ЗМІСТ

ВСТУП

Комп’ютерізація освіти та автоматизація усіх сфер інженерної та наукової діяльності – важливі фактори, які визначають науково-технічний прогрес сучасного суспільства. З зростанням ролі обчислювальної техніки в усіх галузях народного господарства безперервно зростають потреби у наявності фахівців з комп’ютерних наук і вимоги до рівня їх кваліфікації.

Більшість прикладних задач (інженерних, економічних, фізичних та ін.) зводяться до математичних, що розв'язуються різноманітними чисельними методами.

Тому метою даного циклу лабораторних робіт є формування у студентів теоретичних знань та практичних навичок у роботі з основними методами чисельного розв’язку прикладних задач і засобами їх комп'ютерної реалізації, використанні можливостей математичного пакету MATLAB.

Методичні вказівки містять 5 лабораторних робіт, у кожній з яких використовується широкий діапазон чисельних методів розв’язання математичних задач, передбачається дослідження у знаходженні найбільш оптимальних алгоритмів для розв’язання проблеми, формуються навички програмування чисельного розв'язку прикладних задач.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Лабораторні роботи з дисципліни “Чисельні методи” охоплюють практично всі розділи теоретичного курсу. Під час підготовки до лабораторної роботи необхідно вивчити за конспектом лекцій та літературою, що рекомендована викладачем, відповідний теоретичний матеріал.

По кожній лабораторній роботі оформляється звіт, що здається викладачеві на перевірку. Після виконання лабораторної роботи студент повинен захистити її. Оцінки, які були отримані за виконання і захист роботи, враховуються при отриманні заліку. Студенти, які не виконали всі лабораторні роботи, до одержання заліку не допускаються.

Звіт до кожної лабораторної роботи повинен містити:

- титульний аркуш із реквізитами найменування установи;
- найменування предмета, номер групи, прізвище і ініціали виконавця;
- варіант і повний опис постановки задачі;
- відповіді на контрольні запитання;
- листинг програми;
- опис результатів розрахунку у вигляді таблиць або графіків;
- при необхідності представити оцінки похибки обчислень;
- висновки за результатами виконаної роботи.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

ДІЇ НАД НАБЛИЖЕНИМИ ЧИСЛАМИ. ОЦІНКА ПОХИБОК РЕЗУЛЬТАТУ

ЦІЛЬ РОБОТИ: ознайомитися із загальними правилами дій над наближеними числами та оцінки абсолютної і відносної похибок.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називається абсолютною похибкою наближеного числа?
2. Що називається відносною похибкою наближеного числа?
3. Як визначити абсолютну похибку наближеного числа, якщо в ньому відома кількість вірних знаків після коми?
4. Як обчислити похибку при додаванні і відніманні наближених чисел?
5. Як обчислити похибку при множенні й діленні наближених чисел?
6. Як визначити похибку при обчисленні значення функцій однієї або багатьох змінних?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 – деяке число (відоме точно або не точно), а a – число, прийняте за наближене значення числа a_0, то число $\Delta(a) > 0$, що задовольняє нерівності

$$|a_0 - a| \le \Delta(a),$$

називається *абсолютною похибкою* наближеного числа a.

Абсолютна похибка числа $\Delta a = |a_0 - a|$ або $\Delta a = 0.5 \cdot 10^{-m}$, де m – кількість вірних знаків після десяткової точки.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \qquad \text{або у відсотках} \qquad \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\% .$$

Значущою цифрою наближеного числа називається будь-яка його цифра, починаючи з першої ненульової (рахуючи зліва направо).

Вірною цифрою (вірним знаком) наближеного числа a називається будь-яка його значуща цифра, для якої абсолютна похибка $\Delta(a)$ не перевершує половини розряду цієї цифри. Інші значущі цифри числа a називаються *сумнівними.*

Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр.

Остаточний наближений результат звичайно округляють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну. При розрахунках з наближеними числами в проміжних результатах зберігають одну, дві, а іноді й три сумнівні цифри.

Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок доданків:

$$\Delta(a_1 + ... + a_n) = \Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n).$$

Відносна похибка суми декількох чисел визначається за формулою

$$\delta(a_1 + ... + a_n) = \frac{\Delta(a_1 + ... + a_n)}{|a_1 + ... + a_n|} = \frac{\Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n)}{|a_1 + ... + a_n|}.$$

Відносна похибка добутку декількох чисел дорівнює сумі відносних похибок співмножників:

$$\delta(a_1 \cdot ... \cdot a_n) = \delta(a_1) + ... + \delta(a_n).$$

Абсолютна похибка добутку обчислюється за формулою

$$\Delta(a_1 \cdot ... \cdot a_n) = |a_1 \cdot .. \cdot .a_n| \cdot \delta(a_1 \cdot ... \cdot a_n).$$

Абсолютна і відносна похибки при піднесенні до степеню

$$\Delta(a^n) = n \cdot |a|^{n-1} \Delta a, \quad \delta(a^n) = \frac{n \cdot |a|^{n-1}}{|a|^n} \Delta a = n\delta a.$$

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Приклад.

Обчислити наближені значення виразів для заданих значень змінних. Визначити абсолютну і відносну похибки заданих наближених чисел. Обчислити абсолютну і відносну похибки результатів.

Розв’язок.

1) $X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, де $m = 28.3(\pm 0.02), \quad n = 7.45(\pm 0.01), \quad k = 0.678(\pm 0.003).$

$$X = 28.3^2 \cdot 7.45^3 / \sqrt{0.678} = 402185.9.$$

$$\Delta m = 0.02, \quad \Delta n = 0.01, \quad \Delta k = 0.003.$$

$$\delta m = \Delta m / |m|, \quad \delta n = \Delta n / |n|, \quad \delta k = \Delta k / |k|.$$

$$\delta m = 0.02 / 28.3 = 0.00071, \ \delta n = 0.01 / 7.45 = 0.00135, \ \delta k = 0.003 / 0.678 = 0.00443$$

$$.\delta X = 2\delta m + 3\delta n + 0.5\delta k = 0.00142 + 0.00405 + 0.00222 = 0.00769.$$

$$\Delta X = X \cdot \delta X = 402185.9 \cdot 0.00769 = 3 \cdot 10^3$$

Відповідь: $X = 4.02 \cdot 10^5 (\pm 3 \cdot 10^3), \quad \delta X = 0.008.$

2) $Y=\dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, де $n=3.0567(\pm 0.0001)$, $m=5.72(\pm 0.02)$.

$$n-1=2.0567(\pm 0.0001),\quad m+n=8.7767(\pm 0.0201),\quad m-n=2.6633(\pm 0.0201)$$

$$Y=\frac{2.0567\cdot 8.7767}{2.6633^2}=2.54485.$$

$$\delta(n-1)=0.0001/2.0567=0.000049,\quad \delta(m+n)=0.0201/8.7767=0.00229,$$

$$\delta(m-n)=0.0201/2.6633=0.00755.$$

$$\delta Y=\delta(n-1)+\delta(m+n)+2\cdot\delta(m-n)=0.000049+0.00229+2\cdot 0.00755=0.0174$$

.

$$\Delta Y=Y\cdot\delta Y=2.54485\cdot 0.0174=0.044.$$

Відповідь: $Y=2.54(\pm 0.044)$, $\delta Y=0.0174$.

3) $V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$, де $\pi=3.142$, $h=11.8$, $R=23.67$.

$$V=3.142\cdot 11.8^2\cdot(23.67-11.8/3)=437.49\cdot 19.737=8634.74.$$

$$\Delta\pi=0.0005,\quad \Delta h=0.05,\quad \Delta R=0.005,\quad \Delta(R-h/3)=\Delta R+\Delta h=0.055.$$

$$\delta\pi=0.0005/3.142=0.00016,\quad \delta h=0.05/11.8=0.0042,$$

$$\delta R=0.005/23.67=0.00021,\quad \delta(R-h/3)=0.055/19.737=0.0028.$$

$$\delta V=\delta\pi+2\delta h+\delta(R-h/3)=0.00016+2\cdot 0.0042+0.0028=0.011$$

$$\Delta V=V\cdot\delta V=8634.74\cdot 0.011=95.$$

Відповідь: $V=8.63\cdot 10^3\left(\pm 9.5\cdot 10^1\right)$, $\delta V=0.011$.

ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ

Обчислити наближені значення виразів для заданих значень змінних. Визначити абсолютну і відносну похибки заданих наближених чисел. Обчислити абсолютну і відносну похибки результатів.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

ВАРІАНТ №1.

1) $X=\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, де $a=3.85(\pm 0.01)$, $b=2.0435(\pm 0.0004)$, $c=962.6(\pm 0.1)$.

2) $Y=\left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$, де $a=4.3(\pm 0.05)$, $b=17.21(\pm 0.02)$, $c=8.2(\pm 0.05)$, $m=12.417(\pm 0.003)$, $n=8.37(\pm 0.005)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}:\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $a=1.141$, $b=3.156$, $h=1.14$.

ВАРІАНТ №2.

1) $X = \dfrac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$, де $a = 228.6(\pm 0.06)$, $b = 86.4(\pm 0.02)$, $c = 68.7(\pm 0.05)$.

2) $Y = \dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, де $a = 13.5(\pm 0.02)$, $b = 3.7(\pm 0.02)$, $m = 4.22(\pm 0.004)$, $c = 34.5(\pm 0.02)$, $d = 23.725(\pm 0.005)$.

3) $P = \dfrac{(a+b)h^3}{4} + \dfrac{(a+b)h}{12}$, де $a = 8.53$, $b = 6.271$, $h = 12.48$.

ВАРІАНТ №3.

1) $X = \dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, де $a = 3.845(\pm 0.004)$, $b = 16.2(\pm 0.05)$, $c = 10.8(\pm 0.1)$.

2) $Y = \dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$,

де $a = 2.754(\pm 0.001)$, $b = 11.7(\pm 0.04)$, $m = 0.56(\pm 0.005)$,
$c = 10.536(\pm 0.002)$, $d = 6.32(\pm 0.008)$.

3) $N = \dfrac{(a+b)^2}{2h} + \dfrac{(a^2+b^2)\cdot h}{5}$, де $a = 0.562$, $b = 0.2518$, $h = 0.68$.

ВАРІАНТ №4.

1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$, де $a = 3.456(\pm 0.002)$, $b = 0.642(\pm 0.0005)$, $c = 7.12(\pm 0.004)$.

2) $Y = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, де $a = 23.16(\pm 0.02)$, $b = 8.23(\pm 0.005)$, $c = 145.5(\pm 0.08)$, $d = 28.6(\pm 0.1)$, $m = 0.28(\pm 0.006)$.

3) $V = \dfrac{h}{3} \cdot S \cdot \left(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2}\right)$, де $a = 8.51$, $A = 23.42$, $S = 45.8$, $h = 3.81$.

ВАРІАНТ №5

1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$, де $a = 0.643(\pm 0.0005)$, $b = 2.17(\pm 0.002)$, $c = 5.843(\pm 0.001)$.

2) $Y = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, де $a = 27.16(\pm 0.006)$, $b = 5.03(\pm 0.01)$, $c = 3.6(\pm 0.02)$, $m = 12.375(\pm 0.004)$, $n = 86.2(\pm 0.05)$.

3) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$, де $h = 21.1$, $a = 22.08$, $b = 31.11$.

ВАРІАНТ №6

1) $X=\dfrac{ab}{c^2}$, де $a=0.3575(\pm 0.0002)$, $b=2.63(\pm 0.01)$, $c=0.854(\pm 0.0005)$.

2) $Y=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,

де $a=16.342(\pm 0.001)$, $b=2.5(\pm 0.03)$, $c=38.17(\pm 0.002)$,
$d=9.14(\pm 0.005)$, $m=3.6(\pm 0.04)$.

3) $V=\dfrac{1}{6}\pi\, h\left(3a^2+h^2\right)$, де $\pi=3.14$, $a=2.456$, $h=1.76$.

ВАРІАНТ №7

1) $V=\dfrac{\pi^2}{4}Da^2$, де $\pi=3.1416$, $D=54(\pm 0.5)$, $a=8.235(\pm 0.001)$.

2) $S=\dfrac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-a^4}$, де $\pi=3.142$, $D=36.5(\pm 0.1)$, $a=26.35(\pm 0.005)$.

3) $A=c^2\left(1+\dfrac{2\beta}{c}+\dfrac{\gamma}{c^2}\right)$, де $c=2.435$, $\beta=0.15$, $\gamma=1.27$.

ВАРІАНТ №8

1) $Y=\dfrac{m^2 n}{c^3}$, де $m=1.6531(\pm 0.0003)$, $n=3.78(\pm 0.002)$, $c=0.158(\pm 0.005)$.

2) $X=\dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$, де $a=9.542(\pm 0.001)$, $b=3.128(\pm 0.002)$, $m=2.8(\pm 0.03)$,
$c=0.172(\pm 0.001)$, $d=5.4(\pm 0.02)$.

$V=\dfrac{1}{15}\pi h\left(2D^2+Da+0.75a^2\right)$, де $h=84.2$, $D=28.3$, $a=42.08$.

ВАРІАНТ №9

1) $X=\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$, де $c=0.7568(\pm 0.0002)$, $d=21.7(\pm 0.02)$, $b=2.65(\pm 0.01)$.

2) $Y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, де $a=10.82(\pm 0.03)$, $b=2.786(\pm 0.006)$,
$m=0.28(\pm 0.006)$, $n=14.7(\pm 0.06)$.

3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=(a+b+c)/2$, де
$a=46.3$, $b=29.72$, $c=37.654$.

ВАРІАНТ №10

1) $F=\dfrac{qe^3}{48c}$, де $q=54.8(\pm 0.02)$, $e=2.45(\pm 0.01)$, $c=0.863(\pm 0.004)$.

2) $Q=\dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,

де $n=2.0435(\pm 0.0001)$, $x=4.2(\pm 0.05)$, $y=0.82(\pm 0.01)$.

3) $X=\dfrac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\dfrac{\beta(\alpha b-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$,

де $\alpha=5.27$, $\beta=0.0562$, $a=158.35$, $b=61.21$.

ВАРІАНТ №11.

1) $X=\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, де $a=4.16(\pm 0.005)$, $b=12.163(\pm 0.002)$, $c=55.18(\pm 0.01)$.

2) $Y=\left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$, де $a=5.2(\pm 0.04)$, $b=15.32(\pm 0.01)$, $c=7.5(\pm 0.05)$,
$m=21.823(\pm 0.002)$, $n=7.56(\pm 0.003)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}:\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $a=2.234$, $b=4.518$, $h=4.48$.

ВАРІАНТ №12.

1) $X=\dfrac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, де $a=315.6(\pm 0.05)$, $b=72.5(\pm 0.03)$, $c=53.8(\pm 0.04)$.

2) $Y=\dfrac{m^3(a+b)}{c-d}$, де $a=18.5(\pm 0.03)$, $b=5.6(\pm 0.02)$, $m=3.42(\pm 0.003)$,
$c=26.3(\pm 0.01)$, $d=14.782(\pm 0.006)$.

3) $P=\dfrac{(a+b)h^3}{4}+\dfrac{(a+b)h}{12}$, де $a=6.44$, $b=5.323$, $h=15.44$.

ВАРІАНТ №13.

1) $X=\dfrac{\sqrt{ab}}{c}$, де $a=4.632(\pm 0.003)$, $b=23.3(\pm 0.04)$, $c=11.3(\pm 0.06)$.

2) $Y=\dfrac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, де $a=3.236(\pm 0.002)$, $b=15.8(\pm 0.03)$, $m=0.64(\pm 0.004)$,
$c=12.415(\pm 0.003)$, $d=7.18(\pm 0.006)$.

3) $N=\dfrac{(a+b)^2}{2h}+\dfrac{(a^2+b^2)\cdot h}{5}$, де $a=0.834$, $b=0.3523$, $h=0.74$.

ВАРІАНТ №14.

1) $X=\dfrac{a^2b}{c}$, де $a=1.245(\pm 0.001)$, $b=0.121(\pm 0.0002)$, $c=2.34(\pm 0.003)$.

2) $Y=\dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, де $a=17.41(\pm 0.01)$, $b=1.27(\pm 0.002)$, $c=342.3(\pm 0.04)$, $d=11.7(\pm 0.1)$, $m=0.71(\pm 0.003)$.

3) $V=\dfrac{h}{3}\cdot S\cdot\left(1+\dfrac{a}{A}+\dfrac{a^2}{A^2}\right)$, де $a=5.71$, $A=32.17$, $S=51.7$, $h=2.42$.

ВАРІАНТ №15

1) $X=\dfrac{ab^3}{c}$, де $a=0.142(\pm 0.0003)$, $b=1.71(\pm 0.002)$, $c=3.727(\pm 0.001)$.

2) $Y=\dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, де $a=15.71(\pm 0.005)$, $b=3.28(\pm 0.02)$, $c=7.2(\pm 0.01)$, $m=13.752(\pm 0.001)$, $n=33.7(\pm 0.03)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}\cdot\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $h=17.8$, $a=32.47$, $b=11.42$.

ВАРІАНТ №16

1) $X=\dfrac{ab}{c^2}$, де $a=0.1756(\pm 0.0001)$, $b=3.71(\pm 0.03)$, $c=0.285(\pm 0.0002)$.

2) $Y=\dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$,
де $a=12.751(\pm 0.001)$, $b=3.7(\pm 0.02)$, $c=23.76(\pm 0.003)$, $d=8.12(\pm 0.004)$, $m=1.7(\pm 0.01)$.

3) $V=\dfrac{1}{6}\pi\, h\left(3a^2+h^2\right)$, де $\pi=3.142$, $a=7.751$, $h=3.35$.

ВАРІАНТ №17

1) $V=\dfrac{\pi^2}{4}Da^2$, де $\pi=3.14$, $D=72(\pm 0.3)$, $a=3.274(\pm 0.002)$.

2) $S=\dfrac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-a^4}$, де $\pi=3.1416$, $D=41.4(\pm 0.2)$, $a=31.75(\pm 0.003)$.

3) $A=c^2\left(1+\dfrac{2\beta}{c}+\dfrac{\gamma}{c^2}\right)$, де $c=7.834$, $\beta=0.21$, $\gamma=3.71$.

