МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів,
виконання курсової роботи та контрольної роботи
з дисципліни

"ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ"

для студентів III курсу заочної форми навчання
напрямку – комп'ютерні науки

ЗАТВЕРДЖЕНО
Робочою групою методичної ради
„Заочна та післядипломна освіта"

ОДЕСА 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів,
виконання курсової роботи та контрольної роботи
з дисципліни

"ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ"

для студентів III курсу заочної форми навчання
напрямку – комп'ютерні науки

Затверджено на засіданні
робочої групи заочного факультету

Голова _____________СТЕПАНЕНКО С.М.

Узгоджено
Декан з/ф ____________ВОЛОШИНА О.В.

Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій
Протокол №____від ______________ 2012 р.

Зав. кафедрою _________ ПРЕПЕЛИЦЯ Г.П.

ОДЕСА 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ І СПОРТУ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи студентів,
виконання курсової роботи та контрольної роботи
з дисципліни

"ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ"

для студентів ІІІ курсу заочної форми навчання
напрямку – комп'ютерні науки

ОДЕСА 2012

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів, виконання курсової роботи та контрольної роботи з дисципліни при вивченні навчальної дисципліни "ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ" для студентів III курсу заочної форми навчання напрямку – комп'ютерні науки. Укладачі: КРИЖАНІВСЬКА Т.В., старший викладач кафедри інформаційних технологій. – Одеса, ОДЕкУ, 2012, укр. мова.

ЗМІСТ

ВСТУП...7

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ..8

ЗАВДАННЯ № 1. ДІЇ НАД НАБЛИЖЕНИМИ ЧИСЛАМИ. ОЦІНКА ПОХИБОК РЕЗУЛЬТАТУ..9

ЗАВДАННЯ № 2. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ..19

ЗАВДАННЯ № 3. КУРСОВА РОБОТА НА ТЕМУ: «НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ СИСТЕМ»....................32

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ..67

ВСТУП

Дисципліна ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ є нормативною дисципліною у напрямку бакалаврської підготовки "Комп’ютерні науки" за спеціальністю "Інформаційні управляючі системи та технології", шифр 6.050101 та належить до професійного та практичного циклу підготовки.

Засвоєння цього курсу можливе, якщо студенти отримали необхідні знання з дисциплін "Вища математика", "Фізика", "Основи програмування та алгоритмічні мови".

Отримані у процесі вивчення дисципліни знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох дисциплін професійно-орієнтованого циклу.

МЕТА цієї дисципліни – формування у студентів теоретичних знань для розгляду різноманітних проблем та побудови відповідних математичних моделей, засвоєння основних обчислювальних методів розв’язування цих моделей та аналіз отриманих результатів.

Задачею дисципліни є ознайомлення студентів з основними обчислювальними методами розв’язку прикладних задач та засобами їх комп’ютерної реалізації.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен ЗНАТИ основні математичні моделі, до яких зводяться різноманітні прикладні задачі, та обчислювальні методи їх розв’язку:

- етапи розв’язування задач чисельними методами;
- правила знаходження помилок при наближених обчисленнях;
- задачу інтерполяції та методи її розв'язку;
- задачу сплайн-інтерполяції та методи її розв'язку;
- задачу апроксимації та методи її розв'язку;
- методи знаходження похідної та інтегралу;
- задачу Коші для диференційного рівняння першого порядку та методи її розв'язку;
- задачу Коші для системи диференційних рівнянь першого порядку та методи її розв'язку;
- задачу Коші для диференційного рівняння довільного порядку та метод кінцевих різниць для її розв'язку;
- крайову задачу для рівнянь математичної фізики та методи її розв'язку;
- методи розв’язку нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем;
- методи розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- методи знаходження власних значень та власних векторів матриці.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен ВМІТИ використовувати набуті знання при розв’язуванні конкретних прикладних задач та аналізу отриманих результатів:

- знаходити помилки при наближених обчисленнях;
- розв’язувати задачу інтерполяції;
- розв’язувати задачу сплайн-інтерполяції;

– розв'язувати задачу апроксимації.
– знаходити чисельні значення похідної та інтегралу;
– розв'язувати задачу Коші для диференційного рівняння першого порядку;
– розв'язувати задачу Коші для системи диференційних рівнянь першого порядку;
– розв'язувати задачу Коші для диференційного рівняння довільного порядку методом кінцевих різниць;
– розв'язувати крайову задачу для рівнянь математичної фізики.
– розв'язувати нелінійні алгебраїчні рівняння та системи;
– розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
– знаходити власні значення та власні вектори матриці.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Завдання з дисципліни "Чисельні методи в інформатиці" охоплюють практично всі розділи теоретичного курсу. Під час підготовки до виконання завдання необхідно вивчити за конспектом лекцій та літературою, що рекомендована викладачем, відповідний теоретичний матеріал.

По кожному завданню оформляється звіт, який повинен містити:

- варіант і повний опис постановки задачі;
- відповіді на контрольні запитання;
- листінг програми;
- опис результатів розрахунку у вигляді таблиць або графіків;
- висновки за результатами виконаної роботи.

Для вибору варіанта додаємо всі цифри в номері залікової книжки. Отримана сума і буде номером варіанта, який повинен виконати студент. Якщо сума більше ніж 25, то дану операцію проводять ще раз.

Наприклад:

№ залікової книжки – 02705, № варіанта: 0+2+7+0+5=14;

№ залікової книжки – 09876, 0+9+8+7+6=30; № варіанта: 3+0=3.

ЗАВДАННЯ №1

ДІЇ НАД НАБЛИЖЕНИМИ ЧИСЛАМИ. ОЦІНКА ПОХИБОК РЕЗУЛЬТАТУ

ЦІЛЬ РОБОТИ: ознайомитися із загальними правилами дій над наближеними числами та оцінки абсолютної і відносної похибок.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називається абсолютною похибкою наближеного числа?
2. Що називається відносною похибкою наближеного числа?
3. Як визначити абсолютну похибку наближеного числа, якщо в ньому відома кількість вірних знаків після коми?
4. Як обчислити похибку при додаванні і відніманні наближених чисел?
5. Як обчислити похибку при множенні й діленні наближених чисел?
6. Як визначити похибку при обчисленні значення функцій однієї або багатьох змінних?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 – деяке число (відоме точно або не точно), а a – число, прийняте за наближене значення числа a_0, то число $\Delta(a) > 0$, що задовольняє нерівності

$$|a_0 - a| \le \Delta(a),$$

називається *абсолютною похибкою* наближеного числа a.

Абсолютна похибка числа $\Delta a = |a_0 - a|$ або $\Delta a = 0.5 \cdot 10^{-m}$, де m – кількість вірних знаків після десяткової точки.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \qquad \text{або у відсотках} \qquad \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\%.$$

Значущою цифрою наближеного числа називається будь-яка його цифра, починаючи з першої ненульової (рахуючи зліва направо).

Вірною цифрою (вірним знаком) наближеного числа a називається будь-яка його значуща цифра, для якої абсолютна похибка $\Delta(a)$ не перевершує половини розряду цієї цифри. Інші значущі цифри числа a називаються *сумнівними*.

Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр.

Остаточний наближений результат звичайно округляють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну. При розрахунках з наближеними числами в проміжних результатах зберігають одну, дві, а іноді й три сумнівні цифри.

Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок доданків:

$$\Delta(a_1+\ldots+a_n)=\Delta(a_1)+\ldots+\Delta(a_n).$$

Відносна похибка суми декількох чисел визначається за формулою

$$\delta(a_1+\ldots+a_n)=\frac{\Delta(a_1+\ldots+a_n)}{|a_1+\ldots+a_n|}=\frac{\Delta(a_1)+\ldots+\Delta(a_n)}{|a_1+\ldots+a_n|}.$$

Відносна похибка добутку декількох чисел дорівнює сумі відносних похибок співмножників:

$$\delta(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=\delta(a_1)+\ldots+\delta(a_n).$$

Абсолютна похибка добутку обчислюється за формулою

$$\Delta(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=|a_1\cdot\ldots\cdot a_n|\cdot\delta(a_1\cdot\ldots\cdot a_n).$$

Абсолютна і відносна похибки при піднесенні до степеню

$$\Delta(a^n)=n\cdot|a|^{n-1}\Delta a,\quad \delta(a^n)=\frac{n\cdot|a|^{n-1}}{|a|^n}\Delta a=n\delta a.$$

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Зразок оформлення практичного завдання

Постановка задачі:

Обчислити наближені значення виразів для заданих значень змінних. Визначити абсолютну і відносну похибки заданих наближених чисел. Обчислити абсолютну і відносну похибки результатів.

Розв'язання.

1) Дано:

$X=\dfrac{m^2n^3}{\sqrt{k}}$, де $m=28.3(\pm 0.02),\quad n=7.45(\pm 0.01),\quad k=0.678(\pm 0.003)$.

Знайдемо значення виразу $X=\dfrac{m^2n^3}{\sqrt{k}}$

$X=28.3^2\cdot 7.45^3/\sqrt{0.678}=402185.9$.

Запишемо абсолютні похибки заданих наближених чисел:

$\Delta m=0.02,\quad \Delta n=0.01,\quad \Delta k=0.003$.

Знайдемо відносні похибки заданих наближених чисел за формулами:

$\delta m=\Delta m/|m|,\quad \delta n=\Delta n/|n|,\quad \delta k=\Delta k/|k|$.

$\delta m=0.02/28.3=0.00071,\ \delta n=0.01/7.45=0.00135,\ \delta k=0.003/0.678=0.00443$

Знайдемо відносну похибку виразу X:

$\delta X=2\delta m+3\delta n+0.5\delta k=0.00142+0.00405+0.00222=0.00769$.

Знайдемо абсолютну похибку виразу X:

$\Delta X=X\cdot\delta X=402185.9\cdot 0.00769=3\cdot 10^3$

Відповідь: $X = 4.02 \cdot 10^5 \left(\pm 3 \cdot 10^3\right), \quad \delta X = 0.008$.

2) Дано:

$$Y = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}, \text{ де } n = 3.0567(\pm 0.0001), \quad m = 5.72(\pm 0.02).$$

Знайдемо значення виразу $Y = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$

$$Y = \frac{(3.0567-1)(5.72+3.0567)}{(5.72-3.0567)^2} = 2.54485$$

Запишемо абсолютні похибки заданих наближених чисел:

$\Delta m = 0.02, \quad \Delta n = 0.0001$.

Знайдемо відносні похибки заданих наближених чисел за формулами:

$\delta m = \Delta m / |m|, \quad \delta n = \Delta n / |n|$.

$\delta m = 0.02/5.72 = 0.00349, \ \delta n = 0.0001/3.0567 = 0.00003$

Знайдемо відносну похибку виразу Y:

$$\delta Y = \delta(n-1) + \delta(m+n) + 2 \cdot \delta(m-n) = \frac{\Delta n}{|n-1|} + \frac{\Delta m + \Delta n}{|m+n|} + 2 \cdot \frac{\Delta m + \Delta n}{|m-n|}$$

$$\delta Y = \frac{0.0001}{|3.0567-1|} + \frac{0.02+0.0001}{|5.72+3.0567|} + 2 \cdot \frac{0.02+0.0001}{|5.72-3.0567|} = 0.0174$$

Знайдемо абсолютну похибку виразу Y:

$$\Delta Y = Y \cdot \delta Y = 2.54485 \cdot 0.0174 = 0.044.$$

Відповідь: $Y = 2.54(\pm 0.044), \quad \delta Y = 0.0174$.

3) Дано:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right), \text{ де } \pi = 3.142, \quad h = 11.8, \quad R = 23.67.$$

Знайдемо значення виразу $V = \pi h^2 \left(R - \dfrac{h}{3}\right)$

$V = 3.142 \cdot 11.8^2 \cdot (23.67 - 11.8/3) = 437.49 \cdot 19.737 = 8634.74$.

Запишемо абсолютні похибки заданих наближених чисел. Абсолютна похибка дорівнює половині останнього розряду числа:

$\Delta \pi = 0.0005, \quad \Delta h = 0.05, \quad \Delta R = 0.005, \quad \Delta(R - h/3) = \Delta R + \Delta h = 0.055$.

Знайдемо відносні похибки заданих наближених чисел:

$\delta \pi = 0.0005/3.142 = 0.00016, \quad \delta h = 0.05/11.8 = 0.0042,$

$\delta R = 0.005/23.67 = 0.00021, \quad \delta(R - h/3) = 0.055/19.737 = 0.0028.$

Знайдемо відносну похибку виразу V:

$\delta V = \delta\pi + 2\delta h + \delta(R - h/3) = 0.00016 + 2 \cdot 0.0042 + 0.0028 = 0.011$

Знайдемо абсолютну похибку виразу V:

$\Delta V = V \cdot \delta V = 8634.74 \cdot 0.011 = 95$.

Відповідь: $V = 8.63 \cdot 10^3 \left(\pm 9.5 \cdot 10^1\right), \quad \delta V = 0.011$.

ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ

Обчислити наближені значення виразів для заданих значень змінних. Визначити абсолютну і відносну похибки заданих наближених чисел. Обчислити абсолютну і відносну похибки результатів.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

ВАРІАНТ №1

1) $X = \dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, де $a = 3.85(\pm 0.01), \quad b = 2.0435(\pm 0.0004), \quad c = 962.6(\pm 0.1)$.

2) $Y = \left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$, де $a = 4.3(\pm 0.05), \quad b = 17.21(\pm 0.02), \quad c = 8.2(\pm 0.05)$, $m = 12.417(\pm 0.003), \quad n = 8.37(\pm 0.005)$.

3) $S = \dfrac{h^2}{18} : \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$, де $a = 1.141, \quad b = 3.156, \quad h = 1.14$.

ВАРІАНТ №2

1) $X = \dfrac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$, де $a = 228.6(\pm 0.06), \quad b = 86.4(\pm 0.02), \quad c = 68.7(\pm 0.05)$.

2) $Y = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, де $a = 13.5(\pm 0.02), \quad b = 3.7(\pm 0.02), \quad m = 4.22(\pm 0.004)$, $c = 34.5(\pm 0.02), \quad d = 23.725(\pm 0.005)$.

3) $P = \dfrac{(a+b)h^3}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$, де $a = 8.53, \quad b = 6.271, \quad h = 12.48$.

ВАРІАНТ №3

1) $X = \dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, де $a = 3.845(\pm 0.004), \quad b = 16.2(\pm 0.05), \quad c = 10.8(\pm 0.1)$.

2) $Y = \dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$,

де $a = 2.754(\pm 0.001), \quad b = 11.7(\pm 0.04), \quad m = 0.56(\pm 0.005)$,
$c = 10.536(\pm 0.002), \quad d = 6.32(\pm 0.008)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\cdot h}{5}$, де $a=0.562$, $b=0.2518$, $h=0.68$.

ВАРІАНТ №4

1) $X=\dfrac{a^2b}{c}$, де $a=3.456(\pm 0.002)$, $b=0.642(\pm 0.0005)$, $c=7.12(\pm 0.004)$.

2) $Y=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, де $a=23.16(\pm 0.02)$, $b=8.23(\pm 0.005)$, $c=145.5(\pm 0.08)$, $d=28.6(\pm 0.1)$, $m=0.28(\pm 0.006)$.

3) $V=\dfrac{h}{3}\cdot S\cdot\left(1+\dfrac{a}{A}+\dfrac{a^2}{A^2}\right)$, де $a=8.51$, $A=23.42$, $S=45.8$, $h=3.81$.

ВАРІАНТ №5

1) $X=\dfrac{ab^3}{c}$, де $a=0.643(\pm 0.0005)$, $b=2.17(\pm 0.002)$, $c=5.843(\pm 0.001)$.

2) $Y=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, де $a=27.16(\pm 0.006)$, $b=5.03(\pm 0.01)$, $c=3.6(\pm 0.02)$, $m=12.375(\pm 0.004)$, $n=86.2(\pm 0.05)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}\cdot\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $h=21.1$, $a=22.08$, $b=31.11$.

ВАРІАНТ №6

1) $X=\dfrac{ab}{c^2}$, де $a=0.3575(\pm 0.0002)$, $b=2.63(\pm 0.01)$, $c=0.854(\pm 0.0005)$.

2) $Y=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

де $a=16.342(\pm 0.001)$, $b=2.5(\pm 0.03)$, $c=38.17(\pm 0.002)$, $d=9.14(\pm 0.005)$, $m=3.6(\pm 0.04)$.

3) $V=\dfrac{1}{6}\pi h\left(3a^2+h^2\right)$, де $\pi=3.14$, $a=2.456$, $h=1.76$.

ВАРІАНТ №7

1) $V=\dfrac{\pi^2}{4}Da^2$, де $\pi=3.1416$, $D=54(\pm 0.5)$, $a=8.235(\pm 0.001)$.

2) $S=\dfrac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-a^4}$, де $\pi=3.142$, $D=36.5(\pm 0.1)$, $a=26.35(\pm 0.005)$.

3) $A=c^2\left(1+\dfrac{2\beta}{c}+\dfrac{\gamma}{c^2}\right)$, де $c=2.435$, $\beta=0.15$, $\gamma=1.27$.

ВАРІАНТ №8

1) $Y = \dfrac{m^2 n}{c^3}$, де $m = 1.6531(\pm 0.0003),\quad n = 3.78(\pm 0.002),\quad c = 0.158(\pm 0.005)$.

2) $X = \dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$, де $a = 9.542(\pm 0.001),\quad b = 3.128(\pm 0.002),\quad m = 2.8(\pm 0.03)$,
$c = 0.172(\pm 0.001),\quad d = 5.4(\pm 0.02)$.

$V = \dfrac{1}{15}\pi h\left(2D^2 + Da + 0.75a^2\right)$, де $h = 84.2,\quad D = 28.3,\quad a = 42.08$.

ВАРІАНТ №9

1) $X = \sqrt{\dfrac{cd}{b}}$, де $c = 0.7568(\pm 0.0002),\quad d = 21.7(\pm 0.02),\quad b = 2.65(\pm 0.01)$.

2) $Y = \dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, де $a = 10.82(\pm 0.03),\quad b = 2.786(\pm 0.006)$,
$m = 0.28(\pm 0.006),\quad n = 14.7(\pm 0.06)$.

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad p = (a+b+c)/2$, де
$a = 46.3,\quad b = 29.72,\quad c = 37.654$.

ВАРІАНТ №10

1) $F = \dfrac{qe^3}{48c}$, де $q = 54.8(\pm 0.02),\quad e = 2.45(\pm 0.01),\quad c = 0.863(\pm 0.004)$.

2) $Q = \dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,
де $n = 2.0435(\pm 0.0001),\ x = 4.2(\pm 0.05),\ y = 0.82(\pm 0.01)$.

3) $X = \dfrac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \dfrac{\beta(\alpha b - \beta a)}{b^2(b+\beta)}$,
де $\alpha = 5.27,\ \beta = 0.0562,\ a = 158.35,\ b = 61.21$.

