

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**Л.Є. КРЕС**

**ГІДРОФІЗИКА**

**Конспект лекцій**

**Дніпропетровськ  
„Економіка” - 2006**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**Л.Є. КРЕС**

# **ГІДРОФІЗИКА**

**Дніпропетровськ  
„Економіка” - 2006**

**ББК 26.22**  
**К 80**  
**УДК 556.113**

*Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол № 8 від 28.09. 2006 р.)*

**Крес Л.Є.**  
**Гідрофізика: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: ПБП „Економіка”, 2006.- 117 с.**

Конспект лекцій призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю „Гідрологія та гідрохімія”, напрям підготовки „Гідрометеорологія”. В конспекті розглянуті основи теорії теплопередачі та її закономірності, методи вирішення теплових задач, льодово-термічні розрахунки.

©Л.Є.Крес, 2006  
©Одеський державний екологічний  
університет, 2006

## З М І С Т

|                                                                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВСТУП.....</b>                                                                                                     | <b>5</b>  |
| <b>1. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВОДИ, ЛЬОДУ ТА СНІГУ.....</b>                                                               | <b>7</b>  |
| 1.1 Фізичні властивості води.....                                                                                     | 7         |
| 1.2 Фізичні властивості льоду.....                                                                                    | 14        |
| 1.3 Фізичні властивості снігу.....                                                                                    | 16        |
| <b>2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ.....</b>                                                                          | <b>20</b> |
| 2.1 Теплота. Температурне поле. Тепловий потік. Ентальпія.<br>Теплопровідність.....                                   | 20        |
| 2.2 Засоби передачі тепла.....                                                                                        | 23        |
| 2.3 Закономірності передачі тепла.....                                                                                | 24        |
| 2.4 Теплові режими.....                                                                                               | 27        |
| <b>3. РІВНЯННЯ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСУ.....</b>                                                                             | <b>29</b> |
| 3.1 Різні форми рівняння теплового балансу.....                                                                       | 29        |
| 3.2 Рівняння Гауса-Остроградського.....                                                                               | 29        |
| 3.3 Рівняння Фур'є-Кірхгофа.....                                                                                      | 30        |
| 3.4 Рівняння теплового балансу водних об'єктів.....                                                                   | 30        |
| 3.5 Визначення складників теплового балансу.....                                                                      | 33        |
| 3.6 Рівняння теплового балансу непроточної водойми.....                                                               | 36        |
| <b>4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ..</b>                                                                  | <b>38</b> |
| 4.1 Диференціальне рівняння теплопровідності твердого тіла .....                                                      | 38        |
| 4.2 Диференціальне рівняння з джерелом теплоти.....                                                                   | 41        |
| 4.3 Диференціальне рівняння теплопровідності турбулентного<br>потoku.....                                             | 42        |
| 4.4 Умови однозначності.....                                                                                          | 46        |
| 4.5 Методи розв'язання теплових задач.....                                                                            | 50        |
| <b>5. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ<br/>ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ОДНОВИМІРНОМУ<br/>ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ.....</b> | <b>52</b> |
| 5.1 Одновимірне температурне поле.....                                                                                | 52        |
| 5.2 Одновимірне температурне поле із внутрішнім джерелом<br>теплоти.....                                              | 57        |
| 5.3 Двовимірне температурне поле.....                                                                                 | 59        |
| <b>6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ<br/>ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ<br/>ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ.....</b>  | <b>64</b> |
| 6.1 Одновимірне температурне поле.....                                                                                | 64        |
| 6.2 Двовимірне температурне поле.....                                                                                 | 66        |
| 6.3 Моделювання температурних полів.....                                                                              | 69        |

|                                                                                        |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7. ГІДРОТЕРМІЧНІ РОЗРАХУНКИ РІЧОК ТА ВОДОЙМ.....</b>                                | <b>74</b>  |
| 7.1 Метод аналогії.....                                                                | 74         |
| 7.2 Метод емпіричних залежностей.....                                                  | 74         |
| 7.3 Розрахунок температури води відкритого водотоку (метод послідовних наближень)..... | 75         |
| 7.4 Розрахунок температури води за методом суперпозиції.....                           | 77         |
| <b>8. ЛЬОДОТЕРМІЧНІ РОЗРАХУНКИ РІЧОК ТА ВОДОЙМ.....</b>                                | <b>79</b>  |
| 8.1 Замерзання води.....                                                               | 79         |
| 8.2 Замерзання річок та водойм.....                                                    | 80         |
| 8.3 Умови початку льодоутворення (метод Л.Г.Шуляковського)....                         | 82         |
| 8.4 Метод визначення можливості утворення внутрішньоводного льоду.....                 | 83         |
| 8.5 Розрахунок кількості шуги.....                                                     | 85         |
| 8.6 Теплобалансовий метод розрахунку зажорних явищ.....                                | 88         |
| 8.7 Ополонки та їх розрахунок.....                                                     | 90         |
| <b>9. ФОРМУВАННЯ ЛЬОДЯНОГО ПОКРИВУ ТА РОЗРАХУНКИ ЙОГО ТОВЩИНИ.....</b>                 | <b>93</b>  |
| 9.1 Процес утворення льодяного покриву.....                                            | 93         |
| 9.2 Початкова товщина льоду.....                                                       | 94         |
| 9.3 Наростання товщини льоду.....                                                      | 95         |
| 9.4 Методи розрахунку наростання товщини льоду.....                                    | 98         |
| <b>10. ТАНЕННЯ І РУЙНУВАННЯ ЛЬОДЯНОГО ПОКРИВУ.....</b>                                 | <b>106</b> |
| 10.1 Скресання річок та водоймищ.....                                                  | 106        |
| 10.2 Розрахунок танення льоду.....                                                     | 107        |
| 10.3 Розрахунок міцності льоду.....                                                    | 108        |
| 10.4 Весняні затори та їх розрахунок.....                                              | 109        |
| <b>ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....</b>                                                         | <b>112</b> |
| <b>СЛОВНИК ТЕРМІНІВ ТА ВИЗНАЧЕНЬ.....</b>                                              | <b>113</b> |
| <b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....</b>                                                   | <b>117</b> |

## Вступ

Гідрофізика - це розділ геофізики, що вивчає фізичні процеси гідросфери.

Гідрофізика - це наука, яка вивчає фізичні властивості води, снігу, льоду: теплові, радіаційні, електричні, акустичні тощо, а також фізичні процеси у водних об'єктах – динамічні (течії, хвилювання); термічні (нагрівання та охолодження водойм, випаровування та конденсація; формування та танення льоду та снігу). Гідрофізика складається з гідрофізики морів і океанів і гідрофізики вод суші. Предметом дослідження гідрофізики вод суші є водні об'єкти суші: річки, озера, водосховища, підземні води.

Конспект лекцій з дисципліни “Гідрофізика” охоплює проблеми *гідрофізики вод суші*, враховуючи потреби прикладної гідрофізики, зокрема тепло – та гідротехніки, як науки, що тісно пов'язана з гідрологією суші.

**Предмет вивчення гідрофізики вод суші** – фізичні властивості води, елементи теорії теплопередачі, методи гідротермічних та льодотермічних розрахунків водних об'єктів. Деякі питання гідрофізики вод суші у конспекті не розглядаються, тому що відносяться до інших дисциплін. Наприклад, процеси випаровування, течії, хвилювання вивчаються у фізичній гідрології, підземні води – в гідрогеології.

Гідрофізика має велике значення при рішенні багатьох господарських задач. Особливо велика роль її у гідроенергетиці при проектуванні гідротехнічних споруд, у водному транспорті при визначенні дат навігації, при водопостачанні сільськогосподарських та промислових підприємств. Прогноз елементів льодового режиму базується на гідрофізичних розрахунках.

Дисципліна “Гідрофізика” належить до циклу професійної та практичної підготовки фахівців-гідрологів. Для її застосування необхідні знання математики, фізики, фізичної гідрології.

**Скорочена історична довідка.** Дослідження води як фізичного тіла відносяться до XVIII століття (роботи Лавуазьє, Кавендиша та інш.), коли склад води був визначений експериментально.

У 1772 р. французький фізик Делюк визначив, що вода має найбільшу густину при температурі  $+4^{\circ}\text{C}$ , Гейлюссак дав теоретичне обґрунтування виникнення внутрішньоводного льоду. Перші вимірювання температури окремих річок проводились у XVIII сторіччі, на р.Дніпро – наприкінці XIX сторіччя. У 1860 р. Д.І.Менделєєв увів поняття критичної температури води, вище якої пара не може переходити у рідкий стан ні при якому тиску. Почалися дослідження донного льоду під керівництвом

В.М.Лохтіна, О.І.Восейков ставить питання про вивчення теплового балансу водойм.

На початку ХХ сторіччя значні роботи щодо утворення донного льоду проводились В.А.Обручевим, дослідження загорів на Неві були проведені М.Ф.Цюнглинським. Лабораторні дослідження внутрішньоводного льоду В.Я.Альбергом (1915 р.). У 1919 році був створений Державний гідрологічний інститут, з яким тісно пов'язаний подальший розвиток гідрофізичних розрахунків. Систематичне вивчення термічного та льодового режимів річок та водойм відноситься до 30-х років ХХ сторіччя. В той час (1929 р.) створена гідрометеорологічна служба. Дослідження льодяного покриву та методи розрахунку його товщини виконали такі вчені як О.Девік, Ф.І.Бидін, С.Я.Вартазаров, Д.Н.Бібіков.

У другій половині ХХ сторіччя питаннями льодоутворення займалися вчені Б.В.Проскуряков, В.В.Піотрович, Л.Г.Шуляковський, В.А.Римша, Р.В.Донченко. Розробкою методів розрахунку температури води на водних об'єктах займалися вчені К.І.Росінський, О.П.Браславський, М.П.Тимофєєв, А.І.Пехович, Я.Л.Готліб, В.М.Жидких та інші. Запропоновано декілька формул для розрахунку наростання товщини льоду – В.В.Піотровича, Л.Г.Шуляковського, А.П.Браславського. Закономірностям механізму скресання річок присвячені роботи С.Н.Булатова, весняних заторів льоду В.П.Чижова та інші.

Гідрофізика як система наукових знань сформувалась у 60-х роках ХХ сторіччя. Розвиток гідрофізики супроводжувався такими досягненнями:

- нові уявлення про фізичні властивості та структуру води;
- дослідження процесів теплообміну у водних об'єктах;
- розробка методів гідротермічних розрахунків (температури води);
- дослідження процесів льодоутворення та формування льодяного покриву на водних об'єктах;
- дослідження процесів танення і руйнування льодяного покриву;
- розробка методів льодотермічних розрахунків (товщини льоду, кількості шуги при зажорах, ополонках тощо).

Гідрофізика як самостійна дисципліна читається з 70-х років минулого сторіччя. Перші навчальні посібники вийшли у 1979 році – Т.В.Одрова “Гидрофизика водоемов суши” та В.М. Мішон “Гидрофизика”. У 1983 р. навчальний посібник В.М.Мішон “Практическая гидрофизика”, у 1988 – перший навчальний підручник С.В. Вишняков та Б.В.Проскуряков “Гидрофизика”. У 1997 р. навчальний посібник “Теплообмін у водних об'єктах”, автори Гопченко Є.Д., Крес Л.Є.

## РОЗДІЛ 1

### 1.1 Фізичні властивості води

Вода має просту хімічну формулу  $\text{H}_2\text{O}$  і є одним з найбільш розповсюджених елементів у природі, але вона має такі властивості, які показують, що вода дуже складна речовина.

Маса хімічно чистої води містить 11.19% водню та 88.81% кисню. Дослідження молекули води показали, що атоми кисню та водню розміщені по кутках рівнобедреного трикутника, на вершині якого перебуває атом кисню. Кут при вершині дорівнює приблизно  $105^\circ$ , а сторона трикутника має довжину  $0,96 \text{ \AA}$  (ангстрема), тобто  $10^{-10} \text{ м}$ : відстань між ядрами водню  $\text{HH} = 1.5 \text{ \AA}$ .

**Діаграма стану.** Вода може перебувати у трьох агрегатних станах – рідкому, твердому та у вигляді пари. Перехід з одного стану в інший відбувається при зміні температури та тиску.

Вода, що перебуває в стані пари, складається головним чином з простих молекул – гідролей  $\text{H}_2\text{O}$ . У рідкому стані вода містить суміш: простих молекул гідролей  $\text{H}_2\text{O}$ , подвійних дигідролей  $(\text{H}_2\text{O})_2$  та потрійних молекул тригідролей  $(\text{H}_2\text{O})_3$ . У рідкій фазі структура молекул води ототожнюється з кристалічними ґратами кварцу, у твердій (лід) вона ідентична ґратам тридиміту, який має менш щільні ґрати ніж кварц, і його питомий об'єм на 10% більше ніж у кварцу. Лід порівняно з водою має менш щільну упаковку молекул, тому лід утримується на поверхні, цим самим запобігає перемерзанню до дна.

Перехід води з рідкого або твердого стану в пару та в зворотному напрямі можливий за необхідного тиску водяної пари над водою чи льодом, залежно від температури (рис.1.1). Геометричне місце точок, що відповідають рівновазі рідкої води та водяної пари, у вигляді кривої  $OA$  називається кривою **пароутворення**. Геометричним місцем точок рівноваги твердої та рідкої фаз буде крива  $OC$  – крива **плавлення**. Крива  $BO$  є кривою **сублімації**. Всі три криві перехрещуються у точці  $O$ , де одночасно можуть знаходитися у рівновазі всі три фази. Точка  $O$  називається **потрійною** точкою; їй відповідає тиск  $610 \text{ Па}$  ( $4.6 \text{ мм}$ ) і температура  $273.16 \text{ К}$  ( $0.0075^\circ\text{C}$ ).

Криві  $AO$ ,  $BO$  та  $OC$  поділяють всю площу діаграми на три поля, із яких кожне відповідає стійкості тільки одного агрегатного стану води. При температурах та тиску у полі  $AOC$  знаходиться вода тільки у рідкому стані, поля  $AOB$  та  $BOC$  визначають ті температури та тиск, коли вода існує тільки у вигляді пари та тільки у твердій фазі. У той час, коли густина рідкої води дорівнює густині її пари, межа між рідиною та паром зникає. Температура, при якій не має різниці між рідиною і паром



називається **критичною**. Критична температура  $374.2^{\circ}\text{C}$ , вода має тиск  $218.5\text{ атм.}$  і має густину, що дорівнює  $1/3$  густині води при  $0^{\circ}\text{C}$ .

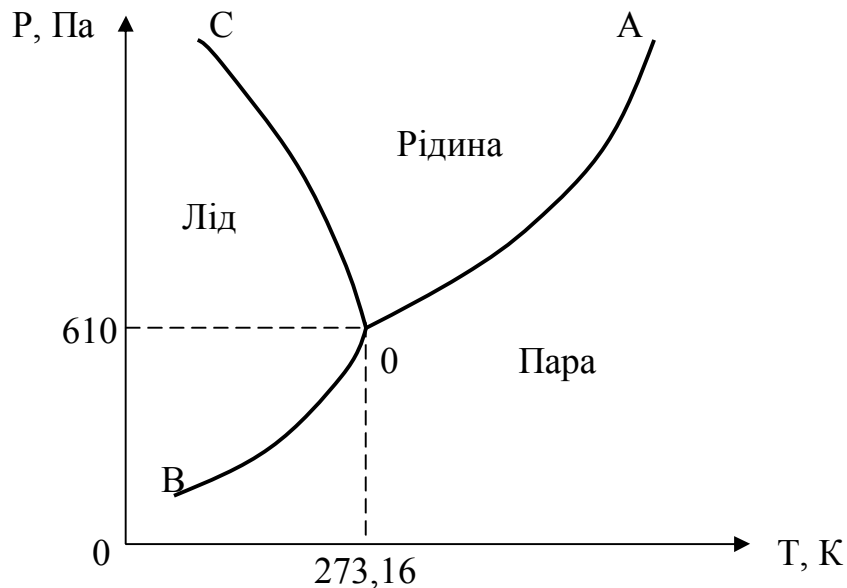


Рисунок 1.1 – Діаграма стану води

**Густина води  $\rho$**  визначається масою води  $m$  в одиниці об'єму  $V$ :

$$\rho = m/V \quad (1.1)$$

Густина води при температурі  $0^{\circ}\text{C}$  дорівнює  $999.97\text{ кг/м}^3$ , а льоду –  $916.7\text{ кг/м}^3$ , тому лід утримується на поверхні води. З підвищенням температури води від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $+4^{\circ}\text{C}$  густина води досягає максимуму ( $999.97\text{ кг/м}^3 \approx 1000\text{ кг/м}^3$ ), а при підвищенні температури густина зменшується (питомий об'єм збільшується), внаслідок чого зростає відстань між молекулами.

При зменшенні температури з глибиною (пряма стратифікація) водні маси стійкі при температурах, більших за  $4^{\circ}\text{C}$  і нестійкі при температурах нижчих за  $4^{\circ}\text{C}$  (зворотна стратифікація).

Стиснення (об'ємна пружність) – це властивість зменшення об'єму під впливом підвищення зовнішнього тиску, характеризується **коефіцієнтом стиснення води  $\beta$** , який дорівнює відношенню відносної зміни об'єму рідини  $V$  до зміни тиску  $P$ :

$$\beta = -\frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dP} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dP}; \quad \beta = -\frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\Delta P} \quad (1.2)$$

Позначка “–” вказує на те, що збільшенню тиску відповідає зменшення об'єму.

Величина, обернена коефіцієнту стиснення, є **модуль об'ємної пружності  $K$** :

$$K = 1 / \beta \quad (1.3)$$

Значення модуля об'ємної пружності для води можна прийняти  $2 \cdot 10^9$  Па, тоді коефіцієнт стиснення  $\beta \approx 5 \cdot 10^{-10}$  Па. За формулою (1.2)  $\Delta V = 5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, якщо об'єм 1 м<sup>3</sup> води перенести на глибину 1000 м ( $\Delta P = 10^7$  Па) з поверхні. Тобто вода дуже мало стискається.

**Коефіцієнт об'ємного розширення води  $\beta_t$** . Термічне розширення води – властивість збільшувати свій об'єм при підвищенні її температури. Коефіцієнт  $\beta_t$  – це відношення відносної зміни об'єму рідини  $V$  до зміни температури  $t$ :

$$\beta_t = \frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} \quad \text{або} \quad \beta_t = \frac{\Delta V}{V_t} \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Звідки

$$V_2 = V_1(1 + \beta_t \Delta t), \quad (1.5)$$

де  $V_1$  та  $V_2$  – об'єми рідини відповідно при температурі  $t_1$  та  $t_2$ ;  $\Delta V = V_2 - V_1$  – зміна об'єму рідини;  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

У зв'язку з аномалією густини води, коефіцієнт її об'ємного розширення має від'ємні значення при температурі від  $0^\circ$  до  $4^\circ\text{C}$ ; з підвищенням температури коефіцієнт  $\beta$  збільшується.

**3. Характерні значення температури води.** *Температура найбільшої щільності* дистильованої води за нормального тиску  $1.01 \cdot 10^5$  Па береться  $4^\circ\text{C}$  ( $3.98^\circ\text{C}$ ).

*Температура кристалізації* (замерзання) дистильованої води за нормального атмосферного тиску береться рівною  $0^\circ\text{C}$  і є початковим значенням температурної шкали термометра Цельсія.

*Переохолодження води*, тобто зниження її температури замерзання по відношенню до  $0^\circ\text{C}$ . На річках переохолодження поверхневого шару води досягає  $-1^\circ\text{C}$ .

**4. Теплові характеристики води.** *Теплоємність  $C$*  - це кількість теплоти, яка поглинена тілом при нагріванні його на  $1^\circ\text{C}$ .

$$C = dS / dt \quad \text{або} \quad S / \Delta t \quad (1.6)$$

де  $\Delta t = t_2 - t_1$  – зміна температури тіла;  $t_1$  та  $t_2$  – температура тіла до та після поглинання теплоти.

**Питома теплоємність води** – це кількість теплоти, яка потрібна для нагрівання 1 кг дистильованої води на  $1^\circ\text{C}$  (від  $14.5^\circ\text{C}$  до  $15.5^\circ\text{C}$ ). Питома теплоємність води мало залежить від температури, тому у практичних розрахунках її значення дорівнює  $4.2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ . Зі збільшенням мінералізації теплоємність її зменшується (на  $0.006 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$  на 1%).

Перехід води з рідкого стану у твердий (кристалічний – лід) супроводжується виділенням теплоти кристалізації  $S_{\text{кр}}$ , а обернений процес – танення льоду – поглинанням теплоти плавлення  $S_{\text{пл}}$ . Ця здатність визначається питомою теплотою кристалізації (плавлення).

**Питома теплота кристалізації (води)  $L_{\text{кр}}$**  – це кількість теплоти, яка виділяється при кристалізації 1 кг води при сталій температурі. Для дистильованої води вона дорівнює  $33.3 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$ .

Перехід води з рідкого стану у пару супроводжується поглинанням теплоти випаровування  $S_{\text{в}}$ . Джерелом її є внутрішня енергія самої води, тому при випаровуванні вона охолоджується. Обернений процес – конденсація пари – супроводжується виділенням теплоти  $S_{\text{к}}$ . Ця здатність визначається питомою теплотою випаровування.

**Питома теплота випаровування води  $L_{\text{в}}$**  – це кількість теплоти, необхідної для переходу 1 кг води з рідкого стану в пару без зміни температури за нормального атмосферного тиску. Питома теплота випаровування води залежить від температури та визначається за формулою:

$$L_{\text{в}} = (25 - 0.024t_n) \cdot 10^5, \quad (1.7)$$

де  $25 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$  – питома теплота випаровування при температурі поверхні води  $0^\circ\text{C}$ ,  $t_n$  – температура поверхні води.

**Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$**  – характеристика молекулярної теплопередачі – чисельно дорівнює кількості теплоти  $S$ , що проходить крізь  $1 \text{ м}^2$  ізотермічної поверхні  $F$  в одну годину при шарі речовини у  $1 \text{ м}$  і різниці температури  $\Delta t$  на межі шару в  $1^\circ\text{C}$ . Залежить від структури речовини, густини, вологості, температури та тиску. Коефіцієнт теплопровідності визначається за даними спостережень за рівнянням:

$$\lambda = -S / [F \tau \Delta t / (\Delta n)] \quad (1.8)$$

Зі збільшенням температури води від  $0^\circ\text{C}$  до  $127^\circ\text{C}$  коефіцієнт теплопровідності збільшується, а при подальшому збільшенні температури

– зменшується. При  $0^{\circ}\text{C}$  коефіцієнт теплопровідності води дорівнює  $0.569 \text{ Вт/м}\cdot^{\circ}\text{C}$ .

**Коефіцієнт температуропровідності  $a$**  – характеризує фізичну властивість води, яка сприяє передачі теплоти таким чином, що температура у кожній точці прямує до відповідного сталого становища:

$$a = \lambda / c \cdot \rho \quad (1.9)$$

Коефіцієнт температуропровідності води при температурі  $0^{\circ}\text{C}$  та  $10^{\circ}\text{C}$  відповідно дорівнює  $0.485 \cdot 10^{-3}$  та  $0.504 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{годину}$ .

**В'язкість** – це фізична властивість речовини чинити опір переміщенню однієї її частини відносно іншої. **Коефіцієнт динамічної в'язкості  $\mu$**  – визначає силу тертя, що діє на одиницю поверхні при градієнті швидкості, яка дорівнює одиниці, тому його іноді називають коефіцієнтом внутрішнього тертя.

За законом Ньютона:

$$F = \mu \cdot dv / dn, \quad (1.10)$$

де  $F$  – дотичне напруження зсуву на одиницю поверхні;  $v$  – швидкість рідини;  $n$  – нормаль до поверхні.

Коефіцієнт динамічної в'язкості залежить від температури, за формулою Пуазейля:

$$\mu = 0.000183(1 + 0.0337t + 0.000221t^2), \quad (1.11)$$

де  $t$  – температура води.

**Коефіцієнт кінематичної в'язкості  $\nu$**  – це відношення коефіцієнта динамічної в'язкості  $\mu$  до густини рідини  $\rho$ :

$$\nu = \mu / \rho \quad (1.12)$$

При  $t = 20^{\circ}\text{C}$  дорівнює  $1.003 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

Величина обернена в'язкості є рідкість (текучість)  $\varphi$ :

$$\varphi = 1 / \mu \quad (1.13)$$

**Поверхневий натяг води.** Внутрішньомолекулярні сили проявляються на поверхні у вигляді сил прилипання. Вони зумовлюють поверхневий натяг. На поверхні міжмолекулярні сили прагнуть втягнути

всі молекули всередину рідини і зменшити діючу поверхню, внаслідок чого виникає сила поверхневого натягу нормально до натягу поверхні води. Сила поверхневого натягу  $F$  діє на вільній поверхні рідини, має напрям дотичної до поверхні і нормалі до межі вільної поверхні, визначається за формулою:

$$F = \sigma l, \quad (1.14)$$

де  $l$  – довжина контуру поверхні рідини;  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу, Н/м.

Коефіцієнт поверхневого натягу води залежить від її температури. У межах від  $-5...35^{\circ}\text{C}$  визначається за формулою:

$$\sigma = (75.64 - 0.15t) \cdot 10^3 \text{ Н/м}. \quad (1.15)$$

**Радіаційні та оптичні властивості води.** Сонячна енергія, яка падає на поверхню води, частково проникає у воду і поглинається, частково відбивається та заломлюється. **Коефіцієнтом відбиття  $A$**  (альbedo) є відношення відбитої від поверхні води сонячної енергії до падаючої. Значення альbedo при прямій сонячній радіації залежить від деяких факторів, але головним чином від кута падіння радіації  $\varphi$  і кута поглинання  $i$ . Відношення синуса кута падіння  $\varphi$  до синуса кута заломлення  $i$  є стала величина для даних двох середовищ:

$$n = \sin \varphi / \sin i \quad (1.16)$$

Величина  $n$  називається **відносним коефіцієнтом заломлення**. З підвищенням температури  $n$  мало змінюється і тому можна взяти його як сталу  $n = 1.34$ . Зменшення сонячної енергії з глибиною відбувається за експоненціальним законом Ламберта:

$$I_z = I_0 \cdot e^{-Kz}, \quad (1.17)$$

де  $I_0$  та  $I_z$  – сумарна радіація відповідно на поверхні і на глибині  $z$ ;  $K$  – **коефіцієнт поглинання**.

Характеристиками прозорості води є **відносна прозорість**, яка визначається глибиною зникнення стандартного білого диску, та **коефіцієнтом прозорості  $I$** , який визначається за формулою:

$$Q_z / Q = I_z, \quad (1.18)$$

де  $Q$  – напруження світової енергії на верхній поверхні;  $Q_z$  – теж саме на глибині  $z$ ,  $I$  – коефіцієнт прозорості при товщині шару  $z=1$ .

**Електричні властивості.** Електропровідність води залежить від домішок–аміаку, вуглекислоти, твердих розчинених речовин. **Питома електропровідність**  $\rho_e$  чистої води при  $18^\circ\text{C}$  дорівнює  $0.038 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ . При контакті води з повітрям її питома електропровідність внаслідок розчинення  $\text{CO}_2$  збільшується вдвічі. Характеристикою електричних властивостей речовин є **відносна діелектрична стала  $\epsilon$** . Для вакууму вона дорівнює 1, для більшості тіл 2-8, а для води 79-81. Аномально велику діелектричну сталу надає воді великий дипольний момент молекули води, який дорівнює  $1.84 D$ , що характеризує несиметричність будови молекули.

Велика діелектрична стала води є причиною її великої іонізуючої здатності (розщеплення молекул на іони). Тому вода є універсальним розчинником.

**Акустичні властивості.** Вода добре проводить звукові та ультразвукові хвилі, чому сприяє її висока густина та невелике стиснення. Швидкість розповсюдження звуку у воді визначається за формулою Ньютона-Лапласа:

$$v = \sqrt{P\psi / \rho}, \quad (1.19)$$

де  $P$  – тиск;  $\psi = C\rho / C_v$  – відношення теплоємності при сталому тиску до теплоємності при сталому об'ємі;  $\rho$  – густина.

З підвищенням температури швидкість звуку у чистій воді змінюється за параболічним законом. Вода до температури  $74^\circ\text{C}$  має додатний температурний градієнт, далі він стає від'ємним і швидкість звуку зменшується. Швидкість звуку при  $t=74^\circ\text{C}$  дорівнює  $1557 \text{ м/с}$ .

Аналітична залежність швидкості звуку від температури води має вигляд:

$$U = 1557 - 0.0245 (74 - t)^2 \quad (1.20)$$

Крім того, швидкість звуку залежить від солоності, тиску, вмісту газу, а також від завислих домішок органічного та мінерального походження.

**Аномалії води** – властивості води, специфічні у порівнянні з іншими рідинами, що пов'язано зі структурою води, будовою її молекули та характером молекулярної взаємодії.

1. Густина води при збільшенні температури води від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $100^{\circ}\text{C}$  має максимум при температурі  $\sim 4^{\circ}\text{C}$ , в той час як у інших рідин вона завжди зменшується.

2. При замерзанні вода розширюється, а не стискається, як усі інші рідини. Щільність льоду при  $0^{\circ}\text{C}$  на 10% менша від густини води при тій же температурі.

3. Температура замерзання ( $0^{\circ}\text{C}$ ) і кипіння ( $100^{\circ}\text{C}$ ) аномальна у порівнянні з температурою гідридів, що входять в однакову з киснем групу періодичної системи Д.І.Менделєєва: сірки –  $\text{H}_2\text{S}$ , селену –  $\text{H}_2\text{Se}$ , телуру –  $\text{H}_2\text{Te}$ .

У відповідності з температурою замерзання і кипіння цих гідридів слід було сподіватись, що вода замерзає при мінус  $90^{\circ}\text{C}$ , а кипить при мінус  $70^{\circ}\text{C}$ .

