності від часу зональної складової $U(t)$ вектора вітру, визначені за даними спостережень за трансзондами.

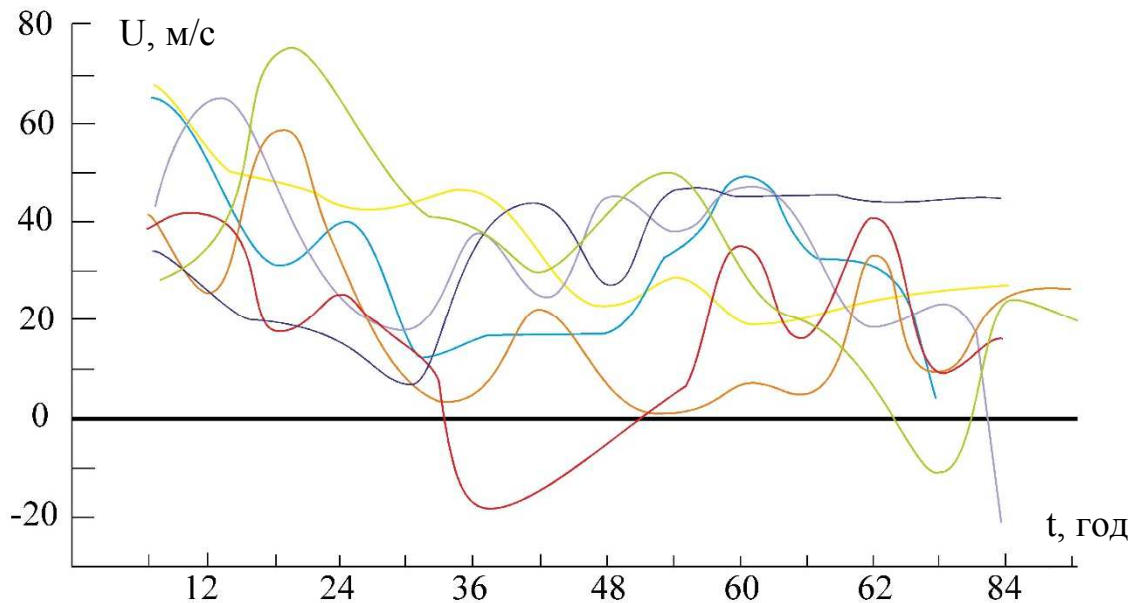


Рис. 2.1 – Зображення випадкової функції []

Кожна крива на рис. 2.1 являє собою реалізацію випадкової функції. Якщо зафіксувати момент часу $t = t_0$ та провести пряму, перпендикулярну до осі абсцис, то вона перетне кожен реалізацію в одній точці. Точки перетину представляють собою значення випадкової величини, яку називають перерізом випадкової функції, що відповідає значенню аргументу $t = t_0$. Виходячи з цього, можна дати інше визначення випадкової функції.

Випадковою функцією аргументу t називають функцію $X(t)$, значення якої, при кожному даному значенні аргументу $t = t_0$ (кожен переріз, що відповідає $t = t_0$), є випадковою величиною.

Будемо позначати випадкову функцію великими літерами із зазначенням аргументу $X(t)$, $Y(t)$ і т. п., а її реалізації – малими літерами $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., з індексом, що вказує на номер експерименту, при якому дана реалізація отримана. Переріз випадкової функції, який відповідає значенню аргументу t_0 , будемо позначати $X(t_0)$.

Аргумент t може набувати або будь-яких дійсних значень в заданому інтервалі кінцевому або нескінченному, чи тільки визначених дискретних значень. В першому випадку $X(t)$ називають випадковим процесом, в іншому – випадковою послідовністю [3].

Термін випадкова функція охоплює обидва ці поняття. Аргументом випадкової функції не обов'язково є час. Можна, наприклад, розглядати температуру повітря як випадкову функцію висоти. Випадкова функція може залежати не від одного аргументу, а від декількох. *Випадкову функцію декількох аргументів називають випадковим полем.*

У метеорології, наприклад, розглядається температурне поле, поле вітру, поле тиску, тобто температура, тиск чи вектор вітру розглядаються як випадкові функції чотирьох аргументів – трьох просторових координат і часу. При цьому випадкове поле може бути скалярним, як у випадку температурного поля чи поля тиску, або векторним, як у випадку поля вітру, коли кожна реалізація є векторною функцією.

Гідрометеорологічні процеси є функціями неперервних аргументів, тому ми не будемо розглядати теорію випадкових послідовностей, а розглянемо тільки випадкові процеси одного неперервного аргументу. При цьому одновимірний процес будемо називати випадковою функцією або випадковим процесом, не роблячи відмінності між цими термінами.

2.2 Закони розподілу випадкового процесу

Як розглядалося у підрозділі 1.2, випадкова величина вважається повністю визначеною, якщо відома її функція розподілу

$$F(x) = P(X < x). \quad (2.1)$$

Якщо розглянути систему перерізів випадкової функції, які відповідають значенням аргументу t_1, t_2, \dots, t_n , то отримаємо систему випадкових величин [3].

Система випадкових величин визначена, якщо задана її функція розподілу

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (2.2)$$

Випадковий процес $X(t)$ можна розглядати як сукупність всіх його перерізів, кожний з яких представляє собою випадкову величину. Фіксуючи значення аргументу t_1, t_2, \dots, t_n , ми отримаємо n перерізів випадкового процесу

$$X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n). \quad (2.3)$$

При цьому наближено випадковий процес можна охарактеризувати функцією розподілу отриманої системи випадкових величин

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (2.4)$$

Очевидно, що ця функція розподілу тим повніше буде характеризувати випадковий процес, чим ближче один до одного розташовані значення аргументу t_i і чим більше число n взято.

Виходячи з цього, випадковий процес $X(t)$ вважають заданим, якщо для кожного значення t визначена функція розподілу випадкової величини $X(t)$

$$F_1(x; t) = P[X(t) < x], \quad (2.5)$$

для кожної пари значень t_1 та t_2 аргументу t визначена функція розподілу системи випадкових величин $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) \quad (2.6)$$

та взагалі для будь-яких n значень t_1, t_2, \dots, t_n аргументу t визначена n -вимірна функція розподілу системи випадкових величин $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n)$

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (2.7)$$

Функція $F_1(x; t)$ називається *одновимірною функцією розподілу* випадкового процесу. Вона характеризує закон розподілу кожного його перерізу, але не відповідає на питання стосовно взаємної залежності між його різноманітними перерізами.

Функція $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ називається *двовимірною функцією розподілу* випадкового процесу. Вона також не є його вичерпною характеристикою.

Для повної характеристики випадкового процесу потрібно задати всі багатовимірні функції розподілу [3].

Для неперервних випадкових функцій, таких, кожний переріз яких являє собою неперервну випадкову величину, можна користуватися для

характеристики випадкової функції багатовимірними диференціальними законами розподілу. Якщо $F_1(x; t)$ має частинну похідну по x

$$\frac{\partial F_1(x; t)}{\partial x} = f_1(x; t), \quad (2.8)$$

то вона називається *одновимірною щільністю розподілу чи одновимірним диференціальним законом розподілу випадкової функції*.

Одновимірний диференціальний закон розподілу $f_1(x; t)$ є диференціальний закон розподілу випадкової величини – перерізу випадкової функції, відповідному даному значенню t .

Аналогічно визначаються багатовимірні диференціальні закони розподілу випадкової функції.

Якщо існує змішана частинна похідна від n -вимірної функції розподілу

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1, \partial x_2, \dots, \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (2.9)$$

то вона називається *n -вимірною щільністю розподілу випадкового процесу*.

Функції розподілу та щільності розподілу мають задовольняти вимоги симетрії, тобто мають бути такими самими при будь-якому виборі аргументу t_1, t_2, \dots, t_n .

Для будь-якої перестановки i_1, i_2, \dots, i_n з чисел $1, 2, \dots, n$ мають виконуватись співвідношення [3]:

$$F_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (2.10)$$

$$f_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (2.11)$$

Якщо відома n -вимірна функція розподілу або щільність розподілу, тоді задані й усі функції і щільності розподілу нижчого порядку.

Характеристика випадкової функції за допомогою задання багатовимірних законів розподілу більшою частиною є неприйнятною у практичному застосуванні, як унаслідок складності експериментального визначення багатовимірних законів розподілу, так і внаслідок їх громіздкості та важкості використання при розв'язанні прикладних задач.

Саме тому замість самих багатовимірних законів розподілу у більшості випадків обмежуються заданням окремих характеристик цих законів, аналогічно тому, як в теорії випадкових величин замість законів розподілу використовують їх числові характеристики [3].

2.3 Характеристики випадкових процесів

На відміну від числових характеристик випадкової величини, характеристики випадкових функцій є функціями її аргументу.

В якості характеристик випадкових процесів, як і випадкових величин, приймають моменти розподілу [3].

Моментом випадкового процесу порядку $i_1 + i_2 + \dots + i_n$ називається математичне сподівання добутку відповідних ступенів різноманітних перерізів випадкового процесу

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M \left\{ [X(t_1)]^{i_1} [X(t_2)]^{i_2} \dots [X(t_n)]^{i_n} \right\}. \quad (2.13)$$

Момент першого порядку

$$m_1(t) = M[X(t)] = m_x(t) \quad (2.14)$$

називається *математичним сподіванням випадкового процесу*.

Математичним сподіванням випадкового процесу є не випадкова функція $m_x(t)$, значення якої для кожного t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу. Математичне сподівання випадкової функції має характер «середньої» функції, біля якої групуються конкретні реалізації випадкового процесу.

Математичне сподівання $m_x(t)$ повністю визначається законом першого порядку

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x; t) dx. \quad (2.15)$$

Початкові моменти другого порядку можуть бути двох типів: момент другого порядку для одного й того ж перерізу випадкового процесу

$$m_{2,0}(t) = M \left\{ [X(t)]^2 \right\} \quad (2.16)$$

та змішаний момент другого порядку для двох різних перерізів

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]. \quad (2.17)$$

Момент $m_{2,0}$ залежить тільки від одного значення аргументу t , змішаний момент $m_{1,1}$ залежить від двох значень t_1 та t_2 аргументу t .

Поряд з початковими моментами, розглядають також центральні моменти випадкового процесу [3].

Різницю між випадковим процесом та його математичним сподіванням

$$\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t) \quad (2.18)$$

називають *центрованим випадковим процесом*.

Центральним моментом випадкового процесу $X(t)$ називається початковий момент відповідного порядку від центрованого випадкового процесу $\overset{0}{X}(t)$.

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю.

$$\mu_1(t) = M \left[\overset{0}{X}(t) \right] = M [X(t) - m_x(t)] = m_x(t) - m_x(t) = 0. \quad (2.19)$$

Центральні моменти другого порядку мають вигляд:

$$\mu_{2,0}(t) = M \left\{ \left[\overset{0}{X}(t) \right]^2 \right\} = M \left\{ [X(t) - m_x(t)]^2 \right\}, \quad (2.20)$$

$$\mu_{1,1}(t_1, t_2) = M \left[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right] = M \left\{ [X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)] \right\}. \quad (2.21)$$

Центральний момент $\mu_{2,0}(t)$, який є функцією аргументу t , при кожному фіксованому значенні t є дисперсія відповідного перерізу випадкового процесу. Ця *невипадкова функція аргументу t називається дисперсією випадкового процесу*

$$D_x(t) = D[X(t)] = M \left\{ [X(t) - m_x(t)]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [X - m_x(t)]^2 f_1(x, t) dx. \quad (2.22)$$

Дисперсія випадкової функції характеризує розкид реалізацій випадкової функції відносно її математичного сподівання.

Математичне сподівання і дисперсія є дуже важливими характеристиками випадкової функції, але вони не дозволяють отримати уявлення про характер зв'язку між значеннями випадкової функції, при

різних значеннях аргументу t , оскільки вони повністю визначаються одновимірними щільностями розподілу.

Центральний момент $\mu_{1,1}(t_1, t_2)$ є функція двох аргументів t_1 та t_2 для кожної пари значень t_1 та t_2 . Це є момент зв'язку, чи кореляційний момент між відповідними перерізами випадкового процесу.

Невипадкову функцію двох аргументів t_1 та t_2 називають кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$:

$$R_x(t_1, t_2) = X \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [X(t_2) - m_x(t_2)] \}. \quad (2.23)$$

Щоб підкреслити факт, що розглядається зв'язок між різними перерізами однієї й тієї ж випадкової функції, кореляційну часто називають *автокореляційною функцією*.

Очевидно, що за умови $t_1 = t_2 = t$ має місце $R_x(t, t) = D_x(t)$, тобто *при однакових значеннях аргументів кореляційна функція приймає максимальне значення і обертається на дисперсію*.

Кореляційну функцію $R_x(t_1, t_2)$ можна записати, користуючись двовимірним диференціальним законом розподілу випадкової функції

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] [x_2 - m_x(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1, dx_2. \quad (2.24)$$

Із визначення кореляційної функції $R_x(t_1, t_2)$ видно, що вона симетрична відносно своїх аргументів

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1). \quad (2.25)$$

Замість кореляційної функції можна користуватися *нормованою кореляційною функцією $r_x(t_1, t_2)$* , котра визначається у вигляді

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)}, \quad (2.26)$$

де $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$ називається середнім квадратичним відхиленням випадкової функції.

Для кожної пари значень t_1 та t_2 нормована кореляційна функція $r_x(t_1, t_2)$ є коефіцієнтом кореляції відповідних перерізів випадкової функції.

Задання перших та других моментів – математичного сподівання та кореляційної функції випадкового процесу – не надаючи його повної характеристики, визначає ряд суттєвих його властивостей.

Математичне сподівання $m_x(t)$ при кожному фіксованому значенні аргументу t визначає центр розподілу кожного перерізу випадкового процесу.

Кореляційна функція $R_x(t_1, t_2)$, перетворюючись за умови однакових значень $t_1 = t_2 = t$ у дисперсію, характеризує розкид випадкових значень даного перерізу біля свого центру розподілу.

При різних значеннях t_1 та t_2 кореляційна функція характеризує ступінь лінійної залежності між кожною парою перерізів випадкового процесу.

При вирішенні багатьох прикладних задач достатньо знати тільки ці два моменти – математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу.

Імовірнісні характеристики випадкової функції, що розглядалися вище, не є вичерпними характеристиками у загальному випадку, хоча знання цих характеристик, як правило, достатньо для розв'язання практичних задач, ці характеристики є вичерпними для нормально розподілених випадкових функцій [4].

Розділ теорії випадкових функцій, оперуючий тільки з цими характеристиками, носить назву кореляційної теорії випадкових функцій.

Для найбільш поширених на практиці нормально розподілених випадкових процесів математичне сподівання і кореляційна функція є вичерпними характеристиками випадкового процесу.

Випадковий процес називається нормально розподіленим, якщо будь-яка система його значень $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ підлягає нормальному закону розподілу системи випадкових величин.

Щільність розподілу нормально розподіленої системи випадкових величин однозначно визначається математичними сподіваннями випадкових величин системи та кореляційною матрицею.

Так як математичні сподівання перерізів випадкового процесу є значення математичного сподівання $m_x(t)$, що відповідають фіксованим значенням аргументу t , а елементи кореляційної матриці є значення кореляційної функції $R_x(t_1, t_2)$ при фіксованих парах її аргументів, то математичне сподівання та кореляційна функція випадкового процесу повністю визначають усі n -вимірні щільності розподілу нормально розподіленого випадкового процесу [3].

У даний час кореляційна теорія розроблена найбільш повно, та з її допомогою вдається вирішувати ряд важливих прикладних задач. Кореляційна теорія дозволяє визначати статистичну структуру метеорологічних чи гідрологічних процесів та полів, вирішувати задачі прогнозування цих процесів та ряд інших задач.

У математичній статистиці при визначенні математичного сподівання та кореляційних моментів випадкових величин за експериментальними даними у відповідності із законом великих чисел, у якості їх значень приймаються середні арифметичні по всіх значеннях випадкової величини, тобто:

$$m_x = M[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.27)$$

$$R_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y), \quad (2.28)$$

де n – кількість значень випадкової величини [3].

Аналогічне осереднення по множині всіх реалізацій відбувається при визначенні математичного сподівання та кореляційної функції випадкового процесу:

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (2.29)$$

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - m_x(t_1)] [x_i(t_2) - m_x(t_2)], \quad (2.30)$$

де n – кількість усіх реалізацій [3].

Виходячи з цього, для визначення характеристик випадкової функції замість операції взяття математичного сподівання часто в літературі використовують *операцію осереднення*, позначаючи

$$m_x(t) = \overline{X(t)}, \quad (2.31)$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{[X(t_1) - \overline{X(t_1)}]} \overline{[X(t_2) - \overline{X(t_2)}]}, \quad (2.32)$$

де риска над кожною величиною означає осереднення цієї величини по множині всіх реалізацій випадкової функції.

Розглянемо, як змінюються характеристики випадкового процесу при додаванні до нього не випадкової функції [3].

Наприклад,

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t), \quad (2.33)$$

де $\varphi(t)$ – не випадкова функція.

За теоремою додавання математичних сподівань

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t). \quad (2.34)$$

Визначимо кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t)$

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M \left\{ \left[Y(t_1) - m_y(t_1) \right] \left[Y(t_2) - m_y(t_2) \right] \right\} = \\ &= M \left\{ \left[X(t_1) + \varphi(t_1) - m_x(t_1) - \varphi(t_1) \right] \left[X(t_2) + \varphi(t_2) - m_x(t_2) - \varphi(t_2) \right] \right\} = \\ &= M \left\{ \left[X(t_1) - m_x(t_1) \right] \left[X(t_2) - m_x(t_2) \right] \right\} = R_x(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (2.35)$$

тобто видно, що від додавання не випадкового доданку кореляційна функція випадкового процесу не змінюється.

Користуючись цією властивістю, часто замість самого випадкового процесу розглядають центрований випадковий процес.

При вивченні гідрометеорологічних процесів математичне сподівання, отримане осередненням за всіма реалізаціями випадкового процесу, являє собою кліматичну норму даного процесу [3]. Це може бути середня багаторічна, середня місячна, середня добова і т.п. в залежності від характеру досліджуваного процесу. Мінливість процесу характеризується відхиленням випадкової реалізації процесу від цієї норми, котре називають аномалією.

Найбільший інтерес при статистичному вивченні випадкових процесів представляє характеристика цих аномалій. Наприклад, при прогнозуванні нас цікавить характер відхилення шуканого елемента від норми, тобто чи буде цей елемент більший чи менший за кліматичну норму.

Виходячи з цього, частіш за все розглядаються центровані випадкові процеси з нульовим математичним сподіванням. При цьому кореляційна функція центрованого процесу співпадає з кореляційною функцією вихідного процесу.

2.4 Система випадкових процесів. Кореляційна функція зв'язку

Доволі часто доводиться розглядати спільно декілька випадкових процесів. При цьому, окрім характеристики кожного випадкового процесу, істотним є встановлення зв'язку між різними процесами [3].

Так, при вивченні погодних явищ, доводиться спільно розглядати ряд випадкових процесів: зміну температури повітря, тиску, вологості та ін.

Подібно до системи випадкових величин, систему n випадкових процесів можна розглядати як n -вимірний випадковий вектор, який залежить від аргументу t , розглядаючи кожний випадковий процес як проекцію цього вектора на дану координатну вісь.

Не описуючи багатовимірні закони розподілу системи випадкових процесів у наслідок їх громіздкості та неможливості практичного

використання, обмежимося першими двома моментами, які використовуються у кореляційній теорії.

Початкові моменти першого порядку співпадають з математичними сподіваннями відповідних випадкових процесів.

Центральні моменти другого порядку можуть бути двох типів.

По-перше, можна розглядати другий центральний момент для двох перерізів одного й того ж випадкового процесу, який буде являти собою кореляційну функцію кожного випадкового процесу системи.

По-друге, можна розглядати другий центральний момент для перерізу одного з випадкових процесів системи, що відповідає значенню аргументу t_1 , та для перерізу іншого випадкового процесу, що відповідає значенню аргументу t_2 . Цей *центральний момент називається кореляційною функцією зв'язку* між двома випадковими процесами. Використовують також інше найменування – *взаємна кореляційна функція*.

Розглянемо систему з двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

У кореляційній теорії її аргументами будуть: математичні сподівання $m_x(t)$ та $m_y(t)$, кореляційні функції $R_x(t_1, t_2)$ та $R_y(t_1, t_2)$ і кореляційна функція зв'язку

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \left\{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [Y(t_2) - m_y(t_2)] \right\}. \quad (2.36)$$

Кореляційна функція зв'язку (2.36) характеризує ступінь лінійної залежності між перерізами $X(t_1)$ та $Y(t_2)$. За умови $t_1 = t_2$ кореляційна функція зв'язку буде характеризувати ступінь лінійної залежності перерізів випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$, що відповідають одному й тому ж значенню аргументу.

Кореляційну функцію кожного випадкового процесу, яка характеризує ступінь зв'язку між різними перерізами одного й того ж процесу, інколи називають – *автокореляційною функцією*.

Кореляційна функція зв'язку $R_{xy}(t_1, t_2)$ не є симетричною відносно своїх аргументів, однак володіє тією властивістю, що не змінюється при одночасній перестановці аргументів та індексів [3].

Дійсно, з (2.36) видно, що

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_1, t_2). \quad (2.37)$$

Кореляційна функція зв'язку не зміниться при додаванні до кожної з випадкових функцій невідповідних доданків, тому її можна вираховувати, користуючись центрованими випадковими функціями.

При фіксованих значеннях аргументів t_1 та t_2 , $R_{xy}(t_1, t_2)$ є моментом зв'язку між двома випадковими величинами $X(t_1)$ та $Y(t_2)$, тому

$$|R_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2). \quad (2.38)$$

Замість кореляційної функції зв'язку розглядають безрозмірну величину, що має назву *нормована кореляційна функція зв'язку*

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}. \quad (2.39)$$

Згідно з (2.38),

$$|r_{xy}(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (2.40)$$

Нормована кореляційна функція зв'язку $r_{xy}(t_1, t_2)$ при фіксованих значеннях t_1 та t_2 представляє собою коефіцієнт кореляції випадкових величин $X(t_1)$, $Y(t_2)$.

Якщо кореляційна функція зв'язку тотожно дорівнює нулю, то *випадкові процеси називаються незв'язними або некорельованими*.

Як і для випадкових величин, умова незв'язності є обов'язковою, але недостатньою для незалежності випадкових процесів. Вона характеризує лише відсутність лінійної залежності між ними.

Якщо розглядати систему n випадкових процесів $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, то для характеристики цієї системи в кореляційній теорії потрібно задати n математичних сподівань $m_{x_i}(t)$, n кореляційних функцій $R_{x_i}(t_1, t_2)$ та $\frac{n(n-1)}{2}$ кореляційних функцій зв'язку $R_{x_i x_j}(t_1, t_2)$.

За умови (2.37), кореляційні функції достатньо задати лише для пар індексів x_i, x_j за умови $i < j$, так як

$$R_{x_j x_i}(t_1, t_2) = R_{x_i x_j}(t_1, t_2). \quad (2.41)$$

Розглянемо випадок, коли випадковий процес $Z(t)$ представляє собою суму двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ [3],

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \quad (2.42)$$

Знайдемо математичне сподівання та кореляційну функцію випадкового процесу $Z(t)$.

При кожному фіксованому значенні t , згідно з властивістю математичного сподівання суми випадкових величин, отримуємо

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t). \quad (2.43)$$

Обчислимо кореляційну функцію $R_z(t_1, t_2)$

$$\overset{0}{Z}(t) = Z(t) - m_z(t) = [X(t) - m_x(t)] + [Y(t) - m_y(t)] = \overset{0}{X}(t) + \overset{0}{Y}(t). \quad (2.44)$$

Звідки виходить

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= M \left[\overset{0}{Z}(t_1) \overset{0}{Z}(t_2) \right] = M \left[\overset{0}{X}(t_1) + \overset{0}{Y}(t_1) \right] \left[\overset{0}{X}(t_2) + \overset{0}{Y}(t_2) \right] = \\ &= M \left[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right] + M \left[\overset{0}{Y}(t_1) \overset{0}{Y}(t_2) \right] + M \left[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{Y}(t_2) \right] + M \left[\overset{0}{Y}(t_1) \overset{0}{X}(t_2) \right] = \\ &= R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{yx}(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Таким чином, для визначення математичного сподівання суми двох випадкових процесів потрібно знати математичні сподівання цих двох процесів.