ВАРІАНТ №11

1) $X = \dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, де $a = 4.16(\pm 0.005),\quad b = 12.163(\pm 0.002),\quad c = 55.18(\pm 0.01)$.

2) $Y = \left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$, де $a = 5.2(\pm 0.04),\quad b = 15.32(\pm 0.01),\quad c = 7.5(\pm 0.05)$,
$m = 21.823(\pm 0.002),\quad n = 7.56(\pm 0.003)$.

3) $S = \dfrac{h^2}{18} : \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$, де $a = 2.234,\quad b = 4.518,\quad h = 4.48$.

ВАРІАНТ №12

1) $X=\dfrac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, де $a=315.6(\pm 0.05)$, $b=72.5(\pm 0.03)$, $c=53.8(\pm 0.04)$.

2) $Y=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, де $a=18.5(\pm 0.03)$, $b=5.6(\pm 0.02)$, $m=3.42(\pm 0.003)$, $c=26.3(\pm 0.01)$, $d=14.782(\pm 0.006)$.

3) $P=\dfrac{(a+b)h^3}{4}+\dfrac{(a+b)h}{12}$, де $a=6.44$, $b=5.323$, $h=15.44$.

ВАРІАНТ №13

1) $X=\dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, де $a=4.632(\pm 0.003)$, $b=23.3(\pm 0.04)$, $c=11.3(\pm 0.06)$.

2) $Y=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, де $a=3.236(\pm 0.002)$, $b=15.8(\pm 0.03)$, $m=0.64(\pm 0.004)$, $c=12.415(\pm 0.003)$, $d=7.18(\pm 0.006)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\cdot h}{5}$, де $a=0.834$, $b=0.3523$, $h=0.74$.

ВАРІАНТ №14

1) $X=\dfrac{a^2b}{c}$, де $a=1.245(\pm 0.001)$, $b=0.121(\pm 0.0002)$, $c=2.34(\pm 0.003)$.

2) $Y=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, де $a=17.41(\pm 0.01)$, $b=1.27(\pm 0.002)$, $c=342.3(\pm 0.04)$, $d=11.7(\pm 0.1)$, $m=0.71(\pm 0.003)$.

3) $V=\dfrac{h}{3}\cdot S\cdot\left(1+\dfrac{a}{A}+\dfrac{a^2}{A^2}\right)$, де $a=5.71$, $A=32.17$, $S=51.7$, $h=2.42$.

ВАРІАНТ №15

1) $X=\dfrac{ab^3}{c}$, де $a=0.142(\pm 0.0003)$, $b=1.71(\pm 0.002)$, $c=3.727(\pm 0.001)$.

2) $Y=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, де $a=15.71(\pm 0.005)$, $b=3.28(\pm 0.02)$, $c=7.2(\pm 0.01)$, $m=13.752(\pm 0.001)$, $n=33.7(\pm 0.03)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}\cdot\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $h=17.8$, $a=32.47$, $b=11.42$.

ВАРІАНТ №16

1) $X=\dfrac{ab}{c^2}$, де $a=0.1756(\pm 0.0001)$, $\quad b=3.71(\pm 0.03)$, $\quad c=0.285(\pm 0.0002)$.

2) $Y=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

де $a=12.751(\pm 0.001)$, $\quad b=3.7(\pm 0.02)$, $\quad c=23.76(\pm 0.003)$,
$d=8.12(\pm 0.004)$, $\quad m=1.7(\pm 0.01)$.

3) $V=\dfrac{1}{6}\pi\, h\left(3a^2+h^2\right)$, де $\pi=3.142$, $\quad a=7.751$, $\quad h=3.35$.

ВАРІАНТ №17

1) $V=\dfrac{\pi^2}{4}Da^2$, де $\pi=3.14$, $\quad D=72(\pm 0.3)$, $\quad a=3.274(\pm 0.002)$.

2) $S=\dfrac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-a^4}$, де $\pi=3.1416$, $\quad D=41.4(\pm 0.2)$, $\quad a=31.75(\pm 0.003)$.

3) $A=c^2\left(1+\dfrac{2\beta}{c}+\dfrac{\gamma}{c^2}\right)$, де $c=7.834$, $\quad \beta=0.21$, $\quad \gamma=3.71$.

ВАРІАНТ №18

1) $Y=\dfrac{m^2n}{c^3}$, де $m=2.348(\pm 0.002)$, $\quad n=4.37(\pm 0.004)$, $\quad c=0.235(\pm 0.0003)$.

2) $X=\dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$,

де $a=8.357(\pm 0.003)$, $\quad b=2.48(\pm 0.004)$, $\quad m=3.17(\pm 0.01)$,
$c=1.315(\pm 0.0004)$, $\quad d=2.4(\pm 0.02)$.

3) $V=\dfrac{1}{15}\pi h\left(2D^2+Da+0.75a^2\right)$, де $h=76$, $\quad D=17.2$, $\quad a=9.344$.

ВАРІАНТ №19

1) $X=\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$, де $c=0.8345(\pm 0.0004)$, $\quad d=13.8(\pm 0.03)$, $\quad b=1.84(\pm 0.006)$.

2) $Y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, де $a=9.37(\pm 0.004)$, $\quad b=3.108(\pm 0.0003)$,
$m=0.46(\pm 0.002)$, $\quad n=15.2(\pm 0.04)$.

3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\quad p=(a+b+c)/2$, де
$a=10.5$, $\quad b=34.18$, $\quad c=27.327$.

ВАРІАНТ №20

1) $F=\dfrac{qe^3}{48c}$, де $q=38.5(\pm 0.01)$, $e=3.35(\pm 0.02)$, $c=0.734(\pm 0.001)$.

2) $Q=\dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,

де $n=1.1753(\pm 0.0002)$, $x=5.8(\pm 0.01)$, $y=0.65(\pm 0.02)$.

3) $X=\dfrac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\dfrac{\beta(\alpha b-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$,

де $\alpha=7.31$, $\beta=0.0761$, $a=234.36$, $b=81.26$.

ВАРІАНТ №21

1) $X=\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, де $a=7.27(\pm 0.01)$, $b=5.205(\pm 0.002)$, $c=87.32(\pm 0.03)$.

2) $Y=\left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$, де $a=2.13(\pm 0.01)$, $b=22.16(\pm 0.03)$, $c=6.3(\pm 0.04)$, $m=16.825(\pm 0.004)$, $n=8.13(\pm 0.002)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}:\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $a=5.813$, $b=1.315$, $h=2.56$.

ВАРІАНТ №22

1) $X=\dfrac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, де $a=186.7(\pm 0.04)$, $b=66.6(\pm 0.02)$, $c=72.3(\pm 0.03)$.

2) $Y=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, де $a=11.8(\pm 0.02)$, $b=7.4(\pm 0.03)$, $m=5.82(\pm 0.005)$, $c=26.7(\pm 0.03)$, $d=11.234(\pm 0.004)$.

3) $P=\dfrac{(a+b)h^3}{4}+\dfrac{(a+b)h}{12}$, де $a=9.05$, $b=3.244$, $h=20.18$.

ВАРІАНТ №23

1) $X=\dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, де $a=7.312(\pm 0.004)$, $b=18.4(\pm 0.03)$, $c=20.2(\pm 0.08)$.

2) $Y=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, де $a=4.523(\pm 0.003)$, $b=10.8(\pm 0.02)$, $m=0.85(\pm 0.003)$, $c=9.318(\pm 0.002)$, $d=4.17(\pm 0.004)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{(a^2+b^2)\cdot h}{5}$, де $a=0.445$, $b=0.4834$, $h=0.87$.

ВАРІАНТ №24

1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$, де $a = 0.327(\pm 0.005)$, $b = 3.147(\pm 0.0001)$, $c = 1.78(\pm 0.001)$.

2) $Y = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, де $a = 32.37(\pm 0.03)$, $b = 2.35(\pm 0.001)$, $c = 128.7(\pm 0.02)$, $d = 27.3(\pm 0.04)$, $m = 0.93(\pm 0.001)$.

3) $V = \dfrac{h}{3} \cdot S \cdot \left(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2}\right)$, де $a = 7.28$, $A = 11.71$, $S = 21.8$, $h = 5.31$.

ВАРІАНТ №25

1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$, де $a = 0.258(\pm 0.0002)$, $b = 3.45(\pm 0.001)$, $c = 7.221(\pm 0.003)$.

2) $Y = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, де $a = 12.31(\pm 0.004)$, $b = 1.73(\pm 0.03)$, $c = 3.7(\pm 0.02)$, $m = 17.428(\pm 0.003)$, $n = 41.7(\pm 0.01)$.

3) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$, де $h = 32.5$, $a = 27.51$, $b = 21.78$.

ЗАВДАННЯ № 2

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

ЦІЛЬ РОБОТИ: Вивчення теоретичного матеріалу: інтерполяція та апроксимація функцій, поліном Лагранжа, інтерполяційна формула Ньютона, інтерполяція сплайнами.

Одержання практичних навичок у використанні вбудованих функцій пакета MatLab, а також написанні програм, які використовуються для інтерполяції та апроксимації функцій.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. У чому полягає задача інтерполяції?
2. Яким умовам повинна задовольняти інтерполююча функція?
3. У чому полягає метод Лагранжа? Чому многочлен Лагранжа є інтерполюючою функцією?
4. У чому полягає метод Ньютона? Чому многочлен Ньютона є інтерполюючою функцією?
5. Який максимальний степінь інтерполяційного многочлена, побудованого на 9 вузлах інтерполяції?
6. Як можуть розташовуватися вузли інтерполяції при побудові інтерполяційного многочлена Лагранжа?
7. Як повинні розташовуватися вузли інтерполяції при побудові інтерполяційного многочлена Ньютона?
8. Як обчислюються кінцеві різниці? Як змінюються кінцеві різниці при збільшенні порядку?
9. Якого степеня інтерполяційний многочлен Ньютона можна побудувати по 10 вузлових точках, якщо кінцеві різниці 5-го порядку практично дорівнюють нулю?
10. Як визначається похибка інтерполяції?
11. Якими стандартними функціями представлена інтерполяція в системі Matlab?
12. В чому полягає задача апроксимації?
13. В чому полягає метод найменших квадратів?
14. Якими стандартними функціями представлена апроксимація в системі Matlab?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Постановка задачі інтерполяції

Нехай функція $y = f(x)$ задана у вигляді таблиці:

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

тобто на відрізку $[a, b]$ в $n+1$ точці $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ відомі значення:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots \quad , \quad y_n = f(x_n),$$

точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ називають *вузлами інтерполяції*, а $y_0, y_1, \dots, y_n$ – *значеннями функції у вузлах*.

Задача інтерполяції полягає у знаходженні значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в точці $x \in [a, b]$, що не збігається с заданими вузловими точками.

Для розв'язання завдання інтерполяції треба побудувати інтерполяційну *функцію* $y = F(x)$, таку що :

1) належить класу безперервних функцій;
2) приймає в заданих вузлових точках x_i значення $F(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$ задані в таблиці.

Тоді значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в деякій точці $x \in [a, b]$ вважають приблизно рівним значенню інтерполяційної функції $f(x) \approx F(x)$ у цій точці .

Інтерполяційну функцію звичайно шукають серед многочленів $P_n(x)$, *степінь яких не перевищує числа* n вважаючи, що в таблиці заданий $n+1$ вузол. Многочлен $P_n(x)$, що приймає у вузлових точках значення $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$ задані в таблиці, називають *інтерполяційним многочленом* для функції $y = f(x)$.

Заміна функції її інтерполяційним многочленом $f(x) \approx P_n(x)$ при $x \in [a, b]$ називається *інтерполяцією функції*. Звичайно, при цьому виникає питання про оцінку похибки такої заміни.

Геометричний зміст інтерполяції полягає в зображенні функції $y = f(x)$ у вигляді параболи $y = P_n(x)$ степені n, що проходить через задані в таблиці точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$...

Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай функція представлена у вигляді таблиці

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Для зручності припустимо, що $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Побудуємо інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ степені n, що має в заданих $n+1$ вузлах інтерполяції ті ж значення, що й задана функція

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_n(x, x_i) \cdot y_i = L_n(x, x_0) \cdot y_0 + L_n(x, x_1) \cdot y_1 + \dots + L_n(x, x_n) \cdot y_n =$$

$$= \frac{(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} \cdot y_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})} \cdot y_n$$

Це *інтерполяційний многочлен Лагранжа*, який є розв'язком задачі інтерполяції, тому що є многочленом степеня n, що приймає у вузлових точках задані в таблиці значення $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$.

Многочлен Лагранжа можна записати у вигляді, що є більш зручним для програмування:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \cdot y_i$$

Інтерполяційний многочлен Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею.

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими із кроком h, тобто для кожного $i = \overline{1, n}$ $\quad x_i - x_{i-1} = h$. Виходячи із цього отримаємо $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, $\quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh \dots$

Розглянемо многочлен степеня n, записаний у вигляді

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Це буде перша інтерполяційна формула Ньютона. Інтерполяційний многочлен Ньютона має степінь n, але на відміну від многочлена Лагранжа степені його членів постійно підвищуються, починаючи від нульової до n-ої.

Тому додавання нового вузла інтерполяції дасть лише новий доданок у формулу Ньютона, але не змінить всіх попередніх.

Інтерполяція сплайнами

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблично :

$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n, \quad y_i = f(x_i) \quad i = 0, ..., n.$

Кубічною сплайн-інтерполяцією називається функція $\varphi(x)$ така, що

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n, \\ \varphi'(x_i - 0) = \varphi'(x_i + 0), \varphi''(x_i - 0) = \varphi''(x_i + 0) \quad i = 1, ..., n-1 \\ \varphi''(x_0) = 0, \ \varphi''(x_n) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

і $\varphi(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in (x_{i-1}, \ x_i)$

Величини коефіцієнтів *a, b, c, d* знаходять із системи рівнянь (1).

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Для роботи з математичним пакетом MatLab необхідно отримати деякі початкові навички, що описані у Додатку 1. Після цього розв’яжемо задачу інтерполяції і задачу апроксимації функції за допомогою засобів пакету MatLab.

1. Інтерполяція функцій у середовищі MatLab

Система пропонує досить великий набір методів побудови інтерполяційних функцій.

Функція **spline(X,Y,Z)** виконує інтерполяцію Y=Y(X) кубічним сплайном і отримує відповідні значення у точках Z. Для отримання більшої інформації використовується конструкція **pp=spline(X,Y):** тут наступною командою **V=ppval(pp,Z)** можна знайти значення в точках Z.

Функції **interp1(X,Y,Z), interp1(X,Y,Z,’method’)** забезпечують одномірну табличну інтерполяцію для Y=Y(X) на масиві значень Z (якщо Y містить кілька стовпців, інтерполяція ведеться по кожному стовпцю; значення Z повинні входити в діапазон значень X). Можна вказувати метод інтерполяції – кусково-лінійної (*linear*, за умовчуванням), ступінчату (*nearest* - інтерполяція по сусідніх точках - це метод побудови кускової функції, при якому значення в будь-якій точці дорівнює значенню в найближчій вузловій точці), кубічної (*cubic*), кубічними сплайнами (*spline*).

Є можливість простої реалізації двовимірної табличної інтерполяції *Y=Y(X1,X2)* функціями **interp2(X1,X2,Y,Z1,Z2), interp2(X1,X2,Y,Z1,Z2,’method’)** або **griddata(X1,X2,Y,Z1,Z2), griddata(X1,X2,Y,Z1,Z2, ’method’)** для нерівномірної сітки, тривимірної інтерполяції *Y=Y(X1,X2,X3)* – **interp3(X1,X2,X3,Y,Z1,Z2, Z3), interp3(...,**

’method’), багатомірної інтерполяції *Y=Y(X1,X2,...)* - **interpn (X1,X2,..,Y, Z1,Z2,..), interp3(..., ’method’).** Значення аргументу для вихідних таблиць повинні змінюватися монотонно і задаватися в спеціальному форматі функції meshgrid.

Зразок оформлення практичного завдання

Побудувати графік інтерполюючої функції, вузли інтерполяції відзначити на графіку.

Обчислити значення функції в трьох точках, що не збігаються з вузловими (точки вибрати довільно із заданого інтервалу).

Варіант № 26

26,0	-0,00133
26,1	0,643412
26,2	1,250753
26,3	1,757043
26,4	2,106558
26,5	2,257585
26,6	2,187247
26,7	1,894532
26,8	1,401147
26,9	0,750042

1) Сплайн-інтерполяція в системі MATLAB:

Побудуємо інтерполяційну функцію за допомогою функції spline.

У командному вікні:

```
>> x=[26.0:0.1:26.9]
x =  26.0000   26.1000   26.2000   26.3000   26.4000   26.5000   26.6000
      26.7000   26.8000   26.9000
>> y=[-0.00133 0.643412 1.250753 1.757043 2.106558 2.257585 2.187247 1.894532 1.401147 0.750042] % Визначаємо експериментальні значення
y = -0.0013    0.6434    1.2508    1.7570    2.1066    2.2576    2.1872
      1.8945    1.4011    0.7500
>> xl=26:0.01:27; % Ущільнюємо масив x для побудови графіка
```

>> y1=spline(x,y,xl) % Знайдемо значення інтерполяційної функції за допомогою функції spline

y1 = -0.0013 0.0630 0.1275 0.1921 0.2569 0.3217 0.3864 0.4510 0.5154 0.5795 0.6434 0.7069 0.7700 0.8325 0.8945 0.9558 1.0165 1.0763 1.1354 1.1936 1.2508 1.3069 1.3620 1.4160 1.4687 1.5202 1.5704 1.6193 ...