4. Температура замерзання води при збільшенні тиску знижується, а не підвищується. Тому у водоймах на великих глибинах знаходиться рідка вода при температурі значно нижчій за  $0^{\circ}\text{C}$ .

5. Вода може знаходитись у рідкому стані при температурі значно нижчій від температури кристалізації льоду – переохолодження води.

6. Питома теплоємність води у 5-10 разів більша за питому теплоємність інших речовин. Питома теплоємність води зменшується при збільшенні температури від  $0^{\circ}\text{C}$  до  $37^{\circ}\text{C}$ , тоді як у інших речовин (крім ртуті) вона збільшується.

7. Питома теплота плавлення льоду надзвичайно висока –  $333 \cdot 10^3$  Дж/кг. При зниженні температури питома теплота плавлення не збільшується, а зменшується (на 2.1 Дж на  $1^{\circ}\text{C}$ ).

8. В'язкість води з підвищенням тиску зменшується, а не збільшується як у інших рідин.

9. Діелектрична стала води надзвичайно висока – 81, тоді як у інших речовин вона змінюється від 2 до 8. Тому вода має велику розчинювальну здатність.

10. Вода має великий поверхневий натяг ( $0,0727$  Н/м<sup>2</sup> при  $20^{\circ}\text{C}$ ), більший ніж у інших рідин, крім ртуті ( $0,465$  Н/м<sup>2</sup>).

## 1.2 Фізичні властивості льоду

**Щільність льоду**  $\rho_l$  залежить від його пористості  $n$  та мало від його температури:

$$\rho_l = 916.9(1 - 0.000158 t)(1 - n) \quad (1.21)$$

У практичних розрахунках можна брати при  $n=0$ ,  $\rho_{\text{л}}=917 \text{ кг/м}^3$ . Вплив температури на  $\rho_{\text{л}}$  треба враховувати в розрахунках при різниці щільності води та льоду.

**Питома теплоємність льоду  $C_{\text{л}}$**  збільшується з підвищенням температури і в два рази менша ніж у води

$$C_{\text{л}} = 2.117(1 + 0.0037t) \quad (1.22)$$

Вона може вважатись сталою величиною  $C_{\text{л}}=2,12 \text{ кДж/ (кг}^\circ\text{C)}$ . Об'ємна теплоємність льоду  $C_{\text{V}}=C_{\text{л}}\cdot\rho_{\text{л}}$  теж дещо збільшується з підвищенням температури:

$$C_{\text{V}} = 1941(1 + 0.0036t)(1 - n) \quad (1.23)$$

**Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_{\text{л}}$  та температуропровідності  $a_{\text{л}}$**  льоду. Значення коефіцієнта теплопровідності льоду з підвищенням температури зменшується лінійно:

$$\lambda_{\text{л}} = 2.219(1 - 0.00159 t) \cdot (2 - 2n) / 2n \quad (1.24)$$

Звичайно можна брати  $\lambda_{\text{л}}=2.22 \text{ Вт/м}^\circ\text{C}$ . Коефіцієнт температуропровідності льоду  $a_{\text{л}} = \lambda_{\text{л}}/C_{\text{Vл}}$  з підвищенням температури знижується у зв'язку з тим, що не тільки зменшується  $\lambda_{\text{л}}$ , але й збільшується  $C_{\text{Vл}}$  при  $n=0$ :  $a_{\text{л}} = 1.14(1-0.0063t)10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

**Коефіцієнти лінійного  $\alpha_t$  та об'ємного  $\beta_t$  теплового розширення льоду.** Коефіцієнт об'ємного теплового розширення льоду з підвищенням температури збільшується незначно, тому звичайно можна брати  $\beta_t=1.58\cdot10^{-4}^\circ\text{C}^{-1}$ . Коефіцієнт лінійного теплового розширення:

$$\alpha_t = \beta_t / 3 = 0.528 \cdot 10^{-4}^\circ \text{C}^{-1} \quad (1.25)$$

**Модуль пружності  $E_{\text{л}}$  і зсуву  $G_{\text{л}}$  та коефіцієнт Пуассона  $\gamma_{\text{л}}$  льоду** — механічні властивості льоду. Ці фізичні характеристики взаємозв'язані:



$$\gamma_L = \frac{E_L}{2G_L} - 1 \quad (1.26)$$

Коефіцієнт Пуассона не залежить від температури і змінюється від 0.34 до 0.37.

Модуль пружності лінійно зменшується з підвищенням температури:

$$E_L = 9 \cdot 10^9 (1 - 1.0016t). \quad (1.27)$$

Величина, обернена модулю пружності,  $1/E_L$  характеризує відносне об'ємне стискання льоду. Модуль зсуву  $G_L = 3 \cdot 10^9$  Па.

**Коефіцієнт динамічної в'язкості льоду  $\mu_L$**  залежить від структури льоду, характеру навантаження, його тривалості тощо.

Приблизна залежність  $\mu_L$  від температури визначається рівнянням:

$$\mu_L = (118 - 9.84t + 2.92t^2) \cdot 10^{10} \text{ Па}\cdot\text{с} \quad (1.28)$$

**Коефіцієнт відбиття  $A_L$ , заломлення  $\Pi_L$  та поглинання льоду  $K_L$ .** Коефіцієнт відбиття  $A_L = 0.12 - 0.4$ . Коефіцієнт заломлення  $\Pi_L = 1.31$ . Коефіцієнт поглинання льоду  $K_L = 1 \text{ м}^{-1}$ .

**Питомий електричний опір  $\rho_{el}$  та діелектрична стала льоду  $E_L$ .** Електрична провідність прісноводного льоду у багато разів менша від електричної провідності води.

Діелектрична стала льоду  $E_L$  залежить від його температури і частоти електромагнітних хвиль. При тому  $E_L$  збільшується з пониженням температури.

При  $t = -5^\circ\text{C}$  діелектрична стала  $E_L = 73$ .

**Адгезія льоду  $\sigma_{ad}$**  – примерзання льоду до поверхні твердого тіла. Кількісною характеристикою адгезії  $\sigma_{ad}$  служить робота, яку треба зробити, щоб з одиниці площі примерзання зсувом порушити зв'язок між обома тілами. Адгезія залежить від фізичних властивостей контактної поверхні та температури, з пониженням якої адгезія підвищується.

### 1.3 Фізичні властивості снігу

**Щільність  $\rho_{ch}$  і пористість  $n_{ch}$  снігу.** Щільність снігу в залежності від його пористості та вологості дорівнює:

$$\rho_{ch} = \rho_L (1 - n_{ch}) + k n_{ch} \rho, \quad (1.29)$$

де  $\rho_l$  – щільність льоду,  $\rho$  – густина води,  $k$  – ступінь наповнення пор водою; у сухого снігу  $k=0$ ; у водонасиченого  $k=1$ .

Щільність свіжовипавшого снігу знаходиться в межах 50–250 кг/м<sup>3</sup> і залежить від температури  $t$  та швидкості вітру  $\omega$ :

при  $t \leq 4^\circ\text{C}$ ,  $\omega \leq 1$  м/с

$$\rho_{\text{сн}} = 50 + 140e^{-0.17(2-t)}, \quad (1.30)$$

при  $\omega > 1$  м/с

$$\rho_{\text{сн}} = 50 + 20\omega \quad (1.31)$$

Щільність снігу залежить від тривалості і глибини його залягання. Наявність вологи збільшує  $\rho_{\text{сн}}$  до 500-600 кг/м<sup>3</sup>.

**Пористість снігового покриву  $n_{\text{сн}}$**  обумовлена великою кількістю проміжків між кристалами льоду, які утворюють пори. Пористість виражають у відсотках:

$$n_{\text{сн}} = 100(1 - \rho / \rho_l) \quad (1.32)$$

Пористість снігового покриву пов'язана з його структурою і змінюється з його затвердінням від 98 до 20 %. На початку сніготанення (при щільності 280-300 кг/м<sup>3</sup>) пористість дорівнює 73 – 67 %.

**Водопроникність снігового покриву** – здатність снігу пропускати воду крізь свою товщу. Вона залежить від кількості, розмірів і форми пор у сніговому покриві, які змінюються під впливом тиску (затвердіння) і температури, від характеру стратифікації снігової товщі, а також від в'язкості води, яка фільтрується крізь сніг. Характеристикою водопроникності є коефіцієнт фільтрації  $K_f$ , що виявляє швидкість руху води крізь товщу снігу при гідравлічному схилі, який дорівнює одиниці.

**Водоутримуюча здатність снігового покриву** (вологомісткість) –  $\gamma$  найбільша кількість рідкої води, яку сніг може утримувати після насичення його водою до повної вологомісткості і дальшого стікання надлишкової гравітаційної води. Водоутримуюча здатність снігового покриву  $\gamma$  визначається за формулою:

$$\gamma = 100 S_p / S, \quad (1.33)$$

де  $S_p$  – максимальна вага талої води у підвішеному стані у визначному об'ємі снігу;  $S$  – загальна вага води, яка утримується у визначеному об'ємі

снігу у рідкій та твердій фазах. Водоутримуюча здатність снігового покриву залежить від його структури та щільності: чим нижча щільність, тим більша водоутримуюча здатність.

**Вологість снігу  $\alpha$**  – кількість води, яка утримується у сніговому покриві протягом певного часу і визначається у відсотках до ваги проби вологого снігу.

Вологість снігу  $\alpha$  у відсотках визначають за формулою:

$$\alpha = m \cdot 100 / P, \quad (1.34)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт вологості,  $m$  – вміст води у пробі,  $P$  – загальна вага проби.

**Питома теплоємність снігу  $C_{сн}$ .** Питома та об'ємна теплоємність сухого снігу така, як і льоду (1.22) та (1.23).

Питома теплоємність вологого снігу:

$$C_{сн} = \frac{C_{л}}{1 + \frac{\kappa n_{сн}}{1 - n_{сн}} \cdot \frac{\rho}{\rho_{л}}} + \frac{C}{1 + \kappa \frac{1 - n_{сн}}{n_{сн}} \cdot \frac{\rho_{л}}{\rho}}, \quad (1.35)$$

де  $C_{л}$  та  $C$  – питома теплоємність льоду та води;  $\kappa$  – ступінь наповнення пор водою;  $n_{сн}$  – пористість снігу.

Для сухого снігу при  $t = 0^{\circ}\text{C}$   $C_{сн} = C_{л} = 2.12 \text{ кДж}/(\text{кг}^{\circ}\text{C})$ .

Об'ємна теплоємність снігу дорівнює

$$C_{V_{сн}} = C_{сн} \cdot \rho_{сн}. \quad (1.36)$$

В зв'язку з тим, що  $\rho_{сн}$  значно менше за  $\rho_{л}$ , об'ємна теплоємність снігу, особливо сухого, мала. Вологість значно впливає на теплоємність снігу: так при  $n_{сн} = 0.5$  для сухого снігу  $C_{сн} = C_{л} = 2.12 \text{ кДж}/(\text{кг}^{\circ}\text{C})$ , а для вологого снігу при  $\kappa = 0.3$   $C_{сн} = 4.81 \text{ кДж}/(\text{кг}^{\circ}\text{C})$ . Об'ємна теплоємність сухого снігу  $C_{V_{сн}} = 972 \text{ кДж}/(\text{кг}^{\circ}\text{C})$ , а для вологого –  $2927 \text{ кДж}/(\text{кг}^{\circ}\text{C})$ .

**Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_{сн}$  та температуропровідності  $a_{сн}$  снігу.** Коефіцієнт теплопровідності снігу  $\lambda_{сн}$  збільшується пропорційно щільності снігу.

$$\text{при } \rho_{сн} \leq 350 \text{ кг} / \text{м}^3 \quad (1.37)$$

$$\lambda_{сн} = 2.85 \cdot 10^{-6} \rho_{сн}^2 (\text{Вт} / \text{м}^{\circ}\text{C})$$

$$\text{при } \rho_{\text{сн}} > 350 \text{ кг / м}^3 \quad (1.38)$$

$$\lambda_{\text{сн}} = 3.56 \cdot 10^{-6} \rho_{\text{сн}}^2 \text{ (Вт / м}^0\text{С)}$$

Коефіцієнт температуропроводності снігу  $a_{\text{сн}}$  характеризує швидкість передачі температурних коливань та збільшується з підвищенням щільності снігу лінійно:

$$\text{при } \rho_{\text{сн}} \leq 350 \text{ кг / м}^3 \quad (1.39)$$

$$a_{\text{сн}} = 4.85 \cdot 10^{-6} \rho_{\text{сн}} \text{ (м}^2\text{/год)}$$

$$\text{при } \rho_{\text{сн}} > 350 \text{ кг / м}^3 \quad (1.40)$$

$$a_{\text{сн}} = 6.05 \cdot 10^{-6} \rho_{\text{сн}} \text{ (м}^2\text{/год)}$$

**Коефіцієнт відбиття  $A_{\text{сн}}$  та поглинання  $K_{\text{сн}}$  снігу.** Коефіцієнт відбиття (альbedo) снігу значно більший ніж льоду та ще більший ніж води. У свіжовипавшого снігу  $A_{\text{сн}} = 0.85 \div 0.95$ , у чистого вологого  $A_{\text{сн}} = 0.60 \div 0.70$ , у танучого  $A_{\text{сн}} = 0.30 \div 0.40$ .

Частина енергії сонячної радіації, що надходить у сніг, поглинається ним у верхньому шарі. Коефіцієнт поглинання снігу чистого –  $K_{\text{сн}} = 11 \text{ м}^{-1}$ , вологого  $K_{\text{сн}} = 30 \div 40 \text{ м}^{-1}$ . Тому 90% енергії сонячної радіації поглинається у шарі 20 см – при чистому снігу, у шарі 5 см – при вологому снігу.

Сніговий покрив не тільки відбиває значну частину сонячної енергії, але і не допускає її до підстильної поверхні льодяного покриву чи ґрунту.

### **Питання для самоконтролю**

1. Що вивчає наука гідрофізика?
2. Назвіть основні задачі гідрофізики вод суші.
3. Які фізичні властивості води Ви знаєте?
4. Назвіть основні аномалії води.
5. Назвіть основні фізичні властивості льоду.
6. Назвіть основні фізичні властивості снігу.

## РОЗДІЛ 2

### ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ

#### 2.1 Теплота. Температурне поле. Тепловий потік. Ентальпія. Теплопровідність.

**Теплота** – синоніми: теплова енергія, тепло – один із видів енергії – кінетична енергія молекул. Теплова енергія може перетворюватись в інші види енергії і, навпаки, інші види енергії можуть перетворюватись у механічну енергію молекул тіла; часто зустрічаються протилежні переходи – механічної енергії у теплову, наприклад, при пересуванні води (дисипація енергії).

Всі переходи енергії з одного виду у інший підпорядковуються закону збереження енергії, що є основою складання рівняння енергетичного балансу.

**Температура** тіла – це міра його нагріву, фізична характеристика запасу внутрішньої енергії, обумовленої кінематичною енергією молекул цього тіла. Тіло має більше запасу внутрішньої (теплової) енергії, якщо його температура вище. Енергія передається від більш нагрітого тіла до менш нагрітого або від ділянки тіла з більш високою температурою до ділянки з менш високою. Кількість енергії у цьому процесі має назву кількість теплоти.

Кожна точка тіла характеризується температурою. Якщо температура тіла змінюється від точки до точки, то воно може бути охарактеризоване просторовим полем, а якщо температура змінюється з часом, то просторово-часовим температурним полем.

У вигляді функціональної залежності температурне поле можна подати:

$$t = f_1(x, y, z, \tau), \quad (2.1)$$

де  $x, y, z$  – координати точки,  $\tau$  – час.

Сукупність значень температури всіх точок простору у певний час має назву **температурне поле**.

Температурні поля слід підрозділити на стаціонарні та нестаціонарні. Якщо температура тіла є функцією координат та часу, то таке температурне поле – нестаціонарне. У тому випадку, коли температура тіла з часом не змінюється  $\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0\right)$  і є функцією тільки координат, температурне поле стаціонарне:

$$t = f_2(x, y, z). \quad (2.2)$$

Температурні поля можуть бути тривимірні (просторові), двовимірні (плоскі) та одновимірні (лінійні). Поля, описувані залежностями (2.1) та (2.2), є просторовими. До двовимірних належать поля, описувані залежностями:

$$t = f_4(x, y, \tau); \quad t = f_4(x, y) \quad (2.3)$$

До одновимірних належать поля:

$$t = f_5(x, \tau) \quad t = f_6(x) \quad (2.4)$$

Якщо у двовимірному температурному полі з'єднати точки з однаковими значеннями температур, то одержимо систему ліній, які відповідають вибраній температурі. Ці лінії мають назву – ізотерми. Вони не перехрещуються і кінчаються на контурі або замикаються самі на себе (рис. 2.1).

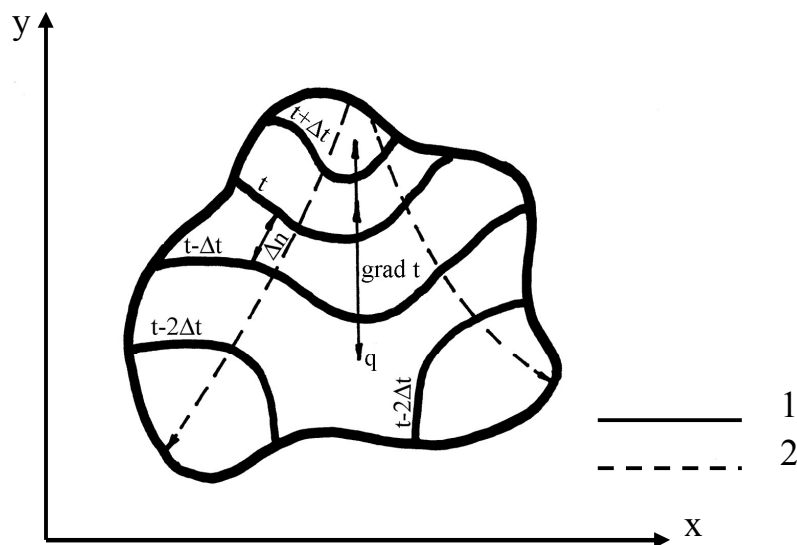


Рисунок 2.1 – Двовимірне температурне поле  
1 – ізотерми, 2 – лінії току

Розглянемо які-небудь дві розташовані поруч ізотерми з температурою  $t$  та  $t-\Delta t$  і визначимо між ними відстань  $\Delta n$ . Відношення перепаду температури  $\Delta t$  між ізотермами  $\Delta n$  по нормалі  $n$  при  $\Delta n \rightarrow 0$  має назву градієнт температури:

$$\text{grad } t = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n} \quad (2.5)$$

Гradient температури – вектор, спрямований по нормалі до ізотерми в бік збільшення температури.

Усе це справедливо для тривимірної задачі: з'єднання точок з однаковою температурою є ізотермічні поверхні.

**Тепловий потік** – кількість теплоти, яка проходить в одиницю часу крізь ізотермічну поверхню. Тепловий потік направлений в бік зменшення температури.

Тепловий потік, який проходить крізь одиницю поверхні, називається **інтенсивністю теплового потоку**. Кількість теплоти, що проходить в одиницю часу крізь одиницю площі ізотермічної поверхні, називається **густиною теплового потоку**  $q$  (питомий тепловий потік).

**Питомий тепловий потік** – це вектор, напрямлений по нормалі до  $n$ ; додатним є напрямок в бік зменшення температур (рис.2.1). Вектори gradienta температури та питомого теплового потоку направлені у протилежні сторони.

Питомий тепловий потік за законом Фур'є прямопропорційний gradientу температури

$$q_n = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (2.6)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $n$  – нормаль до ізотермічної поверхні.

Знак “мінус” у рівнянні (2.6) вказує на додатний тепловий потік. Тепловий потік, що проходить крізь площину  $F$  на ізотермічній поверхні, визначається:

$$S = q_n \cdot F = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cdot F \quad (2.7)$$

Тепловий потік поширюється уздовж ліній теплового потоку (ліній току теплоти).

**Лінії току теплоти** – це лінії, дотичні до яких збігаються з напрямком вектора  $q$  (з нормаллю  $n$ ) (рис.2.1). Лінії току теплоти в ізотропних тілах ортогональні до ізотерм та ізотермічних поверхонь.

Кількість теплоти вимірюється в джоулях (Дж) і позначається  $S$ . Джоуль – одиниця роботи (енергії).  $S$  – кількість внутрішньої енергії (теплоти) тіла при заданій температурі  $t$ . Ця енергія має назву **ентальпія**.

Для однорідного тіла вона визначається формулою:

$$S = C\rho Vt, \quad (2.8)$$

де  $C$  – питома теплоємність тіла,  $\rho$  – густина тіла,  $V$  – об'єм тіла.

## 2.2 Засоби передачі тепла

**Теплопровідність** – один із видів передачі теплоти, що має атомно-молекулярний характер. Механізм теплопровідності полягає у тому, що у шарі з підвищеною температурою змушені коливання молекул передаються суміжним молекулам і енергія теплового руху передається від шару до шару. Такий механізм забезпечує порівняно малу величину теплопровідності. Характеристикою молекулярної теплопередачі є коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ .

У твердому тілі теплота розповсюджується передачею кінетичної енергії від одних мікрочастинок до інших шляхом співударів, переміщення частинок у твердому тілі неможливе.

Теплопровідність має місце у рідині та в газі (повітрі), у яких теплота передається також шляхом переміщення частинок носіїв теплової енергії. Такий спосіб має назву **конвективного теплоперенесення**. В залежності від причини переміщення частинок рідини розрізняють змушену та вільну конвекцію.

Змущена конвекція – це рух рідини під дією зовнішніх сил (вітер, насос тощо), а також однорідного поля масових сил у рідині (схил тощо).

Вільна (природна, щільна) конвекція – це рух рідини через неоднорідність густини частинок рідини у полі тяжіння. Неоднорідність густини виникає через різницю температур, солоності.

Третій спосіб передачі теплоти, обумовлений **променистим теплообміном**, відбувається шляхом подвійного перетворення енергії: спершу із теплової в електромагнітну у місці випромінювання, а потім в теплову у місці поглинання.

Швидкість передачі теплоти зазначеними способами різна. Радіаційним засобом відбувається миттєва передача теплоти; швидкість передачі у повітрі 300000 км/с. Під час конвективної передачі теплоти її швидкість залежить від швидкості течії рідини.

Під час передачі теплоти теплопровідністю швидкість дуже мала. Так, наприклад, крізь льодяний покрив її швидкість  $3 \cdot 10^{-6}$  м/с.

Турбулентна течія може розглядатися як процес теплопровідності, а не конвекції. Турбулентність приводить до збільшення теплопровідності рідини. Тому конвекція рідини обумовлює не тільки конвективне перенесення теплоти – у турбулентній рідині збільшується тепловіддача за



рахунок теплопровідності. На відміну від фізичної або молекулярної теплопровідності, ця теплопровідність зветься турбулентною.

### 2.3 Закономірності передачі тепла

**Теплопровідність.** Передача теплоти теплопровідністю описується законом Фур'є (2.6). Питомий тепловий потік  $q_n$  являє собою частину повного питомого теплового потоку  $q_T$  за рахунок теплопровідності в даній точці, тобто є проекцією вектора  $q_T$  за напрямком  $n$ . Абсолютна величина  $q_T$  є геометричною сумою її складників по трьох взаємно перпендикулярних осях:

$$q_T = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} . \quad (2.9)$$

Якщо коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  не залежить від напрямку, тобто тіло ізотропне ( $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ ), то напрямок, перпендикулярний до ізотермічної поверхні, збігається з напрямком теплового потоку  $q_T$ :

$$q_T = -\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2} = \lambda \left(-\frac{\partial t}{\partial n}\right), \quad (2.10)$$

де  $n$  – напрямок, перпендикулярний до ізотермічної поверхні, що проходить через дану точку. Для анізотропного тіла:

$$q_T = \sqrt{\left(\lambda_x \frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\right)^2} . \quad (2.11)$$

Напрямок теплового потоку  $q_T$  не збігається з напрямком максимального градієнта температури, тобто він не перпендикулярний до ізотерм. Наприклад, турбулізовані потоки є анізотропними тілами. Лінії току теплоти збігаються з лініями максимальних градієнтів тільки у ізотропних тіл, де вони створюють ортогональну сітку.

**Конвекція.** При передачі теплоти конвекцією інтенсивність теплового потоку прямо пропорційна температурі рідини або повітря у даній точці та швидкості течії у даному напрямку:

$$q_i = C \rho v_i t , \quad (2.12)$$

де  $v_i$  – проекція швидкості руху рідини  $v$  у напрямку  $i$ .

Важливе значення має визначення передачі теплоти на межах рідини, наприклад, від водної маси до дна або від повітря до поверхні льодяного покриву.

Як відомо, швидкість рідини біля межі дорівнює нулю, теплота  $q_k$  передається крізь суміжний шар механізмом конвективної теплопровідності, тому біля поверхні рідини:

$$q_k = -\frac{\lambda}{\delta_c}(t - t_n), \quad (2.13)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт фізичної теплопровідності рідини,  $\delta_c$  – товщина суміжного шару;  $t, t_n$  – відповідно температура потоку і температура на межі рідини. Значення  $\delta_c$  невідомо, тому використовується залежність:

$$q_k = \alpha(t - t_n), \quad (2.14)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі.

Конвективний теплообмін у природі залежить від різниці температури підстильної поверхні  $t_n$  і температури навколишнього середовища  $\theta$  за законом Ньютона:

$$S_k = \alpha(t_n - \theta), \quad (2.15)$$

де  $S_k$  – кількість теплоти, яку віддає 1 м<sup>2</sup> поверхні в одиницю часу, Вт/м<sup>2</sup>;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі від підстильної поверхні до навколишнього середовища.

Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  визначається експериментально. Він залежить від великої кількості характеристик підстильної поверхні і навколишнього середовища: шорсткості підстильної поверхні, швидкості руху, температури і фізичних параметрів. Існує багато формул для його оцінки. Це формули В.В.Шулейкіна, Д.Н.Бібікова, В.В.Проскуракова, К.І.Росінського, А.П.Браславського та інш.

Нижче викладені деякі емпіричні залежності, які використовуються у практиці гідрофізичних розрахунків:

1. При тепловіддачі від поверхні води до повітря:

$$\alpha_1 = 2.65[1 + 0.8\omega + f(\Delta\theta)], \quad (2.16)$$

де  $\omega$  – швидкість повітря на висоті 2 м над водною поверхнею, м/с,  $f(\Delta\theta)$  – таблична функція, яка визначається за різницею температури поверхні води та повітря ( $t_n - \theta$ ).

2. При тепловіддачі від води до нижньої поверхні льоду:

$$\alpha_2 = 348(1 + 6\sqrt{V}), \quad (2.17)$$

де  $V$  – середня швидкість руху води під льодом за час льодоутворення, м/с.

3. При тепловіддачі від поверхні льоду до повітря (при відсутності снігу на льоду):

$$\alpha_3 = 5.8\sqrt{\omega + 0.3}. \quad (2.18)$$

де  $\omega$  – швидкість повітря, м/с.

4. При тепловіддачі від поверхні снігу до повітря:

$$\alpha_4 = 23.2\sqrt{\omega + 0.3}. \quad (2.19)$$

**Променистий теплообмін.** Залежність для визначення теплового потоку при передачі теплоти випромінювання абсолютного чорного тіла має назву – закон Стефана-Больцмана:

$$S_n = \sigma_0 T^4, \quad (2.20)$$

де  $\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> °С) – коефіцієнт випромінювання абсолютно чорного тіла – стала Стефана-Больцмана,  $T$  – абсолютна температура поверхні.

Реальні тіла не є абсолютно чорними, тому при одній і тій же температурі вони випромінюють менше енергії, ніж абсолютно чорні тіла. Теплота випромінювання реальних тіл визначається за формулою:

$$S_n = \varepsilon \sigma_0 T^4, \quad (2.21)$$

де  $\varepsilon$  – ступінь чорноти тіла, визначається він експериментально, змінюється від 0 до 1 і залежить від природи тіла, його температури і стану поверхні.

## 2.4 Теплові режими

Тепловий режим тіла може бути стаціонарним (сталим) і нестаціонарним (несталим). Якщо температура тіла не змінюється у часі  $\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0\right)$ , то тепловий режим – сталий. Такий режим може бути рівноважним – температура тіла у всіх точках величина стала і однакова (рис. 2.2, крива 1) і нерівноважним – температура тіла стала величина, але неоднакова у різних точках (рис. 2.2, крива 2). Якщо температура тіла змінюється у часі  $\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0\right)$ , то тепловий режим несталий (рис. 2.2, крива 3).

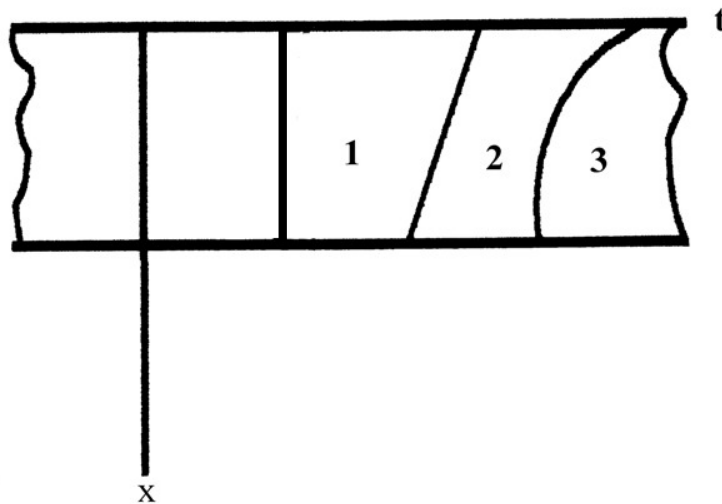


Рисунок 2.2 – Одновимірний розподіл температури у пластині

Аналіз поля температур дозволяє визначити, до якого теплового режиму відноситься тіло. Часто різні частини тіла знаходяться у різних теплових режимах, а також з часом режим тіла може змінюватись. Несталий режим у кожний момент часу завжди прямує до сталого режиму, але не треба робити висновок, що з часом режим обов'язково буде сталим. Процес під впливом ряду факторів теплообміну з навколишнім середовищем, внутрішніх джерел та іншого, може розвиватись у протилежному напрямі, значення  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  можуть зростати; більше того, сталий режим тіла або його частини може змінитись несталим.

