МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. Глушков, Ю.О. Кругляк, Ю.Г. Чернякова

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Конспект лекцій

Одеса
"ТЭС"– 2004

ББК 22.143
Г55
УДК 512.64

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол № 10 від 30.10 2003 р.).

Глушков О.В., Кругляк Ю.О., Чернякова Ю.Г.

Лінійна алгебра: Конспект лекцій. –Одеса; Вид-во "ТЭС", 2004. – 117 с.

Викладені питання векторної алгебри, матричного числення, теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь, а також вибрані розділи аналітичної геометрії на площині та у просторі.

Для студентів та аспірантів екологічного, гідрометеорологічного факультетів, а також факультету комп"ютерних наук та менеджменту університетів.

ЗМІСТ

Стор

Передмова....4

Розділ 1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА....5

1.1. Поняття вектора та його позначення....5
1.2. Додавання та віднімання векторів. Множення вектора на скаляр....6
1.3. Координатна форма векторів....10
1.4. Добуток векторів....17
1.5. N-мірний векторний простір....23

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ....33

2.1. Пряма на площині....33
2.2. Площина....35
2.3. Пряма у просторі....36
2.4. Криві другого порядку....37
2.5. Поверхні другого порядку....40

Розділ 3. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ....44

3.1. Основні поняття....44
3.2. Арифметичні дії над матрицями....45
3.3. Властивості дій множення матриць....46
3.4. Дії над матрицями. Підсумки....47
3.5. Перестанови та підстанови....49
3.6. Загальні властивості визначників....52
3.7. Обчислення оберненої матриці....67
3.8. Інші властивості визначників....75
3.9. Ранг матриці....80

Розділ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ....87

4.1. Основні поняття....87
4.2. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь....91
4.3. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь....99
4.4. Формули Крамера....99
4.5. Схема Халецького....101
4.6. Наближені (ітераційні) методи розв'язання систем лінійних рівнянь....104
4.7. Структура множини розв'язків системи лінійних рівнянь....110

Список рекомендованої літератури....117

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна "Лінійна алгебра" є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків гідрологія, метеорологія,екологія, комп"ютерні науки.Вона відображує нові вимоги, що пред"являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета дисципліни – розгляд проблем векторної алгебри, матричного числення, аналітичної геометрії, засвоєння основних методів розв"язання систем лінійних рівнянь, аналіз отриманих результатів.

В результаті вивчення даної дисципліни студент повинен знати математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою дисципліни, вміти влучно і стисло виражати математичну думку під час розв"язання конкретних задач, самостійно розв"язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати.

Отримані у прцесі вивчення лінійної алгебри знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно-орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

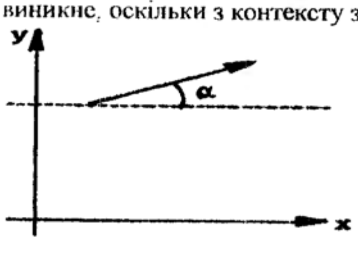
У даному курсі розглянуті питання алгебри векторів у 3-вимірному та n-вимірному просторі, аналітичної геометрії на площині та у просторі, теорії визначників та алгебри матриць, проаналізовані основні методи розв"язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма змінними.

Розділ 1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1. Поняття вектора та його позначення

Величина, для повної характеристики якої достатньо одного числа, називається скаляром. Це температура, маса, густина, робота сили. Два скаляри однакового розміру рівні, якщо рівні їх значення. Багато фізичних понять, таких, як швидкість і прискорення тіла, зовнішня сила, прикладена до тіла, електричні та магнитні поля і багато інших несуть у собі інформацію як про числове значення того чи іншого поняття, так і про напрям (у просторі), що асоціюється з цим поняттям. Для повного визначення таких понять (властивостей) потрібні 3 числа (скаляра). Такі поняття зручно позначати одним символом. Вони мають назву **векторів** Багато інших величин, що розглядаються у природних науках та математиці, мають більш складну структуру. Так, для опису деформації пружного тіла у точці необхідно вже $3^2 = 9$ чисел, а для повної характеристики пружних властивостей анізотропного тіла потрібно $3^4=81$ чисел. Відповідні поняття мають назву **тензорів**, а показник степеня 3-ки (вимір координатного простору) має назву **ранга тензора**. У загальній класифікації вектори - це тензори 1-го рангу ($3^1 = 3$ числа), а скаляри - тензори ранга 0 ($3^0 = 1$ число). Графічно вектор відображується

спрямованим відрізком (стрілкою), що вказує напрям вектора, а довжина відрізка дає його **величину (довжину, модуль, абсолютне значення)**. У векторі важливі дві його точки: **початок вектора** O і **кінець вектора** Q. Початок вектора O має назву **точки прикладення вектора**. Цей вектор можна позначити **OQ** чи просто **Q**, а величину вектора - Q або **|Q|**. Традиційно вектори зображують напівжирним шрифтом чи стрілкою (часто рискою) над символом вектора. Взагалі, чим простіше позначення, тим краще, тим легше записувати формули. Ми будемо користатися різними позначеннями для векторів та їх величин. Непорозуміння не виникне, оскільки з контексту завжди ясно, про що саме йде мова.



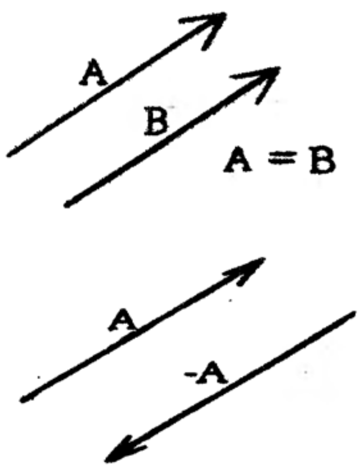
Напрям вектора можна завдати, наприклад, кутом α, як на цьому рисунку. Це **плоска** (2-вимірна, 2D) **прямокутна декартова система координат**. Домовились **кут відхилу** відраховувати від вісі абсцис до вектора проти годиникової стрілки. Напрям відліку кута грає важливу роль.

Для побудови алгебри векторів потрібно таке поняття як **нульовий вектор** чи **нуль-вектор**. Нуль-вектор **0** не має довжини і його напрям не визначений, фактично це число 0.

Два вектори називають **колінеарними,** якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих; позначення колінеарності: **a || b** .

Два вектори називають **рівними,** якщо вони колінеарні, однаково спрямовані та мають рівні модулі. Усі нульові вектори вважаються рівними.

Вектори називають **компланарнимн,** якщо вони лежать у одній площині або у паралельних площинах.



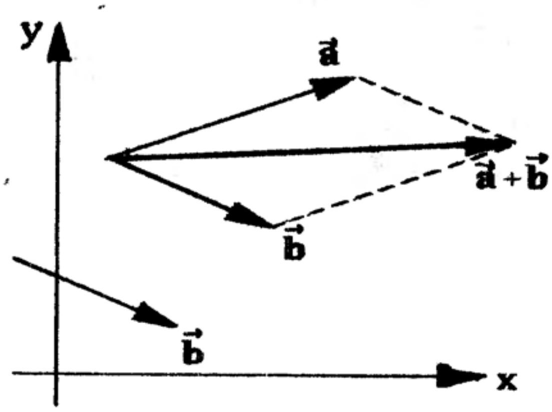
У алгебрі векторів визначені операції додавання, віднімання та множення. Поняття **ділення на вектор не існує**. Для побудови векторної алгебри домовились два вектори вважати рівними, якщо вони мають один і той же напрям і однакову довжину (кут між ними дорівнює нулю). При цьому не має значення, у різних точках чи у одній точці вектори мають свій початок. Іншою мовою, якщо вектори при паралельному переносі збігаються, то вони рівні. Паралельний перенос здійснюється таким чином, щоб лінія, що з'єднує кінці векторів **A** та **B**, була паралельною до лінії, що з'єднує початки цих векторів.

Антипаралельні (антиспрямовані) вектори A та **- A** мають одну й ту ж довжину та спрямовані у протилежні сторони(кут між ними дорівнює 180). Такі вектори рівні за вийнятком знака.

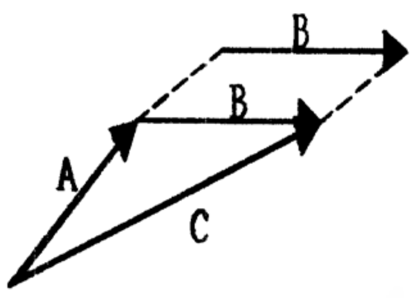
1.2. Додавання та віднімання векторів. Множення вектора на скаляр

Додавання та віднімання векторів можна виконати двома засобами: графічно та алгебраїчно.

Спочатку розглянемо графічний метод.



Вектори, що додаються, можуть бути розташовані вільним чином один до одного. Для графічного додавання векторів спочатку треба привести початки обох векторів до однієї точки без змінення їх напрямів. Це завжди можна зробити паралельним переносом одного з векторів чи обох векторів. На цьому рисунку вектор **b** паралельно перенесений таким чином, щоб початки обох векторів знаходились у одній точці. Тепер будується паралелограм на векторах **a** та **b** як на твірних. Та діагональ паралелограма, яка проходить крізь початок векторів, що додаються, дає вектор суми векторів **a + b**. Вектори додаються (і віднімаються, як ми впевнимося нижче) за "правилом паралелограма".



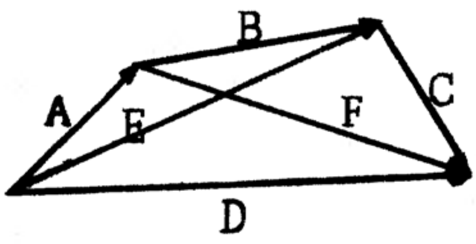
Можна зробити інакше. На цьому рисунку вектор **B** спочатку паралельно перенесений таким чином, щоб його початок збігався з кінцем вектора **A**. Результуючий вектор **C = A + B** з'єднує початок вектора **A** і кінець вектора **B**. Обидві графічні побудови дають, очевидно, один и той же результат.

Отже, **сумою a+b** векторів **a** та **b** називають вектор, що проведений з початку **a** до кінця **b**, при умові, що початок вектора **b** збігається з кінцем вектора **a**.

Операція додавання векторів є комутативною(переставною):**A+B=B+A**

Виконується також асоціативний закон:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}$$



Графічний доказ асоціативності додавання векторів можна побачити на рисунку: результуючий вектор **D** можна одержати або додаванням спочатку **(A+B)=E,** а потім **E+C=D**, або спочатку **(B+C)=F,** а потім **A+F=D.**

Отже, **операція додавання векторів має властивості:**

a + b = b + a (комутативність),
(a + b) + c = a + (b + c) (асоціативність),
a + 0 = a (присутність нульового елемента),
a + (-a) = 0 (присутність протилежного елемента),
(символом **-a** позначається вектор, протилежний вектору **a**).

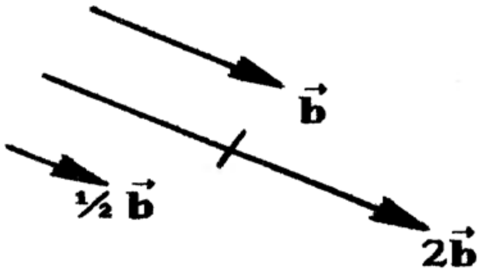
З означення та властивостей операції додавання випливають два засоби додавання векторів: "правило трикутника" та "правило паралелограма".

"Правило трикутника":
Переносимо початок вектора **b** у кінець вектора **a** та з початку **a** проводимо у кінець **b** вектор **a+b.**

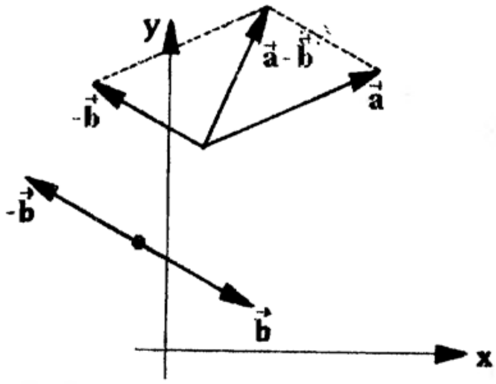
"Правило паралелограма":
Переносимо початки векторів **a** та **b** так, щоб вони збігалися; з кінців кожного вектора проводимо відрізки, паралельні іншому вектору; з спільного початку проводимо по діагоналі отриманого паралелограма вектор **a+b.**

Повернемося до рисунку. Друга діагональ паралелограма дає величину вектора різниці **a - b** векторів **a** та **b**. При цьому напрям вектора різниці векторів **a** й **b** визначається від кінця вектора **b** до кінця вектора **a**. Щоб впевнитися у цьому, нам треба розглянути **множення вектора на скаляр**

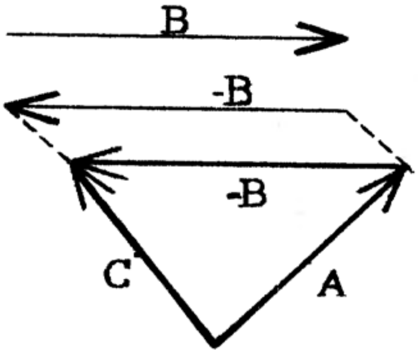
Скалярні величини характеризуються тільки одним числом и не мають напряму, вони можуть бути як додатними, так і від'ємними.



При множенні вектора на додатнє число величина вектора збільшується чи зменшується у це число раз без змінення напряму вектора На цьому рисунку вектор **b** помножений на 0.5 та на 2.



При множенні вектора на від'ємне число напрям вектора змінюється на протилежний, а довжина вектора збільшується чи зменшується у абсолютну величину числа разів. Помножимо на -1 вектор **b**. Одержимо вектор -**b**. Залишається додати вектор -**b** та вектор **a** за правилом паралелограма. Одержимо вектор різниці **a** - **b**. Порівняння цього рисунка і попереднього показує, що вектор різниці відповідає другій діагоналі паралелограма и спрямований від кінця вектора **b** до кінця вектора **a**.



На цьому рисунку віднімання векторів **A** - **B** = **C** робиться декілька інакше: вектор - **B**, обернений до вектора **B**, що віднімається, переноситься паралельно у кінець вектора **A**, потім сумується з ним. Віднімання векторів антикомутативно, тобто різниця векторів змінює знак на протилежний при заміні місцями доданків.

Отже, різницею $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ називають суму $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Добутком вектора $\mathbf{a}$ на число α називають вектор $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha$, що відповідає умовам:

а) $\mathbf{a}\alpha \parallel \mathbf{a}$,
б) $\alpha\mathbf{a}$ та $\mathbf{a}$ однаково спрямовані при $\alpha > 0$,
 $\alpha\mathbf{a}$ та $\mathbf{a}$ протилежно спрямовані при $\alpha < 0$,
в) $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha|\ |\mathbf{a}|$.

Операція множення вектора на число має властивості:

$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ (дистрибутивність відносно додавання векторів),
$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ (дистрибутивність відносно додавання чисел),
$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ (асоціативність),
$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (множення на одиницю)

1.3. Координатна форма векторів

Розглянемо поняття **лінійної залежності та незалежності векторів.** Вираз $\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n}$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$. Вектори $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ називаються **лінійно залежними** векторами, якщо існують числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, з яких хоча б одно відрізняється від нуля, такі, що справедлива рівність $\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} = 0$. Наприклад, якщо хоча б один з векторів $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ дорівнює нулю, то вони лінійно залежні.

Необхідною та достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.
Необхідною та достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність

Вектори $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ називають **лінійно незалежними**, якщо з рівності $\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{a_n} = 0$ випливає, що усі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

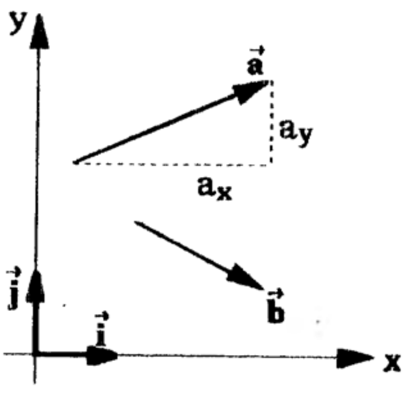
Розглянемо тепер **алгебраїчну форму** векторів. Її інакше називають координатною формою.

Розглянемо поняття **базису на площині та у просторі.** Сукупність двох (трьох) лінійно незалежних векторів площини (трьохвимірного простору), що розглянуті у певному порядку, називають **базисом**. Кожний вектор **a** єдиним чином може бути представленим у вигляді лінійної комбінації векторів заданого базису:

$\mathbf{a}=\alpha_1 \mathbf{e_1} + \alpha_2 \mathbf{e_2}$ (тут $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ - базис на площині);
$\mathbf{a}=\alpha_1 \mathbf{a_1} + \alpha_2 \mathbf{a_2} + \alpha_3 \mathbf{e_3}$ (тут $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ - базис у просторі).