... 1.0264 0.9591 0.8906 0.8209 0.7500 0.6781 0.6051 0.5310 0.4560 0.3801 0.3034 0.2258 0.1474 0.0683 -0.0114

>> plot(x,y,'o',xl,y1,'-g') % Побудуємо графік інтерполяційної функції

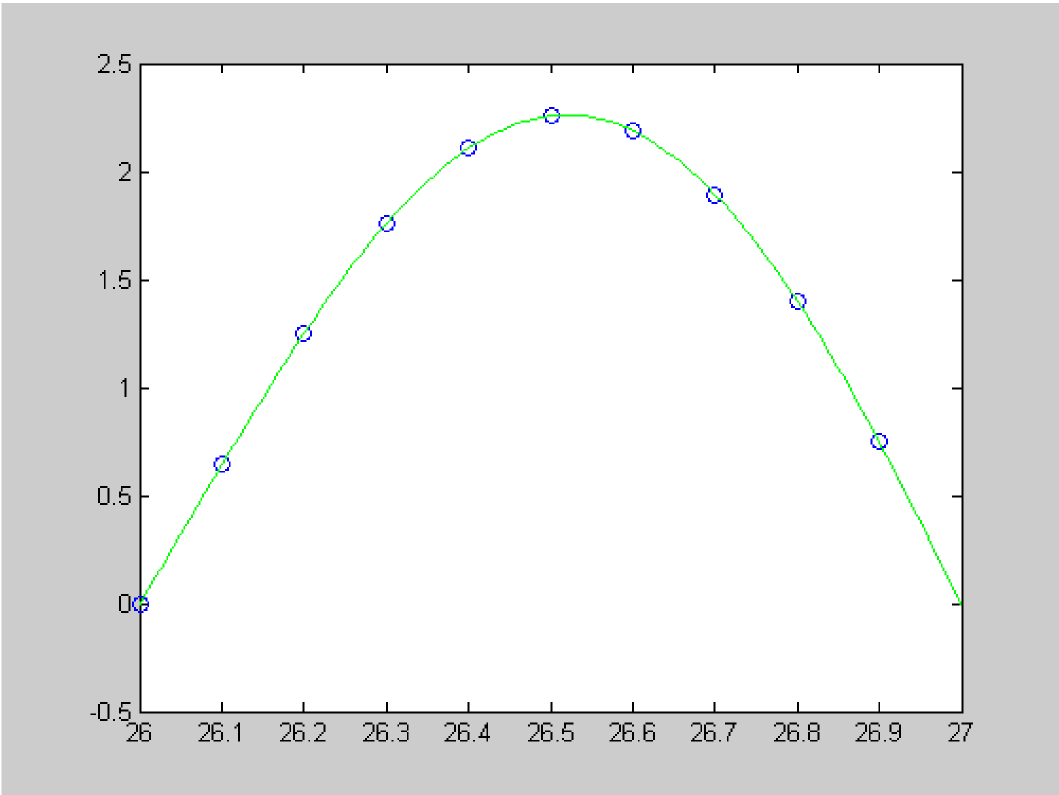


Рис.1 – Графік інтерполяційної функції, отриманої за допомогою функції spline

2) Побудуємо інтерполяційну функцію за допомогою функції interpl. Обчислимо значення функції в трьох точках, що не збігаються з вузловими (точки виберемо довільно із заданого інтервалу).
У командному вікні:

% Визначаємо експериментальні значення
>> X=[26.0:0.1:26.9]

```
>> Y=[-0.00133 0.643412 1.250753 1.757043 2.106558 2.257585 2.187247
1.894532 1.401147 0.750042]
>>n=length(X)  % Обчислюємо кількість експериментальних точок
n =    10
>>t=[26.25 26.51 26.86]; %Визначаємо точки, у яких треба обчислити значення
>>xi=[X(l):0.02:x(length(X)]; % Ущільнюємо масив х для побудови графіка
 % Обчислюємо очікувані значення функції трьома способами в точках xi:

>>yin=interp1 (X,Y,xi, 'nearest') ;
>>yil=interp1(X,Y,xi, 'linear') ;
>>yis=interp1(X,Y,xi, 'spline');

 % Обчислюємо очікувані значення функції трьома способами в точках, заданих в
умові: t1= 26.25, t2 = 26.51, t3= 26.86
>>ytn=interp1(X,Y,t,'nearest')
ytn =     1.7570    2.2576    0.7500
>>ytl=interp1(X,Y,t,'linear')
ytl =     1.5039    2.2506    1.0105
>>yts=interp1(X,Y,t, 'spline');
yts =    1.5202    2.2607    1.0264
>>plot(X,Y,'bo', xi, yin,'-r', xi,yil,':c',xi,yis,'-m', t,ytn,'x',t,yts, '*'); % Побудова графіків
функцій
```

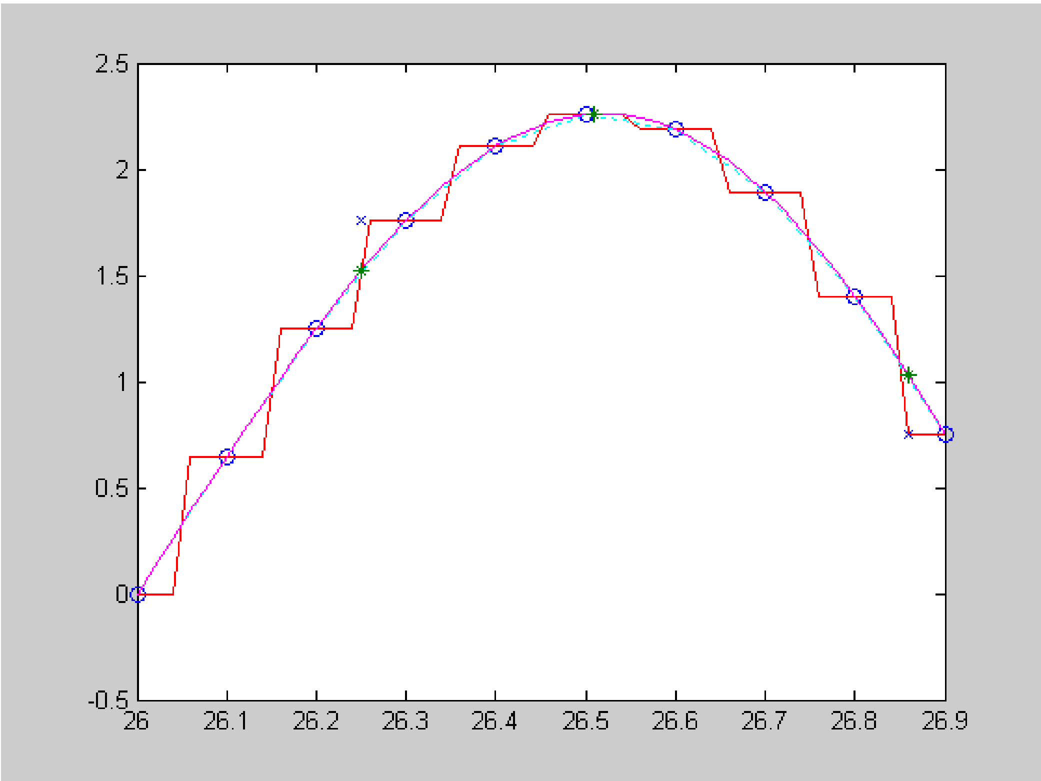


Рис.2 – Графік інтерполяційної функції, отриманої за допомогою функції interpl

2. Апроксимація функцій у середовищі MatLab

Апроксимацією називають функціональну залежності даних, представлених у табличному вигляді. Апроксимуюча функція не обов'язково повинна проходити через всі задані точки.

Одна з найбільш відомих апроксимацій - поліноміальна. У системі MatLab визначені функції апроксимації даних поліномами по методу найменших квадратів.

Нехай $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ - послідовність лінійно-незалежних функцій на [a,b]. Апроксимуючу функцію $\hat{f}(x)$ будемо представляти у вигляді:

$\hat{f}(x) = c_1\,\varphi_1(x) + c_2\,\varphi_2(x) + \ldots + c_n\,\varphi_n(x)$,

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - невідомі параметри.

Тоді, відповідно до методу найменших квадратів, функціонал J, що є сумою квадратів відхилень функцій $f(x)$ і $\hat{f}(x)$ в заданих точках, запишеться у вигляді:

$$J = \sum_{t=1}^{n}\left[f(x_t) - \hat{f}(x_t)\right]^2$$

Параметри $c_1, c_2, \ldots, c_n$ будемо вибирати з умови мінімуму цього функціонала, тобто

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0, \quad j=1,n.$$

Для розв’язання задачі апроксимації використовують наступні функції:

1. Polyfit — дозволяє з найменшою середньоквадратичною похибкою апроксимувати функцію $f(x)$. Результатом її роботи є коефіцієнти полінома в порядку зменшення степенів змінної.
2. Polyval – дозволяє одержати масив значень полінома $p(x)$ для кожного елемента масиву x.

Зразок оформлення практичного завдання

Побудувати графік апроксимуючої функції, вузли апроксимації відзначити на графіку.

1) Апроксимація функції поліномом першого степеня.

polifit(X,Y,n) - апроксимація функції Y=Y(X) поліномом n-го степеня:

```
>> X=[26.0:0.1:26.9]
>> Y=[-0.00133 0.643412 1.250753 1.757043 2.106558 2.257585 2.187247 1.894532 1.401147 0.750042]
```

```
>> P=polyfit(X,Y,1)
```

P = 1.0138 -25.3892   % P(x)= 1.0138 x -25.3892 - коефіцієнти полінома в порядку зменшення степенів змінної

>> FF=polyval(P,X) % масив значень полінома $p(x)$ для кожного елемента масиву x

FF = 0.9685 1.0699 1.1713 1.2726 1.3740 1.4754 1.5768 1.6781 1.7795 1.8809

```
>> plot(X,Y,'ob', X,FF,'-g'),grid,axis([26 27 -0.1 3])
```

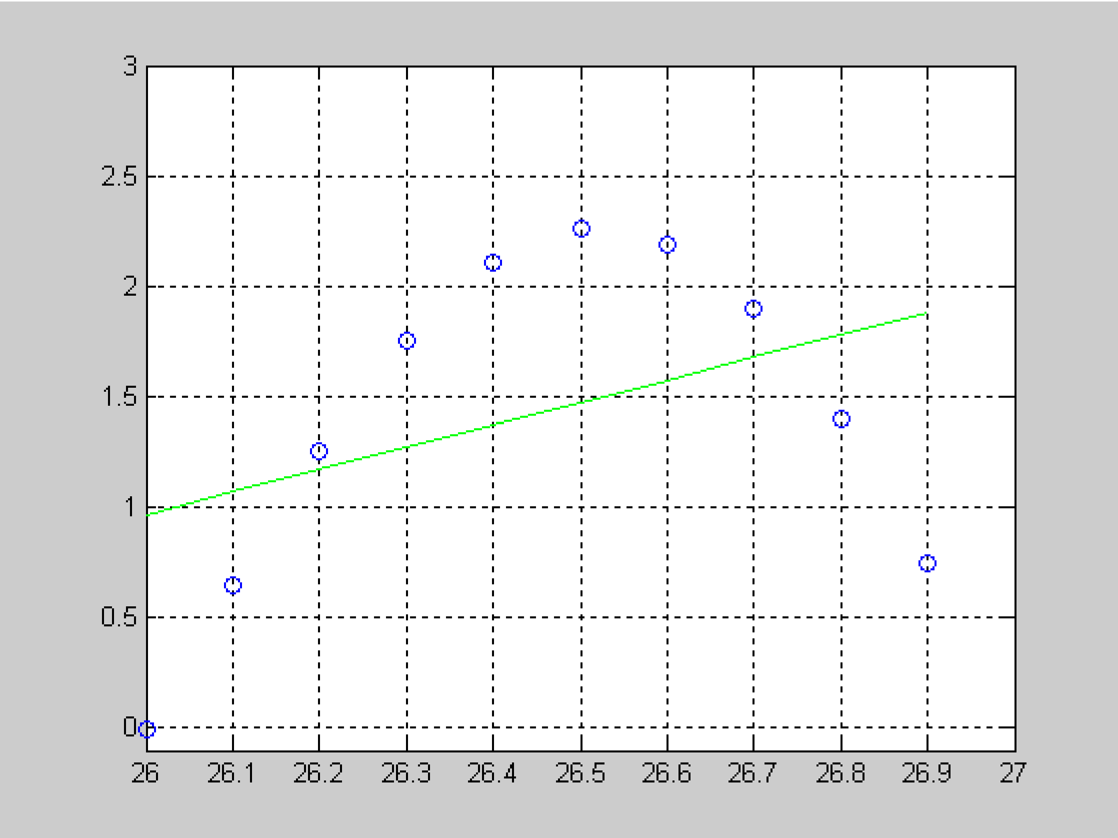


Рис. 3 - Графік апроксимуючої функції (апроксимація поліномом першого степеня)

2) Апроксимація таблично заданої функції поліномом другого степеня.

```
>> X=[26.0:0.1:26.9]
```

```
>> Y=[-0.00133 0.643412 1.250753 1.757043 2.106558 2.257585 2.187247 1.894532 1.401147 0.750042]
```

```
>> P=polyfit(X,Y,2)
```

P = 1.0e+003 *
-0.0090   0.4790   -6.3458 % P(x)=   -0.0090 x^2 + 0.4790 x -6.3458   - коефіцієнти полінома в порядку зменшення степенів змінної
>> FF=polyval(P,X) % масив значень полінома $p(x)$ для кожного елемента масиву x
FF =   -0.1157   0.7085   1.3520   1.8148   2.0968   2.1982   2.1189
1.8588   1.4181   0.7966
>> plot(X,Y,'ob', X,FF,'-g'),grid,axis([26 27 -0.1 3])

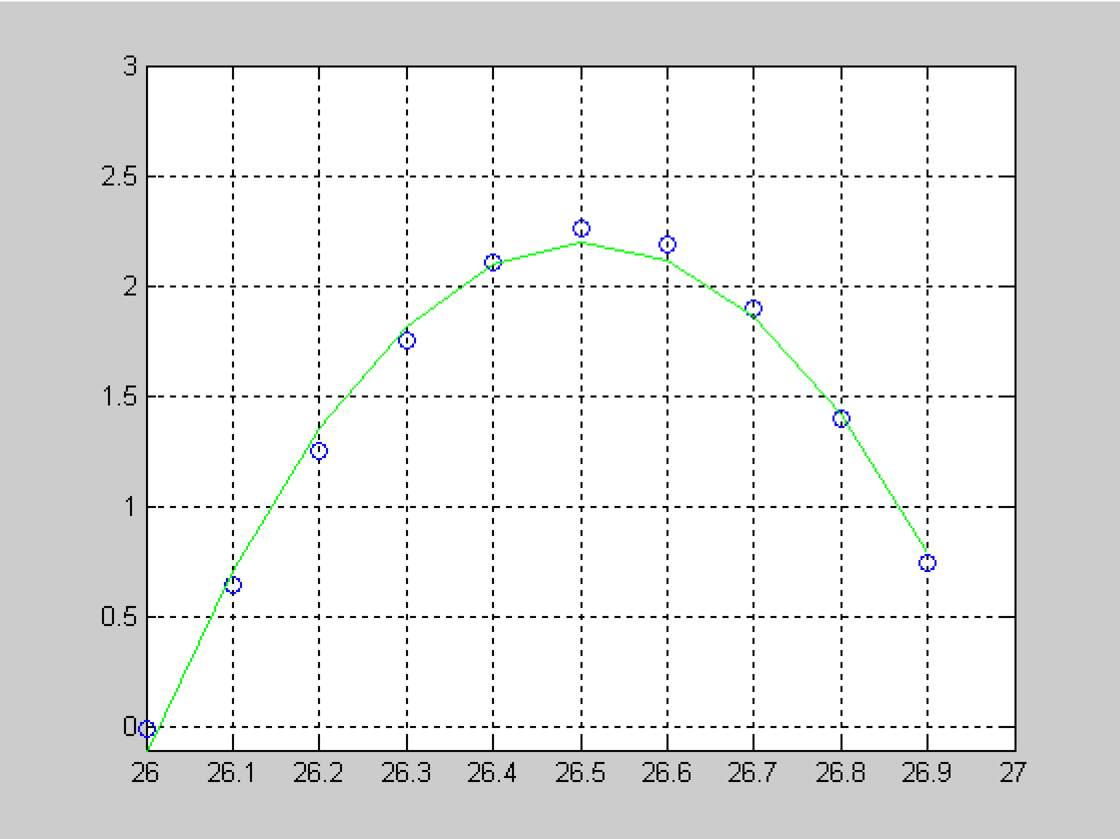


Рис. 4 - Графік апроксимуючої функції
(апроксимація поліномом другого степеня)

ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ.

Нехай функція задана таблично своїми значеннями у вузлах інтерполяції.

x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_0	y_1	y_2	…	y_n

Побудувати графік інтерполюючої функції, вузли інтерполяції відзначити на графіку.

Обчислити значення функції в трьох точках, що не збігаються з вузловими (точки вибрати довільно із заданого інтервалу).

Побудувати графік апроксимуючої функції, вузли апроксимації відзначити на графіку.

Варіант вибрати з наступної таблиці.

Наприклад, для варіанта № 12 вибираємо вузли від 12,0 до 12,9 і відповідні їм значення функції.

Варіанти завдань

x	y(x)	x	y(x)	x	y(x)	x	y(x)
1,0	0	4,0	0,000196	7,0	0,00018	10,0	0,000108
1,1	0,324097	4,1	-5,19505	7,1	0,856485	10,1	-1,02845
1,2	0,643881	4,2	-10,3689	7,2	1,640842	10,2	-1,96638
1,3	0,922415	4,3	-14,959	7,3	2,27459	10,3	-2,72032
1,4	1,1253	4,4	-18,4126	7,4	2,692863	10,4	-3,21408
1,5	1,224745	4,5	-20,25	7,5	2,851227	10,5	-3,3964
1,6	1,20301	4,6	-20,1243	7,6	2,730379	10,6	-3,24618
1,7	1,054847	4,7	-17,8711	7,7	2,338403	10,7	-2,77495
1,8	0,788625	4,8	-13,5425	7,8	1,710348	10,8	-2,02598
1,9	0,425989	4,9	-7,41942	7,9	0,905108	10,9	-1,07035
2,0	$4{,}62\cdot10^{-5}$	5,0	0	8,0	$-9{,}6\cdot10^{-5}$	11,0	-0,00023
2,1	-0,44776	5,1	8,037451	8,1	-0,91714	11,1	1,080087
2,2	-0,87178	5,2	15,89357	8,2	-1,75557	11,2	2,064282
2,3	-1,2269	5,3	22,72513	8,3	-2,43156	11,3	2,854531
2,4	-1,47335	5,4	27,73269	8,4	-2,8763	11,4	3,37121
2,5	-1,58114	5,5	30,25	8,5	-3,04297	11,5	3,560925
2,6	-1,53356	5,6	29,82532	8,6	-2,91168	11,6	3,402017
2,7	-1,3294	5,7	26,2854	8,7	-2,49175	11,7	2,90698
2,8	-0,98363	5,8	19,77381	8,8	-1,82115	11,8	2,121544
2,9	-0,52634	5,9	10,75785	8,9	-0,96308	11,9	1,120452