Для обчислення кореляційної функції сумарного випадкового процесу потрібно знати кореляційні функції доданку кожного процесу та кореляційну функцію зв'язку цих процесів.

У випадку, коли випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$ незв'язні, $R_{xy}(t_1, t_2) = 0$, $R_{yx}(t_1, t_2) = 0$ та (2.45) набирає вигляду

$$R_z(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2). \quad (2.46)$$

Ці формули можуть бути узагальнені на випадок суми n доданків

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t), \quad (2.47)$$

тоді

$$m_z(t) = \sum_{i=1}^n m_{x_i}(t), \quad (2.48)$$

$$R_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{x_i}(t_1, t_2) + \sum_{i < j} R_{x_i x_j}(t_1, t_2). \quad (2.49)$$

У випадку, коли всі випадкові процеси $X_i(t)$ попарно незв'язні, отримуємо

$$R_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{x_i}(t_1, t_2). \quad (2.50)$$

При підсумовуванні випадкової функції $X(t)$ з випадковою величиною Y , можемо розглядати цю випадкову величину як випадкову функцію, що не змінюється при змінні аргументу t .

У цьому випадку $m_y(t) = m_y$, а $R_y(t_1, t_2) = R_y(t, t) = D_y$. І формула (2.41) запишеться у вигляді

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y. \quad (2.51)$$

При незв'язності випадкової функції $X(t)$ та випадкової величини Y формула (2.45) має вигляд

$$R_z(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) + D_y. \quad (2.52)$$

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення випадкової функції, випадкового процесу, випадкової послідовності?
2. Як називається переріз випадкової функції, який відповідає фіксованому значенню аргументу?
3. В якому випадку система випадкових величин є визначеною?
4. Яка функція називається одновимірною функцією розподілу випадкового процесу?
5. Яка функція називається двовимірною функцією розподілу випадкового процесу?
6. Яка функція називається n -вимірною щільністю розподілу випадкового процесу?
7. Як можна замінити багатовимірні закони розподілу у практичному дослідженні випадкових функцій?
8. Якими ймовірнісними характеристиками описують випадкові функції?
9. За яких умов кореляційна функція переходить у дисперсію?

10. Який сенс математичного сподівання випадкової функції? дисперсії випадкової функції?
11. За яких умов розділ теорії випадкових функцій носить назву «Кореляційної теорії випадкових функцій»?
12. Який випадковий процес називається нормально розподіленим?
13. Чим виступає математичне сподівання, отримане осередненням за всіма реалізаціями випадкової функції, при дослідженні гідрометеорологічних процесів?
14. Який сенс кореляційної функції зв'язку системи випадкових процесів?
15. Яку кореляційну функцію називають автокореляційною функцією?
16. Які випадкові процеси називаються незв'язними (некорельованими)?

3 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

3.1 Визначення стаціонарного випадкового процесу

Найбільш простими для вивчення та статистичного опису є такі випадкові процеси, статистичні властивості яких практично не змінюються зі зміною аргументу. Такі процеси називають *стаціонарними* [3].

Термін стаціонарність виник при вивченні випадкових функцій часу та характеризує постійність їх властивостей у часі. Для випадкових процесів, аргументом яких є не час а інша змінна, наприклад відстань, більш природним є термін *однорідність*. Однак термін *стаціонарність* заведено відносити до випадкових функцій однієї змінної незалежно від характеру цієї змінної.

Термін *однорідність застосовують до випадкових полів*, характеризуючи їх однорідність у просторі, а під *стаціонарністю поля* розуміють постійність його статистичних властивостей у часі. Визначимо точніше поняття стаціонарності [3].

Випадковий процес $X(t)$ називають *стаціонарним у вузькому сенсі*, якщо всі його кінцевовимірні закони розподілу не змінюються при додаванні до всіх значень аргументу одного й того ж числа, тобто, якщо всі вони залежать від взаємного розташування значень аргументу, але не від самих цих значень [4].

Таким чином, випадковий процес $X(t)$ є стаціонарним, якщо при будь-якому n та будь-якому t_0 буде виконуватися рівняння:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0). \quad (3.1)$$

Тобто, щільності розподілу інваріантні по відношенню до зсуву початку відліку аргументу t .

Зокрема, для одновимірної щільності розподілу $f_1(x; t)$ стаціонарного випадкового процесу, прийнявши $t_0 = -t_1$, отримаємо

$$f_1(x; t) = f_1(x; t - t) = f_1(x; 0) = f_1(x), \quad (3.2)$$

тобто одновимірна щільність розподілу не залежить від t , вона одна й та сама для всіх перерізів випадкового процесу.

Двовимірна щільність розподілу при $t_0 = -t_1$ перетворюється у вираз

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; \tau), \quad (3.3)$$

тобто двовимірний щільності розподілу залежить не від двох аргументів t_1 та t_2 , а лише від одного аргументу, їх різниці $\tau = t_2 - t_1$.

Для стаціонарного випадкового процесу згідно (3.2) отримуємо

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = m_x = \text{const}, \quad (3.4)$$

тобто математичне сподівання стаціонарного випадкового процесу не залежить від аргументу t і є сталою величиною.

Згідно (3.3) та (3.4),

$$R_x(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_x(\tau). \quad (3.5)$$

Таким чином, *кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є функцією лише одного аргументу $\tau = t_2 - t_1$.*

Стаціонарність випадкової функції означає, що випадковий процес протікає однорідно зі змінюванням аргументу t , при цьому стаціонарна випадкова функція повинна існувати в області аргументу $(-\infty; \infty)$ [4].

Умови (3.4) та (3.5) виконуються для будь-якого стаціонарного процесу, тобто є необхідними умовами його стаціонарності. Однак вони не є достатніми для стаціонарності процесу, тобто їх виконання не гарантує виконання умови (3.1) при $n \geq 3$.

У кореляційній теорії випадкових функцій використовуються не багатовимірні закони розподілу, а лише перші два моменти розподілу, при цьому виконання умов (3.4) і (3.5) є суттєвим та призводить до значного спрощення опису випадкових процесів та вирішення багатьох прикладних задач.

Ось чому в кореляційній теорії виділяють клас випадкових процесів, для яких виконуються умови (3.4) та (3.5), тобто для яких математичне сподівання є стала величина, а кореляційна функція є функцією лише одного аргументу.

Такі процеси називають *стаціонарними у широкому сенсі*.

У подальшому, займаючись лише кореляційною теорією випадкових функцій, будемо мати на увазі стаціонарність у широкому сенсі.

Для нормальних випадкових процесів, стаціонарність у широкому сенсі еквівалентна точній стаціонарності, так як усі n -вимірні щільності розподілу у цьому випадку повністю визначаються математичним сподіванням і кореляційною функцією випадкового процесу. Отже, незалежність останніх від вибору початку відліку аргументу t призводить

до інваріантності відносно такого зсуву всіх n -вимірних щільностей розподілу нормального випадкового процесу [3].

З властивості симетричності кореляційної функції (2.23) виходить

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau), \quad (3.6)$$

тобто *кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є парною*.

Виходячи з цього, можна також сказати, що його кореляційна функція залежить лише від абсолютної величини різниці $t_2 - t_1$, тобто, якщо вважати $\tau = |t_2 - t_1|$.

Для стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ дисперсія

$$D_x(t) = R_x(t, t) = R_x(0) \quad (3.7)$$

також є сталою величиною, яка не залежить від аргументу t . Вона отримується з кореляційної функції $R_x(\tau)$ за умови $\tau = 0$.

Нормована кореляційна функція стаціонарного процесу, згідно з (2.24), визначається у вигляді

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x} = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \quad (3.8)$$

та

$$r_x(0) = \frac{R_x(0)}{R_x(0)} = 1. \quad (3.9)$$

Розглянемо систему випадкових процесів $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$. Ця система називається *стаціонарною у широкому сенсі*, якщо кожен з випадкових процесів $X_i(t)$ є стаціонарним у цьому сенсі, й окрім того, кореляційні функції зв'язку $R_{x_i x_j}(t_1, t_2)$ є функціями лише одного аргументу $\tau = t_2 - t_1$, тобто

$$R_{x_i x_j}(t_1, t_2) = R_{x_i x_j}(\tau). \quad (3.10)$$

Таку систему також називають *стаціонарною та стаціонарно пов'язаною* [3].

Для такої системи з властивості кореляційних функцій зв'язку отримаємо

$$R_{x_i x_j}(\tau) = R_{x_i x_j}(-\tau). \quad (3.11)$$

З викладеного видно, що стаціонарність випадкової функції значно спрощує її статистичний опис.

Стаціонарні випадкові функції в чистому вигляді зустрічаються дуже рідко, оскільки для цього необхідно існування однорідності випадкового процесу при нескінченному змінюванні аргументу t . Але нас, як правило, цікавить протікання випадкового процесу на невеликому інтервалі значень t і, якщо умови стаціонарності виконуються для цього інтервалу, то ми можемо вважати таку випадкову функцію стаціонарною.

Це дозволило розробити достатньо ефективні математичні методи розв'язання у межах кореляційної теорії питань перетворення стаціонарних випадкових функцій, їх прогнозування та ін.

Для нестаціонарних функцій вирішення цих питань пов'язано з великими труднощами. Тому будь-яку випадкову функцію, з якою мають справу на практиці, перед усе розглядають з точки зору можливості вважати її стаціонарною.

Для процесів, маючих місце в атмосфері та гідросфері, припущення щодо їх стаціонарності достатньо добре виправдовується для порівняно невеликих інтервалів часу чи відстані. Зі збільшенням інтервалів зміни аргументу спостерігається погіршення стаціонарності.

Зустрічаються такі випадкові функції, в яких кореляційна (коваріаційна) функція задовольняє умові стаціонарності, але математичне сподівання її не є сталим [4]. Такі властивості мають випадкові гідрометеорологічні процеси, що формуються під дією збурюючих факторів не тільки випадкового характеру, але й факторів детермінованих. Останні можуть мати різну періодичність. При цьому наявність добового (річного) ходу метеорологічних величин, та інших систематичних факторів призводить до того, що математичне сподівання змінюється зі зміною аргументу. При цьому найчастіше стаціонарність у сенсі незалежності кореляційної функції від початку відліку зберігається, якщо й не точно то з деяким припустимим на практиці наближенням.

У цьому випадку замість самого випадкового процесу доцільно розглядати центрований випадковий процес, тобто його відхилення від математичного сподівання

$$X(t) = X(t) - m_x(t). \quad (3.12)$$

Центрований випадковий процес при цьому можна вважати стаціонарним зі сталим математичним сподіванням, яке дорівнює нулю. Кореляційні функції центрованого та вихідного випадкових процесів, як було показано у підрозділі 2.3, співпадають.

3.2 Апроксимація кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів

При дослідженні статистичної структури процесів атмосфери та гідросфери частіш за все зустрічаються стаціонарні випадкові процеси, кореляційні функції яких апроксимовані функціями наступних типів [3]:

$$1) R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{рис.3.1}); \quad (3.13)$$

$$2) R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{рис. 3.2}); \quad (3.14)$$

$$3) R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0 \quad (\text{рис. 3.3}); \quad (3.15)$$

$$4) R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0 \quad (\text{рис. 3.4}); \quad (3.16)$$

$$5) R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (\text{рис. 3.5}); \quad (3.17)$$

$$6) R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) & \text{за умови } |\tau| \leq \tau_0 \\ 0 & \text{за умови } |\tau| > \tau_0 \end{cases} \quad (\text{рис. 3.6}). \quad (3.18)$$

Величина α має сенс масштабу аргументу, при якому кореляційна функція зменшується в e разів. Тому її називають *декрементом затухання* кореляційної функції. За умови малих значень α $R(\tau)$ зменшується повільніше, ніж при великих значеннях. Тобто α визначає швидкість затухання амплітуди коливань $R(\tau)$. Аргумент β – період коливального процесу.

На рисунках наведено графіки кореляційних функцій лише для $\tau > 0$, в силу парності цих функцій за умови $\tau < 0$ їм будуть відповідати криві, симетричні відносно осі ординат.

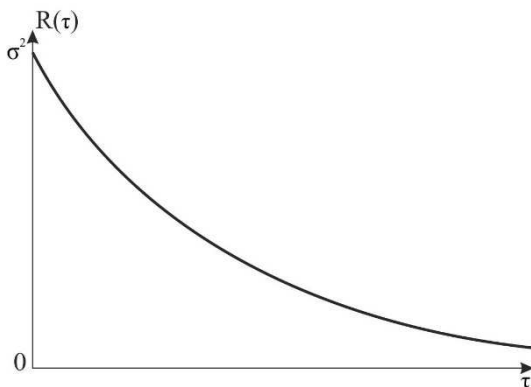


Рис.3.1

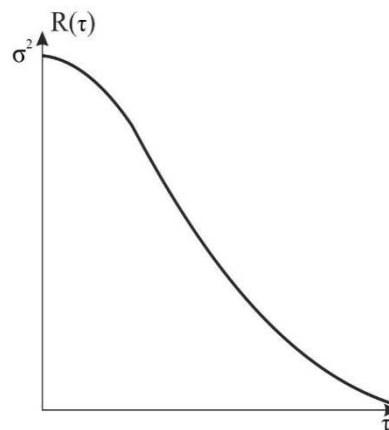


Рис. 3.2

На рис. 3.1, 3.2, 3.6 видно, що значення кореляційної функції зменшуються зі зростанням τ , тобто кореляційний зв'язок між різними перерізами випадкової функції спадає зі збільшенням інтервалу між ними.

Для 6-го типу (3.18) апроксимуючої функції (рис. 3.6) вводиться умова, що $R(\tau)$ описується на інтервалі від 0 до τ_0 лінійною функцією. Вона може використовуватися при апроксимації швидко згасаючої монотонної $R(\tau)$.

Криві на рис. 3.3-3.5 мають вигляд гармонічних коливань зі зменшуючою амплітудою, а це вказує на наявність періодичності в структурі випадкової функції. Отримання від'ємного значення $R(\tau)$ на частині інтервалу змінення τ вказує на наявність від'ємного зв'язку між цими перерізами випадкової функції, тобто додатним відхиленням від математичного сподівання в одному перерізі відповідають від'ємні значення відхилення в іншому.

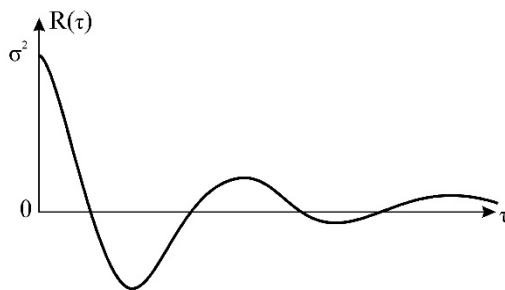


Рис. 3.3

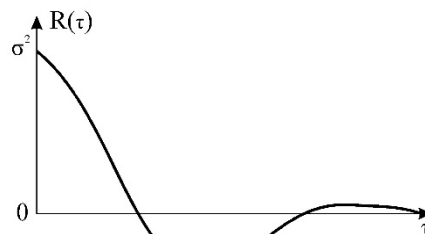


Рис. 3.4

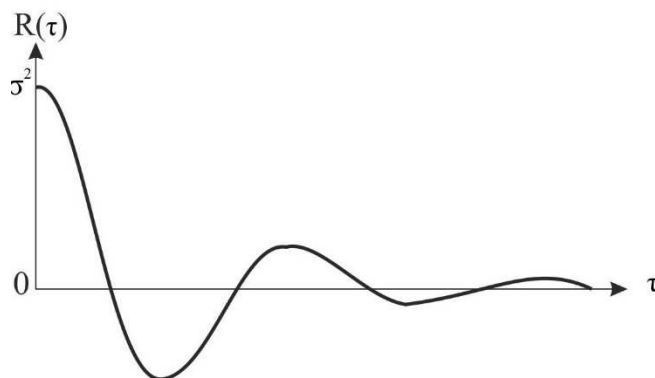


Рис. 3.5

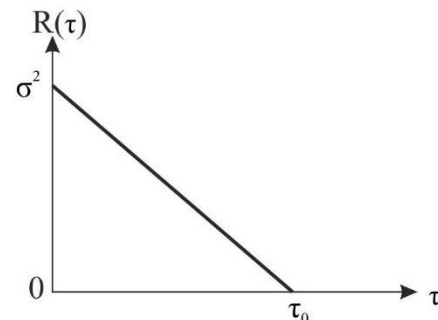


Рис. 3.6

Для всіх наведених випадків кореляційна функція прагне до нуля при прагненні τ до нескінченності. Ця властивість зазвичай виконується для тих функцій, що найчастіше зустрічаються в практичній гідрометеорології.

Виняток становить той випадок, коли в структурі випадкової функції в

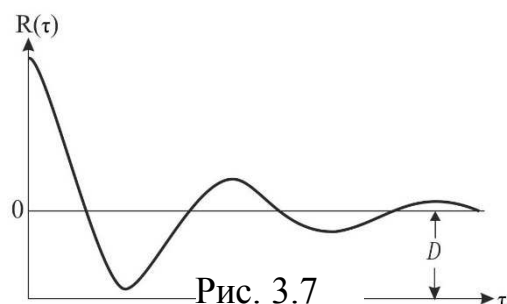


Рис. 3.7

якості доданку присутня стала випадкова величина. В цьому випадку кореляційна функція буде мати сталий доданок, що дорівнює дисперсії цієї випадкової величини. За умови $\tau \rightarrow \infty$, $R(\tau)$ буде прагнути до цієї дисперсії. Наприклад, для випадку 3 (3.15) графік буде мати вигляд (рис. 3.7).

Виникає питання, чи будь-яка парна функція може бути кореляційною функцією стаціонарного випадкового процесу.

Функція $f(t)$, для якої виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j f(t_i - t_j) \geq 0, \quad (3.19)$$

для будь-яких n дійсних чисел a_1, a_2, \dots, a_n та будь-яких значень аргументу t_1, t_2, \dots, t_n називається додатно визначеною.

Розглянемо суму такого вигляду для кореляційної функції $R_x(\tau)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j R_x(t_i - t_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ X(t_i) & X(t_j) \end{array} \right] a_i a_j = \\ &= M \left\{ \left[\sum_{i=1}^n a_i X(t_i) \right]^2 \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Сума (3.20) невід'ємна як математичне сподівання невід'ємної величини [3].

Таким чином, кореляційна функція є додатно визначеною. Тому кореляційною функцією стаціонарного випадкового процесу може бути лише додатно визначена функція.

Справедливим є і зворотне твердження про те, що будь-яка додатно визначена функція є кореляційною функцією для деякого стаціонарного випадкового процесу.

Для автокореляційної функції максимальне значення, що дорівнює дисперсії випадкового процесу, досягається за умови $\tau = 0$.

Для кореляційної функції зв'язку двох випадкових процесів це не завжди має місце. Дійсно, вплив одного процесу на інший може відбуватися з деяким запізненням. Наприклад, нагрівання стратосфери за рахунок сонячного випромінювання відбувається лише через деякий час τ . У цьому випадку значення моменту зв'язку між перерізами цих процесів при інтервалі τ між ними буде більше, ніж між одночасними перерізами цих процесів. Наявність такого запізнення може бути і причиною несиметричності кореляційної функції зв'язку відносно аргументу τ , тобто, того, що $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$.

3.3 Ергодичність стаціонарних випадкових процесів

До цього ми визначали характеристики випадкової функції – математичне сподівання та кореляційну функцію шляхом осереднення по множині всіх реалізацій.

Однак можливий і інший шлях осереднення, коли ми маємо одну реалізацію з великою тривалістю. Якщо зв'язок між цими перерізами випадкового процесу спадає швидко, то ті частини реалізації, які можна вважати незалежними між собою, можна розглядати як сукупність реалізацій.

Цей спосіб, практично, може розглядатися лише для стаціонарної функції, так як для функції нестационарної статистичні властивості змінюються зі змінням аргументу, і окремі частини реалізації не можна вважати різними реалізаціями, що відповідають однаковим умовам експерименту.

Оскільки розподіл випадкової функції можна описати за допомогою достатньо великої кількості моментів розподілу, а аргументом випадкової функції у більшості випадків є час, то ергодичну властивість стаціонарної випадкової функції можна визначити таким чином: осереднення за часом від будь-якої реалізації дорівнює осередненню по множині реалізацій.

Для стаціонарного випадкового процесу математичне сподівання (середнє значення) не залежить від аргументу, тому можна спробувати, не розділяючи реалізацію на окремі частини, визначити його як середнє арифметичне з усіх значень даної реалізації [3].

У цьому випадку математичне сподівання визначиться формулою

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (3.21)$$

де

T – інтервал осереднення.

Аналогічно кореляційну функцію $R_x(\tau)$ визначимо як середнє арифметичне добутку

$$[x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] \quad (3.22)$$

з усіх значень даної реалізації за формулою

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt. \quad (3.23)$$

Виникає питання, чи будуть ці значення близькі до відповідних значень, отриманих осередненням по сукупності. Виявляється, що це буде мати місце не для всіх стаціонарних функцій [3].

Кажуть, що випадкова функція, для якої статистичні характеристики, отримані осередненням по одній реалізації, при збільшенні інтервалу осереднення T , з імовірністю максимально близькою до одиниці, можуть бути наближені до відповідних характеристик, отриманих осередненням по всій множині реалізацій, володіє ергодичною властивістю. Ергодичною властивістю володіють такі випадкові функції, кожна реалізація яких має одні й ті самі статистичні властивості. Якщо ж окремі реалізації мають свої специфічні особливості, наприклад, являють собою коливання біля різних середніх, то середнє значення, що отримане по одній реалізації, може значно відрізнятись від середнього, отриманого по сукупності всіх реалізацій.

Сформулюємо математичні умови ергодичності стаціонарної випадкової функції [2]. Ця властивість полягає у тому, що для такої функції операція осереднення за часом від будь-якої реалізації дорівнює осередненню по множині реалізацій, тобто:

$$m_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \overline{x(t)}; \quad (3.24)$$

$$D_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x(t)]^2 dt = \overline{[x(t) - m_x(t)]^2}; \quad (3.25)$$

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t + \tau) - m_x(t)] \cdot [x(t) - m_x(t)] dt = \overline{[x(t) - m_x(t)] \cdot [x(t + \tau) - m_x(t)]} \quad (3.26)$$

де рискою зверху позначені середні за часом;

$x(t)$ – будь-яка реалізація випадкової функції $X(t)$.

Ознакою ергодичності випадкового процесу є збігання до нуля коваріаційної (кореляційної) функції при наближенні аргументу до нескінченності:

$$K_x(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{за умови} \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Для ергодичності по відношенню до математичного сподівання достатньою умовою є прагнення кореляційної функції $R(\tau)$ до нуля при прагненні τ до нескінченності. Ця умова зазвичай виконується для всіх випадкових функцій, які зустрічаються на практиці. Однак вона не буде виконуватися, якщо у складі випадкової функції в якості сталого доданку присутня деяка випадкова величина.

Дійсно, нехай випадковий процес $Z(t)$ представляє собою суму стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ та не пов'язаної з ним величини Y з нульовим математичним сподіванням.

Тоді, згідно з (2.50), має місце рівність

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + D_y, \quad (3.27)$$

і $R_z(\tau)$, навіть при виконанні умови $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$, буде прагнути при $\tau \rightarrow \infty$ не до нуля, а до деякого додатного числа D_y .