ВАРІАНТ №18

1) $Y=\dfrac{m^2n}{c^3}$, де $m=2.348(\pm 0.002)$, $n=4.37(\pm 0.004)$, $c=0.235(\pm 0.0003)$.

2) $X=\dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$,

де $a=8.357(\pm 0.003)$, $b=2.48(\pm 0.004)$, $m=3.17(\pm 0.01)$,
$c=1.315(\pm 0.0004)$, $d=2.4(\pm 0.02)$.

3) $V=\dfrac{1}{15}\pi h\left(2D^2+Da+0.75a^2\right)$, де $h=76$, $D=17.2$, $a=9.344$.

ВАРІАНТ №19

1) $X=\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$, де $c=0.8345(\pm 0.0004)$, $d=13.8(\pm 0.03)$, $b=1.84(\pm 0.006)$.

2) $Y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$, де $a=9.37(\pm 0.004)$, $b=3.108(\pm 0.0003)$,
$m=0.46(\pm 0.002)$, $n=15.2(\pm 0.04)$.

3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=(a+b+c)/2$, де
$a=10.5$, $b=34.18$, $c=27.327$.

ВАРІАНТ №20

1) $F=\dfrac{qe^3}{48c}$, де $q=38.5(\pm 0.01)$, $e=3.35(\pm 0.02)$, $c=0.734(\pm 0.001)$.

2) $Q=\dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$,

де $n=1.1753(\pm 0.0002)$, $x=5.8(\pm 0.01)$, $y=0.65(\pm 0.02)$.

3) $X=\dfrac{\alpha b-\beta a}{b^2}-\dfrac{\beta(\alpha b-\beta a)}{b^2(b+\beta)}$,

де $\alpha=7.31$, $\beta=0.0761$, $a=234.36$, $b=81.26$.

ВАРІАНТ №21.

1) $X=\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$, де $a=7.27(\pm 0.01)$, $b=5.205(\pm 0.002)$, $c=87.32(\pm 0.03)$.

2) $Y=\left(\dfrac{(a+b)c}{m-n}\right)^2$, де $a=2.13(\pm 0.01)$, $b=22.16(\pm 0.03)$, $c=6.3(\pm 0.04)$,
$m=16.825(\pm 0.004)$, $n=8.13(\pm 0.002)$.

3) $S=\dfrac{h^2}{18}:\dfrac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $a=5.813$, $b=1.315$, $h=2.56$.

ВАРІАНТ №22.

1) $X=\frac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$, де $a=186.7(\pm 0.04)$, $b=66.6(\pm 0.02)$, $c=72.3(\pm 0.03)$.

2) $Y=\frac{m^3(a+b)}{c-d}$, де $a=11.8(\pm 0.02)$, $b=7.4(\pm 0.03)$, $m=5.82(\pm 0.005)$, $c=26.7(\pm 0.03)$, $d=11.234(\pm 0.004)$.

3) $P=\frac{(a+b)h^3}{4}+\frac{(a+b)h}{12}$, де $a=9.05$, $b=3.244$, $h=20.18$.

ВАРІАНТ №23.

1) $X=\frac{\sqrt{ab}}{c}$, де $a=7.312(\pm 0.004)$, $b=18.4(\pm 0.03)$, $c=20.2(\pm 0.08)$.

2) $Y=\frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$, де $a=4.523(\pm 0.003)$, $b=10.8(\pm 0.02)$, $m=0.85(\pm 0.003)$, $c=9.318(\pm 0.002)$, $d=4.17(\pm 0.004)$.

3) $N=\frac{(a+b)^2}{2h}+\frac{(a^2+b^2)\cdot h}{5}$, де $a=0.445$, $b=0.4834$, $h=0.87$.

ВАРІАНТ №24.

1) $X=\frac{a^2b}{c}$, де $a=0.327(\pm 0.005)$, $b=3.147(\pm 0.0001)$, $c=1.78(\pm 0.001)$.

2) $Y=\frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$, де $a=32.37(\pm 0.03)$, $b=2.35(\pm 0.001)$, $c=128.7(\pm 0.02)$, $d=27.3(\pm 0.04)$, $m=0.93(\pm 0.001)$.

3) $V=\frac{h}{3}\cdot S\cdot\left(1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right)$, де $a=7.28$, $A=11.71$, $S=21.8$, $h=5.31$.

ВАРІАНТ №25

1) $X=\frac{ab^3}{c}$, де $a=0.258(\pm 0.0002)$, $b=3.45(\pm 0.001)$, $c=7.221(\pm 0.003)$.

2) $Y=\frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$, де $a=12.31(\pm 0.004)$, $b=1.73(\pm 0.03)$, $c=3.7(\pm 0.02)$, $m=17.428(\pm 0.003)$, $n=41.7(\pm 0.01)$.

3) $S=\frac{h^2}{18}\cdot\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$, де $h=32.5$, $a=27.51$, $b=21.78$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

ЦІЛЬ РОБОТИ: Вивчення теоретичного матеріалу: інтерполяція та апроксимація функцій, поліном Лагранжа, інтерполяційна формула Ньютона, інтерполяція сплайнами.

Одержання практичних навичок у використанні вбудованих функцій пакета MatLab, а також написанні програм, які використовуються для інтерполяції та апроксимації функцій.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. У чому полягає задача інтерполяції?
2. Яким умовам повинна задовольняти інтерполююча функція?
3. У чому полягає метод Лагранжа? Чому многочлен Лагранжа є інтерполюючою функцією?
4. У чому полягає метод Ньютона? Чому многочлен Ньютона є інтерполюючою функцією?
5. Який максимальний степінь інтерполяційного многочлена, побудованого на 9 вузлах інтерполяції?
6. Як можуть розташовуватися вузли інтерполяції при побудові інтерполяційного многочлена Лагранжа?
7. Як повинні розташовуватися вузли інтерполяції при побудові інтерполяційного многочлена Ньютона?
8. Як обчислюються кінцеві різниці? Як змінюються кінцеві різниці при збільшенні порядку?
9. Якого степеня інтерполяційний многочлен Ньютона можна побудувати по 10 вузлових точках, якщо кінцеві різниці 5-го порядку практично дорівнюють нулю?
10. Як визначається похибка інтерполяції?
11. Якими стандартними функціями представлена інтерполяція в системі Matlab?
12. В чому полягає задача апроксимації?
13. В чому полягає метод найменших квадратів?
14. Якими стандартними функціями представлена апроксимація в системі Matlab?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Постановка задачі інтерполяції

Нехай функція $y = f(x)$ задана у вигляді таблиці:

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

тобто на відрізку $[a, b]$ в $n+1$ точці $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ відомі значення:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots \quad , \quad y_n = f(x_n),$$

точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ називають *вузлами інтерполяції*, а $y_0, y_1, \dots, y_n$ – *значеннями функції у вузлах*.

Задача інтерполяції полягає у знаходженні значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в точці $x \in [a, b]$, що не збігається с заданими вузловими точками.

Для розв'язання завдання інтерполяції треба побудувати інтерполяційну *функцію* $y = F(x)$, таку що :

1) належить класу безперервних функцій;
1) приймає в заданих вузлових точках x_i значення $F(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$ задані в таблиці.

Тоді значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в деякій точці $x \in [a, b]$ вважають приблизно рівним значенню інтерполяційної функції $f(x) \approx F(x)$ у цій точці .

Інтерполяційну функцію звичайно шукають серед многочленів $P_n(x)$, *степінь яких не перевищує числа* n вважаючи, що в таблиці заданий $n+1$ вузол. Многочлен $P_n(x)$, що приймає у вузлових точках значення $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$ задані в таблиці, називають *інтерполяційним многочленом* для функції $y = f(x)$.

Заміна функції її інтерполяційним многочленом $f(x) \approx P_n(x)$ при $x \in [a, b]$ називається *інтерполяцією функції*. Звичайно, при цьому виникає питання про оцінку похибки такої заміни.

Геометричний зміст інтерполяції полягає в забраженні функції $y = f(x)$ у вигляді параболи $y = P_n(x)$ степені n, що проходить через задані в таблиці точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$...

Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай функція представлена у вигляді таблиці

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Для зручності припустимо, що $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Побудуємо інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ степені n, що має в заданих $n+1$ вузлах інтерполяції ті ж значення, що й задана функція

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_n(x, x_i) \cdot y_i = L_n(x, x_0) \cdot y_0 + L_n(x, x_1) \cdot y_1 + \dots + L_n(x, x_n) \cdot y_n =$$

$$= \frac{(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} \cdot y_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})} \cdot y_n$$

Це *інтерполяційний многочлен Лагранжа*, який є розв'язком задачі інтерполяції, тому що є многочленом степеня n, що приймає у вузлових точках задані в таблиці значення $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}$.

Многочлен Лагранжа можна записати у вигляді, що є більш зручним для програмування:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right) \cdot y_i$$

Інтерполяційний многочлен Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею.

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими із кроком h, тобто для кожного $i = \overline{1, n}$ $\quad x_i - x_{i-1} = h$. Виходячи із цього отримаємо $x_1 = x_0 + h$, $\quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, $\quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh \dots$

Розглянемо многочлен степеня n, записаний у вигляді

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Це буде перша інтерполяційна формула Ньютона. Інтерполяційний многочлен Ньютона має степінь n, але на відміну від многочлена

Лагранжа степені його членів постійно підвищуються, починаючи від нульової до n-ої. Тому додавання нового вузла інтерполяції дасть лише новий доданок у формулу Ньютона, але не змінить всіх попередніх.

Інтерполяція сплайнами

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблично :

$x_0 = a, x_n = b, x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n, \ y_i = f(x_i) \ i = 0, ..., n.$

Кубічною сплайн-інтерполяцією називається функція $\varphi(x)$ така, що

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n, \\ \varphi'(x_i - 0) = \varphi'(x_i + 0), \varphi''(x_i - 0) = \varphi''(x_i + 0) \quad i = 1, ..., n-1 \\ \varphi''(x_0) = 0, \ \varphi''(x_n) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

і $\varphi(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad x \in (x_{i-1}, \ x_i)$

Величини коефіцієнтів *a, b, c, d* знаходять із системи рівнянь (1).

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Режим командного рядка. Елементарні математичні функції. Графіка

При виклику **MatLab** на дисплей виводиться заставка, що переміняється **командним вікном**, у верхній частині якого розміщене **вікно керування** - меню з пунктами **Файл, Правка, Вікно, Допомога** та панель інструментів.

Нижче виводиться командний рядок (починається символом ">>") з попередніми пропозиціями викликати перелік розділів, увійти в довідник, відкрити вікно допомоги та ін.

У командному рядку в режимі діалогу можна набрати **команду** (оператор) або **вираз** і, натиснувши Enter, отримати відповідь (answer).

Для виконання команди без виведення результату у командне вікно наприкінці команди ставиться символ крапки з комою.

Будь-який фрагмент вікна командного рядка можна виділити і копіювати в буфер, наприклад, для переносу в Word. Можливий перенос у командний рядок текстових фрагментів з інших систем.

Як і в будь-якій системі, в MatLab існує поняття змінної величини, але в ролі її значення виступає масив (array).

Для завдання масиву використовується команда присвоювання.

Наприклад:

командою >>a=[1 2 3; 4 5 6] формується матриця розміру 2x3 з відповідними елементами;

командою >> b=[1 2 3] - вектор-рядок;

командою >> b=[1;2;3] - вектор-стовпець;

d=zeros(4,7) - матриця розміру 4x7 з нульовими елементами.

Для вибірки окремих елементів масивів можна користуватися індексами, наприклад, a(k,3) визначає третій елемент k-ого рядка, a(:,3) - весь третій стовпець.

Вбудована система контролю знаходить типові помилки при завданні масивів.

Зверніть увагу на наступне:

- при завданні масиву значеннями їх містять у квадратні дужки;
- елементи в рядку масиву розділяють пробілами або комами;
- при вказівці списку індексів використовують круглі дужки і розділові коми (вказівка індексу символом двокрапки відповідає завданню всіх значень за відповідним індексом).

При роботі з масивами можна користуватися списками **i:k** і **i:j:k.** У першому варіанті розуміємо **"від i до k із кроком 1"** і в другому - із кроком **j**.

До числової змінної застосовні всі арифметичні операції, але при виконанні ряду операцій доводиться розрізняти поелементні операції з масивами і операції над матрицями за правилами лінійної алгебри (для масивів перед знаком операції ставлять крапку).

Елементарні математичні функції

pi = 4*atan(1)=imag(log(-1))=3.1415926535897..;

abs(X) - абсолютна величина;

ceil(X), fix(X), floor(X), round(X) - округлення (до найближчого цілого, не меншого X; відкидання дробової частини; до найближчого цілого, не більшого X; до найближчого цілого);

mod(X,Y) - залишок від ділення X на Y;

sqrt(X) - квадратний корінь :

exp(X) - експонента e^x

pow2(X) - двійкова експонента 2^x;

log(X) - натуральний логарифм;

log2(X), log10(X) -логарифм по основі 2 і десятковий логарифм;

sin(X), cos(X), tan(X), cot(X), csc(X), sec(X) - тригонометричні функції (синус, косинус, тангенс, котангенс, косеканс, секанс);

asin(X), acos(X), atan(X), acot(X), acsc(X), asec(X) - обернені тригонометричні функції (арксинус, арккосинус і т.д.);

Графіка в лінійному масштабі

plot (y) - побудова графіка одномірного масиву залежно від номера елемента (для двовимірного масиву будуються графіки для стовпців);

plot (x,y) - побудова графіка функції y=y(x); при двовимірному x будуються графіки x=x(y); якщо обидва масиви двовимірні, будуються залежності для відповідних стовпців;

plot (x,y, LineSpec) - рядок LineSpec (до 3 символів) визначає стиль ліній , форму маркера точок і колір ліній і маркера:

Символ стилю лінії		**Колір**	
- безперервна	-	- жовтий -	y
- штрихова	--	- фіолетовий -	m
- подвійний пунктир	:	- голубий	- c
- штрихпунктирна	-.	- червоний -	r
		- зелений -	g
		- синій -	b
		- білий -	w
		- чорний	k

Маркер може визначатися символами :

. + * ° ґ s (квадрат) d (ромб) p (п'ятикутник) h (шестикутник).

За замовчуванням вибирається безперервна лінія із точковим маркером і чергуванням кольорів з жовтого по синій.

plot (x1,y1, LineSpec1, x1,y1, LineSpec2,...) - будує на одному графіку кілька ліній (діапазон по аргументу - об'єднання x1 і x2).

Інтерполяція функцій у середовищі MatLab

Система MatLab пропонує досить великий набір методів побудови інтерполяційних функцій.

Функція **spline(X,Y,Z)** виконує інтерполяцію Y=Y(X) кубічним сплайном і отримує відповідні значення у точках Z. Для отримання більшої інформації використовується конструкція **pp=spline(X,Y):** тут наступною командою **V=ppval(pp,Z)** можна знайти значення в точках Z.

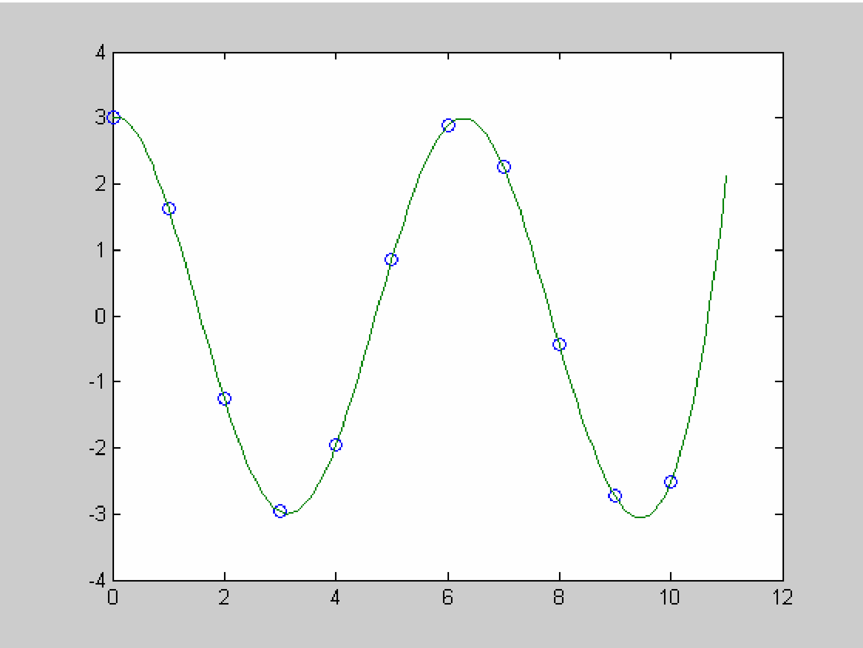
Функції **interp1(X,Y,Z), interp1(X,Y,Z,'method')** забезпечують одномірну табличну інтерполяцію для Y=Y(X) на масиві значень Z (якщо Y містить кілька стовпців, інтерполяція ведеться по кожному стовпцю; значення Z повинні входити в діапазон значень X). Можна вказувати метод інтерполяції – кусково-лінійної (*linear*, за умовчуванням), ступінчату (*nearest* - інтерполяція по сусідніх точках - це метод побудови кускової функції, при якому значення в будь-якій точці дорівнює значенню в найближчій вузловій точці), кубічної (*cubic*), кубічними сплайнами (*spline*).

Є можливість простої реалізації двовимірної табличної інтерполяції *Y=Y(X1,X2)* функціями **interp2(X1,X2,Y,Z1,Z2), interp2(X1,X2,Y,Z1,Z2,'method')** або **griddata(X1,X2,Y,Z1,Z2), griddata(X1,X2,Y,Z1,Z2, 'method')** для нерівномірної сітки, тривимірної інтерполяції *Y=Y(X1,X2,X3)* – **interp3(X1,X2,X3,Y,Z1,Z2, Z3), interp3(..., 'method'),** багатомірної інтерполяції *Y=Y(X1,X2,...)* - **interpn (X1,X2,..,Y, Z1,Z2,..), interp3(..., 'method').** Значення аргументу для вихідних таблиць повинні змінюватися монотонно і задаватися в спеціальному форматі функції meshgrid.

Розглянемо приклади, що ілюструють різні методи інтерполяції.