3,0	-0,00011	6,0	0,001176	9,0	-10^{-13}	12,0	0,000357
3,1	0,543966	6,1	-11,4973	9,1	0,97427	12,1	-1,12952
3,2	1,051358	6,2	-22,5932	9,2	1,863736	12,2	-2,15806
3,3	1,469572	6,3	-32,1089	9,3	2,579679	12,3	-2,98314
3,4	1,753617	6,4	-38,9547	9,4	3,049516	12,4	-3,52184
3,5	1,870829	6,5	-42,25	9,5	3,224158	12,5	-3,71872
3,6	1,804553	6,6	-41,4287	9,6	3,083118	12,6	-3,55153
3,7	1,556275	6,7	-36,3182	9,7	2,636854	12,7	-3,03371
3,8	1,145949	6,8	-27,1814	9,8	1,926069	12,8	-2,21331
3,9	0,610438	6,9	-14,7151	9,9	1,01801	12,9	-1,16858
13,0	-0,00055	16,3	-1,86182	19,6	1,29113	22,9	-0,87009
13,1	0,447264	16,4	-2,20969	19,7	1,142726	23,0	-0,00046
13,2	0,871348	16,5	-2,34521	19,8	0,86201	23,1	0,309544
13,3	1,226577	16,6	-2,25098	19,9	0,46989	23,2	0,591083
13,4	1,473176	16,7	-1,93222	20,0	0,000974	23,3	0,816324
13,5	1,581139	16,8	-1,41658	20,1	-0,49956	23,4	0,962789
13,6	1,533737	16,9	-0,7518	20,2	-0,98043	23,5	1,015605
13,7	1,329751	17,0	-0,00128	20,3	-1,38957	23,6	0,969005
13,8	0,984119	17,1	0,761981	20,4	-1,67979	23,7	0,826959
13,9	0,526919	17,2	1,462508	20,5	-1,8141	23,8	0,602835
14,0	0,000735	17,3	2,029831	20,6	-1,77023	23,9	0,318152
14,1	-0,54336	17,4	2,405585	20,7	-1,54364	24,0	0,000505
14,2	-1,05084	17,5	2,549509	20,8	-1,14883	24,1	-0,3191
14,3	-1,46919	17,6	2,443738	20,9	-0,6186	24,2	-0,60929
14,4	-1,75341	17,7	2,094918	21,0	-0,00133	24,3	-0,84138
14,5	-1,87083	17,8	1,533913	21,1	0,643412	24,4	-0,99223
14,6	-1,80476	17,9	0,8131	21,2	1,250753	24,5	-1,04654
14,7	-1,55668	18,0	0	21,3	1,757043	24,6	-0,99841
14,8	-1,14651	18,1	-0,06906	21,4	2,106558	24,7	-0,85196
14,9	-0,61111	18,2	-0,20633	21,5	2,257585	24,8	-0,62099
15,0	-0,00091	18,3	-0,36975	21,6	2,187247	24,9	-0,32771
15,1	0,624825	18,4	-0,52416	21,7	1,894532	25,0	-0,00055
15,2	1,203832	18,5	-0,63728	21,8	1,401147	25,1	0,328549
15,3	1,677044	18,6	-0,68247	21,9	0,750042	25,2	0,627288
15,4	1,994648	18,7	-0,64188	22,0	0,001688	25,3	0,866148

15,5	2,12132	18,8	-0,50883	22,1	-0,77156	25,4	1,021332
15,6	2,040105	18,9	-0,28908	22,2	-1,49251	25,5	1,077122
15,7	1,754519	19,0	-0,00059	22,3	-2,08686	25,6	1,027476
15,8	1,288629	19,1	0,328168	22,4	-2,49087	25,7	0,876673
15,9	0,685062	19,2	0,661197	22,5	-2,6582	25,8	0,638952
16,0	0,001095	19,3	0,95903	22,6	-2,56506	25,9	0,337172
16,1	-0,6968	19,4	1,183327	22,7	-2,21332		
16,2	-1,33944	19,5	1,301545	22,8	-1,63099		

ЗАВДАННЯ № 3

Ціль роботи

Ознайомитися із чисельними методами розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і їх систем. Одержати чисельний та графічний розв'язок диференціальних рівнянь та їх систем у середовищі MS Excel. Реалізувати наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь за допомогою математичного пакета MATLAB. Порівняти результати, отримані засобами MS Excel і MATLAB.

Теоретична підготовка до виконання курсової роботи

Методичні вказівки:

1. Вивчити наступні теми: найпростіші методи розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння: метод Ейлера, модифікований метод Ейлера, метод Рунге-Кутта.

2. **Загальні відомості. Постановка задачі**

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення, що зв'язує між собою незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ і її першу похідну $y'(x)$

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

або рівняння, розв'язане відносно похідної,

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку означає знайти таку функцію $y = y(x)$, при підстановці якої в рівняння виходить вірна тотожність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається однопараметрична множина функцій $y = \varphi(x, C)$, що задовольняють умовам:

1) кожному числовому значенню параметра *C* відповідає частковий розв'язок диференціального рівняння;
2) кожний частковий розв'язок знаходиться в загальному при певному числовому значенні параметра С.

Задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку називається задача знаходження розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ при заданній начальній умові $y(x_0) = y_0$.

Розв'язком задачі Коші вважається функція $y = y(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння, графік якої проходить через точку з координатами (x_0, y_0).

Системою диференціальних рівнянь першого порядку називається система рівнянь виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Розв'язати систему диференціальних рівнянь означає знайти такі функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, при підстановці яких кожне рівняння системи звертається у вірну тотожність.

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь першого порядку називається n-параметрична множина функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, …, $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, що задовольняють умовам:

1) кожному набору числових значень параметрів відповідає n функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, що представляють собою частковий розв'язок системи диференціальних рівнянь;
2) кожний частковий розв'язок втримується в загальному при певному наборі числових значень параметрів.

Задачею Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку називається задача знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

при заданих початкових умовах $y_1(x_0) = a_1$, $y_2(x_0) = a_2, \ldots,$ $y_n(x_0) = a_n$.

Розв'язком задачі Коші вважається n функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, що є розв'язком системи диференціальних рівнянь і задовольнять початкові умови $y_1(x_0) = a_1$, $y_2(x_0) = a_2$, …, $y_n(x_0) = a_n$.

При розв'язанні диференціального рівняння n-го порядку чисельними методами варто перетворити його у відповідну систему диференціальних рівнянь першого порядку.

При розв'язанні задачі Коші для диференціальних рівнянь і їх систем на практиці в основному застосовуються чисельні методи, які дозволяють знайти розв'язок у вигляді таблиці наближених значень функції $y = y(x)$.

Метод Ейлера для розв'язання диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо задачу знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ при заданій початковій умові $y(x_0) = y_0$ на відрізку $[a; b]$.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних часткових відрізків, довжина яких $h = \dfrac{b-a}{n}$. Число h називається *кроком інтегрування.* Наближені значення шуканої функції $y = y(x)$ визначаються в точках розподілу $x_0 = a,\quad x_i = x_0 + i \cdot h,\quad (i = \overline{1, n}),\quad x_n = b$.

Метод Ейлера є найбільш простим з усіх методів чисельного розв'язку диференціальних рівнянь. Геометрично він полягає в тому, що на малому відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння заміняється відрізком її дотичної в точці $(x_i; y(x_i))$.

З'єднавши точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$, одержимо ламану, що приблизно представляє графік функції, що є рішенням диференціального рівняння із заданими початковими умовами. Цю ламану прийнято називати *ламаною Ейлера.* Ця ламана являє собою кусочно-лінійну функцію, що є наближеним розв'язком задачі на відрізку $[a; b]$

Алгоритм методу Ейлера.

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок розподілу відрізка $[a; b]$ на часткові та обчислимо крок інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$. Покладемо $k = 0$.

2. На k-ому кроці виконаємо обчислення по ітераційним формулам методу Ейлера

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h,$$
$$k = k + 1.$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення $y_0, y_1, \ldots, y_n$ представляють собою наближені значення шуканого розв'язку рівняння в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Обчислення за методом Ейлера доцільно оформляти у вигляді таблиці.

Похибку при заміні розв'язку $y = y(x)$ ламаною Ейлера, що обчислюється в точці x_n, має порядок $\frac{1}{n}$ або h. Тому, чим менше крок інтегрування h, тим краще наближене рішення представляє точне.

Модифікований метод Ейлера для диференціального рівняння першого порядку

Модифікація методу Ейлера полягає в тому, що на малому відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння заміняється відрізком прямої лінії, що проходить через точку $(x_i; y(x_i))$, але з кутовим коефіцієнтом, обумовленим з урахуванням поводження шуканої функції.

Алгоритм модифікованого методу Ейлера.

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального рівняння $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок розподілу відрізка $[a; b]$ на часткові й обчислимо крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Покладемо $k = 0$.

2. На k-ому кроці виконаємо обчислення по ітераційним формулам метода Ейлера

$\alpha_1 = f(x_k, y_k)$,

$\alpha_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$,

$y_{k+1} = y_k + \alpha_2 \cdot h$,

$x_{k+1} = x_k + h$,

$k = k + 1$.

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення $y_0, y_1, ..., y_n$ являють собою наближені значення шуканого рішення рівняння в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Відшукуючи наближений розв'зок задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку модифікованим методом Ейлера, ми на кожному кроці уточнюємо кутовий коефіцієнт ланок ламаної лінії та одержуємо розв'зок точніше, ніж за методом Ейлера. Похибка має порядок $\frac{1}{n^3}$ на кожному кроці. Однак з кожним кроком відбувається нагромадження похибки, і в точці $x_n = b$ похибка уже буде мати порядок $\frac{1}{n^2}$.

Метод Рунге-Кутта

Геометрично цей метод для задачі Коші також полягає в тому, що на малому відрізку $[t, t+h]$ інтегральна крива $y = y(t)$ рівняння $y' = f(t, y)$ заміняється відрізком прямої, що проходить через точку $(t, y(t))$. Однак в основу методу покладений більш тонкий, ніж у методах Ейлера, підхід до визначення напрямку цього відрізка прямій.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

$$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n), \qquad k_2 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3)$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 – напрямки дотичних до інтегральної кривої.

Реалізація методів розв'язку ОДУ в середовищі MatLab

В системі MatLab передбачені спеціальні засоби розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, заданих як у явній формі $\frac{dx}{dt} = F(t, x)$, так і в неявній $M\frac{dx}{dt} = F(t, x)$ (де М– матриця), – т.н. т.зв. розв'язувач ОДУ (solver ODE), що забезпечує користувачеві можливість вибору методу, завдання початкових умов і ін.

У найпростішому варіанті досить скористатися командою [T,X]=solver('F', [DT], X0, ...), де DT - діапазон інтегрування, X0 - вектор початкових значень, F - ім'я функції обчислення правих частин системи, solver - ім'я використовуваної функції (ode45 - метод Рунге-Кутта 4 і 5-го порядків, ode23 - той же метод 2 і 3-го порядків, ode113 - метод Адамса - для нежорстких систем, ode23s, ode15s - для жорстких систем і ін.).

Версії розв'язувача розрізняються використовуваними методами (за замовчуванням відносна похибка 10^{-3} і абсолютна 10^{-6}) і відповідно часом і успішністю розв'язування. Под жорстокістю тут розуміється підвищена вимога до точності - використання мінімального кроку на всій області інтегрування. Якщо діапазон DT заданий початковим і кінцевим значенням $[t_0, t_k]$, то кількість елементів у масиві T (і в масиві розв'язків X) визначається необхідним для забезпечення точності кроком; при завданні DT у вигляді $[t_0, t_1, t_2, ..., t_k]$ або $[t_0 : Dt : t_k]$ - зазначеними значеннями.

Практична підготовка до виконання курсової роботи

ЧАСТИНА 1

Чисельне і графічне розв'язання диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MS EXCEL

Завдання 1. *Одержати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданого диференціального рівняння при різних значеннях параметра, що входить у рівняння.*

Нехай задане диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad x(t_0) = x_0 .$$

де a – параметр, що приймає будь-які дійсні значення.

Чисельний розв'язок диференціального рівняння одержимо на проміжку $t \in [t_0, t_n]$, обчислюючи значення шуканої функції $x_k = x(t_k)$ в точках $t_k = t_0 + kh$, $k = \overline{1, n}$ або $t_k = t_{k-1} + h$. Для цього скористаємося методом Эйлера, відповідно до якого чисельний розв'язок диференціального рівняння одержимо за формулами

$$t_{k+1} = t_k + h, \qquad x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k), \qquad k = \overline{0, n-1},$$

де $f(t_k, x_k) = ax_k$ для даного рівняння.

Нехай $a = -2$; $t_0 = 0{,}0$; $x_0 = 1{,}5$; $h = 0{,}1$; $n = 20$.

Чисельний розв'язок представимо у вигляді таблиці (Рис.1.1 а).

a)

Численное решение дифференциального уравнения				
h	k	t_k	x_k	a
0,1	0	0	1,5	-2
0,1	1	0,1	1,2	-2
0,1	2	0,2	0,96	-2
0,1	3	0,3	0,768	-2
0,1	4	0,4	0,6144	-2
0,1	5	0,5	0,49152	-2
0,1	6	0,6	0,393216	-2
0,1	7	0,7	0,3145728	-2
0,1	8	0,8	0,25165824	-2
0,1	9	0,9	0,201326592	-2
0,1	10	1	0,161061274	-2
0,1	11	1,1	0,128849019	-2
0,1	12	1,2	0,103079215	-2
0,1	13	1,3	0,082463372	-2
0,1	14	1,4	0,065970698	-2
0,1	15	1,5	0,052776558	-2
0,1	16	1,6	0,042221247	-2
0,1	17	1,7	0,033776997	-2
0,1	18	1,8	0,027021598	-2
0,1	19	1,9	0,021617278	-2
0,1	20	2	0,017293823	-2

б)

Численное решение дифференциального уравнения				
h	k	t_k	x_k	a
0,1	0	0	1,5	-2
0,1	1	=C4+A4	=D4+A4*E4*D4	-2
0,1	2	=C5+A5	=D5+A5*E5*D5	-2
0,1	3	=C6+A6	=D6+A6*E6*D6	-2
0,1	4	=C7+A7	=D7+A7*E7*D7	-2
0,1	5	=C8+A8	=D8+A8*E8*D8	-2
0,1	6	=C9+A9	=D9+A9*E9*D9	-2
0,1	7	=C10+A10	=D10+A10*E10*D10	-2
0,1	8	=C11+A11	=D11+A11*E11*D11	-2
0,1	9	=C12+A12	=D12+A12*E12*D12	-2
0,1	10	=C13+A13	=D13+A13*E13*D13	-2
0,1	11	=C14+A14	=D14+A14*E14*D14	-2
0,1	12	=C15+A15	=D15+A15*E15*D15	-2
0,1	13	=C16+A16	=D16+A16*E16*D16	-2
0,1	14	=C17+A17	=D17+A17*E17*D17	-2
0,1	15	=C18+A18	=D18+A18*E18*D18	-2
0,1	16	=C19+A19	=D19+A19*E19*D19	-2
0,1	17	=C20+A20	=D20+A20*E20*D20	-2
0,1	18	=C21+A21	=D21+A21*E21*D21	-2
0,1	19	=C22+A22	=D22+A22*E22*D22	-2
0,1	20	=C23+A23	=D23+A23*E23*D23	-2

Рис.1.1 – Чисельний розв’язок рівняння
а) – таблиця значень; б) – таблиця формул для обчислень

Сформуємо заголовок таблиці.

- *Виділимо комірку А1 и і введемо в неї заголовок таблиці "Чисельне рішення диференціального рівняння".* Заголовок буде розміщений в один рядок і займе *декілька комірок* справа від А1.
- *Сформуємо рядок заголовків таблиці. В комірку А3 введемо "h", в комірку В3 – "k", в С3 – "t_k". в D3 – "x_k".* Для набору нижніх індексів скористаємося командою **Формат⇨Комірки...,** виберемо вкладку *Шрифт* і встановимо прапорець *Підрядковий* у групі *Видозміна.*
- *Виділимо заповнені чотири комірки, і за допомогою відповідних кнопок панелі інструментів збільшимо розмір шрифту на 2 пт, вирівняємо по центру і застосуємо напівжирний стиль накреслення символів. Перевіримо відображення індексів, при необхідності внесемо зміни.*

Почнемо заповнення таблиці. Перший стовпець заповнимо однаковими даними, що відповідають кроку інтегрування.

В комірку A4 введемо величину кроку інтегрування h (у нашому прикладі це 0,1). Існує контроль правильності введення інформації в комірку. Якщо введена інформація сприймається програмою як текст, то він вирівнюється по лівому краю комірки. Якщо введена інформація сприймається програмою як число, то воно вирівнюється по правому краю комірки. Після цього можна форматувати вміст комірки.

- *Перевіримо правильность введенного числа в комірку A4.*

Далі заповнимо ряд нижніх комірок таким же числом. Набирати в кожній комірці те саме число нецікаво і нераціонально. У редакторі MS Word ми користувалися прийомом копіювати-вставити. MS Excel дозволяє ще більше спростити процедуру заповнення комірок однаковими даними.

- *Виділимо комірку A4, у якій розміщений крок інтегрування.* Виділена комірка облямована рамкою, у правому нижньому куті якої є маленький чорний квадратик - маркер заповнення. Якщо підвести покажчик миші до маркера заповнення, і в той момент, коли покажчик миші приймає форму чорного хрестика, зачепити його лівою кнопкою миші і протягнути на кілька комірок униз, то весь ряд виділених комірок заповниться даними, розташованими в першій комірці.
- *Заповнимо в такий спосіб значенням кроку інтегрування двадцять комірок, нижче комірки A4.*

У наступному стовпці помістимо числа від 0 до 20. І знову нам допоможе заповнити ряд маркер заповнення.

- *Уведемо в комірку B4 число 0, в комірку B5 число 1, виділимо обидві ці комірки і, ухопившись за маркер заповнення, простягнемо його вниз.* Відмінність від заповнення однаковими даними полягає в тому, що, виділивши дві комірки, ви указали правило, по якому варто заповнювати комірки, що залишилися. Маркер заповнення можна "протаскувати" не тільки вниз, але й нагору, уліво або вправо, у цих же напрямках розповсюджується і заповнення. Елементом заповнення може бути не тільки число, але й текст (день тижня, назва місяця).

У третьому стовпці помістимо значення аргументу $t_{k+1} = t_k + h$.

- *Уведемо в комірку C4 початкове значення аргументу* $t_0 = 0{,}0$.

У комірку C5 потрібно помістити формулу для обчислення k-го значення аргументу функції, що полягає в тому, що вміст кожної комірки стовпця, наприклад комірки C5, відрізняється від умісту попередньої комірки, наприклад комірки C4, на величину кроку інтегрування, що перебуває в комірці A4.

Всі формули починаються зі знака рівності.

Для того, щоб ввести формулу необхідно виділити комірку, у яку хочете помістити формулу, вибрати знак рівності і потім набрати саму формулу з посиланнями на відповідні комірки таблиці (не забудьте, що заголовки стовпців визначаються латинськими буквами, російські А, С, В, хоч і схожі на такі ж букви латинського алфавіту, але не є рівноцінною заміною).

- *Виділимо комірку С5 і наберемо в ній формулу = С4+А4 (не забудьте перейти на латиницю).* Можна не набирати з клавіатури адресу тої комірки, на яку робиться посилання. Набравши знак рівності, клацніть мишею по комірці С4 і в рядку формул з'явиться її адреса, потім продовжите набір формули. У цьому випадку нам не потрібно перемикатися на латиницю.
- *Повністю ввівши формулу, зафіксуємо її натисканням Enter, в комірці виявиться результат обчислення по формулі, а в Рядку формул сама формула.* Якщо ви неправильно набрали формулу, виправити її можна в Рядку формул, попередньо виділивши комірку.

Заповнимо аналогічною формулою весь стовпець таблиці.