Такі вирази мають назву **розкладів вектора по базису** ; числа (α_k) мають назву **координат** чи компонентів вектора у даному базисі. Хай на площині (у просторі) є точка O і два (три) одиничні взаємно (попарно) перпендикулярні вектори. Тоді кажуть, що сукупність точки O та базису - впорядкованої пари (трійки) векторів, створює **декартову прямокутну систему координат** (д.п.с.к.). Прямі, що проходять крізь точку O у напрямі базисних векторів, мають назву координатних вісей. Базисні вектори д.п.с.к. мають назву **ортів вісей** та на площині позначаються символами **i, j** , у просторі - символами **i, j, k**. Д.п.с.к. позначаються символами OXY(на площині), OXYZ (у просторі). Вектор у д.п.с.к. однозначно визначається своїми координатами та записується у вигляді:
а) на площині: $\mathbf{a}=x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \mathbf{a}(x;\ y)=(x;\ y)$; $\mathbf{i}=(1;\ 0)$, $\mathbf{j}=(0;\ 1)$;
б) у просторі: $\mathbf{a}=x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \mathbf{a}\ (x;\ y;\ z) = (x;\ y;\ z)$;
$\mathbf{i}=(1;0;0)$, $\mathbf{j}=(0;1;0)$, $\mathbf{k}=(0;0;1)$.

Координати **радіуса-вектора OM**, що з'єднує точку O, що має назву початку координат, і деяку точку простору M, мають назву **координат** точки M. Якщо точка A має координати $(x_1;y_1;z_1)$, а точка B - кординати $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то вектор $\mathbf{AB} = (x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, вектор $\mathbf{BA} = (x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2)$. Побудуємо для вектора **a** на цьому рисунку його проекції на вісі системи координат. Для цього опускають перпендикуляри з точок початку та кінця вектора на вісі обраної системи координат. Відрізки a_x та a_y , що відтинаються на вісях, і є проекції вектора. Це числа. Якщо вектор відповідає розмірній фізичній величині, то цей розмір привласнюється саме проекціям вектора. Наприклад, проекції вектора швидкості мають (у системі одиниць СИ) фізичний розмір [м/с], як і сам вектор швидкості.



Для алгебраїчного запису вектора потрібні **одиничні вектори (орти, базисні вектори)** **i** та **j**. Вони завжди спрямовані до зростання числових значень вісей системи координат і довжина їх завжди дорівнює одній одиниці тієї величини, яка відкладена на даній вісі. На рисунку орти зображені так, що їх початок збігається з точкою перетину координатних вісей. Ця точка не обов'язково відповідає початку системи координат (точці збігу нулів координатних вісей, яку звичайно позначають буквой O) Таке зображення ортів не обов'язково. Орти можна зображувати у будь-якому місці на координатній вісі, більш за це - у будь-якому місці рисунка, лише б вони мали одиничну довжину та були **односпрямовані** з вісями координат. Завдання ортів означає завдання (вибір) системи координат. Ортам не привласнюється фізичний розмір, вони безрозмірні. Для 3-вимірної прямокутної (ортогональної) декартової системи координат потрібен також орт **k** вздовж вісі **z**.

Часто орти позначають однією і тією ж буквою **e** з нижнім індексом (x,y,z чи 1,2,3) для відповідної координатної вісі. Інколи над значком орта ставлять "капелюшок", наприклад, $\hat{a}$ (читається "а з капелюшком"), $\hat{x} = \hat{i}$, $\hat{y} = \hat{j}$ і т.с.

З правила множення вектора на скаляр та правила додавання векторів випливає, що вектор **a** можна записати у алгебраїчному вигляді: $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}$. Доданки у цій сумі є вектори. Їх називають вектор-проекціями вектора **a**, тобто вектор-проекція будь-якого вектора на дану координатну вісь є добутком орта цієї вісі на відповідну проекцію вектора. Отриманий вираз називають "розкладом вектора на його проекції" або "розкладом вектора по ортах". Аналогічний вираз можна записати для вектора **b** на рисунку, що зображений вище.

Визначимо дії над векторами, що задані своїми координатами.

Хай дані два вектори
$\mathbf{a}\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $\mathbf{b}\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Тоді:

а) рівність векторів означає рівність відповідних координат:
$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2;$
б) колінеарність векторів означає пропорційність відповідних координат.
$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1/x_2= y_1/y_2= z_1/z_2;$
в) лінійні операції над векторами означають лінійні операції над координатами:
$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2),$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$,
$t\,\mathbf{a} = (tx_1,\ ty_1,\ tz_1)$;

г) довжина вектора обчислюється за формулою $|\mathbf{a}| = |\bar{A}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

д) напрям вектора $\mathbf{a}$ може бути заданий за допомогою **нарямних косинусів** (косинусів кутів між вектором та додатними напрямами весей координат):

$\cos\alpha = x_1/|\mathbf{a}|$, $\cos\beta = y_1/|\mathbf{a}|$, $\cos\gamma = z_1/|\mathbf{a}|$.

Напрямні косинуси задовольняють співвідношенню:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

е) координати орта $\mathbf{a_0}$ вектора $\mathbf{a}$ обчислюються за формулою:

$\mathbf{a_0} = (x_1/|\mathbf{a}|,\ y_1/|\mathbf{a}|,\ z_1/|\mathbf{a}|) = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

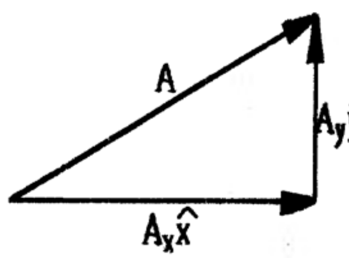
Важливим є поняття **проекції вектора.** Хай задана деяка **вісь** - пряма з одиничним вектором **е**, що лежить на ній та задає додатний напрям на прямій.

Проекцією вектора а на вісь називають число $\text{Пр}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\alpha$, де α - кут між векторами $\mathbf{a}$ та $\mathbf{e}$. Проекціями вектора $\mathbf{a}(x;\ y;\ z)$ на координатні вісі OX, OY, OZ є координати x, y, z.

З простих геометричних побудов випливає, що для суми векторів маємо:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a_x} + \mathbf{b_x})\mathbf{i} + (\mathbf{a_y} + \mathbf{b_y})\mathbf{j} + (\mathbf{a_z} + \mathbf{b_z})\mathbf{k}.$$

Таким чином, кожна проекція суми векторів дорівнює сумі відповідних проекцій цих векторів.



Ще раз про проекції і вектор-проекції вектора. Проекції векторів - скаляри. Помножені на відповідні орти, вони стають вектор-проекціями. Числа A_x та A_y на цьому рисунку є проекціями вектора $\mathbf{A}$. Помножені на відповідні орти $A_x\hat{x} = \mathbf{A_x}$ і $A_y\hat{y} = \mathbf{A_y}$, вони становлять вектор-проекції, так що $\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y}$.

У обраній системі координат розклад вектора на його проекції виконується єдиним можливим засобом. У різноманітних же системах координат, наприклад, таких, що повернуті та/чи здвинуті одна відносно одної, один і той же вектор, очевидно, розкладається неоднаково (на різні проекції). Самже вектор, природно, зостається незмінним - ані його довжина, ані його напрям не змінюються (інваріантні) при переході від однієї системи координат до іншої. Вектор, як кількісний опис будь-якої фізичної властивості , є інваріантним до обрання системи координат. Систему координат обирають звичайно таким чином, щоб кінцеві розрахункові рівняння виглядали щонайпростішими. Застосування теореми Піфагора до розкладу вектора на його проекції $\bar{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$ дає формулу для обчислення модуля вектора: $|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

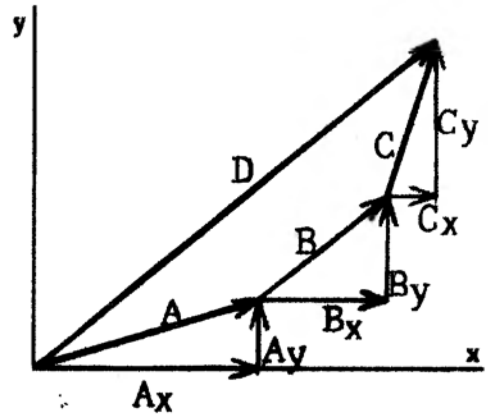
Розклад векторів на їх проекції (в одній і тій же системі координат) дозволяє легко додати (відняти) вектори аналітично. Хай нам відомі розклади трьох векторів на їх проекції :

$$\bar{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$$

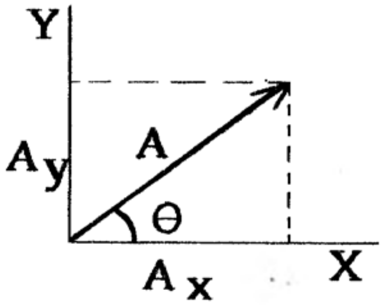
$$\bar{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$$

$$\bar{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y}$$

З графічного сумування



добре видно, що проекції результуючого вектора
$\mathbf{D_x = A_x + B_x + C_x}$, $\mathbf{D_y = A_y + B_y + C_y}$.



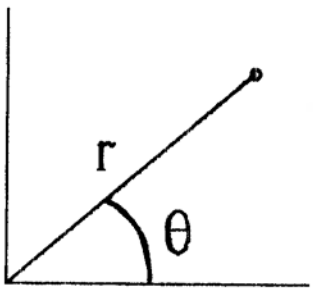
Якщо відомі довжина вектора та його орієнтація відносно обраної системи координат, то легко знайти проекції вектора. Хай орієнтація вектора задана його кутом θ відносно вісі абсцис. Тоді
$\cos\theta = A_x/|\mathbf{A}|$, $A_x = |\mathbf{A}| \cos\theta$.

Для y-компоненти маємо:
$A_y=|\mathbf{A}| \cos(90 - \theta) = |\mathbf{A}| \sin\theta$.

Для будь-якого вектора корисно ввести його власний одиничний вектор:

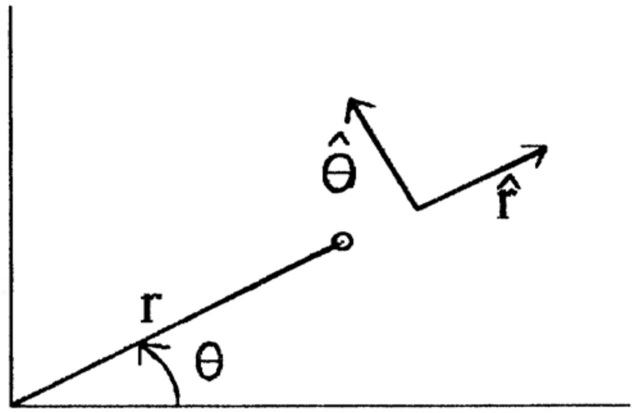
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\,\hat{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\,\hat{j}$$

З цієї формули випливає, що будь-який вектор завжди дорівнює його довжині, помноженій на його власний одиничний вектор. Оскільки модуль будь-якого числа, за означенням, завжди додатний, то вектор і його власний одиничний вектор завжди співспрямовані. Остання формула виведена з теореми Піфагора.

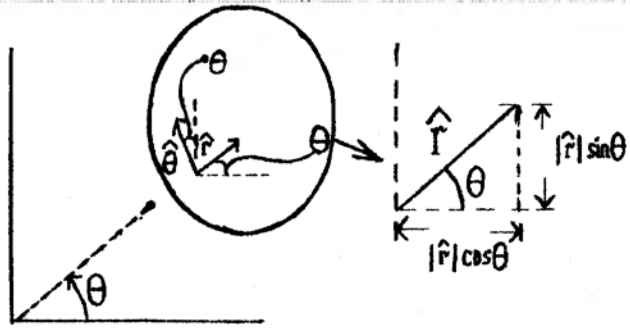


Поряд з декартовою системою координат часто використовується полярна система координат. Розташування точки відносно декартової системи координат задається однозначно на цьому малюнку відрізком r між початком системи координат та точкою, що розглядається, і кутом θ між віссю абсцис та відрізком, при цьому домовились кут відраховувати від вісі абсцис проти годинникової стрілки. Таку пару змінних називають полярними координатами точки.

Орти полярних координат $\hat{r}$ і θ визначаються за тими ж принципами, що і для декартових координат: вони повинні бути ортогональними і спрямованими до зростання полярних координат:

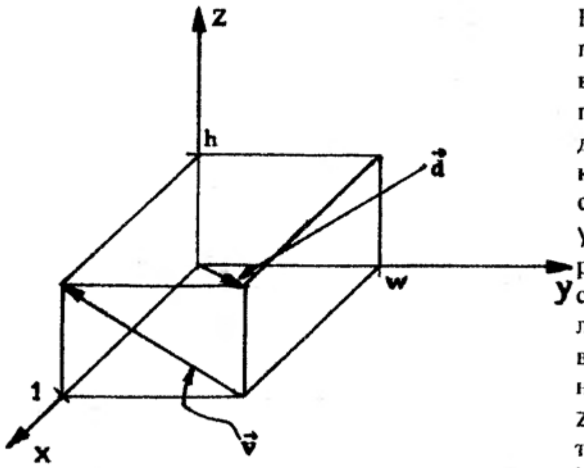


Співвідношення між ортами полярних і декартових координат очевидні з наступного розгляду:



$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

Розглянемо **вектори у 3-вимірному просторі.**



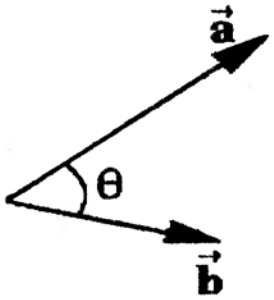
На цьому рисунку показаний розклад вектора **d** на його проекції l, w, h у декартовій 3D-системі координат. Це права система координат: вісі y, z лежать у площині рисунка, а вісь x спрямована на нас. У лівій системі координат вісь x спрямована від нас (чи, наприклад, вісь z спрямована униз) при тій же орієнтації двох інших вісей. Відрізнити праву систему від лівої можна за "правилом буравчика" ("правої руки"). Якщо не обговорене протилежне, у розрахунках правило завжди використовується права система координат.
Алгебраїчний розклад вектора **d** має вигляд: $\mathbf{d}=d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$. Хай точка перетину вісей на цьому рисунку збігається з початком системи координат, тобто ця точка (початок вектора **d**) має координати (0, 0, 0). Тоді кінець вектора має координати (l, w, h), а його проекції дорівнюють: $d_x = l - 0$, $d_y = w - 0$, $d_z = h - 0$. Таким чином, $\mathbf{d}=l\,\mathbf{i}+w\,\mathbf{j}+h\,\mathbf{k}$.
Розглянемо вектор **v** на цьому рисунку. Координати кінця вектора та його початку дорівнюють: (l, 0, h) і (l, w, 0). Попарне віднімання координат дає проекції вектора $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{i} - w\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$. Для власного орта вектора **d**, очевидно, маємо :

$$\hat{d} = \frac{l}{\sqrt{l^2+w^2+h^2}}\hat{i} + \frac{w}{\sqrt{l^2+w^2+h^2}}\hat{j} + \frac{h}{\sqrt{l^2+w^2+h^2}}\hat{k}$$

1.4. Добуток векторів

При множенні векторів можна одержати як скаляр, так і вектор. Тому у алгебрі векторів існують два різних добутка векторів: скалярний (внутрішній) добуток(**a·b**), результатом якого є скаляр(число), і векторний добуток (**axb**), результатом якого є новий вектор.Скалярний добуток позначають як **a·b** чи**(a,b)** чи просто **ab**, а векторний як **axb** чи **[a,b]**.

Приклади з механіки: робота та потужність задаються скалярними добутками вектора зовнішньої сили, прикладеної до тіла, на вектор переміщення тіла (робота) і відповідно на вектор швидкості тіла (потужність), а моменти імпульса тіла або сили, прикладеної до тіла, задаються векторними добутками радіуса-вектора тіла на його імпульс (момент імпульса) або відповідно на вектор сили (момент сили або момент обернення). **Скалярний добуток** двох векторів, кут між якими



хай буде θ, визначається як $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. Кут θ - це кут між векторами, що не перебільшує π. Якщо хоча б один з векторів нульовий, то скалярний добуток дорівнює нулю. З парності косинуса $[\cos(x) = \cos(-x)]$ випливає комутативність (переставність) скалярного добутку: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

Якщо $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, то або $|\mathbf{a}|=0$, або $|\mathbf{b}|=0$, або $\theta = \pi/2$. В останньому випадку вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні). Це рівняння є умовою ортогональності двох векторів.

Знаючи модулі векторів та їх скалярний добуток, можна визначити кут між векторами $\cos(\theta) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} / |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$.

Основні властивості скалярного добутку векторів:

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (комутативність),
$(\alpha;\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha;(\mathbf{a},\mathbf{b})$ (асоціативність відносно множення на число),
$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})$ (дистрибутивність відносно додавання векторів).

Для одноіменних ортів маємо $\hat{x}\ \hat{x} = \hat{y}\ \hat{y} = 1$, оскільки кут між вектором та їм самим дорівнює нулю, а для різноіменних ортів $\hat{x}\ \hat{y} = 0$, оскільки кут між ними прямий.