### ***Питання для самоконтролю.***

1. Що таке теплота, тепло?
2. Дайте визначення поняття “температурне поле”.
3. Що таке тепловий потік, питомий тепловий потік, інтенсивність теплового потоку?
4. Дайте визначення поняття “ентальпія”.
5. Назвіть основні способи передачі тепла.
6. Дайте визначення поняття “теплопровідність”. Яким законом описується передача теплоти теплопровідністю?
7. Дайте визначення поняття “конвекція” та яким законом вона описується.
8. В чому полягає променистий теплообмін і якими закономірностями він описується.
9. Назвіть типи теплових режимів.

## РОЗДІЛ 3 РІВНЯННЯ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСУ

### 3.1 Різні форми рівняння теплового балансу

Рівняння теплового балансу – це кількісне співвідношення між величинами теплових потоків, що входять в межі розглянутого контуру і виходять за його межі з урахуванням зміни запасу тепла в об’ємі, обмеженому цим контуром.

Рішення теплової задачі зводиться до визначення зв’язку між шуканою тепловою величиною (температурою, тепловим потоком та інше) і фізичними умовами, які визначають тепловий процес – умови однозначності – форма і розміри тіла, теплофізичні властивості, джерела теплоти, теплові умови на межі тіла тощо. Аналітичний зв’язок визначається шляхом вирішення рівняння теплового балансу.

Рівняння теплового балансу мають різні форми. Можна складати рівняння теплового балансу кількості теплоти, теплового потоку або інтенсивності теплового потоку. Належить розрізнявати рівняння теплового балансу поверхні та об’єму; поверхня може знаходитись на поверхні тіла або всередині нього і може бути замкнутою чи незамкнутою; об’ємом може бути усе тіло або його частина. Об’єкти складання рівняння теплового балансу – поверхня або об’єм – можуть бути скінченими або нескінченно малими, це ж відноситься і до періоду часу рівняння теплового балансу – воно може бути скінченим чи нескінченно малим. Тому існують різні форми рівняння теплового балансу: алгебраїчні, диференціальні, інтегральні і змішані.

Рівняння теплового балансу виражає закон збереження і перетворення енергії.

### 3.2 Рівняння Гаусса-Остроградського

У загальному вигляді рівняння теплового балансу відносно об’єму  $V$  можна сформулювати так: алгебраїчна сума теплових потоків, що входять в об’єм усіма зазначеними вище способами теплопередачі ( $S_T, S_k, S_B$  – зовнішні джерела) і теплового потоку, діючого всередині цього об’єму (внутрішні джерела теплоти –  $S_v$ ), дорівнює швидкості змінювання запасу тепла в об’ємі. Це рівняння відоме як рівняння Гаусса-Остроградського:

$$\iint_F (S_T + S_k + S_B) dF + \iiint_V S_v dV = \iiint_V C\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dV. \quad (3.1)$$

Зовнішні джерела теплоти  $S_T$ ,  $S_k$ ,  $S_B$  – це, відповідно, передача теплоти шляхом теплопровідності, конвекції та випромінювання. Внутрішніми джерелами теплоти  $S_v$  можуть бути питома теплота фазових переходів води (при кристалізації або випаровуванні), дисипація енергії при русі рідини (перехід механічної енергії у теплову).

Рівняння теплового балансу поверхні може розглядатись як окремий випадок рівняння теплового балансу, який прямує до нуля.

Тоді рівняння (3.1) має вигляд:

$$\iint_F (S_T + S_k + S_B) dF + \iint_F S_v dF = 0 \quad (3.2)$$

### 3.3 Рівняння Фур'є-Кірхгофа

Використовуючи (3.1), можна скласти рівняння теплового балансу нерухомого елементарного паралелепіпеда з гранями  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , паралельними осям координат, крізь які протікає рідина:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} - C\rho \left( V_x \frac{\partial t}{\partial x} + V_y \frac{\partial t}{\partial y} + V_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) + S_v = C\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) має назву рівняння Фур'є-Кірхгофа. Якщо  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$  та  $V_z = V_y = 0$ , то маємо:

$$a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - V \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{S_v}{C\rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (3.4)$$

де  $a = \frac{\lambda}{C\rho}$  – коефіцієнт температуропровідності.

При відсутності конвективного переносу теплоти маємо рівняння теплопровідності Фур'є для твердого тіла:

$$a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{S_v}{C\rho} = \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (3.5)$$

### 3.4 Рівняння теплового балансу водних об'єктів

Теплові процеси у водних об'єктах визначаються поглинанням променистої енергії Сонця, енергообміном на межі з атмосферою та

літосферою, а також перерозподілом тепла у воді внаслідок переносу течіями та турбулентного перемішування водних мас.

Складний взаємозв'язок цих факторів викликає неоднорідність простору і нестаціонарність у часі температурного поля, фазові перетворення і інші явища у водних об'єктах.

Теплообмін у водному об'єкті під час розрахунку  $\Delta\tau$  можна подати у вигляді рівняння, де обчислені основні теплові потоки, які вбираються водоймами або витрачаються ними крізь площини поділу, що обмежують їх від навколишнього простору:

$$S_{\text{ПР}} + S_{\text{БА}} - S_{\text{ВВ}} \pm S_{\text{ТА}} \pm S_{\text{ВК}} \pm S_{\text{ТД}} + \\ + S_{\text{ПП}} - S_{\text{СТ}} \pm S_{\text{ОП}} \pm S_{\text{Л}} + S_{\text{КЕ}} = \Delta S, \quad (3.6)$$

де  $S_{\text{ПР}}$  – поглинута водою (сніговим, льодяним покривом) сумарна (пряма та розсіяна) короткохвильова сонячна радіація;  $S_{\text{БА}}$  – поглинуте водою (сніговим, льодовим покривом) зустрічне довгохвильове випромінювання атмосфери;  $S_{\text{ВВ}}$  – витрати тепла водою (сніговим, льодяним покривом) шляхом довгохвильового випромінювання;  $S_{\text{ТА}}$  – турбулентний обмін теплоти з атмосферою шляхом конвекції, молекулярної та турбулентної теплопровідності (за рахунок різниці температури води та повітря);  $S_{\text{ВК}}$  – втрати теплоти на випаровування або приплив її при конденсації водяної пари на поверхню водойми;  $S_{\text{ТД}}$  – теплообмін з дном;  $S_{\text{ПП}}$ ,  $S_{\text{СТ}}$  – теплота, перенесена припливом вод у водойму та втрати зі стоком;  $S_{\text{ОП}}$  – теплота, що надходить у водойму з опадами, або теплота, використана на танення твердих опадів;  $S_{\text{Л}}$  – теплота, що виділяється при льодоутворенні або втрати її на танення льоду;  $S_{\text{КЕ}}$  – теплота, що виділяється під час розсіювання кінетичної енергії потоку.

У правій частині рівняння (3.6)

$$\Delta S = \frac{t_{\text{сер.к}} H_{\text{к}} C \rho \frac{F_{\text{к}}}{F_{\text{сер}}} - t_{\text{сер.н}} H_{\text{н}} C \rho \frac{F_{\text{н}}}{F_{\text{сер}}}}{\Delta\tau} \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) являє собою змінювання теплоутворення водного об'єкта за час  $\Delta\tau$ ,  $H_{\text{к}}$  та  $H_{\text{н}}$  – глибина водойми наприкінці та на початку розрахункового інтервалу часу  $\Delta\tau$ ,  $F_{\text{к}}$  та  $F_{\text{сер}}$  – площа дзеркала водойми;  $t_{\text{сер.к}}$  та  $t_{\text{сер.н}}$  – середня по вертикалі температура води наприкінці та на початку розрахункового інтервалу часу;  $C$  та  $\rho$  – теплоємність та густина води;  $F_{\text{сер}}$  – середня площа дзеркала водойми.



Якщо за розрахунковий інтервал часу об'єм води у водоймі не змінюється та відповідно не змінюється його глибина та площа дзеркала, то рівняння (3.7), що характеризує зміну тепловмісту, буде мати вигляд:

$$\Delta S = \frac{C\rho H_{сер}(t_k - t_n)}{\Delta \tau}, \quad (3.8)$$

де  $H_{сер}$  – середня глибина.

Сума перших трьох складників  $S_{ПР}$ ,  $S_{ВА}$ ,  $S_{ВВ}$  рівняння (3.6) – являє собою радіаційний баланс поверхні води і визначається  $R(S_R)$ . Ефективне випромінювання – це різниця між випромінюванням води  $S_{ВВ}$  та поглинутим водою  $S_{ВА}$ . Складники теплового балансу  $S_{ПР}$ ,  $S_{ВА}$ ,  $S_{ПП}$ ,  $S_{КЕ}$  – завжди додатні,  $S_{ВВ}$ ,  $S_{СТ}$  – завжди від'ємні. Останні складові можуть бути як додатні, так і від'ємні. Тепловий потік  $S_{БК}$  – додатний при конденсації і від'ємний при випаровуванні. Якщо теплові потоки  $S_{ТА}$  та  $S_{ТД}$  спрямовані від водної маси до атмосфери або дна, вони будуть мати від'ємний знак, при протилежному потоці ці складники увійдуть до рівняння теплового балансу зі знаком плюс. Тепловий потік  $S_{Л}$  є додатним при кристалізації і від'ємним при таненні льоду. Різниця додатних і від'ємних потоків тепла характеризує зміну тепловмісту об'єму води за інтервал часу  $\Delta \tau$ . При збільшенні затримання теплоти у водному об'єкті права частина рівняння (3.6) – додатна, при зменшенні – від'ємна.

У залежності від гідрометеорологічних умов роль складників рівняння теплового балансу може бути різною. Так, для літнього періоду не має необхідності вживати теплоту  $S_{Л}$ . Для безстічних водойм не буде теплового потоку  $S_{СТ}$ . На глибоких водоймах (>20 м) не треба розраховувати  $S_{ТД}$ . Також можна знехтувати такими складниками як  $S_{ПП}$ ,  $S_{СТ}$ ,  $S_{ОП}$ . Тепло  $S_{КЕ}$ , що виділяється при русі рідини за рахунок сил тертя, має велике значення при швидкості течії більше за 0.5 м/с.

Для літнього періоду тепловий стан водойм (при відсутності сталих течій) визначається взаємодією з атмосферою, що характеризується такими складниками у лівій частині рівняння (3.6) –  $S_{ПР}$ ,  $S_{ВА}$ ,  $S_{ВВ}$ ,  $S_{ТА}$  і  $S_{БК}$ .

Загально прийнятим є рівняння теплового балансу у вигляді:

$$R = LE + B + P, \quad (3.9)$$

де  $R$  – радіаційний баланс водойми;  $LE$  – втрата теплоти на випаровування або виділення її під час конденсації;  $P$  – турбулентний теплообмін між водною поверхнею та атмосферою ( $S_{ТА}$ );  $B$  – теплоаккумуляція водойми:

$$B = S_{ПП} + S_{КЕ} \pm S_{ТД} \quad (3.10)$$

Теплоаккумуляція водойми вміщує теплообмін з дном ( $S_{TD}$ ), теплоту, принесену притоками  $S_{PI}$  та теплоту, виділену при розсіюванні кінетичної енергії –  $S_{KE}$ .

### 3.5 Визначення складників рівняння теплового балансу

Значення *радіаційного балансу* обчислюється за формулою:

$$R = (S_{PP} + S_{RP})_0(1 - A)C' - S_{EB}, \quad (3.11)$$

де  $(S_{PP} + S_{RP})_0$  – пряма та розсіяна сонячна радіація при безхмарному небі;  $A$  – коефіцієнт відбиття або альbedo підстильної поверхні (вода, сніг, лід);  $C'$  – поправка на хмарність;  $S_{EB}$  – ефективне випромінювання ( $S_{BV} - S_{BA}$ ).

Величини  $S_{PP}$ ,  $S_{RP}$  і  $A$  вимірюються піранометрами, альбедометрами та електричними балансомірами, а за їх відсутності використовуються спеціальні таблиці.

Поправка на хмарність  $C'$  визначається за формулою:

$$C' = (1 - 0,14N_3 - 0,53N_H), \quad (3.12)$$

де  $N_3$ ,  $N_H$  – відповідно загальна та нижня хмарність в долях від одиниці.

**Ефективне випромінювання** визначається за формулою:

$$S_{EB} = \varepsilon \sigma T_H^4 - (0,62 + 0,05\sqrt{e_2})(1 + 0,12N_0 + 0,12N_H)\varepsilon \sigma T_2^4, \quad (3.13)$$

де  $\varepsilon$  – відносна випромінювальна здатність довгохвильової радіації (для води  $\varepsilon = 1,0$ , для снігу  $\varepsilon = 0,99$ , для льоду  $\varepsilon = 0,95$ );  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана;  $T_H$  та  $T_2$  – абсолютна температура підстильної поверхні та температура на висоті 2 м;  $e_2$  – абсолютна вологість повітря на висоті 2 м;  $N_3$  та  $N_H$  – загальна та нижня хмарність в долях від одиниці.

**Втрати теплоти на випаровування** або приплив її при конденсації водяної пари обчислюється за формулою:

$$S_{BK} = \rho L_B E, \quad (3.14)$$

де  $L_B$  – питома теплота випаровування води;  $\rho$  – густина води;  $E$  – шар випаровування в одиницю часу.

Питома теплота випаровування води – це кількість теплоти, яка необхідна для перевodu 1 кг води у пару при сталій температурі. Питома теплота випаровування залежить від температури:

$$L_B = (25 - 0.024t_n)10^5, \quad (3.15)$$

де  $25 \cdot 10^5$  Дж/кг – питома теплота випаровування при температурі поверхні води  $0^\circ\text{C}$ ;  $t_n$  – температура поверхні води.

Значення  $E$  обчислюється за формулою Б.Д.Зайкова:

$$E = 0.14n(e_0 - e_2)(1 + 0.72\omega_2), \quad (3.16)$$

де  $n$  – кількість днів у місяці;  $e_0$  – насичувальна пружність водяної пари, визначена при температурі поверхні;  $e_2$  – пружність водяної пари на висоті 2 м над водною поверхнею;  $\omega$  – швидкість вітру на висоті 2 м над водною поверхнею.

Втрати теплоти на випаровування також обчислюються за формулою О.П.Браславського та С.Н.Нуралгієва:

$$S_B = 4.1[1 + 0.8\omega_2 + f(\Delta\theta)](e_0 - e_2), \quad (3.17)$$

де  $f(\Delta\theta)$  – функція, що залежність від різниці температури повітря і поверхні води, визначається за спеціальною таблицею.

**Турбулентний теплообмін з атмосферою** – обчислюється за формулою:

$$S_{TA} = \alpha(t_n - \theta_2), \quad (3.18)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі від поверхні води з температурою  $t_n$  – до повітря з температурою на висоті 2 м –  $\theta_2$ .

Значення турбулентного теплообміну може бути також обчислено за формулою О.П.Браславського:

$$S_{TA} = 2.65(\theta_2 - t_n)[1 + 0.8\omega_2 + f(\Delta\theta)] \quad (3.19)$$

**Теплообмін водної маси з дном** у водоймі оцінюється у залежності від глибини водойми. У неглибокій водоймі оцінка кількості теплоти відбувається за законом Фур'є:

$$S_{TD} = -\lambda_{ГР} \frac{dt}{dz}. \quad (3.20)$$

У глибокій водойми градієнт температури береться рівним нулю, а у дуже глибокій – температура біля дна вважається сталою. Тому у таких водоймах теплообмін з дном дорівнює нулю. Теплообмін між дном і водою носить сезонний характер. У весняно-літній період, коли спостерігається прогрів водної товщі, йде передача теплоти до дна та його нагрівання. Осінь та зима сприяють віддачі акумульованої за літо теплоти.

Для розв’язання рівняння (3.20) треба знати розподіл температури у товщі ґрунту і коефіцієнт теплопровідності ґрунту, насиченого водою. Вимірювання градієнта температури і термічних характеристик ґрунтів дна вимагають трудомістких спостережень. Тому рекомендується користуватись спеціальною таблицею для визначення середніх значень теплообміну водної маси з дном водойми у залежності від широти місцевості, пори року та глибини водойми.

**Теплота, принесена водою приток,** та її втрати зі стоком обчислюються за формулою:

$$S_{ПП,СТ} = 86.4C\rho Qt_{сеп} / F_0, \quad (3.21)$$

де  $C$  та  $\rho$  – теплоємність та густина води;  $Q$  – витрата води;  $t_{сеп}$  – середня температура води;  $F_0$  – площа дзеркала водойми, км<sup>2</sup>.

Зміна кількості теплоти, пов’язана з припливом у водойму або стоком з неї:

$$S_{ПП,СТ} = 100WC\rho t_{сеп} / F_0, \quad (3.22)$$

де  $W$  – об’єм припливу (стоку) води, км<sup>3</sup>.

**Теплота, що надходить у водойму з рідкими опадами,** обчислюється за формулою:

$$S_{ОП,Р} = C\rho h_P t_P, \quad (3.23)$$

а теплота, використана на танення твердих опадів:

$$S_{ОП,Т} = -(C_T\rho_T h_T t_T + L_L\rho_T h_T + C\rho h_{Т.Р} t) \quad (3.24)$$

де  $C_T$  та  $\rho_T$  – теплоємність та щільність твердих опадів;  $h_P$  та  $h_T$  – шар рідких та твердих опадів;  $t_P$  та  $t_T$  – температура рідких та твердих опадів, що дорівнює температурі повітря ( $\theta_2$ ) на висоті 2 м;  $h_{Т.Р}$  – шар рідких опадів, утворених з твердих;  $t$  – температура води водойми;  $L_L$  – питома теплота танення льоду.

**Теплота, що виділяється при льодоутворенні**, або втрати теплоти на танення льоду обчислюються за формулою:

$$S_L = \rho_L L_L h_L, \quad (3.25)$$

де  $\rho_L$  – щільність льоду;  $h_L$  – товщина льоду;  $L_L$  – питома теплота кристалізації.

Питома теплота кристалізації – це кількість теплоти, яка виділяється при утворенні льоду з 1 кг води при сталій температурі:  $L_L = 33.3 \cdot 10^4$  Дж/кг.

**Теплота, що виділяється при розсіюванні кінетичної енергії турбулентного потоку:**

$$S_{KE} = 9.8 \rho I V H_{сер}, \quad (3.26)$$

де  $I$  – уклон водної поверхні;  $V$  – середня швидкість течії;  $H_{сер}$  – середня глибина потоку.

Запас теплоти водної маси:

$$S_{BM} = C \rho V_0 t_{сер} \quad (3.27)$$

де  $V_0$  – об'єм водойми;  $t_{сер}$  – середня температура водойми.

### 3.6 Рівняння теплового балансу непроточної водойми

Для непроточної водойми ( $V_x = V_y = V_z = 0$ ) рівняння (3.3) набуває вигляду:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{C \rho} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (3.28)$$

Задається, що температурний режим водойми в координатах  $x$  і  $y$  не змінюється  $\left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \right)$ .

Після інтегрування рівняння (3.28) за глибиною водойми одержуємо:

$$H \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{C \rho} \lambda \frac{\partial t}{\partial z}, \quad (3.29)$$

або

$$C\rho H \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial t}{\partial z}, \quad (3.30)$$

Ліва частина рівняння (3.30) являє собою зміну ентальпії відсіку водойми площиною  $1 \text{ м}^2$  і глибиною  $H$ . Вона обумовлена тепловими потоками, що надходять у цей відсік крізь поверхню і дно. Отже, праву частину рівняння (3.30) можна замінити сумою теплових потоків крізь ці поверхні –  $\sum_1^n S$ :

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \bigg|_{z=0}^{z=H} = \sum_1^n S, \quad (3.31)$$

де  $\frac{\partial t}{\partial z} \bigg|_{z=0}$  і  $\frac{\partial t}{\partial z} \bigg|_{z=H}$  – температурний градієнт біля поверхні води і біля дна,  $n$  – кількість складників потоків.

Розв'язуючи рівняння (3.30) та (3.31), одержуємо:

$$C\rho H \frac{\partial t}{\partial \tau} = \sum_1^n S \quad (3.32)$$

Зміна середньої температури води непроточної водойми у часі  $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)$  визначається сумою теплових потоків крізь його поверхню.

### ***Питання для самоконтролю***

1. В чому полягає фізична основа теплового балансу?
2. Дайте визначення рівняння теплового балансу.
3. Напишіть рівняння теплового балансу для об'єму води.
4. Що таке внутрішні джерела теплоти?
5. Назвіть основні складники рівняння теплового балансу.
6. Що таке “радіаційний баланс”?
7. Що таке “ефективне випромінювання”?
8. Як визначаються складники рівняння теплового балансу?
9. Напишіть рівняння теплового балансу непроточної водойми.

## РОЗДІЛ 4

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

#### 4.1 Виведення диференціального рівняння теплопровідності твердого тіла

Тепловий процес можна описати диференціальним рівнянням Фур'є. В основі цього рівняння лежить закон збереження енергії, який може бути сформульований так: кількість теплоти, уведена в елементарний об'єм іззовні за час  $dt$  внаслідок теплопровідності дорівнює зміні внутрішньої енергії речовини, що утримується у цьому об'ємі.

Візьмемо в однорідному та ізотропному твердому тілі (у системі декартових координат  $x, y, z$ ) елементарний паралелепіпед з гранями  $dx, dy, dz$  (рис.4.1) та розглянемо баланс теплоти для цього об'єму. В межах об'єму температура змінюється у трьох напрямках відповідно по осях  $x, y, z$ . Отже, крізь три грані паралелепіпеда у напрямку трьох осей буде входити кількість теплоти, що дорівнює  $S_1, S_3, S_5$  і відповідно, крізь три протилежні грані буде виходити кількість теплоти  $-S_2, -S_4, -S_6$ . Якщо кількість теплоти, що входить у елементарний об'єм, не дорівнює кількості теплоти, що виходить із нього, то буде зміна ентальпії цього об'єму, яку позначимо  $S_7$ .

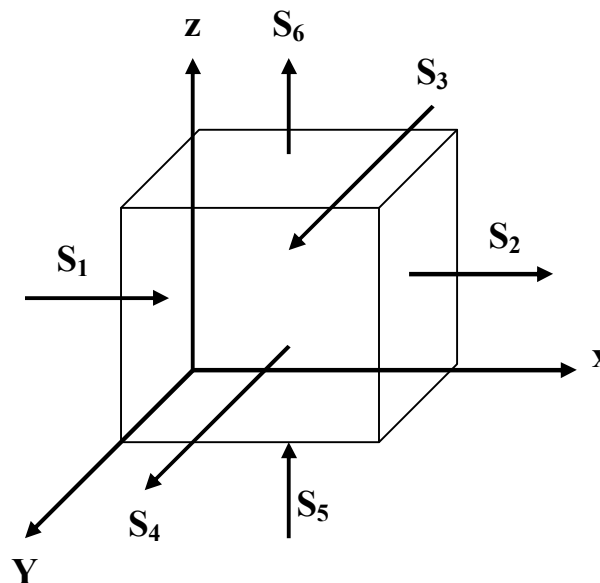


Рисунок 4.1 – Схема до виведення диференціального рівняння теплопровідності твердого тіла

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму речовини можна записати як:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = S_7 \quad (4.1)$$

Визначимо складові цього рівняння за формулою (2.7)

$$\begin{aligned}
 S_1 &= q_x dy dz d\tau \\
 S_2 &= -\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy dz d\tau \\
 S_3 &= q_y dx dz d\tau \\
 S_4 &= -\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy\right) dx dz d\tau, \\
 S_5 &= q_z dx dy d\tau \\
 S_6 &= -\left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz\right) dx dy d\tau
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

а також

$$S_7 = C \rho dx dy dz \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau, \tag{4.3}$$

де  $q_x, q_y, q_z$  – питомі теплові потоки крізь грані, відповідно, у напрямках осей  $x, y, z$ ;  $\frac{\partial q_x}{\partial x}, \frac{\partial q_y}{\partial y}, \frac{\partial q_z}{\partial z}$  – зміна питомих теплових потоків всередині об'єму на осях  $x, y, z$ ;  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  – зміна температури цього об'єму за час  $d\tau$ .

Вирішуючи спільно рівняння (4.2) та (4.3), одночасно поділивши кожен доданок на  $dx, dy, dz$  та на  $C\rho$ , маємо:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{C\rho} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right). \tag{4.4}$$

Визначимо питомі теплові потоки у рівнянні (4.4) за законом Фур'є, тоді:



$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{C\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right], \quad (4.5)$$

або

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (4.6)$$

де  $a = \frac{\lambda}{C\rho}$  – коефіцієнт теплопровідності. Рівняння (4.6) має назву диференціального рівняння теплопровідності твердого тіла у декартових координатах.

Визначимо

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t, \quad (4.7)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Тоді рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (4.8)$$

Рівняння (4.6) описує нестационарне просторове температурне поле. Для двовимірного нестационарного температурного поля воно має вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (4.9)$$

а для нестационарного одновимірного температурного поля:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (4.10)$$

Якщо температурне поле стаціонарне  $\left(\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0\right)$ , то диференціальне рівняння теплопровідності має вигляд рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (4.11)$$

Відповідно до двовимірного температурного поля:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (4.12)$$

а для одновимірного:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (4.13)$$

З рівнянь (4.11) – (4.13) випливає, що температурні поля тіл при стаціонарному режимі не залежать від коефіцієнта теплопровідності  $\lambda$ , отже, від коефіцієнта теплопровідності  $\lambda$ .

## 4.2 Диференціальне рівняння з джерелом теплоти

Рівняння теплопровідності (4.6) одержано при відсутності внутрішніх джерел або стоків теплоти. Проте, є середовище, де можуть бути процеси з виділенням (джерело) або поглинанням (стік) теплоти. До таких середовищ відносяться вода, лід, сніг. Процеси випаровування води, танення льоду і снігу супроводжуються поглинанням теплоти, а кристалізація води, конденсація – виділенням теплоти.

Теплота джерела або стоку залежить не тільки від координат тіла, а й від його температури та її розподілу у тілі.

При наявності джерела або стоку рівняння теплового балансу (4.1) поповнюється ще одним членом, який ураховує теплоту:

$$S_8 = W \, dx \, dy \, dz \, d\tau, \quad (4.14)$$

де  $S_8$  – кількість теплоти, виділена або поглинута середовищем у об’ємі  $dx dy dz$  за час  $d\tau$ ;  $W$  – інтенсивність джерела або стоку.

Тоді рівняння теплопровідності (4.6) запишеться у такому вигляді:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{C\rho} W, \quad (4.15)$$

або

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{1}{C\rho} W \quad (4.16)$$

В тому випадку, коли у середовищі має місце стік теплової енергії, до другого додатку правої частини рівняння додають знак “мінус”.

### 4.3 Диференціальне рівняння теплопровідності турбулентного потоку

Розглянемо тепловий баланс елементарного паралелепіпеда з гранями  $dx, dy, dz$  (рис.4.2).

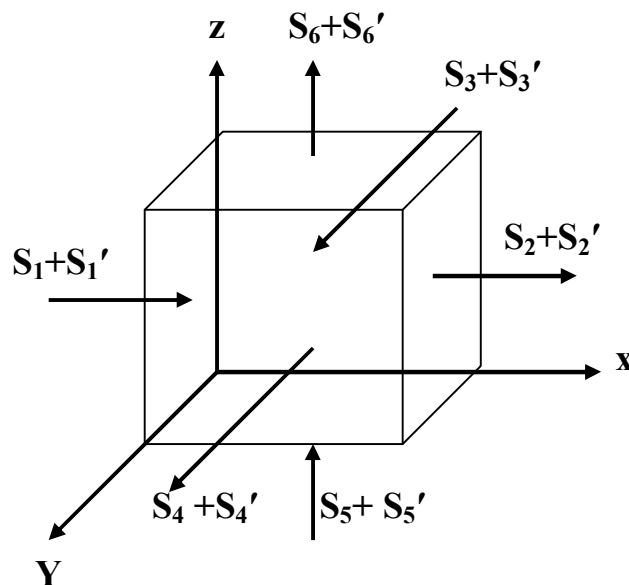


Рисунок 4.2 – Схема до виведення диференціального рівняння теплопровідності турбулентного потоку

Крізь грані паралелепіпеда теплота буде розповсюджуватись двома шляхами:

1. Молярне перенесення (конвекція) – укупі з водними масами, що входять крізь грані паралелепіпеда зі швидкістю  $V_x, V_y, V_z$ .

2. Молекулярна теплопровідність у ламінарних потоках (коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ ) і турбулентна теплопровідність у турбулентних потоках (коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_T$ , який у багато разів більше за  $\lambda$ ).

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму рідини має вигляд:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4 + S'_5 + S'_6 = S_7 \quad (4.17)$$

де  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  – кількість теплоти, що обумовлена швидкістю потоку рідини крізь грані у напрямку осей  $x, y, z$  за час  $d\tau$ , а  $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5, S'_6$  – кількість теплоти, що обумовлена теплопровідністю потоку крізь ці грані за той же час.

Коли потоки теплоти, що проходять крізь грані паралелепіпеда, взаємно не компенсуються, виникає зміна ентальпії об'єму  $dx, dy, dz$ , яку позначимо  $S_7$ .

Визначимо складники рівняння (4.17). Кількість теплоти, що надходить у паралелепіпед крізь грань  $dy, dz$  молярним шляхом за час  $d\tau$ , дорівнює:

$$S_1 = C\rho V_x t \, dy \, dz \, d\tau, \quad (4.18)$$

де  $V_x$  – проекція швидкості на вісь  $x$ ;  $V_x \, dy \, dz$  – витрата рідини крізь грань паралелепіпеда  $dy, dz$ ;  $t$  – температура рідини.