- *Виділимо комірку С5 і заповнимо формулою ряд комірок, протягши маркер заповнення донизу.*
- *Виділимо комірку С8 і подивимося в Рядку формул, як виглядає формула, вона прийняла вигляд =С7+А7.* Помітимо, що посилання у формулі змінилися відносно зсуву самої формули, що відповідає умові задачі.

У наступний стовпець необхідно ввести формулу для знаходження відповідного значення функції $x_{k+1} = x_k + h \cdot ax_k$. У цій формулі значення параметра $a = -2$ змінюватися не повинне, тому в нашім прикладі сформуємо додатковий стовпець, який містить це значення.

- *Введемо в комірку Е3 "а", в комірку Е4 значення -2 і поширимо це значення на весь стовпець. Комірку Е3 отформатуємо як заголовок.*
- *Введемо в комірку D4 початкове значення* $x_0 = 1{,}5$.
- *Введемо в комірку D5 формулу* $= D4 + A4 * E4 * D4$.
- *Виділимо комірку D5 і заповнимо формулами нижні комірки, протягши донизу маркер заповнення.*

Правильність заповнення комірок числовими значеннями і формулами можна проконтролювати, якщо перейти в режим перевірки формул (Рис.1.1б), для цього треба виконати команду **Сервіс⇨Залежності формул⇨Режим перевірки формул.** Для повернення до звичайного режиму, тобто відображенню результатів обчислень, треба ще раз виконати зазначену команду.

Тепер даними заповнені всі комірки, залишається їх оформити. Всі стовпці однакової ширини, хоча й містять інформацію різного об'єму. Можна вручну (використовуючи мишу) змінити ширину окремих стовпців, а можна автоматично підігнати ширину.

- *Виділимо всі комірки таблиці, що містять дані без заголовка "Чисельне рішення диференціального рівняння" і виконаємо команду* **Формат⇨Стовпець⇨Автоподбір ширини.**

Настав час зайнятися заголовком таблиці "Чисельне рішення диференціального рівняння".

- *Виділите комірку А1 і застосуйте напівжирне накреслення символів до вмісту комірки.* Заголовок досить не естетично "вилазить" праворуч за межі нашої маленької таблички.

- *Виділимо п'ять комірок від А1 до Е1 і виконаємо команду* **Формат⇨Комірки...,** *потім виберемо вкладку Вирівнювання й установимо перемикачі в положення По центрі виділення (Горизонтальне вирівнювання) і Переносити за словами*. Це дозволить розташувати заголовок у кілька рядків і по центрі *виділеного блоку комірок*.

Таблицю майже привели до вигляду зразка. Якщо в цей момент виконати попередній перегляд за допомогою команди **Файл⇨ Попередній перегляд,** то виявиться, що залишається виконати обрамлення таблиці.

- *Виділимо таблицю (без заголовка) і виконаємо команду* **Формат⇨ Комірки...,** *виберемо вкладку Границя, визначимо стиль лінії й активізуємо перемикачі Зовнішні й Внутрішні*.

- *Виділимо блок комірок, приналежних до заголовка: від А1 до Е2 і, проробивши ті ж операції, установимо перемикач Зовнішні.* У цьому випадку виходить рамка навколо всіх виділених комірок, а не кожної.

- *Виконаємо перегляд і відкоригуємо обрамлення за зразком.*

У процесі виконання завдання в багатьох випадках зручніше користуватися *контекстним меню*, викликуваним натисканням правої клавіші миші. Так, для форматування комірок їх досить виділити, клацнути правою клавішею миші в той момент, коли покажчик миші перебуває усередині виділення й вибрати команду **Формат⇨Комірок...**, ми перейдемо до того ж діалогового вікна *Формат комірок*.

Редагувати вміст комірки (виправляти, змінювати дані) зовсім необов'язково в Рядку формул. *Якщо двічі клацнути*

Да и редактировать содержимое ячейки (исправлять, изменять данные) совсем необязательно в Строке формул. *Если дважды щелкнуть мишею по комірці, у ній з'явиться текстовий курсор, що дозволить зробити всі необхідні виправлення.*

Одержимо графічне подання знайденого чисельного розв'язку диференціального рівняння.

- *Запустимо Майстер діаграм одним зі способів: або вибираючи кнопку Майстер діаграм на панелі інструментів, або виконуючи команду меню* **Вставка⇨Діаграма…...**

- *Просуваючись по кроках з Майстром діаграм, виберемо тип діаграми: Графік (розвиток процесу в часі)*.

- На наступному кроці потрібно задати *Діапазон даних,* по яких буде будуватися діаграма. *Для цього наприкінці рядка Діапазон натиснемо на кнопку Джерело даних. При цьому з'явиться окремий рядок Джерело даних.*

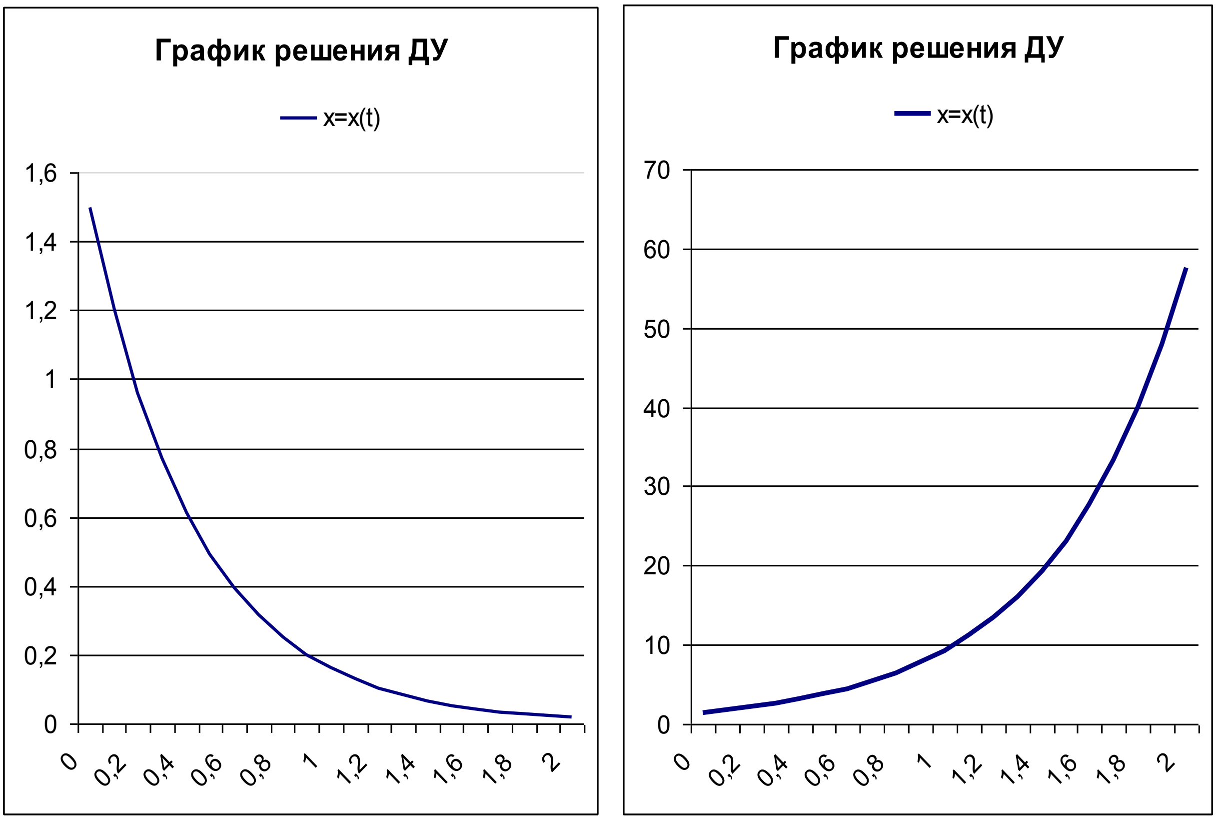
- *Виділимо заповнені даними комірки таблиці D4 – D24, що ставляться до стовпця* x_k *. У рядку Джерело даних з'являться адреси виділених комірок.*

- *Натискаючи на кнопку наприкінці рядка Джерело даних, можна повернутися до Майстра діаграм***.** Перевіримо, що діапазон даних обраний правильно.

- *Виберемо перемикач Ряди в: Стовпцях.*

- *Перейдемо на вкладку Ряд. У рядку Ім'я: укажемо x=x(t). У рядку Підпису осі X: укажемо діапазон комірок С4 – С24, що належить до стовпця* t_k .
- *На наступному кроці роботи Майстра діаграм на вкладці Заголовки задамо Назву діаграми: Графік вирішення ДУ, а на вкладці Легенда вкажемо її Розташування: зверху.*
- *На останньому кроці Майстра діаграм варто вказати розміщення діаграми на наявному аркуші.* Якщо вибрати варіант розміщення діаграми на окремому аркуші, то буде створений додатковий аркуш, що містить діаграму, яка займає весь цей аркуш.
- Для додаткових настроювань відображення графіка можна, наприклад, *виділити Область побудови діаграми й подвійним клацанням по області викликати вікно Формат області побудови. Можна вибрати наступні значення: Рамка - невидима, Заливання - прозора.*
- *Для збільшення товщини лінії графіка функції варто двічі клацнути по лінії, викликавши вікно Формат ряду даних, на вкладці Вид у групі Лінія вибрати потрібну товщину*.
- *Помістимо побудований графік поруч із таблицею.*

Після зазначених настроювань графік функції прийме вигляд, показаний на Рис.1.2 а.



а) б)

Рис.1.2 – Графіки функцій, які є вирішенням диференціального рівняння

а) при *a*= – *2*; б) при *a*=*2*

З'ясуємо, який зв'язок існує між таблицею і графіком.

- *Задамо інше значення параметра а, змінивши вміст комірки Е4 на 2 і поширивши це значення на весь стовпець.*

Як змінився графік? Порівняйте результат, отриманий на Рис.1.2 а, з результатом, представленим на Рис.1.2 б при різних значеннях параметра.

- *Задамо ще одне значення параметра а, змінивши вміст комірки Е4 на 0 і поширивши це значення на весь стовпець.*

Як змінився графік?

Можна зробити висновок, що всі зміни значень у таблиці миттєво відображаються на графіку, що побудований за відповідним значенням із цієї таблиці.

Завдання 2. *Одержати чисельне й відповідне графічне вирішення заданої системи двох диференціальних рівнянь.*

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -2y^3 - x. \end{cases}$$

Легко перевірити, що система має тривіальне вирішення $x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0$. Знайдемо яке-небудь нетривіальне рішення системи при початкових умовах $x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0$.

Чисельне вирішення системи диференціальних рівнянь одержимо на проміжку $t \in [t_0, t_n]$, обчислюючи значення шуканих функцій $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$ у точках $t_k = t_0 + kh$, $k = \overline{1,n}$ або $t_k = t_{k-1} + h$. Для цього скористаємося методом Эйлера, відповідно до якого чисельне вирішення системи диференціальних рівнянь одержимо по формулах

$$t_{k+1} = t_k + h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f_1(t_k, x_k, y_k),$$
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f_2(t_k, x_k, y_k),, \quad k = \overline{0, n-1},$$

где

$$f_1(t_k, x_k, y_k) = -x_k + y_k, \qquad f_2(t_k, x_k, y_k) = -2y_k^3 - x_k$$

для даної системи рівнянь.

Пусть $t_0 = 0{,}0$; $x_0 = -2{,}0$; $y_0 = 0{,}5$; $h = 0{,}2$; $n = 30$.

Перейдемо до побудови таблиці, що дозволить одержати вирішення заданої системи диференціальних рівнянь.

Проаналізуємо ситуацію, що виникла при виконанні *Завдання 1*. На Рис.1.1 б показаний результат поширення формул на стовпці. Легко помітити, що посилання у формулах змінили своє значення щодо нового положення формул.

Посилання у формулах, які зміщаються за цім ж законом, що й формула, яка копіюється, називаються *відносними посиланнями*. Якщо формула поширюється на стовпець, то в посиланнях змінюються номери рядків, якщо формула поширюється на рядок, то в посиланнях змінюються номери стовпців. Якщо формула копіюється в комірку зі зміною номера рядка й номера стовпця, то цім же законом будуть змінюватися всі її посилання.

Отже, при побудові таблиці постійну величину кроку інтегрування h й значення параметра a доводилося поширювати на весь стовпець таблиці.

Чи можна змінити описану ситуацію так, щоб постійне значення зберігати тільки в одній комірці, а у формулах зафіксувати посилання на цю комірку так, щоб при копіюванні вона не змінювалася?

У цьому випадку застосовують *абсолютні посилання*, тобто зафіксовані посилання, які при копіюванні формули не змінюються. Для фіксування будь-якої позиції адреси комірки перед нею ставлять знак $. Зафіксувати положення $ можна за допомогою функціональної клавіші *F4*. Якщо набрати або відобразити адреса *B3* і нажати на *F4*, то адреса зміниться на *$B$3*. Наступне натискання на *F4* змінює адресу на *B$3*. Наступне натискання на *F4* змінює адресу на *$B3*. При цьому, знаком $ фіксується незмінна частина адреси.

Повернемося до виконання *Завдання 2*.

- *Зафіксуємо значення кроку інтегрування* $h = 0{,}2$ *в комірці B3.*
- *Задамо значення* $k = 0$, $t_0 = 0{,}0$; $x_0 = -2{,}0$; $y_0 = 0{,}5$ *відповідно в комірках A6, B6, З6, D6.*
- *Перший стовпець заповнимо значеннями номера ітерації від 0 до 30.*
- *В комірках B7, З7, D7 введемо формули методу Эйлера для знаходження чисельного вирішення системи диференціальних рівнянь враховуючи, що посилання на комірку B3, де знаходиться крок інтегрування, повинні бути абсолютними $B$3 для того, щоб при копіюванні ці посилання не змінювалися.*
- *Поширимо введені формули на наступні рядки.*

Фрагмент заповнення таблиці формулами поведений на

Рис.1.3 – Оформлення і заповнення таблиці формулами

У результаті одержимо чисельне вирішення системи диференціальних рівнянь, наведене на а) б) в)

Рис.1.4 – Розв’язок системи диференціальних рівнянь
а) чисельний; б) графічний; в) фазова траєкторія

Графічний розв’язок системи $x = x(t),\, y = y(t)$ у вигляді двох графіків (Ошибка! **Неверная ссылка закладки.б)** можна відобразити за допомогою Майстра діаграм, вибравши тип діаграми Графік (розвиток процесу в часі). Діапазон даних варто оформити у вигляді двох рядів даних.

Крім цього, розв’язок системи можна представити у вигляді траєкторії на фазовій площині (Ошибка! Неверная ссылка **закладки.в).** Для цього:

- *Запустимо Майстер діаграм, виберемо тип діаграми Точкова (зі значеннями, з'єднаними згладжувальними лініями, без маркерів).*

- *Як діапазон даних виділимо два останніх стовпці таблиці, що містять значення* x_k, y_k. При цьому передостанній стовпець повинен зафіксуватися в Рядах як Значення *Х*, а останній стовпець – як Значення *У*.

Отримані графік розв'язків системи і графік фазової траєкторії.

а.
.

Численное решение системы дифференциальных уравнений

h= 0,2

k	tk	xk	yk
0	0	-2	0,5
1	=B6+$B$3	=C6+$B$3*(-C6+D6)	=D6+$B$3*(-2*D6^3-C6)
2	=B7+$B$3	=C7+$B$3*(-C7+D7)	=D7+$B$3*(-2*D7^3-C7)
3	=B8+$B$3	=C8+$B$3*(-C8+D8)	=D8+$B$3*(-2*D8^3-C8)
4	=B9+$B$3	=C9+$B$3*(-C9+D9)	=D9+$B$3*(-2*D9^3-C9)
5	=B10+$B$3	=C10+$B$3*(-C10+D10)	=D10+$B$3*(-2*D10^3-C10)
6	=B11+$B$3	=C11+$B$3*(-C11+D11)	=D11+$B$3*(-2*D11^3-C11)
7	=B12+$B$3	=C12+$B$3*(-C12+D12)	=D12+$B$3*(-2*D12^3-C12)
8	=B13+$B$3	=C13+$B$3*(-C13+D13)	=D13+$B$3*(-2*D13^3-C13)
9	=B14+$B$3	=C14+$B$3*(-C14+D14)	=D14+$B$3*(-2*D14^3-C14)
10	=B15+$B$3	=C15+$B$3*(-C15+D15)	=D15+$B$3*(-2*D15^3-C15)
11	=B16+$B$3	=C16+$B$3*(-C16+D16)	=D16+$B$3*(-2*D16^3-C16)

Рис.1.3 – Оформлення і заповнення таблиці формулами

У результаті одержимо чисельне вирішення системи диференціальних рівнянь, наведене на а) б) в)

Рис.1.4 – Розв'язок системи диференціальних рівнянь
а) чисельний; б) графічний; в) фазова траєкторія

Графічний розв'язок системи $x = x(t),\ y = y(t)$ у вигляді двох графіків (Ошибка! **Неверная ссылка закладки.б)** можна відобразити за допомогою Майстра діаграм, вибравши тип діаграми Графік (розвиток процесу в часі). Діапазон даних варто оформити у вигляді двох рядів даних.

Крім цього, розв'язок системи можна представити у вигляді траєкторії на фазовій площині (Ошибка! Неверная ссылка **закладки.в).** Для цього:

- *Запустимо Майстер діаграм, виберемо тип діаграми Точкова (зі значеннями, з'єднаними згладжувальними лініями, без маркерів).*

- *Як діапазон даних виділимо два останніх стовпці таблиці, що містять значення* x_k, y_k. При цьому передостанній стовпець повинен зафіксуватися в Рядах як Значення *X*, а останній стовпець – як Значення *У*.

Отримані графік розв'язків системи і графік фазової траєкторії.

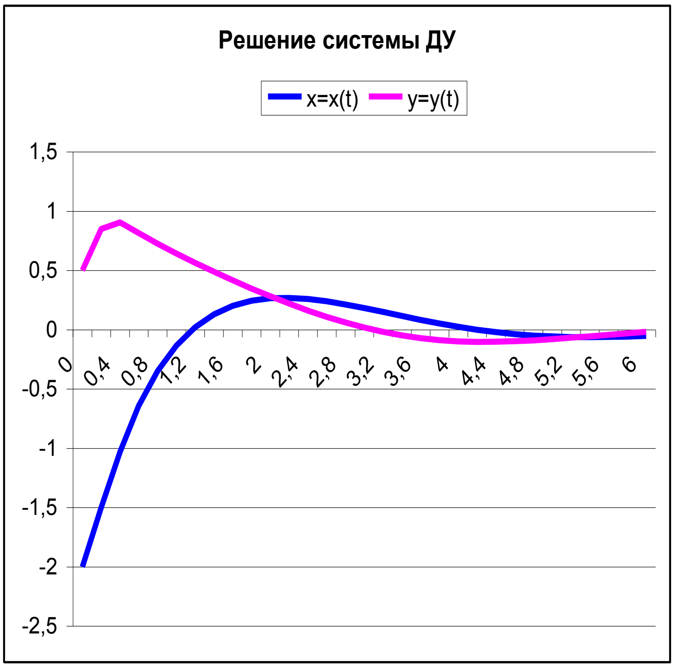
а.