Скалярний добуток може бути як додатним числом, так і від'ємним.
Розглянемо тепер **скалярний добуток векторів у координатній формі**.
Розкладемо кожний з векторів, що перемножуються, на проекції, розкриємо дужки та скомпонуємо 9 доданків у вигляді таблиці :

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=$$
$$(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})=[(a_xb_x)\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+(a_xb_y)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+(a_xb_z)\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}]+$$
$$+[(a_yb_x)\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+(a_yb_y)\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+(a_yb_z)\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}]+[(a_zb_x)\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+(a_zb_y)kj+(a_zb_z)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}]$$

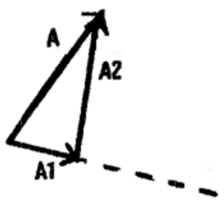
Діагональні добутки ортів $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$, оскільки кут між вектором та їм самим дорівнює нулю. Інші шість недіагональних добутків ортів дорівнюють нулю, оскільки базис ортогональний. Остаточно

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\, b_x) + (a_y\, b_y) + (a_z\, b_z)$$

Скалярний добуток векторів дорівнює сумі попарних добутків їх проекцій.

Для знаходження кута між векторами, що задані їх проекціями, треба знати самий скалярний добуток, а також довжини векторів. Ці три числа легко знаходяться через проекції векторів.
У механиці потрібно обчислювати тангенціальні та нормальні вектори. Для цього також використовуються скалярні добутки.

Визначимо поняття **проектування векторів один на одний.**



Розглянемо два вектори **A** та **B**. Спроєктуємо вектор **A** на вектор **B.** Спочатку вектор **B** паралельно перенесемо так, щоб збігалися початки обох векторів. Потім з кінця вектора **A** опустимо перпендикуляр на вектор **B.** Відрізок довжиною A1 називають проекцією вектора **A** на вектор **B**, а вектор **A1** називають вектор-проекцією. Якщо відомий кут між векторами **(A^B)**, то проекція A1 = A cos **(A^B)**, а вектор-проекція **A1** = A1**b**, де **b** є власний орт вектора **B** = B**b**, тобто **b** = **B** / |**B**|.
Косинус кута між векторами cos(**A^B**)=**ab**, де **a**-власний орт вектора **A**. Тоді A1=A**ab**=**Ab**, а вектор-проекція **A1**=(**Ab**)**b**. Вектор-проекція **A2** векторв **A** на напрямок, що перпендикулярний до вектора **B**, є, очевидно, **A2**=**A**-**A1.** При проектуванні вектора **B** на **A** маємо: проекція B1 = **Ba**, вектор-проекція **B1** = (**Ba**)**a**, **B2** = **B** - **B1.**

Обчислення скалярного добутку можна зробити двома засобами: обчислення за означенням чи у координатній формі за формулою:

$$(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

З цієї формули випливає "таблиця скалярного множення" для ортів вісей координат:

(i, i) =1, (i, j) =0, (i, k) =0, (j, j) =1, (j, k) =0, (k, k) =1.

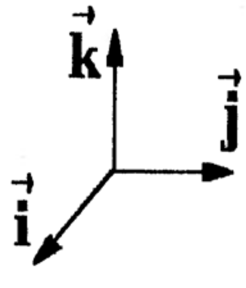
До **геометричних властивостей скалярного добутку** можна віднести:

1. Необхідну та достатню умову ортогональності (перпендикулярності) двох ненульових векторів - рівність нулю їх скалярного добутку:
(a, b) =0 <=> **a** ортогональний до **b**;
2. **(a, b)**<0 <=> кут між векторами тупий;
(a, b)>0 <=> кут між векторами гострий
3. Косинус кута між ненульовими векторами **a** та **b** може бути обчислений за допомогою скалярного добутку за формулою: cos(θ)=**(a,b)/|a||b|**

Геометрична інтерпретація скалярного добутку - амплітуда косинусоїди.

Векторним добутком ненульових та неколінеарних векторів **a** та **b** називають вектор **c**, що позначається символами **c=[a,b]=axb** та відповідає трьом умовам:
1. модуль вектора **c** дорівнює добутку модулів векторів **a** та **b** на синус кута між ними: |**[a, b]**| = | **ax b** |= |**a**| |**b**| sin (θ) ;
2. вектор **c** перпендикулярний до кожного з векторів **a** та **b** ;
3. впорядкована трійка векторів **a, b, c** - права.
Векторний добуток вважають рівним нулю, якщо хоча б один з векторів **a** чи **b** дорівнює **0** або якщо вони колінеарні.

Векторний добуток векторів **a** та **b** породжує новий вектор **c: axb=c** . Як і будь-який інший вектор, його можна записати у вигляді добутку модуля вектора |**c**| на його власний орт : **c=|c|e.** Довжина вектора дається виразом |**c**|=|**a**||**b**||sin(θ)|, а напрям **e** вектора **c** такий, що вектор **c** є перпендикулярним до площини, що створена векторами, які перемножуються, і трійка векторів **a, b, c** повинна бути правою. З непарності синуса [sin(x) = - sin(-x)] випливає антикомутація

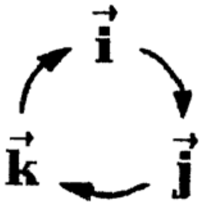


півмножників у векторному добутку: **axb=-bxa** . Орти **i,j,k** прямокутної декартової (правої) системи координат **x,y,z**, відповідно, називають базисними векторами 3-вимірного простору. Вони складають ортогональний базис, оскільки кожен з трьох векторів є перпендикулярним до двох інших. Ліва система ортів (координат) будується при одній з трьох можливих перестанов: **i<=>j, i<=>k, j<=>k** або шляхом однієї з трьох можливих змін ортів на їх обернені: **i<=>-i, j<=>-j, k<=>-k**

Тепер розглянемо **векторний добуток векторів у координатній формі**.

$$\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\mathbf{x}(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})=[(a_x\mathbf{i}\mathbf{x}b_x\mathbf{i})+(a_x\mathbf{i}\mathbf{x}b_y\mathbf{j})+$$
$$+(a_x\mathbf{i}\mathbf{x}b_z\mathbf{k})]+[(a_y\mathbf{j}\mathbf{x}b_x\mathbf{i})+(a_y\mathbf{j}\mathbf{x}b_y\mathbf{j})+(a_y\mathbf{j}\mathbf{x}b_z\mathbf{k})]+[(a_z\mathbf{k}\mathbf{x}b_x\mathbf{i})+$$
$$+(a_z\mathbf{k}\mathbf{x}b_y\mathbf{j})+(a_z\mathbf{k}\mathbf{x}b_z\mathbf{k})].$$

Оскільки $\sin 0=0$ для $0=0$,то діагональні добутки ортів $\mathbf{ixi}=\mathbf{jxj}=\mathbf{kxk}=0$ а недіагональні добутки $\mathbf{ixj}=\mathbf{k}$, $\mathbf{ixk}=-\mathbf{j}$, $\mathbf{jxk}=\mathbf{i}$ і таке інше у узгодженні з "правилом правої руки". Для визначення перехресних



добутків зручно користуватися мнемонічною схемою у вигляді діаграми. Якщо у парі векторів, що перемножуються, рух від першого (лівого) множника до другого (правого) йде за годинниковою стрілкою, то результуючий вектор (третій) береться зі знаком "плюс", якщо проти годинникової стрілки, то зі знаком "минус", наприклад, $\mathbf{k}\ \mathbf{x}\ \mathbf{j}\ =\ -\mathbf{i}$.

У підсумку дев'ятичленна сума спрощується до

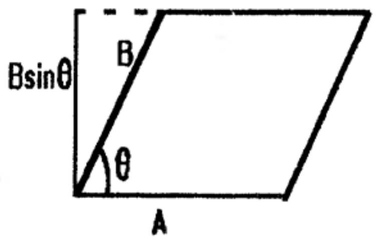
$$\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}\mathbf{x}b_y\mathbf{j})+(a_x\mathbf{i}\mathbf{x}b_z\mathbf{k})+(a_y\mathbf{j}\mathbf{x}b_x\mathbf{i})+(a_y\mathbf{j}\mathbf{x}b_z\mathbf{k})+(a_z\mathbf{k}\mathbf{x}b_x\mathbf{i})+$$
$$+(a_z\mathbf{k}\mathbf{x}b_y\mathbf{j})=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}$$

Або у більш наочному запису, що легко запам'ятовується, через визначник (детермінант) 3-го порядку:

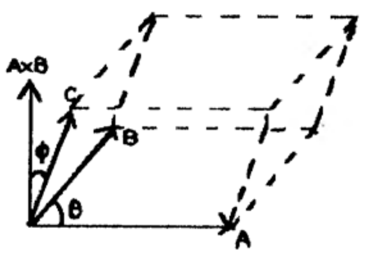
$$\bar{a}\mathbf{x}\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{i}(a_yb_z-a_zb_y)-\bar{j}(a_xb_z-a_zb_x)+\bar{k}(a_xb_y-a_yb_x)$$

Отже, векторний добуток має такі властивості:
$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=-[\mathbf{b},\ \mathbf{a}]$ (антикомутативність),
$[\alpha;\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=\alpha;[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ (асоціативність відносно множення на число),
$[\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2},\mathbf{b}]=[\mathbf{a_1},\mathbf{b}]+\mathbf{a_2},\mathbf{b}]$ (дистрибутивність відносно додавання векторів).
Для ортів вісей прямокутної системи координат справедлива "таблиця векторного множення" : $[i,i]=0$, $[i,j]=k$, $[i,k]=-j$, $[j,i]=-k$, $[j,j]=0$, $[j,k]=i$, $[k,i]=j$, $[k,j]=-i$, $[k,k]=0$

Тепер розглянемо **потрійний мішаний добуток [A x B]C**



Розглянемо два вектори **A** та **B** з кутом θ між ними. Вони є твірними паралелограма. Площа цього паралелограма дорівнює модулю векторного добутку: |**AxB**|=ABsinθ Згадайте з шкільної геометрії, що площа паралелограма дорівнює добутку основи паралелограма на його висоту. Роль основи на цьому рисунку грає довжина A вектора **A**, а висота дорівнює B sin θ.



Мішаним добутком трьох векторів a,b,c називають число, що позначається символом **abc** і дорівнює скалярному добутку вектора **a** на векторний добуток векторів **b** та **c**: **abc**=(**a**,[**b**,**c**]). Мішаний добуток має властивість: (**a**[**b**,**c**])=(**b**[**c**,**a**])=(**c**[**a**,**b**]) У потрійному мішаному добутку **[A x B] C** трьох векторів **A, B, C** вектор **[AxB]** множиться скалярно на **C.** У підсумку виходить скаляр |**AxB**||**C**|cosφ , де |**AxB**|=ABsinθ є площа основи паралелепипеда, що побудований на векторах **A,B,C,** як його твірних, а |**C**|cosφ є висота паралелепипеда. Таким чином, добуток **[AxB]C** дає об'єм паралелепипеда, що побудований на векторах **A,B,C.** Помітимо також, що добуток **[AxB]C** можна представити визначником 3-го порядку, перший рядок якого містить компоненти вектора **A,** другий - компоненти вектора **B,** третій - вектора **C.**

Обчислення мішаного добутку у координатній формі робиться за формулою:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=x_1(y_2z_3-y_3z_2)-y_1(x_2z_3-x_3z_2)+z_1(x_2y_3-x_3y_2)$$

Геометричні властивості мішаного добутку:
а) модуль мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепипеда, що побудований на векторах, приведених до спільного початку;
б) необхідною та достатньою умовою компланарності трьох ненульових векторів є рівність нулю їх мішаного добутку:
$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ компланарні $\Leftrightarrow \mathbf{abc}=0$.
У фізичних прикладеннях вектор $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ називають вектором майданчика, що створений векторами $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$.

1.5. N-мірний векторний простір

Довільний впорядкований набір $x_1,x_2,...,x_n$ n дійсних чисел називається **n-мірним вектором $\mathbf{x}$.** Числа $x_1,x_2,...,x_n$, що складають цей набір, називаються **координатами вектора $\mathbf{x}$**. Координати n-мірного вектора $\mathbf{x}$ ми можемо розташувати у рядок чи у стовпець. У першому випадку кажуть про **вектор-рядок** $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, а у другому - про **вектор-стовпець** $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Два n-мірних вектори, наприклад вектори-рядки $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ та $\mathbf{x}'=(x'_1,x'_2,...,x'_n)$, називаються **рівними**, якщо в них рівні відповідні координати: $x_1=x'_1, x_2=x'_2,\dots,x_n=x'_n$; **нульовим вектором** називається вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, його будемо позначати $\mathbf{0}$. Введемо **операції над векторами**. **Сумою** векторів $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ та $\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ будемо називати вектор $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$. Оскільки координати вектора - дійсні числа, то з асоціативності та комутативності додавання дійсних чисел, а також властивостей нуля, випливають властивості:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, (комутативність додавання)
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$, (асоціативність додавання)
3. існує елемент $\mathbf{0}$ (нульовий вектор) такий, що $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для будь-якого $\mathbf{x}$.

Добутком вектора $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, на число λ називається вектор $\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$. Тоді зрозуміло, що $-\mathbf{x}=(-1)\mathbf{x}=(-x_1,-x_2,...,-x_n)$, та $\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Тоді справедлива властивість

4. для кожного $\mathbf{x}$ існує елемент, що позначається через $-\mathbf{x}$, такий, що $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$. З властивостей множення дійсних чисел вірно також:
5. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$,

6.$\alpha(\beta\mathbf{x})=\alpha\beta(\mathbf{x})$,

7.$(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$,

8.$\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$.

Сукупність усіх n-мірних векторів називається **n-мірним векторним простором**.

Розглянемо систему k векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ (1.1)

з n-мірного векторного простору. Якщо вектор $\mathbf{y}$ лінійно виражається через вектори системи (1.1), тобто,

$$\mathbf{y}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n \qquad (1.2)$$

то кажуть, що вектор $\mathbf{y}$ розкладається по векторах $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ системи (1.1). Помітимо, що нульовий вектор завжди розкладається по векторах системи (1.1) (для цього достатньо усі коефіцієнти λ_i лінійної комбінації (1.2) покласти рівними нулю). Так само будь-який вектор $\mathbf{x}_i$ системи (1.1) лінійно виражається через вектори цієї системи (для цього достатньо прийняти $\lambda_i = 1$, а усі остатні коефіцієнти покласти рівними нулю). Припустимо, що вектор $\mathbf{y}$ лінійно виражається не через усю систему (1.1) векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$, а лише через її частину. Іншою мовою, серед векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ існує r векторів $(r<k)$, деяка лінійна комбінація яких дорівнює вектору $\mathbf{y}$. Якщо, наприклад, це перші r векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_r$, то $\mathbf{y}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ - коефіцієнти лінійної комбінації. До цієї лінійної комбінації ми можемо додати остатні $k - r$ векторів $\mathbf{x}_{r+1},\mathbf{x}_{r+2},\ldots,\mathbf{x}_k$ з коефіцієнтами $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_k$, що дорівнюють нулю: $\mathbf{y}=\lambda_1\mathbf{x}_1 +\lambda_2\mathbf{x}_2+\ldots+\lambda_r\mathbf{x}_r +0\cdot\mathbf{x}_{r+1}+\ldots+0\cdot\mathbf{x}_k$. Таким чином, вектор $\mathbf{y}$ виявився лінійною комбінацією вже усіх векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$. Тому, якщо деякий вектор $\mathbf{y}$ лінійно виражається через частину системи векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$, то він виражається і через усі вектори цієї системи.

Задамо дві системи n-мірних векторів: $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ (1.1)

та $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_l$ (1.3)

Ми кажемо, що система (1.3) лінійно виражається через систему (1.1), якщо кожний вектор системи (1.3) лінійно виражається через вектори системи (1.1). З наведеного вище випливає, що якщо система (1.3) виражається через частину системи (1.1), то вона виражається і через усі вектори системи (1.1).

Поряд з системами (1.1) та (1.3), розглянемо ще третю систему n-мірних векторів: $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\ldots,\mathbf{z}_m$. (1.4)

Лемма 1. Якщо система (1.4) лінійно виражається через систему (1.3), а система (1.3) лінійно виражається через систему (1.1), то система (1.4) лінійно виражається через систему (1.1).

Доведення. Візьмемо довільний вектор, наприклад $\mathbf{z_i}$, з системи (1.4) та доведемо, що він лінійно виражається через вектори системи (1.1). За умовою лемми вектор $\mathbf{z_i}$ є лінійною комбінацією векторів системи (1.3), тобто $\mathbf{z_1}=\lambda_1\mathbf{y_1}+\lambda_2\mathbf{y_2}+...+\lambda_l\mathbf{y_l}$. (1.5)
Так само за умовою лемми кожний вектор $\mathbf{y_j}$ $(j=1,2,\dots,l)$ є лінійною комбінацією векторів системи (1.1). Тому

$$\mathbf{y_1} = a_{11}\mathbf{x_1}+a_{12}\mathbf{x_2}+...+a_{1k}\mathbf{x_k},$$

$$\mathbf{y_2} = a_{21}\mathbf{x_1}+a_{22}\mathbf{x_2}+...+a_{2k}\mathbf{x_k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{y_l} = a_{11}\mathbf{x_1}+a_{l2}\mathbf{x_2}+...+a_{lk}\mathbf{x_k}, \qquad (1.6)$$

Тут a_{ij} позначають коефіцієнти лінійних комбінацій. Підставляючи у (1.5) замість $\mathbf{y_j}$ $(j=1,2,...,l)$ їх вирази з рівностей (1.6), дістанемо, очевидно, вираз вектора $\mathbf{z_i}$ через вектори $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\dots,\mathbf{x_k}$ системи (1.1). Оскільки вектор $\mathbf{z_i}$ є довільним вектором системи (1.4), то кожний вектор системи (1.4) лінійно виражається через вектори системи (1.1). Лемма доведена.
Система векторів $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\dots,\mathbf{x_k}$ називається **лінійно залежною**, якщо існує лінійна комбінація $\lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2}+...+\lambda_k\mathbf{x_k}=\mathbf{0}$ цих векторів, що дорівнює нулю, у якій хоча б один з коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$ не дорівнює нулю.