Кількість теплоти, що виходить з елементарного паралелепіпеда крізь протилежну грань, яка лежить на віддаленні  $dx$  від першої, дорівнює:

$$S_2 = -C\rho \left( V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \left( t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) dy \, dz \, d\tau, \quad (4.19)$$

де  $\frac{\partial V_x}{\partial x}$  та  $\frac{\partial t}{\partial x}$  – зміна швидкості і температури рідини всередині виділеного об'єму по осі  $x$ . Знак “мінус” у рівнянні (4.19) показує, що  $S_2$  – кількість теплоти, яка виходить з елементарного паралелепіпеда. Для інших граней паралелепіпеда:

$$\begin{aligned}
S_3 &= C\rho V_y t \, dx \, dz \, d\tau, \\
S_4 &= -C\rho \left( V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) \left( t + \frac{\partial t}{\partial y} dy \right) dx \, dz \, d\tau, \\
S_5 &= C \rho V_z t \, dx \, dy \, d\tau, \\
S_6 &= -C\rho \left( V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right) \left( t + \frac{\partial t}{\partial z} dz \right) dx \, dy \, d\tau
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Інші шість складників рівняння (4.17) обумовлені турбулентною теплопровідністю і визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
S'_1 &= -\lambda_T \frac{\partial t}{\partial x} dy \, dz \, d\tau, \\
S'_2 &= \left( \lambda_T + \frac{\partial \lambda_T}{\partial x} dx \right) \frac{\partial \left( t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right)}{\partial x} dy \, dz \, d\tau, \\
S'_3 &= -\lambda_T \frac{\partial t}{\partial y} dx \, dz \, d\tau, \\
S'_4 &= \left( \lambda_T + \frac{\partial \lambda_T}{\partial y} dy \right) \frac{\partial \left( t + \frac{\partial t}{\partial y} dy \right)}{\partial y} dx \, dz \, d\tau, \\
S'_5 &= -\lambda_T \frac{\partial t}{\partial z} dx \, dy \, d\tau, \\
S'_6 &= \left( \lambda_T + \frac{\partial \lambda_T}{\partial z} dz \right) \frac{\partial \left( t + \frac{\partial t}{\partial z} dz \right)}{\partial z} dx \, dy \, d\tau,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

де  $\lambda_T$  – коефіцієнт турбулентної теплопровідності:

$$\lambda_T = C \cdot A_T, \tag{4.22}$$

де  $A_T$  – коефіцієнт турбулентного обміну рідини.

Зміна ентальпії об'єму  $S_7$  визначимо за формулою:

$$S_7 = C \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz d\tau . \quad (4.23)$$

Вирішуючи спільно рівняння (4.17) – (4.23), маємо

$$\begin{aligned} C\rho \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial t}{\partial x} + V_y \frac{\partial t}{\partial y} + V_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda_T \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \\ + \left( \frac{\partial \lambda_T}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

При спільному розгляданні рівняння (4.17) – (4.23) урахована умова нерозривності нестисненої рідини

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (4.25)$$

і відкинуті складники  $\frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} dx^2 dy dz$ ,  $\frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} dx dy^2 dz$ ,  
 $\frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} dx dy dz^2$ ,  $\frac{\partial \lambda_T}{\partial x} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx^2 dy dz$ ,  $\frac{\partial \lambda_T}{\partial y} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx dy^2 dz$ ,  
 $\frac{\partial \lambda_T}{\partial z} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx dy dz^2$  через їх малості в порівнянні з іншими.

Рівняння (4.24) носить назву диференціального рівняння температурного поля турбулентного потоку рідини (рівняння енергії).

Якщо коефіцієнт турбулентної теплопровідності  $\lambda_T$  – стала величина, рівняння (4.24) має вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\lambda_T}{C\rho} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) . \quad (4.26)$$

Ураховуючи, що ліва частина рівняння (4.26) – повна похідна температури в часі, його можна записати у такому вигляді:

$$\frac{dt}{d\tau} = a_T \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (4.27)$$

або

$$\frac{dt}{d\tau} = a_T \nabla^2 t, \quad (4.28)$$

де  $a_T = \frac{\lambda_T}{C\rho}$  – коефіцієнт турбулентної теплопровідності.

При наявності у потоці внутрішніх джерел теплоти рівняння (4.27) треба доповнити ще одним складником, пов'язаним з джерелом:

$$\frac{dt}{d\tau} = a_T \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{W}{C\rho}, \quad (4.29)$$

де  $W$  – інтенсивність внутрішнього джерела.

#### 4.4 Умови однозначності

Диференціальне рівняння теплопровідності описує передачу теплоти в загальному вигляді. Для того, щоб з його допомогою вирішити конкретну задачу, необхідно сформулювати так звані умови однозначності.

Умови однозначності складаються:

1. Із часових, що характеризують розподіл температури у середовищі або тілі у початковий момент часу (початкові умови).

2. Із межових, що характеризують взаємодію тіла з навколишнім середовищем.

3. Із фізичних, що характеризують фізичні властивості середовища.

4. Із геометричних, що характеризують форму і розміри тіл, у яких протікає тепловий процес.

**Початкові умови** полягають у тому, що повинен бути заданий розподіл поля значень температури у початковий момент часу ( $\tau=0$ ). Початкові умови повинні бути задані у вигляді функцій:

1.  $t_{\tau=0} = f_1(x, y, z)$  – для просторової задачі;
2.  $t_{\tau=0} = f_2(x, y)$  – для плоскої задачі;
3.  $t_{\tau=0} = f_3(x)$  – для лінійної задачі.

У більшості випадків ці умови можуть бути задані з достатнім визначенням у вигляді конкретної функції, таблиці або у формі графіка.

Розподіл температури за глибиною (початкова умова) береться на основі натурних спостережень на водоймі або шляхом розрахунку за попередній період.

**Межові умови** задаються у складному вигляді. При вирішенні задач відрізняють чотири способи задання межових умов, які дуже часто зустрічаються, це так звані межові умови першого, другого, третього та четвертого роду.

1. Межові умови першого роду полягають у тому, що задається температура у всіх точках поверхні тіла протягом часу  $\tau$ :

$$t_n = f(x, y, z, \tau). \quad (4.30)$$

2. Межові умови другого роду полягають у тому, що задається питомий тепловий потік за законом Фур'є крізь поверхню тіла протягом часу  $\tau$ :

$$q_n = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (4.31)$$

3. Межові умови третього роду передбачають задання температури поверхні тіла та навколишнього середовища і задання теплообміну (коефіцієнта тепловіддачі) між поверхнею цього тіла і навколишнім середовищем за законом Ньютона:

$$q_n = \alpha(t_n - t_{\text{сеп}}). \quad (4.32)$$

Кількість теплоти, що віддає (або отримує) поверхня у навколишнє середовище (4.32), повинна дорівнювати кількості теплоти, що надходить до цієї поверхні за рахунок теплопровідності, яка визначається законом Фур'є (4.31). Прирівнюючи один потік до другого, маємо вираз для межових умов третього роду:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_n = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_n - t_{\text{сеп}}), \quad (4.33)$$

де  $\left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_n$  – градієнт температури біля поверхні і по нормалі до неї.

За умовами (4.33) повинні бути задані коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha$  і температура тіла  $t_{\text{сеп}}$ .

4. Межові умови четвертого роду полягають в тому, що задається рівність температури на поверхні поділу двох тіл з навколишнім



середовищем при підході до нього з двох боків, а також рівність питомих теплових потоків за законом Фур'є при припущенні, що між цими тілами існує ідеальний контакт:

$$t_1|_n = t_2|_n, \quad (4.34)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial n} \Big|_n = -\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial n} \Big|_n, \quad (4.35)$$

де  $\frac{\partial t_1}{\partial n} \Big|_n$  та  $\frac{\partial t_2}{\partial n} \Big|_n$  – градієнти температури біля поверхні (по обидва боки від неї).

Вигляд межевої умови на поверхні води залежить від наявності чи відсутності льодяного покриву. Якщо на поверхні води є льодяний покрив, то задана стала температура  $0^0\text{C}$  (межова умова першого роду):

$$t|_{z=0} = 0 \quad (4.36)$$

Якщо немає льодяного покриву, межова умова визначається рівнянням теплового балансу для поверхні води (межова умова другого роду):

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = S_R + S_{TA} + S_{BK}. \quad (4.37)$$

Межова умова біля дна залежить від сезону року та від глибини водойми.

У безльодоставний період на мілких та глибоких водоймах на дні треба брати адіабатичну умову:

$$\frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (4.38)$$

в зв'язку з тим, що теплообмін з ґрунтом дна дуже малий у порівнянні з теплообміном крізь відкриту водну поверхню. Тут і далі  $H$  – глибина водойми.

При наявності льодяного покриву тепловіддача дна значно впливає на формування термічного режиму мілких водойм, тому межова умова на дні має вигляд:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=H} = S_{TD} \quad (4.39)$$

У глибоких і дуже глибоких водоймах адіабатична умова (4.38) на дні береться протягом року. Крім того, у дуже глибоких водоймах повинна бути умова постійності придонної температури протягом розрахункового інтервалу часу. Дно водойми у цьому випадку відіграє роль пасивної грані, положення якої можна зсунути у нескінченність. Тоді:

$$\frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0 \quad t \Big|_{z=\infty} = t_0, \quad (4.40)$$

де  $t_0$  – початкова температура води на дні.

У практичних розрахунках межові умови полягають у визначенні складників теплообміну з атмосферою та ґрунтом дна.

**Фізичні умови** – це теплофізичні характеристики води – коефіцієнти тепло - та температуропровідності, теплоємність та густина води знаходяться з таблиць.

Визначення температуропровідності пов'язано з великими труднощами, тому що перенесення тепла всередину водної товщі обумовлено перемішуванням води, а не фізичною теплопровідністю. У загальному випадку коефіцієнт теплопровідності води можна подати у вигляді сум п'яти величин:

$$\lambda = \lambda_\phi + \lambda_{W_1} + \lambda_{W_2} + \lambda_V + \lambda_k, \quad (4.41)$$

де  $\lambda_\phi$  – коефіцієнт фізичної теплопровідності;  $\lambda_{W_1}$  та  $\lambda_{W_2}$  – коефіцієнти теплопровідності, пов'язаної відповідно з турбулентним впливом вітрового хвилювання і вітрових течій;  $\lambda_V$  та  $\lambda_k$  – коефіцієнти динамічної та вільноконвективної теплопровідності.

Сумарне значення  $\lambda$  в багато разів більше від коефіцієнта фізичної теплопровідності  $\lambda_\phi$ . Відносне значення інших складників рівняння (4.41) залежить від швидкості течії та вітру, глибини водойми, характеру температурної стратифікації тощо.

При наявності термічних спостережень коефіцієнт теплопровідності води можна розрахувати за формулою:

$$\lambda = \frac{S H}{2 \Delta t}, \quad (4.42)$$

де  $S$  – тепловий потік на поверхні води, Вт/м<sup>2</sup>;  $\Delta t$  – різниця між температурою на поверхні і коло дна, °С;  $H$  – глибина водойми, м.

#### 4.5 Методи розв’язання теплових задач

Основні методи розв’язання теплових задач такі:

1. Аналітичні;
2. Кінцевих різниць (графічні, чисельні);
3. Моделювання (фізичного та математичного);
4. Аналогії (електричної, гідравлічної);

Кожна задача має тільки один розв’язок, проте форма його може бути різною. У всіх випадках розв’язок повинен задовольняти рівнянню теплового балансу і межовим умовам.

**Аналітичні методи** – полягають в тому, що використовуючи повне математичне формулювання задачі, знаходять аналітичний розв’язок. Звичайно краще використовувати готові вирішення. При відсутності готових розв’язань доцільно знати аналітичне розв’язання у вигляді суми вирішень, використовуючи принцип суперпозиції.

**Переваги** цього методу. Точність розрахунків залежить від надійності вихідних даних і точності обчислювань. Перевага аналітичних методів полягає у можливості подання розв’язку у безрозмірній формі і у вигляді розрахункових графіків, а також у використанні ПК.

**Недоліки.** Обмеженість кола задач, для яких треба отримати розв’язок.

**Метод кінцевих різниць** – полягає в тому, що у рівнянні теплопровідності усі нескінченно малі різниці (диференціали) замінюються кінцевими, але малими відмінними величинами. Істинне безперервне розподілення температури та безперервний у часі хід температури замінюються приблизними перервними значеннями, шляхом осереднення температури кінцевих малих відрізків тіла  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  і малих проміжків часу  $\Delta \tau$ .

**Переваги.** Можливість розв’язувати складні задачі з тілами складної форми зі змінними межовими умовами і теплофізичними характеристиками, зі зміною агрегатного стану тощо.

**Недоліки.** Відсутність загального розв’язання задач; необхідність обчислювань для всього тіла і для всього періоду попереднього моменту часу, для якого проводяться розрахунки. Трудомісткість методу.

**Моделювання.** Фізичне моделювання є експериментальним методом розв’язання складних задач. Воно спирається на теорію подібності і застосовується при неможливості використання аналітичних методів. Суть методу полягає в тому, що дослідження об’єкта замінюється дослідженням

його моделі тієї ж фізичної природи; дані, одержані на моделі, дозволяють робити висновок щодо процесів і явищ на об'єкті.

Математичний опис досліджуваного процесу складається з одного чи декількох диференціальних рівнянь, межових і початкових умов, даних щодо геометрії тіла і його фізичних властивостей.

Правилами моделювання є вимога подібності умов однозначності і чисельної рівності кожного критерію моделі і натури.

Недоліки моделювання. Виконувати умови моделювання у повному обсязі часто складно, а інколи неможливо через суперечності, які виникають через вимогу рівності критеріїв. Особливо значні труднощі виникають при моделюванні явища, що супроводиться зміною агрегатного стану. Це значно обмежує можливість застосування моделювання.

**Метод аналогії** полягає в тому, що вирішення теплової задачі замінюються розв'язанням задачі іншої фізичної суті, у якій рівняння балансу і усі умови однозначності збігаються, хоча розмірності різні. Метод аналогії – метод експериментальний, наприклад, метод ЕТА – метод електротеплової аналогії.

### ***Питання для самоконтролю***

1. Назвіть основні складники рівняння теплового балансу для елементарного об'єму речовини.
2. Запишіть диференціальне рівняння теплопровідності твердого тіла.
3. Запишіть диференціальне рівняння теплопровідності твердого тіла з джерелом теплоти.
4. Якими шляхами розповсюджується теплота у турбулентному потоці?
5. Запишіть диференціальне рівняння теплопровідності турбулентного потоку.
6. Назвіть основні умови однозначності при розв'язанні диференціального рівняння теплопровідності.
7. В чому полягають часові умови?
8. Що таке межові умови і яких типів вони бувають?
9. Назвіть фізичні та геометричні умови.
10. Назвіть основні методи вирішення теплових задач.

## РОЗДІЛ 5

### МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯНЬ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ОДНОВИМІРНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ

#### 5.1 Одновимірне температурне поле

**Одношарове плоске тіло.** Під одношаровим плоским тілом слід розуміти тіло, обмежене у розмірах по висоті (тіло, що має товщину) і необмежене у розмірах по двох інших напрямках (у плані). Таке тіло зветься пластиною. За одношарове плоске тіло можна взяти льодяний або сніговий покрив, шар ґрунту, води тощо.

Розглянемо плоске тіло товщиною  $\delta$ , напрямком якої збігається з висотою  $z$  декартової системи координат, та необмеженого протягу по напрямках двох інших осей  $x$  та  $y$  (рис. 5.1).

На поверхнях тіла підтримується стала температура  $t_1$  та  $t_2$  (стаціонарна задача).

При стаціонарному тепловому режимі температура тіла у часі не змінюється. Тому у диференціальному рівнянні теплопровідності, яке дозволяє визначити температуру в залежності від часу та координат в певній точці поля, похідна  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ . Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (5.1)$$

для одновимірного стаціонарного поля має вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dz^2} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = 0; \quad a \neq 0. \quad (5.2)$$

Інтегрування цього рівняння передбачає такі розв'язки:

$$\frac{dt}{dz} = C_1 \quad dt = C_1 dz, \quad (5.3)$$

$$t = C_1 z + C_2, \quad (5.4)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування, які можна визначити при межових умовах першого роду:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{при } z = 0 \quad t = t_1 \\ 2. \text{при } z = \delta \quad t = t_2 \end{array} \right\}. \quad (5.5)$$

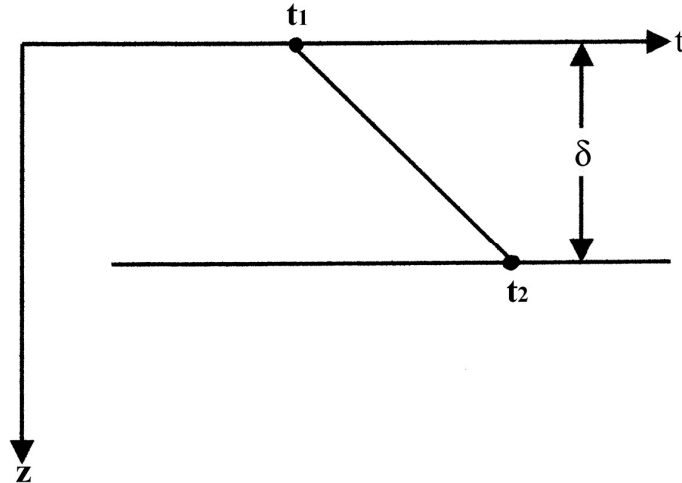


Рисунок 5.1 – Теплопровідність одношарового плоского тіла

З рівняння (5.4) виходить, що розподіл температури по координаті  $z$  підпорядковується закону прямої лінії. Якщо цей розподіл температури у льодяному покриві, то  $t_1 < t_2$ , тепловий потік спрямований знизу вверх.

Після підстановки першої межової умови з системи (5.5) у рівняння (5.4), маємо:

$$C_2 = t_1, \quad (5.6)$$

після підстановки другої межової умови, з урахуванням рівності (5.6)

$$t_2 = C_1 \delta + t_1. \quad (5.7)$$

Звідки

$$C_1 = (t_2 - t_1) / \delta, \quad (5.8)$$

З урахуванням сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  рівняння (5.4) набирає вигляду:

$$t = t_1 + z \frac{t_2 - t_1}{\delta}. \quad (5.9)$$

Рівняння (5.9) визначає розподіл температури за товщиною одношарового плоского тіла.

За другої межевої умови (5.5) рівняння (5.9) можна одержати у вигляді рівності:

$$\frac{t_2 - t_1}{\delta} = \frac{t_2 - t_1}{\delta}. \quad (5.10)$$

Якщо ліву частину (5.10) замінити за законом Фур'є отримаємо:

$$\frac{q}{\lambda} = - \frac{t_2 - t_1}{\delta} = \frac{t_2 - t_1}{\delta}. \quad (5.11)$$

Звідки питома теплова витрата  $q$  крізь одношарове плоске тіло:

$$q = \lambda \frac{(t_1 - t_2)}{\delta}. \quad (5.12)$$

**Багатошарове плоске тіло.** Розглянемо плоске тіло, що має  $n$  шарів товщиною  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  з коефіцієнтами теплопровідності  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Шари тіла щільно притиснуті один до одного. Прикладом такого багатошарового тіла є сніго-льодяний покрив (рис.5.2).

За межевих умов першого роду повинна бути задана температура на поверхнях багатошарового тіла: на поверхні снігу –  $t_1$  і на нижній поверхні льоду –  $t_{n+1}$ .

Треба визначити температуру у межах кожного шару та втрати теплоти крізь багатошарове тіло.

Якщо у шарах тіла немає джерел та стоків теплоти, за законом зберігання енергії, теплота, що надходить у перший шар, повинна пройти усі шари товщі без її зміни.

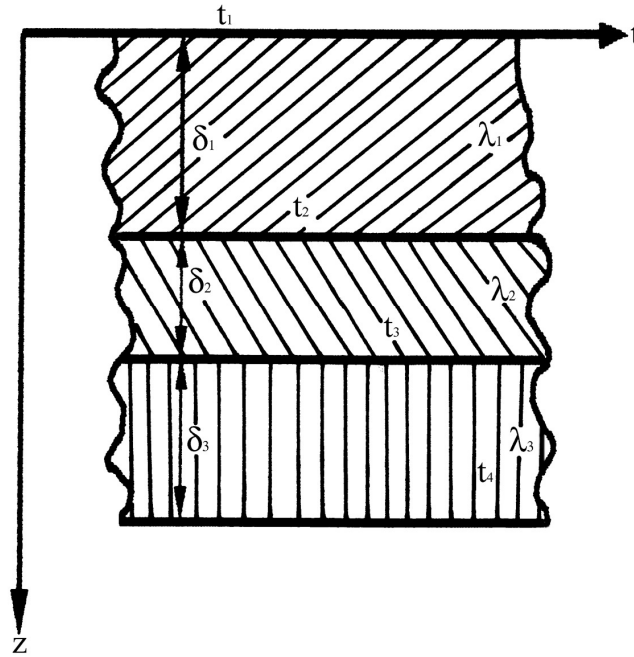


Рисунок 5.2 – Теплопровідність багат шарового плоского тіла

Відповідно до рівняння (5.12) для кожного шару товщі можна записати:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_1 - t_2), \\
 q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3), \\
 &\dots\dots\dots \\
 q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n} (t_n - t_{n+1})
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Відносно різниці температур ця система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}
 t_1 - t_2 &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \\
 t_2 - t_3 &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 t_n - t_{n+1} &= q \frac{\delta_n}{\lambda_n}
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$



Складаючи ліві і праві частини рівнянь системи (5.14), маємо:

$$t_1 - t_{n+1} = q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right) \quad (5.15)$$

З цієї формули визначаємо питомий тепловий потік багат шарового плоского тіла:

$$q = (t_1 - t_{n+1}) / \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right), \quad (5.16)$$

або

$$q = (t_1 - t_{n+1}) / \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \quad (5.17)$$

Розв'язуючи рівняння (5.15) відносно  $t_{n+1}$ , маємо

$$t_{n+1} = t_1 - q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right). \quad (5.18)$$

Всередині шару температуру необхідно визначати за формулою (5.9).

Використовуючи рівняння (5.18), можна знайти температуру на межі між шарами товщі. Наприклад, температура на межі між першим і другим шарами товщі:

$$t_2 = t_1 - q \delta_1 / \lambda_1, \quad (5.19)$$

а між другим і третім:

$$t_3 = t_1 - q (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2). \quad (5.20)$$

Питомий тепловий потік  $q$  визначається за формулою (5.16) при заданих межевих умовах першого роду.

Хід температури всередині багат шарового тіла являє собою ламану лінію, всередині кожного шару температура змінюється по прямій згідно з рівнянням:

$$t_{i,z} = t_1 - q \left( \frac{z_i}{\lambda_i} \right), \quad (5.21)$$

де  $z_i$  – відстань у середині  $i$ -го шару від поверхні попереднього шару, температура на межі між котрими дорівнює  $t_i$ .

## 5.2 Одновимірне температурне поле із внутрішнім джерелом теплоти

Розглянемо задачу, пов'язану з оцінкою розподілу температури всередині необмеженого плоского тіла товщиною  $2\delta$  при наявності внутрішнього джерела, рівномірно розподіленого за об'ємом (рис.5.3). Температура тіла на поверхні  $t_n$ . Коефіцієнт теплопровідності тіла  $\lambda$ .

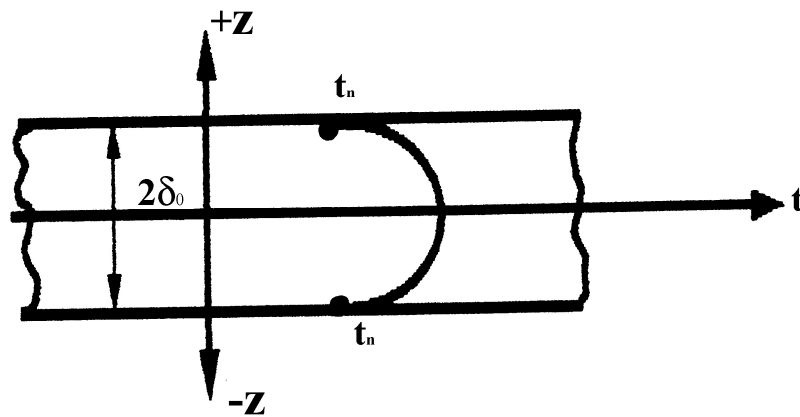


Рисунок 5.3 – Теплопровідність плоского тіла з внутрішнім джерелом теплоти

Диференціальне рівняння теплопровідності при стаціонарному режимі теплообміну для одновимірного температурного поля з внутрішнім джерелом теплоти  $W$  має вигляд:

$$\frac{d^2 t}{dz^2} + \frac{W}{\lambda} = 0 \quad (5.22)$$

Проінтегруємо це рівняння двічі:

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{W}{\lambda} Z + C_1, \quad (5.23)$$

$$t = -\frac{W}{\lambda} \frac{Z^2}{2} + C_1 Z + C_2. \quad (5.24)$$

Початок координат системи знаходиться на осі симетрії стінки. Межові умови першого роду для обох меж тіла однакові:

$$\text{при } z = \pm\delta \quad t = t_n \quad (5.25)$$

Тому температурне поле тіла повинно бути симетричним відносно осі  $z$ .

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{dt}{dz} = 0. \quad (5.26)$$

За умов (5.25) та (5.26) визначимо сталі інтегрування  $C_1$  та  $C_2$ . Із (5.23) за умови (5.26) маємо  $C_1=0$ . Із (5.24) за умови (5.25) маємо:

$$C_2 = t_n + \frac{W}{\lambda} \frac{\delta^2}{2}. \quad (5.27)$$

Враховуючи значення  $C_1$  та  $C_2$ , знайдемо рівняння розподілу температури у товщі плоского тіла:

$$t = t_n + \frac{W}{2\lambda} (\delta^2 - Z^2). \quad (5.28)$$

Температура на осі симетрії тіла при  $z=0$ :

$$t_{\max} = t_n + \frac{W}{2\lambda} \delta^2. \quad (5.29)$$

За законом Фур'є і з рівняння (5.23) при  $z=\delta$  для питомого теплового потоку крізь обидві поверхні плоского тіла з внутрішнім джерелом теплоти одержуємо формулу:

$$q = W \cdot \delta \quad (5.30)$$

### 5.3 Двовимірне температурне поле

Двовимірні стаціонарні поля зустрічаються у практиці: поле середньої за глибиною температури водойми, поле температури у перерізі льодяного покриву тощо.

У стаціонарному двовимірному температурному полі розподіл температури залежить тільки від координат  $x$  та  $y$ . Для такого поля диференціальне рівняння теплопровідності має вигляд рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0. \quad (5.31)$$

Аналітичне розв'язання цього рівняння значно складніше, ніж розв'язання рівняння для одномірного поля.

Розв'язання рівняння (5.31) виконується приблизними методами: графічним, релаксації, електротеплової аналогії тощо.

**Графічний метод** вирішення рівняння Лапласа (5.31) передбачає побудову ортогональної сітки, що має ізотерми та лінії току теплоти. Ортогональна сітка являє собою систему криволінійних квадратів, середні лінії яких рівні ( $l_i = b_i$ ) (рис.5.4).

Для вирішення задачі повинен бути заданий контур плоского тіла і межові умови першого роду.

Виконавши побудову температурної сітки, визначаємо тепловий потік у плоскому тілі за формулою:

$$S = q_{CT} n = \sum_1^n q_i b_i = \sum_1^n \lambda \frac{\Delta t}{l_i} b_i, \quad (5.32)$$

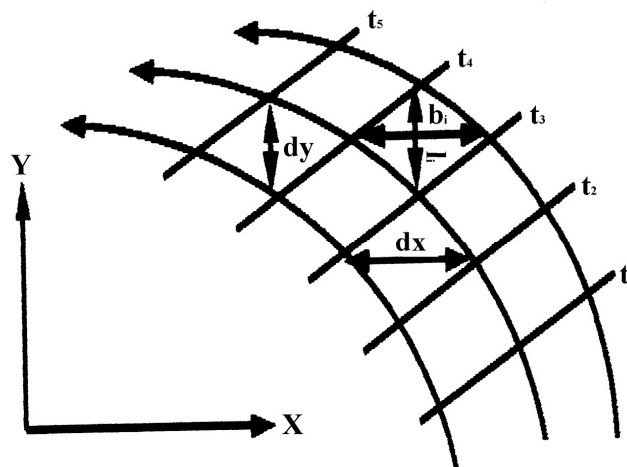


Рисунок 5.4 – Температурна сітка

де  $q_{CT}$  – тепловий потік струменя, утворений двома поряд розташованими лініями току;  $q_i$  – питомий тепловий потік;  $n$  – кількість струменів в ортогональній сітці;  $b_i$  – ширина струменя у вибраному перерізі;  $l_i$  – довжини цієї клітини;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності. Треба довести, що побудована ортогональна температурна сітка є розв’язком рівняння Лапласа (5.31). Для цього візьмемо один струмінь на рис.5.4. Проведемо у цьому струмені два перетини, паралельні координатним осям  $x$  та  $y$  ( $dx \cdot 1$ ,  $dy \cdot 1$ ) і визначимо витрати теплоти крізь ці перетини.

У напрямку осі  $y$

$$q_{CT_y} = q_y dx \cdot 1 = -\lambda dx \cdot 1 \cdot \frac{\partial t}{\partial y}, \quad (5.33)$$

у напрямку осі  $x$

$$-q_{CT_x} = q_x dy \cdot 1 = -\lambda dy \cdot 1 \cdot \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (5.34)$$

Розподілимо першу і другу рівності відповідно на  $dx$  та  $dy$  і, враховуючи, що уздовж струменя витрати теплоти постійні ( $q_{CT_x} = q_{CT_y} = dQ$ ), знайдемо:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}. \quad (5.35)$$

Диференціюючи перше рівняння по  $y$ , а друге по  $x$ , маємо:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (5.36)$$

Спільне розв’язання цих рівнянь дає рівняння Лапласа (5.31):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (5.37)$$

**Метод релаксації.** Розв’язання рівняння Лапласа (5.31) передбачає заміну диференціалів у рівнянні кінцевими різницями. Така заміна дає рівняння (5.31) у такому вигляді:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 t}{\Delta y^2} = 0, \quad (5.38)$$

де  $\Delta x$  і  $\Delta y$  – сторони елементарних площадок, на які поділено двовимірне тіло;  $t$  – температура у вузлах сітки. Побудуємо сітку так, щоб  $\Delta x = \Delta y$ .