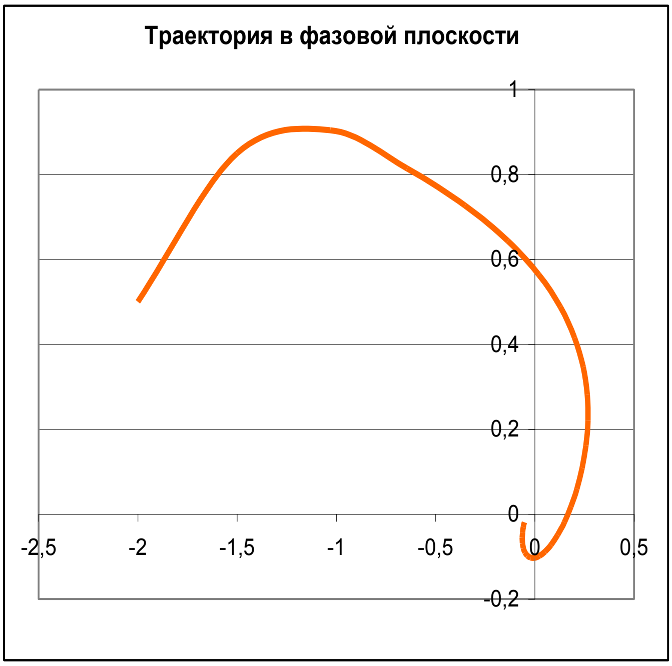
Численное решение системы дифференциальных уравнений

h= 0,2

k	tk	xk	yk
0	0	-2	0,5
1	0,2	-1,5	0,85
2	0,4	-1,03	0,90435
3	0,6	-0,64313	0,814501331
4	0,8	-0,351603734	0,726987212
5	1	-0,135885545	0,643619836
6	1,2	0,020015531	0,564150041
7	1,4	0,128842433	0,488327189
8	1,6	0,200739384	0,415979429
9	1,8	0,243787393	0,347039305
10	2	0,264437776	0,281563378
11	2,2	0,267862896	0,219747117
12	2,4	0,25823974	0,161930008
13	2,6	0,238977794	0,108583653
14	2,8	0,212898966	0,060275995
15	3	0,182374372	0,017608604
16	3,2	0,149421218	-0,018868454
17	3,4	0,115763284	-0,04875001
18	3,6	0,082860625	-0,071856324
19	3,8	0,051917235	-0,088280042
20	4	0,02387778	-0,09838829
21	4,2	-0,000575434	-0,102782876
22	4,4	-0,021016922	-0,102233457
23	4,6	-0,037260229	-0,097602668
24	4,8	-0,049328717	-0,089778706
25	5	-0,057418715	-0,079623508
26	5,2	-0,061859673	-0,067937843
27	5,4	-0,063075307	-0,05544048
28	5,6	-0,061548342	-0,042757257
29	5,8	-0,057790125	-0,030416321
30	6	-0,052315364	-0,01884704

а)





б) в)

Рис.1.4 – Розв'язок системи диференціальних рівнянь
а) чисельний; б) графічний; в) фазова траєкторія

Графічний розв’язок системи $x = x(t), y = y(t)$ у вигляді двох графіків (**Ошибка! Неверная ссылка закладки.**б) можна відобразити за допомогою Майстра діаграм, вибравши тип діаграми Графік (розвиток процесу в часі). Діапазон даних варто оформити у вигляді двох рядів даних.

Крім цього, розв’язок системи можна представити у вигляді траєкторії на фазовій площині (**Ошибка! Неверная ссылка закладки.**в). Для цього:

- *Запустимо Майстер діаграм, виберемо тип діаграми Точкова (зі значеннями, з'єднаними згладжувальними лініями, без маркерів).*
- *Як діапазон даних виділимо два останніх стовпці таблиці, що містять значення* x_k, y_k. При цьому передостанній стовпець повинен зафіксуватися в Рядах як Значення *X*, а останній стовпець – як Значення *У*.

Отримані графік розв’язків системи і графік фазової траєкторії.

Завдання 3. Одержати чисельний і відповідний графічний розв’язок заданої системи трьох диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 3x + 2y, \\ \dot{z} = -x - y - z. \end{cases}$$

Система має тривіальний розв’язок $x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0, \quad z(t) = 0$. Нетривіальний розв’язок системи будемо шукати при початкових умовах $x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$ чисельно на проміжку $t \in [\, t_0, t_n \,]$, обчислюючи значення шуканих функцій $x_k = x(t_k), \quad y_k = y(t_k), \quad z_k = z(t_k)$ в точках $t_k = t_{k-1} + h$ по формулам методу Ейлера:

$$t_{k+1} = t_k + h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f_1(t_k, x_k, y_k, z_k),$$
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f_2(t_k, x_k, y_k, z_k),$$
$$z_{k+1} = z_k + h \cdot f_3(t_k, x_k, y_k, z_k), \qquad k = \overline{0, n-1},$$

де

$$f_1(t_k, x_k, y_k, z_k) = 2x_k,$$
$$f_2(t_k, x_k, y_k, z_k) = 3x_k + 2y_k,$$
$$f_2(t_k, x_k, y_k, z_k) = -x_k - y_k - z_k$$

для даної системи рівнянь.

Нехай $t_0 = 0{,}0$; $x_0 = -2{,}0$; $y_0 = 1{,}0$; $z_0 = 0{,}5$; $h = 0{,}2$; $n = 30$.

Фрагмент заповнення таблиці формулами показаний на Рис.1.5.

h= 0,1				
k	t_k	x_k	y_k	z_k
0	0	-2	1	0,5
1	=B6+$B$3	=C6+$B$3*2*C6	=D6+$B$3*(3*C6+2*D6)	=E6+$B$3*(-C6-D6-E6)
2	=B7+$B$3	=C7+$B$3*2*C7	=D7+$B$3*(3*C7+2*D7)	=E7+$B$3*(-C7-D7-E7)
3	=B8+$B$3	=C8+$B$3*2*C8	=D8+$B$3*(3*C8+2*D8)	=E8+$B$3*(-C8-D8-E8)
4	=B9+$B$3	=C9+$B$3*2*C9	=D9+$B$3*(3*C9+2*D9)	=E9+$B$3*(-C9-D9-E9)
5	=B10+$B$3	=C10+$B$3*2*C10	=D10+$B$3*(3*C10+2*D10)	=E10+$B$3*(-C10-D10-E10)
6	=B11+$B$3	=C11+$B$3*2*C11	=D11+$B$3*(3*C11+2*D11)	=E11+$B$3*(-C11-D11-E11)
7	=B12+$B$3	=C12+$B$3*2*C12	=D12+$B$3*(3*C12+2*D12)	=E12+$B$3*(-C12-D12-E12)

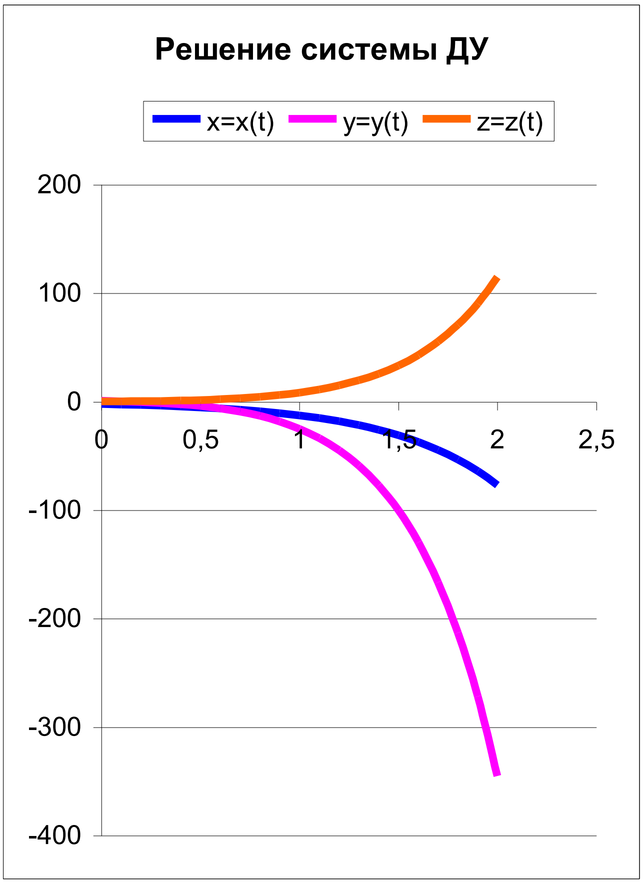
Рис.1.3 – Оформлення і заповнення таблиці формулами

На

Рис.1.4 представлено чисельний і графічний розв’язок системи.

Численное решение системы дифференциальных уравнений				
h=	0,1			
k	t_k	x_k	y_k	z_k
0	0	-2	1	0,5
1	0,1	-2,4	0,6	0,55
2	0,2	-2,88	0	0,675
3	0,3	-3,456	-0,864	0,8955
4	0,4	-4,1472	-2,0736	1,23795
5	0,5	-4,9766	-3,7325	1,73624
6	0,6	-5,972	-5,972	2,43352
7	0,7	-7,1664	-8,958	3,38456
8	0,8	-8,5996	-12,899	4,65854
9	0,9	-10,32	-18,059	6,34259
10	1	-12,383	-24,767	8,54621
11	1,1	-14,86	-33,435	11,4066
12	1,2	-17,832	-44,581	15,0955
13	1,3	-21,399	-58,846	19,8272
14	1,4	-25,678	-77,035	25,869
15	1,5	-30,814	-100,15	33,5535
16	1,6	-36,977	-129,42	43,2941
17	1,7	-44,372	-166,4	55,6043
18	1,8	-53,247	-212,99	71,1206
19	1,9	-63,896	-271,56	90,6319
20	2	-76,675	-345,04	115,114

а)



б)

Рис.1.4 – Розв’язок системи диференціальних рівнянь
а) чисельний; б) графічний

ЧАСТИНА 2.

Чисельний і графічний розв'язок диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MATLAB

Перед розв'язанням диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MATLAB рекомендується одержати загальні навички роботи в даному середовищі, описані в додатку 1 контрольної роботи з "Чисельних методів в інформатиці" для студентів 3 курси заочного факультету.

Загальний порядок програмування:

1) Створюється М-функція з описом правих частин диференціальних рівнянь. М-функція записується і зберігається в М-файлі. Для створення М-файла в командному меню на панелі інструментів вибираємо File/New/M-file.

2) Створюється М-сценарій з обраним розв'язувачем. М - сценарій записується в командному вікні Command Window.

Завдання 1. *Одержати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданого диференціального рівняння при різних значеннях параметра, що входить у рівняння.*

Нехай задане диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad x(t_0) = x_0 .$$

де a – параметр, що приймає будь-які дійсні значення.
Нехай $a = -2$; $t_0 = 0{,}0$; $x_0 = 1{,}5$; $h = 0{,}1$; $n = 20$.

Створюємо М-файл:

```
function f =odu1(t,x)
f=-2*x;
```

Зберігаємо файл із ім'ям odu1.

У командному вікні Command Window :

>> [T,X]=ode45 ('odu1', [0:0.1:2], 1.5)% розв'язок диференціального рівняння методом Рунне-Кутта 4,5 порядків

X = 1.5000 1.2281 1.0055 0.8232 0.6740 0.5518 0.4518 0.3699 0.3028 0.2480 0.2030 0.1662 0.1361 0.1114 0.0912 0.0747 0.0611 0.0501 0.0410 0.0336 0.0275

>> plot(T,X) % побудова графіка функції

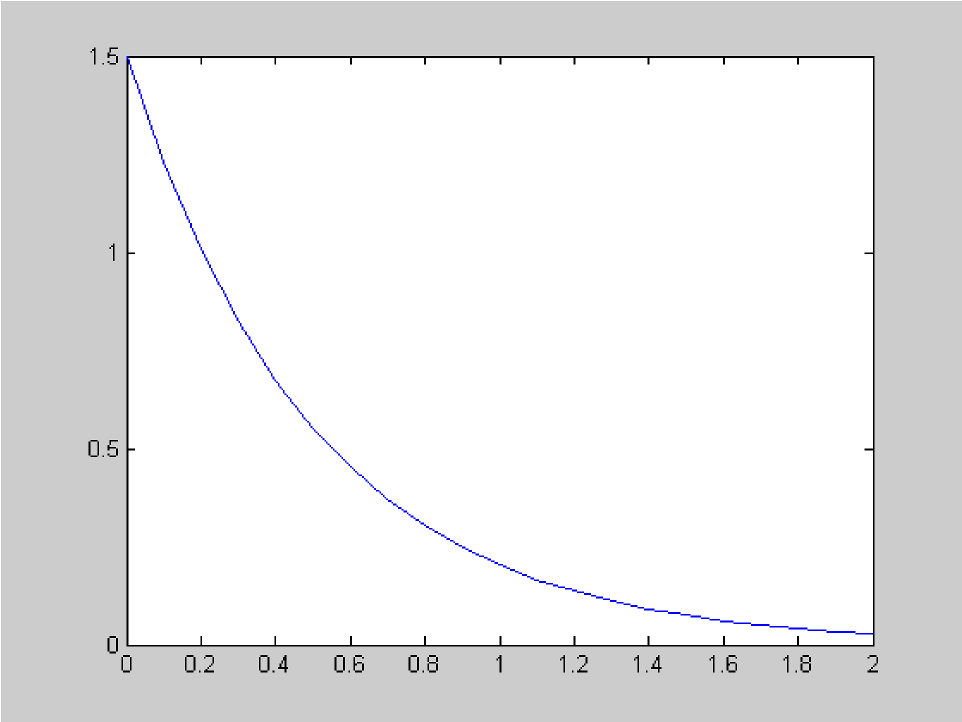


Рис.2.1 – Графік функції, що є розв'язком диференціального рівняння при а= - 2

Змінимо значення параметра. Нехай а=2.

Створюємо М-файл:

function f =odu2(t,x)
f=2*x;
Зберігаємо файл із ім'ям odu2.

У командному вікні Command Window:

>> [T,X]=ode45 ('odu2', [0:0.1:2], 1.5)% розв'язок диференціального рівняння методом Рунге-Кутта 4,5 порядків

X = 1.5000 1.8321 2.2377 2.7332 3.3383 4.0774 4.9802 6.0828 7.4296 9.0745 11.0836 13.5376 16.5349 20.1957 24.6671 30.1284 36.7990 44.9463 54.8977 67.0521 81.8976

>> plot(T,X) % побудова графіка функції

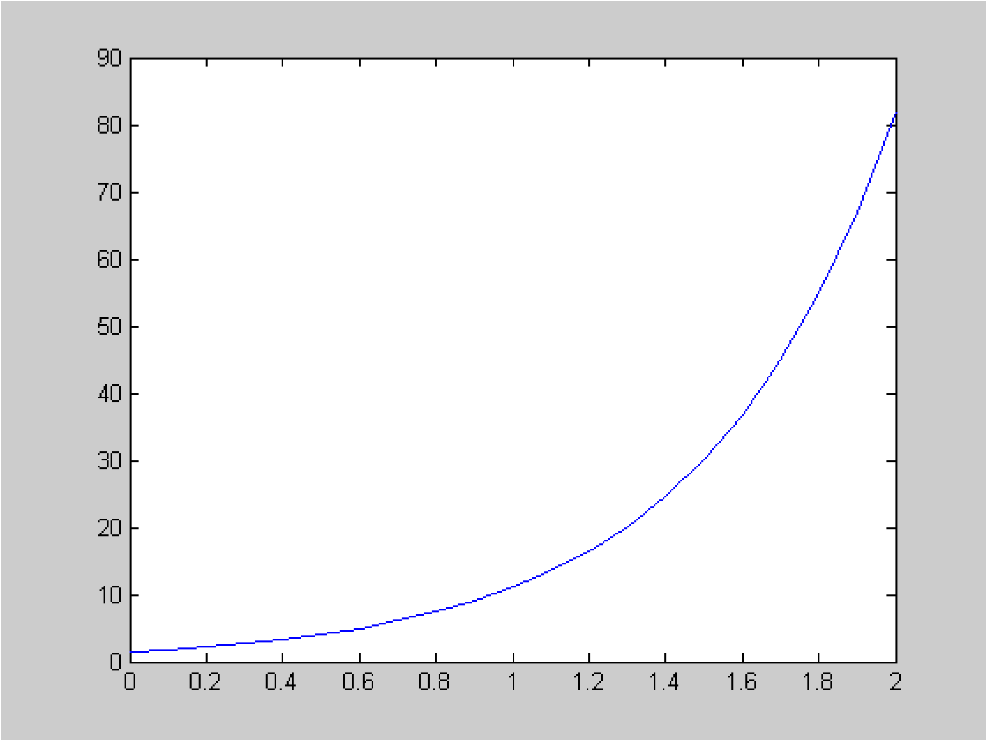


Рис.2.5 – Графік функції, що є розв'язком диференціального рівняння при а= 2

Змінимо значення параметра. Нехай а=0.

Создаем М-файл:

function f =odu3(t,x)
f=0;
Зберігаємо файл із ім'ям odu3.

У командному вікні Command Window :

>> [T,X]=ode45 ('odu3', [0:0.1:2], 1.5)% розв'язок диференціального рівняння методом Рунне-Кутта 4,5 порядків
X = 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 1.5000 ... 1.5000 1.5000

>> plot(T,X) % побудова графіка функції

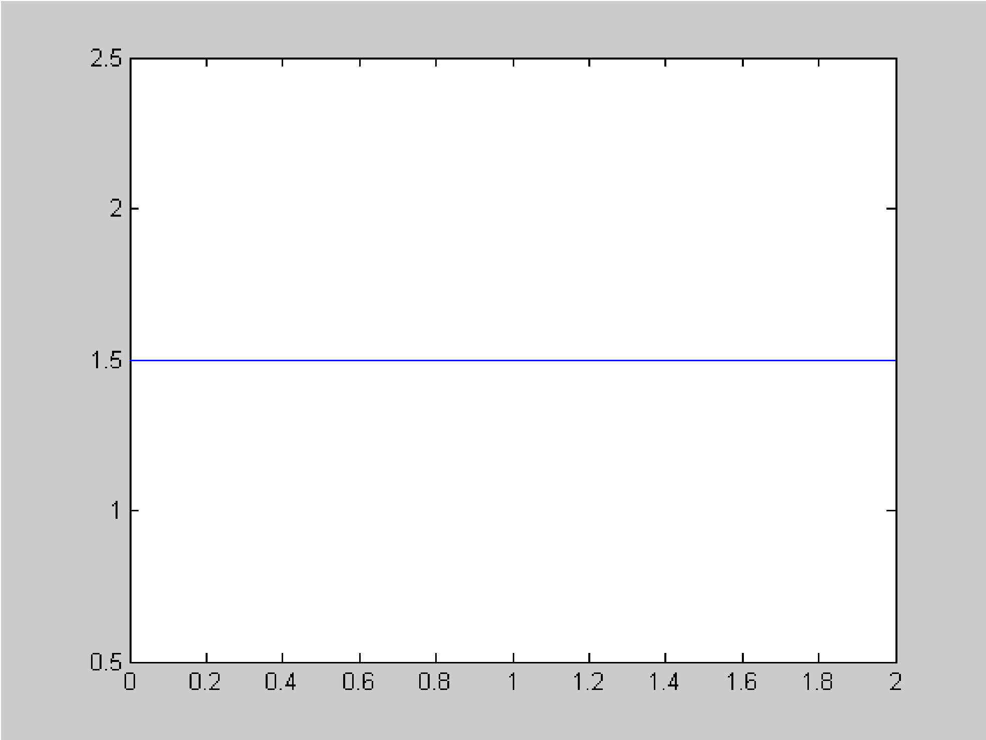


Рис.2.3 – Графік функції, що є розв'язком диференціального рівняння при а= 0

Задание 2. *Одержати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданої системи двох диференціальних рівнянь*

Розглянемо систему двох диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -2y^3 - x. \end{cases}$$

Нехай $t_0 = 0,0$; $x_0 = -2,0$; $y_0 = 0,5$; $h = 0,2$; $n = 30$.