Приклад 1. Сплайн-інтерполяція в системі MATLAB:

```
>>x=0:10;  y=3*cos(x);
>>xl=0:0.1:10;
>>y1=spline(x,y,xl);
>>plot(x,y,'o',xl,yl,'-g');
```



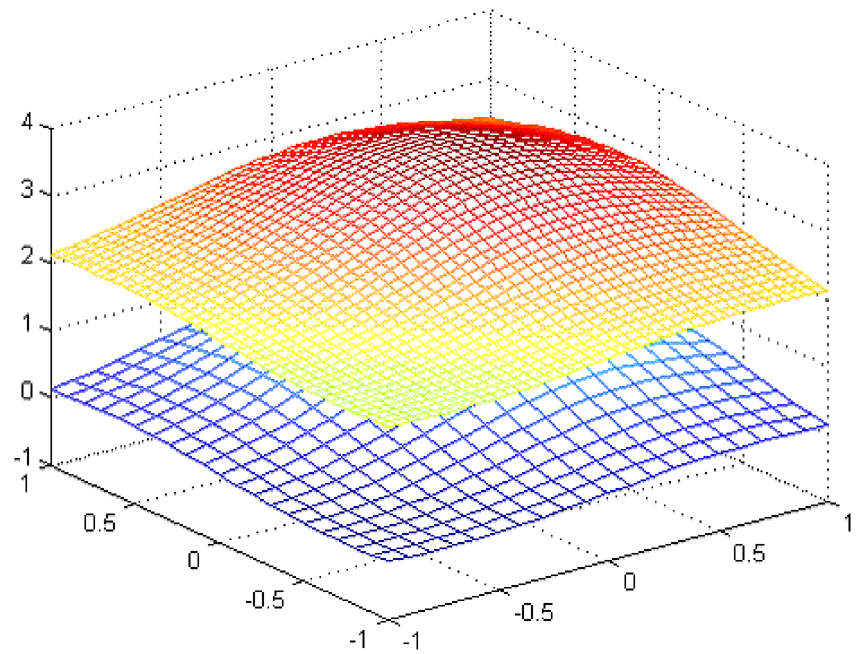
Приклад 2. Використання функції interpl.

```
 % Визначаємо експериментальні значення
>>X=[0.43 0.48 0.55 0.62 0.7 0.75];
>>Y=[1.63597 1.73234 1.87686 2.03345 2.22846 2.35973];
>>n=length(X); % Обчислюємо кількість експериментальних точок
>>t=[0.702  0.512  0.608]; %Визначаємо точки, у яких треба обчислити значення
```

```
>>xi=[X(l):0.02:X(length(X))]; % Ущільнюємо масив х для побудови графіка
 % Обчислюємо очікувані значення функції трьома способами в точках xi
>>yin=interp1 (X,Y,xi, 'nearest') ;
>>yil=interp1(X,Y,xi, 'linear') ;
>>yis=interp1(X,Y,xi, 'spline');
 % Обчислюємо очікувані значення функції трьома способами в точках, заданих в умові: tl = 0,702, t2 = 0,512, t3 = 0,608
>>ytn=interp1(X,Y,t,'nearest');
>>ytl=interp1(X,Y,t,'linear');
>>yts=interp1(X,Y,t, 'spline');
>>plot(X,Y,'bo', xi, yin,'-r', xi,yil,':c',xi,yis,'-m', t,ytn,'x',t,yts, '*');
```

Приклад 3. Програмний код і графічне подання отриманих результатів, що ілюструють двовимірну інтерполяцію таблично заданої функції в системі MATLAB.

При побудові графіка функції, заданої при x_1 і x_2 у діапазоні [–1;1] на порівняно великій сітці, можна виконати інтерполяцію на дрібній сітці. Так, виконавши наступні команди, одержуємо малюнок (графік функції на вихідній сітці і зміщений на 2 вгору графік результатів інтерполяції).




```
» [X1,X2]=meshgrid(-1:0.1:1); % Вихідна сітка
» Y=exp(-X1.^2-X2.^2).*(1+X1+X2); % Значення функції
» [Z1,Z2]=meshgrid(-1:0.05:1); % Сітка для інтерполяції
» Y2=interp2(X1,X2,Y,Z1,Z2); % Результат інтерполяції
» mesh(X1,X2,Y),hold on,mesh(Z1,Z2,Y2+2) % Графіка
```

Апроксимація функцій у середовищі MatLab

Апроксимацією називають функціональну залежності даних, представлених у табличному вигляді. Апроксимуюча функція не обов'язково повинна проходити через всі задані точки.

Одна з найбільш відомих апроксимацій - поліноміальна. У системі MatLab визначені функції апроксимації даних поліномами по методу найменших квадратів.

Нехай $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ - послідовність лінійно-незалежних функцій на [a,b]. Апроксимуючу функцію $\tilde{f}(x)$ будемо представляти у вигляді:

$$\tilde{f}(x) = c_1\ \varphi_1(x) + c_2\ \varphi_2(x) + \ldots + c_n\ \varphi_n(x),$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - невідомі параметри.

Тоді, відповідно до методу найменших квадратів, функціонал J, що є сумою квадратів відхилень функцій $f(x)$ і $\tilde{f}(x)$ в заданих точках, запишеться у вигляді:

$$J = \sum_{t=1}^{n}\left[f(x_t) - \tilde{f}(x_t)\right]^2$$

Параметри $c_1, c_2, \ldots, c_n$ будемо вибирати з умови мінімуму цього функціонала, тобто

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 0,\ j=1,n.$$

Для розв’язання задачі апроксимації використовують наступні функції:

1. Polyfit — дозволяє з найменшою середньоквадратичною похибкою апроксимувати функцію $f(x)$. Результатом її роботи є коефіцієнти полінома в порядку зменшення степенів змінної.
2. Polyval – дозволяє одержати масив значень полінома $p(x)$ для кожного елемента масиву x.

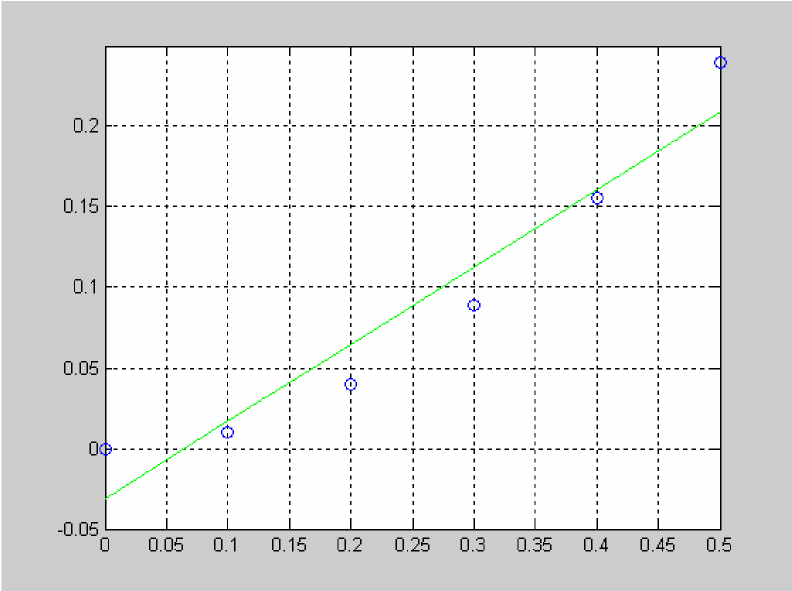
Розглянемо приклади.

Приклад 4. Апроксимація функції поліномом першого степеня.

polifit(X,Y,n) - апроксимація функції Y=Y(X) поліномом n-го степеня:

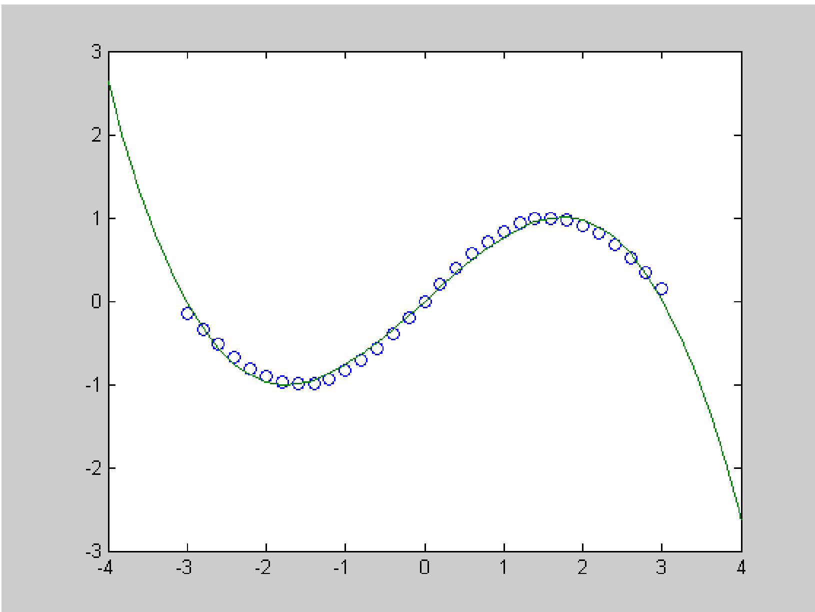
```
>> X=0:0.1:0.5;
>> F=X.*sin(X);
>> P=polyfit(X,F,1)
 P = 0.4814 -0.0314   % P(x)= 0.4814 x -0.0314
```

```
>> FF=polyval(P,X)
 FF = -0.0314 0.0168 0.0649 0.1130 0.1612 0.2093
>> plot(X,F,'ob', X,FF,'-g'),grid,axis([0 0.5 -0.05 0.25])
```



Приклад 5. Апроксимація таблично заданої функції поліномом третього степеня.

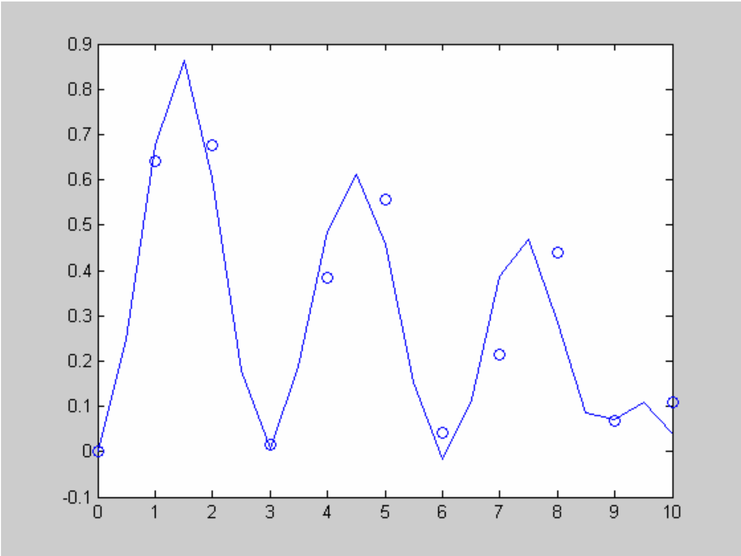
```
>> x=[-3:0.2:3]; y=sin(x);
>> p=polyfit(x,y,3);
>> f=polyval(p,x);
>>plot(x,y,'o',x,f);
```



Приклад 6.

interpft(Y,n,dim) - апроксимація періодичної функції на основі швидкого перетворення Фур'є (Y - одномірний масив значень функції; n - число вузлів у масиві значень):

```
>> X=0:10;
>> Y=sin(X).^2.*exp(-0.1. *X);
>> YP=interpft(Y,21);
>> xp=0:0.5:10;
>> plot(X,Y,'ob', xp,YP)
```



ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ.

Нехай функція задана таблично своїми значеннями у вузлах інтерполяції.

x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_0	y_1	y_2	…	y_n

Побудувати графік інтерполюючої функції, вузли інтерполяції відзначити на графіку.

Обчислити значення функції в трьох точках, що не збігаються з вузловими (точки вибрати довільно із заданого інтервалу).

Побудувати графік апроксимуючої функції, вузли апроксимації відзначити на графіку.

Вузли вибирають наступним чином: наприклад, варіант 12 – вузли з 12,0 до12,9 та відповідні значення функції.

Варіанти завдань

x	y(x)	x	y(x)	x	y(x)	x	y(x)
1,0	0	4,0	0,000196	7,0	0,00018	10,0	0,000108
1,1	0,324097	4,1	-5,19505	7,1	0,856485	10,1	-1,02845
1,2	0,643881	4,2	-10,3689	7,2	1,640842	10,2	-1,96638
1,3	0,922415	4,3	-14,959	7,3	2,27459	10,3	-2,72032
1,4	1,1253	4,4	-18,4126	7,4	2,692863	10,4	-3,21408
1,5	1,224745	4,5	-20,25	7,5	2,851227	10,5	-3,3964
1,6	1,20301	4,6	-20,1243	7,6	2,730379	10,6	-3,24618
1,7	1,054847	4,7	-17,8711	7,7	2,338403	10,7	-2,77495
1,8	0,788625	4,8	-13,5425	7,8	1,710348	10,8	-2,02598
1,9	0,425989	4,9	-7,41942	7,9	0,905108	10,9	-1,07035
2,0	$4{,}62\cdot10^{-5}$	5,0	0	8,0	$-9{,}6\cdot10^{-5}$	11,0	-0,00023
2,1	-0,44776	5,1	8,037451	8,1	-0,91714	11,1	1,080087
2,2	-0,87178	5,2	15,89357	8,2	-1,75557	11,2	2,064282
2,3	-1,2269	5,3	22,72513	8,3	-2,43156	11,3	2,854531
2,4	-1,47335	5,4	27,73269	8,4	-2,8763	11,4	3,37121
2,5	-1,58114	5,5	30,25	8,5	-3,04297	11,5	3,560925
2,6	-1,53356	5,6	29,82532	8,6	-2,91168	11,6	3,402017
2,7	-1,3294	5,7	26,2854	8,7	-2,49175	11,7	2,90698
2,8	-0,98363	5,8	19,77381	8,8	-1,82115	11,8	2,121544
2,9	-0,52634	5,9	10,75785	8,9	-0,96308	11,9	1,120452
3,0	-0,00011	6,0	0,001176	9,0	-10^{-13}	12,0	0,000357
3,1	0,543966	6,1	-11,4973	9,1	0,97427	12,1	-1,12952
3,2	1,051358	6,2	-22,5932	9,2	1,863736	12,2	-2,15806
3,3	1,469572	6,3	-32,1089	9,3	2,579679	12,3	-2,98314
3,4	1,753617	6,4	-38,9547	9,4	3,049516	12,4	-3,52184
3,5	1,870829	6,5	-42,25	9,5	3,224158	12,5	-3,71872
3,6	1,804553	6,6	-41,4287	9,6	3,083118	12,6	-3,55153
3,7	1,556275	6,7	-36,3182	9,7	2,636854	12,7	-3,03371
3,8	1,145949	6,8	-27,1814	9,8	1,926069	12,8	-2,21331
3,9	0,610438	6,9	-14,7151	9,9	1,01801	12,9	-1,16858

13,0	-0,00055	16,3	-1,86182	19,6	1,29113	22,9	-0,87009
13,1	0,447264	16,4	-2,20969	19,7	1,142726	23,0	-0,00046
13,2	0,871348	16,5	-2,34521	19,8	0,86201	23,1	0,309544
13,3	1,226577	16,6	-2,25098	19,9	0,46989	23,2	0,591083
13,4	1,473176	16,7	-1,93222	20,0	0,000974	23,3	0,816324
13,5	1,581139	16,8	-1,41658	20,1	-0,49956	23,4	0,962789
13,6	1,533737	16,9	-0,7518	20,2	-0,98043	23,5	1,015605
13,7	1,329751	17,0	-0,00128	20,3	-1,38957	23,6	0,969005
13,8	0,984119	17,1	0,761981	20,4	-1,67979	23,7	0,826959
13,9	0,526919	17,2	1,462508	20,5	-1,8141	23,8	0,602835
14,0	0,000735	17,3	2,029831	20,6	-1,77023	23,9	0,318152
14,1	-0,54336	17,4	2,405585	20,7	-1,54364	24,0	0,000505
14,2	-1,05084	17,5	2,549509	20,8	-1,14883	24,1	-0,3191
14,3	-1,46919	17,6	2,443738	20,9	-0,6186	24,2	-0,60929
14,4	-1,75341	17,7	2,094918	21,0	-0,00133	24,3	-0,84138
14,5	-1,87083	17,8	1,533913	21,1	0,643412	24,4	-0,99223
14,6	-1,80476	17,9	0,8131	21,2	1,250753	24,5	-1,04654
14,7	-1,55668	18,0	0	21,3	1,757043	24,6	-0,99841
14,8	-1,14651	18,1	-0,06906	21,4	2,106558	24,7	-0,85196
14,9	-0,61111	18,2	-0,20633	21,5	2,257585	24,8	-0,62099
15,0	-0,00091	18,3	-0,36975	21,6	2,187247	24,9	-0,32771
15,1	0,624825	18,4	-0,52416	21,7	1,894532	25,0	-0,00055
15,2	1,203832	18,5	-0,63728	21,8	1,401147	25,1	0,328549
15,3	1,677044	18,6	-0,68247	21,9	0,750042	25,2	0,627288
15,4	1,994648	18,7	-0,64188	22,0	0,001688	25,3	0,866148
15,5	2,12132	18,8	-0,50883	22,1	-0,77156	25,4	1,021332
15,6	2,040105	18,9	-0,28908	22,2	-1,49251	25,5	1,077122
15,7	1,754519	19,0	-0,00059	22,3	-2,08686	25,6	1,027476
15,8	1,288629	19,1	0,328168	22,4	-2,49087	25,7	0,876673
15,9	0,685062	19,2	0,661197	22,5	-2,6582	25,8	0,638952
16,0	0,001095	19,3	0,95903	22,6	-2,56506	25,9	0,337172
16,1	-0,6968	19,4	1,183327	22,7	-2,21332		
16,2	-1,33944	19,5	1,301545	22,8	-1,63099		

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

ЦІЛЬ РОБОТИ: Знайомство з методами розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь: методом Ейлера, модифікованим методом Ейлера, методом Рунге-Кутта.