Знайдемо перші похідні у кінцевих різницях по осях  $x$  та  $y$  у вузлі 0 (рис.5.5).

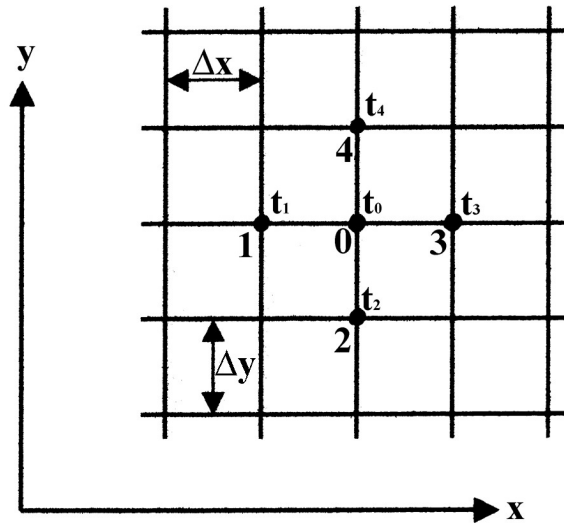


Рисунок 5.5 – Схема до розрахунку методом релаксації

$$\left. \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|_{1-0} = \frac{t_1 - t_0}{\Delta x}, \quad \left. \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|_{0-3} = \frac{t_0 - t_3}{\Delta x}, \quad (5.39)$$

$$\left. \frac{\Delta t}{\Delta y} \right|_{2-0} = \frac{t_2 - t_0}{\Delta y}, \quad \left. \frac{\Delta t}{\Delta y} \right|_{0-4} = \frac{t_0 - t_4}{\Delta y},$$

Тоді другі похідні у кінцевих різницях у вузлі 0:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} = \left. \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|_{1-0} - \left. \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|_{0-3} / \Delta x, \quad (5.40)$$

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta y^2} = \frac{\Delta t}{\Delta y} \Big|_{2-0} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Big|_{0-4} / \Delta y$$

Розв'язуючи рівняння (5.38) спільно з (5.39) та (5.40) і враховуючи, що  $\Delta x = \Delta y$ , маємо:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 t}{\Delta y^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0) = 0, \quad (5.41)$$

звідки

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = 0 \quad (5.42)$$

або

$$t_0 = \frac{1}{4} (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \quad (5.43)$$

Таким чином, температура у вузлі сітки 0 дорівнює середньому значенню температури у сусідніх вузлах.

Записуючи рівняння (5.42) для кожного вузла теплової сітки, отримаємо систему, яка має таку кількість лінійних рівнянь, скільки вузлів сітки. Для розв'язання цієї системи рівняння використовують різні чисельні методи, зокрема метод релаксації.

Назва методу походить від латинського *relaxato* –ослаблення – перехід системи у рівновагу. Наприклад, якщо температура у вузлі сітки, залежна від чотирьох значень температури, знаходиться у рівновазі з ними, то виконується рівняння (5.42). Якщо вона не знаходиться у рівновазі з сусідніми значеннями температури, то права частина рівняння не буде дорівнювати нулю:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = \Delta t. \quad (5.44)$$

Метод релаксації полягає в тому, що можливий розподіл температури поступово вирівнюють її послідовним наближенням, використовуючи рівняння (5.43) та (5.44).

**Метод електротеплової аналогії.** Більша кількість задач, які на цей час можна вирішити теоретично, вирішуються з успіхом експериментально методом електротеплової аналогії (ЕТА) або методом електрогідродинамічної аналогії (ЕГДА).

Метод ЕГДА заснований на аналогії математичного запису двох різних фізичних явищ: теплопровідності та електропровідності:

1. Закон Фур'є

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \approx -\frac{\Delta t}{\delta / \lambda}. \quad (5.45)$$

2. Закон Ома

$$I = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \approx -\frac{\Delta u}{\delta / \sigma}, \quad (5.46)$$

де  $q$ ,  $I$  – відповідно питомий потік теплоти і електрики;  $t$ ,  $u$  – відповідно температура і електричний потенціал, які змінюються у напрямі  $n$ ;  $\lambda$ ,  $\sigma$  – відповідно коефіцієнт теплопровідності і електропровідності:  $R_T = \sigma / \lambda$ ,  $R_c = \delta / \sigma$ ; відповідно термічний і електричний опір шару  $\delta n = \delta$ .

Аналогію можна побачити також, якщо від рівнянь (5.45) та (5.46) переходити до рівнянь Лапласа:

а) теплове

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0, \quad (5.47)$$

б) електричне

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.48)$$

**Питання для самоконтролю**

1. Як розподіляється температура по товщі одношарового плоского тіла?
2. Як визначається температура на межі між шарами сніго-льодяної товщі?
3. Напишіть рівняння розподілу температури у товщі плоского тіла із внутрішнім джерелом теплоти.
4. В чому полягає графічний метод розв'язання рівняння Лапласа?
5. Поясніть суть методу релаксації.
6. В чому полягає метод електротеплової аналогії?



## РОЗДІЛ 6

### ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ

#### 6.1 Одновимірне температурне поле

Рівняння теплопровідності одновимірного температурного поля при нестационарному режимі має вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (6.1)$$

Простим методом розв'язання цього рівняння є метод кінцевих різниць.

Рівняння (6.1) у кінцевих різницях записується як

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}. \quad (6.2)$$

При вирішенні конкретної задачі повинно бути задано:

1. початкові умови – розподіл температури за глибиною у початковий момент часу ( $\kappa$ ); при  $\tau=0$ ,  $t=f(\tau)$ ;
2. межові умови – значення температури на поверхні при  $z=0$  у різні інтервали часу –  $\kappa$ ,  $\kappa+1$ ,  $\kappa+2$ , ...; при  $z=l$ ,  $t=f_l(\tau)$ ;
3. глибина водойми (одновимірна задача);
4. значення коефіцієнта теплопровідності  $a$ .

Для розв'язання рівняння (6.2) на рис.6.1 накреслимо розподіл температури у початковий момент часу  $\kappa$ . Товщу води поділимо на інтервали однакової товщини  $\Delta z$  лініями з індексами  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ , .... Час  $\tau$  поділено на розрахункові інтервали  $\Delta \tau$  з індексами  $\kappa$ ,  $\kappa+1$ ,  $\kappa+2$ , .... Температуру у точці  $n$  у момент часу  $\kappa$  можна позначити як  $t_{n,\kappa}$ .

Треба знайти розподіл температури по глибині за інтервалом часу  $\kappa+1$ ,  $\kappa+2$ , .... тощо. Наприклад, знайти значення температури у точці  $t_{n,\kappa+1}$ . Значення температури у точці на поверхні  $t_{n-1,\kappa+1}$  відомо (межова умова).

Температурна ламана крива (рис.6.1) має два нахили у середині інтервалу  $\Delta z$  відповідно до двох похідних у кінцевих різницях:

$$\frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{t_{n+1,\kappa} - t_{n,\kappa}}{\Delta z} \quad \text{та} \quad \frac{\Delta t}{\Delta z} = \frac{t_{n,\kappa} - t_{n-1,\kappa}}{\Delta z} \quad (6.3)$$

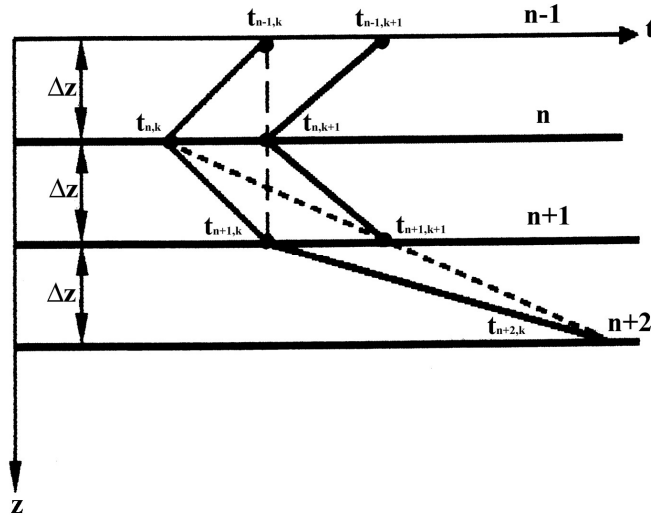


Рисунок 6.1 – Побудова температурних кривих методом лінійних різниць

Для другої похідної будемо мати:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta z^2} = \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{t_{n+1,k} - t_{n,k}}{\Delta z} - \frac{t_{n,k} - t_{n-1,k}}{\Delta z} \right) = \frac{t_{n+1,k} - t_{n-1,k} - 2t_{n,k}}{\Delta z^2} \quad (6.4)$$

Похідна від температури за часом для точки  $t_{n,k+1}$  має вигляд:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau}. \quad (6.5)$$

Підставимо (6.4) та (6.5) у (6.2):

$$\frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau} = a \left( \frac{t_{n+1,k} - t_{n-1,k} - 2t_{n,k}}{\Delta z^2} \right) \quad (6.6)$$

Звідки

$$t_{n,k+1} = \frac{2a\Delta\tau}{\Delta z^2} \left( \frac{t_{n+1,k} - t_{n-1,k}}{2} - t_{n,k} \right) + t_{n,k} \quad (6.7)$$

Коефіцієнт  $\frac{2a\Delta\tau}{\Delta z^2}$  можна підібрати, змінюючи  $\Delta\tau$  і  $\Delta z$  так, щоб він дорівнював одиниці (умова Шмідта), задаючи  $\Delta\tau = \frac{\Delta z^2}{2a}$  або  $\Delta z = \sqrt{2a\Delta\tau}$ , тоді

$$t_{n,k+1} = \frac{t_{n+1,k} - t_{n-1,k}}{2} \quad (6.8)$$

Тобто, температура у точці  $n$  у момент часу  $(k+1)$  визначається як півсума температур у сусідніх точках за попередній момент часу  $k$ .

Розв'язання рівняння (6.2) полягає у графічній побудові, коли точки на епюрі з'єднують через одну прямими лініями і шукані температури одержать на перетині проведених прямих з лініями відповідних ординат проміжних точок. З'єднання одержаних точок дає епюру розподілу температури у наступний момент часу.

Щоб довести епюру до поверхні дна, повинна бути задана межева умова на її поверхні.

## 6.2 Двовимірне температурне поле

Диференціальне рівняння теплопровідності для нестационарного двовимірного температурного поля у кінцевих різницях має вигляд:

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = a \left( \frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 t}{\Delta y^2} \right). \quad (6.9)$$

Для вирішення конкретної задачі повинно бути задано:

- а) початкові умови – температура в кожній точці поля у початковий момент часу  $\tau_0$ ;
- б) межові умови на контурі поля за розрахунковий період;
- в) геометрія плоского поля (контури);
- г) значення коефіцієнта теплопровідності.

Для вирішення рівняння (6.9) поділимо двовимірне тіло на квадрати зі стороною  $\Delta x = \Delta y = \Delta l$  (рис.6.2).

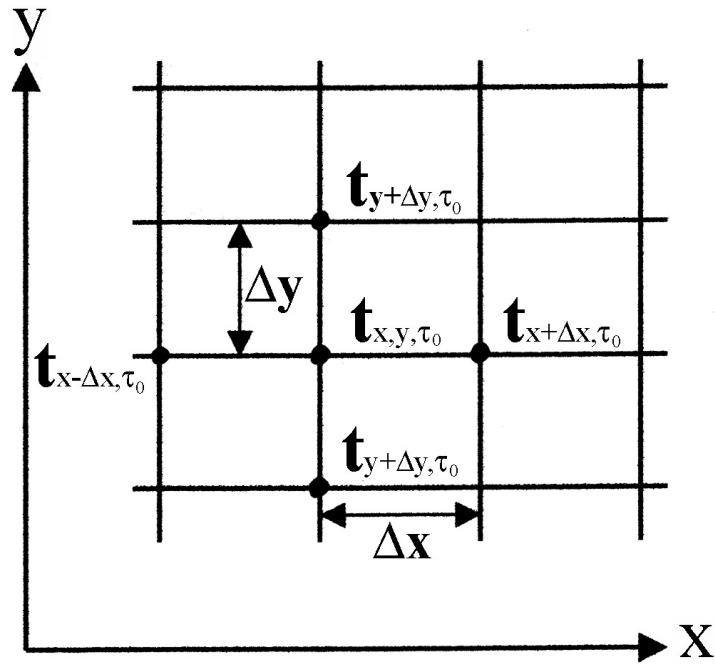


Рисунок 6.2 – Розрахунок двовимірного температурного поля методом лінійних різниць

Запишемо перші похідні:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{t_{x+\Delta x, \tau_0} - t_{x, \tau_0}}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{t_{x, \tau_0} - t_{x-\Delta x, \tau_0}}{\Delta x} \quad (6.10)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} = \frac{t_{y+\Delta y, \tau_0} - t_{y, \tau_0}}{\Delta y}; \quad \frac{\Delta t}{\Delta y} = \frac{t_{y, \tau_0} - t_{y-\Delta y, \tau_0}}{\Delta y}$$

Для другої похідної будемо мати:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} = \frac{2}{\Delta x^2} \left( \frac{t_{x+\Delta x, \tau_0} + t_{x-\Delta x, \tau_0}}{2} - t_{x, \tau_0} \right) \quad (6.11)$$

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta y^2} = \frac{2}{\Delta y^2} \left( \frac{t_{y+\Delta y, \tau_0} + t_{y-\Delta y, \tau_0}}{2} - t_{y, \tau_0} \right)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (6.9) та (6.11), маємо

$$\Delta t = \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \left( \frac{t_{x+\Delta x, \tau_0} + t_{x-\Delta x, \tau_0}}{2} - t_{x, \tau_0} \right) + \frac{2a\Delta\tau}{\Delta y^2} \left( \frac{t_{y+\Delta y, \tau_0} + t_{y-\Delta y, \tau_0}}{2} - t_{y, \tau_0} \right) \quad (6.12)$$

Ураховуючи, що  $\Delta x = \Delta y = \Delta l$ , рівняння (6.12) має вигляд:

$$\Delta t = \frac{4a\Delta\tau}{\Delta l^2} \left( \frac{t_{x+\Delta x, \tau_0} + t_{x-\Delta x, \tau_0} + t_{y+\Delta y, \tau_0} + t_{y-\Delta y, \tau_0}}{4} - t_{x, y, \tau_0} \right) \quad (6.13)$$

Якщо взяти

$$\frac{4a\Delta\tau}{\Delta l^2} = 1, \quad (6.14)$$

$$\Delta t = \left( \frac{t_{x+\Delta x, \tau_0} + t_{x-\Delta x, \tau_0} + t_{y+\Delta y, \tau_0} + t_{y-\Delta y, \tau_0}}{4} - t_{x, y, \tau_0} \right) \quad (6.15)$$

Температура у точці  $x, y$  у момент часу  $\tau + \Delta\tau$  дорівнює:

$$t_{x, y, \tau_0} + \Delta t = t_{x, y, \tau_0 + \Delta\tau} = \left( \frac{t_{x+\Delta x, \tau_0} + t_{x-\Delta x, \tau_0} + t_{y+\Delta y, \tau_0} + t_{y-\Delta y, \tau_0}}{4} \right) \quad (6.16)$$

Умова (6.14) та рівняння (6.16) і є розв'язком рівняння теплопровідності для двовимірного поля у кінцевих різницях.

Підібравши значення  $\Delta l$  із умови (6.14), визначимо розрахунковий інтервал часу:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta l^2}{4a}. \quad (6.17)$$

Сітка на рис.6.2 будується у великому масштабі, тоді значення зміни температури через  $\Delta\tau$  можна виписати у кожній точці. Для межових точок поля температури змінюються відповідно до заданих межових умов.

### 6.3 Моделювання температурних полів

Аналітичне розв'язання диференціального рівняння теплопроводності одержано тільки для простих задач. Тому використовують метод експериментальних досліджень на моделях. Для того, щоб теплові процеси на моделі були подібні тепловим процесам у природі, при виготовленні моделі виконується геометрична подібність природи і моделі, а також рівність безрозмірних критеріїв подібності.

Геометрична подібність природи і моделі визначається співвідношеннями:

$$x_m = m_l x_n; \quad y_m = m_l y_n; \quad z_m = m_l z_n \quad (6.18)$$

де  $x_m, y_m, z_m$  та  $x_n, y_n, z_n$  – відповідно лінійні розміри моделі та природи;  $m_l$  – масштаб моделі: відношення лінійних розмірів моделі до відповідних лінійних розмірів природи.

Критерій Фур'є можна одержати так.

Закони розподілу теплоти як в природі, так і на моделі, відповідають рівнянню теплопроводності:

для природи

$$\frac{\partial t_n}{\partial \tau_n} = a_n \left( \frac{\partial^2 t_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 t_n}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 t_n}{\partial z_n^2} \right), \quad (6.19)$$

для моделі

$$\frac{\partial t_m}{\partial \tau_m} = a_m \left( \frac{\partial^2 t_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 t_m}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 t_m}{\partial z_m^2} \right) \quad (6.20)$$

Між відповідними характеристиками, що відносяться до моделі і природи, існують такі співвідношення:

$$\tau_m = m_\tau \tau_n; \quad a_m = m_a a_n; \quad t_m = m_t t_n, \quad (6.21)$$

де  $\tau_m, a_m, t_m$  та  $\tau_n, a_n, t_n$  – відповідно час, коефіцієнт теплопроводності і температура моделі і природи;  $m_\tau, m_a, m_t$  – масштаби часу, коефіцієнта теплопроводності і температури.

Розв'язуючи спільно (6.18), (6.20) та (6.21), маємо:

$$\frac{m_t dt_n}{m_\tau d\tau_n} = \frac{m_a m_\tau}{m_l^2} a_n \left( \frac{\partial^2 t_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 t_n}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 t_n}{\partial z_n^2} \right), \quad (6.22)$$

або

$$\frac{\partial t_n}{\partial \tau_n} = \frac{m_a m_\tau}{m_l^2} a_n \left( \frac{\partial^2 t_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 t_n}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 t_n}{\partial z_n^2} \right). \quad (6.23)$$

Якщо множник

$$\frac{m_a m_\tau}{m_l^2} = 1, \quad (6.24)$$

то рівняння (6.23) та (6.19) тотожні.

У рівнянні (6.24) значення масштабних множників треба замінити відношеннями відповідних величин моделі і натури – (6.18) та (6.21), тоді безрозмірне відношення має назву критерію Фур'є  $F_0$ :

$$\frac{a_m \tau_m}{x_m^2} = \frac{a_n \tau_n}{x_n^2} = idem = F_0. \quad (6.25)$$

Із рівності (6.25) виходить, що вибір розміру і матеріалу моделі повинен відповідати вимогам критерію Фур'є  $F_0$ .

Останній дозволяє при заданих матеріалах і розмірах моделі визначити масштаб часу моделювання теплового процесу.

У критерій Фур'є температура не увійшла. Ця обставина дозволяє відтворювати на моделі температурне поле у вільному діапазоні значень температури. Масштаб температури може бути вільним в умовах проведення експерименту. Наприклад, експеримент процесу при негативній температурі можна проводити у лабораторії на моделі з позитивною температурою.

В тому випадку, коли задані межові умови третього роду, при моделюванні необхідно враховувати умову:

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \alpha(t_n - t_{cep}), \quad (6.26)$$

де  $t_n$  та  $t_{cep}$  – відповідно температура на поверхні та середня температура.

Рівняння (6.26) для натурних умов і моделі можна записати у вигляді:

$$-\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial n_n} = \alpha_n (t_{n,n} - t_{сер,n}), \quad (6.27)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial t_m}{\partial n_m} = \alpha_m (t_{n,m} - t_{сер,m}), \quad (6.28)$$

Масштабні співвідношення:

$$\lambda_m = m_\lambda \lambda_n \quad \alpha_m = m_\alpha \alpha_n \quad t_{сер,m} = m_t t_{сер,n} \quad (6.29)$$

$$n_m = m_l n_n \quad t_{n,m} = m_t t_{n,n}$$

Розв'язуючи спільно (6.28) та (6.29), маємо для моделі:

$$-\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial n_n} = \frac{m_\alpha m_l}{m_\lambda} \alpha_n (t_{n,n} - t_{сер,n}), \quad (6.30)$$

Рівняння (6.30) та (6.31) тотожні, якщо:

$$\frac{m_\alpha m_l}{m_\lambda} = 1 \quad (6.31)$$

Замінюючи значення масштабних множників в умові (6.31) значеннями із рівнянь (6.29), маємо критерій Біо –  $Bi$ :

$$\frac{\alpha_m l_m}{\lambda_m} = \frac{\alpha_n l_n}{\lambda_n} = idem = Bi \quad (6.32)$$

При дослідженні температурних полів на моделі критерій Біо використовується при відсутності межових умов першого роду.

Критерій Фур'є та Біо справедливі у тому випадку, коли теплові процеси не спричиняють зміну агрегатного стану середовища або коли температурне поле не має яких-небудь інших джерел теплоти. Інакше цих критеріїв недостатньо. Наприклад, при дослідженні температурного режиму вологих ґрунтів, які щорічно замерзають та відтають. При цьому треба враховувати ту кількість теплоти, яка може бути поглинута чи виділена при зміні агрегатного стану (умова Стефана).



$$q_{кр} = -W \rho L_{кр} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad (6.33)$$

де  $W$  – вміст води в одиниці об'єму ґрунту;  $\rho$  – густина води;  $L_{кр}$  – теплота кристалізації;  $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$  – швидкість промерзання ґрунту,  $\psi$  – товщина мерзлого ґрунту;  $q_{кр}$  – інтенсивність потоку теплоти кристалізації.

За законом збереження теплової енергії:

$$q_m = q_T + q_{кр}, \quad (6.34)$$

де  $q_m$  – інтенсивність теплового потоку у мерзлому ґрунті на межі з талим,  $q_T$  – інтенсивність теплового потоку у талому ґрунті.

За законом Фур'є:

$$q_T = -\lambda_T \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{+0}; \quad q_m = -\lambda_m \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{-0}, \quad (6.35)$$

де знаки “+0” та “-0” у градієнтах температур показують, що тепловий потік розглядається на межі чи з боку талого ґрунту, чи з боку мерзлого,  $\lambda_T$  та  $\lambda_m$  – коефіцієнти теплопровідності відповідно мерзлого та талого ґрунтів.

Розв'язуючи спільно рівняння (6.33), (6.34) та (6.35), маємо:

$$W \rho L_{кр} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \lambda_m \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{-0} - \lambda_T \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{+0} \quad (6.36)$$

Введемо масштабні співвідношення:

$$\begin{aligned} \lambda_{m.m} &= m_{\lambda_m} \lambda_{mH}; & \lambda_{T.m} &= m_{\lambda_T} \lambda_{TH}; & W_m &= m_W W_H; \\ \psi_m &= m_\psi \psi_H; & z_m &= m_l z_H; & \tau_m &= m_\tau \tau_H; \\ L_{кр.m} &= m_{L_{кр}} L_{крH}; & \rho_m &= m_\rho \rho_H; & t_m &= m_t t_H \end{aligned} \quad (6.37)$$

Якщо записати рівняння (6.36) відносно моделі та натури і спільно їх розв'язати за умови (6.37), тоді маємо:

$$\frac{m_w m_\rho m_{L_{kp}} m_l^2}{m_t m_\tau} = 1 \quad (6.38)$$

Якщо модель зроблено з того ж матеріалу, що й натура, а також при рівній вологості:

$$m_w = 1; \quad m_{L_{kp}} = 1; \quad m_\lambda = 1. \quad (6.39)$$

рівняння (6.38) набере вигляду:

$$\frac{m_l^2}{m_t m_\tau} = 1. \quad (6.40)$$

Із умов (6.39) критерій Фур'є також змінює свій вигляд:

$$\frac{m_\tau}{m_l^2} = 1. \quad (6.41)$$

У практиці теплового моделювання, крім розглянутих, використовують інші критерії моделювання.

### ***Питання для самоконтролю***

1. В чому полягає метод кінцевих різниць для розв'язання рівняння теплопровідності одновимірного температурного поля при нестационарному режимі?
2. Як розв'язується рівняння теплопровідності при двовимірному температурному полі?
3. В чому полягає суть моделювання температурних полів?
4. Що таке критерій Фур'є та критерій Біо?

## РОЗДІЛ 7

### ГІДРОТЕРМІЧНІ РОЗРАХУНКИ РІЧОК ТА ВОДОЙМ

Господарське використання річок та водойм і проектування нових споруд вимагає відомості щодо термічного режиму для розрахунків випаровування з поверхні води та складників рівняння теплового балансу, для аналізу льодового режиму і його прогнозу тощо.

При відсутності даних спостережень температура води визначається розрахунками. В залежності від наявності матеріалів спостережень, особливостей водного об'єкта, розрахункового інтервалу часу тощо, використовуються такі розрахункові методи: метод аналогії, метод емпіричних залежностей та аналітичні методи, що базуються на рівнянні теплового балансу чи рівнянні теплопровідності.

#### 7.1 Метод аналогії

Метод аналогії полягає в тому, що значення температури води, які спостерігалися на вивченому водному об'єкті (аналог), можуть бути перенесені на подібний, але не вивчений водний об'єкт, що знаходиться в аналогічних умовах (фізико-географічних, кліматичних, морфометричних, гідравлічних тощо). Цей метод полягає в аналізі усіх умов, що формують тепловий режим, і використовується на невеликих річках і неглибоких водоймах.

Метод аналогії використовується для ознайомлення зі середніми значеннями щомісячних температур та для призначення початкових умов при розв'язанні рівнянь теплопровідності.

#### 7.2 Метод емпіричних залежностей

Розраховувати температуру за емпіричними залежностями можна для річок та невеликих озер. Залежність між температурами води та повітря має вигляд:

$$t = a + b\theta_{200}, \quad (7.1)$$

де  $t$  та  $\theta_{200}$  – відповідно температура води та повітря, середня за місяць чи декаду;  $a$  та  $b$  – коефіцієнти, що залежать від місцевих умов.

Для великих водойм, що мають значний об'єм води, залежність між температурою води та повітря має вигляд двох кривих (рис.7.1): у період нагрівання температура води нижче за температуру повітря (крива 1), а в період охолодження температура води нижче ніж температура повітря (крива 2). Недоліки цього методу – регіональність емпіричних залежностей, неможливість використовувати їх у інших умовах.

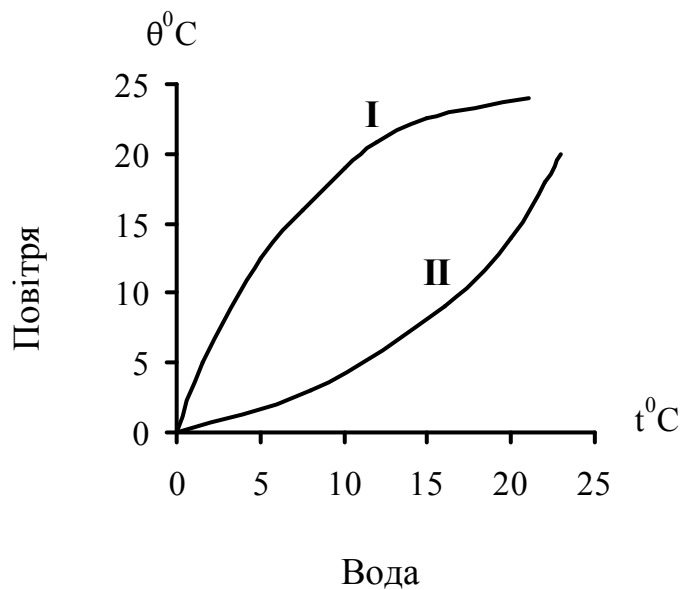


Рисунок 7.1 – Залежність середньої місячної температури повітря і води

### 7.3 Розрахунок температури води відкритого водотоку (метод послідовних наближень)

Розрахунки охолодження води у річках, у нижньому б'єфі гідроелектростанцій мають практичне значення. При вирішенні цих задач використовують диференціальне рівняння такого вигляду:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial t}{\partial x} + V_y \frac{\partial t}{\partial y} + V_z \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\lambda_T}{C\rho} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (7.2)$$

Рівняння (7.2) розв'язується при умовах, що

$$V_x = V_y = 0; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \approx 0. \quad (7.3)$$

Тоді рівняння (7.2) має вигляд:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\lambda_T}{C\rho} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad (7.4)$$

після інтегрування правої частини:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + V_x \frac{\partial t}{\partial x} = \left( \sum_1^n S \right) / C \rho H, \quad (7.5)$$

а для стаціонарного температурного режиму  $\left( \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \right)$ :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \left( \sum_1^n S \right) / C \rho V_x H, \quad (7.6)$$

Це рівняння розв'язується аналітичним методом або методом кінцевих різниць, при цьому необхідно знайти початкові та межові умови, а також значення швидкості  $V_x$ .

В кінцевих різницях рівняння (7.6) має вигляд:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \left( \sum_1^n S \right) / C \rho V_x H \quad (7.7)$$

або

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \left( \sum_1^n S \right) / C \rho q_B, \quad (7.8)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{t_k - t_n}{\Delta x}; \quad q_B = V_x H, \quad (7.9)$$

де  $t_n$  та  $t_k$  – середня температура води у початковому та кінцевому перерізах ділянки водотоку довжиною  $\Delta x$ ,  $q_B$  – питома витрата води;  $\sum_1^n S$  – сума теплових потоків крізь вільну поверхню водотоку та дна.