У цьому випадку, згідно з (2.49), маємо

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y = m_x(t). \quad (3.28)$$

Кожна реалізація $z_i(t)$ буде вміщувати при всіх значеннях аргументу t сталий доданок, який дорівнює значенню y_i випадкової величини Y , тобто

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i, \quad (3.29)$$

тому середнє значення, отримане осередненням по цій реалізації і яке дорівнює

$$m_z = m_x + y_i, \quad (3.30)$$

буде відрізнятися від справжнього значення m_z на величину y_i навіть при збігу значень m_x в обох випадках.

При визначенні характеристик випадкових процесів, що володіють ергодичною властивістю, по одній реалізації дуже важливою є тривалість інтервалу осереднення. Так як характеристики, отримані осередненням по одній реалізації, достатньо близько співпадають з справжніми їх статистичними характеристиками лише у границі при нескінченному збільшенні інтервалу осереднення, то при наявності спостережень лише на малому інтервалі зміни аргументу можна отримати шукані характеристики з неприпустимо великими помилками.

Тейлором [3] було показано, що для дисперсії різниць між справжнім значенням математичного сподівання випадкового процесу $X(t)$ вказаного типу та значенням, отриманим осередненням по одній реалізації, при достатньо великому T справедлива асимптотична формула

$$D \approx 2 \frac{T_1}{T} R_x(0), \quad (3.31)$$

де

T – інтервал осереднення;

T_1 – величина, що називається *часом кореляції*, визначається за формулою

$$T_1 = \frac{1}{R_x(0)} \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau. \quad (3.32)$$

Таким чином, для надійного визначення шуканих характеристик потрібно брати інтервал осереднення у багато разів більшим, ніж час кореляції T_1 .

Умови ергодичності по відношенню до кореляційної функції формуються складніше. Перевірку їх здійсненості на практиці, як правило, встановити не вдається, тому судження про ергодичність зазвичай приймають, виходячи з фізичної сутності процесу.

Властивість ергодичності має велике практичне значення, так як за умови його виконання для визначення статистичних характеристик не потрібна велика кількість реалізацій. При вивченні статистичної структури метеорологічних величин не завжди вдається здійснити багаторазове повторення експерименту в однакових умовах.

Ще важче це зробити в гідрології. Наприклад, дані про річний стік річки можуть являти собою лише одну реалізацію.

Якщо є декілька реалізацій однакової тривалості, що відповідають однаковим умовам експерименту, то, користуючись ергодичною властивістю, можна отримати статистичні характеристики осередненням по кожній реалізації, а потім взяти в якості шуканих значень середні арифметичні з них. Якщо тривалість реалізації різна, то осереднення результатів за ними треба проводити з урахуванням ваги кожної реалізації.

3.4 Структурна функція

В якості характеристики стаціонарного випадкового процесу поряд з кореляційною функцією розглядають структурну функцію $B(\tau)$, яку визначають як математичне сподівання квадрату різниці перерізів випадкового процесу, що відповідають значенням аргументу t та $t + \tau$ [3]

$$B_x(\tau) = M \left\{ [X(t + \tau) - X(t)]^2 \right\}. \quad (3.33)$$

З визначення видно, що структурна функція не невід'ємна, $B(\tau) \geq 0$. Структурну функцію можна визначити через кореляційну функцію

$$B_x(\tau) = M \left\{ [(X(t+\tau) - m_x) - (X(t) - m_x)]^2 \right\} = M \left\{ [X(t+\tau) - m_x]^2 \right\} + \\ + M \left\{ [X(t) - m_x]^2 \right\} - 2M \left\{ [X(t+\tau) - m_x][X(t) - m_x] \right\} = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]. \quad (3.34)$$

З формули (3.34) та властивостей кореляційної функції отримуємо:

$$B_x(0) = 0 \quad (3.35), \quad B_x(-\tau) = B_x(\tau), \quad (3.36)$$

тобто структурна функція стаціонарного випадкового процесу є парною.

Якщо для випадкового процесу виконується умова

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0, \quad (3.37)$$

то з (3.34) отримуємо

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = 2R_x(0) = 2\sigma_x^2. \quad (3.38)$$

Позначивши $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = B_x(\infty)$, при виконанні умови (3.37), запишемо рівняння (3.34) у вигляді

$$B_x(\tau) = B_x(\infty) - 2R_x(\tau). \quad (3.39)$$

Тепер можемо виразити кореляційну функцію через структурну у вигляді

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} [B_x(\infty) - B_x(\tau)]. \quad (3.40)$$

Таким чином, за умови (3.37), яка зазвичай виконується на практиці, знаючи структурну функцію на нескінченному інтервалі зміни аргументу, ми можемо по ній з'ясувати кореляційну функцію.

Практично ми ніколи не маємо записів реалізацій випадкового процесу на нескінченному інтервалі. Однак у ряді випадків структурна функція доволі швидко досягне значення, яке при подальшому зростанні інтервалу τ змінюється мало.

Це значення, яке інколи називають *насичуючим значенням структурної функції*, та беруть за $B(\infty)$. Між структурною та кореляційною функціями має місце співвідношення

$$R_x(\tau) + \frac{1}{2} B_x(\tau) = \sigma_x^2. \quad (3.41)$$

На рис. 3.8 це співвідношення проілюстровано для випадкового стаціонарного процесу з кореляційною функцією (рис. 3.1)

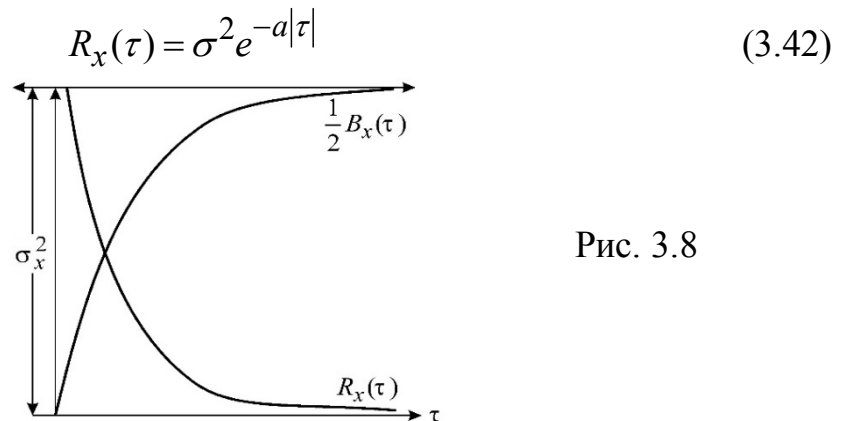


Рис. 3.8

Так як структурна функція виражається через кореляційну функцію, то для стаціонарного випадкового процесу, що володіє ергодичною властивістю, структурна функція також може визначатися по одній реалізації (достатньо великої тривалості) за формулою

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t+\tau) - x(t)]^2 dt. \quad (3.43)$$

Якщо випадкова функція є стаціонарною і маємо достатньо велику кількість реалізацій, яка надійно характеризує випадкову функцію на всьому інтервалі змінення аргументу, можна визначити кореляційну функцію безпосередньо за експериментальними даними.

Однак часто зустрічаються випадки, коли використання структурної функції є найкращим.

Стаціонарність реальних метеорологічних процесів зазвичай носить локальний характер, вона зберігається лише на порівняно невеликих інтервалах зміни аргументу.

При вивченні мезо- і особливо макроструктури цих процесів стаціонарність (однорідність) їх можна приймати лише з деякою певною ступінню наближення. При цьому математичне сподівання випадкової функції не є сталим.

Визначення кореляційної функції для таких процесів при малих значеннях аргументу може бути пов'язане з великою помилкою.

На структурну функцію повільні зміни самого процесу не впливають при малій величині різниці значень аргументу τ . Тому неоднорідність довгохвильових збурень помітно не впливає на точність розрахунку $B(\tau)$ за умови малих значень τ . Взагалі, систематичні помилки, що зберігають своє значення протягом довгого періоду, більшого за τ , не впливають на

величину $B_x(\tau)$, так як вони виключаються при розрахуванні різниці $x(t + \tau) - x(t)$.

Використання структурних функції є переважаючим і при статистичному оцінюванні параметрів по одній реалізації, коли використовуються не справжня статистична середня, а середня по реалізації, тобто знов має місце систематична помилка.

Структурні функції, обчислені по окремих реалізаціях, не містять цієї систематичної помилки, так як при їх розрахуванні середнє по реалізації значення не використовується.

Це ж відноситься до випадку, коли обробка даних проводиться по статистичній сукупності порівняно невеликої кількості реалізацій.

Таким чином, використання структурних функцій дозволяє у ряді випадків зменшити вплив неоднорідності процесу та систематичних помилок на точність розрахованих за експериментальними даними характеристик випадкової функції.

Однак переваги структурних функцій суттєві лише за умови малих значень параметру τ , при обчисленні ж кореляційних функцій, через структурні, точність перших не підвищується, тому що усі помилки увійдуть у значення, яке насичує структурну функцію.

Запитання для самоперевірки

1. Які процеси називають стаціонарними у «вузькому» та «широкому» сенсі
2. Яку систему випадкових процесів називають «стаціонарною» та «стаціонарно пов'язаною»?
3. Який випадковий процес називається «центрованим випадковим процесом»? В якому випадку центрований випадковий процес можна вважати стаціонарним?
4. Що розуміють під апроксимацією кореляційних функцій стаціонарного випадкового процесу?
5. Що називають «декрементом затухання» кореляційної функції?
6. Якими ймовірнісними характеристиками описується стаціонарна випадкова функція?
7. Яка випадкова функція володіє ергодичною властивістю? У чому полягають математичні умови ергодичності стаціонарної випадкової функції?
8. Яку величину називають «часом кореляції» і за допомогою якого рівняння вона визначається?
9. Для розв'язання яких задач у теорії випадкових функцій використовують структурну функцію?
10. Яке значення називають «насичуючим значенням» структурної функції?

4. СПЕКТРАЛЬНЕ РОЗКЛАДАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ

4.1 Загальні теоретичні положення

Властивості випадкових функцій можна визначити, впроваджуючи спектральне розкладання часових послідовностей [2, 4].

Спектральним розкладанням деякої функції називається зображення її сумою гармонічних коливань, які мають різні амплітуди гармонік. Залежність амплітуд від частоти називають *спектром функції*. Для втілення спектрального розкладання використовується перетворення Фур'є.

Розглянемо, яким чином можна отримати спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції.

На рис. 4.1 умовно зображується випадкова функція $X(t)$ на інтервалі $(-T; T)$, яку будемо позначати $X_T(t)$. Ця функція може бути розкладеною у ряд Фур'є:

$$X_T(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t), \quad (4.1)$$

де $\omega_i = i\Delta\omega$; $\Delta\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$;

A_{1i} і A_{2i} – випадкові коефіцієнти ряду Фур'є.

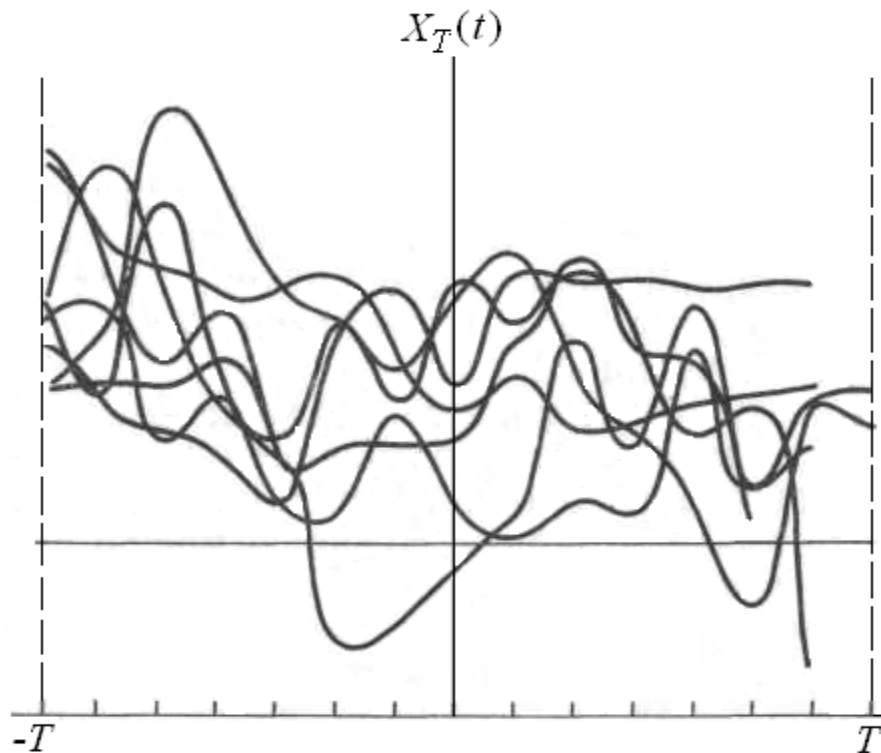


Рис. 4.1 – Зображення випадкової функції $X(t)$ на інтервалі $(-T; T)$

Визначимо дисперсію випадкової функції $X_T(t)$:

$$\begin{aligned}
 D_{X_T} &= M\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t) \times (A_{1j} \cos \omega_j t + A_{2j} \sin \omega_j t) \right\} = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [M(A_{1i}^2) \cos^2 \omega_i t + M(A_{2i}^2) \sin^2 \omega_i t] + \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [M(A_{1i} A_{1j}) \cos \omega_i t \cos \omega_j t + \right. \\
 &+ M(A_{2i} A_{2j}) \sin \omega_i t \sin \omega_j t] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [M(A_{1i} A_{2j}) \cos \omega_i t \sin \omega_j t + \\
 &+ M(A_{2i} A_{1j}) \sin \omega_i t \cos \omega_j t] \left. \right\} \quad i \neq j.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Оскільки функції $\cos \omega t$ та $\cos \omega t - \sin \omega t$ є ортогональними, останній член рівняння (4.2) дорівнює нулю. Крім того, функція $X(t)$ – стаціонарна. Тому дисперсія її повинна бути сталою, тобто незалежною від аргументу t . Це можливо, коли виконуються умови:

$$M[A_{1i}^2] = M[A_{2i}^2] = D_i, \tag{4.3}$$

$$M[A_{1i} A_{1j}] = M[A_{2i} A_{2j}] = 0 \quad i \neq j \tag{4.4}$$

Якщо запровадити ці умови до рівняння (4.2), то будемо мати:

$$D_{X_T} = \sum_{i=0}^{\infty} D_i. \tag{4.5}$$

Умова (4.4) є умовою незв'язності коефіцієнтів розкладання функції (4.1).

Якщо врахувати умови (4.3), (4.4) та (4.5), то можна отримати коваріаційну функцію стаціонарної випадкової функції $X_T(t)$:

$$\begin{aligned}
 K_{X_T}(t_\nu - t_\mu) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ M[A_i^2 \cos \omega_i t_\nu \cos \omega_i t_\mu] \right\} + \left\{ M[A_{2i}^2 \sin \omega_i t_\nu \sin \omega_i t_\mu] \right\} = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} D_i (\cos \omega_i t_\nu \cos \omega_i t_\mu + \sin \omega_i t_\nu \sin \omega_i t_\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cos \omega_i (t_\nu - t_\mu).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Позначимо $t_\nu - t_\mu = \tau$ й отримуємо рівняння:

$$K_{X_T}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cos \omega_i \tau, \tag{4.7}$$

яке визначає розкладання парної функції $K_{X_T}(\tau)$ у ряд Фур'є на інтервалі $[-T, T]$.

Коефіцієнти розкладання визначаються формулами:

$$D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T K_{X_T}(\tau) d\tau, \quad (4.8)$$

$$D_i = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} K_{X_T}(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad i=1,2,3,\dots \quad (4.9)$$

Таким чином, для опису стаціонарної випадкової функції можна використовувати залежність дисперсії D_i коефіцієнтів розкладання випадкової функції від частоти ω_i в ряд Фур'є замість коваріаційної функції $K_{X_T}(\tau)$. Залежність коефіцієнтів D_i від частоти ω_i називається *спектром випадкової функції*. Якщо випадкова функція розглядається на обмеженому інтервалі аргументів, то частота приймає дискретні значення з проміжком $\Delta\omega$. За таких умов *спектр випадкової функції* називається *дискретним* або *лінійчатим*. Приклад лінійчатого спектра наводиться на рис. 4.2.

Лінійчатий спектр отримується в разі розкладання в ряд Фур'є і періодичної випадкової функції.

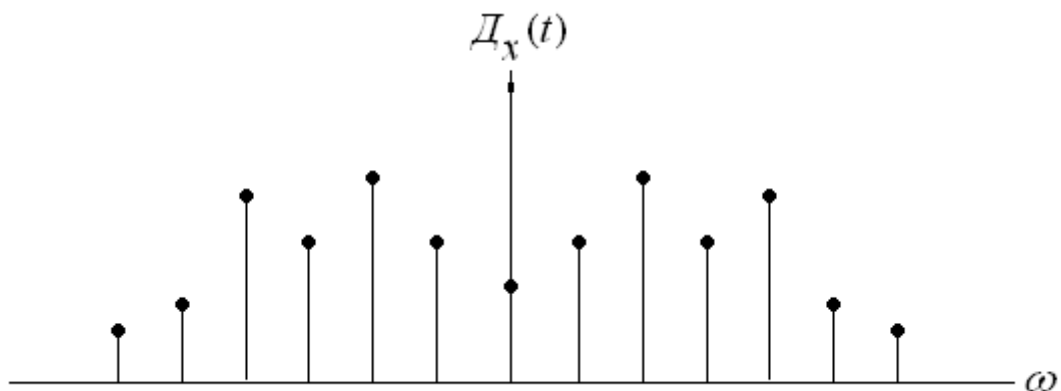


Рис. 4.2 – Дискретний спектр випадкового процесу

Спектральне розкладання випадкової функції на обмеженому інтервалі $[-T; T]$ дає лише наближений опис випадкової функції. Більш повне уявлення про випадкову функцію при її спектральному розкладанні можна отримати при збільшенні T , тобто за умови $T \rightarrow \infty$. У цьому випадку частота з дискретної величини перетворюється на неперервну, а замість дисперсій амплітуд для кожної частоти необхідно розглядати щільність дисперсій амплітуд на одиницю частоти. Отже дискретний спектр перетворюється на неперервний.

Знайдемо відношення $\frac{D_i}{\Delta\omega}$, яке має сенс *середньої щільності дисперсії на одиницю частоти* і позначимо її через $S_{X_T}(\omega_i)$:

$$S_{X_T}(\omega_i) = \frac{D_i}{\Delta\omega}. \quad (4.10)$$

З урахуванням рівняння (4.9), а також залежності між інтервалом дискретності частоти $\Delta\omega$ та інтервалом задання процесу T , маємо:

$$S_{X_T}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} K_{X_T}(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau. \quad (4.11)$$

За умови $T \rightarrow \infty$ приходимо до рівняння:

$$S_x(\omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ (\Delta\omega \rightarrow 0)}} S_{X_T}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (4.12)$$

Функція $S_x(\omega)$ визначає щільність розподілу дисперсій гармонічних коливань у залежності від частоти і тому називається *спектральною щільністю випадкової функції* $X(t)$.

За допомогою формули (4.12) спектральна щільність стаціонарної випадкової функції однозначно визначається її коваріаційною функцією.

Справедливим виявляється й обернене перетворення Фур'є, яке показує залежність між коваріаційною функцією й спектральною щільністю випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.13)$$

Рівняння (4.12) та (4.13) є частинними випадками перетворення Фур'є – «косинус перетворенням Фур'є».

У загальному випадку для функцій $S_x(\omega)$, $K_x(\tau)$ та $R_x(\tau)$ можна записати такі співвідношення:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.14)$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (4.15)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4.16)$$

Формула (4.16) є розкладання кореляційної функції в інтеграл Фур'є. Таке розкладання можливе за умови абсолютного інтегрування функції $R_x(\tau)$ [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty. \quad (4.17)$$

Для спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу $X(t)$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.18)$$

Спектральна щільність є невід'ємною функцією частоти.

Формули (4.16) та (4.18) показують, що кореляційна функція $R_x(\tau)$ та спектральна щільність $S_x(\omega)$ є взаємними перетвореннями Фур'є.

Отже, перетворення Фур'є для кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу повинно бути невід'ємною функцією при всіх значеннях частоти ω .

З формул (4.16) та (4.18) видно, що, знаючи кореляційну функцію, можна знайти спектральну щільність, і навпаки.

Оскільки за відомою формулою Ейлера

$$e^{-i\omega\tau} = \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau; \quad (4.19)$$

$$e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau, \quad (4.20)$$

а функції $K_x(\tau)$, $R_x(\tau)$ та $S_x(\omega)$ – парні, то формули (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) та (4.18) – еквівалентні.

4.2 Основні властивості спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу

Властивості стаціонарних випадкових функцій можна описати за допомогою спектральної щільності. Нижче перелічимо основні властивості спектральної щільності [2, 4].

❖ *Спектральна щільність є парною функцією, тобто*

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega). \quad (4.22)$$

- ❖ *Інтеграл від спектральної щільності по всіх значеннях частоти дорівнює дисперсії випадкової функції.* Дійсно, вважаючи, що $\tau = 0$, із (4.13) маємо:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega . \quad (4.23)$$

- ❖ *Спектральну щільність випадкової функції можна розглядати як «енергетичний спектр» цієї функції.* Це пояснюється тим, що в якості випадкової функції часто розглядаються такі величини як: швидкість вітру, швидкість течії в океані, напруження та багато інших. У такому випадку розподіл дисперсій, які мають квадрат розмірності амплітуди, пропорційний щільності розподілу енергії сигналу по частотах.
- ❖ *Подібно нормованій коваріаційній функції (кореляційній функції) може використовуватися і нормована спектральна щільність, яка визначається таким чином:*

$$S(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x} . \quad (4.24)$$

Нормована кореляційна функція та нормована спектральна щільність також є взаємними перетвореннями Фур'є, і визначаються рівняннями:

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega ; \quad (4.25)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau . \quad (4.26)$$

Нормована спектральна щільність зв'язана з кореляційною функцією такими ж співвідношеннями, як і спектральна щільність $S_x(\omega)$ з коваріаційною функцією $K_x(\tau)$. Нормована спектральна щільність має всі властивості, притаманні спектральній щільності випадкового процесу. Крім того

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega) d\omega}{D_x} = \frac{1}{D_x} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{D_x}{D_x} = 1. \quad (4.27)$$

- ❖ *При збільшенні масштабу аргументу коваріаційної функції масштаб аргументу спектральної щільності та сама спектральна щільність зменшується у таке ж саме число разів.* Іншими словами, якщо коваріаційній функції $K_x(\tau)$ відповідає спектральна щільність $S_x(\omega)$, то коваріаційній функції з аргументом $K_x(\alpha\tau)$ відповідає спектральна щільність $\frac{1}{\alpha} S_x\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$. Дійсно, якщо позначити $\alpha\tau = z$, то будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha\tau) \cos \omega\tau d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \cos \frac{\omega z}{\alpha} d\frac{z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(z) \cos \frac{\omega}{\alpha} z dz = \frac{1}{\alpha} S_x\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ця властивість означає, що при стисканні коваріаційної функції вздовж осі τ ($\alpha < 1$) спектр випадкової функції розширюється, і навпаки, за умови $\alpha > 1$. Така «поведінка» функцій $K_x(\tau)$ і $S_x(\omega)$ фізично пояснюється тим, що коли мають перевагу у сигналі високі частоти, коваріаційна функція швидко зменшується, а спектральна щільність розтягується в сторону високих частот; а якщо у сигналі переважають низькі частоти, то маємо обернену картину.

Використовуючи формулу (4.12) або (4.14), можна *отримати аналітичний вираз для спектральної щільності*, якщо є змога апроксимувати коваріаційну (кореляційну) функцію прийнятною формулою.

4.3 Апроксимація коваріаційних функцій стаціонарних випадкових процесів

Наведемо ряд важливих прикладів і отримаємо аналітичні вирази для спектральної щільності стаціонарних випадкових процесів.