Одержання практичних навичок у використанні вбудованих функцій пакета MatLab, а також написанні програм, які використовуються для розв'язання даної задачі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називається звичайним диференціальним рівнянням?
2. Що є розв'язком звичайного диференціального рівняння?
3. Що називається задачею Коші для диференціального рівняння?
4. Що є розв'язком задачі Коші?
5. У якому вигляді будується наближений розв'язок задачі Коші?
6. Якою величиною визначається похибка різних методів розв'язку задачі Коші?
7. Чим відрізняється модифікований метод Ейлера від звичайного методу Ейлера?
8. У чому полягає метод Рунге-Кутта?
9. Якими стандартними функціями MatLab реалізується розв'язання ОДУ (перерахувати основні)?
10. Як можна при виклику метода ОДУ реалізувати побудову графіка шуканої функції?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Загальні відомості. Постановка задачі

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення, що зв'язує між собою незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ і її першу похідну $y'(x)$

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

або рівняння, що розв'язане відносно похідної

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку означає знайти таку функцію $y = y(x)$, при підстановці якої в рівняння виходить вірна тотожність.

Задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку називається задача знаходження розв'язку диференціального рівняння

$y' = f(x, y)$ при заданій початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Розв'язком задачі Коші вважається функція $y = y(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння, графік якої проходить через точку з координатами (x_0, y_0).

Системою диференціальних рівнянь першого порядку називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Розв'язати систему диференціальних рівнянь означає знайти такі функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, при підстановці яких кожне рівняння системи звертається у вірну тотожність.

Задачею Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку називається задача знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

при заданих початкових умовах

$y_1(x_0) = a_1, \qquad y_2(x_0) = a_2, \ldots, \qquad y_n(x_0) = a_n$...

Розв'язком задачі Коші вважається n функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, що є розв'язком системи диференціальних рівнянь і задовольняючих початковим умовам $y_1(x_0) = a_1$, $y_2(x_0) = a_2$, …, $y_n(x_0) = a_n$...

При розв'язанні диференціального рівняння n-го порядку чисельними методами варто перетворити його у відповідну систему диференціальних рівнянь першого порядку.

При розв'язанні задачі Коші для диференціальних рівнянь і їх систем на практиці в основному застосовуються чисельні методи, які дозволяють знайти розв'язок у вигляді таблиці наближених значень функції $y = y(x)$.

Метод Ейлера розв’язку диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо задачу знаходження наближеного розв’язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ при заданій початковій умові $y(x_0) = y_0$ на відрізку $[a; b]$.

Для знаходження чисельного розв’язку задачі розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних відрізків, довжина яких $h = \dfrac{b-a}{n}$. Число h називається *кроком інтегрування*. Наближені значення шуканої функції $y = y(x)$ визначаються в точках ділення $x_0 = a,\quad x_i = x_0 + i \cdot h,\quad (i = \overline{1,n}),\quad x_n = b$.

Метод Ейлера є найбільш простим із всіх методів чисельного розв’язання диференціальних рівнянь. Геометрично він полягає в тому, що на малому відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ розв’язок $y = y(x)$ диференціального рівняння заміняється відрізком її дотичної в точці $(x_i; y(x_i))$.

З'єднавши точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$, одержимо ламану, що приблизно представляє графік функції, що є розв’язком диференціального рівняння із заданими початковими умовами. Цю ламану прийнято називати *ламаною Ейлера.* Ця ламана являє собою кусково-лінійну функцію, що є наближеним розв’язком задачі на відрізку $[a; b]$.

Алгоритм методу Ейлера.

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального рівняння $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок ділення відрізка $[a; b]$ на частини і обчислимо крок інтегрування $h = \dfrac{b-a}{n}$. Покладемо $k = 0$.

2. На k-ом кроці виконаємо обчислення по ітераційним формулам методу Ейлера

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h,$$
$$k = k + 1.$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення $y_0, y_1, ..., y_n$ являють собою наближені значення шуканого розв’язку рівняння в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Обчислення по методу Ейлера доцільно оформляти у вигляді таблиці.

Похибка при заміні розв'язку $y = y(x)$ ламаною Ейлера, що обчислюється в точці x_n, має порядок $\frac{1}{n}$ або h. Тому, чим менше крок інтегрування h, тим краще наближений розв'язок представляє точний.

Модифікований метод Ейлера для диференціального рівняння першого порядку

Модифікація методу Ейлера полягає в тому, що на малому відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння заміняється відрізком прямої лінії, що проходить через точку $(x_i; y(x_i))$, але з кутовим коефіцієнтом, обумовленим з урахуванням поводження шуканої функції.

Алгоритм модифікованого методу Ейлера.

Нехай відомі:

– функція $f(x, y)$ з диференціального рівняння $y' = f(x, y)$,
– початкові значення x_0, y_0,
– проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок ділення відрізка $[a; b]$ на частки і обчислимо крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Покладемо $k = 0$.

2. На k-ом кроці виконаємо обчислення за ітераційними формулами метода Ейлера

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k),$$
$$\alpha_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_1 \cdot \frac{h}{2}\right),$$
$$y_{k+1} = y_k + \alpha_2 \cdot h,$$
$$x_{k+1} = x_k + h,$$
$$k = k + 1.$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення $y_0, y_1, ..., y_n$ являють собою наближені значення шуканого розв'язку рівняння в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Похибка даного методу має порядок $\frac{1}{n^3}$ на кожному кроці. Однак з кожним кроком відбувається нагромадження похибки, і в точці $x_n = b$ похибка уже буде мати порядок $\frac{1}{n^2}$.

Метод Рунге-Кутта

Геометрично цей метод для задачі Коші також полягає в тому, що на малому відрізку $[t,t+h]$ інтегральна крива $y=y(t)$ рівняння $y'=f(t,y)$ заміняється відрізком прямої, що проходить через точку $(t,y(t))$. Однак в основу методу покладений більше тонкий, чим у методах Ейлера, підхід до визначення напрямку цього відрізка прямої.

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Реалізація методів розв'язку ОДУ в середовищі MatLab

У системі MatLab передбачені спеціальні засоби розв'язку задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, заданих як у явній формі $\frac{dx}{dt}=F(t,x)$, так і в неявній $M\frac{dx}{dt}=F(t,x)$ (де M– матриця), що забезпечує користувачеві можливість вибору методу, завдання початкових умов і ін.

У найпростішому варіанті достатньо скористатися командою [T,X]=solver('F', [DT], X0, ...), де DT - діапазон інтегрування, X0 - вектор початкових значень, F - ім'я функції обчислення правих частин системи, solver - ім'я використовуваної функції (ode45 - метод Рунге-Кутта 4 і 5-го порядків, ode23 - той же метод 2 і 3-го порядків, ode113 - метод Адамса - для нежорстких систем, ode23s, ode15s - для жорстких систем і ін.).

Версії розрізняються використовуваними методами (за замовчуванням відносна похибка 10^{-3} і абсолютна 10^{-6}), відповідним часом і успішністю розв'язання. Під жорсткістю розуміють підвищені вимоги до точності – використання мінімального кроку у всій області інтегрування. Якщо діапазон DT заданий початковим і кінцевим значенням $[t_0,t_k]$, то кількість елементів у масиві T (і в масиві розв'язків X) визначається необхідним для забезпечення точності кроком; при завданні DT у вигляді $[t_0,t_1,t_2,...,t_k]$ або $[t_0:Dt:t_k]$ – зазначеними значеннями.

Розглянемо деякі приклади.

Загальний порядок програмування:
1) Створюється М-функція з описом правих частин диференціальних рівнянь;
2) Створюється М-сценарій за обраним методом.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{dx}{dt} = t * e^{-t}$ в інтервалі $t \in [0, 0.5]$ з початковою умовою x(0) =1.

Створюємо М-файл:

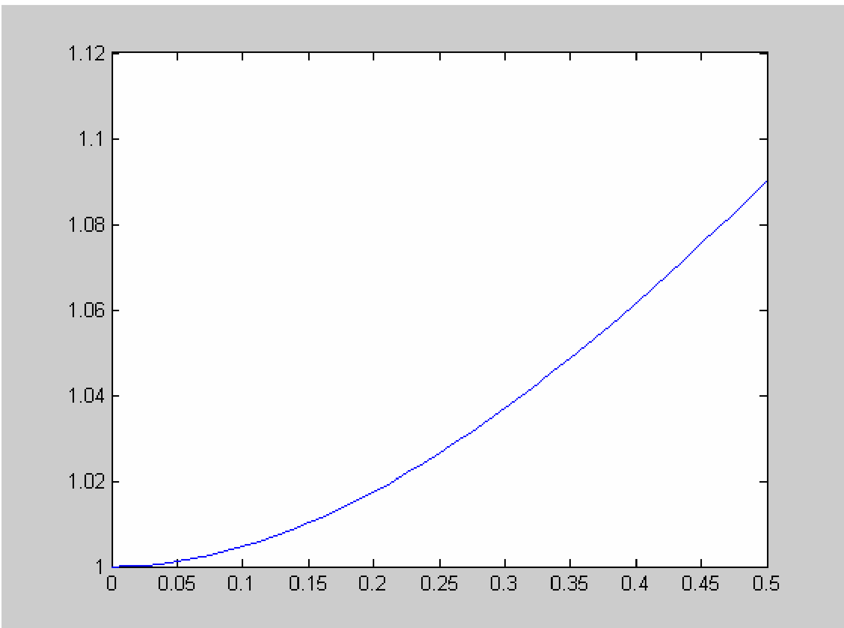
```
function f =odu1(t,x)
f=t*exp(-t);
```

У командному вікні:

```
>> [T,X]=ode45 ('odu1', [0, 0.5], 1)

        X =     1.0000      1.0001      1.0003      1.0007      1.0012      1.0019
1.0027      1.0036      1.0047      1.0059      1.0072      1.0086      1.0102
1.0119      1.0136      1.0155      1.0175      1.0196      1.0218      1.0241
1.0265      1.0290      1.0315      1.0342      1.0369      1.0398      1.0427
1.0456      1.0487      1.0518      1.0550      1.0582      1.0616      1.0649
1.0684      1.0719      1.0754      1.0791      1.0827      1.0864      1.0902

>> plot(T,X)
```



Приклад 2. Розв’язати наступну систему звичайних диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами:

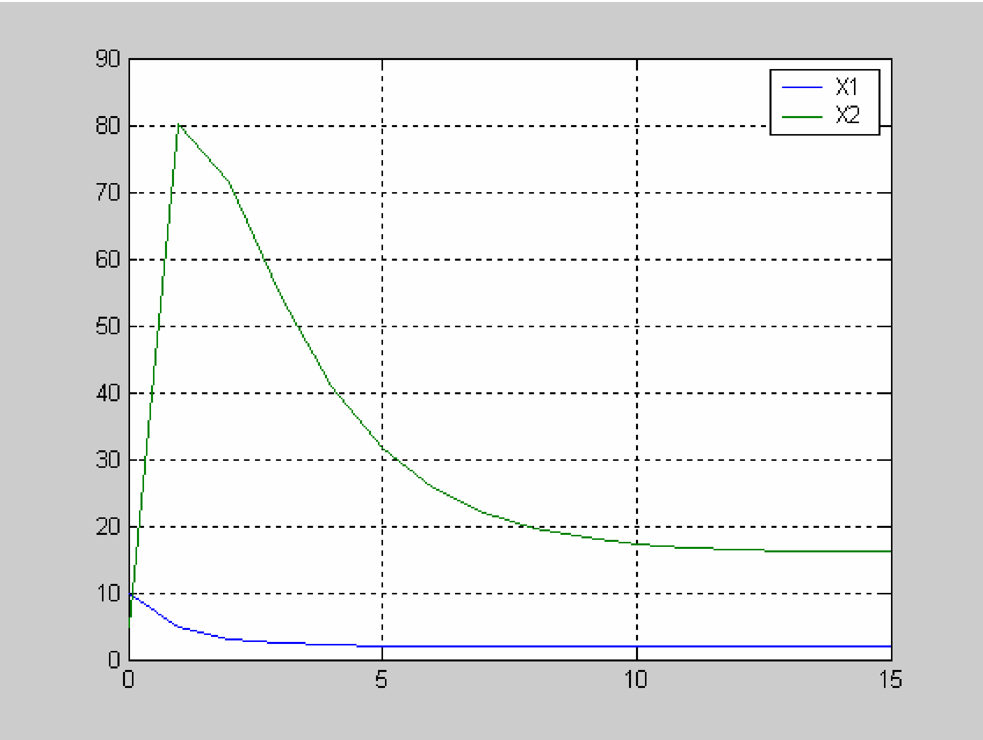
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2, \quad x_1(0) = 10;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1^2 - 0.5x_2, \quad x_2(0) = 5.$$

```
% Створюємо М-функцію під ім'ям dif31.m
function dx31=dif31(t,x);
dx31=[-x(1)+2;2*x(1)^2-0.5*x(2)];
```

```
% Створюємо М-сценарій розв’язку за допомогою ode45

T=[0:15]; % Інтервал інтегрування
x0=[10;5]; % Початкові умови
[t,x]=ode45('dif31',T,x0); % t, x - вихідні змінні методу ode45
plot(t,x),grid, legend('X1','X2')
```



ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ.

Розглянути задачу, що складається в пошуку розв’язку звичайного диференціального рівняння $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ для t від t_0 до t_k із кроком Δ t=0.01 при початковій умові $y(t_0)=y_0$ (задачу Коші).

Знайдіть розв’язок задачі в середовищі MatLab стандартними засобами (наприклад, функцією ode45); побудуйте графік знайденого розв’язку.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

№1. $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0.5$, [0;5] .

№2 $y' = 2x + 0.1y^2, \quad y(0) = 0.2$, [0;7].

№3. $y' = 2x + y^2, \quad y(0) = 0.3$, [0;10]

№4. $y' = x^2 + xy, \quad y(0) = 0.2$, [0;6].

№5. $y' = 0.2x + y^2, \quad y(0) = 0.1$, [0;7].

№6. $y' = x^2 + y, \quad y(0) = 0.4$, [0;5].

№7. $y' = x^2 + 2y, \quad y(0) = 0.1$, [0;6].

№8. $y' = xy + y^2, \quad y(0) = 0.6$, [0;9].

№9. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.7$, [0;7].

№10. $y' = x^2 + 0.2y^2, \quad y(0) = 0.2$, [0;11].

№11. $y' = 0.3x + y^2, \quad y(0) = 0.4$, [0;7].

№12. $y' = 0.1x + 0.2y^2, \quad y(0) = 0.3$, [0;9].

№13. $y' = x + 0.3y^2, \quad y(0) = 0.3$, [0;8].

№14. $y' = 2x^2 + xy, \quad y(0) = 0.5$, [0;5].

№15. $y' = 0.1x^2 + 2xy, \quad y(0) = 0.8$, [0;6].

№16. $y' = x^2 + 0.2xy, \quad y(0) = 0.6$, [0;10].

№17. $y' = 3x^2 + 0.1xy, \quad y(0) = 0.2$, [0;4].

№18. $y' = x^2 + 3xy, \quad y(0) = 0.3$, [0;9].

№19. $y' = x^2 + 0.1y^2, \quad y(0) = 0.7$, [0;8].

№20. $y' = 2x^2 + 3y^2, \quad y(0) = 0.2$, [0;7].

№21. $y' = 0.2x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.8$, [0;6].

№22. $y' = 0.3x^2 + 0.1y^2, \quad y(0) = 0.3$, [0;5].

№23. $y' = xy + 0.1y^2, \quad y(0) = 0.5$, [0;4].

№24. $y' = 0.2xy + y^2, \quad y(0) = 0.4$, [0;7].

№25. $y' = 0.1xy + 0.3y^2, \quad y(0) = 0.2$, [0;9].

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ОДУ

Звести диференціальне рівняння другого порядку із заданими початковими умовами до системи диференціальних рівнянь першого порядку і розв'язати за допомогою стандартних функцій MatLab.

1. $4xy'' + 2y' + y = 0; \quad y(1) = 1;\ y'(1) = 1;\ [1;3];\ h = 0{,}02.$

2. $y'' = xy' - y + 1; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0;\ [0;1];\ h = 0{,}1.$

3. $y'' + y' = x^2 y; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ [0;1];\ h = 0{,}1.$

4. $y'' = \dfrac{y'}{x} - 4y; \quad y(1) = 1;\ y'(1) = 1;\ [1;1{,}8];\ h = 0{,}08.$

5. $x^2 y'' - 2yy' = 4y(x^4 - 1); \quad y(1) = 0;\ y'(1) = 1;\ [1;1{,}5];\ h = 0{,}05.$

6. $y'' - xy^2 + 2y = x^2; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ [0;1];\ h = 0{,}1.$

7. $y'' + \dfrac{y'}{x} + y = 0; \quad y(1) = 1;\ y'(1) = 0;\ [1;1{,}8];\ h = 0{,}05.$

8. $y'' + y\cos x = 0; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0;\ [0;1];\ h = 0{,}04.$

9. $y'' - xy' - y = 0; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ [0;1];\ h = 0{,}03.$

10. $y'' = yy' - \cos x - y; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ [0;1{,}5];\ h = 0{,}03.$

11. $y'' = y'\sin x - y + 1; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1;\ [0;2];\ h = 0{,}08.$

12. $y'' = \cos x - y^2 + y' + 3x; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0;\ [0;1{,}5];\ h = 0{,}06.$

13. $y'' = yy' - x^2; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1; [0;2];\ h = 0{,}03.$

14. $y'' = (1 + x^2)y; \quad y(0) = 2;\ y'(0) = 2; [0;2];\ h = 0{,}05.$

15. $y'' = 2xy - 3y' + x^3; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 1; [0;2];\ h = 0{,}07.$

16. $y'' = x^2 + yy' - e^x; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 1; [0;1{,}5];\ h = 0{,}04.$

18. $y'' = x\cos x - y^2 - e^{2x}; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 1; [0;1{,}5];\ h = 0{,}04.$

19. $y'' = y' + x^2 - y^2; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1; [0;2];\ h = 0{,}06.$

20. $y'' = xy' - y + e^x; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0; [0;1{,}4];\ h = 0{,}03.$

21. $y'' = 3y^2 y' - 1; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0; [0;1{,}5];\ h = 0{,}03.$

22. $y'' = xyy'; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 1; [0;1{,}8];\ h = 0{,}08.$

23. $y'' = xe^x + 2yy'; \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1; [0;1{,}6];\ h = 0{,}07.$

24. $y'' = xy - y' + \sin x; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 0; [0;1{,}9];\ h = 0{,}08.$

25. $y'' = 2x - 3xy' + y^3; \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 1; [0;2];\ h = 0{,}07.$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

ЦІЛЬ РОБОТИ: ознайомитися із загальними відомостями про диференціальні рівняння в частинних похідних. Розглянути основні властивості пакету PDE Toolbox MATLAB, а також приклади розв'язання деяких задач PDETOOL.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Постановка задач для рівнянь у частинних похідних.
2. Які умови називаються початковими умовами, а які - граничними?
3. Які умови задаються для еліптичних рівнянь? На які класи підрозділяють ці умови?
4. Назвати основні властивості пакета PDE Toolbox MATLAB.
5. Як в pdetool можна задавати тип розв'язуваної задачі?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Загальні відомості про диференціальні рівняння в частинних похідних

Постановка задач для рівнянь у частинних похідних включає визначення самого рівняння (або системи декількох рівнянь), а також необхідної кількості крайових умов (число і характер завдання яких визначаються специфікою рівняння). Рівняння повинні містити частинні похідні невідомої функції (або декількох функцій, якщо рівнянь більше одного) по різних аргументах, наприклад, просторової змінної ***x*** і часу ***t*.** Відповідно, для розв'язання задачі потрібно обчислити функцію декількох змінних, наприклад, ***u(x,t)*** у деякій області визначення аргументів ***0<x<L*** і ***0<t<T***.