Теорема 1. Вектори $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\dots,\mathbf{x_n}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них лінійно виражається через інші.
Доведення. Необхідність. Припустимо спочатку, що вектори $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\dots,\mathbf{x_n}$ лінійно залежні. Тоді існують такі не усі рівні нулю коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots,\lambda_n$, для яких виконується співвідношення $\lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2}+...+\lambda_n\mathbf{x_n}=\mathbf{0}$. Хай, наприклад, $\lambda_i \neq 0$. З цього співвідноношення можна виразити вектор $\mathbf{x_i}$: $\mathbf{x_i} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\mathbf{x_1} - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\mathbf{x_{i-1}} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\mathbf{x_{i+1}} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\mathbf{x_n}$

(ділити на λ_i можна, оскільки $\lambda_i \neq 0$). Отримана рівність вказує, що вектор $\mathbf{x_i}$ лінійно виражається через остатні вектори. (Коефіцієнтами лінійної комбінації є числа $-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ $(j=1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$. Цим доведена необхідність ствердження теореми.

Достатність. Припустимо, що один з векторів, наприклад $\mathbf{x}_l$, лінійно виражається через остатні вектори:
$\mathbf{x}_l=\mu_1\mathbf{x}_1+\mu_2\mathbf{x}_2+\ldots+\mu_{l-1}\mathbf{x}_{l-1}+\mu_{l+1}\mathbf{x}_{l+1}+\ldots+\mu_n\mathbf{x}_n$. Перенесемо $\mathbf{x}_l$ у праву частину: $\mu_1\mathbf{x}_1+\mu_2\mathbf{x}_2+\ldots+\mu_{l-1}\mathbf{x}_{l-1}-\mathbf{x}_l+\mu_{l+1}\mathbf{x}_{l+1}+\ldots+\mu_n\mathbf{x}_n=\mathbf{0}$. Це співвідношення вказує на присутність лінійної комбінації векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$, що дорівнює нулю. Роль коефіцієнтів цієї лінійної комбінації грають числа $\mu_1,\ldots,\mu_{l-1}, -1, \mu_{l+1},\ldots,\mu_n$. Серед них є один відмінний від нуля коефіцієнт (а саме -1). Тому вектори $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ лінійно залежні. Цим доведена достатність теореми. Таким чином, теорема доведена.

Лемма 2. Хай дані дві системи векторів

$$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k \tag{1.1}$$

та

$$\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_l. \tag{1.3}$$

Хай, далі, кожен з векторів $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_l$ системи (1.3) є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ системи (1.1). Тоді, якщо вектори $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_l$ лінійно незалежні, то $l \le k$. Іншою мовою, серед лінійних комбінацій k векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ не може бути більш за k лінійно незалежних.

Доведення лемми проведемо по індукції. При $k=1$ вона є очевидною (один вектор завжди лінійно незалежний, якщо він не дорівнює нулю).
Припустимо, що лемма є вірною для $k-1$ векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}$, і доведемо при цьому, що вона є вірною для k векторів. Отже, хай серед лінійних комбінацій $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ є лінійно незалежні вектори $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_l$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &=\alpha_{11}\mathbf{x}_1+\ldots+\alpha_{1k}\mathbf{x}_k,\\
\mathbf{y}_2 &=\alpha_{21}\mathbf{x}_1+\ldots+\alpha_{2k}\mathbf{x}_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{y}_l &=\alpha_{l1}\mathbf{x}_1+\ldots+\alpha_{lk}\mathbf{x}_k,
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Нам треба показати, що $l \le k$. Якщо усі коефіцієнти при $\mathbf{x}_k$ дорівнюють нулю, лемма доведена, оскільки у цьому випадку, за припущенням індукції, справедлива нерівність $l \le k-1$, а тому і $l \le k$. Хай хоча б один з коефіцієнтів при $\mathbf{x}_k$, наприклад α_{lk}, не дорівнює нулю. Щоб провести індукцію, ми побудуємо $l-1$ нових лінійно незалежних векторів, які будуть лінійними комбінаціями векторів $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}$. Для цього з останньої рівності виразимо $\mathbf{x}_k$: $\mathbf{x}_k=\dfrac{1}{\alpha_{lk}}\mathbf{y}_1-\dfrac{\alpha_{l1}}{\alpha_{lk}}\mathbf{x}_1-\ldots-\dfrac{\alpha_{lk-1}}{\alpha_{lk}}\mathbf{x}_{k-1}$. Цей вираз для $\mathbf{x}_k$ підставимо тепер у кожну з перших $l-1$ рівностей (1.6) та приведемо подібні члени. Ми дістанемо рівності наступного вигляду:

$$\mathbf{y}_1 - \frac{a_{1k}}{a_{lk}}\mathbf{y}_l = \beta_{11}\mathbf{x}_1+\ldots+\beta_{1k-1}\mathbf{x}_{k-1},$$

$$\mathbf{y}_2 - \frac{a_{2k}}{a_{lk}}\mathbf{y}_l = \beta_{21}\mathbf{x}_1+\ldots+\beta_{2k-1}\mathbf{x}_{k-1},$$

....

$$\mathbf{y}_{l-1} - \frac{a_{l-1k}}{a_{lk}}\mathbf{y}_l = \beta_{l-11}\mathbf{x}_1+\ldots+\beta_{l-1k-1}\mathbf{x}_{k-1} \qquad (1.7)$$

Ці рівності позначають, що кожний з $l-1$ векторів $\mathbf{y}_1' = \mathbf{y}_1 - \frac{a_{1k}}{a_{lk}}\mathbf{y}_l, \ldots,$

$\mathbf{y}_{l-1}' = \mathbf{y}_{l-1} - \frac{a_{l-1k}}{a_{lk}}\mathbf{y}_l$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$.
Якщо ми доведемо, що вони лінійно незалежні, то, за припущенням індукції, звідси буде випливати, що $l-1 \leq k-1$, тобто $l \leq k$. Таким чином, нам зосталося показати, що вектори $\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \ldots, \mathbf{y}_l'$ лінійно незалежні. Но це майже очевндно. Дійсно, припустимо, що $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$ - такі числа, що $\lambda_1\mathbf{y}_1' + \lambda_2\mathbf{y}_2' + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{y}_{l-1}' = \mathbf{0}$, тобто що

$$\lambda_1\left(y_1 - \frac{a_{1k}}{a_{lk}}y_1\right) + \ldots + \lambda_{l-1}\left(y_{l-1} - \frac{a_{l-1k}}{a_{lk}}y_l\right) = 0.$$

Розкриваючи дужки, дістанемо:

$$\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \lambda_{l-1}\mathbf{y}_{l-1} - \left(\lambda_1\frac{a_{1k}}{a_{lk}} + \ldots + \lambda_{l-1}\frac{a_{l-1k}}{a_{lk}}\right)y_l = 0$$

Оскільки вектори $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_l$ лінійно незалежні, то усі коефіцієнти у останній рівності дорівнюють нулю. Наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{l-1} = 0$, а це означає, що вектори $\mathbf{y}_1', \mathbf{y}_2', \ldots, \mathbf{y}_{l-1}'$ лінійно незалежні. Лемма цілком доведена. Розглянемо систему векторів (1.1). **Максимальною лінійно незалежною підсистемою системи** (1.1) називається будь-який набір векторів з цієї системи, що задовольняє наступним умовам:
а) вектори цього набора лінійно незалежні;
б) будь-який вектор з системи (1.1) лінійно виражається через вектори цього набора.
Власне кажучи, система (1.1) може мати декілька різних максимальних лінійно незалежних підсистем. Однак ми зараз доведемо, що усі такі підсистеми складаються з однієї й тієї ж кількості векторів. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Усі максимальні лінійно незалежні підсистеми даної системи векторів мають одну й ту ж саму кількість векторів.

Доведення. Припустимо, що теорема не є вірною. Тоді система (1.1) містить, принаймні, дві максимальні лінійно незалежні підсистеми

$$\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \ldots, \mathbf{x}_r' \qquad (1.8)$$

та

$$\mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'', \ldots, \mathbf{x}_r'' \qquad (1.9)$$

з різною кількістю векторів: $r' \neq r''$. Хай для визначеності $r'' > r'$. Усі вектори з підсистеми (1.9) належать до системи (1.1). З іншого боку, набір (1.8) є максимальною лінійно незалежною підсистемою системи (1.1). Тому система (1.9) лінійно виражається через систему (1.8). Оскільки $r'' > r'$, то, пристосовуючи лемму 2 до систем (1.8) та (1.9), дістанемо, що вектори системи (1.9) лінійно залежні. Але це сперечається з визначенням максимальної лінійно незалежної підсистеми (див. пункт а) визначення вище). Отримане протиріччя вказує, що наше припущення про несправедливість теореми не може мати сенсу. Теорема доведена.

Доведена теорема дозволяє ввести наступне важливе означення. **Кількість векторів у максимальній лінійно незалежній підсистемі системи (1.1) називається рангом системи (1.1)**.

Припустимо, що задані дві системи n-мірних векторів: система (1.1) та система (1.3). Системи (1.1) та (1.3) називаються **еквівалентними**, якщо система (1.1) лінійно виражається через систему (1.3) та, навпаки, система (1.3) лінійно виражається через систему (1.1). Власне кажучи, еквівалентні системи можуть містити різну кількість векторів. Однак, як вказує наступна теорема, ранги цих систем завжди однакові.

Теорема 3. Ранги еквівалентних систем рівні.

Доведення. Об'єднаємо еквівалентні системи (1.1) та (1.3) у одну систему

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_l \qquad (1.10)$$

Оберемо у системі (1.1) яку-небудь максимальну лінійно незалежну підсистему

$$\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \ldots, \mathbf{x}_r' \qquad (1.11)$$

Тоді система (1.1) лінійно виражається через вектори підсистеми (1.11). Але система (1.3) виражається через систему (1.1). Тому система (1.3) лінійно виражається через систему (1.11). Це означає, що система (1.11) є максимальною лінійно незалежною підсистемою усієї об'єднаної системи (1.10). Тому ранг r системи (1.10) дорівнює рангу r'системи (1.1).

Аналогічно впевнюємося, що ранг q системи (1.3) також дорівнює рангу r системи (1.10). Тому $q = r'$, що і потрібно було довести.

Для практичного обчислення рангу системи n-мірних векторів вкажемо ряд операцій, кожна з яких переводить задану систему (1.1) у систему, що еквівалентна до неї.

1. Зміна нумерації векторів у системі. Ця операція переводить систему (1.1) векторів у ту ж саму систему, а тому і у еквівалентну систему.

2. Видалення нульового вектора.

Припустимо, що у системі (1.1) один з векторів, наприклад $\mathbf{x_k}$, є нульовим вектором, тобто $\mathbf{x_k}=\mathbf{0}$. Видаливши цей вектор з системи (1.1), дістанемо нову систему $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_{k-1}}$ (1.12)

Доведемо еквівалентність систем (1.1) та (1.12). Дійсно, будь-який вектор системи (1.12) є у той же самий час вектором системи (1.1). Тому система (1.12) лінійно виражається через систему (1.1). Навпаки, усякий вектор, крім $\mathbf{x_k}$, системи (1.1) належить до системи (1.12) і тому виражається через систему (1.12). Вектор $\mathbf{x_k}$ за умовою дорівнює нулю та тому також лінійно виражається через систему (1.12). Таким чином, усі вектори системи (1.1) лінійно виражаються через вектори системи (1.12), і тому системи (1.1) та (1.12) еквівалентні.

3. Видалення лінійної комбінації векторів.

Припустимо, що у системі (1.1) один з векторів, наприклад $\mathbf{x_k}$, є лінійною комбінацією інших векторів системи: $\mathbf{x_k}=\lambda_1\mathbf{x_1}+\lambda_2\mathbf{x_2}+\dots+\lambda_{k-1}\mathbf{x_{k-1}}$. Видаливши з системи (1.1) вектор $\mathbf{x_k}$, дістанемо систему

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_{k-1}}$. (1.13)

Доведемо, що системи (1.1) та (1.13) еквівалентні. Дійсно, система (1.13), очевидно, виражається через систему (1.1), оскільки система (1.1) містить кожний її вектор. З іншого боку, усі вектори, крім $\mathbf{x_k}$, системи (1.1) належать і до системи (1.13), а тому виражаються через цю систему. У той же час вектор $\mathbf{x_k}$ за умовою є лінійною комбінацією векторів системи (1.13). Тому система (1.1) виражається через систему (1.13), і ці системи еквівалентні.

4. Множення довільного вектора системи на будь-яке відмінне від нуля число.

Припустимо, що у системі (1.1) вектор $\mathbf{x_k}$ ми помножимо на число $\lambda\neq 0$. Дістанемо нову систему векторів $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \lambda\mathbf{x_k}$ (1.14)

Система (1.14), очевидно, лінійно виражається через систему (1.1). Навпаки, вектор $\mathbf{x_k}$ системи (1.1) виражається через вектори системи (1.14) таким чином: $\mathbf{x_k}=0\mathbf{x_1}+0\mathbf{x_2}+\dots+0\mathbf{x_{k-1}}+\frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{x_k})$. Остатні вектори системи (1.1) належать і системі (1.14) і тому через неї виражаються. Отже, системи (1.1) та (1.14) еквівалентні.

5. Додавання до одного з векторів системи лінійної комбінації остатніх векторів системи.

Припустимо, що до вектора $\mathbf{x_k}$ системи (1.1) додається деяка лінійна комбінація $\lambda_1\mathbf{x_1} + \lambda_2\mathbf{x_2} + \ldots + \lambda_{k-1}\mathbf{x_{k-1}}$ остатніх векторів. Прийдемо до нової системи $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_{k-1}}, \mathbf{x_k}'$ (1.15)
де $\mathbf{x_k}' = \mathbf{x_k} + \lambda_1\mathbf{x_1} + \lambda_2\mathbf{x_2} + \ldots + \lambda_{k-1}\mathbf{x_{k-1}}$. Ясно, що система (1.15) лінійно виражається через систему (1.1). Навпаки, усі вектори системи (1.1), крім вектора $\mathbf{x_k}$, самі належать до системи (1.15) і тому виражаються через неї. У той же час вектор $\mathbf{x_k}$ наступним чином виражається через систему (1.15): $\mathbf{x_k} = \mathbf{x_k}' - \lambda_1\mathbf{x_1} - \lambda_2\mathbf{x_2} - \ldots - \lambda_{k-1}\mathbf{x_{k-1}}$. Цим доведено, що системи (1.1) та (1.15) еквівалентні.

Розглянемо систему сходинкового вигляду з k $(k \le n)$ векторів n-мірного векторного простору:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x_1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1i-1}, x_{1i}, \ldots, x_{1k}, \ldots, x_{1n})\\
&\mathbf{x_2} = (0, x_{22}, \ldots, x_{2i-1}, x_{2i}, \ldots, x_{2k}, \ldots, x_{2n})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (x_{ii} \ne 0,\ i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (1.16)\\
&\mathbf{x_i} = (0, 0, \ldots\ldots, 0, x_{ii}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{in})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{x_k} = (0, 0, \ldots\ldots, 0, 0, \ldots 0, x_{kk}, \ldots, x_{kn})
\end{aligned}
$$

Розглянемо лінійну комбінацію векторів системи (1.16): $\lambda_1\mathbf{x_1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{x_k}$. Визначимо, при яких значеннях λ_i ця лінійна комбінація буде дорівнювати нулю: $\lambda_1\mathbf{x_1} + \ldots + \lambda_k\mathbf{x_k} = \mathbf{0}$. Для цього запишемо ліву та праву частини останньої рівності, використовуючи координати векторів $\mathbf{x_i}$ та вектора $\mathbf{0}$.

$$
\lambda_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \ldots \\ x_{1k-1} \\ x_{1k} \\ \ldots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ x_{22} \\ \ldots \\ x_{2k-1} \\ x_{2k} \\ \ldots \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ x_{kk} \\ \ldots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{12} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x_{1k-1} + \lambda_2 x_{2k-1} + \ldots + \lambda_{k-1} x_{k-1k-1} \\ \lambda_1 x_{1k} + \lambda_2 x_{2k} + \ldots + \lambda_k x_{kk} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \ldots + \lambda_k x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Вектори рівні, якщо рівні їх координати, тому остання рівність рівносильна до системи рівнянь, яку можна розглядати як систему ріанянь відносно невідомих λ_i:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} = 0 \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{12} = 0 \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ \lambda_1 x_{1k-1} + \lambda_2 x_{2k-1} + \dots + \lambda_{k-1} x_{k-1k-1} = 0 \\ \lambda_1 x_{1k} + \lambda_2 x_{2k} + \dots + \lambda_k x_{kk} = 0 \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ \lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \dots + \lambda_k x_{kn} = 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $x_{11} \neq 0$, то з першого рівняння випливає $\lambda_1 = 0$. Далі, з другого рівняння випливає $\lambda_2 = 0$ $(x_{22} \neq 0)$, і т.с. З k-го рівняння випливає $\lambda_k = 0$ $(x_{kk} \neq 0)$. Таким чином, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. У цьому випадку останні $n - k$ рівнянь перетворюються на тотожності. Тим самим ми довели, що рівність $\lambda_1 \mathbf{x_1} + \dots + \lambda_k \mathbf{x_k} = \mathbf{0}$ можлива тоді і лише тоді, коли усі $\lambda_i = 0$. Тому справедлива наступна теорема.