1. Нехай стаціонарний випадковий процес $X(t)$ має коваріаційну функцію вигляду:

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (4.29)$$

Відповідно до рівності (4.14) спектральна щільність цього процесу дорівнює:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} \right] = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Як видно з виразу (4.30), це парна функція, яка досягає найбільшого значення $\frac{D_x}{\pi\alpha}$ за умови значення частоти $\omega = 0$. Але, як і коваріаційна функція (4.29) у точці $\tau = 0$, спектральна щільність (4.30) не має похідної у точці $\omega = 0$.

Величина α , як впливає з рівності (4.29), має сенс масштабу аргументу, при якому коваріаційна функція зменшується в e разів. Тому її називають *декрементом затухання коваріаційної функції*.

На рис. 4.3 наводяться графіки кореляційних функцій, що відповідають коваріаційній функції (4.29), та відповідні спектральні щільності за умов $\alpha = 0.5$; $\alpha = 1$; $\alpha = 3$.

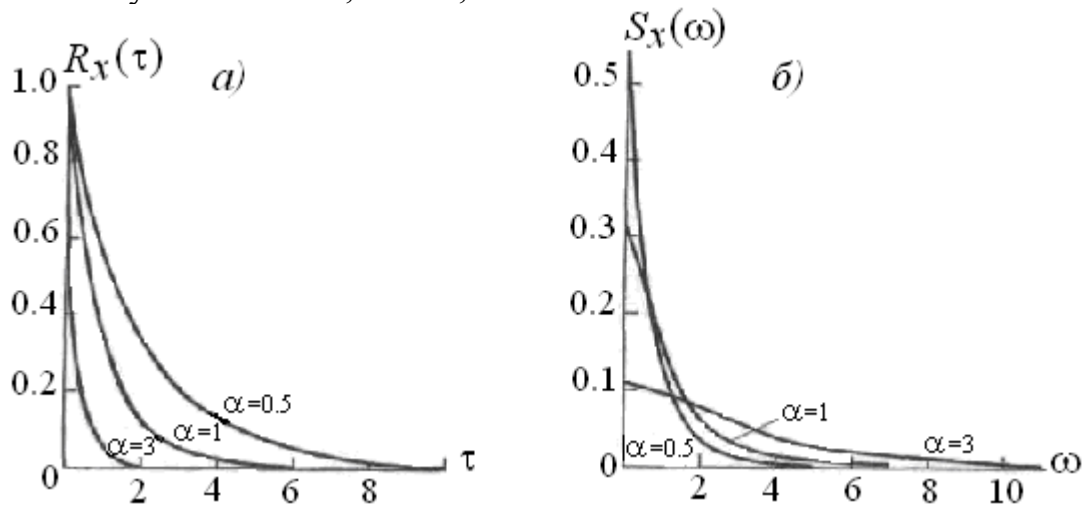


Рис. 4.3 – Графіки кореляційної функції (а) та спектральної щільності (б) (до прикладу 1)

Порівняння кривих на рис 4.3 показує, що при малих значеннях α кореляційна функція зменшується повільніше, ніж при великих, а спектральна щільність швидко зменшується зі збільшенням частоти ω . Це свідчить про те, що у спектрі випадкового процесу мають місце малі частоти (або великі масштаби флуктуацій фізичної величини). Процеси такого типу мають назву *вужкосмугових*, оскільки енергія таких процесів зосереджена у вузькій смузі частот. Отже, вужкосмуговому процесу відповідає великий час кореляції, тобто наявність кореляційного зв'язку між перерізами випадкового процесу, який повільно зменшується зі збільшенням інтервалу між перерізами.

При збільшенні α , тобто зі зменшенням часу кореляції, спектральна щільність змінюється більш плавно. Для великих α спектральна щільність змінюється при зростанні ω дуже повільно. Такі процеси називають *широкосмуговими*. Вони характеризуються *швидким падінням* кореляційного зв'язку між перерізами випадкового процесу.

Із рис. 4.3а видно, що кореляційна функція зі збільшенням параметра α зменшується швидше, тобто кореляційна залежність між перерізами випадкової функції $X(t)$ та $X(t + \tau)$ з однаковим інтервалом τ зменшується зі зростанням α .

У підрозділі 3.3 ми вже згадували величину T_1 у рівнянні (3.29), яка називається часом кореляції. Для випадку, що розглядається,

$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}$, тобто часом кореляції, що характеризує швидкість

затухання кореляційного зв'язку, є величина $\frac{1}{\alpha}$.

Випадковий процес, для якого спектральна щільність є величиною незмінною на всьому інтервалі частот: ($S_x(\omega) = S_x(0) = const$) називають «білим шумом» по аналогії з білим світлом, який утворюється при рівномірному змішуванні всіх кольорів видимого спектру. Такий випадковий процес характеризується рівномірним розподілом енергії по всіх частотах. Реально такі процеси не існують, оскільки енергія таких процесів (інакше кажучи їх дисперсія) повинна бути нескінченною, але вони є зручною абстракцією для тих випадків, коли спектральна щільність приблизно незмінна на діапазоні частот, який нас цікавить.

Інколи випадковий процес, спектральна щільність якого мало змінюється на достатньо великому діапазоні частот, приблизно розглядають як «білий шум», нехтуючи великими частотами. «Білий шум» це випадковий процес, всі перерізи котрого некорельовані і такий процес називають *чисто випадковим процесом*.

Коваріаційна функція «білого шуму» дорівнює нулю всюди, крім точки $\tau = 0$, де вона дорівнює дисперсії D_x . Це означає, що для «білого шуму» цілком є відсутнім кореляційний зв'язок між значеннями випадкової функції при будь-яких значеннях аргументу t .

2. Як відомо, коваріаційна функція (4.29) не має похідної в точці $\tau = 0$. При розв'язанні деяких задач це є суттєвою завадою. Тому кращою апроксимацією (якщо це можливо) є апроксимація для коваріаційної функції вигляду [3]:

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0. \quad (4.31)$$

За таких умов спектральна щільність дорівнює:

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.32)$$

або

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\tau + \frac{i\omega}{2\alpha})^2} d\tau. \quad (4.33)$$

Останній інтеграл заміною змінної зводиться до інтеграла Пуассона, що дорівнює $\sqrt{\pi}$ [3].

Отже,

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \quad (4.34)$$

На рис. 4.4 містяться кореляційна функція й спектральна щільність такого випадкового процесу за умови різних значень α :
 $\alpha = 0.5$; $\alpha = 1$; $\alpha = 3$.

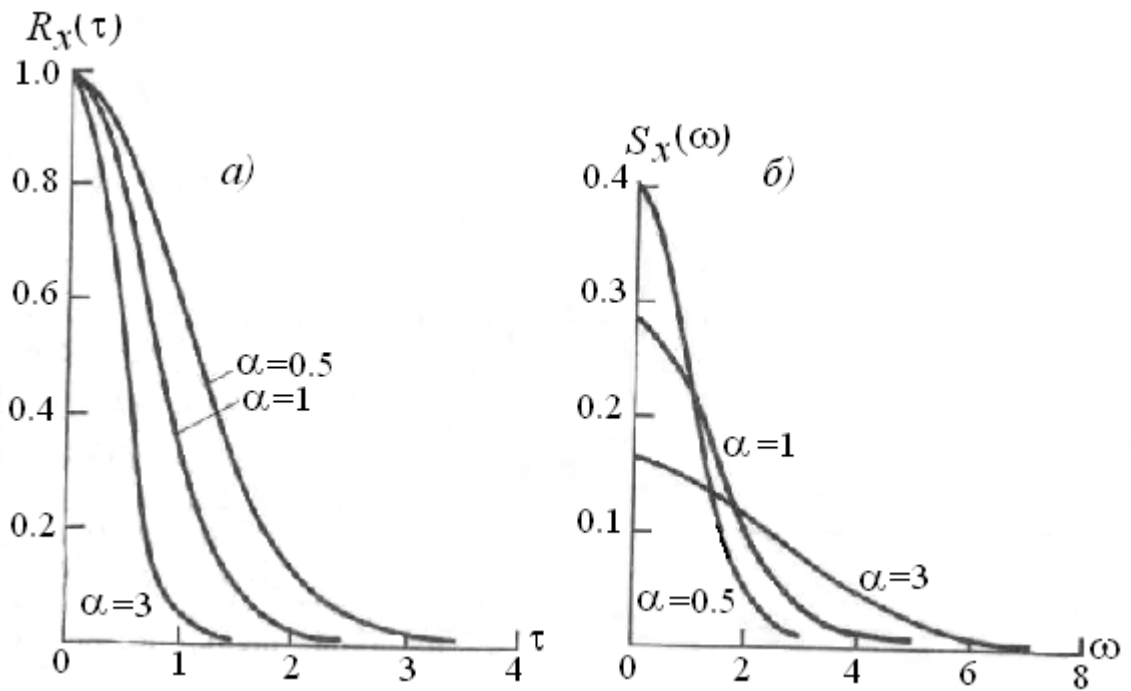


Рис. 4.4 – Графіки кореляційної функції (а) та спектральної щільності (б) (до прикладу 2)

З рис. 4.4 видно, що характер залежностей $R_x(\tau)$ і $S_x(\omega)$ якісно подібний попередньому прикладу, змінився тільки вигляд кривих.

3. Розглянемо тепер *випадкову функцію з лінійною коваріаційною функцією* [2, 4].

Нехай коваріаційна функція описується на інтервалі від 0 до τ_0 лінійною функцією:

$$K_x(\tau) = \begin{cases} D_x \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) & \text{за умови } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ 0 & \text{за умови } \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Графік такої функції наводиться на рис. 4.5б.

Вона може використовуватися для апроксимації швидко згасаючої монотонної коваріаційної функції.

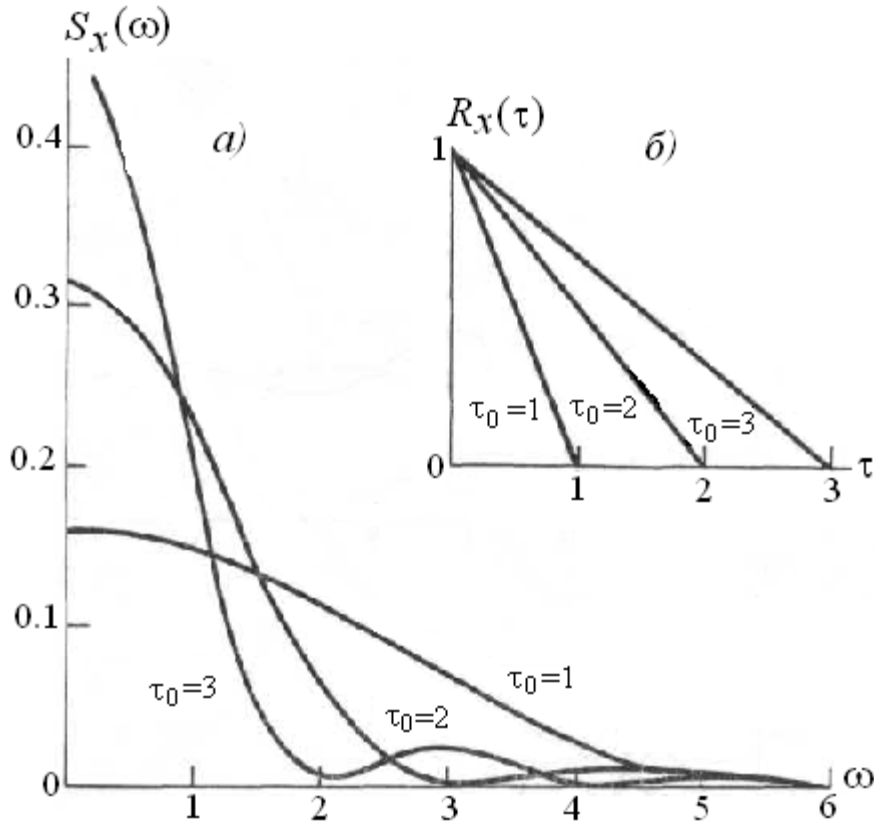


Рис. 4.5 – Графіки кореляційної функції (б) та спектральної щільності (а) (до прикладу 3)

Вважаючи випадковий процес дійсним [3], можна розрахувати спектральну щільність за формулою

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (4.36)$$

Розрахуємо спектральну щільність цієї випадкової функції:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{D_x}{\pi} \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \times \cos \omega \tau d\tau = \frac{D_x}{\pi \omega} \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) d \sin \omega \tau = \\ &= \frac{D_x}{\pi \omega} \left[\int_0^{\tau_0} d \sin \omega \tau - \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \tau \cos \omega \tau d\tau \right] = \frac{D_x}{\pi \omega^2 \tau_0} (1 - \cos \omega \tau_0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Графік спектральної щільності (4.37) наводиться на рис. 4.5а за умов значень параметра $\tau_0 = 1, 2, 3$.

Із рис. 4.5 видно, що змінювання спектральної щільності з частотою є коливальним процесом: $S_x(\omega)$ приймає мінімальні значення $S_x(\omega) = 0$ за умови $\omega = \frac{2k\pi}{\tau_0}$, $k = 1, 2, 3..$

Зі збільшенням параметра τ_0 збільшуються значення відносних максимумів спектральної щільності, і більш чітко переважаючими у спектрі випадкового процесу є окремі дискретні частоти, а саме частоти $\omega = 0$.

Аналізуючи функції (4.35) та (4.37) разом, можна побачити, що коли кореляційна функція стискається (τ_0 зменшується), спектральна щільність розтягується, і навпаки.

4. Часто при дослідженні гідрометеорологічних процесів ми отримуємо коваріаційну функцію, яка згасає по експоненціальному закону. Прикладом такої коваріаційної функції є функція вигляду [3]:

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0. \quad (4.38)$$

Для цього випадку знайдемо спектральну щільність:

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.39)$$

Якщо представити $\cos \beta\tau$ показниковими функціями за відомими формулами Ейлера, будемо мати:

$$\cos \beta\tau = \frac{e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}}{2}. \quad (4.40)$$

Тоді

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{D_x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau + i\beta\tau} + e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau - i\beta\tau} \right) d\tau = \frac{D_x}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \left(e^{\alpha\tau - i(\beta - \omega)\tau} + e^{\alpha\tau - i(\beta + \omega)\tau} \right) d\tau + \int_0^{\infty} \left(e^{-\alpha\tau - i(\beta - \omega)\tau} + e^{-\alpha\tau - i(\beta + \omega)\tau} \right) d\tau \right] = \\ &= \frac{D_x}{4\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right] = \frac{D_x \alpha}{4\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)^2 - 4\beta^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Характер коваріаційної функції та спектральної щільності залежить від двох параметрів α і β . Параметр α визначає швидкість згасання амплітуди коливань кореляційної функції. Параметр β визначає період цього коливального процесу.

На рис. 4.6 наведені графіки функцій $R_x(\tau)$ та $S_x(\omega)$ для трьох випадків: 1) $\alpha = 0.5$; $\beta = 2$ (крива I); 2) $\alpha = 1$; $\beta = 1$ (крива II); 3) $\alpha = 2$; $\beta = 0.5$ (крива III).

Якщо кореляційна функція має різко виражений коливальний характер, тобто β – велике, то спектральна щільність $S_x(\omega)$ буде мати максимум приблизно в точці $\omega = \beta$ (рис. 4.6). Якщо основну роль у коваріаційній функції $K_x(\omega)$ відіграє показникова функція (тобто α велике), то функція $S_x(\omega)$ буде мати максимальне значення в точці $\omega = 0$.

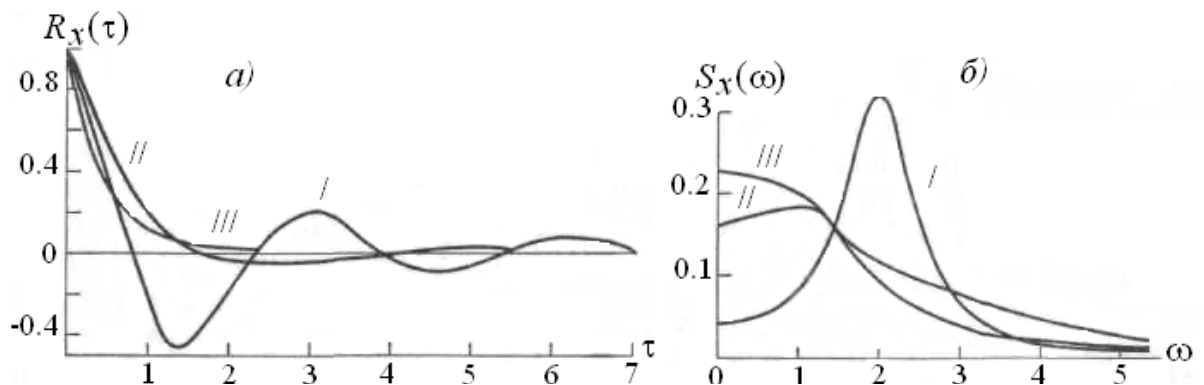


Рис. 4.6 – Графіки кореляційної функції (а) та спектральної щільності (б) (до прикладу 4)

Із рис. 4.6 випливає, що за умови малої величини відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ (крива I, $\frac{\alpha}{\beta} = 0.25$) графік кореляційної функції наближається до гармонічних коливань частоти ω . У цьому випадку спектральна щільність має чітко виражений максимум за умови $\omega = \beta$. У спектрі випадкового процесу переважають частоти, близькі до частоти β , тобто маємо вузькосмуговий процес, спектральна щільність якого має чітко виражений максимум за умови $\omega = \beta$. Основна енергія процесу зосереджена на частотах близьких до β . При цьому графік спектральної щільності витягується, а ширина смуги спектра зменшується зі зменшенням α , тобто зі збільшенням амплітуди коливань кореляційної функції.

Зі зростанням відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ прискорюється згасання кореляційної функції, максимум спектральної щільності є більш розмитим. При великих значеннях $\frac{\alpha}{\beta}$ (крива III, $\frac{\alpha}{\beta} = 4$) кореляційна функція практично відрізняється від нуля тільки за умови невеликих значень τ . При цьому спектральна щільність зі зростанням частоти ω змінюється повільно, залишаючись на значному діапазоні частот близькою до початкового значення $S_x(0)$, процес стає широкосмуговим.

Інколи на практиці зустрічаються випадкові процеси, коваріаційні (кореляційні) функції яких не можуть бути з достатньою точністю апроксимовані аналітичними виразами і для обчислення спектральних щільностей використовуються чисельні методи.

4.4 Статистичні оцінки ймовірнісних характеристик стаціонарної випадкової функції

Щоб отримати *статистичні оцінки ймовірнісних характеристик* стаціонарної випадкової функції, інтеграли (3.24)–(3.26) замінюють кінцевими сумами. Для цього інтервал спостережень T роздіблюють на n рівних частин довжиною Δt , а за значення випадкової функції $X(t)$ на відрізках Δt приймають значення на їх середині. Таким чином отримаємо статистичні оцінки ймовірнісних характеристик цієї функції:

$$\hat{m}_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i); \quad (4.42)$$

$$\hat{D}_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x(t_i) - \hat{m}_x(t)]^2; \quad (4.43)$$

$$\hat{K}_x(m) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} [x(t_i) - \hat{m}_x(t)] \cdot [x(t_{i+m}) - \hat{m}_x(t)]; \quad (4.44)$$

$$\hat{R}_x(m) = \frac{\hat{K}_x(m)}{\hat{D}_x(t)}. \quad (4.45)$$

Приріст аргументу τ , що знаходиться у формулі (3.26), пов'язаний з кількістю точок на осі τ простою формулою: $m = \frac{\tau \cdot n}{T}$.

Точність статистичних оцінок $\hat{m}_x(t)$, $\hat{D}_x(t)$, $\hat{K}_x(m)$, $\hat{R}_x(m)$ буде визначатися тривалістю спостережень T (величиною n при визначеному Δt), величиною Δt , максимальним зсувом аргументу (τ_{max}). Під τ_{max} будемо вважати той інтервал часу, за який графік кореляційної функції (4.45) увійде в трубку допустимих похибок, тобто $|r(\tau_{max})| \leq \delta$.

Треба зробити деякі рекомендації щодо попереднього вибору τ_{max} і T , якщо виходити з можливості зображення стаціонарного випадкового процесу суперпозицією простих гармонік:

$$X(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (4.46)$$

де

a_k – некорельовані випадкові величини з нульовим середнім значенням;

φ_k – випадкова фаза;

ω_k – частота k -ої гармоніки.

У цьому випадку

$$\tau_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{min}} \quad (4.47)$$

і період найнижчої гармоніки спектра випадкового процесу не повинен перебільшувати τ_{max} .

При виборі T також необхідно брати до уваги нижню частоту спектра. При цьому можна користуватися напівемпіричною формулою:

$$T \geq \frac{1}{\omega_{min}\delta}. \quad (4.48)$$

Для величин $\delta=0.02 \dots 0.05$ будемо мати $T \geq (20\dots 50) / \omega_{min}$ або з урахуванням (4.47):

$$T = (4,5\dots 10)\tau_{max}. \quad (4.49)$$

Вибір величини Δt визначається самою високочастотною складовою ω_{max} випадкової функції $X(t)$. При цьому можливо рекомендувати

визбирати довжину елементарної ділянки Δt таким чином, щоб на повний період $\frac{2\pi}{\omega_{max}}$ припадало до 5 ... 10 точок, тобто:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{max}}(5 \dots 10). \quad (4.50)$$

Значення ω_{min} та ω_{max} можуть оцінюватися, наприклад, на підставі даних про процеси, які схожі з тим, що розглядається, а також на підставі вивчення фізичного змісту останнього. Отримані попередні значення Δt , T , τ_{max} можна потім уточнювати в процесі побудови кореляційної функції.

У деяких випадках τ_{max} визначають, виходячи з умови:

$$\tau_{max} = 0,1 N, \quad (4.51)$$

де

N – кількість точок у випадковій послідовності.

Від вибору τ_{max} залежить і результат розрахування *статистичної оцінки спектральної щільності випадкового процесу* – $\hat{S}_x(\omega)$, яка отримується за формулою:

$$\hat{S}_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_{max}}^{\tau_{max}} e^{-i\omega\tau} \lambda(\tau) \hat{K}(\tau) d\tau, \quad (4.52)$$

де

$\lambda(\tau)$ – згладжуюча функція («кореляційне вікно»);

i – уявна одиниця.

За умови малих τ_{max} буде відбуватися зсуення оцінки спектральної щільності, за умови великих τ_{max} – збільшення дисперсії оцінки.

Спектральні щільності, що розраховані по вибіркових даних, будуть відрізнятися від спектра генеральної сукупності. Для оцінки значущості спектра використовується перевірка статистичної гіпотези на заданому рівні значущості. Нульова гіпотеза H_0 полягає у тому, що в спектрі часової послідовності відсутні гармонічні коливання на фоні спектра реалізації «білого шуму» (його спектр характеризується умовою $S_x(\omega) = S_x(0) = const$) або «червоного шуму» (спектром якого є експоненціально спадаюча крива).

Вважається, що вихідна вибірка має нормальний розподіл. Тоді значення спектральної щільності мають χ^2 -розподіл з числом степенів вільності ν . Перевірка H_0 полягає у порівнянні $\hat{S}_x(\omega)$ зі значеннями

$S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності, що беруться в якості меж довірчого інтервалу $I_\alpha[S_x(0)]$ або $I_\alpha[S_q(\omega)]$.

Значення $S_{кр}(\omega)$ розраховується за формулою

$$S_{кр}(\omega) = \frac{\chi^2(\alpha, \nu)}{\nu}, \quad (4.53)$$

де

$$\nu = \frac{2N - 0.5\tau_{max}}{\tau_{max}}. \quad (4.54)$$

Для побудови довірчого інтервалу за умови «білого шуму» використовується рівність:

$$I_\alpha[S_x(0)] = \bar{S}_x(\omega) \frac{\chi^2(\alpha, \nu)}{\nu}, \quad (4.55)$$

де

$\bar{S}_x(\omega)$ – середній рівень спектральної щільності, що відповідає «білому шуму».