Деякі складники суми тепловитоків залежать від температури води на ділянці, тобто від температури  $t_{сер} = (t_n + t_k) / 2$ . Це обумовлює вибір методу розв'язання рівняння – методу послідовних наближень. Цей метод полягає у тому, що задається значення температури  $t_k$ , визначаються теплові потоки крізь поверхні потоку. Потім розв'язується рівняння (7.8). Розв'язком цього рівняння є значення температури, що збігається із заданим її значенням. Якщо у результаті розв'язання рівняння значення температур не збігаються, то розрахунки повторюють, при цьому задають нові значення  $t_k$ .

Довжина ділянки визначається рівнянням:

$$\Delta x = \Delta V_x \Delta \tau, \quad (7.10)$$

$\Delta \tau$  – час добігання потоку.

Проектування температурної кривої водотоку за її довжиною за рівнянням (7.2) відбувається за схемою (рис.7.2).

Водоток за довжиною поділяється на ділянки довжиною  $\Delta x_i$  в залежності від часу добігання потоку  $\Delta \tau$ . Початок кривої визначається початковою температурою  $t_n$ , а кінець – кінцевою  $t'_k$ , що задається.

Середня температура води  $t'_1$  дозволяє визначити теплові потоки крізь водну поверхню водотоку (межові умови), які підставляються у рівняння (7.8). Обчислений градієнт температури порівнюють із заданим. Якщо результати збігаються, то проектують другу ділянку температурної кривої. Якщо результати не збігаються, обчислення повторюють за рахунок градієнта, визначеного за рівнянням (7.8). Далі температурну криву екстраполюють до наступної ділянки  $\Delta x$  і розрахунки продовжують.

Розрахунок температури за рівнянням (7.8) вирішується за допомогою ПК.

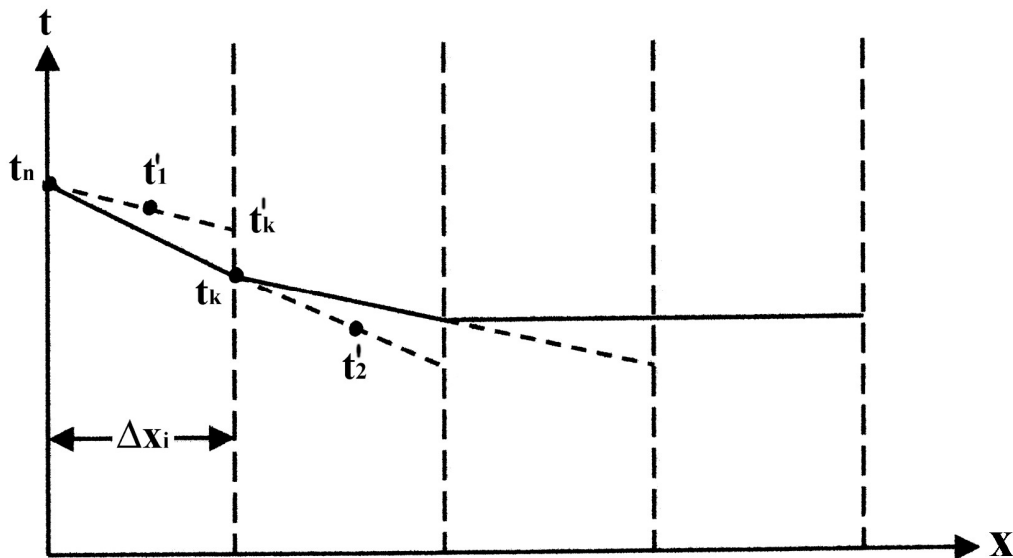


Рисунок 7.2 – Проектування температурної кривої потоку за її довжиною

#### 7.4 Розрахунок температури води за методом суперпозиції

Розрахунок температури води водойм за методом суперпозиції А.І.Пеховича та В.М.Жидких рекомендовано до термічних розрахунків водосховищ. Метод полягає у використанні диференціального рівняння теплопровідності у вигляді:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad (7.11)$$

де  $a_T = \frac{\lambda_T}{C\rho}$  – коефіцієнт турбулентної теплопроводності.

Принцип суперпозиції полягає в тому, що складна теплова задача розкладається на прості таким чином, щоб сума значень початкової температури та теплових умов на поверхні води та на дні для додаткових задач дорівнювала би початковій температурі та тепловим умовам на поверхні та на дні в основній задачі. Для вирішення складної теплової задачі потрібно мати набір рішень простих задач. Таких задач 19, їх рішення мають вигляд розрахункових графіків та таблиць. Рішення 19 задач дозволяють розраховувати температуру води в мілких та глибоких водоймах при відсутності льодяного покриву та при його наявності.

Безрозмірні координати графіків наведені відносною температурою для кожної задачі:  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$

$$\theta_1 = (t - t_n)/(t_0 - t_n); \quad \theta_2 = (t - \theta_{200})/(t_0 - \theta_{200});$$
$$\theta_3 = (t - t_0)b\tau \text{ і т.д.} \quad (7.12)$$

критерієм Фур'є:  $F_0 = a_T \tau / h^2,$  (7.13)

критерієм Біо:  $Bi = \alpha h / \lambda_T$  (7.14)

та відносною глибиною:  $\eta = z / h$  (7.15)

де  $t, t_0, t_n, \theta_{200}$  – відповідно температура води, початкова, на поверхні, а також температура повітря на висоті 200 м;  $b$  – коефіцієнт, що залежить від температури води;  $a_T$  – коефіцієнт турбулентної теплопроводності;  $\tau$  – час;  $z$  і  $h$  – змінна та повна глибина водосховища;  $\alpha$  і  $\lambda_T$  – коефіцієнти тепловіддачі та турбулентної теплопроводності.

### ***Питання для самоконтролю***

1. В чому полягає метод аналогії?
2. В чому полягає метод емпіричних залежностей?
3. Поясніть суть методу послідовних наближень.
4. Як розраховується температура води за методом суперпозиції?

## РОЗДІЛ 8

### ЛЬОДОТЕРМІЧНІ РОЗРАХУНКИ РІЧОК ТА ВОДОЙМ

Розуміння закономірностей льодоутворення, суті льодових явищ та знання фізичних властивостей льоду дозволяють застосувати способи попередження та боротьби з льодовими явищами, а також розробити нові методи їх розрахунків.

Регулювання льодових процесів може мати на меті покращення льодових явищ, наприклад, збільшення товщини льодяного покриву при будівництві льодових шляхів, прискорення скресання для збільшення тривалості навігації, попередження утворення заторів та зажорів тощо.

Льодовий режим річок та водойм є сукупністю закономірно повторюваних процесів виникнення, розвитку та руйнування льодяних утворень на річках та водоймах.

#### 8.1 Замерзання води

**Температура замерзання.** Температура замерзання (кристалізації) дистильованої води за нормальним тиском береться рівною  $0^{\circ}\text{C}$ . Поява льодових утворень на водних об'єктах відбувається тоді, коли температура поверхні води знижується до температури кристалізації.

У природі температура замерзання може бути нижче  $0^{\circ}\text{C}$ , тому що утримання у воді розчинених речовин знижує температуру замерзання і вона може набути навіть від'ємних значень порядку  $-1^{\circ}\text{C}$ . Вода у рідкому стані при від'ємній температурі називається переохолодженою водою. Чим спокійніше вода, тим на меншу глибину проникає переохолодження. На річках, де спостерігається інтенсивне турбулентне перемішування, переохолодження може спостерігатись по всій товщі води. Зазвичай переохолодження виражається сотими частками градуса.

**Механізм кристалізації.** При зниженні температури більш щільна структура води змінюється більш крихкою структурою льоду, причому при переохолодженні ця перебудова відбувається інтенсивно. Зміна структури відбувається в деяких точках, так званих центрах кристалізації. Виникнення ядер кристалізації може відбуватися за рахунок перегрупування молекул всередині рідини. Ядрами кристалізації можуть бути і частки сторонніх домішок.

Розміри і кількість кристалів, що утворюються, залежать від температурних умов. Чим нижче температура води, тим швидше йде охолодження, тим більше виникає кристалів і тем менше їх розміри. Вільне зростання кристалів у водному середовищі відбувається до



зустрічі з іншими такими ж кристалами і до моменту змерзання кристалів, що приводить до утворення компактного льоду (при замерзанні спокійної води без перемішування).

**Теплота кристалізації.** Перехід води із рідкого стану у твердий супроводжується виділенням теплоти кристалізації, а зворотний йому процес – танення льоду – поглинанням теплоти плавлення. Ця здатність води визначається питомою теплотою кристалізації (плавлення).

Питома теплота кристалізації води  $L_{кр}$  - це кількість теплоти, що виділяється при кристалізації 1 кг води при сталій температурі. Для дистильованої води вона дорівнює  $33.3 \cdot 10^4$  Дж/кг.

Для утворення льоду необхідне дотримання наступних умов:

- 1) переохолодження води нижче  $0^\circ\text{C}$  на соті частки градуса;
- 2) наявність у переохолодженій воді ядер (центрів) кристалізації;
- 3) відведення тепла, що виділяється при кристалізації в атмосферу чи у водну масу.

## 8.2 Замерзання річок та водойм

Замерзання річок - перша фаза розвитку льодового режиму. Появі льоду на річках передують швидке охолодження води за негативного теплового балансу. З моменту охолодження поверхні води до  $0^\circ\text{C}$  починається процес льодоутворення, розвиток якого залежить від подальшого ходу теплообміну водної поверхні з атмосферою і нижче розташованими шарами води, вітрової діяльності та запасу тепла у водоймі.

Первинні льодяні утворення на річках – сало – спостерігаються з моменту переохолодження поверхневого шару води. Утворені у воді при її замерзанні кристали мають вигляд плям або тонкого суцільного шару.

Утворення сала, накопичення снігу, що плаває у воді (сніжниця) на ділянках з уповільненими швидкостями течії, найбільш інтенсивне охолодження потоку на мілководних прибережних ділянках приводить до того, що майже на всіх річках, які замерзають, уздовж берегів відбувається утворення заберегів. Забереги – смуги льоду, що примерзли до берегів річки, коли основна частина водного простору не замерзла.

Турбулентне перемішування у водотоках сприяє переохолодженню всієї товщі води до дна і утворює внутрішньоводний лід - скупчення льодяних кристалів, утворюваних у товщі води і на дні русла при переохолодженні води в потоці до сотих часток градуса нижче нуля. Шуга – внутрішньоводний лід, що спливає на поверхню або занесений вглиб потоку у вигляді пластівців, грудок і килимів. Донний лід - внутрішньоводний лід, що утворюється на дні річки. Донний лід спливає на поверхню, коли сила зважування стає достатньою, щоб відірвати його від дна. Утворення внутрішньоводного льоду припиняється з моменту

встановлення на річці суцільного льодяного покриву, який перешкоджає переохолодженню води. Переміщення шуги на поверхні та всередині водного потоку створює шугоход.

На річках утворюється зажор – скупчення шуги в руслі річки, що спричиняє стиснення водного перерізу та пов'язане з ним підвищення рівня води.

Плаваючи на річці, льодяні поля, утворені внаслідок змерзання заберегів, що обломилися, сніжниці та шуги, становлять осінній льодохід. Щільність льодоходу змінюється в часі і за довжиною річки. Інтенсивність теплообміну з атмосферою визначає загальну кількість льоду, що утворюється на річці, але розподіл його по річці залежить від розподілу швидкості за шириною та довжиною потоку, поздовжнього профілю, абрисів русла у плані.

Щільність льодоходу зростає, у якийсь момент досягає такого значення, що у звуженнях русла, на поворотах лід зупиняється. Тут формуються льодяні перемички або зажори, що закупорюють русло частково чи цілком, створюють умови для зупинки і змерзання плавучого зверху льоду.

На водоймах охолодження води при від'ємних температурах повітря часто відбувається в умовах зворотної стратифікації. При малому перемішуванні температурні градієнти можуть бути значними – до  $1-2^{\circ}$  у поверхневому шарі. При цьому температура на глибині може зберігати позитивні значення.

На малих водоймах, де тепловий запас і перемішування невеликі, а охолодження по площі відбувається рівномірно, суцільний льодяний покрив може утворитися майже одночасно на всій площі за рахунок змикання заберегів, що просуваються від берегів до центру водойми. Якщо похолодання зберігається, то поява першої льодяної кірки і є встановленням льодоставу.

При невеликих запасах тепла у водоймі різниця теплових потоків в атмосферу з верхньої поверхні льоду і від водної маси до нижньої поверхні льоду може виявитися значною. Цей надлишок тепла буде витрачатися на танення льоду знизу і може привести до скресання водойми. Скресання незабаром після замерзання можливо за рахунок виламування сильним вітром при невеликій товщині льодової кірки (2-3 см). При цьому може відбуватися інтенсивне торосіння льоду у відкритій частині водойми і утворюються навали льоду висотою до 1.5 – 2.5 м і довжиною до декількох кілометрів.

На великих глибоких водоймах зі складною формою улоговин, які мають великий і нерівномірний розподіл запасу тепла і зазнають сильного вітрового впливу, встановлення льодоставу відбувається не одночасно по площі. Тривалість інтервалу часу від появи перших льодяних утворень до

встановлення суцільного льодоставу на окремих ділянках може доходити до 20-45 днів, а загальна тривалість замерзання всього озера може доходити до трьох місяців.

### 8.3 Умови початку льодоутворення (метод Л.Г.Шуляковського)

Рівняння теплового балансу водної поверхні води має вигляд:

$$A + B = 0, \quad (8.1)$$

де  $A$  – тепловий потік від водної маси до поверхні поділу вода – повітря;  $B$  – сума теплових потоків на водній поверхні: променистого теплообміну ( $R$ ), втрати тепла на випаровування з водної поверхні ( $LE$ ) і турбулентного теплообміну з атмосферою ( $P$ ), а також надходження додаткового тепла за рахунок рідких опадів ( $+m$ ) та втрати тепла на танення твердих опадів ( $-m$ ).

$$B = R + LE + P \pm m. \quad (8.2)$$

Тепловий потік між водною масою і поверхнею поділу вода – повітря має вигляд:

$$A = \alpha (t_{cep} - t_{ng}), \quad (8.3)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт віддачі тепла від водної маси до поверхні поділу вода-повітря;  $t_{cep}$  – середня температура води;  $t_{ng}$  – температура поверхні води.

Ураховуючи (8.3), рівняння теплового балансу (8.1) можна записати у такому вигляді:

$$\alpha (t_{cep} - t_{ng}) + B = 0 \quad (8.4)$$

При зміні  $B$  змінюється  $t_{ng}$  та градієнт температури в поверхневому шарі. Коли ж температура поверхні  $t_{ng}$  знижується до температури замерзання, то подальше збільшення  $B$  не може компенсуватися пониженням  $t_{ng}$  та зростанням температурного градієнта в поверхневому шарі. При цьому починається льодоутворення на поверхні води.

Таким чином, льодоутворення на поверхні річки починається тоді, коли температура водної поверхні знижується до температури замерзання, а тепловіддача водною поверхнею тепла стає більшою ніж приплив тепла до неї з водної маси.

Якщо на початок льодоутворення  $t_{ng} = 0$ , то рівняння (8.4) має вигляд:

$$\alpha_n t_{сер} \leq -B \quad (8.5)$$

або

$$t_{сер n} \leq -\frac{B_n}{\alpha_n}, \quad (8.6)$$

де  $n$  – позначає дату початку льодоутворення.

Нерівність (8.6) показує, що льодоутворення на поверхні стає можливим тоді, коли середня температура води менше (чи дорівнює) ніж  $-\frac{B_n}{\alpha_n}$ .

#### **8.4 Метод визначення можливості утворення внутрішньоводного льоду**

В.А. Римша для вирішення питання про імовірність утворення внутрішньоводного чи поверхневого льоду запропонував користатися характеристикою розподілу тепла льодоутворення за глибиною. Кількість тепла, що проходить крізь стовп води з одиничною площею і висотою, рівній глибині водойми  $H$ , виражається як різниця між втратами його в атмосферу і надходженням тепла кристалізації:

$$\lambda \frac{dt}{dy} = S_n - \int_0^y S(y) dy. \quad (8.7)$$

При розв'язанні цього рівняння вводиться коефіцієнт пропорційності між температурою переохолодження й інтенсивністю виділення теплоти льодоутворення. Нехтуючи припливом тепла від дна і вважаючи, що у водоймі перемішування за рахунок швидкості течії невелике, вираз для визначення теплообміну поверхні води береться у вигляді:

$$S_0 = \frac{S_n}{\sqrt{\lambda_T m}}, \quad (8.8)$$

де  $S_0$  – інтенсивність льодоутворення в поверхневому шарі – кількість води, яка виділяється при кристалізації;  $S_n$  –теповіддача з водної поверхні;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

Параметр  $m$  при наявності даних спостережень за переохолодженням води біля поверхні ( $y \rightarrow 0$ ) може бути виражений так:

$$m = \lambda_T \left( \frac{t}{S_n} \right)^2. \quad (8.9)$$

Тоді 
$$S_0 = \frac{S_n}{\lambda_T t} \quad (8.10)$$

При відсутності спостережень за переохолодженням поверхні води величину  $S_0$  приблизно можна визначити за графіком у залежності від швидкості вітру і теплообміну поверхні води (рис.8.1).

А—область переважного утворення внутрішньоводного льоду ( $S_0 < 1.0 \text{ Вт/м}^2$ )  
 Б—область переважного утворення поверхневого льоду ( $S_0 > 1.0 \text{ Вт/м}^2$ ).

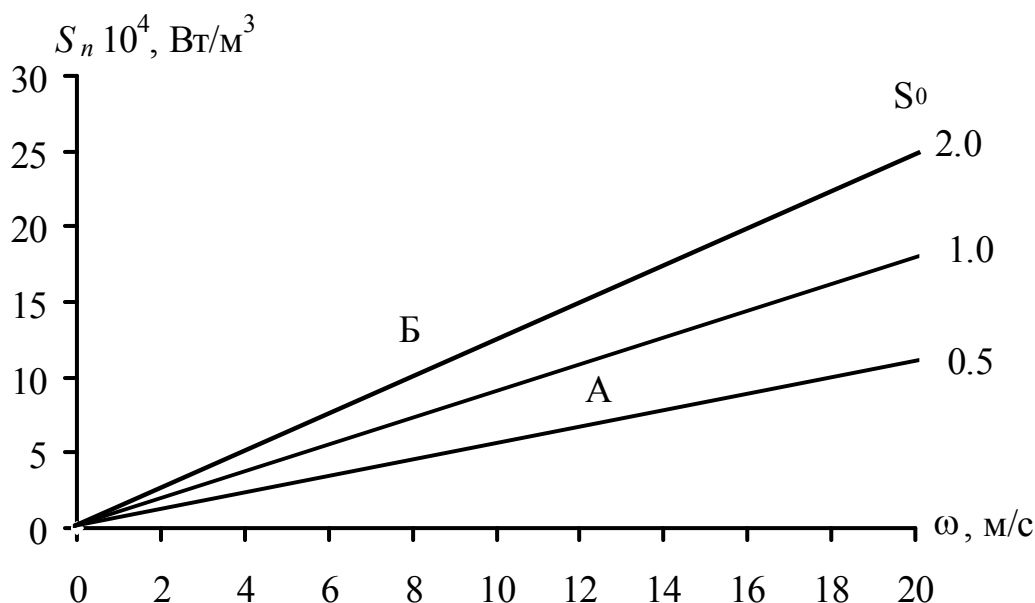


Рисунок 8.1 – Залежність інтенсивності льодоутворення у поверхневому шарі води  $S_0$  від швидкості вітру  $\omega$  і тепловтрат  $S_g$

Розраховані значення  $S_0$  дозволяють не тільки вирішити питання про роль внутрішньоводного чи поверхневого льоду в процесі встановлення льодоставу, але й оцінити тривалість періоду замерзання.

Тривалість процесу льодоутворення визначається від моменту появи льоду до встановлення льодоставу. Чим довше триває цей процес, тим імовірніше утворення внутрішньоводного льоду.

Залежність тривалості періоду замерзання від інтенсивності льодоутворення в поверхневому шарі  $S_0$  наведена на рис. 8.2.

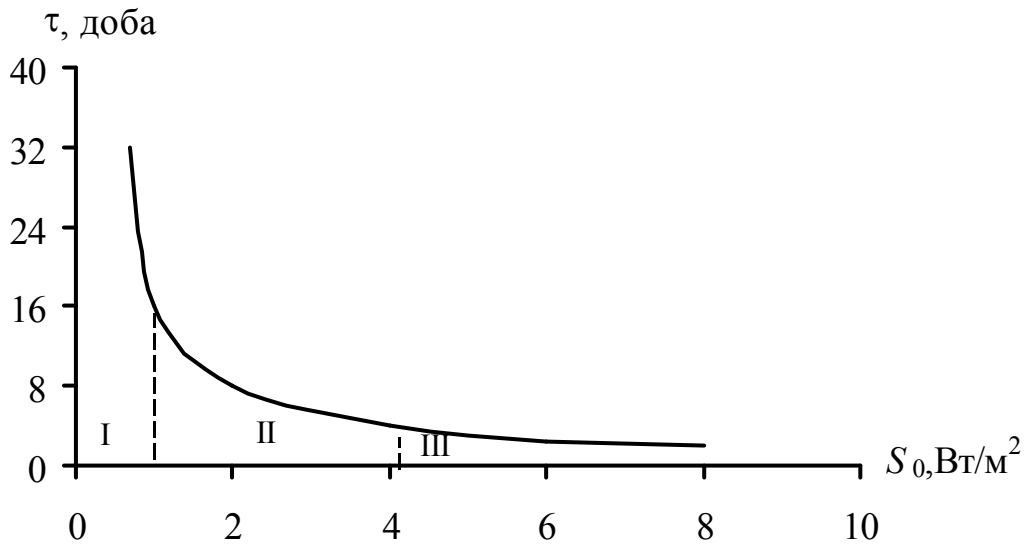


Рисунок 8.2 – Залежність тривалості періоду замерзання від інтенсивності льодоутворення у поверхневому шарі  $S_0$

На рис.8.2 можна виділити три ділянки: I – переважне утворення шуги; II – порівняно тривале утворення поверхневого льоду; III – швидке утворення суцільного льодоставу.

### 8.5 Розрахунок витрати шуги

У річному потоці, де утворюється шуга, розглянемо ділянку  $dx$ , яка обмежена двома створами. Через перший верхній створ входить кількість шуги (питома витрата)  $q_{ш}$ , а через створ виходить  $q_{ш} + d q_{ш} / dx$ . Утворення шуги у кількості  $d q_{ш} / dx$  визначається тепловіддачею з водної поверхні, яка дорівнює  $\sum_1^n S$  (за рахунок випромінювання, випаровування, конденсації, теплообміну з атмосферою тощо).

Рівняння теплового балансу для ділянки  $dx$  має вигляд:

$$L_{кр} d q_{ш} / dx = \sum_1^n S, \quad (8.11)$$

де  $L_{кр}$  – питома теплота льодоутворення.

Якщо розділити змінні у рівнянні (8.11) маємо:

$$dq_{ш} = \left( \sum_1^n S / L_{кр} \right) dx \quad (8.12)$$

Проінтегруємо це рівняння у межах від  $q_{ш_0}$

$$\int_{q_{ш_0}}^{q_{ш}} dq_{ш} = \frac{\sum_1^n S}{L_{кр}} \int_0^l dx \quad (8.13)$$

де  $q_{ш_0}$  – кількість шуги (питома витрата) у першому створі на ділянці річки ( $x=0$ );  $q_{ш}$  – теж саме у другому створі ( $x=l$ );  $l$  – довжина ділянки річки.

Після інтегрування одержимо:

$$q_{ш} = q_{ш_0} + \left[ \left( \sum_1^n S \right) / L_{кр} \right] l, \quad (8.14)$$

Якщо  $x=0$ ,  $q_{ш_0} = 0$ , тобто початок ділянки річки співпадає з нульовою ізотермою, то

$$q_{ш} = \left[ \left( \sum_1^n S \right) / L_{кр} \right] l \quad (8.15)$$

З урахуванням ширини потоку  $B$  рівняння (8.15) має вигляд:

$$Q_{ш} = \left[ \left( \sum_1^n S \right) / L_{кр} \right] \cdot F_{ш}, \quad (8.16)$$

де  $Q_{ш}$  – витрата шуги наприкінці ділянки річки;  $F_{ш}$  – площа, на якій утворюється шуга. Точність розрахунку витрати шуги за формулою (8.16) залежить від надійності визначення тепловіддачі з водної поверхні, яка змінюється за довжиною ділянки у зв'язку з різною щільністю шугової маси.

Розрахунок кількості шуги на річці може бути зроблений на підставі регіональних емпіричних залежностей, для одержання яких

використовуються наявні спостереження і середня добова температура повітря.

О.М. Чижев для місячного стоку шуги  $Q_{ш}$  одержав залежність:

$$Q_{ш} = \alpha (\sum \theta_2)^2 \quad (8.17)$$

Більш узагальненою є формула В.А. Милошевича:

$$Q_m = \frac{0.87V(\sum \theta_2)^{0.84}}{L_{\lambda}}, \quad (8.18)$$

де  $Q_{ш}$  – середня добова витрата шуги;  $t$  – середні добові температури за час добігання до розрахункового створу, розраховані в припущенні, що швидкість руху шуги дорівнює поверхневій швидкості  $V$ . Зменшення швидкості при встановленні льодоставу на нижній ділянці визначається за формулою:

$$V = 1.11V_c \frac{F}{F_n}, \quad (8.19)$$

де  $F$  і  $F_n$  – відповідно площі водної поверхні до утворення підпору і при підпорі при рівних витратах;  $V_c$  – швидкість до утворення підпору.

Всі емпіричні залежності (формули) побудовані на припущенні, що результуюча теплового балансу може бути охарактеризована температурами повітря. Однак варто враховувати, що значний вплив на розподіл шуги по довжині річки має перенесення шуги течією і винесення її притоками.

Для водойм з уповільненим водообміном (озеро) максимальна можлива кількість шуги  $Q_{ш}$  може бути розрахована для початкового моменту, якщо відомий теплообмін з одиниці водної поверхні  $S$ , як

$$Q_{ш} = \frac{S \cdot F}{L_{\lambda}}, \quad (8.20)$$

де  $F$  – площа водойми.

При цьому передбачається, що перемішування перешкоджає змерзанню шуги в поверхневий лід. Але вже в наступний момент часу якась частина водної поверхні буде зайнята шугою і втрати тепла будуть відбуватися не з усієї площі  $F$ .



Ступінь покриття водної поверхні шугою  $\alpha$  також може бути оцінений з урахуванням теплообміну водної поверхні. Якщо вважати, що вага льоду на одиницю площі шугових скупчень  $d$ , то кількість шуги, що утворилась в одиницю часу, буде

$$Q_{ш} = \frac{\alpha \cdot d \cdot F}{\tau}, \quad (8.21)$$

де  $\tau$  – час утворення шуги.

З урахуванням (8.21) маємо:

$$\alpha = \frac{S\tau}{L_d d}. \quad (8.22)$$

## 8.6 Теплобалансовий метод розрахунку зажорних явищ

**Зажори** утворюються в період встановлення льодоставу на річках, коли спостерігається утворення і перенесення потоком значних мас шуги, при льодоставі на ділянках річок нижче ополонок, а також у нижніх б'єфах ГЕС. Від різного сполучення умов утворення і транзиту шуги залежить імовірність виникнення, місце формування, а також масштаби зажорних явищ.

Утворюються зажори внаслідок великої швидкості і турбулентності потоку, що обумовлюють виникнення шуги й утруднюють утворення льодяного покриву, а також малої механічної міцності шуги. На ділянках з різким зменшенням швидкості потоку шугові скупчення утворюють шугольодяний покрив. При посуванні льоду відбувається динамічне ущільнення і деформація шуго-льодяного покриву, що спричиняє зменшення водного перерізу і зв'язане з цим підвищення рівня води.

Вихідним рівнянням для розрахунку витрати шуги  $Q_{ш}$  (кг/с) при відсутності спостережень є рівняння, отримане О.М.Чижовим:

$$Q_{ш} = \left(1 - e^{\frac{S\tau}{La}}\right) VaB, \quad (8.23)$$

де  $e$  – основа натурального логарифма;  $S$  – густина теплового потоку, Вт/м<sup>2</sup>;  $\tau$  – час добігання льодових утворень від нульової ізотерми до крайки льоду;  $L$  – питома теплота льодоутворення, Дж/кг;  $a$  – кількість льоду на

одиницю поверхні,  $\text{кг/м}^2$ ;  $V$  – середня швидкість шугоходу на ділянці льодоутворення,  $\text{м/с}$ ;  $B$  – ширина річки,  $\text{м}$ .

Розрахунок густини теплового потоку на водній поверхні за період охолодження і замерзання виконується за рівнянням теплового балансу:

$$S = \pm S_{TA} - S_{BK} \pm S_R + S_{KE} + S_{TD} - S_{OP}, \quad (8.24)$$

де  $S_{TA}$  – турбулентний теплообмін на поверхні води;  $S_{BK}$  – втрати тепла на випаровування;  $S_R$  – радіаційний теплообмін поверхні води;  $S_{KE}$  – приплив тепла за рахунок сил тертя води;  $S_{TD}$  – приплив тепла від ґрунту дна;  $S_{OP}$  – втрати тепла на танення твердих опадів.

Складники рівняння розраховують за формулами, що наводяться в розділі 3.

Кількість льоду, що припадає на одиницю поверхні шугових скупчень ( $\text{кг/м}^2$ ), розраховується:

1. За залежністю, запропонованою Р.В.Донченком,

$$a = 4340 \sqrt{\frac{Q}{ncB}}, \quad (8.25)$$

де  $Q$  – витрата води,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $n$  – параметр шорсткості;  $c$  – коефіцієнт Шезі.