Теорема 4. Система векторів (1.16) лінійно незалежна.

Наслідок 1. Система векторів

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ лінійно незалежна.} \qquad (1.17)$$

Лінійно незалежну систему векторів $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$ називають **стандартним базисом n-мірного векторного простору**. Будь-який вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна розкласти по базисних векторах $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e_1} + x_2 \mathbf{e_2} + \dots + x_n \mathbf{e_n}$$

Тому з лемми 2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. Максимальна кількість лінійно незалежних векторів n-мірного векторного простору не перевищує n.

Вкажемо практичний засіб визначення рангу системи векторів. Цей засіб-застосування описаних вище операцій над даною системою, які перетворюють її у еквівалентну систему, з ціллю отримання системи векторів вигляду (1.16), яка за теоремою 4 буде лінійно незалежна, а кількість векторів цієї системи буде давати значення рангу даної системи. Аналізуючи ці операції, легко бачити, що вони такі ж самі, як елементарні перетворення, що переводять дану систему лінійних рівнянь у рівносильну до неї систему. Тому засіб, що пропонується- це застосування прямого ходу метода Гаусса до векторів даної системи, вважаючи кожний вектор системи набором коефіцієнтів перед невідомими для визначеного рівняння системи (права частина системи рівнянь нас не цікавить).

Приклад . Обчислити ранг системи векторів $\mathbf{x_1} = (1, 3, 5, 4)$, $\mathbf{x_2} = (2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{x_3} = (8, 3, 19, 11)$.

Для зручності обчислень запишемо систему векторів у вигляді матриці

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & x_1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & x_2 \\ 8 & 3 & 19 & 11 & x_3 \end{array}\right\rangle$$

Відіймемо від другого рядку подвійний перший, а від третього - перший, помножений на 8. Від цього ранг системи не змінюється. Дістанемо

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & x_1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & x_2-2x_1 \\ 0 & -21 & -21 & -21 & x_3-8x_1 \end{array}\right\rangle.$$

Помножимо другий рядок на $-\dfrac{1}{7}$, а третій – на $-\dfrac{1}{21}$, тобто фактично поділимо ці рядки на -7 та на -21. Від цього ранг системи не змінюється

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -(1/7)x_2+(2/7)x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -(1/21)x_3+(8/21)x_1 \end{array}\right\rangle$$

Відіймемо від третього рядку другий, ранг не зміниться :

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -(1/7)x_2+(2/7)x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1/21)x_3+(1/7)x_2+(2/21)x_1 \end{array}\right\rangle$$

Останній рядок матриці рівносильний до рівності :

$-\frac{1}{21}\mathbf{x_3}+\frac{1}{7}\mathbf{x_2}+\frac{1}{21}\mathbf{x_1}=\mathbf{0}$ або $\mathbf{x_3}=3\mathbf{x_2}+2\mathbf{x_1}$, тобто вектор $\mathbf{x_3}$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{x_1}$ та $\mathbf{x_2}$. Вектори $\mathbf{x_1}$ та $\mathbf{x_2}$, як випливає з теореми 4, лінійно незалежні. Тому ранг системи векторів дорівнює двом.

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1. Пряма на площині

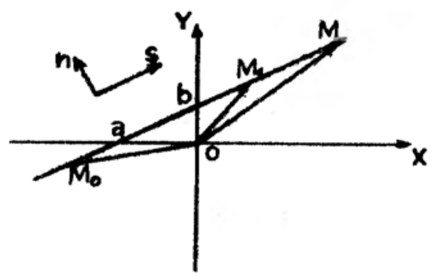


Рис. 2.1

$M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ - фіксовані точки прямої;
$M(x, y)$ - довільна точка прямої;
$\mathbf{s}(u, v)$ - напрямний вектор прямої;
$\mathbf{n}(A, B)$ - нормальний вектор прямої;
$\mathbf{r_0} = \mathbf{OM_0}$, $\mathbf{r_1} = \mathbf{OM_1}$ - радіуси-вектори фіксованих точок прямої;
$\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ - радіус-вектор довільної точки прямої;
$\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ - довільний вектор, що лежить на прямій.

Векторно-параметричне рівняння прямої :

$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{s}\,t$, t - довільне число.

Параметричне рівняння прямої:

$x = x_0 + ut$, $y = y_0 + vt$, t - довільне число.

Канонічне рівняння прямої:

$(x - x_0)/u = (y - y_0)/v$

Рівняння прямої, що проходить крізь дві дані точки:

$$(x - x_0)/(x_1 - x_0) = (y - y_0)/(y_1 - y_0)$$

Нормальне рівняння прямої у векторному вигляді:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n}) = 0 \text{ або } (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = C.$$

Рівняння прямої, що проходить крізь дану точку перпендикулярно даному вектору:

$$A(x - x_0)+B(y - y_0) = 0.$$

Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0.$$

Нормальне рівняння прямої:

$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$, α,β- кути між перпендикуляром, проведеним з початку координат на пряму, і відповідними вісями координат; p- довжина цього перпендикуляра.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$y = kx + b$, k – кутовий коефіцієнт прямої,b- точка перетину прямої з віссю ординат.

Рівняння прямої "у відрізках":

$x/a + y/b = 1$, a,b- відрізки, що відтинаються прямою на відповідних вісях координат.

Відстань від точки $M^*(x^*,y^*)$ до прямої обчислюється за формулою:

$$d = \left|x^* \cdot \cos\alpha + y^* \cdot \cos\beta - p\right| = \frac{Ax^* + By^* + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Кут між прямими та умови паралельності та перпендикулярності:

а) Хай рівняння двох прямих мають вигляд : $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$. Тоді кут між прямими знаходиться за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|;$$

$k_1= k_2 <=>$ прямі паралельні (при $b_1 = b_2$ - збігаються);

$k_1 k_2 = -1 <=>$ прямі перпендикулярні.

б) Хай рівняння двох прямих мають вигляд: $\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \mathbf{s_1}t$ та $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} + \mathbf{s_2}t$. Тоді кут між прямими знаходиться за формулою:

$$\cos \varphi = (\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}) / |\mathbf{s_1}|\, |\mathbf{s_2}|$$

$\mathbf{s_1} \,||\, \mathbf{s_2} \Leftrightarrow$ прямі паралельні (при $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} \,||\, \mathbf{s_1}$ - збігаються);
$(\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}) = 0 \Leftrightarrow$ прямі перпендикулярні.

2.2. Площина

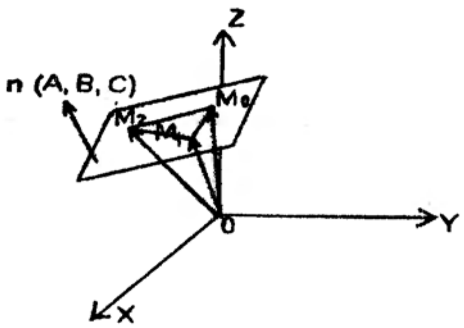


Рис. 2.2
$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - фіксовані точки площини;
$M(x,y,z)$-довільна точка площини; $\mathbf{n}(A,B,C)$-нормальний вектор
$\mathbf{r_0}=\mathbf{OM_0}, \mathbf{r_1}=\mathbf{OM_1}, \mathbf{r_2}=\mathbf{OM_2}$- радіуси-вектори фіксованих точок площини
$\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ - радіус-вектор довільної точки площини;
$\mathbf{r} - \mathbf{r_0}$ - довільний вектор, що лежить у площині.

Нормальне рівняння площини у векторній формі:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \mathbf{n}) = 0 \text{ або } (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D.$$

Рівняння площини, що проходить крізь дану точку перпендикулярно даному вектору:

$$A(x - x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Рівняння площини "у відрізках":

$x/a+y/b+z/c = 1$, a,b,c- відрізки, що відтинаються площиною на відповідних осях координат.

Рівняння площини, що проходить крізь три дані точки:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, [\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}, \mathbf{r_2} - \mathbf{r_0}]) = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Відстань від точки $M^*(x^*,y^*,z^*)$ до площини обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Кут між площинами та умови паралельності та перпендикулярності:

Хай рівняння двох площин мають вигляд : $(\mathbf{r},\mathbf{n_1})=D_1$ або A_1x+B_1y+ $+C_1z+D_1=0$ та $(\mathbf{r},\mathbf{n_1})=D_2$ або $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тоді: кут між площинами знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

$\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}$ або $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2 <=>$ площини паралельні (при $D_1= D_2$ - збігаються);
$(\mathbf{n_1},\mathbf{n_2})=0$ або $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ $<=>$ площини перпендикулярні.

2.3. Пряма у просторі

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - фіксовані точки прямої,
$M(x, y, z)$ - довільна точка прямої;
$\mathbf{s}(u, v, w)$ - напрямний вектор прямої;
$\mathbf{r_0} = \mathbf{OM_0}$ - радіус-вектор фіксованої точки прямої;
$\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ - радіус-вектор довільної точки прямої.

Векторно-параметричне рівняння прямої:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{s}\, t, \quad t \text{ - довільне число.}$$

Параметричне рівняння прямої:

$$x = x_0 + ut,\ y = y_0 + vt,\ z = z_0 + wt,$$ t - довільне число.

Канонічне рівняння прямої:

$$(x - x_0)/u = (y-y_0)/v = (z-z_0)/w$$

Якщо яке-небудь з чисел у знаменнику дорівнює 0, то вважають рівним 0 і відповідний чисельник.

Рівняння прямої, що проходить крізь дві дані точки:

$$(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1) = (z - z_1)/(z_2 - z_1)$$

Загальне рівняння прямої як лінії перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

2.4. Криві другого порядку

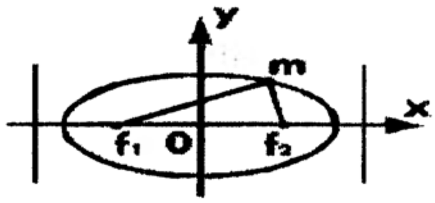
Коло - це множина точок, рівновидалених від даної точки (центра). Якщо r - радіус кола, а точка $C(a;\ b)$ - його центр, то рівняння кола має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Якщо центр кола збігається з початком координат, то рівняння має вигляд

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Еліпс – це множина точок, для яких сума відстаней до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, при цьому ця стала більша за відстань між фокусами.



Якщо фокуси еліпса знаходяться на вісі Ox на однакових відстанях від початку координат у точках $F_1(-c; 0)$ та F_2 $(c; 0)$, то канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Тут a - велика піввісь, b - мала піввісь еліпса, при чому a, b та c пов'язані співвідношенням:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

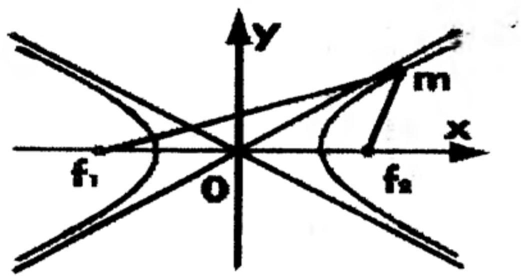
(c - половина відстані між фокусами).
Форма еліпса (міра його зтиснення) характеризується його ексцентриситетом:

$$e = c/a \ (0 \leq e < 1)$$

Вектори $\mathbf{F_1M}$ та $\mathbf{F_2M}$ називаються фокальними радіусами-векторами точки M; числа $r_1=|\mathbf{F_1M}|$ та $r_2=|\mathbf{F_2M}|$ - фокальними радіусами (в силу означення еліпса для будь-якої його точки $r_1+r_2=2a$).

Прямі , що перпендикулярні до вісі, на якій розміщені фокуси еліпса, називаються директрисами еліпса.
При $a = b$ $(e = 0)$ еліпс перетворюється на коло радіуса a.

Гіперболою називається множина точок, для яких абсолютна величина різниці відстаней до двох даних точок, що називаються фокусами, є величина стала, при цьому ця стала менше за відстань між фокусами.



Якщо розташувати фокуси гіперболи на вісі Ox у точках F_1 (c; 0) та F_2 (- c; 0), то канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$x^2 /a^2 - y^2 /b^2 = 1, \text{ де } b^2 = c^2 - a^2.$$

Число $e=c/a$ $(e>1)$ називається ексцентриситетом гіперболи. Гіпербола складається з двох гілок і розташована сіметрично відносно вісей координат.

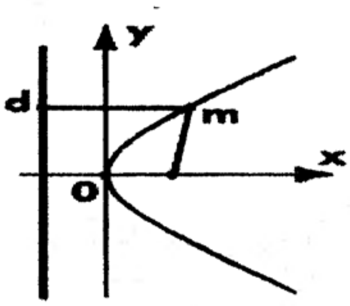
Вісь OX називається дійсною віссю, вісь OY - мнимою віссю.

Точки $A_1(a;\ 0)$ та $A_2(-a;\ 0)$ називаються вершинами гіперболи.

Вектори $\mathbf{F_1M}$ та $\mathbf{F_2M}$ називаються фокальними радіусами-векторами точки M; числа $r_1 = |\mathbf{F_1M}|$ та $r_2 = |\mathbf{F_2M}|$ - фокальними радіусами.

Прямі, що розміщені на діагоналях паралелограма, сторони якого 2a (по вісі OX) та 2b (по вісі OY), називаються асимптотами гіперболи.

Параболою називається множина точок, для яких відстань до деякої даної точки (що називається фокусом) дорівнює відстані до деякої даної прямої.



Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px,\ p>0.$$

Число p називається параметром параболи, точка $F(p/2,\ 0)$ - фокусом параболи. Вектор **FM** називається фокальним радіусом-вектором точки M; число $r = |\mathbf{FM}|$ - фокальним радіусом. Пряма $x = -p/2$ називається директрисою параболи.

2.5. Поверхні другого порядку

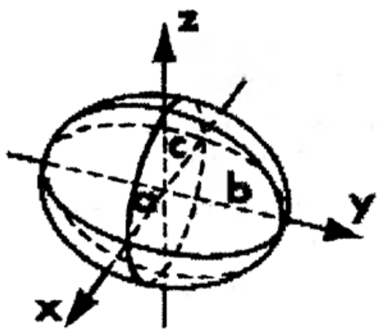
Еліпсоїд, куля.

Канонічне рівняння еліпсоїда:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

При $a=b=c=R$ еліпсоїд перетворюється на кулю радіуса R, рівняння якої

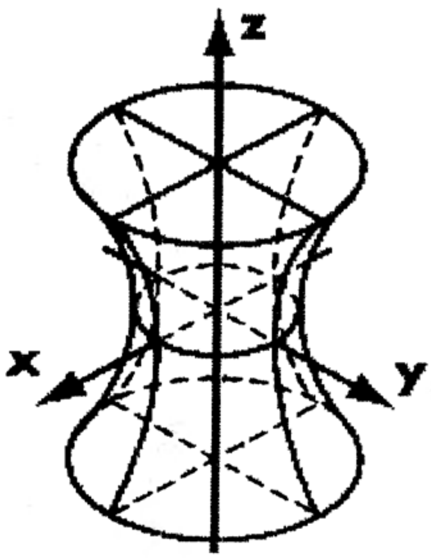
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



Гіперболоїд однопорожнинний. Гіперболоїд двопорожнинний.

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда:

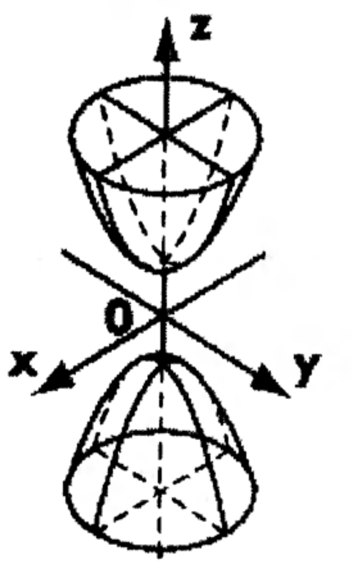
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

$x^2/a^2+y^2/b^2-$
$-z^2/c^2= -1$

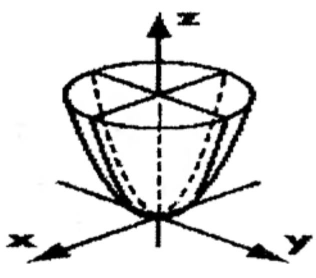


Параболоїд еліптичний. Параболоїд гіперболічний.