При значному внеску у випадковий процес «червоного шуму» спектр випадкової функції порівнюється з довірчим інтервалом, який будується на основі рівності:

$$I_\alpha[S_q(\omega)] = S_q(\omega) \frac{\chi^2(\alpha, \nu)}{\nu}, \quad (4.56)$$

де

$$S_q(\omega) = \bar{S}_x(\omega) \frac{1 - r_x^2(\tau_1)}{1 + r_x^2(\tau_1) - 2r_x(\tau_1) \cos \pi k/m} \quad (k = \overline{1, m}). \quad (4.57)$$

Рівняння (4.57) утримує значення кореляційної функції одиничного зсуву $[r_x(\tau_1)]$ і максимального зсуву (m) на спектрограмі ($m \sim 2\tau_{max}$).

Вихід піків (сплесків) спектральної щільності за верхню межу довірчого інтервалу свідчить про вірогідність частот, на яких відбуваються періодичні коливання випадкового процесу.

4.5 Оцінка спектральної щільності стаціонарної випадкової функції за експериментальними даними

Розглянемо статистичне оцінювання спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу на двох прикладах.

1. Враховуючи алгоритм дослідження стаціонарного випадкового процесу, який реалізовано на за допомогою комп'ютерної програми «СПЕКТР», були отримані оцінки автокореляційної функції та спектральної щільності меридіональної складової швидкості вітру на висоті 5 км за 11-річний період радіозондування атмосфери помірних широт (о-ва Воллоп) з дискретністю даних один тиждень.

На рис. 4.7 та рис. 4.8 представлені графіки автокореляційної функції та спектральної щільності даного випадкового процесу.

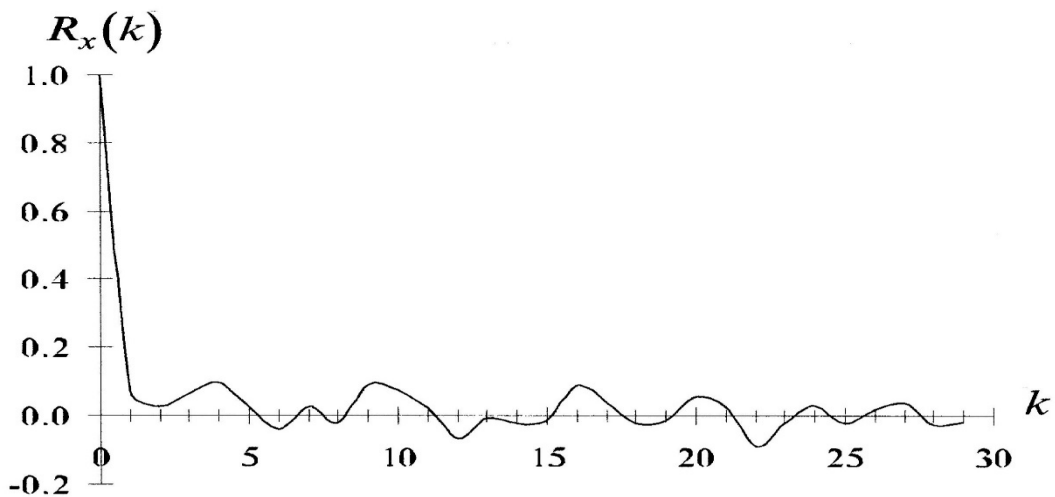


Рис. 4.7 – Кореляційна функція меридіональної складової швидкості вітру на висоті 5 км (о-ва Воллоп)

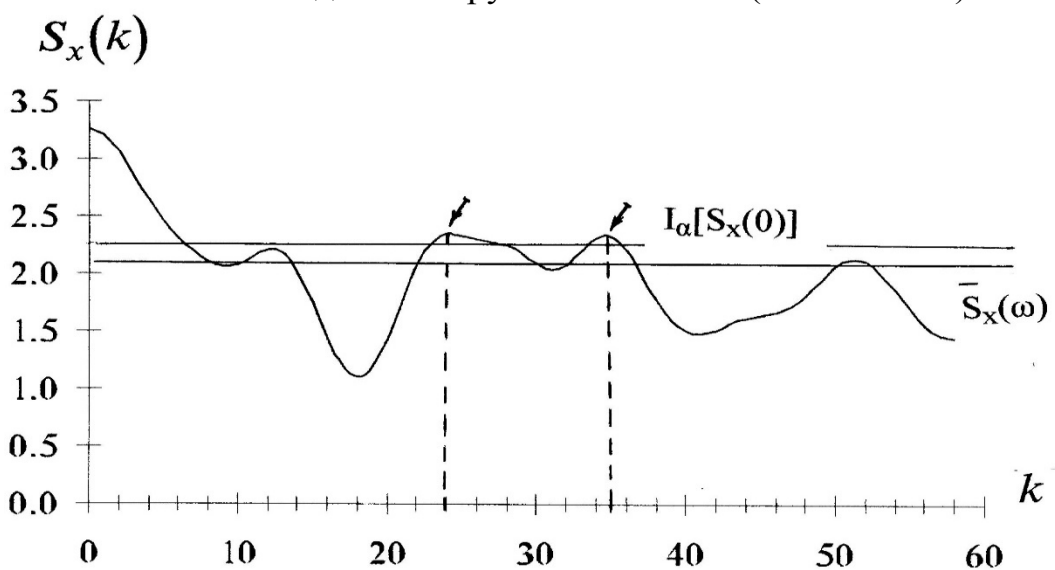


Рис. 4.8 – Спектральна щільність меридіональної складової швидкості вітру на висоті 5 км (о-ва Воллоп)

Треба з ймовірністю 70% знайти статистично значущі періодичності в меридіональній складовій швидкості вітру.

Для визначення вірогідності оцінки спектральної щільності, яка представлена на рис. 4.8, використовується довірчий інтервал, в межах якого значення оцінки спектра попадає із заданою ймовірністю $P = 0.70$.

Нуль-гіпотеза формулюється таким чином: припустимо, що на рівні значущості $\alpha = 0.30$ відсутні гармонічні коливання у спектрі меридіональної складової швидкості вітру на фоні спектру реалізації «білого шуму».

Перевірка цієї статистичної гіпотези полягає у порівнянні оцінки спектральної щільності $\hat{S}_x(\omega)$ зі значенням $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності $P = 70\%$, які приймаються в якості меж довірчого інтервалу. Для нього використовується рівність (4.55), де $\bar{S}_x(\omega)$ – середній рівень спектральної щільності, який прирівнюється до «білого шуму», і розраховується за формулою (4.58) в інтервалі значень автокореляційної функції в межах зсувів (запізнювань) від 1 до τ_{max} :

$$\bar{S}_x(\omega) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_{x_k}(\omega). \quad (4.58)$$

Для визначення $S_{кр}(\omega)$ необхідно розрахувати число степенів вільності ν , використовуючи рівність (4.54). Але перш ніж почати розрахунки необхідних характеристик, внесемо деякі пояснення.

По-перше, дискретність даних, які були отримані в результаті радіозондування атмосфери, становить 1 тиждень. Тому кожен рік задавався 48, а весь період – 528 значеннями.

По-друге, вибір максимального часового зсуву автокореляційної функції (τ_{max}) брався з урахуванням можливої точності оцінювання спектральної щільності, а саме, за відомою формулою (за умови $\delta = 0.05$):

$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot \pi \cdot N}{120} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 528}{120} \approx 30.$$

Розрахунок числа степенів вільності ν :

$$\nu = \frac{2 \cdot N - 0.5 \cdot \tau_{max}}{\tau_{max}} = \frac{2 \cdot 528 - 0.5 \cdot 30}{30} \approx 35.$$

По таблиці критичних значень розподілу Пірсона знаходимо $\chi_{кр}^2(\alpha, \nu)$.
За умов $\alpha = 0.30$ та $\nu = 35$ $\chi_{кр}^2(0.30; 35) = 38.9$. $S_{кр}(\omega) = 1.11$.

Верхня ж межа довірчого інтервалу при $\bar{S}_x(\omega) = 2.007$ становить:

$$I_\alpha [S_x(0)] = 2.007 \times 1.11 = 2.228 .$$

Коливання спектральної щільності, які виходять за межу знайденого інтервалу з ймовірністю 70%, є статистично значущими в даному процесі. Їх треба позначити на графіку спектральної щільності (рис. 4.8), а для вершин цих коливань знайти частоту (період), яким вони відповідають.

За умови $k=24$ статистична оцінка спектральної щільності дорівнює: $\hat{S}_x(\omega) = 2.352$. Другий пік ($k=35$): $\hat{S}_x(\omega) = 2.335$.

Діапазон частот, які аналізуються, праворуч по осі τ є обмеженим частотою Найквіста (це мінімальний період коливань, який може бути виявлений у випадковому процесі).

Відомо, що

$$f = \frac{k}{2 \cdot m \cdot \Delta t}, \quad (4.59)$$

де

$k = 0, 1, 2, \dots, m$. Число m визначається із загальної кількості точок N , тобто $N = 2m + 1$ для непарного числа точок i , якщо вибірка має парне число точок, то $m = \frac{N}{2}$.

Частота Найквіста (або частота накладень) утворюється за умови $k = m$, тобто:

$$f_n = \frac{m}{2 \cdot m \cdot \Delta t} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}. \quad (4.60)$$

У нашому випадку Δt дорівнює одному тижню, а мінімальний період коливань, який при цьому може бути знайдений, дорівнює двом тижням.

Таким чином, за допомогою спектрального аналізу в меридіональній складовій швидкості вітру в середній тропосфері (о-ва Воллоп) були виявлені з ймовірністю 70% статистично значущі періодичності, а саме – квазіпіврічна, з періодом коливань 22 тижні (5.5 місяців) та чотирьохмісячна (середньоперіодна), з періодом 15.1 тижня (3.8 місяця).

2. За допомогою спектрального аналізу на рівні значущості $\alpha = 0.20$ виявити періодичності в зональній складовій швидкості вітру на висоті 55 км за 8-річний період (ф. Шерман). Часовий ряд сформовано за

результатами ракетного зондування атмосфери тропічних широт. Дискретність даних складає також 1 тиждень.

На основі зазначеної вихідної інформації, реалізуючи відомий алгоритм, були отримані статистичні оцінки кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу, що розглядається.

За отриманими даними побудовані графіки кореляційної функції (рис. 4.9) та спектральної щільності (рис. 4.10) процесу, що підлягає дослідженню.

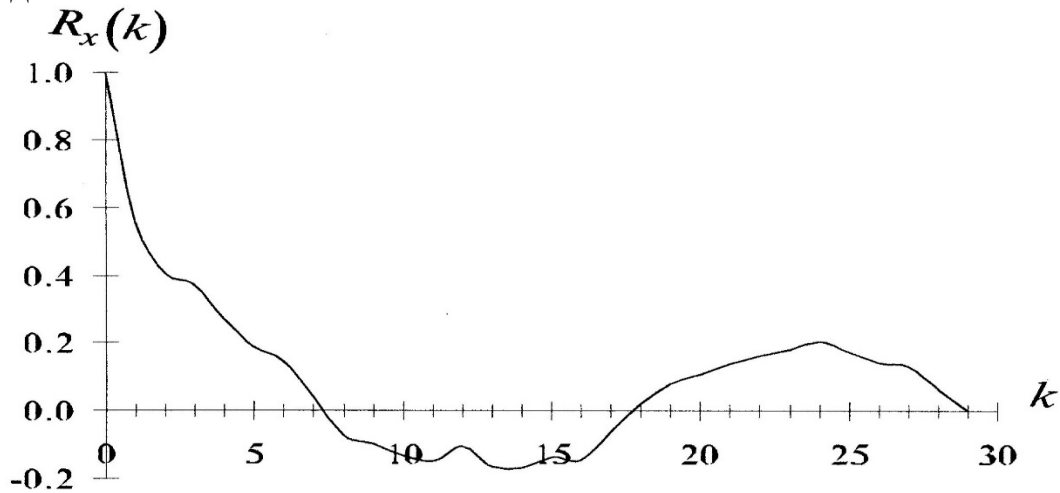


Рис. 4.9 – Кореляційна функція зональної складової швидкості вітру на висоті 55 км (ф. Шерман)

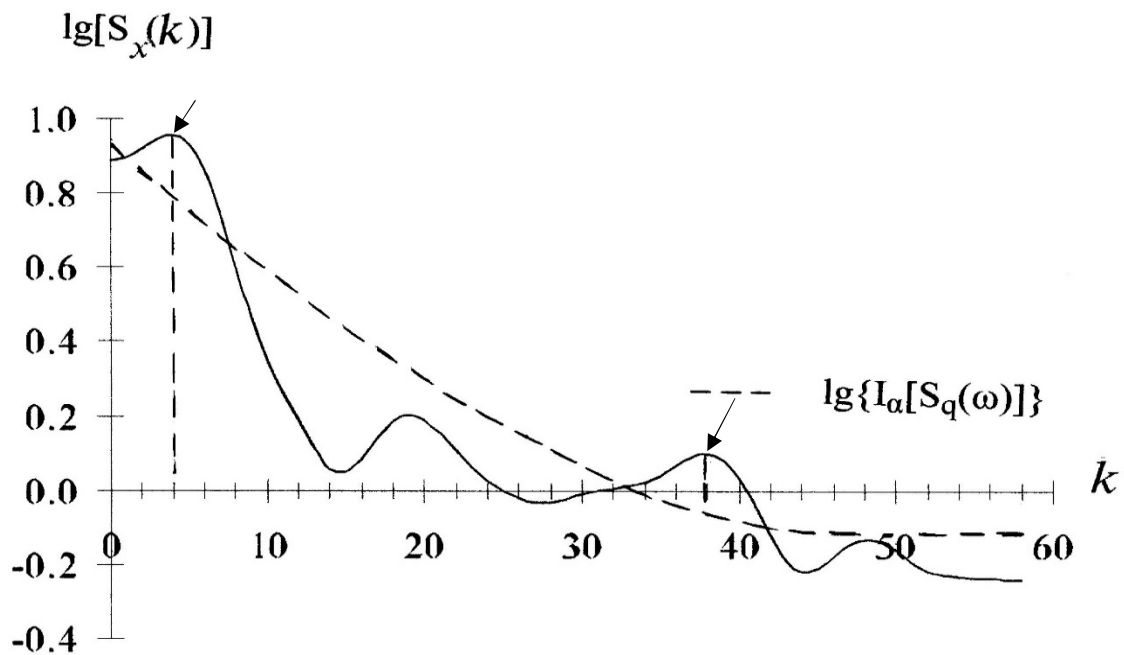


Рис. 4.10 – Спектральна щільність зональної складової швидкості вітру на висоті 55 км (ф. Шерман)

Для визначення вірогідності оцінки спектральної щільності зональної компоненти швидкості вітру використовувався довірчий інтервал, в межах якого значення оцінки спектра попадає з заданою ймовірністю $P = 80\%$.

Нуль-гіпотеза формулюється таким чином: припустимо, що на рівні значущості $\alpha = 0.20$ відсутні гармонічні коливання у спектрі зональної складової швидкості вітру на фоні спектру реалізації «червоного шуму».

При значному внеску в випадковий процес «червоного шуму» (коливань з внутрішньорядною зв'язністю), в силу стаціонарності випадкового процесу, лінійний середній рівень спектральної щільності перетворюється у нелінійний, спадаючий до низьких частот.

Перевірка статистичної гіпотези полягає у порівнянні оцінки спектральної щільності $\hat{S}_x(\omega)$ зі значенням $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності $P = 0.80$, які приймаються в якості меж довірчого інтервалу. В даному випадку він будується на основі рівності (4.56), $S_{кр}(\omega)$ та $S_q(\omega)$ визначаються відповідно за формулами (4.53) та (4.57). Величина $S_q(\omega)$ є оцінкою континууму «червоного шуму».

Щоб отримати верхню межу довірчого інтервалу за формулою (4.56), краще всі розрахунки занести в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Розрахунки довірчих інтервалів (до задачі 2)

k	$S_q(\omega)$	$I_\alpha[S_q(\omega)]$	$\lg[S_q(\omega)]$	$\lg\{I_\alpha[S_q(\omega)]\}$
1	2	3	4	5
0	7.23	8.68	0.85	0.94
10	4.00	4.80	0.60	0.68
20	1.78	2.14	0.25	0.33
30	1.02	1.22	0.09	0.09
40	0.72	0.87	-0.14	-0.06
50	0.60	0.72	-0.22	-0.14
58	0.58	0.69	-0.24	-0.16

Число степенів вільності ν у цьому прикладі дорівнює:

$$\nu = \frac{2 \cdot 384 - 0.5 \cdot 30}{30} = 25.$$

За умов $\alpha = 0.20$ та $\nu = 25$ знаходимо $\chi_{кр}^2(\alpha, \nu)$.

$$\chi_{кр}^2(0.20; 25) = 30.7, \text{ а } S_{кр}(\omega) = 1.228.$$

Середній рівень спектральної щільності, який прирівнюється до «білого шуму», розраховувався в інтервалі значень автокореляційної функції в межах зсувів від 1 до 30 і дорівнює 2.04.

Крім того, щоб наочно представити графік спектральної щільності та показати межі довірчого інтервалу, доцільно використати логарифмічну шкалу для спектральної щільності.

Для виділених точок (k) значення оцінки континууму «червоного шуму» та довірчого інтервалу нанесли на графік спектральної щільності (рис. 4.10). Коливання, які вийшли за верхню межу отриманого довірчого інтервалу з ймовірністю 80% є статистично значущими.

Таким чином, за допомогою спектрального аналізу з ймовірністю 80% в зональній складовій швидкості вітру на висоті 55 км в тропічних широтах (ф. Шерман) виявлені дві статистично значущі періодичності. Це – квазідворічна (96 тижнів) та короткоперіодна (10.1 тижні), відома як хвиля Маддена-Джуліана.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають «спектральним розкладанням» стаціонарної випадкової функції?
2. Що називають «спектром функції»? За яких умов спектр випадкової функції називається «дискретним»? "лінійчатим"?
3. Дати визначення спектральної щільності випадкової функції та якими основними властивостями вона володіє?
4. Як отримати нормовану спектральну щільність випадкового процесу?
5. Які стаціонарні випадкові процеси називають «вузькосмуговими»? «широкосмуговими»?
6. Який випадковий процес називають «білим шумом»? Чому дорівнює коваріаційна функція «білого шуму»? Якою умовою характеризується спектр «білого шуму»?
7. Які різновиди випадкових процесів, в залежності від кореляційної функції, вам відомі?
8. Якими ймовірнісними характеристиками описуються стаціонарні випадкові процеси? Як розрахувати статистичні оцінки цих характеристик?
9. Від чого залежить результат розрахування статистичної оцінки спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу?
10. Якою умовою характеризується випадковий процес «червоного шуму»?
11. Як упевнитися в тому, що отримана на основі окремої реалізації статистична оцінка спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу, є вірогідною?
12. Як визначити мінімальний період коливань, який може бути виявлений у стаціонарному випадковому процесі?

5. ВЗАЄМНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Елементи теорії взаємного спектрального аналізу

Спектральний аналіз є одним із важливих методів статистичного дослідження випадкових процесів. Він всебічно використовується в різних галузях науки та техніки, у тому числі в гідрометеорології для фізико-статистичного моделювання складних атмосферних процесів.

Важливою вимогою використання цього методу при дослідженнях евквідістантних часових рядів є стаціонарність випадкових послідовностей. Спектральний аналіз дає можливість отримати важливі характеристики статистичної структури часових гідрометеорологічних рядів, які є, як відомо, випадковими. Він дозволяє детально визначити особливості розвитку атмосферних процесів, встановити важливі взаємозв'язки між різними їх сторонами [2, 4].

У попередньому розділі розглядалися основні теоретичні положення щодо випадкових функцій, їх класифікацій та статистичного оцінювання окремих параметрів, якими описуються випадкові процеси.

Відомо, що властивості випадкових функцій визначаються їх імовірнісними характеристиками. Автоковаріаційна $K_x(t_i; t_j)$ та автокореляційна $R_x(t_i; t_j)$ функції дають можливість встановити характер взаємозв'язку між різними перерізами випадкової функції $X(t)$.

Якщо треба дослідити взаємозв'язок між двома випадковими функціями, наприклад, $X(t)$ та $Y(t)$, то його характер визначають взаємна коваріаційна – $K_{xy}(t_i; t_j)$ та взаємна кореляційна – $R_{xy}(t_i; t_j)$ функції.

При спектральному розкладанні випадкової функції можна отримати спектр функції, тобто представлення її сумою гармонічних коливань, які мають різні амплітуди гармонік.

Важливою характеристикою випадкового процесу є спектральна щільність, яка визначає щільність розподілу дисперсії гармонічних коливань у залежності від частоти та виступає енергетичним спектром випадкової функції.

Для системи стаціонарних випадкових процесів $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, крім спектральних щільностей $S_{x_i}(\omega)$ кожного процесу, розглядаються й взаємні спектральні щільності $S_{xy}(\omega)$, які є перетвореннями Фур'є від відповідних взаємних коваріаційних функцій [2, 4]:

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.1)$$

Навпаки, взаємні коваріаційні функції є оберненими перетвореннями Фур'є від взаємних спектральних щільностей, тобто:

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2)$$

Взаємна коваріаційна функція не має властивостей парності. Позначимо через $K_{xy}^{(+)}(\tau)$ – парну частину взаємної коваріаційної функції $K_{xy}(\tau)$, а через $K_{xy}^{(-)}(\tau)$ – її непарну частину.