% Створюємо М-функцію під ім'ям sistema1.m

```
function f=sistema(t,x);
f=[-x(1)+x(2);-2*x(2)^3-x(1)];
```

Збережемо М-файл під ім'ям sistema1.m

% Створюємо М-сценарій розв'язку за допомогою ode45

```
>> T=[0:0.2:6]; % Інтервал інтегрування
>> x0=[-2;0.5]; % Початкові умови
>> [t,x]=ode45('sistema1',T,x0) %t, x — вихідні змінні розв'язувача ode45
```

```
x =
   -2.0000    0.5000
   -1.5210    0.7434
   -1.1022    0.8098
   -0.7569    0.7878
   -0.4817    0.7334
   -0.2674    0.6690
   -0.1039    0.6025
    0.0179    0.5364
    0.1059    0.4721
    0.1664    0.4101
    0.2050    0.3505
    0.2260    0.2938
    0.2332    0.2400
    0.2296    0.1895
    0.2180    0.1428
    0.2003    0.1002
    0.1785    0.0620
    0.1542    0.0287
    0.1287    0.0004
    0.1032   -0.0228
    0.0786   -0.0409
    0.0556   -0.0543
    0.0348   -0.0632
    0.0165   -0.0682
    0.0010   -0.0697
   -0.0118   -0.0685
   -0.0217   -0.0650
   -0.0291   -0.0597
   -0.0341   -0.0533
   -0.0369   -0.0461
   -0.0379   -0.0386

>> plot(t,x),grid, legend('X1','X2') % побудова графіка функції
```

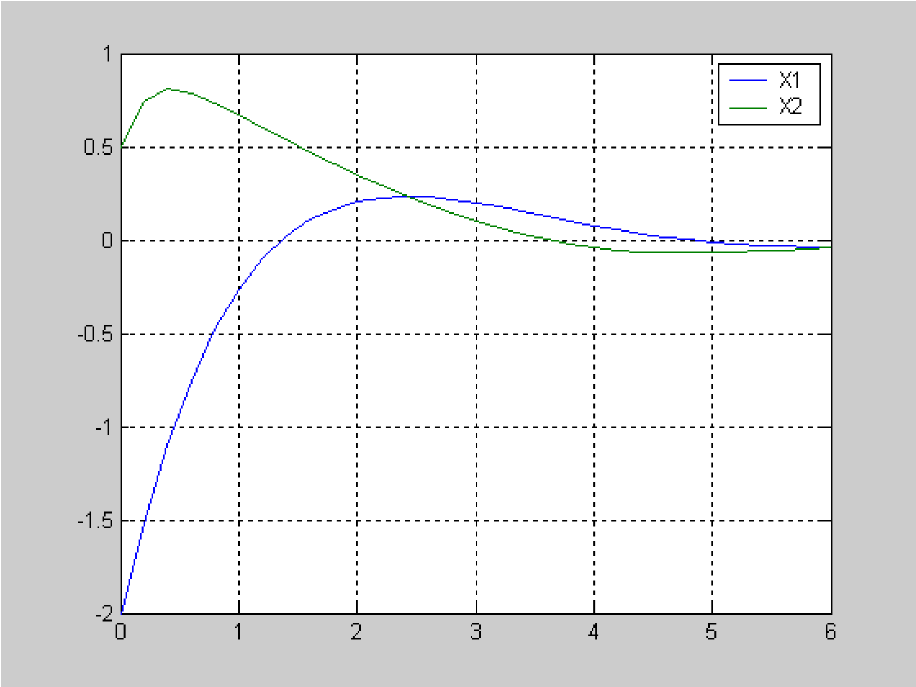


Рис.2.6 – Графічний розв'язок системи диференціальних рівнянь

Є можливість побудови двовимірного фазового портрета за допомогою функції odephas2.

```
>> opt=odeset('OutputSel',[1 2], 'OutputFcn', 'odephas2');
>> [T,X]=ode45('sistema1', T,x0,opt )
```

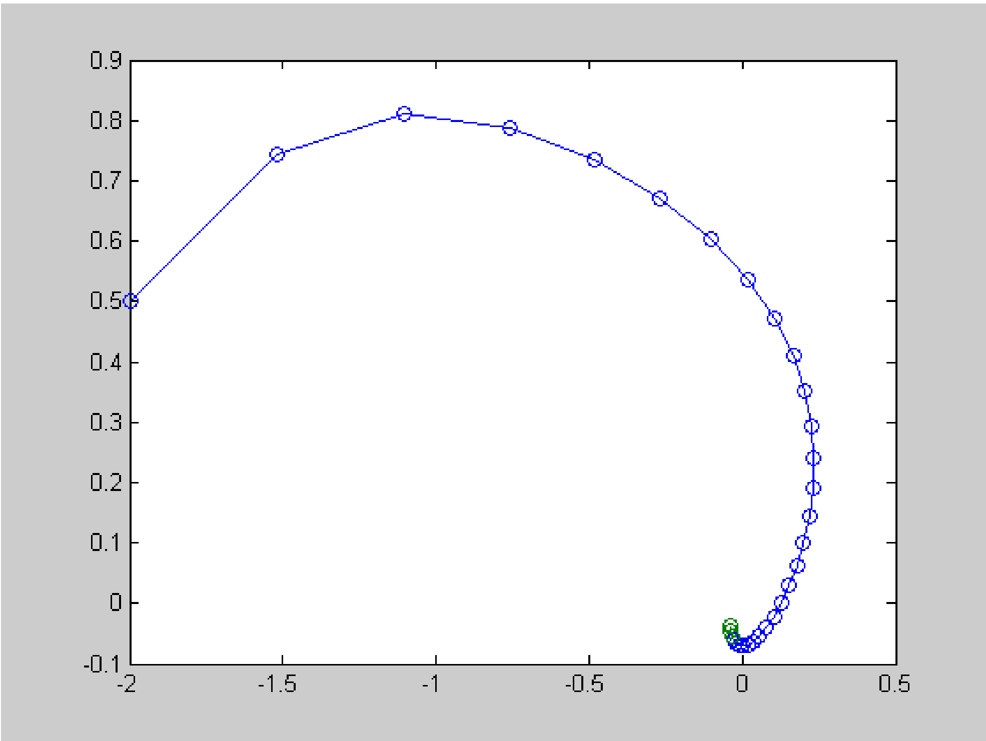


Рис.2.5 – Фазова траєкторія

Задание 3. *Одержати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданої системи трьох диференціальних рівнянь*

Розглянемо систему трьох диференціальних:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 3x + 2y, \\ \dot{z} = -x - y - z. \end{cases}$$

Нехай $t_0 = 0{,}0$; $x_0 = -2{,}0$; $y_0 = 1{,}0$; $z_0 = 0{,}5$; $h = 0{,}2$; $n = 30$.

% Створюємо М-функцію з ім'ям sistema 2.m

```
function f=sistema2(t,x);
f=[2*x(1); 3*x(1)+2*x(2);-x(1)-x(2)-x(3)];
```

Збережемо М-файл з ім'ям sistema2.m

% % Створюємо М-сценарій розв'язку за допомогою ode45

```
>>T=[0:0.2:6]; % Інтервал інтегрування
>>x0=[-2; 1; 0.5]; % Початкові умови
>> [t,x]=ode45('sistema1',T,x0) %t, x — вихідні змінні розв'язувача ode45
```

Одержуємо чисельне рішення системи трьох диференціальних рівнянь:

```
x =  1.0e+006 *

   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000
   -0.0000   -0.0001    0.0000
   -0.0000   -0.0001    0.0000
   -0.0000   -0.0002    0.0001
   -0.0001   -0.0004    0.0001
   -0.0001   -0.0006    0.0002
   -0.0002   -0.0010    0.0003
   -0.0002   -0.0016    0.0005
   -0.0004   -0.0026    0.0009
   -0.0005   -0.0043    0.0014
   -0.0008   -0.0069    0.0023
   -0.0012   -0.0110    0.0037
```

-0.0018	-0.0174	0.0058
-0.0027	-0.0276	0.0092
-0.0040	-0.0436	0.0145
-0.0060	-0.0686	0.0229
-0.0089	-0.1076	0.0359
-0.0133	-0.1685	0.0562
-0.0198	-0.2633	0.0878
-0.0295	-0.4106	0.1369
-0.0441	-0.6388	0.2129
-0.0657	-0.9925	0.3308
-0.0981	-1.5398	0.5133
-0.1463	-2.3842	0.7947
-0.2182	-3.6882	1.2294
-0.3256	-5.6975	1.8992

```
>> plot(t,x),grid, legend('X1','X2', 'X3 ') % побудова графіка функції
```

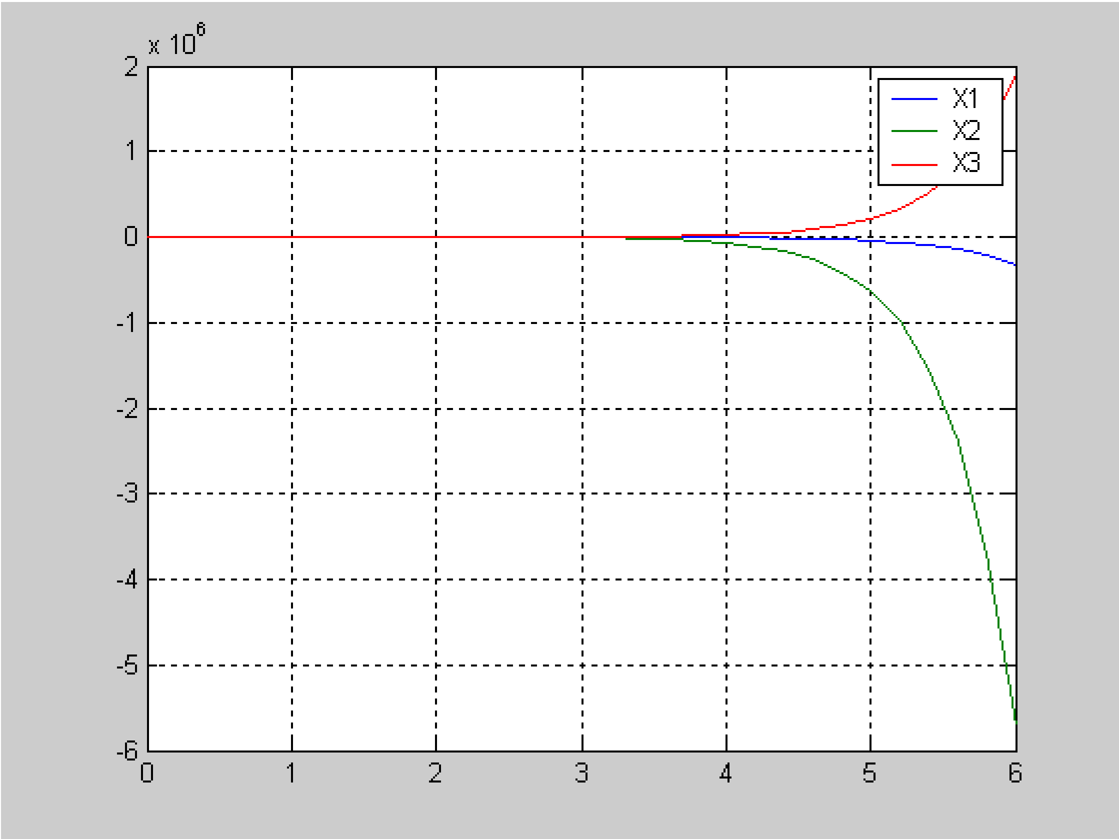


Рис.2.7 – Графічний розв’язок системи диференціальних рівнянь

Є можливість побудови тривимірного фазового портрета за допомогою функції odephas3.

```
>> opt=odeset('OutputSel',[1 2 3], 'OutputFcn', 'odephas3');
>> [T,X]=ode45('sistema2', [0:0.2:6],[-2 1 0.5]);
```

```
>> [T,X]=ode45('sistema2', [0:0.2:6],[-2 1 0.5],opt);
```

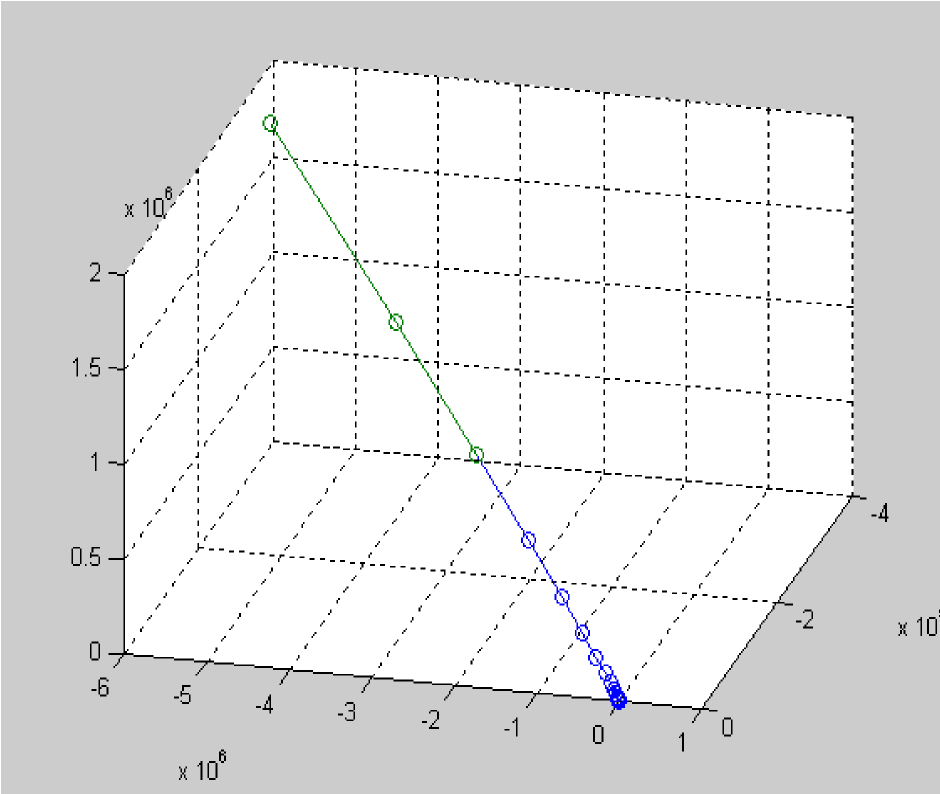


Рис.2.7 – Фазова траєкторія

ВИСНОВОК: Ми ознайомилися із чисельними методами розв’язання звичайних диференціальних рівнянь і їх систем. Одержали чисельний і графічний розв’язок диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MS Excel. Реалізували наближені методи розв’язання диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь за допомогою математичного пакета MATLAB. Порівняли результати, отримані засобами MS Excel і MATLAB. Чисельні розв’язки, графічні розв’язки і фазові траєкторії, отримані в середовищі MS Excel і за допомогою математичного пакета MATLAB, збігаються.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ:

1) Дати письмові відповіді на запитання:

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
2. Що називається розв’язком звичайного диференціального рівняння?
3. Що називається задачею Коші для диференціального рівняння?
4. Що називається розв’язком задачі Коші?
5. У якому вигляді будується наближений розв’язок задачі Коші?
6. Якою величиною визначається похибка різних методів розв’язку задачі Коші?
7. Чим відрізняється модифікований метод Ейлера від звичайного методу Ейлера?
8. У чому полягає метод Рунге-Кутта?
9. Якими стандартними функціями MatLab реалізується розв’язок ОДУ (перелічити основні)?
10. У якому вигляді ми одержуємо результат розв’язку ОДУ в MatLab?
11. Для чого потрібна функція odeset ?
12. Як можна при виклику розв’язувача ОДУ реалізувати побудову графіка шуканої функції?

2) Виконати завдання відповідно до свого варіанта.

Для вибору варіанта додаємо всі цифри в номері залікової книжки. Отримана сума і буде номером варіанта, який зобов'язаний виконати студент. Якщо сума більше чим 30, то дану операцію проводять ще раз.
Наприклад:
№ залікової книжки - 02705, № варіанта: 0+2+7+0+5=14;
№ залікової книжки - 09878, 0+9+8+7+8=32; № варіанта: 3+2=5.

Оформлення титульного аркуша і змісту курсової надано в ДОДАТКУ А і Б.

Варіанти завдань

ЧАСТИНА 1.