Канонічне рівняння еліптичного параболоїда:

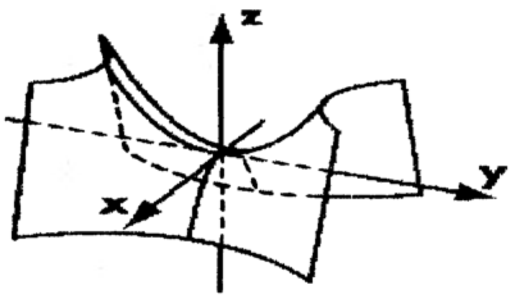
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$x^2/a^2+y^2/b^2=z$



Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда :

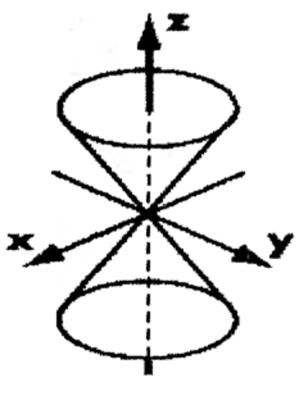
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



Конус.

Канонічне рівняння конуса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

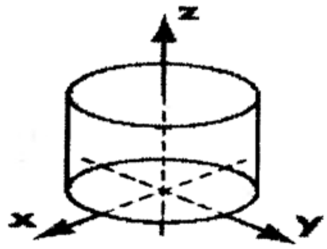


Циліндри.

Канонічне рівняння еліптичного циліндра:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

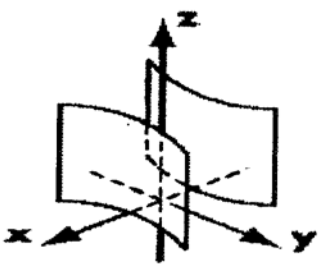
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Канонічне рівняння гіперболічного циліндра:

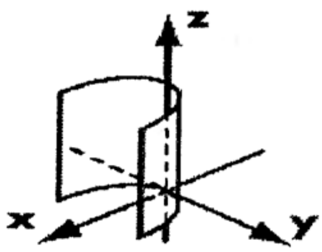
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Канонічне рівняння параболічного циліндра:

$$y^2=2px$$



Розділ 3. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ.

3.1. Основні поняття

Матрицею називається прямокутна таблиця, що заповнена деякими математичними об'єктами, наприклад, числами, векторами, функціями, похідними, інтегралами, операторами і т.с. Будемо розглядати матриці з елементами з поля дійсних чисел.Частіше за все елементи матриці позначаються однією буквою з двома індексами, що вказують "адресу" елемента - перший індекс дає номер рядка, що містить елемент, другий - номер стовпця. Якщо матриця має m рядків та n стовпців, то говорять, що матриця має **розмір** $m \times n$. Матриці звичайно позначують великими латинськими буквами, часто - напівжирними, а їх елементи - такими ж буквами, але маленькими. Таким чином, матриця (розміру $m \times n$) записується у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Припущується позначення матриці розміру $m \times n$ у вигляді $A = \{a_{ij}$, де індекс i пробігає усі значення від 1 до m, а j - від 1 до n. При позначенні матриць використовуються дужки - круглі та квадратні.
Матриці, що мають одне й те ж число n рядків та стовпців, називають **квадратними**; це число n називають **порядком** квадратної матриці

Важливу роль грають так звані **діагональні** матриці. Під цим маються на увазі квадратні матриці, що мають всі елементи рівні нулю, крім елементів головної діагоналі, тобто елементів у позиціях $(1,1)$, $(2,2)$, ..., (n,n). Діагональна матриця D з діагональними елементами d_1, d_2, ..., d_n позначається $diag(d_1,d_2,\dots,d_n)$. Діагональна матриця $diag(1, 1, \dots, 1)$ називається **одиничною** та позначається E (чи E_n) або ж I (чи I_n).

Матриця, що складається лише з нулів, називається **нульовою**.

Матрицю, що складається з одного рядка, часто називають **вектором** (рядком, вектор-рядком, рядковою матрицею), а з одного стовпця –

векрор-стовпцем (стовпцем, стовпцевою матрицею).

3.2. Арифметичні дії над матрицями

Дві матриці вважають **рівними**, якщо вони мають однаковий розмір і усі їх відповідні елементи рівні.

Матрицю $A=\{a_{ij}\}$ можна **транспонувати**, тобто замінити рядки стовпцями, а стовпці- відповідними рядками, тоді отримаємо так звану **транспоновану** матрицю $A^T=\{a_{ji}\}$.

Дві матриці $A=\{a_{ij}\}$ та $B=\{b_{ij}\}$ одного і того ж розміру $m \times n$ можна **додавати**, їх **сумою** буде матриця того ж розміру $C\{c_{ij}\}$, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, тобто щоб отримати суму двох матриць, достатньо додати відповідні елементи цих матриць, що знаходяться на однакових позиціях. Оскільки ми розглядаємо тут матриці з елементами з поля P дійсних чисел, то очевидною є **асоціативність** операції додавання матриць, що випливає з асоціативності додавання елементів поля P. Аналогічно доводиться **комутативність** додавання. Таким чином, справедливі дії:

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$; [Асоціативність]
2. $A+B=B+A$; [Комутативність]
3. Матриця 0, що складається з нулів, грає роль нуля: $A+0=A$ при будь-якій A.

Визначимо **добуток** елемента с з поля P на матрицю $A=\{a_{ij}\}$: $cA=\{ca_{ij}\}$, тобто щоб помножити матрицю на число, необхідно кожний елемент матриці помножити на це число.

4. Для будь-якої матриці A існує протилежна матриця $-A$ така, що $A+(-A)=0$.
   Матриця $-A$, очевидно, це матриця $(-1)A$, елементи якої відрізняються від елементів A знаком.
5. $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$.
6. $c(A_1+A_2)=cA_1+cA_2$.
7. $c_1(c_2A)=(c_1c_2)A$
8. $1 \cdot A=A$

Усі перелічені властивості матриць безпосередньо випливають з означень та властивостей дій у полі чисел.

Розглянемо матрицю $A=\{a_{ij}\}$ розміром $m\times n$ та матрицю $B=\{b_{ij}\}$ розміром $n \times k$. Кількість стовпців першої матриці (що стоїть ліворуч у добутку) дорівнює кількості рядків другої матриці (що стоїть праворуч у добутку). Для матриць, що мають таку властивість і тільки для таких матриць, можна ввести дію **множення матриці на матрицю**, у результаті чого дістанемо матрицю $C=\{c_{ij}\}$ розміром $m \times k$, де $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Правило множення легко запам'ятати у мовній формі: "щоб дістати елемент добутку c_{ij} двох матриць, треба елементи i-го рядка першої матриці помножити на відповідні елементи j-го стовпця другої матриці та усі добутки скласти". Це правило називають "правилом рядок на стовпець"

Приклад:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 3+2\cdot(-1)\\ (-2)\cdot(-1)+4\cdot 3 & (-2)\cdot 1+4\cdot 1 & (-2)\cdot 3+4\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 14 & 2 & -10\end{pmatrix}$$

3.3. Властивості дій множення матриць

1. $(cA)B=A(cB)=cAB$;
2. $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$;
3. $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$.

Ці властивості безпосередньо випливають з того, що елементи добутку визначаються як через елементи A, так і через елементи B у вигляді лінійних однорідних многочленів. Це можна перевірити, використовуючи правило множення та додавання матриць, групуючи необхідні доданки)

4. $(AB)C=A(BC)$ [**асоціативність множення**].

Ця властивість трактується таким чином, що якщо одна з частин рівності має сенс, то має сенс і друга, і вони рівні. Цю рівність можна довести, користуючись простим зауваженням. Хай P та Q - дві матриці такі, що PQ має сенс. Хай $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ - стовпці матриці Q. Тоді стовпцями матриці PQ є PQ_1, PQ_2, $\dots$, PQ_k, що безпосередньо випливає з означення. Це можна записати у вигляді $P(Q_1,Q_2,\dots,Q_k)=(PQ_1,PQ_2,\dots, PQ_k)$. Позначимо через $C_1,C_2,\dots,C_l$ стовпці матриці C. Тоді $(AB)C=((AB)C_1,$

$(AB)C_2,\dots,(AB)C_l)$. Далі, $BC=(BC_1,BC_2,\dots,BC_l)$ та $A(BC)=(A(BC_1), A(BC_2),\dots,A(BC_l))$. Але як було доведено вище, $(AB)C_1=A(BC_1)$, $(AB)C_2=A(BC_2),\dots$, оскільки $C_1,C_2,\dots$ - стовпці.Таким чином, $(AB)C= =A(BC)$. Особливу роль при множенні матриць грають одиничні матриці E_n (якщо треба буквою n вказати порядок) або просто E. З правила множення матриць безпосередньо випливає, що $AE=A$ і $EA=A$, якщо ці добутки визначені.

5. $(AB)^T=B^TA^T$.

Про цю властивість добутку матриць говорять так: "**при транспонуванні добутку матриць порядок співмножників змінюється**". Доведемо це.

Хай $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$

Припустимо $A^T=C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{km} \end{pmatrix}$, $B^T=D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nk} \end{pmatrix}$,

так що $c_{ji}=a_{ij}$, $d_{\beta\alpha}=b_{\alpha\beta}$

Хай, далі, $AB=F=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix}$, $B^TA^T=G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nm} \end{pmatrix}$

Тоді, $f_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha j}$, $g_{ji}=\sum_{\alpha=1}^{k} d_{j\alpha} c_{\alpha i}=\sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha j} a_{i\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha j}=f_{ij}$

Отже, $f_{ij}=g_{ji}$ при усіх $i=1,2,\dots,m$ та $j=1,2,\dots,n$, а це і означає, що $G=F^T$, тобто $B^TA^T=(AB)^T$, що і потрібно було довести.

3.4. Дії над матрицями. Підсумки

Матриці можна додавати, множити їх на число, а також множити матриці одна на одну. Ці дії мають властивості:

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$;

2. $A+B=B+A$;

3. Існує 0: $A + 0 = 0 + A = A$;

4. Для A існує $-A$: $A + (-A)=0$;

5. $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$.

6. $c(A_1+A_2)=cA_1+cA_2$.

7. $c_1(c_2A)=(c_1c_2)A$

8. $1\cdot A=A$

Якщо для деяких об'єктів (у нашому випадку це матриці) виконуються ці вісім властивостей, то кажуть, що ці об'єкти створюють **векторний простір**, так що **матриці фіксованого розміру створюють векторний простір.**

9. $(AB)C=A(BC)$.

10. $(cA)B=A(cB)=cAB$.

11. $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$.

12. $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$.

13. Існують одиничні матриці, якщо розмір $A(m\text{x}n)$, то $E_mA=AE_n=A$.

14. $(A^T)^T = A$.

15. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

16. $(cA)^T = cA^T$.

17. $(AB)^T = B^TA^T$.

Для квадратних матриць фіксованого порядку n дії додавання та множення означені завжди, і їх результатами є квадратні матриці того ж порядку. Про цю обставину кажуть таким чином: квадратні матриці фіксованого порядку створюють **кільце**. Кільце, що має структуру векторного простору, тобто система об'єктів, що мають властивості 1-12, називається **алгеброю над основним полем**. Таким чином, квадратні матриці з елементами з поля R складають алгебру над цим полем.

3.5. Перестанови та підстанови

Перестанова - це впорядкована (не обов'язково по зростанню, а довільно) множина (або, кажучи для простоти сприймання, запис) усіх n натуральних чисел з відрізка натурального ряда $\overline{1,n}$ ($\overline{1,n}$ - це множина натуральних чисел $1,2,\dots,n$) без повторень.

Твердження 1. Кількість усіх перестанов n елементів дорівнює $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.
Доведення. Дійсно, загальний вигляд перестанови з n символів є $i_1, i_2, \dots, i_n$, де кожне i_s є одне з чисел $1,2,\dots,n$, при чому ані одне з цих чисел не зустрічається двічі. За i_1 можна взяти будь-яке з чисел $1,2,\dots,n$; це дає n можливостей, що відрізняються. Якщо i_1 вже обране, то за i_2 можна узяти лише одне з $n-1$ чисел, що залишились, тобто кількість різних засобів обрати символи i_1 та i_2 дорівнює добутку $n(n-1)$ і т.с.

Таким чином, кількість перестанов з n символів при $n=2$ дорівнює $2!=2$ (перестанови 12 та 21; у прикладах, де $n \le 9$, ми не будемо розділяти символи, що переставляються, комами); при $n=3$ ця кількість дорівнює $3!=6$. З зростанням n кількість перестанов надзвичайно швидко зростає; так, при $n=10$ вона дорівнює 3628800.

Тепер розіб'ємо усі $n!$ перестанов n елементів на два класи за ознакою, що здається досить штучною, але саме це буде потрібно для розумного правила розстанови знаків у визначнику.

Хай $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ - деяка перестанова чисел $1,2,\dots,n$. Кажуть, що пара елементів (α_i,α_j), $i < j$, становить **інверсію**, якщо $\alpha_i > \alpha_j$. Кількість усіх пар елементів перестанови, що складають інверсію, називається **кількістю інверсій у перестанові** та позначається $inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$. Так, $inv(35142687)=7$ (інверсії складають пари $31,32,51,54,52,42,87$). Перестанови, що містять парну кількість інверсій, називаються **парними**, а ті, що містять непарну кількість інверсій - **непарними**. Якщо у деякій перестанові ми обміняємо місцями будь-які два символи (не обов'язково ті, що стоять поряд), а усі інші символи залишимо на місцях, то дістанемо, очевидно, нову перестанову. Це перетворення перестанови називається **транспозицією**.
Твердження 2. Від будь-якої перестанови з n символів можна перейти до будь-якої іншої перестанови шляхом декількох транспозицій.

Доведення. Застосуємо індукцію. Це твердження справедливе при $n = 2$; якщо треба починати з перестанови 12, то другу (а їх усього дві) 21

отримаємо з першої у результаті однієї транспозиції. Припустимо, що наше твердження вже доведене для $n-1$, і доведемо його для n.
Хай $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ та $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ - дві дані перестанови.
Якщо $\beta_1=\alpha_1$, то $(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ та $(\beta_2,\ldots,\beta_n)$ відрізняються тільки порядком і, в силу припущення про індукцію, шляхом декількох транспозицій можна перейти від $(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ до $(\beta_2,\ldots,\beta_n)$ і, таким чином, від $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ до $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$. Хай тепер $\beta_1\neq\alpha_1$. Тоді $\beta_1=\alpha_i$ при деякому $i \neq 1$. Зробивши у $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ транспозицію(α_1,α_i), ми прийдемо до нової перестанови, у якої на першому місці знаходиться $\alpha_i=\beta_1$. В силу доведеної вище властивості, ця перестанова перетворюється у $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ шляхом декількох транспозицій. Таким чином, від $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ до $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ можна перейти шляхом декількох транспозицій, що і потрібно було довести. Помітимо, що перехід від одної перестанови до іншої шляхом транспозицій є неоднозначним.

Твердження 3. Будь-яка транспозиція змінює парність перестанови.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли символи i та j, що транспонуються, стоять поряд, тобто перестанова має вигляд $\ldots, i, j, \ldots$, де «...» замінюють ті символи, що не приймають участі у транспозиції. Транспозиція перетворює нашу перестанову у перестанову $\ldots, j, i, \ldots$, при чому, зрозуміло, у обох перестановах кожний з символів i, j складає одні й ті ж інверсії з символами, що зостаються на місцях. Якщо символи i та j раніше не складали інверсії, то у новій перестанові з'являється одна нова інверсія, тобто кількість інверсій збільшується на одиницю. Якщо ж вони раніше складали інверсію, то тепер вона зникає, тобто кількість інверсій на одиницю зменшується. У обох випадках парність перестанови змінюється.
Хай тепер між символами i та j, що транспонуються, розташовані s символів, $s > 0$, тобто перестанова має вигляд

$$\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots \tag{3.1}$$

Транспозицію символів i та j можна дістати у результаті послідовного виконання $2s+1$ транспозицій сусідніх елементів. А саме, це будуть транспозиції, що переставляють символи i та k_1, потім i (яке вже стоїть на місці символа k_1) та k_2 і т.с., поки і не посяде місце символа k_s. За цими s транспозиціями слідує транспозиція, що переміщує символи i та j, а потім s транспозицій символа j зо всіма k, після чого j посяде місце символа i, а символи k повертаються на свої старі місця. Таким чином, ми непарну кількість разів змінювали парність перестанови, а тому перестанови (3.1) та $\ldots, j, k_1, k_2, \ldots, k_s, l, \ldots$ мають протилежні парності.

Твердження 4. Кількість парних перестанов n елементів дорівнює кількості непарних перестанов.

Доведення. Хай кількість парних перестанов дорівнює a, кількість непарних дорівнює b. Розглянемо множину усіх парних перестанов. Зробимо у них одну і ту ж транспозицію, наприклад, $(1,2)$. Ми дістанемо непарні перестанови, попарно різні, у кількості a штук. Так як кількість усіх непарних перестанов дорівнює b, то маємо, що $a \le b$. Тепер розглянемо множину усіх непарних перестанов і зробимо у них транспозицію $(1,2)$. Мы дістанемо b парних перестанов та, таким чином, $b \le a$. З отриманих нерівностей випливає, що $a = b$, що і потрібно було довести.