Отже,

$$K_{xy}(\tau) = K_{xy}^{(+)}(\tau) + K_{xy}^{(-)}(\tau), \quad (5.3)$$

де

$$K_{xy}^{(+)}(\tau) = \frac{1}{2} [K_{xy}(\tau) + K_{xy}(-\tau)], \quad (5.4)$$

$$K_{xy}^{(-)}(\tau) = \frac{1}{2} [K_{xy}(\tau) - K_{xy}(-\tau)]. \quad (5.5)$$

Якщо підставити рівняння (5.3) в рівняння (5.1) та використати відому формулу Ейлера, отримаємо:

$$S_{xy}(\omega) = C_{xy}(\omega) - iQ_{xy}(\omega), \quad (5.6)$$

де

$$C_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^{(+)}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (5.7)$$

називається *ко-спектром*, а функція

$$Q_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^{(-)}(\tau) \sin \omega\tau d\tau \quad (5.8)$$

– *квадратурним спектром* випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

Ко-спектр, як косинус-перетворення Фур'є від парної функції $K_{xy}^{(+)}(\tau)$, є парною функцією. Приклад цієї функції наводиться на рис. 5.1

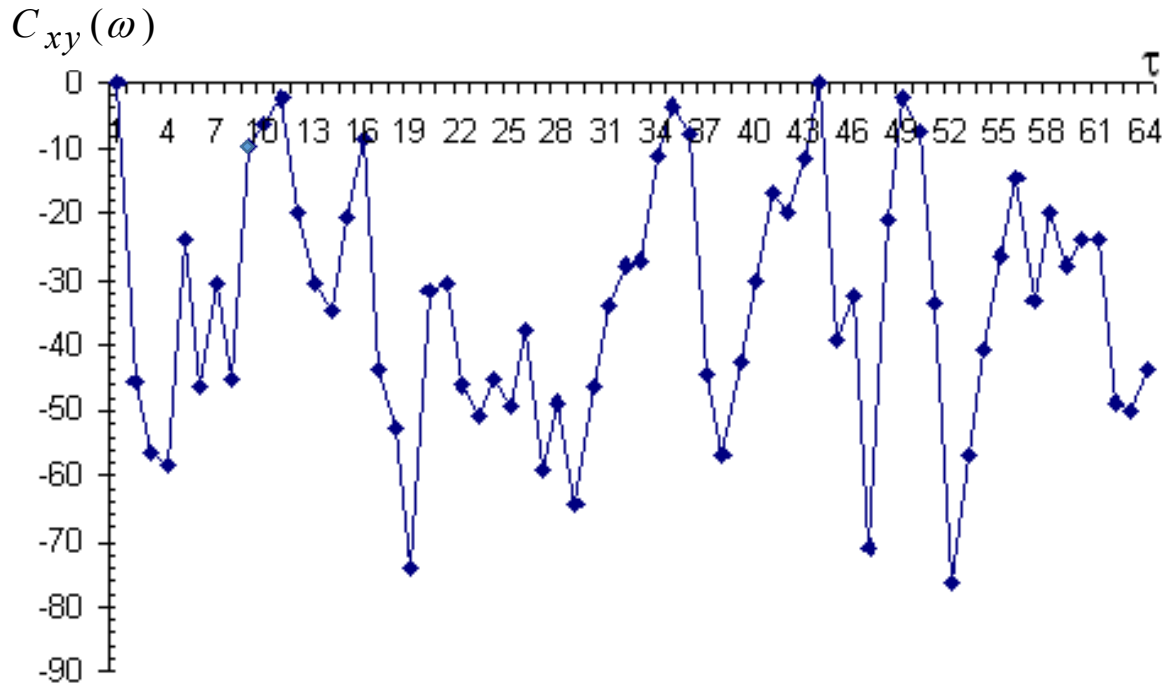


Рис. 5.1 – Ко-спектр випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ (див. підр. 5.2)

Якщо підставити рівняння (5.6) у рівняння (5.2) і застосувати для функції $e^{i\omega t}$ формулу Ейлера, то отримаємо формулу для *взаємної коваріаційної функції* у вигляді:

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\omega) \cos \omega \tau d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{xy}(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (5.9)$$

За умови $\tau = 0$ взаємна коваріаційна функція визначається рівнянням (5.10):

$$K_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\omega) d\omega. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) свідчить про те, що *ко-спектр* дає розкладання по різних частотах взаємної коваріаційної функції двох випадкових процесів при нульовому зсуві аргументу і має *сенс середнього добутку процесів $X(t)$ та $Y(t)$ у вузькому інтервалі частот $\omega + d\omega$, поділеному на частотний інтервал*. Ко-спектр характеризує розкладання по частотах енергії синхронної взаємодії процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

Квадратурний спектр $Q_{xy}(\omega)$ показує внесок різних гармонік у сумарну коваріацію за умови, коли всі гармоніки часової послідовності

$X(t)$ зсунуті по фазі на чверть періоду назад, а послідовність $Y(t)$ залишається незмінною. Квадратурний спектр характеризує розподіл по частотах енергії несинхронної взаємодії процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

Дійсно, за умови $\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$ отримаємо на основі формули (5.9)

коваріаційну функцію у вигляді:

$$K_{xy}\left(\frac{T}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{xy}(\omega) d\omega. \quad (5.11)$$

За умови $\tau = 0$ на основі формули (5.9) будемо мати:

$$K_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\omega) d\omega. \quad (5.12)$$

З останньої рівності виходить, що *ко-спектр* дає розкладання по різних частотах взаємної коваріаційної функції двох випадкових процесів при нульовому зсуві аргументу.

Аналогічно, якщо $\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$, отримаємо:

$$K_{xy}\left(\frac{T}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{xy}(\omega) d\omega. \quad (5.13)$$

Отже, *квадратурний спектр* характеризує внесок у загальну взаємну коваріацію двох випадкових процесів гармонік, що в них утримуються, при зсуві фаз цих гармонік на чверть періоду. Приклад квадратурного спектра наведено на рис. 5.2.

Комплексну функцію (5.6) можна записати у показниковій формі:

$$S_{xy}(\omega) = |S_{xy}(\omega)| e^{i\psi_{xy}(\omega)}. \quad (5.14)$$

Модуль взаємної спектральної щільності:

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)} \quad (5.15)$$

називають *амплітудним спектром* (див. рис. 5.3), а функцію

$$\psi_{xy}(\omega) = \arctg \left[\frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)} \right] \quad (5.16)$$

фазовим спектром.

При частотному зображенні процесів виникає можливість порівняти взаємну енергію на фіксованій частоті з енергіями кожного з процесів на цій же частоті за допомогою такого співвідношення:

$$\Gamma(\omega) = \frac{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \quad (5.17)$$

Величина

$$\gamma(\omega) = \sqrt{\Gamma(\omega)} \quad (5.18)$$

має сенс *спектрального коефіцієнта взаємної кореляції* процесів $X(t)$ та $Y(t)$, який визначає тісноту кореляційного зв'язку між цими процесами на фіксованих частотах. Вона має назву *когерентності* й може приймати значення від 0 до 1.

Когерентність одночасно являє собою міру стійкості різниці фаз. Якщо різниця фаз двох процесів є стійкою, $\gamma(\omega) \rightarrow 1$, якщо різниця фаз нестійка, то $\gamma(\omega) \rightarrow 0$.

Приклад графіка когерентності наводиться на рис. 5.4.

При визначенні міри взаємозв'язку спектральних компонентів двох процесів важливо з'ясувати, яким є співвідношення між взаємною енергією синхронної та несинхронної взаємодії, оскільки саме від характеру цієї взаємодії залежить різниця фаз коливань на фіксованій частоті [2, 4].

Із рівняння (5.16) виходить, що за умов $C_{xy}(\omega) \neq 0$ та $Q_{xy}(\omega) = 0$, різниця фаз коливань повинна дорівнювати нулю, оскільки взаємозв'язок процесів буде існувати за рахунок синхронної їх взаємодії.

За умов $C_{xy}(\omega) = 0$ та $Q_{xy}(\omega) \neq 0$ різниця фаз спектральних компонент дорівнює $\frac{\pi}{2}$ (чверті періоду). Це означає, що взаємозв'язок коливань відбувається тільки в результаті несинхронної взаємодії процесів $X(t)$ і $Y(t)$. В усіх інших випадках, тобто за умов $C_{xy}(\omega) \neq 0$ і $Q_{xy}(\omega) \neq 0$, різниця фаз спектральних компонентів (фазовий спектр) визначається формулою (5.16).

Фазовий спектр визначає відставання по фазі процесу $Y(t)$ від процесу $X(t)$ за умови, що величину $\psi_{xy}(\omega)$ вважають додатною від 0° до 180° і від'ємною від 180° до 360° . Зсув фаз в 0 відповідає додатній кореляції між процесами («у фазі»), а зсув фаз в 180° – від'ємній кореляції («проти фази»).

Інколи зручніше аналізувати фазовий зсув не в градусах, а в одиницях часу (секунда, година, доба, тиждень . . .). Щоб перейти до одиниць часу використовують формулу:

$$\psi_{xy}^{\tau}(\omega) = \frac{T_k}{360^{\circ}} \psi_{xy}^{\circ}, \quad (5.19)$$

де

$\psi_{xy}^{\circ}(\omega)$ – зсув фаз між двома процесами в градусах;

T_k – період коливання в одиницях часу, який відповідає частоті f_k і розраховується як:

$$T_k = \frac{N_1 \Delta t}{k}, \quad \text{де } N_1 = 2^m, \quad m = 1, 2, \dots, 3 \dots \quad (5.20)$$

5.2 Оцінка взаємної спектральної щільності двох стаціонарних випадкових процесів за експериментальними даними

В якості прикладу наведемо результати дослідження зв'язків між двома випадковими процесами в районі Північної Атлантики за допомогою взаємного спектрального аналізу.

Алгоритм дослідження стаціонарних випадкових процесів заздалегідь було реалізовано на ПК (комп'ютерна програма «FSPEKTR»). Це дало можливість отримати статистичні оцінки взаємної спектральної щільності атмосферного тиску на двох станціях, що розташовані в Північній Атлантиці.

Часові ряди середнього місячного атмосферного тиску за лютий на ст. Понта-Делгада (37° 44' півн. ш. 25° 40' зах. д., Азорські острови) [процес $X(t)$] та на ст. Рейк'явік (64° півн. ш. 22° зах. д., о. Ісландія) [процес $Y(t)$] були сформовані за період 1868-2000 рр. з об'ємами по 133 значення в кожному з них ($N = 133$) й мають дискретність 1 рік.

Оскільки взаємна спектральна щільність є комплексною функцією, будемо її характеризувати дійсними функціями.

За визначеними формулами (див. підрозділ 5.1) оцінювалися перелічені нижче дійсні функції та були побудовані графіки: ко-спектра $C_{xy}(\omega)$ (рис. 5.1), квадратурного спектра $Q_{xy}(\omega)$ (рис. 5.2), амплітудного спектра $A(\omega) = |S_{xy}(\omega)|$ (рис. 5.3) та когерентності $\gamma(\omega)$ (рис. 5.4).

Вірогідність статистичної оцінки взаємної спектральної щільності визначали по когерентності за умови $\gamma(\omega) \geq 0.90$. Також треба було з'ясувати, на яких частотах (періодах) енергія взаємозв'язку в рядах атмосферного тиску на станціях, що розглядаються, є найбільшою. За допомогою фазового спектра визначали, на яких широтах Північної Атлантики починається випадковий процес.

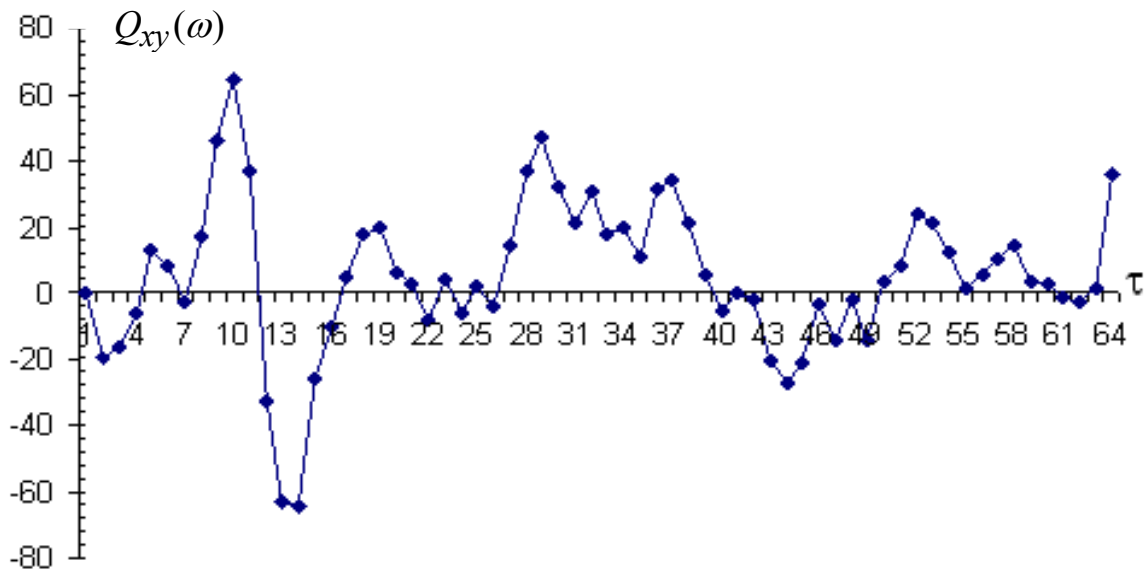


Рис. 5.2 – Квадратурний спектр випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$

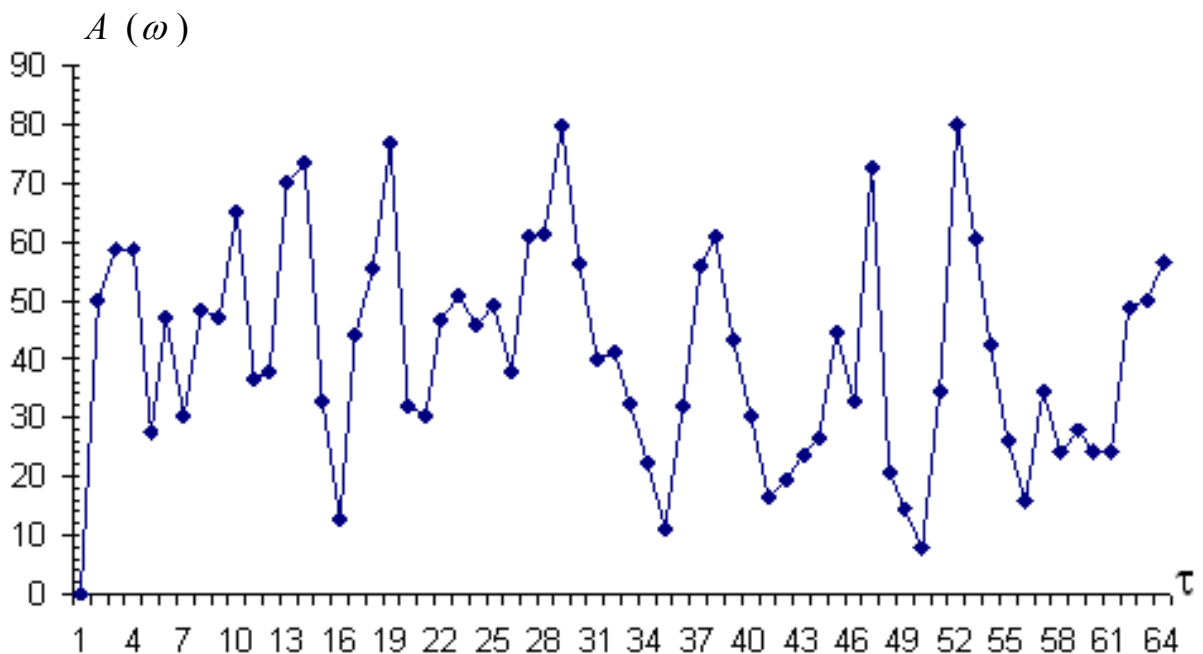


Рис. 5.3 – Амплітудний спектр випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$

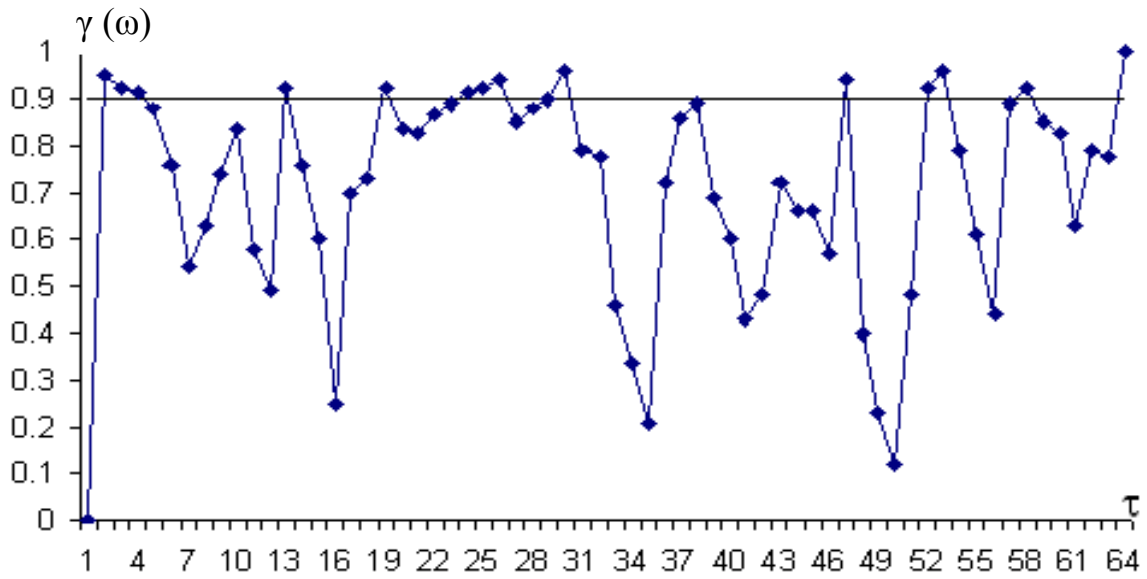


Рис. 5.4 – Когерентність процесів $X(t)$ та $Y(t)$

За допомогою методики, що була викладена у 4-му розділі, нами були розраховані спектральні щільності окремих випадкових процесів, а саме середнього місячного атмосферного тиску за лютий на ст. П.-Делгада [процес $X(t)$] та ст. Рейк'явік [процес $Y(t)$].

На рис. 5.5 та 5.6 представлені відповідні спектрограми.

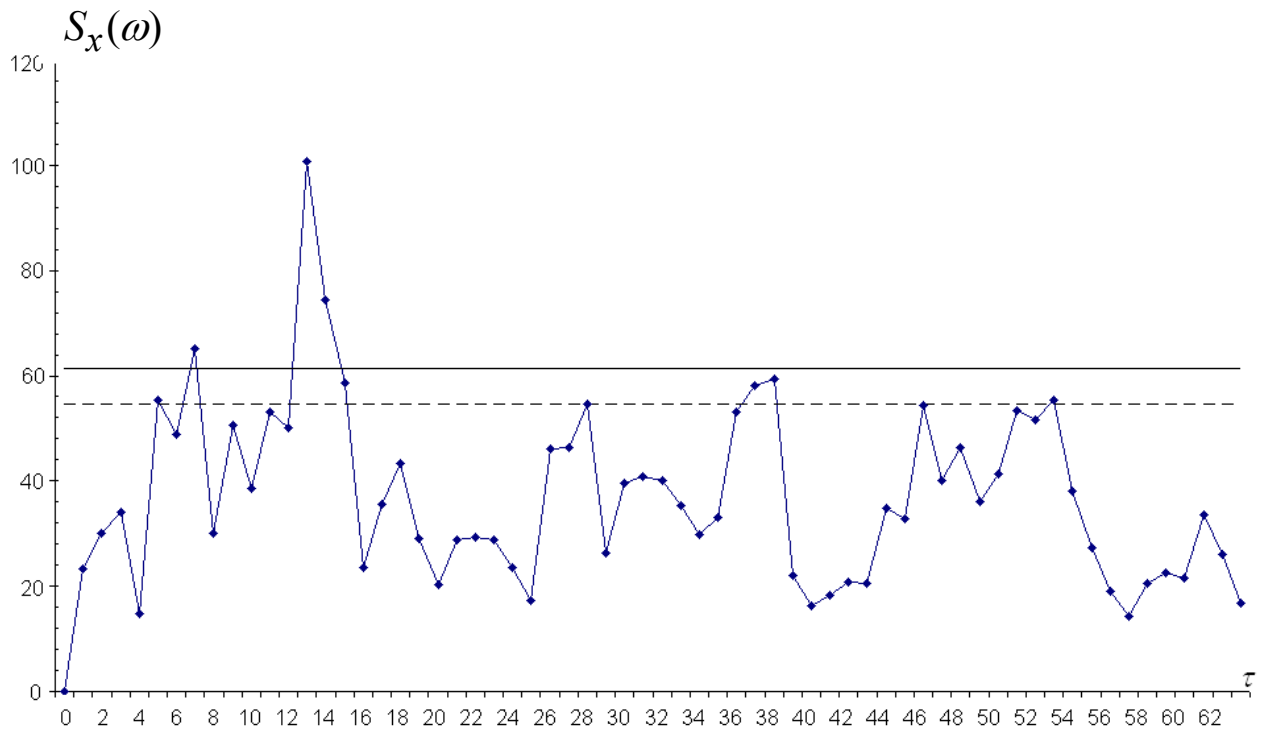


Рис. 5.5 – Спектрограма випадкового процесу $X(t)$ і довірчі інтервали, побудовані з ймовірністю 95% (—) та 90% (---)

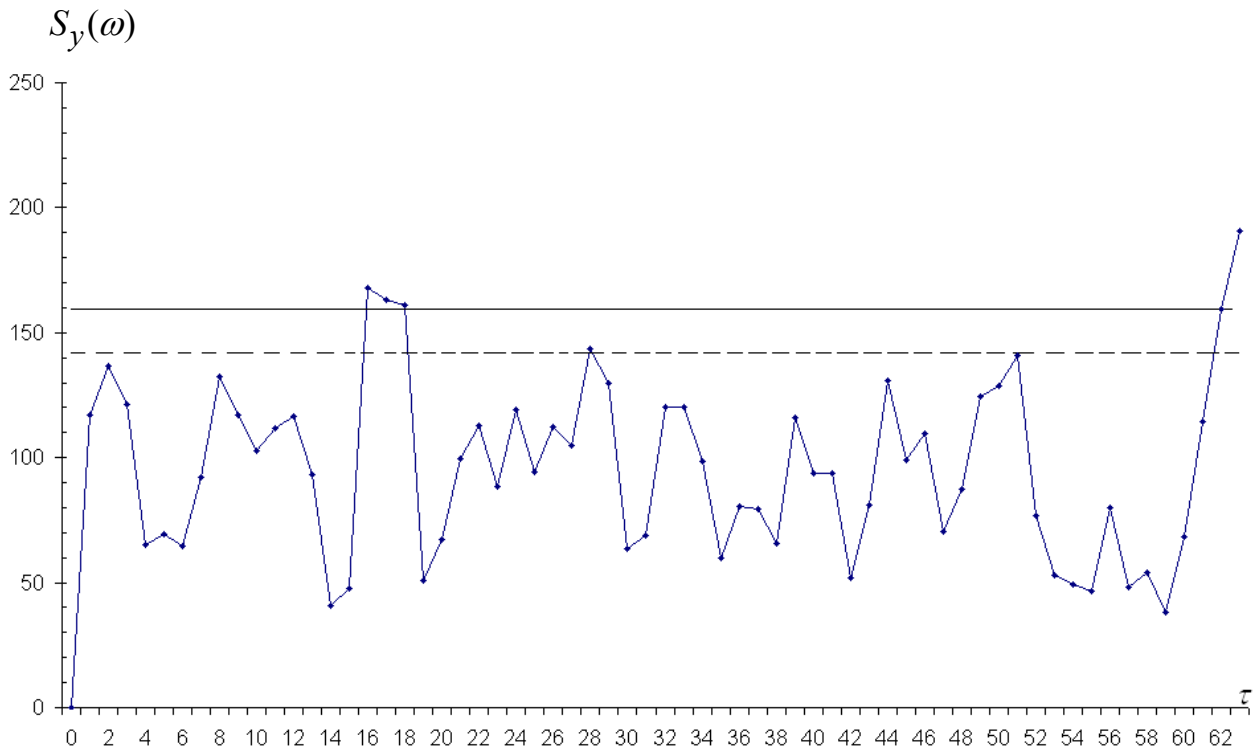


Рис. 5.6 – Спектрограма випадкового процесу $Y(t)$ і довірчі інтервали, побудовані з ймовірністю 95% (—) та 90% (---)

Для визначення вірогідності статистичної оцінки спектральної щільності використовували довірчий інтервал, для якого значення оцінки спектра попадає з заданою ймовірністю.

Нуль гіпотеза формулювалась таким чином: на рівні значущості 0.05 (та 0.10) відсутні гармонічні коливання в спектрі атмосферного тиску на фоні спектра реалізації «білого шуму». В даному випадку перевірка статистичної гіпотези складалася з порівняння оцінки спектральної щільності $\hat{S}_x(\omega)$ та $\hat{S}_y(\omega)$ зі значенням $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності, які приймалися в якості меж довірчого інтервалу.

В табл. 5.1 представлені основні статистичні характеристики для розрахунків меж довірчих інтервалів на заданих рівнях значущості $\alpha = 0.05$ та $\alpha = 0.10$ при визначенні періодичних компонент в спектральній щільності окремих випадкових процесів, що розглядаються.

Вихід піків спектральної щільності за верхню межу довірчого інтервалу свідчить про вірогідність частот (періодів) максимальної енергії періодичних коливань, що притаманні окремому випадковому процесу.

Як впливає з рис. 5.5, з ймовірністю 95% в спектральній щільності середньомісячного атмосферного тиску у лютому на ст. П.-Делгада за період з 1868 по 2000 рр. виявлені 18-ти та 10-тирічні довгоперіодні коливання.