Лінійним рівнянням у частинних похідних другого порядку називається співвідношення між функцією $u(x,y)$ (або $u(x,t)$) і її частинними похідними вигляду:

$$L(u)=A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+ \\ +E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+G(x,y)u=F(x,y) \qquad (1.1)$$

У випадку, якщо $F=0$, то рівняння (1.1) називається однорідним, інакше – неоднорідним.

Якщо B^2-$AC<0$, то рівняння (1.1) відноситься до класу еліптичних рівнянь; якщо B^2-$AC>0$, те (1.1) – гіперболічне рівняння; якщо B^2-$AC=0$, то (1.1) – параболічне рівняння.

У випадку, коли B^2-AC не має постійного знака, одержуємо рівняння змішаного типу.

За допомогою перетворення змінних *x, y* (або *x, t*) рівняння можна звести до вигляду, коли $B=0$. У цьому випадку дуже просто визначається тип рівняння. Якщо *A* и *C* мають один і той же знак, то (1.1) відноситься до класу еліптичних рівнянь; якщо різні, то – гіперболічних, а якщо *A* або C дорівнює *0*, то рівняння відноситься до параболічних.

Для знаходження єдиного розв'язку диференціального рівняння в частинних похідних необхідно задати початкові і граничні умови. Початковими умовами прийнято називати умови, задані в початковий момент часу ***t***. Граничні умови задаються при різних значеннях просторових змінних. Для еліптичних рівнянь задаються тільки граничні умови, які можна розділити на три класи:

- умова Дирихлє: $u\,|_{(x,y,z)\in \Gamma} = \varphi(t)$.

У цьому випадку на границі області Г, у якій шукається рішення, задана деяка безперервна функція $\varphi(t)$. В одномірному випадку ця умова приймає вид:

$$u(0,t) = \varphi_1(t);\quad u(L,t) = \varphi_2(t);$$

де *(0,L)* – інтервал, на якому шукається розв'язок одномірної задачі;

- умова Неймана: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x,y,z)\in \Gamma} = \varphi(t)$.

У цьому випадку на границі області задана похідна по напрямку n зовнішньої нормалі;

- змішана умова: $\left.\left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{(x,y,z)\in \Gamma} = \varphi(t)$.

Для параболічних рівнянь крім граничних умов, необхідно визначити одну початкову, яке може бути такою:

$$u(x,t_0) = \psi(x).$$

У випадку гіперболічних рівнянь початкові умови можуть бути наступними:

$$u(x,t_0) = \psi_1(x) \quad \text{і} \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = \psi_2(x)$$

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Пакет PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION (PDE)

Пакет Partial Differential Equation (PDE) містить засоби для чисельного моделювання нестаціонарних фізичних полів, описуваних рівняннями в частинних похідних другого порядку. У пакеті використовується проекційний метод Гальоркіна з кінцевими елементами. Команди і графічний інтерфейс пакета можуть бути використані для математичного моделювання фізичних полів у двовимірній розрахунковій області стосовно до широкого класу інженерних і наукових додатків, включаючи задачі опору матеріалів, розрахунки електромагнітних пристроїв, задачі тепломасопереносу і дифузії.

Основні властивості PDE Toolbox MATLAB:

- Повноцінний графічний інтерфейс для обробки PDE другого порядку
- Автоматичний і адаптивний вибір кінцевоелементної сітки
- Завдання граничних умов: Дирихлє, Неймана і змішані
- Гнучка постановка задачі з використанням синтаксису мови MATLAB
- Повністю автоматична сіткова розбивка і вибір величини кінцевих елементів
- Нелінійні і адаптивні розрахункові схеми
- Можливість візуалізації отриманого в ході розв’язку PDE розподілу необхідних фізичних величин, демонстрація прийнятої розбивки і анімаційні ефекти.

Приклади розв'язання деяких задач PDETOOL

1. Розв'язання еліптичних рівнянь

Розглянемо задачу про розподіл тепла в пластині.

Знайти розподіл тепла в області G, зображеної на малюнку

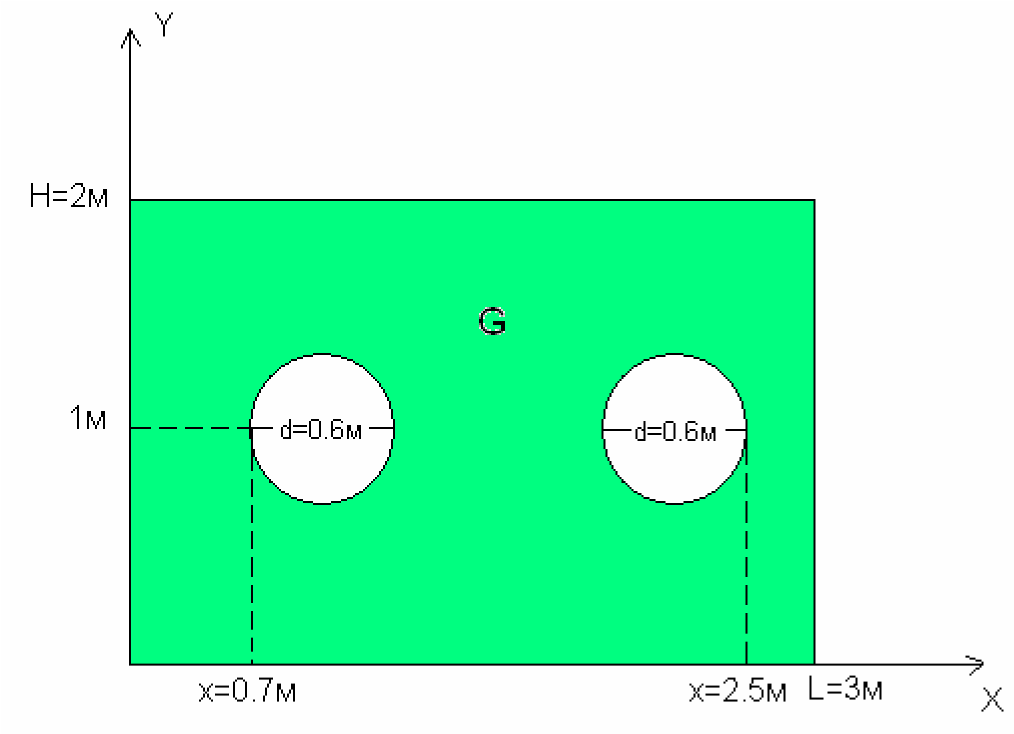


Рисунок 1 – Область G

Кругові отвори мають однаковий розмір діаметра – 0.6 м. Права і ліва границі теплоізольовані. Коефіцієнт теплопровідності a^2=225. На верхній і нижній границі області G температура дорівнює 580, на колах дорівнює 450.

Диференціальне рівняння, що описує розподіл температури, можна записати таким способом:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{5.1}$$

Граничні умови на лівій і правій границі мають вигляд:

$$na^2\frac{\partial u}{\partial n}=0 \tag{5.2}$$

Тут n- вектор нормалі до границі.

Таким чином, задача про розподіл тепла в області G повністю описується даним рівнянням і граничними умовами.

Розглянемо процес розв'язання цієї задачі в pdetool.

Перший етап – конструювання області. Після запуску середовища pdetool область розв'язання задачі буде належати прямокутнику [-1.5 1.5; -1 1]. Установимо інші границі зміни x і y. Для зміни границь відображуваної області по x і y необхідно виконати команду меню **Options/Axes Limits** (Настроювання/Межі осей), після чого з'явиться вікно, у якому зазначені границі зміни x і y. Змінимо границі.

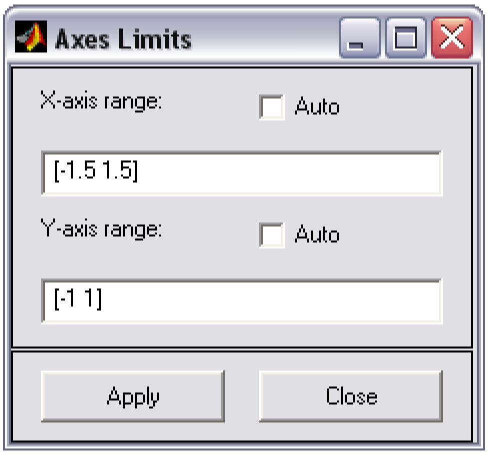


Рисунок 1.1 - Вікно **Axes Limits**

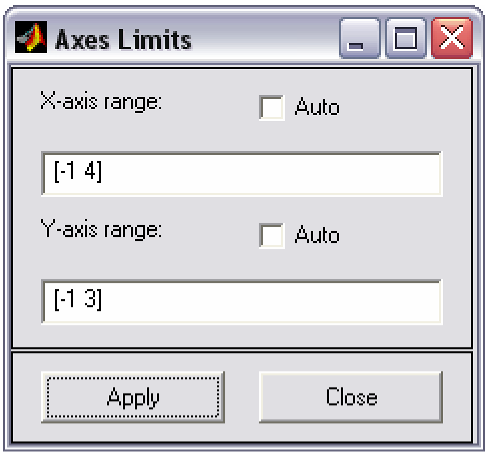


Рисунок 1.2 - Вікно **Axes Limits** зі зміненими значеннями границь

Для зручності на координатній сітці зобразимо лінії сітки. Для цього необхідно виконати команду меню **Options/Grid** (Настроювання/сітка), після чого середовище pdetool буде мати вигляд, зображений на малюнку 1.3.

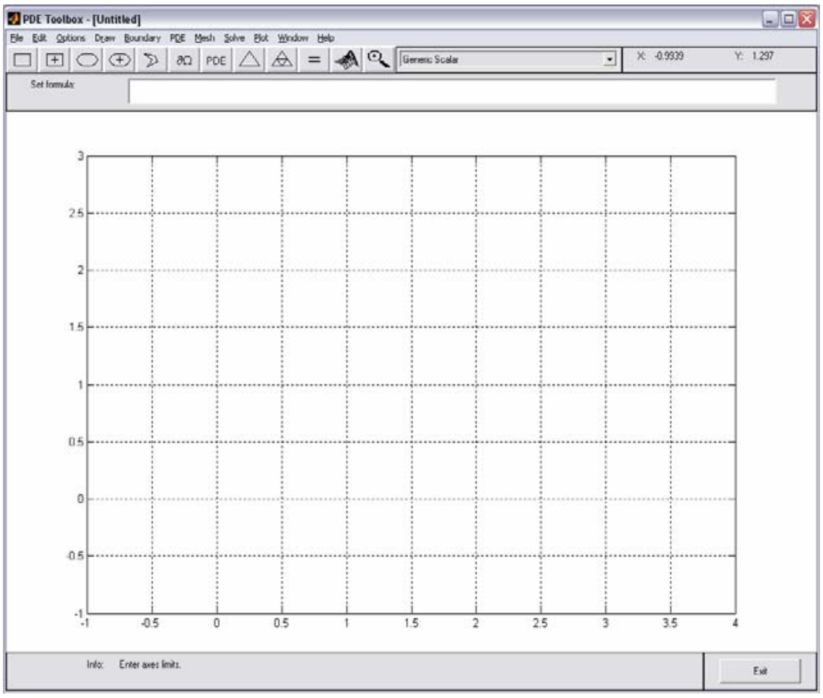


Рисунок 1.3 - Координатна сітка із зображеними на ній лініями сітки

Для конструювання області призначений пункт меню **Draw.** Для переходу в режим конструювання можна виконати команду меню **Draw/ DrawMode** (Малювання/режим малювання) просто вибрати один з геометричних примітивів і почати малювати. Геометричні примітиви можна вибирати в пункті меню **Draw** або скористатися панеллю малювання області.

Для розв’язання розглянутої задачі необхідно намалювати прямокутник, а в ньому – два кола. Для вибору прямокутника можна виконати команду меню **Draw/Rectangle/Square** (Малювання/прямокутник/квадрат), або клацнути по кнопці на панелі малювання області. Для уточнення координат прямокутника необхідно двічі клацнути по прямокутнику, що приведе до появи діалогового вікна **Object Dialog**.

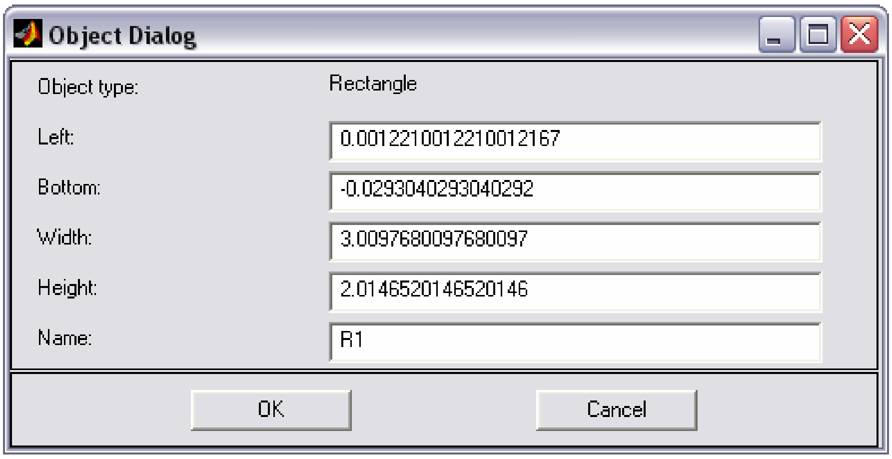


Рисунок 1.4 - Діалогове вікно **Object Dialog**.

Параметри **Left** і **Botton** визначають координати лівого нижнього кута прямокутника, а параметри **Width** і **Height** визначають ширину й висоту прямокутника. Параметр **Name** визначає ім'я об'єкта, всі прямокутники за замовчуванням починаються з **«R».**

Наступний етап - малювання двох кіл, перший із центром у точці (1;1) і радіусом 0.3, другий - із центром у точці (2.2;1) і радіусом 0.3. Потім уточнимо їхні координати.

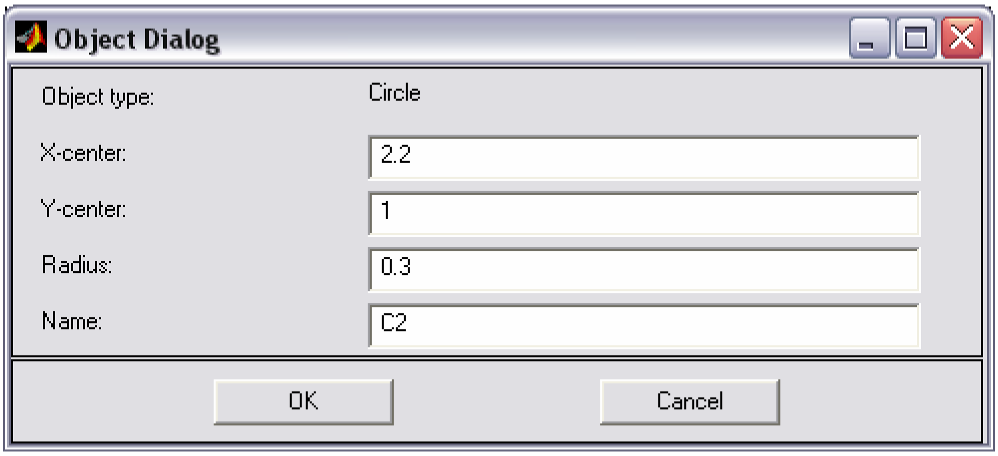


Рисунок 1.5 - Діалогове вікно **Object Dialog** для кола

Треба визначити взаємозв'язок між об'єктами. У нашому випадку необхідно від прямокутника відняти два кола, тому в області формули для конструювання області розв’язку необхідно ввести формулу R1-C1-C2.