2. За залежністю, отриманою В.П.Бердяніковим,

$$a = \frac{I H B}{4 \Delta_H + I B}, \quad (8.26)$$

де  $I$  – уклон, ‰;  $H$  – глибина,  $\text{м}$ ;  $\Delta_H$  – напруга, що дорівнює  $0.15-0.30 \text{ т/м}^2$  у залежності від довжини ділянки льодоутворення.

Час добігання льодяних утворень від нульової ізотерми до крайки льоду обчислюється з урахуванням довжини ділянки льодоутворення  $l_n$  і швидкості руху льоду  $V$ , що дорівнює поверхневій швидкості течії води:

$$\tau = \frac{l_n}{V}. \quad (8.27)$$

Положення створу нульових температур обчислюється за формулою:

$$l_0 = \frac{\rho C t a}{B S}, \quad (8.28)$$

де  $\rho$  – густина води,  $\text{кг/м}^3$ ;  $C$  – теплоємність води,  $\text{Дж/кг}^\circ\text{C}$ ;  $B$  – ширина ділянки, м.

Розрахунок кількості льоду (кг) на зазорній ділянці виконуються за формулою, що враховує стік льоду за період формування зазору:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (8.29)$$

де  $M$  – добовий стік льоду;  $M_i = 86400 \cdot Q_{ui}$ ;  $n$  – кількість днів формування зазору;  $Q_{ui}$  – витрата шуги.

Якщо відома зміна тепловтрат акваторії водойми в залежності від розвитку льодових явищ і зміни  $d$  та  $\alpha$  за кожну добу, можна приблизно оцінити загальну кількість шуги, що утворюється за період замерзання.

## 8.7 Ополонки та їх розрахунок

Ополонки – простір чистої води серед льодяного покриву, утворений під впливом динамічних та термічних чинників. Існування ополонки термічного походження спостерігається у витоках річок, у нижніх б'єфах ГЕС, на перекатах рівнинних річок, за довгими і глибокими плесами, на ділянках скиду теплих промислових вод.

Ополонки гідродинамічного походження існують за рахунок механічної дії потоку, що перешкоджає льодоутворенню, і за рахунок гідродинамічного нагрівання потоку.

За режимом ополонки бувають стійкі, існуючі протягом зими, і нестійкі, які періодично утворюються, а потім замерзають.

Ополонки, обумовлені гідродинамічним режимом, можуть існувати тільки при визначній швидкості, що забезпечує виділення достатньої для підтримки ополонки кількості тепла. Критична швидкість, при якій можливе існування такої ополонки, може бути визначена на підставі рівняння теплового балансу. Вважаємо, що радіаційний баланс дорівнює нулю і весь потік тепла, що йде в атмосферу з поверхні ополонки, виражається як

$$S = \alpha(t - \theta_2), \quad (8.30)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $\theta_2$  – температура повітря на висоті 2 м;  $t$  – температура води.

Віддача тепла ополонкою складається з теплообміну з дном  $S_{\text{он}}$  та гідродинамічного нагрівання  $S_{\text{ке}}$ :

$$S_{ke} = 9.81 \cdot \rho \cdot V_k \cdot I \cdot H \quad (8.31)$$

Температура води  $t$  у цей час дорівнює нулю, тому рівняння (8.30) має вигляд:

$$S = -\alpha\theta_2 \quad (8.32)$$

Підставивши (8.31) у (8.32) маємо:

$$S_{\partial n} + 9.81 \cdot \rho \cdot V_k \cdot I \cdot H = -\alpha\theta_2 \quad (8.33)$$

Звідки

$$V_k = \frac{-(\alpha\theta_2 + S_{\partial n})}{9.81 \cdot \rho \cdot I \cdot H} \quad (8.34)$$

де  $V_k$  – критична швидкість;  $S_{\partial n}$  – теплообмін з дном;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $\rho$  – густина води;  $I$  – уклон;  $H$  – глибина. При швидкості течії більш ніж  $V_k$  ополонка буде існувати.

Але в дійсності тепловіддача поверхні ополонки складається не тільки з  $S_{\partial n}$  і  $S_{ke}$ , але і з тепла, що виділяється при утворенні льоду. Радіаційний баланс поверхні води  $R$  може не дорівнювати нулю, і тоді для розрахунку критичної швидкості потрібний більш детальний розрахунок складників теплового балансу.

Довжина ополонки розраховується за рівнянням теплового балансу (7.8):

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sum_1^n S}{C \cdot \rho \cdot q_e}, \quad (8.35)$$

де  $q_e$  – питома витрата води, м<sup>2</sup>/год ( $q_e = \frac{Q}{B}$ );  $Q$  – витрата води, м<sup>3</sup>/с;  $B$  – ширина річки, м;  $C$  – питома теплоємність, 4.2·10<sup>3</sup> Дж/кг·°С;  $\rho$  – густина води, кг/м<sup>3</sup>,  $\sum_1^n S$  – теплообмін водної поверхні з атмосферою, Вт/м<sup>2</sup>, який складається з радіаційного балансу, тепловіддачі на випаровування та конвективного теплообміну.

У зимових умовах усі складники рівняння мають від’ємний знак – відбувається тепловіддача від водної поверхні в атмосферу. Температура

води за довжиною ополонки буде знижуватись і на відстані  $L$  дорівнює довжині  $\Delta x$ , де відбувається зниження температури на  $\Delta t = 0 - t_g$ .

До розрахункових формул входять температура поверхні води  $t_n$  та тиск насиченої водяної пари  $e_0$ , який залежить від  $t_n$ . Діапазон зміни температури поверхні води  $t_n$  можна взяти, як сталі значення, яке дорівнює середньому значенню температури на ділянці  $\Delta x$ :

$$t_n = \frac{t_g + 0}{2} = 0.5 t_g \quad (8.36)$$

Довжина ополонки обчислюється за формулою:

$$\Delta x = \frac{\Delta t \cdot C \cdot \rho \cdot q_g}{\sum_l^n S} \quad (8.37)$$

### ***Питання для самоконтролю***

1. Основні умови утворення льоду на річках та водоймах.
2. Умови початку льодоутворення за Л.Г.Шуляковським.
3. В чому полягає метод визначення утворення внутрішньоводного льоду?
4. Як розрахувати кількість шуги?
5. Основні фактори утворення ополонки.
6. Як розраховується довжина ополонки?

## РОЗДІЛ 9

### ФОРМУВАННЯ ЛЬОДЯНОГО ПОКРИВУ ТА РОЗРАХУНКИ ЙОГО ТОВЩИНИ

#### 9.1 Процеси утворення льодяного покриття

Льодостав на річках починається з утворення льодяних перемичок внаслідок зупинки і замерзання плавучого льоду у сприятливих для цього місцях – у місцях зменшення швидкості течії, розташування островів, поворотів русла та інш.

Для утворення достатньої ширини заберегів і кількості льоду, потрібного для його зупинки в сприятливих для цього місцях русла, необхідна віддача деякої визначеної кількості тепла, що залежить від морфометричних характеристик русла і гідравлічних умов. Для того, щоб крижини змерзлися й утворилася льодяна перемичка, що означає початок льодоставу, необхідно, щоб крижини були досить великих розмірів і змерзання відбувалося з необхідною інтенсивністю, а температура повітря була б в цей період досить низькою.

Температура повітря, при якій відбувається змерзання криги та встановлюється льодяна перемичка, називається **критичною температурою ( $\theta_{кр}$ )**.

Для початку льодоставу на ділянці річки необхідна наявність двох умов. По-перше, тепловіддача водного потоку повинна досягати значення, необхідного для утворення широких заберегів та накопичення плавучого льоду у такій кількості, щоб було можливим встановлення льодяної перемички. По-друге, температура повітря повинна бути не вище критичної.

Відразу після утворення перемички просування крайки нагору відбувається головним чином за рахунок крижин, що є на ділянці між сусідніми перемичками. Швидкість просування крайки льодяного покриття залежить від густоти льодоходу, товщини крижин, від витрати шуги і від швидкості течії, а також від довжини ділянки льодоходу.

Подальше просування крайки відбувається за рахунок льодоутворення на ділянці між перемичками. Швидкість її просування залежить від відстані від верхньої перемички, від інтенсивності тепловіддачі і від швидкості течії.

За відносну характеристику тепловіддачі береться сума середніх добових від'ємних температур повітря від дати появи плавучого льоду –  $\sum \theta^-$ . Тепловіддача чи величина  $\sum \theta^-$  і величина  $\theta_{кр}$  залежать від морфометричних характеристик русла і гідравлічних умов у розглянутий час на даній ділянці річки.

Рівні води характеризують морфометричні і гідравлічні умови на ділянках, а також теплоємність водної маси, і чим більше рівень води, тим більше водна маса, тим пізніше настає переохолодження води за глибиною. Необхідні віддача тепла та критична температура повітря встановлюються за матеріалами багаторічних спостережень за залежностями вигляду:

$$(\Sigma\theta^-) = f(H_{np}), \quad \theta_{кр} = f(H_{np}), \quad (9.1)$$

$$(\Sigma\theta^-) = f(H_{нл}), \quad \theta_{кр} = f(H_{нл}),$$

де  $H_{np}$  – передльодоставний рівень,  $H_{нл}$  – рівень води у день появи плавучого льоду. При відсутності даних спостережень використовують формулу

$$\Sigma\theta^- = -10.3V^{1.22}B^{0.39}; \quad \theta_{кр} = 0.65Vb^{0.5}, \quad (9.2)$$

де  $V$  – середня швидкість течії, м/с;  $B$  – ширина річки, м.

Для визначення  $\Sigma\theta^-$  та  $\theta_{кр}$  складені номограми.

## 9.2 Початкова товщина льоду

Товщина льоду в момент встановлення льодоставу в залежності від характеру замерзання може змінюватись по площі чи за довжиною водойми у широких межах.

Розрахунок початкової товщини льоду  $h_n$  для водойм можна визначити із залежності:

$$h_n = 1.39\sqrt{K}, \quad (9.3)$$

де  $K$  – коефіцієнт турбулентного перемішування,  $\text{см}^2/\text{с}$ .

В.В.Піотрович при розрахунках наростання товщини льоду при повільному характері встановлення льодоставу на водоймах рекомендує брати початкову товщину в момент встановлення льодоставу рівною нулю, якщо льодостав виникає без льодоходу, чи рівною 0.03 м при слабкому льодоході, що передував льодоставу. При наявності шуги під льодом розраховується додаткове збільшення товщини льоду за рахунок шуги  $\Delta h_{ш}$ .

$$\Delta h_{ш} = \frac{\Delta h}{1 - \gamma}, \quad (9.4)$$

де  $\Delta h$  – розраховане наростання товщини льоду без шуги;  $\gamma$  – частина об'єму шугового скупчення, зайнятого кристалами льоду.

Уперше розрахункова залежність для визначення початкової товщини льоду в залежності від швидкості течії  $V$  була запропонована К.І.Росінським:

$$h_n = 0.5V. \quad (9.5)$$

Існує ряд регіональних залежностей для визначення початкової товщини в залежності від суми від'ємних температур і тепловтрат з водної поверхні (Нежиховський Р.О.).

### 9.3 Наростання товщини льоду

Наростання товщини льоду визначається характером льодоутворення, метеорологічними умовами, які визначають тепловіддачу в атмосферу і гідрологічними характеристиками (швидкість течії, глибина).

**Льодяний покрив – регулятор теплообміну.** Роль суцільного льодяного покриву дуже істотна у льодовому режимі водойми, тому що теплообмін між водою й атмосферою відбувається через товщу льоду і снігу, що покриває лід. Лід і сніг прозорий для короткохвильової радіації. В силу своїх фізичних властивостей льодяний покрив не тільки перешкоджає проникненню радіації у водойму та ізолює її від безпосереднього впливу метеорологічних факторів, але і є регулятором теплообміну, наростає при недостатці тепла у водоймі для покриття теплових втрат в атмосферу і тане, якщо втрати в атмосферу стають меншими, ніж приплив тепла від водної маси. Таким чином, льодяний покрив цілком порушує зв'язок між метеорологічними факторами і водоймою, регулює тепловий режим водойми.

Товщина льодяного покриву не залишається постійною як у часі, так і по площі чи по довжині водойми. Причинами, що впливають на зміну його товщини, у першу чергу є метеорологічні умови, що обумовлюють саме існування льоду. Зміна товщини льоду може відбуватися за рахунок намерзання і танення як верхньої, так і нижньої поверхні. Зверху товщина льоду може збільшуватися за рахунок примерзання мокрого снігу. На нижній поверхні лід наростає за рахунок тепловіддачі в атмосферу, примерзання шуги. Танення льоду може відбуватися за рахунок впливу тепла від дна, за рахунок гідродинамічного нагрівання.



**Вплив теплообміну з атмосферою.** Механізм наростання товщини льоду за рахунок теплообміну з атмосферою: на нижній поверхні льодяного покриву постійно зберігається нульова температура, сюди надходить потік тепла від водойми, з верхньої поверхні іде потік тепла, що визначається метеорологічними умовами – температурою повітря, швидкістю вітру, радіаційним балансом. Різниця цих потоків компенсується за рахунок теплоти кристалізації.

Тепловий потік, що надходить до нижньої поверхні льоду  $S_{\epsilon}$ , залежить не від товщини льоду, а від теплового стану водяної товщі і коефіцієнта її температуропровідності:

$$S_{\epsilon} = a_{\epsilon} \frac{dt_{\epsilon}}{dH_{\epsilon}} \quad (9.6)$$

де  $a_{\epsilon}$  – коефіцієнт температуропровідності води;  $\frac{dt_{\epsilon}}{dH_{\epsilon}}$  – зміна температури води за глибиною водойми.

Тепловий потік крізь товщину льоду в атмосферу визначається теплопровідністю льоду і градієнтом температури в ньому:

$$S_{\lambda} = -\lambda_{\lambda} \frac{dt_{\lambda}}{dh_{\lambda}} \quad (9.7)$$

при стаціонарному режимі

$$S_{\lambda} = -\lambda_{\lambda} \frac{t_{\lambda}}{h_{\lambda}}, \quad (9.8)$$

де  $\lambda_{\lambda}$  – коефіцієнт температуропровідності льоду;  $t_{\lambda}$  – температура поверхні льоду;  $h_{\lambda}$  – товщина льоду.

Якщо тепловий потік  $S_{\lambda}$  більший, ніж тепловий потік  $S_{\epsilon}$ , буде відбуватися наростання товщини льоду на нижній його поверхні.

При постійній товщині льоду чим нижче температура поверхні льоду, тим більше потік теплоти в атмосферу, і чим тонше лід, тим більше температурний градієнт у товщі льоду, тим інтенсивніше буде відбуватися його наростання. Таким чином, крім метеорологічних умов має значення і початкова товщина льоду.

Якщо метеорологічні умови не змінюються і у водоймі встановився стаціонарний тепловий режим, то товщина льоду прагне до значення

$$h_l = -\frac{t_l \lambda_l}{S_l}. \quad (9.9)$$

Наростання чи танення льоду знизу відбувається до таких меж, при яких здатність льоду пропускати тепло від води до атмосфери відповідає припливу тепла до нижньої поверхні льоду.

У мілководних водоймах при стаціонарному термічному режимі  $S_s = S_{дно}$  – товщина льоду регулюється і тепловіддачею дна. При великій тепловіддачі дна лід тонше за інших рівних умов.

**Вплив розподілу швидкості течії.** У проточній водоймі при  $t=0^\circ\text{C}$  приплив тепла до нижньої поверхні льоду складається з тепловіддачі дна водойми і тепла, що виникає в результаті гідродинамічного нагрівання потоку.

Використовуючи формули (3.26) та (9.9), відношення товщини льодяного покриття  $h_1/h_2$  на ділянках з різними швидкостями течії  $V_1$  і  $V_2$  за інших умов має вигляд:

$$h_1 / h_2 = \frac{S_{дно} + 9.8 \cdot \rho \cdot I \cdot V_1 \cdot H}{S_{дно} + 9.8 \cdot \rho \cdot I \cdot V_2 \cdot H} \quad (9.10)$$

За довжиною водотоку зміна товщини льоду пов'язана з розподілом областей нагрівання й охолодження води, де змінюється гідравлічний режим (місце переходу з плеса на перекат, різке звуження русла).

**Вплив снігу на льоду.** Сніг, що накопичується на льодяному покритті водойми, ізолює лід від безпосереднього теплообміну з атмосферою, зменшує втрати тепла, знижує амплітуду коливань температури поверхні льоду та градієнт температури його товщини.

Лід без снігу характеризується більш високими значеннями градієнта температури в його товщині, а швидка зміна метеоумов веде до різких температурних коливань.

Покритий снігом льодяний покрив є двошаровим тілом з різними коефіцієнтами теплопровідності льоду  $\lambda_l$  і снігу  $\lambda_{сн}$ , товщина якого замінюється еквівалентною товщиною:

$$h_{екв} = h_l + h_{сн} \frac{\lambda_l}{\lambda_{сн}}, \quad (9.11)$$

де  $h_{екв}$  – еквівалентна товщина льоду;  $h_l$  – товщина льоду;  $h_{сн}$  – товщина снігу.

Коефіцієнт теплопровідності двошарового покриву сніг-лід буде

$$\lambda_{екв} = \frac{\lambda_{л}}{1 + \frac{\lambda_{л}}{\lambda_{сн}} \cdot \frac{h_{сн}}{h_{л}}}. \quad (9.12)$$

Якщо сніг неоднорідний за щільністю, то еквівалентна товщина льоду повинна включати еквівалентну товщину відповідних шарів. Так, при двошаровому сніжному покриві на льоді еквівалентна товщина льоду буде:

$$h_{екв} = h_{л} + \lambda_{л} \left( \frac{h_{сн_1}}{\lambda_{сн_1}} + \frac{h_{сн_2}}{\lambda_{сн_2}} \right) \quad (9.13)$$

Наявність снігу на льоду сповільняє його наростання тим сильніше, чим більше висота снігу і чим менше його щільність. Тому на водоймі за інших умов товщина льоду буде менше на ділянках покритих снігом.

При стаціонарному термічному режимі потік  $S_{лс}$ , що проходить крізь снігольодяну товщу, аналогічно (9.8) виражається

$$S_{лс} = \frac{\lambda_{л}}{1 + \frac{\lambda_{л}}{\lambda_{сн}} \cdot \frac{h_{сн}}{h_{л}}} \left( \frac{-t_{сн}}{h_{л}} \right), \quad (9.14)$$

звідки

$$h_{л} = \frac{\lambda_{л}}{1 + \frac{\lambda_{л}}{\lambda_{сн}} \cdot \frac{h_{сн}}{h_{л}}} \left( \frac{-t_{сн}}{S_{лс}} \right). \quad (9.15)$$

де  $t_{сн}$  – температура поверхні снігу на льоду.

#### 9.4 Методи розрахунку наростання товщини льоду

Для одержання розрахункових формул використовують такі методи:

1. Емпіричних зв'язків окремих факторів, що визначають наростання товщини льоду, з товщиною льоду чи його приросту за деякий інтервал часу.

2. Аналітичні методи складання рівнянь, що описують потік тепла, який надходить до нижньої поверхні льоду, і потік тепла, який іде в атмосферу з поверхні льоду (снігу). При спільному розв'язанні цих рівнянь щодо товщини льоду вилучається невідома температура льоду (снігу). Температура поверхні льоду чи снігу на льоду може бути визначена з рівняння теплового балансу верхньої поверхні льоду (снігу) і потім вводиться в розрахункову формулу для визначення товщини льоду.

**Метод емпіричних залежностей.** Емпіричні формули мають такий вигляд:

$$h_{\text{л}} = \varphi \left( \sum_0^{\tau} \theta_2 \right)^n \quad (9.16)$$

де  $h_{\text{л}}$  – товщина льодяного покриву;  $\sum_0^{\tau} \theta_2$  – сума середніх добових значень негативних температур повітря на висоті 2м від початку формування льодяного покриву за період  $\tau$ ;  $\varphi$  та  $n$  – емпіричні коефіцієнти, визначаються на підставі графічного зіставлення  $h_{\text{л}}$  і  $\sum_0^{\tau} \theta_2$ .

Формули типу (9.16) отримані за матеріалами спостережень і через коефіцієнти  $\varphi$  та  $n$  відображають у середньому ті умови, що мали місце під час спостережень (температуру води, висоту та щільність снігового покриву, швидкість течії води під льодом, глибину водойми тощо), не відображаючи функціональні зв'язки між ними. Однак у різних фізико-географічних умовах хід температури повітря і поверхні льоду мають неоднаковий характер навіть на окремих ділянках річок та водойм, що і підтверджують різні чисельні коефіцієнти  $\varphi$  та  $n$ , отримані в емпіричних формулах (формули Ф.І.Бидіна, Б.Д.Зайкова, В.В. Піотровича, та ін.).

**Аналітичні методи.** Основний напрям отримання розрахункових формул для розрахунку товщини льоду було закладено норвезьким вченим О.Девіком (1931 р.).

При відсутності снігу на льоду і припливу тепла від дна швидкість наростання льодяного покриву може бути виражена диференціальним рівнянням льодоутворення:

$$\frac{dh_{\text{л}}}{d\tau} = \frac{1}{L_{\text{кр}} \rho_{\text{л}}} (S_{\text{л}} - S_{\text{с}}). \quad (9.17)$$

Це рівняння може бути отримане з умов впливу теплообміну з атмосферою на наростання товщини льоду: якщо тепловий потік, що іде від поверхні льоду в атмосферу  $S_{\text{л}}$  більше ніж тепловий потік від маси води водойми до нижньої поверхні  $S_{\text{в}}$ , то при цьому за час  $d\tau$  відбувається наростання товщини льоду  $dh_{\text{л}}$ , що супроводжується виділенням теплоти кристалізації  $S_{\text{к}}$ :

$$S_{\text{к}} = L_{\text{кр}} \rho_{\text{л}} \frac{dh_{\text{л}}}{d\tau}, \quad (9.18)$$

де  $L_{\text{кр}}$  – питома теплота льодоутворення (кристалізації);  $\rho_{\text{л}}$  – щільність льоду.

Рівняння теплового балансу нижньої поверхні льоду (рівняння льодоутворення) буде мати вигляд:

$$S_{\text{л}} - S_{\text{в}} = S_{\text{к}}, \quad (9.19)$$

якщо (9.19) підставити в (9.18), то будемо мати диференціальне рівняння льодоутворення (9.17).

Якщо прийняти, що градієнт температури в товщі льоду постійний, а втрати тепла цілком покриваються за рахунок виділення теплоти льодоутворення, тобто  $S_{\text{в}}=0$ , а температура нижньої поверхні льоду дорівнює нулю, то можна записати:

$$S_{\text{л}} = -\lambda_{\text{л}} \frac{t_{\text{л}}}{h_{\text{л}}}, \quad (9.20)$$

тоді рівняння (9.17) має вигляд:

$$\frac{dh_{\text{л}}}{d\tau} = -\frac{h_{\text{л}}}{L_{\text{кр}} \rho_{\text{л}}} \left( \frac{-t_{\text{л}}}{h_{\text{л}}} \right) \quad (9.21)$$

Товщину льоду, що утворюється за час  $\tau$  з моменту замерзання, можна отримати, якщо розділити змінні і проінтегрувати (9.21) у межах  $(0, h)$  і  $(0, \tau)$

$$\int_0^h h_{\text{л}} dh_{\text{л}} = \frac{\lambda_{\text{л}}}{L_{\text{кр}} \rho_{\text{л}}} \int_0^{\tau} (-t_{\text{л}}) d\tau \quad (9.22)$$

після інтегрування одержимо

$$h_l = \sqrt{\frac{2\lambda_l}{L_{кр}\rho_l}(-\bar{t}_l)\tau}. \quad (9.23)$$

де  $(-\bar{t}_l)$  – середня температура льоду за розрахунковий період  $\tau$ .

Для льодяного покриву зі снігом за умови, що двошаровий покрив сніг-лід замінений еквівалентною товщиною, а приплив тепла від води і температура нижньої поверхні льоду дорівнюють нулю, диференціальне рівняння наростання льодяного покриву набере вигляду:

$$\frac{dh_l}{d\tau} = \frac{\lambda_{сн}(-t_{сн})}{\left(h_l + \frac{\lambda_l}{\lambda_{сн}}h_{сн}\right)L_{кр}\rho_l} \quad (9.24)$$

Інтегрування (9.24) у межах  $h_l \in [h_n, h_k]$  і  $t \in [0, \tau]$  і за умови, що величини  $h_{сн}$ ,  $\lambda_{сн}$  і  $\lambda_l$  – сталі, після перетворень одержимо:

$$h_k = -\frac{\lambda_l}{\lambda_{сн}}h_{сн} + \sqrt{\left(h_n + \frac{\lambda_l}{\lambda_{сн}}h_{сн}\right)^2 - \frac{2\lambda_l(-t_{сн})}{L_{кр}\rho_l}\tau} \quad (9.25)$$

де  $h_n$  – початкова товщина льоду;  $h_k$  – товщина льоду на кінець розрахункового інтервалу  $\tau$ .

У практичних розрахунках формули (9.23) та (9.25) не використовуються через відсутність спостережень за температурою льоду або снігу. Температура поверхні льоду чи снігу на льоду визначається з рівняння теплового балансу верхньої поверхні снігового покриву і вводиться в розрахункову формулу (9.25) для визначення товщини льоду.

Основними складниками теплообміну на верхній поверхні снігового покриву є тепловіддача конвекцією, випаровуванням, а також приплив тепла від сонячної радіації. Найбільше значення має конвективний теплообмін, останні складники взаємно компенсують одне одного. При таких умовах рівняння має вигляд:

$$L_{кр}\rho \frac{dh_l}{d\tau} = \alpha_{сн}(t_{сн} - \theta_2), \quad (9.26)$$

де  $\alpha_{сн}$  – коефіцієнт тепловіддачі від поверхні снігу до повітря;  $t_{сн}$  – температура снігового покриву;  $\theta_2$  – температура повітря на висоті 2м.

У рівнянні (9.26) задається температура повітря  $\theta_2$ . Невідома  $t_{сн}$  визначається через відомі величини. Для цього використовується той факт, що в середньому за тривалий час кількість теплоти, що проходить крізь сніговий покрив, дорівнює кількості теплоти, що проходить крізь льодяний покрив. Тоді

$$\frac{\lambda_{сн}(t_{л} - t_{сн})}{h_{сн}} = \frac{\lambda_{л}(t_{нн_{л}} - t_{л})}{h_{л}}, \quad (9.27)$$

де  $\lambda_{сн}$  та  $\lambda_{л}$  – коефіцієнт теплопровідності снігового та льодяного покриття;  $h_{сн}$  та  $h_{л}$  – товщина снігового покриття та льоду;  $t_{сн}$  – температура поверхні снігу;  $t_{л}$  та  $t_{нн_{л}}$  – температура верхньої та нижньої поверхні льоду.

Температура нижньої поверхні льоду прісних водойм та річок дорівнює нулю, рівняння (9.27) має вигляд:

$$\frac{\lambda_{сн}(t_{л} - t_{сн})}{h_{сн}} = -\frac{\lambda_{л}t_{л}}{h_{л}} \quad (9.28)$$

Вирішуючи це рівняння відносно  $t_{л}$ , маємо:

$$t_{л} = \frac{\frac{\lambda_{сн}}{h_{сн}} \cdot t_{сн}}{\frac{\lambda_{сн}}{h_{сн}} + \frac{\lambda_{л}}{h_{л}}} \quad (9.29)$$

Теплота, що проходить крізь льодяний покрив, дорівнює кількості теплоти, яка шляхом конвекції покидає снігову поверхню:

$$\alpha_{сн}(t_{сн} - \theta_2) = -\frac{\lambda_{л}}{h_{л}} \cdot t_{л} \quad (9.30)$$

Вирішуючи рівняння (9.29) та (9.30) маємо:

$$t_{сн} = \frac{-\theta_2}{1 + \frac{1}{\alpha_{сн} \left( \frac{h_{л}}{\lambda_{л}} + \frac{h_{сн}}{\lambda_{сн}} \right)}} \quad (9.31)$$

Підставимо рівняння (9.31) у рівняння (9.26) і маємо:

$$L_{кр} \rho_l \frac{dh_l}{d\tau} = \frac{-\theta_2}{\frac{1}{\alpha_{сн}} + \frac{h_{сн}}{\lambda_{сн}} + \frac{h_l}{\lambda_l}} \quad (9.32)$$

Якщо розділити змінні:

$$-\frac{\theta_2}{L_{кр} \cdot \rho_l} d\tau = \left( \frac{1}{\alpha_{сн}} + \frac{h_{сн}}{\lambda_{сн}} \right) dh_l + \frac{h_l}{\lambda_l} dh_l \quad (9.33)$$

Після інтегрування маємо:

$$-\frac{\theta_2}{L_{кр} \cdot \rho_l} (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2\lambda_l} (h_l^2 - h_{l_0}^2) + \left( \frac{1}{\alpha_{сн}} + \frac{h_{сн}}{\lambda_{сн}} \right) (h_l - h_{l_0}) \quad (9.34)$$

де  $h_{l_0}$  – товщина льоду на початок розрахункового періоду  $\tau_0$ .

Позначимо

$$\frac{\lambda_l}{\alpha_{сн}} + h_{сн} \frac{\lambda_l}{\lambda_{сн}} = A \quad (9.35)$$

Розв’язок рівняння (9.34) відносно  $h_l$  дає формулу для визначення товщини льодяного покриву:

$$h_l = -A + \sqrt{(A + h_{l_0})^2 - \frac{2\theta_2 \lambda_l}{L_{кр} \rho_l} (\tau - \tau_0)} \quad (9.36)$$

Якщо снігу немає:

$$h_l = -\frac{\lambda_l}{\alpha_l} + \sqrt{\left( \frac{\lambda_l}{\alpha_l} \right)^2 + h_{l_0}^2 + 2h_{l_0} \frac{\lambda_l}{\alpha_l} - \frac{2\theta_2 \lambda_l}{L_{кр} \rho_l} (\tau - \tau_0)} \quad (9.37)$$

При практичних розрахунках  $L_{кр}$  – питома теплота кристалізації;  $L_{кр} = 33.3 \cdot 10^4$  Дж/кг;  $\lambda_l$  – коефіцієнт теплопровідності льоду, дорівнює 2.24 Вт/м<sup>0</sup>С;  $\rho_l$  – щільність льоду – 917 кг/м<sup>3</sup>;  $\alpha_l$  – коефіцієнт тепловіддачі від поверхні льоду до повітря (при відсутності снігу на льоду) визначається за формулою (2.18); тепловіддачі від поверхні снігу до повітря – за формулою (2.19);  $\lambda_{сн}$  – коефіцієнт теплопровідності снігу визначається за формулами (1.34) та (1.35).