Одночасно ми довели, що якщо в усіх парних перестановах зробити одну й ту ж транспозицію, то ми дістанемо усі непарні перестанови.

Визначимо тепер ще одне поняття, а саме поняття підстанови.

Підстановою n-го степеня на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ називається взаємно однозначне відображення множини на себе. Зручно задавати підстанову прямою вказівкою змін для кожного елемента, записуючи образ під прообразом. Так, запис $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ задає підстанову, яка змінює елементи $1, 2, 3, 4, 5$, відповідно, на $5, 1, 3, 2, 4$; порядок розташування її стовпців не має значення. У такому запису у "чисельнику" та у "знаменнику" знаходяться перестанови. Зручно у "чисельнику" записувати елементи у природному розташуванні. Від одного запису підстанови до іншого можна перейти за допомогою декількох транспозицій стовпців. Наприклад, будь-яка підстанова на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ може бути записана у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

При такому запису різні підстанови відрізняються одна від одної перестановами, що стоять у нижньому рядку, і тому **кількість підстанов n-го степеня дорівнює кількості перестанов з n символів**, тобто дорівнює $n!$Перестанови, що складають верхній та нижній рядки її запису, можуть мати або однакові або протилежні парності. Перехід до будь-якого іншого запису можна здійснити шляхом послідовного виконання декількох транспозицій у верхньому рядку та відповідних транспозицій у нижньому рядку. Але, здійснюючи одну транспозицію у верхньому рядку

запису $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$ і одну транспозицію відповідних елементів у нижньому рядку, ми одночасно змінюємо парності обох перестанов і тому зберігаємо збіжність або протилежність цих парностей. Звідси випливає

Твердження 5. Або при усіх записах підстанови парності верхнього та нижнього рядків збігаються, або ж при усіх записах вони протилежні.

У першому випадку підстанова буде називатися **парною**, у другому - **непарною**. Якщо підстанова записана у вигляді (3.2), тобто у верхньому рядку стоїть парна перестанова $1, 2, \dots, n$, то парність підстанови буде визначатися парністю перестанови $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, що стоїть у нижньому рядку. Звідси випливає

Твердження 6. Кількість парних підстанов n-го степеня дорівнює кількості непарних, тобто дорівнює $\frac{1}{2}n!$.

3.6. Загальні властивості візначників

Розглянемо квадратну матрицю
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Визначником n-го порядку, що відповідає матриці (3.3), називається алгебраїчна сума $n!$ членів, що складена за таким правилом: членами суми є усі можливі добутки n елементів матриці, що узяті по одному з кожного рядка та з кожного стовпця, при цьому член береться зі знаком плюс, якщо його індекси складають парну підстанову, та зі знаком минус - у протилежному випадку.

Для позначення визначника, на відміну від матриці, використовуються не круглі або квадратні дужки, а вертикальна риска, що підкреслює, що визначник - це число. Отже, у символьному вигляді це означення можна записати так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

де $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ пробігає усі перестанови чисел $1, 2, \dots, n$; далі, множник $(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$ дорівнює $+1$, якщо$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ - парна перестанова, і дорівнює -1, якщо непарна.Визначник матриці A позначають інколи $\det(A)$.

Далі буде корисно знати, з яким знаком входить у визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

доданок $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n}$, де $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ та $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ - дві перестанови чисел $1, 2, \dots, n$. Для того щоб знати це, треба розташувати співмножники за порядком розташування рядків. Помітимо, що якщо поміняти місцями два співмножника, то виникає транспозиція, як у перших, так і у других індексах, так що кількість інверсій у перших індексах та кількість інверсій у других індексах змінюються на непарні числа, і тому їх сума змінюється на парне число. Тому

$$(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+\mathrm{inv}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$$

не змінюється під час перестанови двох співмножників, а тому і під час будь-якої зміни порядку співмножників, оскільки будь-яка зміна порядка рівносильна декільком попарним змінам місць. Звідки випливає, що знак, з яким входить доданок $a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n}$ у визначник, є

$$(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+\mathrm{inv}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}$$

Тому означення визначника можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+inv(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)} a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n} \quad (3.4)$$

де $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$ пробігає усі підстанови чисел $1, 2, \dots, n$.

Властивість 1. Визначник транспонованої матриці дорівнює визначнику вихідної. Іншою мовою - **визначник не змінюється при транспонуванні матриці**.

Дійсно, після транспонування у виразі (3.4) α та β обміняються місцями. Але вони входять у цей вираз сіметрічним чином, тому результат виразу при їх взаємній заміні не зміниться. Ця властивість вказує, що у визначнику рядки та стовпці рівноправні. Тому усі подальші властивості, що встановлюються для рядків, зостаються справедливими і для стовпців

Властивість 2. Якщо елементи якого-небудь рядка є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких елементи відповідного рядка дорівнюють першим доданкам,у другому-другим,тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доведення.

$$|A| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} \dots b_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} +$$

$$+\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}\ldots c_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}$$

Ясно, що перша сума дорівнює $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & \ldots & b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, а друга $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i1} & \ldots & c_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

.Властивість 3. Якщо усі елементи будь-якого рядка визначника мають спільний множник, то цей спільний множник можна винести за знак визначника, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ma_{i1} & \ldots & ma_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доведення. $|A| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}\ldots ma_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n} =$

$$= m\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}\ldots a_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n} = m\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Наслідок. Визначник, рядок якого цілком складається з нулів, дорівнює нулю.
Дійсно, у цьому випадку можна вважати елементи нульового рядка помноженими на коефіцієнт нуль, який за властивістю 3 виноситься за знак визначника, і тому виходить, що визначник множиться на нуль, а це дає у результаті нуль.

Властивість 4. Визначник з двома однаковими рядками дорівнює нулю.

Доведення. Хай дан визначник з двома однаковими рядками:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{k\alpha_k}\dots a_{n\alpha_n}$$

при чому $a_{i1} = a_{k1}$, $a_{i2} = a_{k2}$, ..., $a_{in} = a_{kn}$. Розіб'ємо суму на дві частини, що відповідають парним та непарним перестановам:

$$|A| = \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \\ \div eth}} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{k\alpha_k}\dots a_{n\alpha_n} -$$

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \\ he \div eth}} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{k\alpha_k}\dots a_{n\alpha_n}$$

Згадаємо, що усі непарні перестанови отримуються, якщо в усіх парних перестановах $(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\ \dots,\alpha_k,\dots,\alpha_n)$ зробити одну й ту ж транспозицію (α_i,α_k). Тому

$$|A| = \sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \\ \div eth}} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_i}\dots a_{k\alpha_k}\dots a_{n\alpha_n} -$$

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \\ \div eth}} a_{1\alpha_1}\dots a_{i\alpha_k}\dots a_{k\alpha_i}\dots a_{n\alpha_n}$$

Але $a_{i\alpha_i} = a_{k\alpha_i}$ і $a_{k\alpha_i} = a_{k\alpha_k}$. Тому для кожного доданку першої суми знайдеться доданок, що йому дорівнює у другій, так що $|A| = 0$, що і потрібно було довести.

Властивість 5. Якщо у матриці обміняти місцями два рядки, то її визначник змінить знак на протилежний.

Доведення. Виділимо у визначнику $|A|$ два рядки, та позначимо їх I та II. Цей визначник позначимо $|A(I,II)|$. Потрібно довести, що $|A(I,II)| = -|A(II,I)|$. Через I+II позначимо суму відповідних рядків. Розглянемо допоміжний визначник, який дорівнює нулю: $0=|A(I+II,I+II)| = |A(I,I)|+|A(I,II)|+|A(II,I)|+|A(II,II)|$. Тут ми два рази скористалися властивістю 2. Перший та четвертий доданки дорівнюють нулю. Тому сума другого та третього дорівнює нулю, що і потрібно було довести.

Властивість 6. Визначник з двома пропорційними рядками дорівнює нулю.

Дійсно, якщо, згідно з властивістю 3, винести за знак визначника коефіцієнт пропорційності, то зостається визначник з однаковими рядками, який дорівнює нулю.

Властивість 7. Визначник не змінюється, якщо до будь-якого його рядка додати числа, пропорційні іншому рядку.

Доведення. Скористаємося позначеннями, що введені при доведенні властивості 5. Хай I та II - два виділені рядки. Потрібно довести $|A(I+mII,II)|=|A(I, II)|$. Дійсно, $|A(I+mII,II)|=|A(I,II)|+m|A(II,II)| = |A(I,II)|+0=|A(I,II)|$.

Властивість 7 особливо важлива, оскільки дає ключ до обчислення визначників. На її основі побудуємо **метод Гаусса обчислення визначників**. Назвемо **елементарним перетворенням** над визначником додавання до усіх елементів будь-якого його рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на один і той же коефіцієнт m. У результаті пристосування елементарного перетворення до визначника його значення не зміниться. Як вже було вище вказано, рядки та стовпці рівноправні. Тому елементарні перетворення можна пристосовувати і до стовпців визначника, не змінюючи його значення. Хай дан визначник

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Можна вважати, не обмежуючи загальності, що $a_{11} \neq 0$ (у протилежному випадку можна обміняти місцями рядки, враховуючи змінення знаку визначника при цьому).

До елементів другого рядку додамо елементи першого рядку, помножені на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$. У результаті у другому рядку у першому стовпцю з'явиться нуль. Аналогічно, до елементів i-го рядку додамо елементи першого рядку, помножені на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. На місці $(i,\ 1)$ з'явиться нуль. Отже, за допомогою цих елементарних перетворень ми дістали визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначник, складений з штрихованих елементів a_{ij}', позначимо $|A'|$. За змістом визначника, він складений з суми усіляких добутків елементів, що узяті по одному з кожного рядку та кожного стовпця. У першому стовпці визначника $|A|$ тільки один ненульовий елемент - a_{11}. Тому у кожному ненульовому доданку вказаної суми він буде присутній як співмножник. Остатні множники обираються з інших рядків та стовпців і при цьому усіма можливими засобами. Якщо винести тепер a_{11} за дужки, то у дужках зостанеться значення визначника $|A'|$.

Отже, $|A| = a_{11}|A'|$. Застосовуючи вказану процедуру до визначника $|A''|$ нам знов зостанеться обчислити визначник меншого розміру.

Застосовуючи процедуру $n-1$ раз, ми дійдемо до визначника розміру один $\left|A^{n-1}\right| = \left|a_{nn}^{n-1}\right|$, який дорівнює $\left|a_{nn}^{n-1}\right|$. Цей процес називають методом обчислення визначника за Гауссом.

Приклад. Хай потрібно обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Додамо до другого рядка перший, помножений на -1, потім до третього додамо перший, помножений на -1, і потім до четвертого додамо перший, помножений на -1.

Дістанемо рівний визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

У останньому визначнику переставимо перший та другий стовпці, а для компенсації знаку після перестанови помножимо перший стовпець на -1:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$. Відіймемо від третього рядку перший, дістанемо рівний визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$. Відіймемо від другого рядку перший

$2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 4 = -16$, тобто шуканий визначник дорівнює -16.

Хай дан визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

матрицю якого можна дістати з матриці вихідного визначника шляхом заміни елемента a_{ik} на 1 та усіх остатніх елементів i-го рядку та k-го стовпця на нулі.
Побудований таким чином визначник називається **алгебраїчним доповненням** елемента a_{ik}. Для нього прийняте позначення A_{ik}. Помітимо, що A_{ik} не залежить від елементів i-го рядку та k-го стовпця вихідного визначника.
Якщо ж цілком викреслити з $|A|$ i-й рядок та k-й стовпець, дістанемо визначник розміру $n-1$, що називається **мінором** елемента a_{ik} та позначається M_{ik}, тобто

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо A_{ik}. Обміняємо k-й стовпець з $k-1$-м (визначник змінить знак), потім $k-1$ з $k-2$ і т.с., поки вихідний k-й стовпець (де стоїть одиниця) не переміститься на місце першого. При цьому визначник змінить знак k раз, тобто він буде дорівнювати $(-1)^k|A'|$, а по абсолютній величині його значення не зміниться. Аналогічно, переставимо i-й рядок на місце першого, визначник буде дорівнювати

$$|A_{ik}| = (-1)^i(-1)^k|A''| = (-1)^{i+k}|A''| =$$

$$=(-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ 0 & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Як було вказано вище, у методі Гаусса останній визначник дорівнює добутку одиниці на визначник, отриманий викреслюванням з A_{ik} першого рядку і першого стовпця, тобто

$$|A_{ik}| = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ 0 & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+k} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Отже, $A_{ik} = (-1)M_{ik}$, що можна також прийняти за означення алгебраїчного доповнення.

Властивість 8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядку на їх алгебраїчні доповнення $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = |A| \right)$

.Доведення. Для доведення запишемо даний визначник у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+0+\ldots+0 & \cdots & 0+\ldots+a_{ik}+\ldots+0 & \cdots & 0+0+\ldots+a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

де кожний елемент i-го рядку має n доданків. Тепер скористуємося властивістю лінійності. Визначник дорівнює сумі наступних n визначників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ik} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

У кожному з них винесемо у якості множника ненульовий елемент a_{ik} i-го рядку; зостанеться A_{ik}. Тому кожен з них дорівнює $a_{ik} \cdot A_{ik}$. Так що дійсно

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Ця властивість має назву **розкладу визначника по елементах рядку**. Авжеж, існують аналогічні розклади по елементах стовпцю.

Властивість 9. Хай дан визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

і у ньому обраний рядок з номером i. $A_{i1}, \dots, A_{in}$ - алгебраїчні доповнення до елементів i-го рядку. Тоді визначник, у якому на місці $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ стоять $b_1, b_2, \dots, b_n$, дорівнює

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \dots + b_nA_{in}.$$

Доведення. Дійсно, $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A'_{i1} + b_2A'_{i2} + \dots + b_nA'_{in}$,

де $A'_{i1}, \dots, A'_{in}$ - алгебраїчні доповнення елементів i-го рядку цього визначника. Але алгебраїчні доповнення не залежать від елементів i-го рядку, так що вони збігаються з алгебраїчними доповненнями $A_{i1}, \dots, A_{in}$ вихідного визначника.

Властивість 10. Сума добутків елементів будь-якого рядку на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядку дорівнює нулю $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \right)$.

Доведення. Дійсно, хай дан визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тоді, за попередньою властивістю,

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\dots+a_{kn}A_{in} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=0,$$

оскільки дістали визначник з двома однаковими рядками.

Розглянемо ряд прикладів обчислення визначників.
Почнемо з простого "обчислювального" прикладу. У ньому ми не будемо прагнути зменшити кількість обчислень, а будемо демонструвати засоби обчислень, засновані на доведених вище властивостях.

Приклад 1. Обчислити $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Помножимо всі елементи першого рядка на 5, а другого - на 3, та, щоб визначник не змінився, поділимо значення отриманого визначника на $5\cdot3=15$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 15 & -5 & 10 & 10 \\ 15 & 3 & 3 & -9 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Відіймемо від другого рядку перший, а також, після цього, винесемо множник 5 з першого рядку:

$$|A| = \frac{5}{15}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & -19 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$ Додамо до четвертого рядку перший:

$$|A| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & -7 & -19 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$ Відіймемо від третього стовпця другий:

$$|A| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & -15 & -19 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$ Відіймемо від четвертого стовпця другий:

$$|A| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -15 & -27 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник по четвертому рядку.

$$|A| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -15 & -27 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -15 & -27 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Винесемо множник 3 з першого рядку, відіймемо від другого стовпця перший та від третього стовпця перший:

$$|A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -27 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник по першому рядку:

$$|A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -27 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -15 & -27 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot (-27) = -405$$

Розглянемо **приклади іншого роду**, що не потребують обчислювальних засобів, але потребують звісної винахідливості при застосуванні властивостей визначників.

Приклад 2. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Тут природно до усіх рядків додати перший, помножений на -1. Тоді дістанемо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-1 \end{vmatrix} = (a_2-1)(a_3-1)\dots(a_n-1)$$

Приклад 3. Обчислити визначник порядку n $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Якщо б замість 0 у лівому верхньому куті знаходилась 1, ми легко обчислили б визначник, подібно прикладу 1. Додамо усі рядки до першого. Дістанемо

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Зостається відійняти перший рядок від усіх остатніх. Маємо:

$$\Delta_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)$$

3.7. Обчислення оберненої матриці

Матриця B називається **оберненою** до матриці A, якщо AB=BA=E, де E - одинична матриця. Рівність AB=BA показує (легко бачити, використовуючи правило множення матриць), що кількість рядків та стовпців матриці A повинно бути однаковим. Таким чином, обернена матриця має сенс тільки для квадратних матриць. Не кожна матриця має обернену, але якщо вона існує, то тільки одна.

<u>Твердження 7</u>. Обернена матриця для даної єдина.

<u>Доведення</u>. Припустимо існування для даної матриці A двох обернених B та C, тобто вірні рівності AB=BA=E та AC=CA=E. Помножимо першу рівність зліва на матрицю C: CAB=CBA=CE=C (дужки не розставляються через асоціативність множення матриць). Розставимо дужки так: (CA)B=C(BA)=C. Але CA=E та BA=E, тому (CA)B=EB=B=CE=C, тобто B=C; має місце протиріччя з припущенням неєдності оберненої матриці.