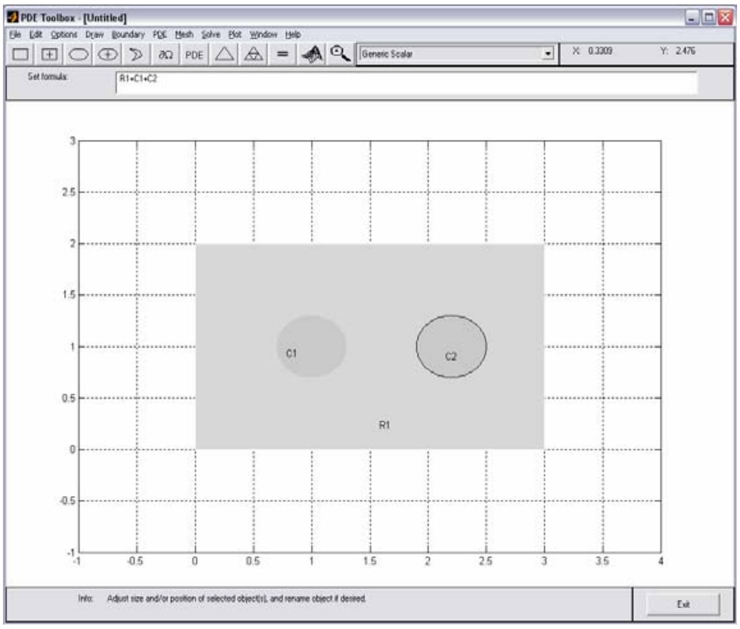


Рисунок 1.6 - Графічне середовище pdetool після уведення області розв’язку задачі

На другому етапі розв’язання задачі необхідно ввести рівняння в частинних похідних. Для введення рівнянь існує пункт меню **PDE.** Підпункт меню **PDE Mode** існує для переходу в режим введення рівнянь. Другий підпункт існує для показу підобластей, що входять в область розв’язку. Третій пункт **PDE Specification** дозволяє вибрати тип рівнянь і ввести його коефіцієнти.

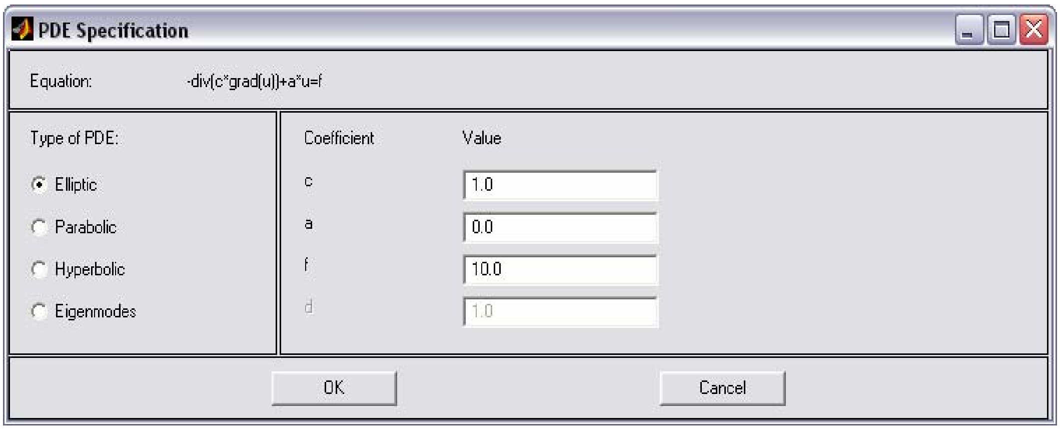


Рисунок 1.7 - Вікно **PDE Specification** - визначення типу і коефіцієнтів диференціального рівняння в частинних похідних

Крім того, в pdetool є можливість задавати тип розв'язуваної задачі. Для цього можна скористатися командою **Options/Application** (Настроювання/Додаток) або кнопкою.

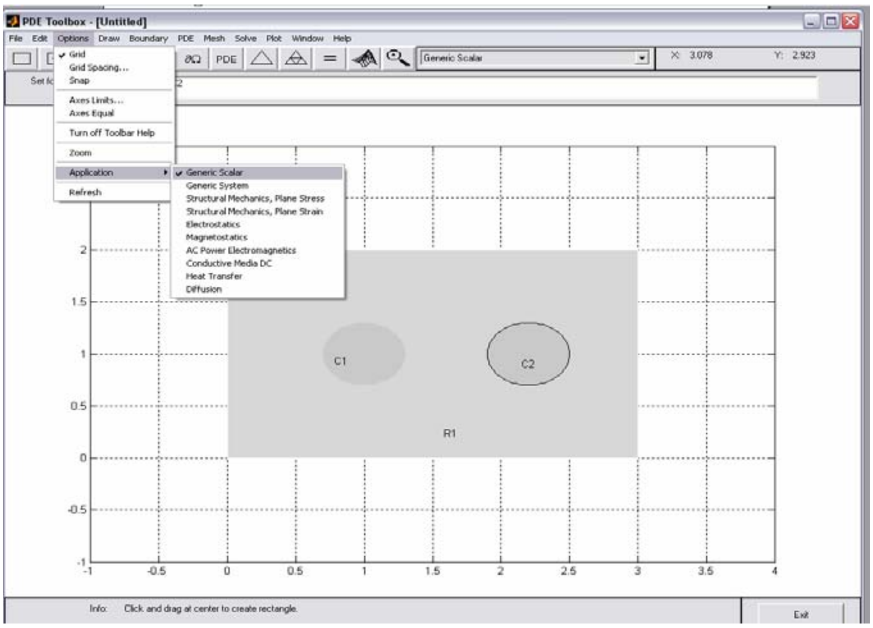


Рисунок 1.8 - Вибір типу розв'язуваної задачі

При розв’язуванні задачі про розподіл тепла в пластині можна вибрати задачу **Heat Transfer** (Задача про розподіл тепла) або просто ввести коефіцієнти еліптичного рівняння у вікні **PDE Specification.** Установимо тип розв'язуваної задачі **Heat Transfer,** після чого у вікні **PDE Specification** визначимо параметри рівняння в частинних похідних.

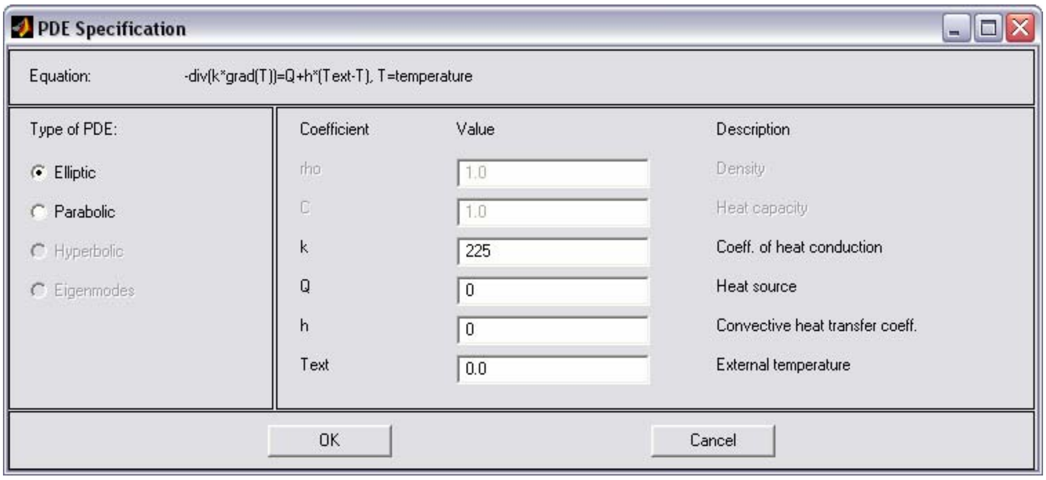


Рисунок 1.9 - Вікно **PDE Specification –** визначення коефіцієнтів задачі про розподіл тепла

Третій етап розв’язування задачі присвячений визначенню граничних умов. Для уведення граничних умов призначений пункт меню **Boundary** (Граничні умови). Для переходу в режим введення граничних умов можна виконати команду меню **Boundary/Boundary Mode (**Граничні умови/Режим граничних умов**).**

Після цього, щоб визначити умови, необхідно щигликом миші виділити границю і виконати команду меню **Boundary/Specify Boundary Condition (**Граничні умови/Установити граничні умови) або здійснити подвійний щиглик мишею по виділеній границі. Уведемо граничні умови для задачі.

Виділяємо верхню і нижню границі області і переходимо до уведення граничних умов. На цій ділянці границі визначені умови Дирихлє вигляду *h*T=r,* у вікні **Boundary Condition** вводимо *h=1, r=580.*

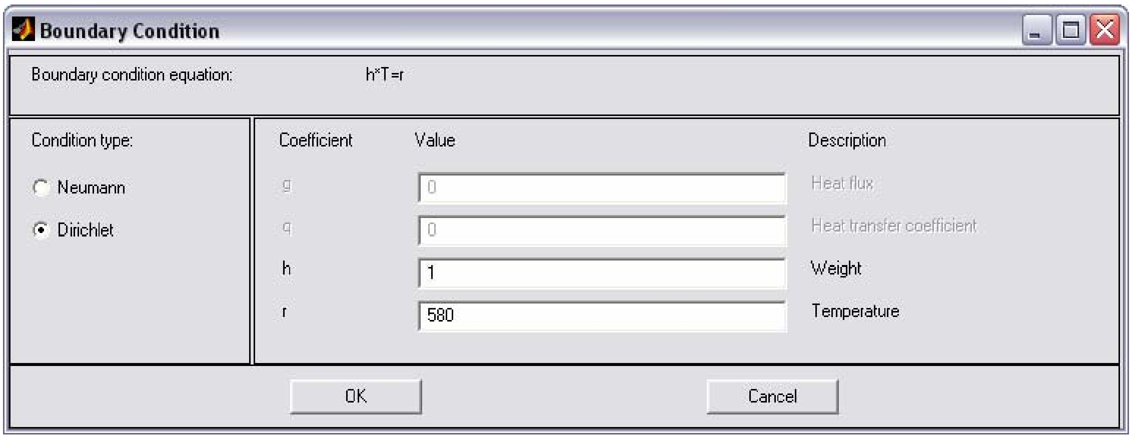


Рисунок 1.10 - Задання умов для верхньої і нижньої границі області G

Згрупувавши границі отворів, установимо температуру на їхніх границях - 450.

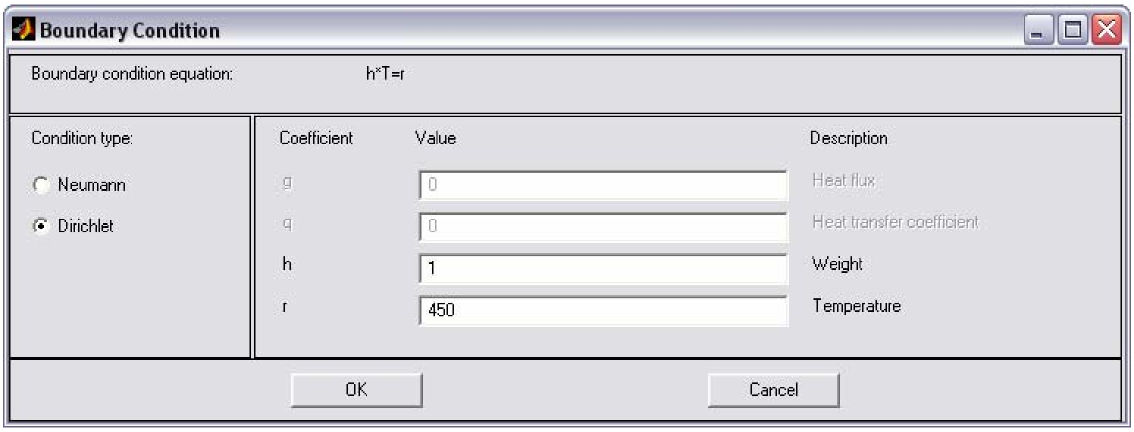


Рисунок 1.11 - Задання умов на границях отворів області G

Задамо умови Неймана $n \cdot k \cdot grad(T) = 0$ на лівій і правій границі області G.

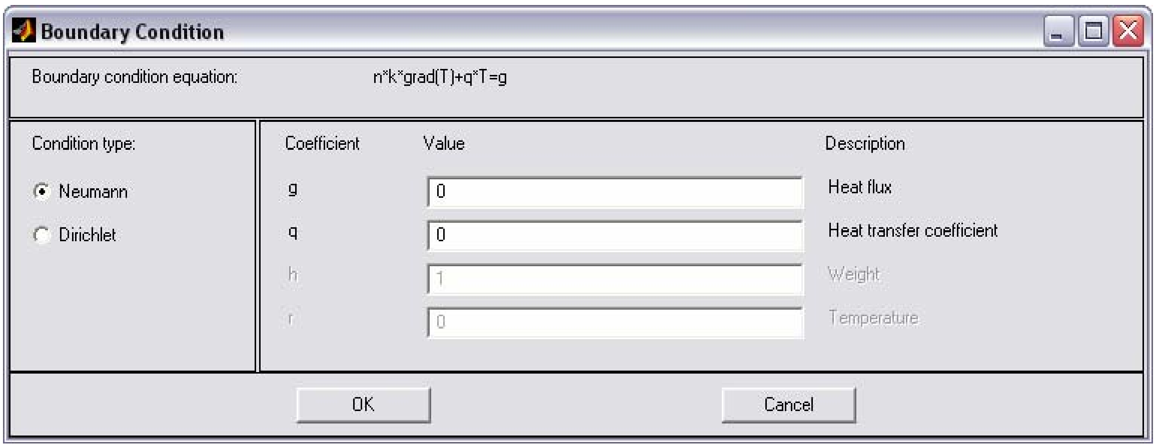


Рисунок 1.12 - Задання умов Неймана для лівої й правої границі області G

Умови задачі є завершеними.

На наступному, четвертому етапі проведемо тріангуляцію області – покриємо область сіткою, що складається із трикутників. Це і є кінцеві елементи, на які розбивається область. Режимом тріангуляції управляє пункт меню **Mesh** (Сітка). Для переходу в режим тріангуляції служить команда **Mesh/ Mesh Mode** (Сітка/режим сітки). Перехід у режим тріангуляції відразу розбиває область на великі трикутники. Цього ж можна домогтися за допомогою команди початку тріангуляції – пункт меню **Mesh/ Initialize Mesh** (Сітка/Визначити (ініціалізувати) сітку).

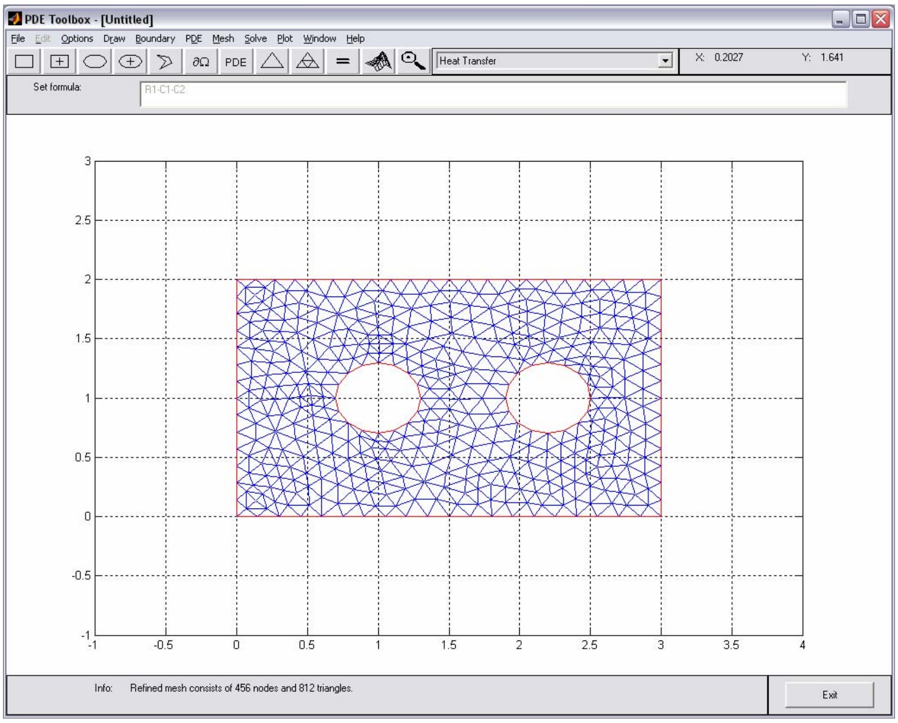


Рисунок 1.13 - Початкова тріангуляція області G

Звичайно початкової тріангуляції недостатньо для одержання розв’язку із заданою точністю. Для розбивки області на більш дрібні трикутники служить команда меню **Mesh/ Refine Mesh** (Сітка/Ущільнити сітку). Виконаємо дану команду двічі.

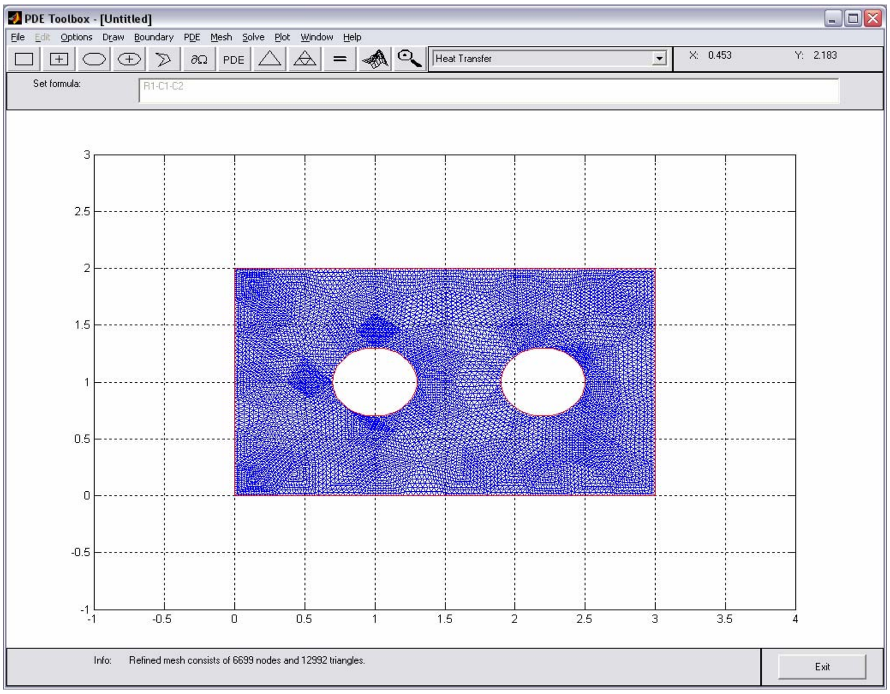


Рисунок 1.14 - Зменшена сітка в області G

На п'ятому етапі для розв’язку даної задачі необхідно виконати команду меню **Solve/PDE Solve** (Розв’язок/Розв’язати PDE).

Після цього знайдений розв’язок автоматично зображується на екрані у вигляді кольорового контурного графіка.