Чисельний і графічний розв'язок диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MS EXCEL

Завдання 1. *Отримати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданого диференціального рівняння при наступних значеннях параметра* $a = a_1$, $a = a_2$, $a = a_3$, *що входить у рівняння.*

№	t_0	x_0	h	n	a_1	a_2	a_3
1	0,1	2,5	0,01	20	0,1	–0,1	0,0
2	0,2	–2,5	0,02	20	0,2	–0,2	0,0
3	0,3	0,7	0,03	20	1,9	–1,9	0,0
4	0,4	–0,7	0,04	20	1,8	–1,8	0,0
5	0,5	2,4	0,05	20	0,3	–0,3	0,0
6	0,6	–2,4	0,06	20	0,4	–0,4	0,0
7	0,7	0,8	0,07	20	1,7	–1,7	0,0
8	0,8	–0,8	0,08	20	1,6	–1,6	0,0
9	0,9	2,3	0,09	20	0,5	–0,5	0,0
10	1,0	–2,3	0,12	20	0,6	–0,6	0,0
11	0,9	0,9	0,14	20	1,5	–1,5	0,0
12	0,8	–0,9	0,16	20	1,4	–1,4	0,0
13	0,7	2,2	0,18	20	0,7	–0,7	0,0
14	0,6	–2,2	0,2	20	0,8	–0,8	0,0
15	0,5	1,0	0,22	20	1,3	–1,3	0,0
16	0,4	–1,0	0,24	20	1,2	–1,2	0,0
17	0,3	2,1	0,25	20	0,9	–0,9	0,0
18	0,2	–2,1	0,26	20	1,4	–1,4	0,0
19	0,1	1,1	0,28	20	1,1	–1,1	0,0
20	0,2	–1,1	0,3	20	0,9	–0,9	0,0
21	0,3	2,0	0,33	20	1,5	–1,5	0,0
22	0,4	–2,0	0,35	20	1,6	–1,6	0,0
23	0,5	1,2	0,4	20	0,8	–0,8	0,0
24	0,6	–1,2	0,45	20	0,7	–0,7	0,0
25	0,7	1,9	0,5	20	1,7	–1,7	0,0
26	0,8	–1,9	0,45	20	1,8	–1,8	0,0
27	0,9	1,3	0,4	20	0,6	–0,6	0,0
28	1,0	–1,3	0,35	20	0,5	–0,5	0,0
29	0,9	1,8	0,33	20	1,3	–1,3	0,0
30	0,8	–1,8	0,3	20	1,9	–1,9	0,0

Завдання 2. *Отримати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданої системи двох диференціальних рівнянь*

Задати $t_0 = 0{,}0$. *Початкові умови* x_0, y_0, *число* n, *крок інтегрування* h *вибрати виходячи з поводження заданої системи.*

№1. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - x^3 - y^2, \\ \dot{y} = x - y + xy. \end{cases}$

№2. $\begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$

№3. $\begin{cases} \dot{x} = x + xy^4, \\ \dot{y} = -x^4 y - y. \end{cases}$

№4. $\begin{cases} \dot{x} = -y + x^5, \\ \dot{y} = x + y^5. \end{cases}$

№5. $\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 y^2 - 0.25x^5, \\ \dot{y} = -2x - 2x^3 y - 0.5y^3. \end{cases}$

№6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4xy^2, \\ \dot{y} = y + 2x^2 y. \end{cases}$

№7. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y - 5x^5, \\ \dot{y} = 3x - y^5. \end{cases}$

№8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y^2, \\ \dot{y} = -xy - 4y^3. \end{cases}$

№9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y^2, \\ \dot{y} = -2xy + y^3. \end{cases}$

№10. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y \ln\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = -y + x \ln\left(x^2 + y^2\right). \end{cases}$

№11. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y^2, \\ \dot{y} = 2xy - y^3. \end{cases}$

№12. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y - x^5, \\ \dot{y} = -2x - 3y^5. \end{cases}$

№13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y^2, \\ \dot{y} = xy + 3y^3. \end{cases}$

№14. $\begin{cases} \dot{x} = x + y \ln\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = y - x \ln\left(x^2 + y^2\right). \end{cases}$

№15. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$

№16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + x^3 + x^5, \\ \dot{y} = -2x + y^3 + y^5. \end{cases}$

№17. $\begin{cases} \dot{x} = -3y + x^3, \\ \dot{y} = 3x + y^5. \end{cases}$

№18. $\begin{cases} \dot{x} = -x - ye^{x^2y^2}, \\ \dot{y} = -y + xe^{x^2y^2}. \end{cases}$

№19. $\begin{cases} \dot{x} = 3y - x^5y^2, \\ \dot{y} = -3x - x^2y^3. \end{cases}$

№20. $\begin{cases} \dot{x} = x + xy^2, \\ \dot{y} = -x^2y - y. \end{cases}$

№21. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

№22. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y\cos(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -y + x\cos(x^2 + y^2). \end{cases}$

№23. $\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y, \\ \dot{y} = -x + y^5. \end{cases}$

№24. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + xy, \\ \dot{y} = -x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

№25. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y. \end{cases}$

№26. $\begin{cases} \dot{x} = 3y - x^3, \\ \dot{y} = -4x - y^3. \end{cases}$

№27. $\begin{cases} \dot{x} = x + y\cos(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = y - x\cos(x^2 + y^2). \end{cases}$

№28. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + x^5, \\ \dot{y} = -3x + y^3. \end{cases}$

№29. $\begin{cases} \dot{x} = -3y - x^3y^2, \\ \dot{y} = 3x - x^2y^5. \end{cases}$

№30. $\begin{cases} \dot{x} = x + ye^{x^2y^2}, \\ \dot{y} = y - xe^{x^2y^2}. \end{cases}$

Завдання 3. *Отримати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданої системи трьох диференціальних рівнянь*

№ 1. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -3x + 4y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 3z, \\ \dot{y} = -2x - 6y + 13z, \\ \dot{z} = -x - 4y + 8z. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 7z, \\ \dot{y} = x - 4y + 9z, \\ \dot{z} = -4x + 5z. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 6y + 3z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = x + 2y - z. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 7y + 3z, \\ \dot{z} = 6x - 9y + 4z. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$

№ 7. $\begin{cases} \dot{x} = 7x, \\ \dot{y} = 10x - 19y + 10z, \\ \dot{z} = 12x - 24y + 13z. \end{cases}$

№ 8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -4x - y, \\ \dot{z} = 4x - 8y - 2z. \end{cases}$

№ 9. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

№ 10. $\begin{cases} \dot{x} = 7y + 4z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = x + 13y. \end{cases}$

№ 11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = 2y + z. \end{cases}$

№ 12. $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = 4x + 5y - 4z, \\ \dot{z} = 6x + 4y - 4z. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x + 5y - 5z, \\ \dot{z} = 2x - 5y + 5z. \end{cases}$

№16. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = 3x + 2y, \\ \dot{z} = 2x + 3y + 4z. \end{cases}$

№17. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x. \end{cases}$

№18. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = x + 3y + z. \end{cases}$

№19. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y + z, \\ \dot{y} = -y + 4z, \\ \dot{z} = x - 10z. \end{cases}$

№20. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = -x - y + 2z. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4y - 3z, \\ \dot{z} = y. \end{cases}$ № 22. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 4y - z, \\ \dot{y} = 13x - 6y - 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + z. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4z, \\ \dot{y} = 9x - 4y + z, \\ \dot{z} = 7x - 5y + 4z. \end{cases}$ № 24. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x + 6y + 5z. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 9y + 6z, \\ \dot{y} = 3x - 7y + 5z, \\ \dot{z} = 2x - 5y + 4z. \end{cases}$ № 26. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - z, \\ \dot{y} = 3x - 3y + 5z, \\ \dot{z} = 2x - y + 2z. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} \dot{x} = 13x - 24y + 12z, \\ \dot{y} = 10x - 19y + 10z, \\ \dot{z} = 7z. \end{cases}$ № 28. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 8y + 4z, \\ \dot{y} = -y - 4z, \\ \dot{z} = y + 3z. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 7y + 6z, \\ \dot{y} = 8x - 7y + 4z, \\ \dot{z} = 4x - 3y + z. \end{cases}$ № 30. $\begin{cases} \dot{x} = 13y + z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = 4x + 7y. \end{cases}$

ЧАСТИНА 2.

Чисельний і відповідний графічний розв'язок диференціальних рівнянь і їх систем в середовищі MATLAB.

Завдання 1. *Отримати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданого диференціального рівняння при наступних значеннях параметра* $a = a_1$, $a = a_2$, $a = a_3$, *що входить у рівняння, в середовищі MatLab стандартними засобами (наприклад, функцією odu45).*

Завдання 2. *Отримати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданої системи двох диференціальних рівнянь, а також фазову траєкторію розв'язку засобами MatLab.*

Завдання 3. *Отримати чисельний і відповідний графічний розв'язок заданої системи трьох диференціальних рівнянь, а також фазову траєкторію розв'язку засобами MatLab.*

Для виконання завдань ЧАСТИНИ 2 використати варіанти завдань ЧАСТИНИ 1.

ОРГАНІЗАЦІЯ ПОТОЧНОГО, СЕМЕСТРОВОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

Контроль поточних знань студентів заочної форми навчання виконується на базі модульно-накопичувальної системи організації навчання та організується у відповідності з «Положенням про впровадження сесійної модульно-накопичувальної системи контролю знань та вмінь з навальних дисциплін студентами заочної форми навчання». Контроль і оцінка поточних знань здійснюється шляхом перевірки домашніх контрольних робіт, виконаних в міжсесійний період, проведення практичних модулів на лабораторних заняттях під час сесії відповідно до модульно-накопичувальної системи контролю знань та вмінь студентів, виконання письмової контрольної роботи з теоретичної частини курсу, виконання та захист курсової роботи.

Підсумковим контролем є залік та захист курсової роботи.

Модульно-накопичувальна система оцінки знань студентів заочної форми навчання включає:

– систему оцінювання самостійної роботи студента (СРС) у міжсесійний період (ОМ). Вона передбачає перевірку контрольної роботи КР-1, яку студенти виконують у міжсесійний період. Кількісна оцінка за цей вид роботи визначається з урахуванням терміну надання роботи на перевірку (на протязі семестру, перед початком заліково-екзаменаційної сесії, безпосередньо перед датою контролюючого заходу), обсягу виконання роботи та глибини розкриття наданих питань та завдань, а також оформлення роботи;

– систему оцінювання виконання курсової роботи (КР) у міжсесійний період. Вона передбачає перевірку курсової роботи, яку студенти виконують у міжсесійний період. Кількісна оцінка за цей вид роботи визначається з урахуванням терміну надання роботи на перевірку (на протязі семестру, перед початком заліково-екзаменаційної сесії, безпосередньо перед датою контролюючого заходу), обсягу виконання роботи та глибини розкриття завдань, а також оформлення роботи;

– систему оцінювання самостійної роботи студента (СРС) при проведенні практичних модулів під час заліково-екзаменаційної сесії (ОЗЕ). Тут для оцінки ступеня засвоєння основних положень дисципліни передбачається виконання низки лабораторних робіт, які охоплюють основні питання практичного розділу дисципліни. Кількісна оцінка за цей вид роботи визначається з урахуванням ритмічності роботи студента на протязі занять, повноти розкриття тем, якості розрахунків та графічних побудов, достовірності одержаних висновків, а також результати захисту наданих завдань;

– систему оцінювання сесійної контрольної роботи (ОЗЕ);

– систему накопичувальної підсумкової оцінки засвоєння студентами навчальної дисципліни (ПО). Накопичена підсумкова оцінка засвоєння студентами заочної форми навчальної дисципліни розраховується, як:

$$ПО=0,5\cdot(ОМ+ОЗЕ).$$

Цифри тут визначають, яку долю кожний вид контролю складає в загальній кількості балів, що відведені на дисципліну.

З урахуванням модульно-накопичувальної системи бали за модулями розподіляться наступним чином:

– теоретичні модулі

Номер змістовного модуля	Форма контролю	Максимальна сума балів, яку можна отримати за даним модулем
ЗМ-Л1	Контрольна робота КР-1(ОМ) Курсова робота КР	20
ЗМ-Л2	Контрольна робота КР-1(ОМ) Курсова робота КР	20

Максимальна сума за теоретичну частину – 40 балів;

– практичні модулі

Номер зміст. модуля	Форма контролю	Максимальна сума балів, яку можна отримати за даним модулем
ЗМ-П1	Захист ЛР, КР-1 (ОМ) КР	20
ЗМ-П2	Захист ЛР, КР-1 (ОМ) КР	10

Максимальна сума за практичну частину – 30 балів;

Модуль курсової роботи складається з самого виконання роботи, її оформлення (ці етапи оцінюються згідно з 60% балів від максимально можливої кількості за курсову роботу) та захисту курсового проекту, за який він може отримати 30 балів (18 балів (60%) за оформлення курсової роботи згідно ДСТУ та відповідність змісту роботи її темі і 12 балів(40%) за захист курсового проекту). Курсовий проект вважається зарахованим, якщо студент отримав не менш ніж 18 балів.

Максимальна сума за модуль курсової роботи – 30 балів.

З теоретичної та практичної частини курсу студент повинен виконати усі змістовні модулі семестру та набрати не менше, ніж 50% від максимально можливої суми балів за дисципліну, у тому числі захистити курсову роботу та своєчасно виконати міжсесійну контрольну роботу . В цьому випадку вважається, що студент допущений до здачі заліку. В іншому випадку студент вважається таким, що не виконав навчального плану, і тому не допускається до здачі заліку.

Захист курсової роботи оцінюється у балах за системою оцінювання, що використовуються в університеті, з можливістю переведення оцінки до шкали ЄКТАС

За шкалою ECTS	За національною системою	Визначення	За системою університету (у відсотках)
A	5 (відмінно)	відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок	90 - 100
B	4 (добре)	вище середнього рівня з кількома помилок	85 - 89
C	4 (добре)	в загальному правильна робота з певною кількістю грубих помилок	75 - 84
D	3 (задовільно)	непогано, але зі значною кількістю помилок	68 - 74
E	3 (задовільно)	виконання задовольняє мінімальні критерії	60 - 67
FX	2 (незадовільно)	з можливістю перескласти	35 - 59
F	2 (незадовільно)	з обов’язковим повторним курсом навчання	1 - 34

Для студентів, які виконали навчальний план, формується інтегральна сума балів – сума балів, одержаних з теоретичної та практичної частин курсу. Максимальна інтегральна сума балів, яку можна отримати за теоретичну та практичну частини курсів, дорівнює 100.

Студент, який допущений до здачі заліку та який набрав інтегральну суму не менше 60% від максимально можливої суми балів, отримує залік автоматично. Студент, який має інтегральну суму балів менше 60% від максимально можливої, тобто менше 60 балів (за умови виконання навчального плану з теоретичної та практичної частин курсу), повинен здавати письмовий залік по тестових завданнях.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці. – Підручник. К., 2006. – 480с.
2. Сулима И.М., Гавриленко С.И., Радчик И.А., Юдицкий Я.А.. Основные численные методы и их реализация на микрокалькуляторах. – К: Вища школа, 1987.
3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М: Наука, 1972.
4. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

5. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1977.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1972.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1990.

Додаток А

(Зразок оформлення титульного аркуша)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра інформаційних технологій

Заочний факультет

КУРСОВА РОБОТА

на тему:

"НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ СИСТЕМ"

Виконав ст.гр. К-3

____

(П.І.Б)

Робота перевірена та допущена до захисту

" ___ " " ___________ " 20_ _ р.

Керівник ____________________

(П.І.Б)

Одеса 2012

ДОДАТОК Б

Зміст

Стор.

Вступ ....

1. Теоретична частина (відповіді на питання)..........................

2. Практична частина...

2.1. Чисельний і графічний розв’язок диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MS EXCEL..

2.2. Чисельний і графічний розв’язок диференціальних рівнянь і їх систем у середовищі MATLAB..

Висновки..

Перелік посилань ....

ДОДАТОК В

Режим командної стороки. Елементарні математичні функції. Графіка

При виклику **MatLab** на дисплей виводиться заставка, що переміняється **командним вікном**, у верхній частині якого розміщене **вікно керування** - меню з пунктами **Файл, Правка, Вікно, Допомога** та панель інструментів.

Нижче виводиться командний рядок (починається символом ">>") з попередніми пропозиціями викликати перелік розділів, увійти в довідник, відкрити вікно допомоги та ін.

У командному рядку в режимі діалогу можна набрати **команду** (оператор) або **вираз** і, натиснувши Enter, отримати відповідь (answer).

Для виконання команди без виведення результату у командне вікно наприкінці команди ставиться символ крапки з комою.

Будь-який фрагмент вікна командного рядка можна виділити і копіювати в буфер, наприклад, для переносу в Word. Можливий перенос у командний рядок текстових фрагментів з інших систем.

Як і в будь-якій системі, в MatLab існує поняття змінної величини, але в ролі її значення виступає масив (array).

Для завдання масиву (зокрема, скалярної величини) використовується команда присвоювання.

Наприклад:

командою >>a=[1 2 3; 4 5 6] формується матриця розміру 2х3 з відповідними елементами;

командою >> b=[1 2 3] - вектор-рядок;

командою >> b=[1;2;3] - вектор-стовпець;

d=zeros(4,7) - матриця розміру 4х7 з нульовими елементами.

Для вибірки окремих елементів масивів можна користуватися індексами, наприклад, a(k,3) визначає третій елемент k-ого рядка, a(:,3) - весь третій стовпець.

Вбудована система контролю знаходить типові помилки при завданні масивів.

Зверніть увагу на наступне:

- при завданні масиву значеннями їх містять у квадратні дужки;
- елементи в рядку масиву розділяють пробілами або комами;
- при вказівці списку індексів використовують круглі дужки і розділові коми (вказівка індексу символом двокрапки відповідає завданню всіх значень за відповідним індексом).

При роботі з масивами можна користуватися списками **i:k** і **i:j:k.** У першому варіанті розуміємо **"від i до k із кроком 1"** і в другому - із кроком **j**.

До числової змінної застосовні всі арифметичні операції, але при виконанні ряду операцій доводиться розрізняти поелементні операції з масивами і операції над матрицями за правилами лінійної алгебри (для масивів перед знаком операції ставлять крапку).

Елементарні математичні функції

pi = 4*atan(1)=imag(log(-1))=3.1415926535897..;

abs(X) - абсолютна величина;

ceil(X), fix(X), floor(X), round(X) - округлення (до найближчого цілого, не меншого X; відкидання дробової частини; до найближчого цілого, не більшого X; до найближчого цілого);

mod(X,Y) - залишок від ділення X на Y;

sqrt(X) - квадратний корінь :

exp(X) - експонента e^x

pow2(X) - двійкова експонента 2^x;

log(X) - натуральний логарифм;

log2(X), log10(X) -логарифм по основі 2 і десятковий логарифм;

sin(X), cos(X), tan(X), cot(X), csc(X), sec(X) - тригонометричні функції (синус, косинус, тангенс, котангенс, косеканс, секанс);

asin(X), acos(X), atan(X), acot(X), acsc(X), asec(X) - обернені тригонометричні функції (арксинус, арккосинус і т.д.);

Графіка в лінійному масштабі

plot (y) - побудова графіка одномірного масиву залежно від номера елемента (для двовимірного масиву будуються графіки для стовпців);

plot (x,y) - побудова графіка функції y=y(x); при двовимірному x будуються графіки x=x(y); якщо обидва масиви двовимірні, будуються залежності для відповідних стовпців;

plot (x,y, LineSpec) - рядок LineSpec (до 3 символів) визначає стиль ліній , форму маркера точок і колір ліній і маркера:

Символ стилю лінії:

- безперервна -
- штрихова --
- подвійний пунктир :
- штрихпунктирна -.

Колір

- жовтий - y
- фіолетовий - m
- голубий - c
- червоний - r
- зелений - g
- синій - b
- білий - w
- чорний k

Маркер може визначатися символами :

. + * ° ґ s (квадрат) d (ромб) p (п'ятикутник) h(шестикутник).

За замовчуванням вибирається безперервна лінія із точковим маркером і чергуванням кольорів з жовтого по синій.

plot (x1,y1, LineSpec1, x1,y1, LineSpec2,...) - будує на одному графіку кілька ліній (діапазон по аргументу - об'єднання x1 і x2).