В.В.Піотрович одержав формули для розрахунку наростання товщини льоду на водоймах, температура поверхні льоду була розрахована також за рівнянням теплового балансу. При цьому прийнятий стаціонарний режим. У дійсності при різких змінах метеорологічних умов цього майже не спостерігається, але при нетривалому розрахунковому інтервалі схематизація процесу буде незначною, тому розрахунковий інтервал береться рівним 6 годинам. З огляду на криволінійний характер залежностей температури  $t_l$  і максимальної пружності водяної пари, товщини льоду і ефективного випромінювання, розрахунковий діапазон температури поверхні льоду (снігу) розбитий на п'ять інтервалів, всередині яких залежність вважається прямолінійною. Для кожного з діапазонів температури взяті постійні значення параметрів формули. Для полегшення розрахунків В.В.Піотрович склав таблиці. При необхідності в розрахункову товщину вводяться поправки на проточність водойми, наявність шуги біля нижньої поверхні льоду, висоту снігу на льоду, вплив сонячної радіації.

Л.Г.Шуляковський для водоймищ рекомендує формулу, отриману також шляхом інтегрування (9.34) з урахуванням припливу тепла від водойми  $S_6$  у припущенні, що температура нижньої поверхні льоду дорівнює  $0^0\text{C}$  і лід наростає від початкової товщини  $h_n$  з моменту  $\tau=0$ .

Температура поверхні снігу на льоду визначається з формули, отриманої на підставі аналізу теплового балансу поверхні:

$$t_c = \frac{\alpha\theta_2 + \alpha_0}{\frac{\lambda_l}{h_l + h_{cn} \frac{\lambda_l}{\lambda_{cn}}} + \alpha}, \quad (9.38)$$

а для льоду без снігу

$$t_l = \frac{\alpha\theta_2 + \alpha_0}{\frac{\lambda_l}{h_l} + \alpha}, \quad (9.39)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну і  $\alpha_0$  – питома тепловіддача снігольодяного покриву при  $\theta_2=t_l$ .

Розрахункова формула для визначення  $h_l$  має вигляд:

$$h_l = \sqrt{\left(h_n + \frac{\lambda_l}{\alpha} + h_{cn} \frac{\lambda_l}{\lambda_{cn}}\right)^2 - \frac{2\lambda_l\left(\theta_2 + \frac{\alpha_0}{\alpha}\right)}{L_{кр}\rho_l}\tau - \left(\frac{\lambda_l}{\alpha} + h_{cn} \frac{\lambda_l}{\lambda_{cn}}\right) - \frac{\Sigma S_6}{L_{кр}\rho_l}}, \quad (9.40)$$

де  $h_n$  – початкова товщина льоду;  $\alpha_0$  – розраховується в залежності від швидкості вітру  $\omega_{10}$  м/с та загальної  $N_z$  і нижньої  $N_n$  хмарності у балах за формулою:

$$\alpha_0 = d_1 + a(\omega_{10} - 1) + bN_z + cN_n, \quad (9.41)$$

де  $d_1$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – параметри, які визначаються по таблиці в залежності від температури повітря  $\theta_2$ .

Коефіцієнт теплообміну  $\alpha$  визначається за таблицею в залежності від швидкості вітру, суми температур  $\theta_2 + t_n$  і хмарності – нижньої і загальної.

Для визначення  $t_n$  задаються її значенням, рівним у першому наближенні середній температурі повітря за перший розрахунковий інтервал часу, за таблицями визначають  $\alpha_0$  і  $\alpha$  і розраховується  $t'_n$  за формулою (9.39) при товщині льоду  $h_n=0$ . За знайденими значеннями  $t'_n$  уточнюється значення  $\alpha$ .

Теплоприплив до нижньої поверхні льодяного покриву підраховується як сумарний за розрахунковий інтервал часу:

$$S_g = \alpha_n t, \quad (9.42)$$

де  $t$  – середня температура води на розглянутій ділянці;  $\alpha_n$  – коефіцієнт тепловіддачі від води до льоду.

Розрахунок можна вести по пентадам, але можна за границі розрахункового інтервалу приймати дати зміни висоти і щільності снігового покриву на льоду, вважаючи, що осереднення інших характеристик за ці проміжки часу не зробить істотного впливу на точність розрахунку товщини льоду.

### ***Питання для самоконтролю***

1. В чому полягає процес утворення льодяного покриву?
2. Поясніть роль теплообміну з атмосферою при наростанні товщини льоду.
3. Поясніть вплив снігового покриву на льоду при його наростанні.
4. В чому полягає метод емпіричних залежностей для розрахунку товщини льоду?
5. Як вирішується диференціальне рівняння льодоутворення при відсутності або наявності снігу на льоді?
6. Як визначається температура поверхні льоду чи снігу на льоду?
7. Які параметри входять у розрахункову формулу товщини льоду?

## РОЗДІЛ 10

### ТАНЕННЯ І РУЙНУВАННЯ ЛЬОДЯНОГО ПОКРИВУ

#### 10.1 Скресання річок та водойм

Скресання річок – тривалий процес, який визначається тепловими та механічними факторами. До теплових факторів належать сонячна радіація, приплив теплих водних мас, що характерно для річок, які течуть на північ. До механічних факторів відносяться дія течії води під льодом, вітер, підвищення рівня.

Раніше всього починає розтавати сніг на льоду, поверх нього появляється вода, яка постійно фільтрується в дрібні тріщини та послабляє спайку кристалів; лід стає менш стійким. Одночасно під дією теплоти спостерігається танення льоду біля берегів, які прогріваються швидше. Тут утворюються вузькі смуги води, вільні від льоду, називані *закраїнами*. У місцях з швидкою течією, де льодяний покрив має меншу товщину, утворюються відкриті простори чистої води – *промоїни*. Процес зруйнування льодяного покриву відбувається швидше на перекатах, що обумовлено рухомістю льоду – невеликими переміщеннями льодяного покриву на окремих ділянках річок. В результаті цього виникають простори вільної води серед льодяного покриву, називані *розводдями*.

Приплив талих вод та підвищення рівня у річках сприяє підняттю, розламуванню крижин та руху їх вниз за течією – починається *весняний льодохід*. Так скресають річки, що течуть з півночі на південь. Скресання їх починається знизу і переміщується вгору за течією. Льодохід дещо випереджає хвилю повені та проходить відносно спокійно. З верхів'їв річки припливають крижини, затримуються біля скопищ льоду, в результаті чого утворюються величезні *затори*. Останні спричиняють підвищення рівня води у річці вище місця затору та затоплюють значні площі.

Весняний льодохід здебільшого інтенсивніший, ніж осінній, бо в ньому бере участь велика маса води та льоду, рухаючись з великою швидкістю. Товща крижин під час весняного льодоходу може досягати 1 м і більше.

Свої особливості скресання мають малі річки. У лісовій зоні малі річки мають значне ґрунтове живлення, тому на них утворюється тонкий лід, покритий потужним сніговим покривом. Скресання таких річок проходить порівняно швидко після танення снігу.

На гірських ділянках річок скресання може відбуватися раніше, ніж спостерігається потепління, за рахунок енергії потоку. Якщо повинь рівнинної річки низька та розтягнута, інтенсивного льодоходу, як правило,

не буває, через те, що вплив теплових факторів перевищує вплив механічних. У гирлі річок головну роль у скресанні відіграє вітер.

Скресання водойм відбувається також під впливом теплових та механічних факторів (вітер, підйом рівня).

На малих, захищених від вітру водоймах, лід тане на місці без порушення суцільності. Це явище спостерігається на 8-15 днів пізніше скресання річок даного району.

Процес скресання великих водойм під дією вітру відбувається інтенсивніше. Спочатку спостерігається танення снігу та льоду біля берегів, тобто утворюються смуги відкритої води біля берегів – закраїни. Весняне підняття рівня сприяє відходу льоду від берега. Тобто лід починає рухатись. Останній супроводжується розводдями – ділянками відкритої води. Вітер та хвилювання здійснюють руйнування льодяного покриву, який ділиться на окремі поля. Під дією вітру починається льодохід, який може виходити на береги, нагромаджуючи лід, іноді висотою до 5-10 м. Звичайно основна маса льоду тане у водоймі і незначна кількість його виноситься річками, якщо водойми мають стік.

## 10.2 Розрахунок танення льоду

Метод розрахунку танення льодяного покриву прісних водойм та водотоків запропонував С.М.Булатов. Танення льодяного покриву є результат дії тепла сонячної радіації, яка поглинається товщею льодяного покриву, турбулентного теплообміну поверхні льоду з атмосферою, теплообміну внаслідок випаровування або конденсації, ефективного випромінювання та тепла, що надходить від води та поглинається нижньою поверхнею льодяного покриву.

Шар танення верхньої поверхні за добу  $\Delta h'$  розраховується за формулою:

$$\Delta h' = \frac{\Delta S'}{L_{\text{л}}^*} + \frac{S \left[ 1 - e^{-2.615(\Delta h')^{0.6}} \right]}{L_{\text{л}}^*} \quad (10.1)$$

$$\Delta S' = LE + P + I_{\text{эф}}, \quad (10.2)$$

де  $LE$  – теплообмін поверхні льоду з повітрям при випаровуванні або конденсації;  $P$  – турбулентний теплообмін льодяного покриву з повітрям;  $I_{\text{эф}}$  – ефективне випромінювання поверхні льоду;  $S$  – повний добовий приплив у лід тепла сонячної радіації (всі складники виражаються у

Дж/м<sup>2</sup>·д);  $L_{\text{л}}^*$  – об’ємна теплота танення льоду без рідкої фази, дорівнює  $3082 \cdot 10^5$  Дж/м<sup>2</sup>. Другий додток рівняння (10.1) є тепло сонячної радіації, яке поглинено шаром танення.

Повний добовий приплив сумарної сонячної радіації  $S$  визначається за формулою:

$$S = I_0 K_N (1 - r), \quad (10.3)$$

де  $I_0$  – максимальна густина потоку сумарної радіації, яка надходить на горизонтальну поверхню у заданий час на даній широті, Дж/м<sup>2</sup>·д;  $K_N$  – коефіцієнт послаблення радіації хмарністю,  $r$  – альbedo підстильної поверхні. Для всього періоду танення льодяного покриву альbedo дорівнює 0.35, якщо на льоду тоне сніг – дорівнює 0.50.

До нижньої поверхні льоду тепло надходить від води  $S_{\text{в}}$ . Для його визначення до частки тепла від сонячної радіації, яка проникла крізь лід, треба додати тепло від ґрунту ложа та підземних вод:

$$S_{\text{в}} = S \left( 1 - e^{-2.615(\Delta h)^{0.6}} \right) \quad (10.4)$$

Загальний шар визначається як сума шарів танення з верхньої та нижньої поверхні.

### 10.3 Розрахунок міцності льоду

Скресання річки має відбутися за умов:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{N}{h_{\text{л}} b} \geq \sigma_{\text{дон}}, \quad (10.5)$$

де  $\sigma$  – напруження, що виникає при дії на лід сили потягу води;  $N$  – сила потягу води;  $F$  – площа перерізу льодяної плити;  $h_{\text{л}}$  – товща льодяної плити;  $b$  – ширина льодяної плити;  $\sigma_{\text{дон}}$  – допустиме напруження – максимальне напруження, яке має витримати льодяна плита, береться постійним.

При  $b = 1$  рівняння (10.5) має вигляд

$$N \geq h_{\text{л}} \sigma_{\text{дон}} \quad (10.6)$$

Сила потягу потоку є функція рівня води у річці:

$$N = f(\Delta H, H), \quad (10.7)$$

де  $H$  – рівень води під час скресання річки;  $\Delta H$  – характеристика підняття рівня води у річці порівняно із зимовим рівнем  $H_3$ .

Розрахунки за (10.7) виконуються за умови відділення льоду від берега, яке можливе при виконанні співвідношення:

$$\Delta H \geq H - (H_3 + h_n) \quad (10.8)$$

На водоймах вертикальна складова сили вітру викликає деформацію згину льодяних полів. Тому у формулі (10.5) зовнішньою силою  $N$  є не сила течії, а сила вітру, тиск вертикальної складової якого пропорційний квадрату його швидкості:

$$N = n \omega^2 \quad (10.9)$$

або

$$N = C_{on} \cdot \rho \cdot \omega^2, \quad (10.10)$$

де  $n$  – емпіричний коефіцієнт;  $C_{on}$  – коефіцієнт опору;  $\rho$  – щільність вітру;  $\omega$  – швидкість вітру.

При деформаціях згину умова міцності (10.5) з урахуванням (10.9) має вигляд:

$$n \omega^2 \geq h_n^2 \sigma_{don} \quad (10.11)$$

За дату початку дрейфу льоду на водоймі береться день, коли виконується нерівність (10.11).

#### 10.4 Весняні затори льоду та їх розрахунок

Затори льоду – складне і грізне явище природи. З одного боку затори, викликаючи повені, утруднюють господарське освоєння річки, її долини, завдають мільйонних збитків. З іншого боку, щорічно утворюючись на річках, що течуть з півдня на північ, і будучи природною умовою скресання річок, приводять до більш раннього очищення річки, ніж це можна чекати за метеорологічними умовами.

Утворення заторів обов'язково відноситься до постійних місць, їхнє формування може відбуватися не щороку, тому що не завжди складається необхідне сполучення умов для утворення затору.

Затор являє собою зупинений ущільнений, багат шаровий, битий лід, нагромаджений у руслі, що викликає підвищення рівня вище затору за рахунок стиснення водного перерізу і зниження рівня на ділянці нижче затору.

Утворення затору починається із зупинки плавучого льоду, який нагромаджується під впливом тиску льоду зверху та тиску потоку. Створюється щільне і потужне скупчення льоду, що спричиняє стиснення водного перерізу.

Основні фактори, що сприяють утворенню заторів, це морфологічні характеристики русла, умови замерзання та інтенсивність розвитку весняних процесів, як метеорологічних, так і гідрологічних.

Ділянками утворення заторів звичайно є круті повороти русла, розгалуження річки на рукава, звуження русла. Затори утворюються також на ділянках з різкою зміною уклону водної поверхні: при переломі поздовжнього профілю на незарегульованих річках, на зарегульованих ділянках - при виклинюванні підпору. Можливе утворення заторів і на гирловій ділянці річки.

Можливість утворення затору визначається і характером встановлення льодоставу: недружня осінь з поверненнями тепла сприяє значному шугоутворенню, утворенню льодяних перемичок, переміщень, накопиченню льоду у перемичках.

Інтенсивність розвитку весняних процесів визначається за висотою підвищення рівня і міцності льоду. При зтяжній недружній весні лід, що втратив значну частину міцності до моменту скресання, руйнується, затори не утворюються. Найбільш потужні затори утворюються на річках, що скресаються при участі механічного фактора - зламається досить міцний лід, при цьому ділянки з найбільш потужним льодом можуть зберігатися, будучи осередками заторів.

Для розрахунку висоти затору при виклинюванні підпору водосховища, треба визначити об'єм льоду  $V_{\text{л}}$ , який спливає при льодоході біля будь-якого створу:

$$V_{\text{л}} \approx l B h_{\text{лр}} K_{\text{л}} \quad (10.12)$$

де  $l$  – довжина річки вище створу, м;  $B$  – середня ширина річки при льодоставі, м;  $h_{\text{лр}}$  – середня товщина льоду в річці, м;  $K_{\text{л}}$  – коефіцієнт втрат льоду, який дорівнює 0.80.

При різних рівнях визначають ємність заторної ділянки  $V_{\text{зт}}$  вище створу, яка може вмістити об'єм плавучого льоду:

$$V_{3T} = \frac{B_{3T} H^2 K_{\epsilon}}{2I_{\text{сее}}} - V_{\text{лв}}, \quad (10.13)$$

де  $B_{3T}$  – середня ширина заторної ділянки, м;  $H$  – середня глибина у створі, м;  $I_{\text{сеп}}$  – середній уклон на заторній ділянці;  $K_{\epsilon}$  – коефіцієнт використання місткості водосховища в залежності від залісеності заплави, береться від 0.25 до 0.75;  $V_{\text{лв}}$  – об'єм льоду на водосховищі, м<sup>3</sup>, розраховують за формулою:

$$V_{\text{лв}} = l_{\epsilon} B_{\epsilon} h_{\text{лв}}, \quad (10.14)$$

де  $l_{\epsilon}$  – довжина водосховища до створу при НПР, м;  $B_{\epsilon}$  – середня його ширина при НПР, м;  $h_{\text{лв}}$  – товщина льоду на водосховищі.

Рівень, при якому виконується рівність  $V_{\text{л}} \approx V_{3T}$ , і є заторний рівень.

### ***Питання для самоконтролю***

1. Назвіть основні фактори скресання річок.
2. В чому полягають особливості скресання водойм.
3. В чому полягає метод розрахунку танення льодяного покриву – метод С.М.Булатова?
4. Як розраховувати міцність льоду?
5. Як виникають затори льоду на річках?
6. Як розраховувати заторний рівень?



## ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$A$  – альbedo;  
 $\text{\AA}$  – ангстрем;  
 $a$  – коефіцієнт температуропровідності,  $\text{м}^2/\text{год}$ ;  
 $b$  – ширина струменя,  $\text{м}$ ;  
 $C$  – питома теплоємність,  $\text{Дж}/(\text{кг } ^\circ\text{C})$ ;  
 $E$  – випаровування,  $\text{мм}/\text{д}$ ; модуль пружності,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;  
 $e$  – пружність водяної пари,  $\text{ГПа}$ ;  
 $F$  – площа поверхні,  $\text{м}^2$ ; дотичне напруження зсуву;  
 $G$  – модуль зсуву,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;  
 $H$  – глибина водойми,  $\text{м}$ ;  
 $h$  – висота (товщина),  $\text{м}$ ;  
 $I$  – сонячна радіація,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ; похил,  $\%$ ;  
 $K$  – коефіцієнт турбулентного обміну; коефіцієнт поглинання,  $\text{м}^{-1}$ ;  
 $L$  – питома теплота,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  
 $l$  – довжина,  $\text{м}$ ;  
 $m$  – маса,  $\text{кг}$ ;  
 $n$  – нормаль до поверхні,  $\text{м}$ ; пористість,  $\%$ ; коефіцієнт заломлення;  
 $P$  – тиск,  $\text{Па}$ ;  
 $Q$  – витрата води,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  
 $Q_w$  – витрата шуги,  $\text{кг}/\text{с}$ ;  
 $q$  – питомий тепловий потік,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $S$  – тепловий потік,  $\text{Дж}$ ;  
 $T$  – абсолютна температура,  $\text{К}$ ;  
 $t$  – температура,  $^\circ\text{C}$ ;  
 $V$  – об'єм,  $\text{м}^3$ ; швидкість течії,  $\text{м}/\text{с}$ ;  
 $W$  – внутрішнє джерело теплоти,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ; вологість ґрунту,  $\%$ ;  
 $\omega$  – швидкість повітря,  $\text{м}/\text{с}$ ;  
 $x, y, z$  – прямокутні просторові координати;  
 $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $\text{Вт}/\text{м}^2\text{ } ^\circ\text{C}$ ; коефіцієнт лінійного розширення,  $^\circ\text{C}^{-1}$ ;  
 $\beta$  – коефіцієнт об'ємного розширення,  $^\circ\text{C}^{-1}$ ;  
 $\delta$  – товщина шару,  $\text{м}$ ;  
 $\theta$  – температура повітря,  $^\circ\text{C}$ ;  
 $\lambda$  – коефіцієнт температуропровідності,  $\text{Вт}/\text{м}^\circ\text{C}$ ;  
 $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості,  $\text{Н с}/\text{м}^2$ ;  
 $\nu$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $\rho$  – щільність,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана; коефіцієнт поверхневого натягу,  $\text{Н}/\text{м}$ ;  
 $\tau$  – час;  
 $\psi$  – товщина мерзлого ґрунту,  $\text{м}$ .  
Критерії:  $Bi = \alpha l / \lambda$ ;  $F_0 = a \tau / l^2$

## СЛОВНИК ТЕРМІНІВ ТА ВИЗНАЧЕНЬ

**Абсолютна температура** – температура у градусах абсолютної шкали, за нуль відліку взята температура –  $273.16^{\circ}\text{C}$ ; позначається  $^{\circ}\text{K}$  (градуси Кельвіна).

**Адгезія льоду** – примерзання льоду до поверхні твердого тіла.

**Альbedo** – характеристика відбивної здатності тіла.

**Ангстрем** – одиниця довжини, що дорівнює  $10^{-10}$  м; використовується у атомній фізиці.

**Аномалії води** – властивості води, специфічні у порівнянні з іншими рідинами, що пов'язано зі структурою води, будовою її молекули та характером молекулярної взаємодії.

**Внутрішні джерела теплоти** – це питома теплота фазових переходів води (при кристалізації або випаровуванні), дисипація енергії при русі рідини (перехід механічної енергії у теплову).

**Внутрішньоводний лід** – скупчення первинних льодяних кристалів, утворюваних у товщі води та на дні водного об'єкта.

**Водоутримуюча здатність снігового покриву (вологомісткість)** – найбільша кількість рідкої води, яку сніг може утримувати після насичення його водою до певної вологості і подальшого стікання надлишкової гравітаційної води.

**Вологість снігу** – кількість води, яка утримується у сніговому покриві протягом певного часу і визначається у відсотках до ваги проби вологого снігу.

**В'язкість рідини** – фізична властивість рідини чинити опір переміщенню однієї її частини відносно іншої.

**Гомотермія** – явище незмінності температури води по глибині водойми.

**Градiснт температури** – вектор, спрямований по нормалі до ізотерми в бік збільшення температури.

**Густина води** – відношення маси води до її об'єму; при температурі води  $4^{\circ}\text{C}$  та нормальному тиску дорівнює  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

**Донний лід** – внутрішньоводний лід, утворений на дні водного об'єкта.

**Ентальпія** – кількість внутрішньої енергії (теплоти) тіла при даній температурі.

**Ефективне випромінювання** – різниця між випромінюванням земної поверхні та поглинутим зустрічним випромінюванням атмосфери.

**Забереги** – смуги льоду, що примерзли до берегів водних об'єктів, коли основна частина водного простору ще не замерзла.

**Зажор** – скупчення шуги та дрібно побитого льоду в руслі річки, що спричинює стиснення водного перерізу та пов'язане з цим підвищення рівня води.

**Замерзання** – фаза льодового режиму, для якої характерним є утворення льодяного покриття.

**Затор** – скупчення крижин у руслі річки під час льодоходу, що спричинює стиснення водного перерізу та пов'язане з цим підвищення рівня води.

**Ізотермія** – постійність температури повітря з висотою у деякому шарі атмосфери.

**Ізотерми** – лінії на топографічній карті місцевості з однаковими значеннями температури повітря за характерний час.

**Коефіцієнт відбиття** – відношення відбитої від поверхні води, снігу чи льоду сонячної радіації до падаючої.

**Коефіцієнт температуропровідності** дорівнює тому підвищенню температури, яке відбувається у одиниці об'єму тіла, якщо йому додати кількість теплоти, що чисельно дорівнює його коефіцієнту температуропровідності,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

**Коефіцієнт теплопровідності** – кількість теплоти, що проходить крізь  $1 \text{ м}^2$  в одну годину при шарі речовини в  $1 \text{ м}$  і різниці температури на межі шару в  $1^\circ\text{C}$ ,  $\text{Вт}/\text{м}^\circ\text{C}$ .

**Конвективний теплообмін** визначається різницею між температурою підстильної поверхні та температурою розташованої над нею рідини або пари, у якій має місце молярний перенос теплоти.

**Конвекція** – процес передачі тепла шляхом переміщення частинок носіїв теплової енергії (води або повітря).

**Критична температура повітря** – це температура повітря, при якій відбувається змерзання крижин та встановлюється льодяна перемичка.

**Льодовий режим** – сукупність закономірно повторюваних процесів виникнення, розвитку та руйнування льодяних утворень на водних об'єктах.

**Льодостав** – фаза льодового режиму, для якої характерною є наявність льодяного покриття.

**Льодяний покрив** – суцільний нерухомий лід на поверхні водного об'єкта.

**Метод аналогії** полягає в тому, що вирішення теплової задачі замінюють вирішенням задачі другої фізичної суті, у якій рівняння балансу і усі умови однозначності збігаються, хоча розмірності різні.

**Метод кінцевих різниць** полягає в тому, що у рівнянні теплопровідності усі нескінченно малі різниці (диференціали) замінюються кінцевими, але малими відмінними величинами.

**Метод моделювання** – створення моделей, що відтворюють окремі ланки гідрологічного процесу, та їх застосування у гідротермічних та льодотермічних дослідженнях, прогнозуванні чи розрахунках.

**Метод суперпозиції** – для розрахунку температури води полягає в тому, що складна теплова задача розкладається на прості таким чином, щоб сума

значень початкової температури та теплових умов на поверхні води та на дні для додаткових задач дорівнювала би початковій температурі та тепловим умовам на поверхні та на дні в основній задачі.

**Метод теплового балансу** – використання закону збереження енергії у вигляді рівняння теплового балансу для дослідження закономірностей між припливом та витратою тепла за деякий період часу в межах річкового басейну, озера, водосховища тощо.

**Ополонка** – простір чистої води серед льодяного покриву, утворений під впливом динамічних і термічних чинників.

**Переохолодження води** – зниження її температури замерзання по відношенню до  $0^{\circ}\text{C}$ .

**Питома теплоємність води** – це кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання 1 кг дистильованої води на  $1^{\circ}\text{C}$  від  $14.5$  до  $15.5^{\circ}$ , дорівнює  $4.2 \cdot 10^3$  Дж/кг $^{\circ}\text{C}$ .

**Питома теплота випаровування** – це кількість теплоти, необхідна для переходу 1 кг води з рідкого стану в пару без зміни температури за нормального атмосферного тиску, при температурі поверхні води  $0^{\circ}\text{C}$ , дорівнює  $25 \cdot 10^5$  Дж/кг.

**Питома теплота кристалізації води** – це кількість теплоти, яка виділяється при кристалізації 1 кг води при сталій температурі, дорівнює  $3.33 \cdot 10^4$  Дж/кг.

**Променистий теплообмін** – обумовлений шляхом подвійного перетворення енергії: спершу із теплової у електромагнітну в місці випромінювання, а потім у теплову в місці поглинання.

**Радіаційний баланс підстильної поверхні** – різниця між величиною сумарної сонячної радіації, яка поглинута поверхнею, та ефективним випромінюванням.

**Рівняння теплового балансу** – це кількісне співвідношення між величинами теплових потоків, які входять в межі розглянутого контуру і виходять за його межі з урахуванням зміни запасу тепла в об'ємі, обмеженому цим контуром.

**Сало** – поверхневі первинні льодяні утворення, що складаються із кристалів у вигляді плям або тонкого суцільного шару.

**Скресання** – фаза льодяного режиму, для якої характерним є руйнування льодяного покриву.

**Сніжниця** – накопичення снігу, що плаває у воді.

**Сонячна радіація** – електромагнітне випромінювання Сонця, що поширюється в просторі у формі електромагнітних хвиль і проникає в земну атмосферу.

**Температура кристалізації (замерзання)** – для дистильованої води за нормального тиску дорівнює  $0^{\circ}\text{C}$  (початкове значення температурної шкали термометра Цельсія).

**Температура найбільшої густини** – для дистильованої води за нормального тиску  $1.01 \cdot 10^5$  ПА дорівнює  $3.98^{\circ}\text{C}$  ( $\approx 4^{\circ}\text{C}$ ).

**Температурна стратифікація** – пошарове розподілення температури води по глибині водойми.

**Температурне поле** – сукупність значень температури всіх точок простору на цей час.

**Температуропровідність води** – характеризує властивість води, яка сприяє переміщенню теплоти таким чином, що температура у кожній точці прямує до відповідного сталого становища.

**Теплоаккумуляція водойми** складається з теплообміну з дном, теплоти, принесеної притоками, та теплоту, яка виділяється при розсіюванні кінетичної енергії.

**Тепловий потік** – кількість теплоти, яка проходить в одиницю часу крізь ізотермічну поверхню.

**Теплоємність води** – кількість тепла, поглинена тілом при нагріванні його на  $1^{\circ}\text{C}$ .

**Термічний режим** – закономірності коливання температури води у водних об'єктах.

**Шуга** – внутрішньоводний лід, що вплив на поверхню або занесений вглиб потоку.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

### Основна:

1. Винников С.Д., Проскуряков Б.В. Гидрофизика. Л.:Гидрометеиздат, 1988. –245 с.
2. Гопченко Є.Д., Крес Л.Є. Теплообмін у водних об'єктах. Одеса, 1997. –103 с.
3. Мишон В.М. Гидрофизика. Воронеж, изд. ВГУ, 1979. –307с.

### Додаткова:

4. Мишон В.М. Практическая гидрофизика. Л.:Гидрометеиздат, 1983. –175 с.
5. Одрова Т.В. Гидрофизика водоемов суши. Л.:Гидрометеиздат, 1979. –311 с.

Навчальне видання

**Крес Людмила Євгенівна**

## **ГІДРОФІЗИКА**

Конспект лекцій

Підп. до друку                      Формат 60×84/16   Папір офс.  
Умовн. друк. арк. 7.9      Тираж                      Зам. №

Надруковано з готового оригінал – макету

---

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

---