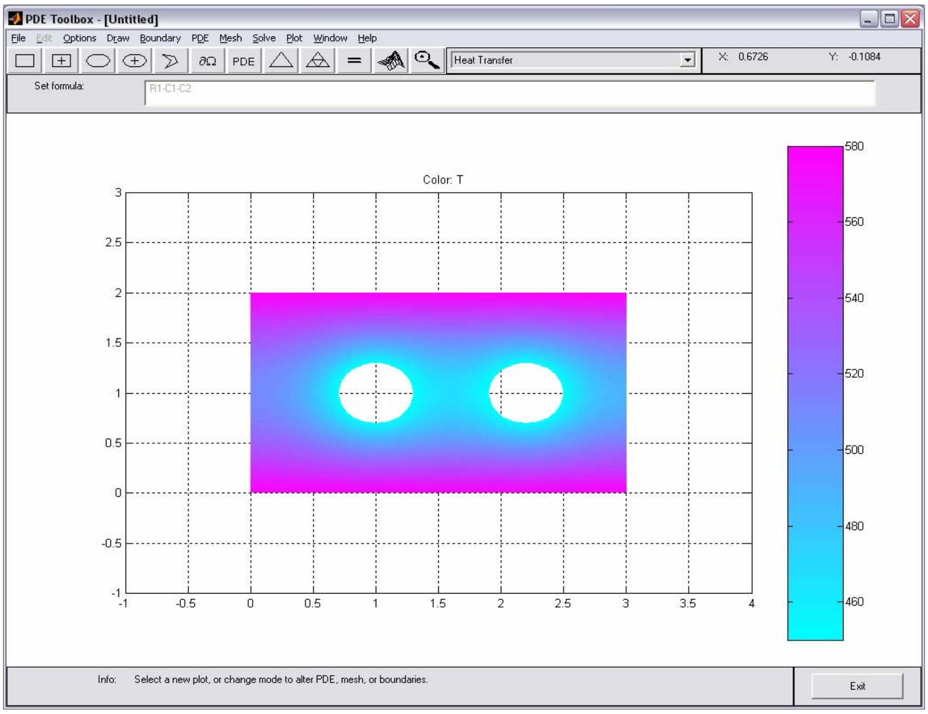


Рисунок 1.15 - Контурний графік розв’язку задачі

Контурний графік не завжди дозволяє проаналізувати отриманий розв’язок. Можна змінити тип побудованого графіка, виконавши команду меню **Plot/Parameters** (Графік/Параметри). У діалоговому вікні, що з'явилося, для побудови тривимірного графіка встановимо **прапорець Height (3-D plot).**

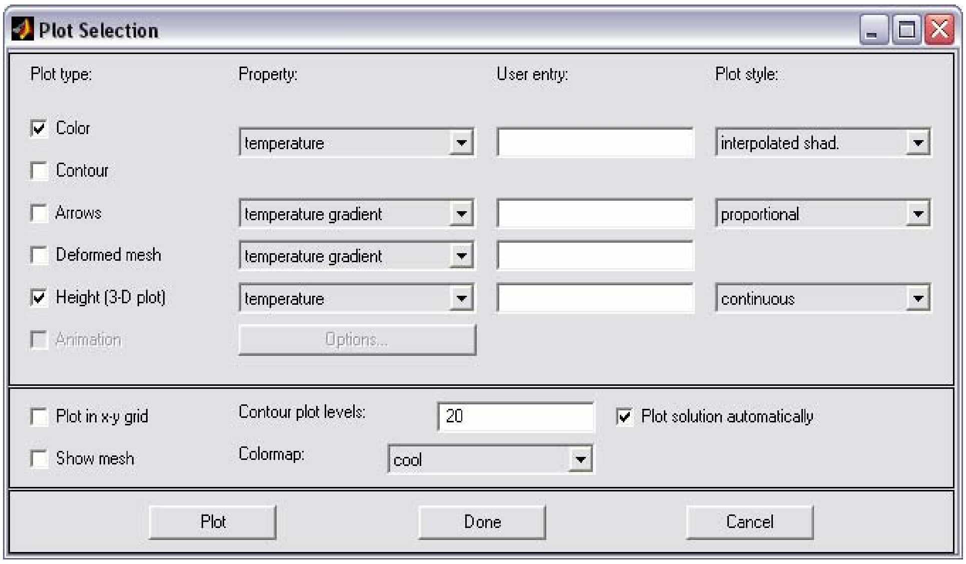


Рисунок 1.16 - Завдання параметрів для побудови тривимірного графіка

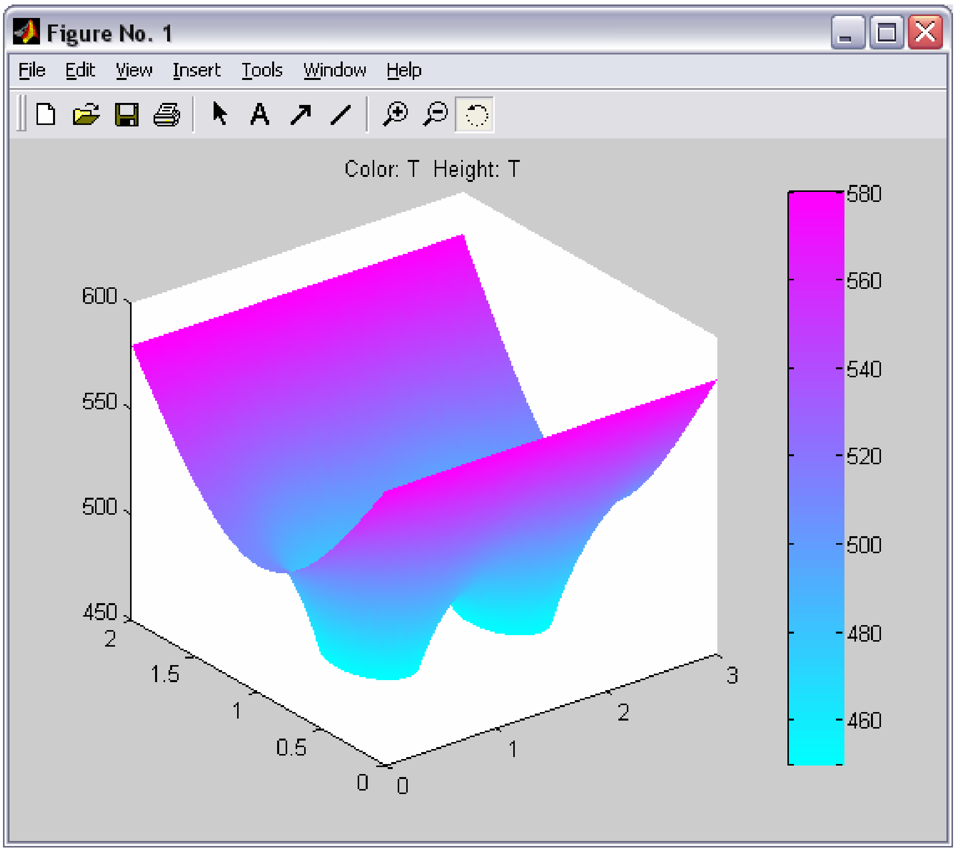


Рисунок 1.17 - Тривимірний графік розв’язку задачі

2. Розв'язання гіперболічних і параболічних рівнянь

Розв'язання нестаціонарних задач (гіперболічних і параболічних рівнянь) розглянемо на прикладі розв'язку задачі про коливання прямокутної мембрани.

Рівняння коливань мембрани має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0,$

$u(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y),$

$u_t(x, y, 0) = 0$

Нехай

$l_1 = 2, l_2 = 3, A = 1, a = 2$

На першому етапі задаємо область розв'язку

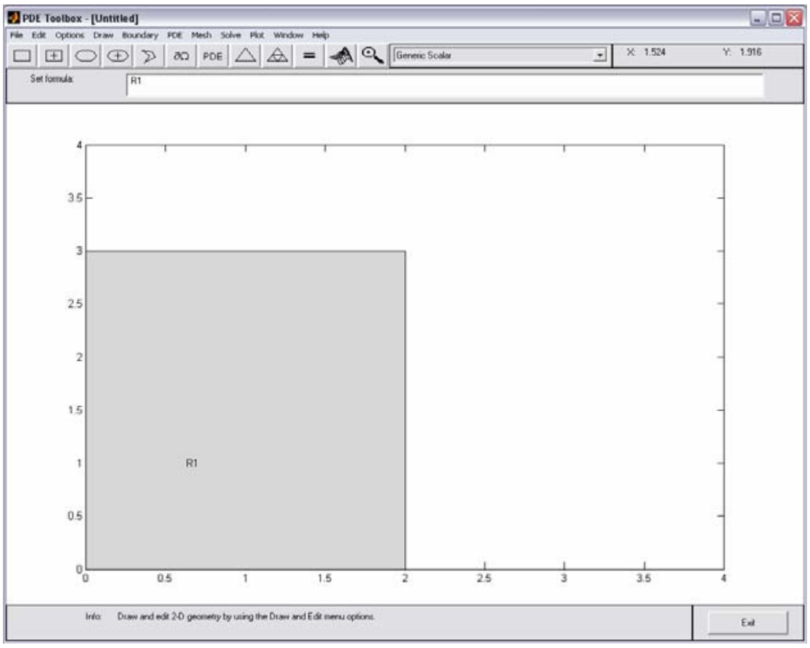


Рисунок 1.18 - Область розв'язку задачі

Далі визначаємо гіперболічне рівняння і його коефіцієнти.

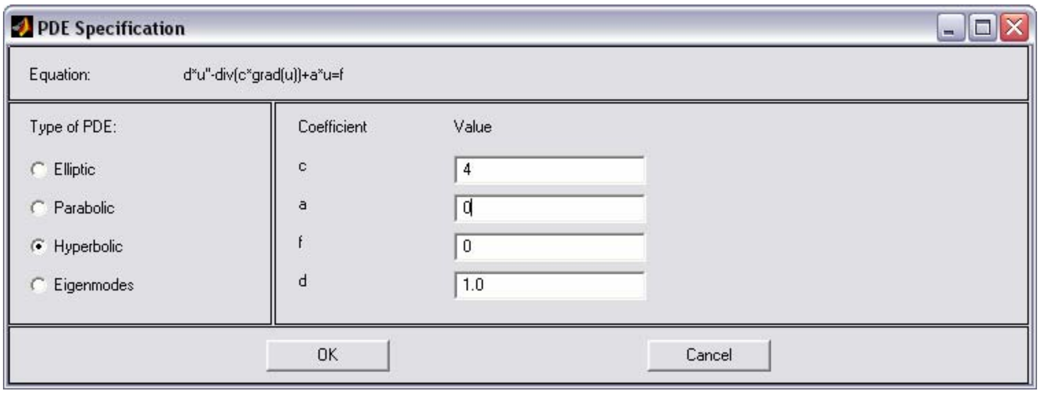


Рисунок 1.19 - Визначення параметрів гіперболічного рівняння задачі

Визначаємо нульові умови на границі області

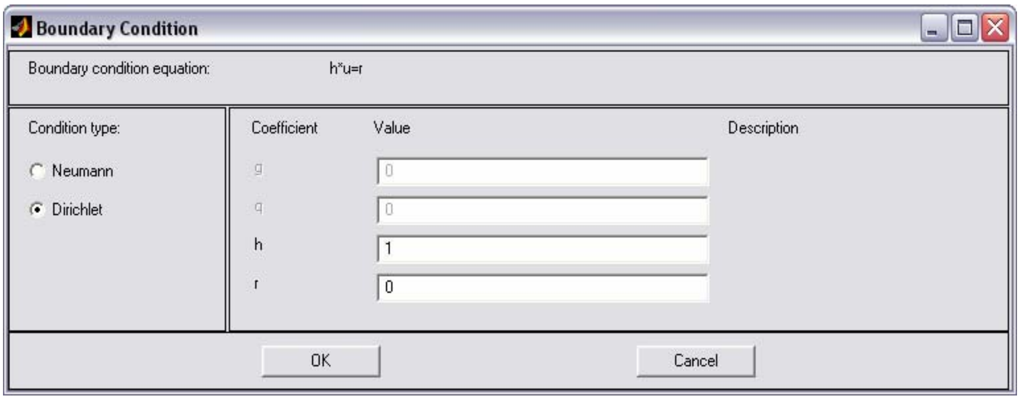


Рисунок 1.20 - Граничні умови задачі

На відміну від еліптичних рівнянь у цій задачі необхідно за допомогою команди **Solve/Solve Parameters** (Розв'язок/Параметри розв'язку) визначити інтервал зміни часу, початкові умови і точність розв'язку.

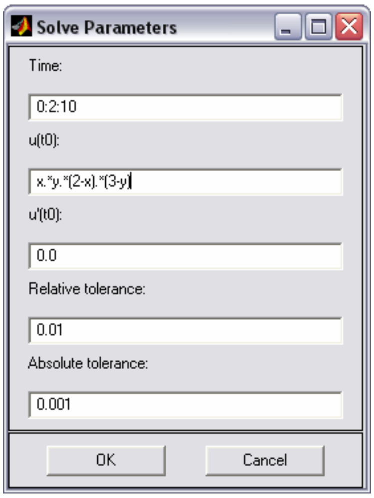
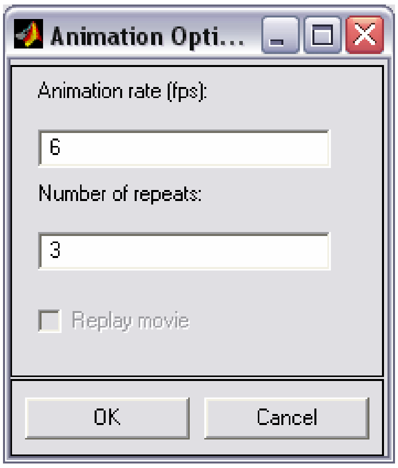


Рисунок 1.21 - Початкові умови задачі

Після проведення тріангуляції можна запускати задачу на виконання, але для того, щоб побачити процес коливання мембрани в динаміці, потрібно включити параметр Animation (Анімація) у вікні Plot Selection (Виділення графіка).

Далі за допомогою кнопки Options (Настроювання) у вікні Animation Options (Настроювання анімації) установимо число кадрів у секунду (параметр Animation rate (fsp)) і число повторів анімації (параметр Number of repeats). Тепер при розв'язанні задачі ми будемо бачити динаміку процесу коливання мембрани у вигляді анімації.



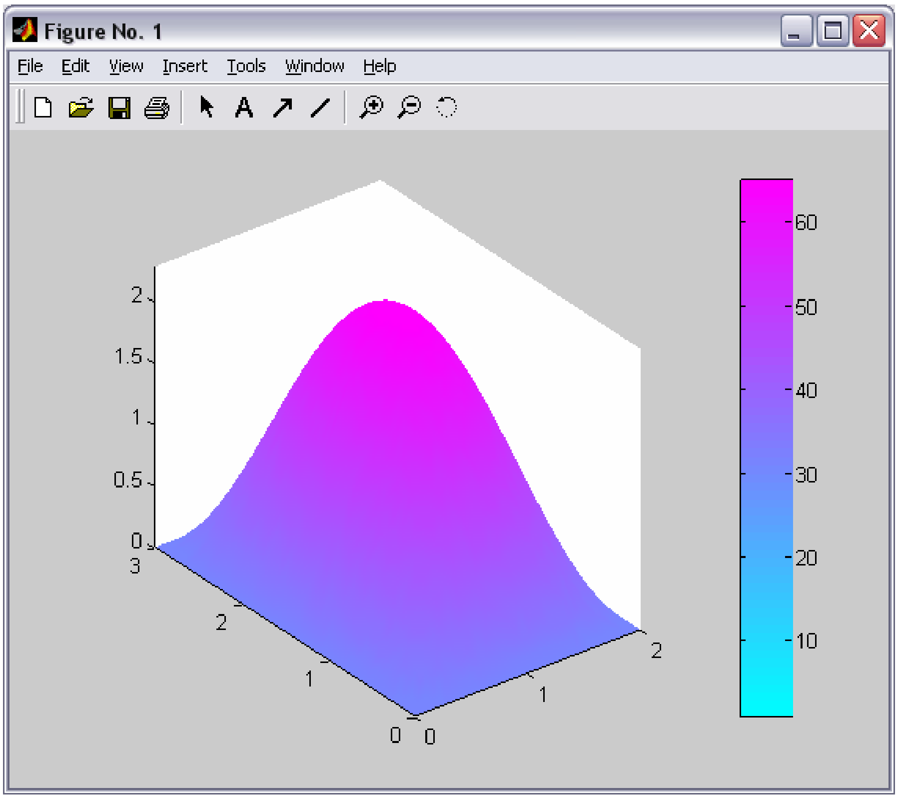


Рисунок 1.22 - Графік розв'язку задачі

ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ.

Використовуючи метод сіток, знайти наближений розв'язок задачі Дирихлє для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ у квадраті ABCD з вершинами A(0;0), B(0;1), З(1;1), D(1;0).

У таблиці варіантів наведені формули, що задають функцію на сторонах квадрата ABCD.

№ варіанта	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
3	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
4	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
5	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
6	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
7	$40y^2$	40	40	$40\sin\pi x$
8	$50y^2$	$50(1-x)$	0	$60x(1-x^2)$
9	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
10	$40\sqrt{y}$	$40(1-x)$	$20y(1-y)$	0
11	$20\cos\pi y$	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
12	$20y$	$20(1-x^2)$	$30(1+y^2)$	0
13	$30(1-y^2)$	$30x$	30	30
14	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
15	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$20x(1-x)$
16	$10\sin\pi y$	$20x$	$30y(1-y^2)$	$20(1+x^2)$
17	$30y$	$20(1-x)$	0	$10x(1-x)$
18	$50y(1-y^2)$	0	40	$40\sin\pi x$
19	$20y$	20	0	$60x(1-x^2)$
20	$30(1-y)$	$20\sqrt{x}$	30	30
21	$30\sin\pi y$	$20x$	$20y$	$10x(1-x)$
22	$30(1-y^2)$	$30x$	$20y(1-y)$	0
23	$50y^2$	$50(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
24	0	$50x(1-x)$	40	$40\sin\pi x$
25	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	0	$50\sin\pi x$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. НУЛІ І ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ЦІЛЬ РОБОТИ: Придбання практичних навичок розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь, а також основних задач лінійної алгебри різними методами з використанням алгоритмів програмування та у системі MatLab.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Відділення кореня рівняння. Умова відділення кореня.
2. Графічний метод відділення кореня.
3. Знаходження коренів рівнянь за допомогою засобів Матлаб.
4. Що називається визначником матриці?
5. Що називається рангом матриці?
6. Назвіть відомі вам методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. У чому полягає метод Гауса?
8. Якими стандартними засобами представлене розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь у Матлаб?

ТЕОРЕТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Як відомо, розв'язання рівнянь і пошук екстремумів функцій - родинні задачі. Так розв'язання системи $f_i(X)=0,\ i=1,...,n$ можна замінити пошуком мінімуму $F(X)=\sum_{i=1}^{n} f_i^2(X)$, який свідомо дорівнює нулю, якщо система має розв'язки. З іншого боку, пошук екстремумів функції можна звести до розв'язання системи рівнянь щодо нульових значень її похідних.

Для деяких класів функцій є цілком універсальні методи розв'язання. У загальному випадку при великому різноманітті методів розв'язання подібних задач аж ніяк нетривіально.

ПРАКТИЧНА ПІДГОТОВКА ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Можливості MATLAB для розв’язання нелінійних рівнянь

Обчислення коренів нелінійних рівнянь в MATLAB здійснює вбудована функція fzero:

fzero('ім'я**',x0), fzero('**ім'я**',x0,eps), fzero ('**ім'я**', x0, eps , trace), fzero ('**ім'я**', x0, eps, trace,p1,...,p10)** - пошук дійсних коренів функції однієї змінної при початковому наближенні **x0** (можна взяти і у формі [a,b] за умовою f(a)× f(b)<0) із заданою відносною похибкою; trace=1 - видання проміжних результатів. Використовується метод дихотомії, хорд і зворотної квадратичної інтерполяції.

Для розв’язання алгебраїчних рівнянь застосовують функцію **roots.** Обчислення коренів полінома реалізується узагальненим методом Ньютона - функцією **roots(P)**, а побудова полінома по його коренях - функцією **poly(R).**

Розглянемо кілька прикладів розв’язання нелінійних рівнянь із використанням цих функцій.

Приклад 1. Обчислити корінь полінома $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1=0.$

Поліном в MATLAB визначається вектором його коефіцієнтів. Варто пам'ятати, що коефіцієнти у векторі повинні розташовуватися від більшого степеня до меншого і наявність нульових коефіцієнтів є обов'язковою. Розв’язання задачі в MATLAB наведено нижче.

```
>>p=[1 0.4 0.6 -1];
>> x=roots (p) ;
>> x
X =
-0.5577 + 1.0425i
-0.5577 - 1.0425i
0.7154
>>poly(x)
ans =   1.0000          0.4000     0.6000          -1.0000
```

Приклад 2. Знайти розв’язок рівняння $x - sin(x) = 0,25.$

Для розв’язання цієї задачі скористаємося функцією f zero ('name', x0), де name - ім'я файлу-функції, що обчислює ліву частину рівняння, x0 - початкове наближення до кореня. Визначимо файл-функцію так, як показано нижче:

```
function y=f (x)
y=x-sin(x)-0.25;
```
А потім розв'яжемо рівняння
```
>> fzero('f',l)
ans = 1.1712
```

Приклад 3. Знайти корінь рівняння $e^x/5 - 2\times (x- 1)^2= 0$.

Нам відомо, що рівняння має три корені. Інтервали ізоляції коренів визначимо. Тому для розв'язання поставленої задачі скористаємося функцією fzero ('name', [a b]), де name - ім'я файлу-функції, що обчислює ліву частину рівняння, [a b]) - інтервал ізоляції кореня.

```
function y=h(x)
в=exp(x)/5-2*(x-1)^2;
>> z(l)=fzero(' h', [0 1]);
>> z(2)=fzero('h', [1 2]);
>> z(3)=fzero('h', [5 6]);
>> z
z =    0.5778   1.7639   5.1477
```

Наведемо ще один приклад роботи функції fzero. У цьому випадку інтервал ізоляції кореня заданий невірно. На границях інтервалу, що вказується, функція h не змінює знак, а зміна знака - обов'язкова умова локалізації кореня.
```
>> z(4)=fzero('h',  [0 3]);
??? Error using ==> fzero
```

Важливою особливістю функції fzero є можливість видавати не тільки значення кореня, але і значення функції в цій точці, наприклад, так, як показано в наступному прикладі.

Приклад 4.

```
>> [r,ep]=fzero('h',   [0 1])
r= 0.5778
ep = -1.1102e-016
```

Системи нелінійних рівнянь в MATLAB можна розв'язувати аналітично або чисельно.

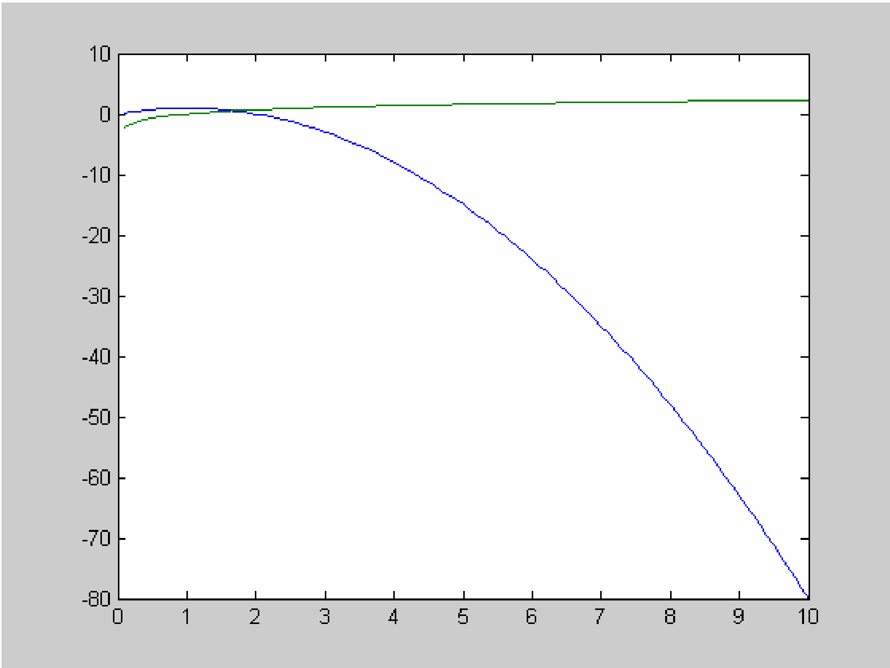
Для аналітичного розв'язування систем нелінійних рівнянь служить команда solve.

Приклад 5. Виконати відділення кореня із використанням графічної оцінки і знайти дійсні корені нелінійного рівняння:

$x^2 - 2x + \ln x = 0.$

Запишемо дане рівняння у вигляді $\ln x = -x^2 + 2x$. Точки перетину графіків функцій $y_1(x) = \ln x$ і $y_2(x) = -x^2 + 2x$ і є коренями заданого рівняння. Для знаходження початкового наближення ***x0*** знайдемо точки перетину графіків за допомогою засобів Матлаб.

```
>> x=[0.1:0.1:10];
>> y=-x.^2+2*x;
>> z=log(x);
>> plot(x,y,x,z)
```



Створимо М-файл:

```
function r=m1(x)
r=x^2-2*x+log(x);
>> fzero('m1',2,1)
ans = 1.6800
```

Розв’язання основних задач лінійної алгебри

При реалізації багатьох задач, пов'язаних з матричною алгеброю, використовують функції для оцінок основних характеристик:

det(A) - визначник квадратної матриці;

rank(A) - ранг матриці;

trace(A) - слід матриці (сума елементів головної діагоналі).

Приклад 6.

```
>> A=[1 2 3; 5 4 3; 3 4 3]
A =
   1   2   3
   5   4   3
   3   4   3
>> det(A)
ans =12
>> rank(A)
ans = 3
>> trace(A)
ans = 8
```

Операція **транспонування** матриці:

```
>> A=[ 1 2 3 ; 23 11 0]
A =
1    2    3
23  11   0
>> B=A'
B =
1    23
2    11
3     0
```

Особливого згадування заслуговує **обертання (інверсія) матриці,** для якого передбачена операція піднесення в степінь -1 і функція **inv(A):**

```
>> A=[1 2 3; 5 4 3; 3 4 3]
A =
   1   2   3
   5   4   3
   3   4   3
>>D=A^(-1)
D =
  -0.0000    0.5000   -0.5000
  -0.5000   -0.5000    1.0000
   0.6667    0.1667   -0.5000
>> C=inv(A)
C =
  -0.0000    0.5000   -0.5000
  -0.5000   -0.5000    1.0000
   0.6667    0.1667   -0.5000
```

Для задачі ***розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь***, однієї з найвідоміших в обчислювальній математиці, передбачені навіть елементарні операції.

Так для розв'язання системи AX=B (A - матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, B - матриця правих частин розмірності $n \times k$, X - матриця з k векторів-стовпців розв'язків) можна використати **команду зворотного ділення "\\".**

Наприклад, для розв'язання системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

задаємо (построчно) матрицю коефіцієнтів і векторів правої частини

```
>> A=[1 2 3; 5 4 3; 3 4 3]
A =
    1    2    3
    5    4    3
    3    4    3
>> B=[3 ; 9 ; 6 ]
B =
    3
    9
    6
>> X=A\B
X =
   1.5000
  -0.0000
   0.5000
```

При розв'язанні системи XA=B можна скористатися *операцією звичайного ділення.* Так розв'язання тієї ж системи

```
>>X=B'/A'
X =
   1.5000   0.0000    0.5000
```

При простоті розв'язання використовується досить серйозний аналіз структури матриці і кращий за точністю і швидкодією алгоритм (метод Гауса, розкладання Холецкого та ін.)

Звичайно, квадратна матриця коефіцієнтів повинна бути невиродженою (визначник відмінний від нуля), і в противному випадку видається повідомлення *Matrix is singular to working precision,* а елементи розв'язку приймають значення *inf* (не визначене).

Обертання матриці може використовуватися при розв'язанні системи AX=B у вигляді $X=A^{-1}B$:

```
 >> B=[3 ; 9 ; 6 ] ;
>> X=inv(A)*B
X =
   1.5000          0          0.5000
```

ВИКОНАТИ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1.

А) Обчислити корінь полінома за допомогою функції roots(P).

Б) Виконати відділення кореня із використанням графічної оцінки і знайти дійсні корені нелінійного рівняння.

Варіанти завдань

№	1	2
1	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	$\ln(x)+(x+1)^3=0$
2	$2x^3-9x^2-60x+1=0$	$x\cdot 2^x=1$
3	$x^4-x-1=0$	$x+\cos(x)=1$
4	$2x^4 - x^2-10=0$	$x+\lg(1+x)=1.5$
5	$3x^4+8x^3+6x^2-10=0$	$\lg(2+x)+2x=3$
6	$x^4 -18x^2+5x-8=0$	$2^x+5x-3=0$
7	$x^4+4x^3-12x^2+1=0$	$5^x+3x =0$
8	$x^4 - x^3-2x^2+3x-3=0$	$3e^x=5x+2$
9	$3x^4+4x^3-12x^2+1=0$	$5^x=6x+3$
10	$3x^4-8x^3-18x^2+2=0$	$2e^x+5x-6=0$
11	$2x^4-8x^3+8x^2-1=0$	$2\mathrm{arctg}(x)-x+3=0$
12	$2x^4+8x^3+8x^2-1=0$	$(x-3)\cdot\cos(x)=1$
13	$x^4-4x^3-8x^2+1=0$	$x^x= 20-9x$
14	$2x^4-9x^3-60x^2+1=0$	$x\cdot\lg(x)=1$
15	$x^5 +x^2-5=0$	$\mathrm{tg}^3x=x-1$

16	$3x^4+4x^3-12x^2-7=0$	$5^x=1+e^{-x}$
17	$3x^4+8x^3+6x^2-11=0$	$5^x=3-e^x$
18	$x^4-18x^3-10=0$	$arctg(x^2+1/x)=x$
19	$3x^4-8x^3-18x^2+2=0$	$tg(0.55x+0.1)=x^2$
20	$x^4-18x-10=0$	$5^x-6x=7$
21	$x^4+18x-10=0$	$5^x-6x=3$
22	$x^4+18x^3-6x^2+x-10=0$	$5^x=1+e^{-2x}$
23	$x^5+12x^3-6x^2+x-10=0$	$7^x-6x=2$
24	$3x^5-8x^3-18x^2+2=0$	$5^x=2+e^{-2x}$
25	$x^3-18x-10=0$	$x\cdot 2^x=3$

Завдання № 2.

А) Обчислити визначник матриці А.
Б) Обчислити ранг матриці А.
В) Транспонувати матрицю А.
Г) Знайти обернену матрицю до матриці А.
Д) Розв’язати систему АХ=В одним з відомих методів.

Варіанти завдань

Варіант	A				B
№1	1	0.47	-0.11	0.55	1.33
	0.42	1	0.35	0.17	1.29
	-0.25	0.67	1	0.36	2.11
	0.54	-0.32	-0.74	1	0.10
№2	0.63	1	0.11	0.34	2.08
	0.17	1.18	-0.45	0.11	0.17
	0.31	-0.15	1.17	-2.35	1.28
	0.58	0.21	-3.45	-1.18	0.05
№3	0.77	0.04	-0.21	0.18	1.24
	-0.45	1.23	-0.06	0	-0.88
	-0.26	-0.34	1.11	0	0.62
	-0.05	0.26	-0.34	1.12	-1.17
№4	0.79	-0.12	0.34	0.16	-0.64
	-0.34	1.18	-0.17	0.18	1.42
	-0.16	-0.34	0.85	0.31	-0.42
	-0.12	0.26	0.08	0.75	0.83

Варіант	A				B
№5	-0.68	-0.18	0.02	0.21	-1.83
	0.16	-0.88	-0.14	0.27	0.65
	0.37	0.27	-1.02	-0.24	-2.23
	0.12	0.21	-0.18	-0.75	1.13
№6	-0.58	-0.32	0.03	0	-0.44
	0.11	-1.26	-0.36	0	-1.42
	0.12	0.08	-1.14	-0.24	0.83
	0.15	-0.35	-0.18	0	1.42
№7	-0.83	0.31	-0.18	0.22	1.71
	-0.21	-0.67	0	0.22	-0.62
	0.32	-0.18	-0.95	-0.19	0.89
	0.12	0.28	-0.14	-1	-0.94
№8	-0.87	0.27	-0.22	-0.18	-1.21
	-0.21	-1	-0.45	0.18	0.33
	0.12	0.13	-0.33	0.18	0.48
	0.33	-0.41	0	-1	1.21
№9	-0.81	-0.07	0.38	-0.21	0.81
	-0.22	-0.92	0.11	0.33	0.64
	0.51	-0.07	-0.81	-0.11	1.71
	0.33	-0.41	0	-1	1.21
№10	-1	0.22	-0.11	0.31	-2.7
	0.38	-1	-0.12	0.22	1.5
	0.11	0.23	1	-0.51	1.2
	0.17	-0.21	0.31	-1	0.17
№11	-0.93	-0.08	0.11	-1.18	0.51
	0.18	-0.48	0	0.21	-1.17
	0.13	0.31	-1	-0.21	1.02
	0.08	0	-0.33	-0.72	0.28
№12	-0.95	-0.06	-0.12	0.14	2.17
	0.04	-1.12	0.08	0.11	1.4
	0.11	0.12	0	1.03	0.8
	0.34	0.08	-1.06	0.14	2.1
№13	0	-0.19	0.27	-0.88	1.2
	-0.33	-1	-0.07	0.21	0.92
	0.11	0	1.03	-0.42	0.92
	-0.92	-0.03	0	-0.04	1.2
№14	-0.88	-0.23	0.25	-0.16	1.24
	0.33	0.03	-0.84	-0.32	-1.15
	0.14	-0.66	-0.18	0.24	0.89
	0.12	-0.05	0	-0.85	0.57

Варіант	A				B
№15	0.12	-1	0.32	-0.18	0.72
	0.08	-0.12	-0.77	0.32	0.58
	0.25	0.22	0.14	-1	-1.56
	-0.77	-0.14	0.06	-0.12	-1.21
№16	-0.86	0.23	0.18	0.17	1.42
	0.12	-1.14	0.08	0.09	0.83
	0.16	0.24	-1	-0.35	-1.21
	0.23	-0.08	0.05	-0.75	-0.65
№17	76	21	6	-34	-142
	12	-114	8	9	83
	16	24	-100	-35	-121
	23	-8	5	-75	85
№18	-83	27	-13	-11	142
	5	-68	13	24	26
	9	54	127	36	23
	13	27	34	156	49
№19	1	2	3	9	1.11
	2	1	9	4	1.16
	3	9	1	4	1.24
	9	1	3	4	1.55
№20	-1	0.28	-0.17	0.06	-21
	0.52	-1	0.12	0.17	117
	0.17	-0.18	-0.79	0	0.81
	0.11	0.22	0.03	-0.95	-0.72
№21	76	21	6	-34	142
	12	-114	8	9	83
	16	24	-100	35	121
	23	-8	5	-75	85
№22	-83	27	-13	-11	142
	5	-68	13	24	26
	9	54	127	36	23
	13	27	34	156	49
№23	25	3	5	4	1.11
	5	4	3	25	1.16
	3	25	4	5	1.24
	4	5	25	3	1.55
№24	0.12	-	0.32	-0.18	0.72
	0.08	-0.12	-0.77	0.32	0.58
	0.25	0.02	0.14	-1	-1.56
	-0.77	-0.14	0.06	-0.12	-1.21

ЛІТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука. 1987.

2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука. 1989.

3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука. 1972.

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука. 1980.

2. Тынкевич М.А. Система MATLAB. Справочное пособие к курсу "Численные методы анализа" - Кемерово: КузГТУ. 2001. - 47 с.

3. Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.х. В 2-х т. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ. 1999. - 670 с.

4. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. -М.-СПб.-Киев: Вильямс. 2001.