Таблиця 5.1 – Основні характеристики для розрахування довірчих інтервалів та їх меж

Характеристика	Рівень значущості α	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
$\chi_{кр}^2(\alpha, \nu)$	25.0	22.3
$S_{кр}(\omega)$	1.67	1.49
$I_{\alpha}[S_x(0)]$	61.5	54.7
$I_{\alpha}[S_y(0)]$	159.4	142.2

$$\nu = 15; \bar{S}_x(\omega) = 36.8; \bar{S}_y(\omega) = 95.4.$$

З імовірністю 90% у випадковому процесі $X(t)$ статистично значущими ще були й коливання з періодами близько 25-ти, 3-4-х та двох років.

Спектральна щільність атмосферного тиску на ст. Рейк'явік у лютому за той же період досліджень включає з ймовірністю 95% періодичні коливання з періодами близько 7-8 років та двох років, а з ймовірністю 90% статистично значущими гармоніками були ще й 5-тирічні коливання, які притаманні випадковому процесу $Y(t)$ (рис. 5.6).

Приблизна оцінка довірчого значення когерентності на заданому рівні значущості α визначалась за формулою Гудмана (табл. 5.2) [2].

Таблиця 5.2 – Довірчі межі когерентності $\gamma(\omega)$

Рівень значущості α	Число степенів вільності			
	4	10	20	40
0.01	0.89	0.63	0.46	0.33
0.05	0.80	0.53	0.38	0.27

Число степенів вільності розраховували таким чином:

$$\nu = \frac{2N - 0.5\tau_{max}}{\tau_{max}},$$

де $N = 133$ (об'єм статистичної сукупності); τ_{max} – число точок максимального зсуву кореляційної функції, яка визначалася, виходячи з точності розрахунків за умови $\delta = 2\%$ [2, 4]:

$$\tau_{max} = \frac{2\pi N}{50} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 133}{50} = 17.$$

Отримаємо

$$\nu = \frac{2 \cdot 133 - 0.5 \cdot 17}{17} = 15.$$

За умов рівня значущості $\alpha = 0.05$ та числа степенів вільності $\nu = 15$, $\gamma_0 = 0.46$. Тому когерентність є значущою за умови $\gamma(\omega) > 0.46$.

Аналізу підлягали тільки ті частоти, для яких $\gamma(\omega) \geq 0.90$.

Сплески на графіку когерентності (рис.5.4), що лежали вище цього рівня відповідали періодам (частотам) значущої взаємодії процесів $X(t)$ та $Y(t)$. Періоди значущої взаємодії двох процесів (T_k , рік) визначалися за формулою:

$$T_k = \frac{N_1 \Delta t}{k},$$

де

k – номер точки значущої взаємодії на осі ОХ;

Δt – 1 рік (дискретність даних);

$$N_1 = 2^7 = 128.$$

Отримані характеристики значущої взаємодії двох процесів, що розглядаються, наведені в табл. 5.3. Аналіз фазового спектра дозволив визначити відставання (випередження) процесу $Y(t)$ по відношенню до $X(t)$, який представлено в градусах та в одиницях часу, виходячи з дискретності даних на основі рівності (5.19).

Таблиця 5.3 – Характеристики значущої взаємодії процесів $X(t)$ та $Y(t)$

k	T_k , рік	$\psi_{xy}^{\circ}(\omega)$, град.	$\psi_{xy}^{\tau}(\omega)$, рік	Висновок
2	64.0			Вірогідність відсутня
13	9.9	64.3	1.7	Відставання процесу $Y(t)$ від $X(t)$
19	6.7	345.2	6.4	Відставання процесу $X(t)$ від $Y(t)$
25	5.1	357.2	5.1	Відставання процесу $X(t)$ від $Y(t)$
30	4.3	325.9	3.9	Відставання процесу $X(t)$ від $Y(t)$
47	2.7	11.4	0.1	Відставання процесу $Y(t)$ від $X(t)$
53	2.4	339.8	2.3	Відставання процесу $X(t)$ від $Y(t)$
58	2.2	324.2	2.0	Відставання процесу $X(t)$ від $Y(t)$

Аналіз когерентності дав змогу визначити статистичний зв'язок гармонік приблизно 10-ти, 7-ми, 5-ти, 4-х, 3-х та 2-х років, що присутні в процесах $X(t)$ та $Y(t)$. Це дозволило порівняти взаємну енергію процесів $X(t)$ (атмосферний тиск на ст. Понта-Делгада) та $Y(t)$ (атмосферний тиск на ст. Рейк'явік) на фіксованій частоті з енергією кожного з цих процесів на тій же частоті.

Визначили початкову фазу кожного з процесів. Як показали розрахунки, тільки для гармонік 9.9, та 2.7 років спостерігається запізнювання процесу $Y(t)$ по відношенню до $X(t)$. Всі останні періодичні коливання характеризуються випередженням процесу $Y(t)$ по відношенню до $X(t)$.

Таким чином, взаємний спектральний аналіз дав можливість визначити вклад коливань різної частоти (періоду) в загальну дисперсію двох процесів. Він дозволив довести існування тісного кореляційного зв'язку між періодичними складовими в часових рядах атмосферного тиску на ст. Понта-Делгада і Рейк'явік. Отримані висновки ще раз підтверджують існування статистично значущих міжширотних зв'язків макромасштабних атмосферних процесів в районі Північної Атлантики.

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення випадкової функції, випадкового процесу, випадкової послідовності?
2. Якими ймовірнісними характеристиками описують випадкові функції?
3. Яка функція є стаціонарною випадковою функцією та якими ймовірнісними характеристиками вона володіє?
4. Що називають «спектральним розкладанням» стаціонарної випадкової функції?
5. Дати визначення спектральної щільності випадкової функції та якими основними властивостями вона володіє?
6. За яких умов можна використовувати взаємний спектральний аналіз при дослідженні статистичних зв'язків між двома випадковими процесами?
7. Який сенс взаємної спектральної щільності при дослідженні двох випадкових процесів?
8. Якими функціями може бути описана взаємна спектральна щільність?
9. Як визначити степінь взаємозв'язку спектральних компонент двох процесів?
10. Як отримати вірогідні статистичні оцінки взаємної спектральної щільності?

6. ОСОБЛИВОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ СТРУКТУРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

6.1 Виявлення періодичностей у випадковому процесі за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

6.1.1 Основні теоретичні положення

Часові ряди метеорологічних величин, як показали численні дослідження, утримують періодичні компоненти, обумовлені хвильовою природою атмосферних процесів.

Існує ряд методів дослідження періодичностей, що містяться в часових рядах. Їх називають «прихованими» періодичностями. Зручним для реалізації на ПК є метод, оснований на інтегральному перетворенню Фур'є. Він дає можливість без будь-яких додаткових досліджень отримати частоти, амплітуди та початкові фази періодичних компонент, «прихованих» у часовій послідовності [2, 4].

Часовий ряд $X(t)$, заданий на інтервалі $t \in [-\tau, \tau]$, можна розглядати як кусково-гладку функцію часу. Таку функцію у відповідності до теореми Діріхле можна виразити суперпозицією простих гармонік:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) , \quad (6.1)$$

де A_k – амплітуда k -ї гармоніки,

ω_k – її частота,

φ_k – початкова фаза.

Рівність (6.1) можна переписати таким чином:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t] , \quad (6.2)$$

якщо позначити

$$a_k = A_k \sin \varphi_k , \quad (6.3)$$

$$b_k = A_k \cos \varphi_k . \quad (6.4)$$

Як свідчать формули (6.3) та (6.4), початкова фаза розраховується за допомогою рівняння (6.5):

$$\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k} . \quad (6.5)$$

Для кусково–гладкої функції $X(t)$, заданої на нескінченному інтервалі, справедливим є перетворення Фур'є:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i\omega t} dt , \quad (6.6)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Але часові ряди гідрометеорологічних величин визначені на обмеженому інтервалі і можуть бути апроксимовані таким чином:

$$X(t) = \begin{cases} x(t), & \text{за умови } t \in [-\tau, \tau] ; \\ 0, & \text{за умови } |t| > \tau . \end{cases} \quad (6.7)$$

Для такої функції перетворення Фур'є має вигляд:

$$F_{\tau}(i\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} X(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6.8)$$

Якщо впровадити відому формулу Ейлера, то інтеграл (6.8) набирає такої форми:

$$F_{\tau}(i\omega) = U(\omega) - iV(\omega) , \quad (6.9)$$

де

$$U(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} X(t) \cos \omega t dt , \quad (6.10)$$

$$V(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} X(t) \sin \omega t dt . \quad (6.11)$$

Рівності (6.10) та (6.11) є відповідно *косинус-* і *синус-перетворення Фур'є функції* $X(t)$, що апроксимована виразом (6.7). Якщо частоти гармонічних компонент, які утримуються в $X(t)$, не є близькими, то $U(\omega)$ та $V(\omega)$ мають вигляд кривих з різко вираженими піками в точках $\omega = \omega_k$.

Висота піків приблизно дорівнює амплітудам парної (a_k) і непарної (b_k) складових періодичного коливання з частотою ω_k , «прихованого» в процесі $X(t)$. На тих самих частотах ω_k будуть спостерігатися піки амплітуд $A_k = A(\omega_k)$, оскільки $a_k \approx U(\omega_k)$ і $b_k \approx V(\omega_k)$.

Амплітуду k -ї гармоніки в такому разі розраховують за формулою:

$$A(\omega_k) = [U^2(\omega_k) + V^2(\omega_k)]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.12)$$

З метою поліпшення селективних якостей перетворень Фур'є (6.10) та (6.11) в них вводять *множники («вікна»)*, які зменшують вплив значень $X(t)$, заданих поблизу меж інтервалу визначення функції. Одним з таких «вікон» є *множник Гіббса*:

$$g(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{2t}. \quad (6.13)$$

Очевидно, $g(\tau) = g(-\tau) = 0$. Максимум цієї функції спостерігається за умови $\tau = 0$ і дорівнює:

$$g(0) = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{\frac{\pi t}{\tau}} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, графік функції $g(t)$ на інтервалі $[-\tau, \tau]$ має вигляд, зображений на рис. 6.1.

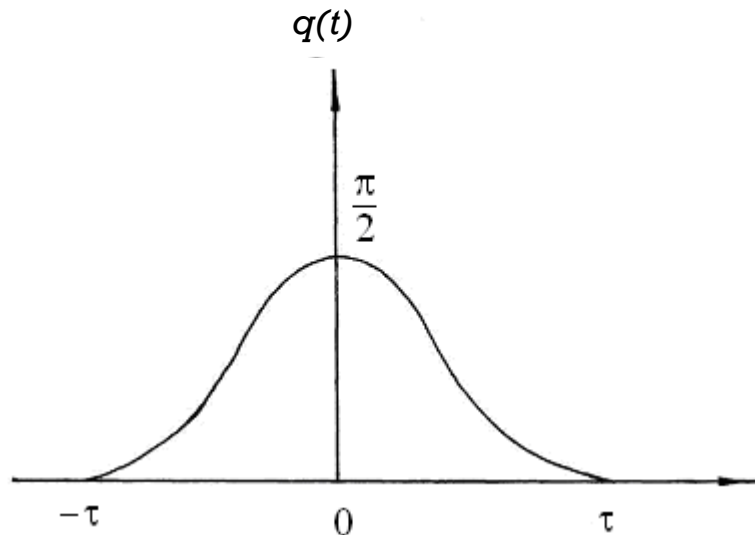


Рис. 6.1 – «Вікно» Гіббса

Отже, з врахуванням «вікна» Гіббса косинус- та синус-перетворення Фур'є описуються рівняннями (6.14) і (6.15) відповідно:

$$U(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{2t} X(t) \cos \omega t dt, \quad (6.14)$$

$$V(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{2t} X(t) \sin \omega t dt. \quad (6.15)$$

Інтеграл (6.14) та (6.15) обчислюються одним із наближених методів [4].

Через обмеженості інтервалу і скінченної кількості точок задання функції, інформації про функцію недостатньо для визначення параметрів гармонік з періодом $T > 2\tau$ та $T < \frac{\tau}{m}$.

Отже, мінімально і максимально можливі гармоніки, які можуть бути виявлені, мають частоти, розташовані в інтервалі $[\omega_{min}, \omega_{max}]$, де $\omega_{min} = \frac{\pi}{\tau}$, $\omega_{max} = \frac{m\pi}{\tau}$.

Інтервал дискретності частоти $\Delta\omega$ при чисельному інтегруванні вибирається з урахуванням властивостей множника Гіббса. При його впровадженні у перетворення Фур'є можна гарантувати, що вплив амплітуд сусідніх за частотою гармонік не перебільшує 0,05 від амплітуди, за умови $\Delta\omega\tau \geq 4.5$. Звідси випливає, що крок при обчисленнях $U(\omega)$ та $V(\omega)$ визначається рівністю:

$$\Delta\omega = \frac{4.5}{\tau}. \quad (6.16)$$

Періодичності, що утримуються у випадковому процесі, визначаються по піках амплітуд $A(\omega_i)$ на *періодограмі* (амплітудно-частотній характеристиці), приклад якої наводиться на рис. 6.2. На періодограмі існує ряд малозабезпечених піків, ускладнюючих аналіз. Для їх ліквідації застосовують *фільтр Тьюккі*:

$$\tilde{A}(\omega_i) = 0.25A(\omega_{i-1}) + 0.5A(\omega_i) + 0.25A(\omega_{i+1}). \quad (6.17)$$

Визначення статистично значущих періодичностей, характерних для процесу $X(t)$, ґрунтується на побудові верхньої довірчої межі для амплітуд із заданою ймовірністю за умови, що амплітуди підлягають нормальному розподілу. Періоди T_k гармонік ω_k , які відповідають пікам амплітуд, що виходять за довірчу межу, ототожнюються з періодами гармонічних

коливань, які утримуються у випадковому процесі $X(t)$. Для кожного з них знаходять *початкову фазу*:

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{U(\omega_k)}{V(\omega_k)}. \quad (6.18)$$

Початкова фаза дає можливість знайти точку h_k на осі часу, яка є *початком коливання*, тобто:

$$h_k = \begin{cases} \frac{(\pi + \varphi_k)}{2\pi} \cdot T_k & \text{за умови } \varphi_k \leq 0; \\ \frac{\varphi_k \cdot T_k}{2\pi} & \text{за умови } \varphi_k > 0, \end{cases} \quad (6.19)$$

де

φ_k – початкова фаза гармонічного коливання в радіанах;

T_k – період гармонічного коливання в одиницях часу, який розраховується за формулою:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}. \quad (6.20)$$

Треба мати на увазі, що в деяких випадках на амплітудно-частотних характеристиках спостерігаються сплески амплітуд (найчастіше на низьких частотах), які значно відрізняються від загального рівня коливань амплітуд гармонік. Це означає, що ці гармоніки характеризуються найбільшою, порівняно до інших, енергією. У таких випадках, насамперед, треба перевірити гіпотезу про те, що такі сплески амплітуд належать до тієї ж генеральної сукупності, що й амплітуди інших гармонік. У разі неприйняття цієї гіпотези такі сплески при розрахунках середнього значення амплітуди \bar{A} й середнього квадратичного відхилення амплітуд σ_A треба виключити з сукупності амплітуд і після цього розрахувати для неї довірчу межу з тією чи іншою ймовірністю для визначення статистично значущих періодичностей.

6.1.2 Виявлення періодичностей у випадковому процесі за експериментальними даними

Заздалегідь до ряду середньомісячного атмосферного тиску на станції Рейк'явік у жовтні за період 1866–2000 рр. впроваджено інтегральне перетворення Фур'є [2, 4].

Алгоритм дослідження нестационарних часових рядів було реалізовано за допомогою комп'ютерної програми та отримані такі характеристики: амплітуда k -ї гармоніки (A_k), її частота (ω_k), початкова фаза (φ_k), косинус- та синус-перетворення Фур'є – $U(t)$ та $V(t)$ (табл.6.1).

Таблиця 6.1 – Результати реалізації алгоритму дослідження нестационарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, жовтень)

k	$\omega_k, \text{рік}^{-1}$	$T_k, \text{рік}$	$A_k, \text{гПа}$	$\varphi_k, \text{рад}$	$U(t)$	$V(t)$
1	2	3	4	5	6	7
4	0.316	19.912	20.906	1.544	-19.336	-0.521
5	0.383	16.418	25.014	1.526	-28.204	-1.278
6	0.450	13.967	24.224	-1.569	-24.248	0.055
7	0.517	12.152	22.095	-1.561	-20.167	0.196
8	0.584	10.755	23.214	1.564	-23.795	-0.173
9	0.651	9.646	24.183	-1.559	-25.095	0.292
10	0.719	8.744	23.462	1.514	-22.709	-1.282
11	0.786	7.997	23.126	-1.529	-23.239	0.979
12	0.853	7.367	22.979	-1.533	-23.223	0.875
13	0.920	6.829	22.446	-1.478	-22.084	2.050
14	0.987	6.365	22.339	-1.513	-22.151	1.279
15	1.054	5.959	22.731	-1.560	-22.801	0.251
16	1.122	5.602	23.018	-1.561	-23.130	0.227
17	1.189	5.286	23.180	1.558	-23.006	-0.297
18	1.256	5.003	23.179	1.491	-23.497	-1.882
19	1.323	4.749	22.852	1.525	-22.540	-1.041
20	1.390	4.520	22.621	-1.544	-22.699	0.615
21	1.457	4.311	22.858	1.548	-22.499	-0.514
22	1.525	4.121	23.445	1.561	-23.714	-0.239
23	1.592	3.948	23.903	-1.570	-23.846	0.031
24	1.659	3.788	23.965	-1.517	-24.170	1.291
25	1.726	3.640	23.688	-1.507	-23.561	1.496
26	1.793	3.504	23.358	-1.552	-23.326	0.448
27	1.860	3.377	23.086	-1.554	-23.162	0.382
28	1.927	3.260	23.097	-1.543	-22.674	0.635
29	1.995	3.150	23.512	-1.556	-23.854	0.346
30	2.062	3.047	23.795	1.561	-23.652	-0.241
31	2.129	2.951	24.040	1.529	-23.995	-1.012
32	2.196	2.861	24.327	1.570	-24.474	-0.018
33	2.263	2.776	24.235	-1.521	-24.312	1.223
34	2.330	2.696	23.721	-1.548	-23.776	0.553
35	2.398	2.621	23.152	1.515	-22.941	-1.292
36	2.465	2.549	22.879	1.550	-22.866	-0.473
37	2.532	2.482	22.887	1.555	-22.794	-0.358
38	2.599	2.417	23.040	1.501	-23.028	-1.611
39	2.666	2.357	23.314	1.542	-23.187	-0.673
40	2.733	2.299	23.483	-1.556	-23.777	0.350
41	2.801	2.243	23.512	-1.525	-23.149	1.071
42	2.868	2.191	23.457	-1.565	-23.920	0.145
43	2.935	2.141	23.219	-1.514	-22.777	1.292
44	3.002	2.093	23.642	-1.502	-23.274	1.605
45	3.069	2.047	24.229	1.537	-25.081	-0.839
46	3.136	2.003	24.233	1.566	-23.396	-0.116

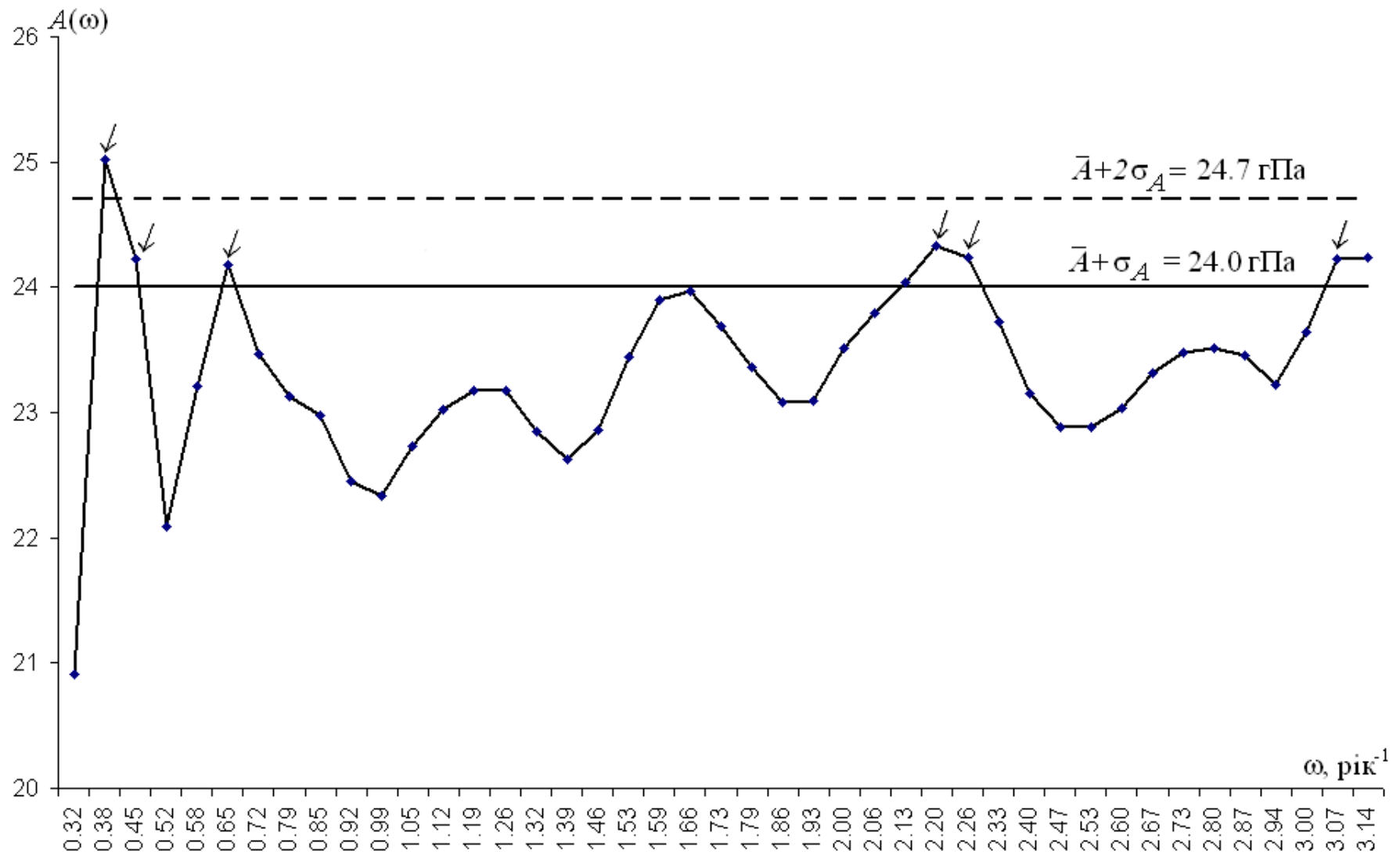


Рис. 6.2 – Амплітудно-частотна характеристика середнього місячного атмосферного тиску (ст. Рейк'явік, жовтень)

Розраховані статистики амплітуди: $\bar{A} = 23.3$ гПа та $\sigma_A = 0.7$ гПа. Використовуючи наведені в табл. 6.1 дані (2-й та 4-й стовпчики), була побудована амплітудно-частотна характеристика випадкового процесу, що розглядається (рис. 6.2).

Дискретність вихідних даних становить 1 рік. Визначення статистично значущих періодичностей, характерних для цього процесу, ґрунтувалися на побудові верхньої довірчої межі для амплітуд з ймовірністю 68% та 95% за умови, що амплітуди підлягають нормальному розподілу.

З рис. 6.2 випливає, що в випадковому процесі, який розглядається, утримуються статистично значущі коливання, характеристики яких наводяться в табл. 6.2.

Таблиця 6.2 – Характеристики періодичних компонент, виявлені в випадковому процесі $X(t)$ за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

k	$\omega_k, \text{рік}^{-1}$	$A_k, \text{гПа}$	$T_k, \text{рік}$	Початкова фаза (φ_k)		$U(t)$	$V(t)$
				$\varphi_k, \text{рад}$	$\varphi_k, \text{рік}$		
5	0.383	25.01	16.4	1.526	4.0	-28.20	-1.28
6	0.450	24.22	14.0	-1.569	3.5	-24.25	0.06
9	0.651	24.18	9.7	-1.559	2.4	-25.10	0.29
32	2.196	24.33	2.9	1.570	0.7	-24.47	-0.02
33	2.263	24.24	2.8	-1.521	0.7	-24.31	1.22
46	3.136	24.23	2.0	1.566	0.5	-23.40	-0.12

З ймовірністю 68% часовий ряд середньомісячного атмосферного тиску на ст. Рейк'явік у жовтні вміщує статистично значущих 6 гармонік: 16-річну, чотирнадцятирічну, десяти, трьох (2.9 та 2.8) та дворічну періодичності. І тільки одна з них (16-річна) спостерігається у цьому випадковому процесі з ймовірністю 95%. Усі вони потребують фізичного обґрунтування і врахування при прогнозуванні макромасштабних атмосферних процесів.

6.2 Згладжування нестационарних випадкових процесів

6.2.1 Основні теоретичні положення щодо згладжування нестационарних випадкових процесів

Більшість метеорологічних величин являють собою *нестационарні випадкові процеси*. Основною причиною цього є те, що під впливом різного надходження до земної поверхні кількості сонячної радіації протягом доби, сезону і року величини мають добовий, сезонний, річний хід і т. п.

Багаторічні змінення характеру кліматоутворювальних факторів приводять до виникнення *трендів*, тобто *однонаправлених змін метеорологічних величин* протягом тривалого часу.

Дослідження статистичної структури гідрометеорологічних характеристик ґрунтуються на послідовності їх значень у вигляді *евквідистантних* часових рядів. Останні можуть бути зображені як сума *детермінованої* $\hat{X}(t)$ і *випадкової* $X_3(t)$ *компонент*. У свою чергу, *детермінована компонента* складається з *тренда* $X_1(t)$ і *періодичної компоненти* $X_2(t)$, яка відбиває віковий, річний або добовий хід процесу $X(t)$ в залежності від *інтервалу дискретності* часового ряду [2, 4].

Отже,

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t). \quad (6.21)$$

При правильному вилученні з випадкового процесу $X(t)$ детермінованої складової $\hat{X}(t)$, випадкова компонента може розглядатися як *стаціонарні випадкові прирощення*.

Детермінована основа випадкового процесу вилучається шляхом фільтрації (або згладжування) вихідного часового ряду. Позначимо *оператор згладжування* через L і застосуємо його до рівності (6.21):

$$L[X(t)] = L[X_1(t)] + L[X_2(t)] + L[X_3(t)]. \quad (6.22)$$

Припустимо, що оператор L точно вилучає *трендову компоненту*, тобто

$$L[X_1(t)] = X_1(t). \quad (6.23)$$

Якщо відняти від рівності (6.21) рівність (6.22), то з урахуванням (6.23) будемо мати:

$$X(t) - L[X(t)] = X_2(t) - L[X_2(t)] + X_3(t) - L[X_3(t)]. \quad (6.24)$$

Важливим є питання про те, якою мірою члени $L[X_2(t)]$ і $L[X_3(t)]$ можуть спотворювати справжні коливання залишкового ряду (6.24) та індукувати хибні коливання.

Одним з видів згладжування є *ковзне осереднення*, яке у загальному вигляді може бути зображене таким чином:

$$\hat{X}(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-\frac{n}{2}}^{k+\frac{n}{2}} \alpha_i X(t_i), \quad (6.25)$$

де

α_i – ваговий множник;

n – кількість точок, по яких проводиться згладжування:

$$k = 1 + \frac{n}{2}; 2 + \frac{n}{2}; \dots; N' + \frac{n}{2}; \quad N' = N(n-1); \quad N - \text{число членів ряду.}$$

Якщо в рівності (6.25) $\alpha_i = 1 \quad \forall i = \overline{1, n}$, то оператор згладжування визначає *просте ковзне осереднення*, в якому вага всіх точок, котрі приймають участь при розрахунках середнього значення на інтервалі $\left[k - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2} \right]$, однакова. Більш коректними є фільтри, що утримують *тригонометричні*

$$\alpha_i = 1 + \cos \frac{2\pi(k-i)}{n} \quad (6.26)$$

або *експоненціальні*

$$\alpha_i = \exp \left[-\frac{|k-i|}{n} \right] \quad (6.27)$$

вагові множники. Вони зменшуються за відзначеними формулами (6.26) і (6.27) законами від середини інтервалу згладжування до його кінців.

Дійсно, нехай у рівності (6.26) величина i набуває таких значень: $i = k - \frac{n}{2}; i = k; i = k + \frac{n}{2}$. Тоді, очевидно, α_i мають значення $\alpha_{k-\frac{n}{2}} = 0; \alpha_k = 2; \alpha_{k+\frac{n}{2}} = 0$.

На рис. 6.3 наводиться залежність вагового множника (6.26) від положення точок i на інтервалі $\left[k - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2} \right]$.

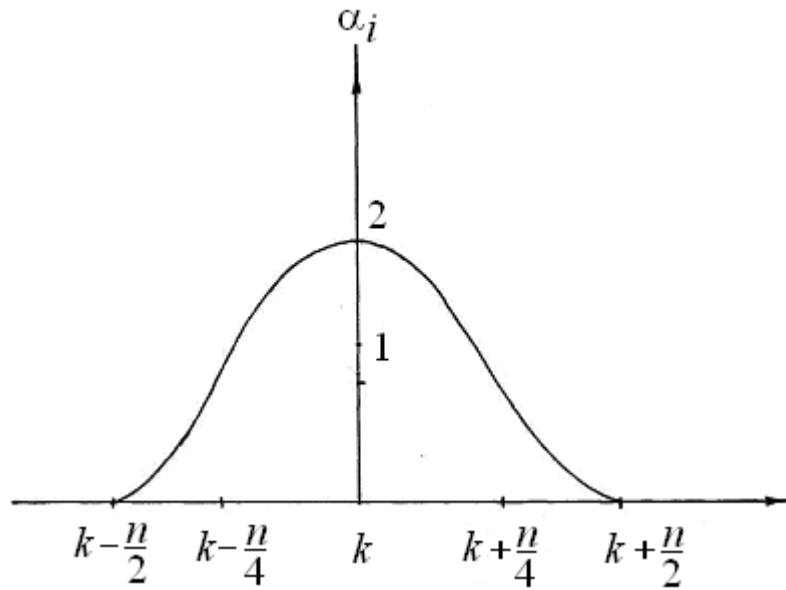


Рис. 6.3 – Косинус-фільтр

Окрім виду вагового множника, *результат фільтрації залежить також від кількості точок (n), по яких виконується згладжування*. Вона визначається рівністю:

$$n = \frac{\tau}{\Delta t}, \quad (6.28)$$

де Δt – інтервал дискретності ряду.

Чим більше n , тим швидша реакція фільтра, але тим гірші його фільтруючі якості, і навпаки. Отже, задача полягає у правильному виборі періоду згладжування.

Означені вище особливості ковзного осереднення приводять до того, що при надто великому періоді згладжування з детермінованої основи $\hat{X}(t)$ процесу $X(t)$ відфільтровується визначна частина періодичної компоненти $X_2(t)$, яка переходить до випадкової компоненти $X_3(t)$.

Навпаки, за умови малого періоду осереднення, частина випадкової складової процесу $X(t)$ переходить до детермінованої складової процесу, а випадкова компонента $X_3(t)$ набуває властивостей «білого шуму».

Для вибору періоду згладжування випадкового процесу $X(t)$ при ковзному осередненні треба дотримуватися цих рекомендацій.

По-перше, необхідно, щоб період згладжування відповідав періодичності, яка існує в процесі $X(t)$. По-друге, значення періоду згладжування повинно відповідати періодичності, яку досліджувач хоче зберегти в детермінованій складовій випадкової послідовності. Наприклад,

якщо треба у складовій $\hat{X}(t)$ зберегти річний хід метеорологічної величини $\hat{X}(t)$, а коливання з меншими періодами необхідно відфільтрувати з вихідного часового ряду, то ковзне осереднення проводять при такій кількості значень випадкової величини n , яке відповідає річному інтервалу. Тоді на виході з фільтра ми отримаємо процес, який утримує, крім трендів, коливання з періодом один рік і більше, а коливання з меншими періодами перейдуть у випадкову складову. Остання має, як правило, властивості квазістаціонарного процесу. Тому для дослідження її статистичної структури використовують розглянуті вище методи кореляційного або спектрального аналізів.

Важливо при побудові згладженого ряду враховувати початкову фазу коливання (h_i) тієї періодичності процесу $X(t)$, по якій проводилося згладжування часового ряду, а також величину періоду осереднення. Тобто при проведенні згладжування за допомогою тригонометричних множників не враховується k_i початкових точок та kk точок у кінці вихідного часового ряду.

Початок коливання в детермінованій основі (k_1) приходить на значення часового ряду, яке розраховується так:

$$k_1 = h_i + n/2, \quad (6.29)$$

де

h_i – початкова фаза гармонічного коливання в одиницях часу, по якому проводилося згладжування;

n – період гармонічного коливання (кількість точок), по якому проводилося згладжування.

$$h_i = \begin{cases} \frac{(\pi + \varphi_i)}{2\pi} \cdot n & \text{за умови } \varphi_i \leq 0; \\ \frac{\varphi_i \cdot n}{2\pi} & \text{за умови } \varphi_i > 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

Початкова фаза гармонічного коливання (в радіанах), по якому проводиться згладжування, розраховується за допомогою рівняння:

$$\varphi_i = \operatorname{arctg} \frac{U(t)}{V(t)}, \quad (6.31)$$

де

$U(t)$ та $V(t)$ – відповідно косинус- і синус-перетворення Фур'є.

Кількість точок, які не враховуються в кінці вихідного часового ряду (kk) при побудові згладженого ряду, дорівнює половині періоду того періодичного коливання, по якому проводилося згладжування, тобто $kk = n / 2$.

6.2.2 Згладжування нестационарних випадкових процесів за експериментальними даними

Нижче буде розглянуто ряд прикладів.

Приклад 1. В результаті ракетного зондування атмосфери був сформований ряд зональної складової швидкості вітру на висоті 35 км над районом Форт Шерман (приекваторіальна зона Північно-Американського континенту). За допомогою ковзного осереднення (косинус-фільтра) отримана детермінована основа зональної компоненти, яка наводиться на рис. 6.4. Період осереднення дорівнює одному року ($n = 48$). На цьому рисунку також зображується вихідний випадковий процес. Дискретність даних складає один тиждень.

З рис. 6.4 випливає, по-перше, що вихідний випадковий процес, який досліджується, не є стаціонарним. По-друге, в результаті ковзного осереднення, крім слабо вираженої однорічної періодичності, чітко проявляється коливання з періодом два роки, яке називається квазидворічною періодичністю швидкості вітру.

У багатьох роботах, які присвячені квазидворічним коливанням швидкості вітру в стратосфері приекваторіальної зони, стверджується наявність західної й східної фаз коливань, що проявляються через один рік кожна.

Рис. 6.4 ілюструє той факт, що західна фаза, яка відбивається максимумами функції, що утворюються в результаті ковзного осереднення і відповідають малим значенням східної (від'ємної) зональної складової швидкості вітру, не є таким періодом, протягом якого спостерігається виключно західна (додатна) компонента зонального вітру. Протягом західної фази квазидворічної періодичності західні вітри часто змінюються на східні.

Більш того, східна компонента дає більший внесок при осередненні, результатом чого й є той факт, що практично вся детермінована складова західної компоненти розташовується у від'ємній півплощині, тобто має східний напрямок.

Навпаки, в період східної фази квазидворічної періодичності спостерігається виключно східний зональний вітер.

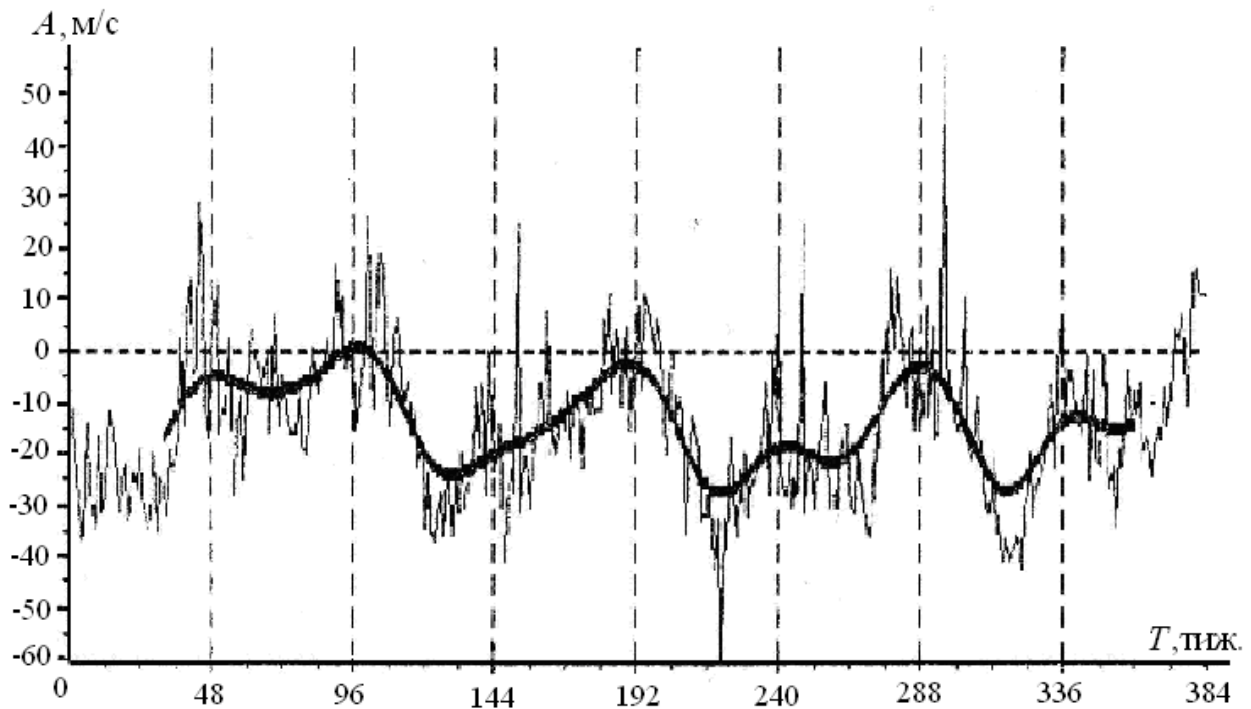


Рис. 6.4 – Часовий та згладжений ряди зональної компоненти швидкості вітру на висоті 35 км над районом Форт Шерман (приекваторіальна зона Західної півкулі)

Приклад 2. В якості другого прикладу на рис. 6.5 зображується детермінована складова зональної компоненти швидкості вітру на висоті 10 км над районом Уайт Сендз (субтропічна зона Північно-Американського континенту), отримана також шляхом ковзного осереднення результатів радіозондування атмосфери (з періодом осереднення один рік), що проводилося над цим районом протягом десяти років.

На графіку детермінованої основи виразно відбивається однорічна періодичність швидкості зонального вітру з максимумами, що припадають на холодні місяці року. Коливання з меншими періодами, які для цього випадкового процесу виявляються з досить великою ймовірністю на амплітудно-частотній характеристиці, відфільтровуються й переходять, як зазначалося вище, у випадкову складову вихідного процесу.

Цікавим є й те, що крім річного коливання в детермінованій основі процесу проявляється також і дворічне коливання. Воно визначається збільшенням через кожні два роки максимумів амплітуди річного коливання (рис.6.5).

Детерміновані складові наведених прикладів характеризуються наявністю тільки періодичних коливань. Трендова компонента практично не проявляється. Різниця між вихідним процесом $X(t)$ і детермінованою його складовою $\hat{X}(t)$ дає випадкову компоненту $X_3(t)$, яка має властивості, близькі до стаціонарного процесу.

Наведені приклади свідчать про те, що за допомогою викладених вище методів статистичного аналізу нестационарних випадкових функцій є можливість отримати важливі характеристики статистичної структури гідрометеорологічних процесів. Тому вони набули широкого використання при проведенні відповідних наукових досліджень.

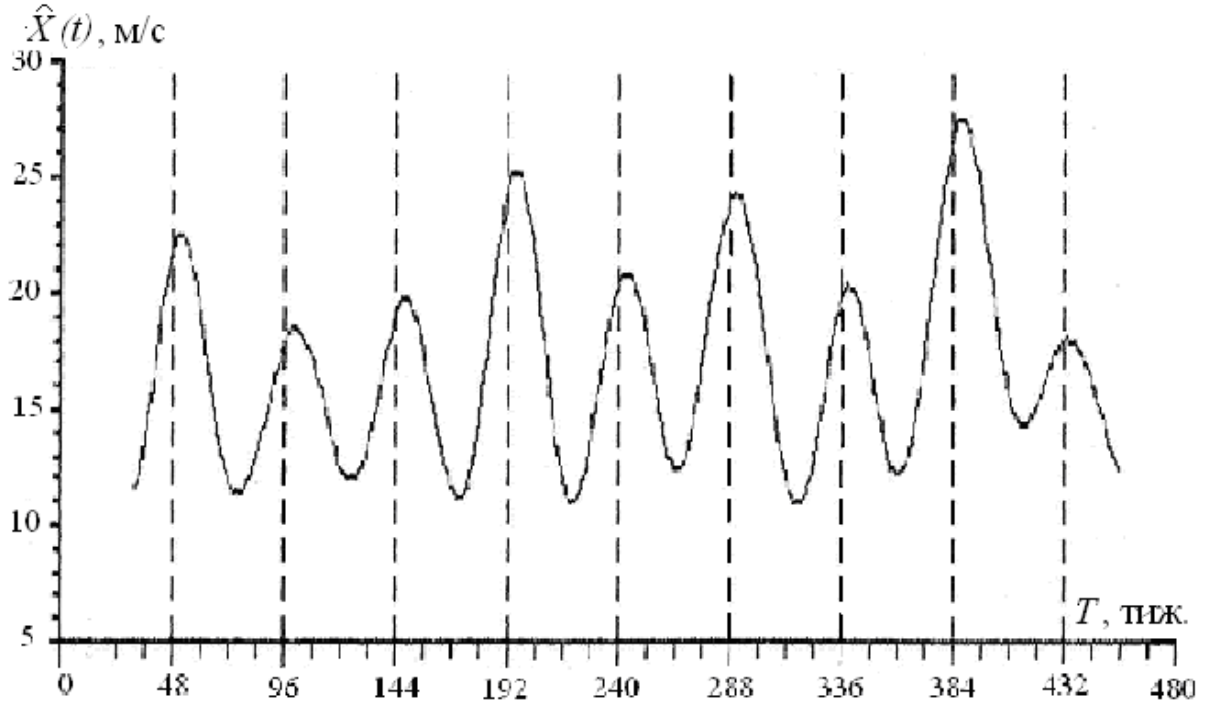


Рис. 6.5 – Згладжений ряд зональної компоненти швидкості вітру на висоті 10 км над районом Уайт Сендз (субтропічна зона Західної півкулі)

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення випадкової функції, випадкового процесу, випадкової послідовності.
2. Чому гідрометеорологічні процеси вважаються нестационарними часовими процесами?
3. Які методи використовуються при дослідженні періодичностей, що містяться в часових рядах?
4. Якими перевагами володіє інтегральне перетворення Фур'є для дослідження «прихованих» періодичностей у випадковому процесі?
5. З якою метою в перетворення Фур'є вводять множники («вікна»)?
6. В якому частотному інтервалі лежать мінімально і максимально можливі гармоніки, які можуть бути виявлені в нестационарному

- випадковому процесі за допомогою інтегрального перетворення Фур'є?
7. Як по амплітудно-частотній характеристиці визначити із заданою ймовірністю статистично значущі періодичності у випадковому процесі?
 8. Які характеристики «прихованих» гармонік у випадковому процесі можна отримати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є?
 9. Що називають «статистичною гіпотезою» та в чому полягає основний принцип її перевірки?
 10. Що називають «рівнем значущості» та «довірчою ймовірністю»?
 11. Як розрахувати початкову фазу (в радіанах та в одиницях часу) періодичного коливання, що міститься у часовій послідовності?
 12. Як отримати період гармонічного коливання, що міститься у випадковому процесі?
 13. Як розрахувати амплітуду k -ї гармоніки, яка притаманна випадковому процесу?
 14. За допомогою яких відомих методів можна отримати періодичні складові у нестационарному випадковому процесі?
 15. Якими складовими можна представити нестационарний випадковий процес?
 16. Як отримати детерміновану основу випадкового процесу $X(t)$?
 17. Які вагові множники використовуються при фільтрації нестационарних часових рядів?
 18. Від яких величин залежить результат фільтрації нестационарних випадкових процесів?
 19. Як вибирають період згладжування нестационарної випадкової послідовності $X(t)$?

ЛІТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. , Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. – Л.: Гидрометеиздат. – 1976. – 360 с.
2. Гончарова Л.Д., Школьний Є.П. Методи обробки та аналізу гідрометеорологічної інформації (збірник задач і вправ). – Навчальний посібник. – Одеса: Екологія. – 2007. – 464 с.
3. Казакевич Д.И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеологии. – Л.: Гидрометеиздат. – 1977. – 268 с.
4. Школьний Є.П., Лоева І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації. – Підручник. – К.: Мін. освіти України. – 1999. – 600 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА ТА ЗАКОНИ ЇЇ РОЗПОДІЛУ	7
1.1 Особливості вихідної інформації для проведення статистичних досліджень.....	7
1.2 Поняття про закон розподілу випадкової величин та форми його представлення.....	12
1.2.1 Функція розподілу та її властивості.....	13
1.2.2 Щільність імовірності та її властивості.....	16
1.3 Числові (статистичні) характеристики випадкової величини.....	17
2. ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ	20
2.1 Визначення випадкової функції.....	20
2.2 Закони розподілу випадкового процесу.....	22
2.3 Характеристики випадкових процесів.....	25
2.4 Система випадкових процесів. Кореляційна функція зв'язку.....	30
3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ	36
3.1 Визначення стаціонарного випадкового процесу.....	36
3.2 Апроксимація кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів.....	40

3.3	Ергодичність стаціонарних випадкових процесів.....	43
3.4	Структурна функція.....	46
4.	СПЕКТРАЛЬНЕ РОЗКЛАДАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ.....	50
4.1	Загальні теоретичні положення.....	50
4.2	Основні властивості спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу.....	54
4.3	Апроксимація коваріаційних функцій стаціонарних випадкових процесів.....	56
4.4	Статистичні оцінки ймовірнісних характеристик стаціонарної випадкової функції.....	63
4.5	Оцінка спектральної щільності стаціонарної випадкової функції за експериментальними даними.....	67
5.	ВЗАЄМНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	73
5.1	Елементи теорії взаємного спектрального аналізу.....	73
5.2	Оцінка взаємної спектральної щільності двох стаціонарних випадкових процесів за експериментальними даними.....	78
6.	ОСОБЛИВОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ СТРУКТУРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	85
6.1	Виявлення періодичностей у випадковому процесі за допомогою інтегрального перетворення Фур'є.....	85
6.1.1	Основні теоретичні положення.....	85

6.1.2	Виявлення періодичностей у випадковому процесі за експериментальними даними.....	89
6.2	Згладжування нестационарних випадкових процесів.....	93
6.2.1	Основні теоретичні положення щодо згладжування нестационарних випадкових процесів.....	93
6.2.2	Згладжування нестационарних випадкових процесів за експериментальними даними.....	97
	ЛІТЕРАТУРА.....	101

Навчальне видання

Гончарова Людмила Дмитрівна

**МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ
МЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

Конспект лекцій

Підп. до друку
Умовн. друк. арк.

Формат 60×84/16
Тираж

Папір
Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул. Львівська, 15