Квадратна матриця називається **особливою**, якщо її визначник дорівнює нулю. Далі ми покажемо, що **тільки неособлива матриця має обернену**

А поки що розглянемо два засоби обчислення оберненої матриці:

- **Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень**

Хай дана матриця n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$ Матриця $$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

що складається з алгебраїчних доповнень до елементів матриці A (при чому алгебраїчне доповнення до елементу a_{ij} стоїть на перехресті j-го рядку та i-го стовпця) називається **приєднаною** (чи **взаємною**) матрицею до матриці A. Розглянемо добуток $AA^*=C=\{c_{i,j}\}$. Елемент c_{ij} матриці C визначається за правилом множення матриць: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj}$.

За властивістю 8 визначників ця сума дорівнює $|A|$, якщо $i = j$; та, за властивістю 10, дорівнює нулю при $i \neq j$. Тому

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

Ця матриця відрізняється від одиничної E тим, що на діагоналі замість одиниць стоять одні й ті ж числа $|A|$. Такі матриці називаються **скалярними**. Коли ці числа різні, матрицю називають **діагональною**. Якщо кожний елемент матриці A^* поділити на $|A|$, то сума

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\frac{A_{kj}}{|A|} \right) = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj}$$

дає одиницю при $i = j$, і нуль при $i \neq j$.

Тому оберненою до A буде матриця, що отримується з приєднаної матриці A^* діленням усіх її елементів на число $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Звернемо увагу, що приєднану матрицю для даної можна завжди обчислити, якщо виконати вказані вище дії. Щоб обчислити обернену матрицю, потрібно кожний елемент приєднаної матриці поділити на $|A|$. Тому, **для будь-якої неособливої матриці** (її визначник не дорівнює нулю)**, існує єдина обернена матриця**.

Приклад. Обчислимо обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складаємо приєднану матрицю

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник $|A|=5*3+10*(-1)+0*0=5$. Тому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

- Обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень

Назвемо **елементарним перетворенням** над рядками матриці одну з дій:

а) множення усіх елементів даного рядку на одне й те ж число k;
б) додавання до кожного елемента даного рядка з номером і відповідного елемента, помноженого на число k, з рядка з номером j.

Наприклад, хай дана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементарне перетворення, що зводиться до множення першого рядка на k, дає матрицю

$$A' = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

а додавання до другого рядка першого, помноженого на k, дає матрицю

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & \dots & a_{2n} + ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отримати з матриці A матрицю A' можна також множенням A зліва на матрицю B'

$$B'A = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A',$$

що перевіряється безпосередньо. Таким чином, елементарне перетворення, що зводиться до множення i-го рядку на число k, рівносильно множенню зліва на матрицю, що отримана з одиничної множенням її i-го рядку на k. Матрицю A'' з матриці A можна дістати також множенням зліва на матрицю B'', що отримана з одиничної додаванням до 2-го рядку 1-го, помноженого на k:

$$B''A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\k&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}=A'',$$

тобто елементарне перетворення, що відповідає дії б), рівносильно множенню зліва матриці А на матрицю, що отримана з одиничної за допомогою тих же дій. Отже, **виконання елементарних перетворень над матрицею А зводиться до множення на А зліва матриці, що отримана з одиничної за допомогою тих же перетворень.**

Запишемо тепер поряд дві матриці, спочатку одиничну, а потім дану:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1&0&\dots&0&a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&1&\dots&0&a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{array}\right\rangle$$

Пристосуємо тепер елементарне перетворення, що зводиться до додавання до другого рядку першого, помноженого на k, до цієї об'єднаної матриці:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1&0&\dots&0&a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\k&1&\dots&0&a_{21}+ka_{11}&a_{22}+ka_{12}&\dots&a_{2n}+ka_{1n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{array}\right\rangle.$$

Ми бачимо, що у лівій частині об'єднаної матриці стоїть матриця B'' (матриця, яку треба помножити на A, щоб отримати A''), а у правій - A'' - результат добутку $B''A$. Пристосовуючи ще раз до отриманої об'єднаної матриці яке-небудь елементарне перетворення, дістанемо за рахунок однакових дій над лівою та правою частинами у лівій частині матрицю (вона є добутком двох матриць, що отримані з одиничних матриць відповідними елементарними перетвореннямн), яка, помножена на A, дасть матрицю правої частини.Тобто, **ліва частина об'єднаної матриці "накопичує" елементарні перетворення, а права частина** дає **результат пристосування цих перетворень до матриці A.**

Тепер пристосуємо метод Гаусса до матриці

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{array}\right\rangle$$

так, щоб у правій частині вийшла одинична матриця. Для цього треба помножити перший рядок на $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ і додати до і-го рядку. Роблячи це зо всіма рядками, крім першого, дістанемо матрицю

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} & 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b'_{n1} & b'_{n2} & \dots & b'_{nn} & 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn}\end{array}\right\rangle$$

Зробивши аналогічну операцію з другим рядком (з метою отримати у другому стовпці нулі), з третім і т.с., прийдемо до матриці

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} & 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b''_{n1} & b''_{n2} & \dots & b''_{nn} & 0 & 0 & \dots & a''_{nn}\end{array}\right\rangle$$

(у правій частині об'єднаної матриці нижче головної діагоналі стоять нулі) Поділимо останній рядок на a_{nn}'', дістанемо матрицю

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ b'_{21} & b'_{22} & \dots & b'_{2n} & 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b''_{n1}/a''_{nn} & b''_{n2}/a''_{nn} & \dots & b''_{nn}/a''_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right\rangle$$

Помножимо послідовно останній рядок на елементи, що стоять у останньому стовпці та відіймемо від відповідних рядків (звідки взяті ці елементи), і дістанемо матрицю

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc} b''_{11} & b''_{12} & \dots & b''_{1n} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b''_{21} & b''_{22} & \dots & b''_{2n} & 0 & a'_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right\rangle$$

Якщо провести цю операцію з $n-1$ рядком, $n-2$ і т.с., дістанемо

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right\rangle,$$

тобто у лівій частині отримаємо матрицю B, а у правій E. Але, як сказано вище, ліва частина - це добуток BA, права - результат цього добутку, тобто BA=E. Тому B - обернена матриця до A. Такий метод обчислення оберненої матриці називається **методом елементарних перетворень**.

Приклад. Обчислимо обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складемо об'єднану матрицю:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right\rangle.$$

Для зручності обчислень, відступимо від методу Гаусса. Додамо другий рядок спочатку до третього рядку, а потім до першого:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right\rangle$$

Додамо подвійний перший рядок до другого:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right\rangle$$

Поділимо останній рядок на 5:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right\rangle.$$

Віднімемо третій рядок від першого, а також помножимо третій рядок на 3 та віднімемо від другого:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle.$$

У лівій частині дістали обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

У алгебрі матриць можна розв'язувати **матричні рівняння** $AX=B$ (або $XA=B$), де A, B та X - квадратні матриці (A, B - відомі, X - невідома) у випадку, якщо існує A^{-1}. Для цього достатньо помножити зліва рівність $AX=B$ на A^{-1} (рівність $XA=B$ множиться зправа на A^{-1}), отримаємо $X=EX=(A^{-1}A)X=A^{-1}B$ (у випадку рівності $XA=B$, $X=BA^{-1}$).

Приклад. Дані матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ при чому } A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

тому розв'язком рівняння $AX=B$ буде матриця

$$X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 11\\ 13 & -13\end{pmatrix}.$$

3.8. Інші властивості визначників

Хай $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ - квадратна матриця порядку n.

Мінором порядку k для цієї матриці називається визначник матриці, що складається з елементів, що знаходяться на перетині деяких обраних k рядків та k стовпців. У загальному вигляді мінор порядку k можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix}a_{\alpha_1\beta_1} & \dots & a_{\alpha_1\beta_k}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{\alpha_k\beta_1} & \dots & a_{\alpha_k\beta_k}\end{vmatrix}.$$

Тут $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ - номери обраних рядків $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k$, а $\beta_1,\dots,\beta_k$ - номери обраних стовпців, $\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_k$.
Мінором, що доповнює даний мінор порядку k, називається мінор порядку $n-k$, матриця якого виникає з вихідної шляхом викреслювання рядків та стовпців, що містять даний мінор.

Алгебраїчним доповненням до даного мінора називається доповнюючий мінор з множником $(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k+\beta_1+\dots+\beta_k}$

Наступна теорема, яку приведемо без доведення, є глибоким узагальненням розкладу визначника по елементах рядку.

Теорема 1 (**теорема Лапласа**). Хай у матриці визначника обрані k рядків. Визначник дорівнює сумі добутків усіх мінорів порядку k, складених з цих рядків, на їх алгебраїчні доповнення.

Ми обмежимося доведенням важливого приватного випадку - формулою для визначника **сходинкової матриці**. Сходинкова матриця виглядає так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+11} & a_{m+12} & \dots & a_{m+1m} & a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Якщо до визначника сходинкової матриці пристосувати теорему Лапласа, виходячи з перших m рядків, то лише один мінор буде відрізнятися від нуля - лівий верхній, і його алгебраїчним доповненням буде мінор, що складається з останніх $n-m$ рядків та стовпців.

Згідно з теоремою Лапласа,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Цей приватний випадок теореми ми зараз доведемо. При $m=1$ ствердження теореми очевидне. Далі проведемо індукцію за порядком m мінора з лівого верхнього кута, припустивши, що для лівого верхнього кутового мінора порядку $m-1$ теорема є справедливою. Введемо позначення. Через $\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{1m}$ позначимо алгебраїчні доповнення елементів першого рядку визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

через $\delta_{11},\delta_{12}, \dots,\delta_{1m}$ - відповідні мінори. Далі, через $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ позначимо алгебраїчні доповнення елементів першого рядку у визначнику $|A|$ і через $\Delta_{11},\Delta_{12},\dots,\Delta_{1n}$ - відповідні мінори. Розкладемо визначник $|A|$

по елементах першого рядку.

Дістанемо $|A| = a_{11}A_{11} + \ldots + a_{1m}A_{1m} = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + \ldots +$

$$+(-1)^{m+1}a_{1m}\Delta_{1m} = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a_{1k}\Delta_{1k}$$

Придивимося до того, що уявляє собою мінор Δ_{1k}. Його матриця-результат викреслювання першого рядку та k-го стовпця з матриці A. Зостається знов сходинкова матриця. Її лівий верхній кутовий мінор має порядок $m-1$, і його матриця є результатом викреслювання першого рядку та k-го стовпця з матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Правий нижній кутовий мінор такий же, як у матриці A. В силу індуктивного припущення

$$\Delta_{1k} = \delta_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1m+1} & \ldots & a_{m+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nm+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тому

$$|A| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a_{1k}\delta_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1m+1} & \ldots & a_{m+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nm+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{1k}\alpha_{1k} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1m+1} & \ldots & a_{m+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nm+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1m+1} & \ldots & a_{m+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nm+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

що і потрібно було довести

Хай дані дві матриці $A=\{a_{ij}\}$ та $B=\{b_{ij}\}$ однакового розміру $n\times n$, при чому вони розбиті однаково на **клітинки**: $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$

клітинки A_{ij}, B_{ij} однакового розміру $k\times k$ (тобто $n=2k$). Очевидно, при додаванні матриць A та B їх можна додавати по клітинках. Розглянемо їх множення. Хай $C=AB=\{c_{ij}\}$. Тоді

$$C=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

тобто матриці, що розбиті на клітинки, можна перемножати за тим же правилом "рядок на стовпець", як звичайно, узявши замість елементів відповідні клітинки.

Дійсно, хай c_{ij} -елемент лівої верхньої клітинки матриці C. У цьому випадку $1\le i\le k$, $1\le j\le k$. Елемент c_{ij}, як елемент клітинки $A_{11}B_{11}+$ $+A_{12}B_{21}$, дорівнює $c_{ij}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}+\sum_{l=k+1}^{n} a_{il}b_{lj}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$

(у кожній з перших двох сум множники беруться з відповідних клітинок A_{11}, B_{11}, A_{12}, B_{21}). Остання сума - це і є результат добутку AB. Доведення рівності для елементів остатніх клітинок нічим не відрізняється від даного.

Трикутна матриця називається **унітрикутною**, якщо усі її елементи головної діагоналі дорівнюють 1. З'ясуємо, як змінюються рядки матриці A при множенні її зліва на праву унітрикутну матрицю C. Хай

$$C=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

(A_1, …, A_n-рядки матриці A). Маємо:

$$CA=\begin{pmatrix} A_1+c_{12}A_2+\dots+c_{1n}A_n \\ A_2+\dots+c_{2n}A_n \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix},$$

так що перший рядок отриманий з першого рядку A додаванням наступних рядків, помножених на $c_{12}, \ldots, c_{1n}$, другий - з другого додаванням наступних рядків з відповідними множниками і т.с., останній зостається без змін. Якщо A - квадратна матриця, то при усіх описаних перетвореннях визначник матриці не змінюється, так що $|CA|=|A|$.
Якщо C - ліва унітрикутна матриця

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } CA=\begin{pmatrix} A_1 \\ c_{21}A_1+A_2 \\ \ldots \\ c_{n1}A_1+c_{n2}A_2+\ldots+A_n \end{pmatrix},$$

і тут опис перетворень зручно починати з кінця: до останнього рядку додаються попередні, помножені на $c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{n,n-1}$, до передостаннього - попередні, помножені на відповідні елементи матриці C, і т.с., до другого рядку додається перший, помножений на c_{21}, і перший зостається без змін. Тому і в цьому випадку $|CA|=|A|$

При правому множенні на унітрикутну матрицю C робляться аналогічні перетворення стовпців, тому також $|AC|=|A|$

__Теорема 2.__ Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників співмножників.

Теорема уявляє собою тотожність, безпосередня перевірка якої потребує деяких зусиль навіть для $n = 2$. Виконаємо цю перевірку. Хай

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}. \quad \text{Тоді} \quad AB=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} \quad \text{і}$$

$$|AB|=(ax+bz)(cy+bt)-(ay+bt)(cx+dz)=axcy+axdt+bzcy+$$
$$+bzdt-aycx-aydz-btcx-bdtz=adxt+bcyz-adyz-bcxt=$$
$$=(ad-bc)(xt-yz)=|A|\cdot|B|.$$

Природно, безпосередня перевірка тотожності при $n=3$ ще складніша Однак у нас вже є достатньо свідомостей про визначники та матриці для того, щоб дати коротке доведення теореми.

__Доведення__. Хай A та B - дві квадратні матриці порядку n. Розглянемо матрицю $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$ порядку $2n$. Ця матриця сходинкова і тому її визначник

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

Помножимо тепер цю матрицю зліва на унітрикутну матрицю $\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$. При цьому визначник не зміниться. Таким чином,

$$|A| \cdot |B| = \left| \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}$$

(тут пристосували правило множення матриць, що розбиті на клітинки). У останньому визначнику поміняємо місцями перший стовпець з $(n+1)$-м, другий з $(n+2)$-м і т.с. Це рівносильно перестанові блоків-стовпців. При кожній перестанові змінюється знак визначника, тому у результаті визначник має множник $(-1)^n$. Отже,

$$|A| \cdot |B| = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -E \end{vmatrix}.$$

Пристосувавши ще раз властивість визначника сходинкової матриці, дістанемо

$|A| \cdot |B| = (-1)^n \cdot |AB| \cdot |-E| = (-1)^n \cdot |AB| (-1)^n |E| = (-1)^{2n} |AB| = |AB|$,

що і потрібно було довести.

Раніше ми довели єдиність оберненої матриці для даної квадратної матриці. Наступна теорема відповідає на питання про її існування.

<u>**Теорема 3.**</u> Для того, щоб матриця A мала обернену, необхідно та достатньо, щоб її визначник відрізнявся від нуля.

<u>Доведення</u>. <u>Необхідність</u>. Хай для матриці A існує права обернена B (лівa обернена B^*), так що $AB=E$ ($B^*A=E$). Пристосовуючи теорему про визначник добутку квадратних матриць, дістанемо: $|A| \cdot |B| = |E| = 1$ ($|B^*| \cdot |A| = |E| = 1$), звідки випливає, що $|A| \neq 0$.

<u>Достатність</u> випливає з правил обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень.

3.9. Ранг матриці

Рядки матриці A розміром $m \times n$ можна розглядати як n-мірні вектори. Аналогічно стовпці - m-мірні вектори. Тому можна ввести поняття лінійної залежності (незалежності) та рангу множини рядків та множини стовпців.

Твердження 1. Хай $u_1,u_2,\dots,u_m$ - рядки матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

при чому рядки $u_{k+1},\dots,u_m$ є лінійними комбінаціями рядків $u_1,u_2,\dots,u_k$. Хай, далі, $v_1,\dots,v_n$ - стовпці матриці A, а $\tilde{v}_1,\dots \tilde{v}_n$ - їх відрізки довжиною k. Тоді з будь-якої залежності $c_1\tilde{v}_1+\dots+c_n\tilde{v}_n=0$ випливає залежність $c_1v_1+\dots+c_nv_n=0$.

Доведення. Хай

$$u_{k+1}=b_{k+11}u_1+\dots+b_{k+1k}u_k\ ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3.5)$$
$$u_m=b_{m1}u_1+\dots+b_{mk}u_k$$

Хай, далі, $c_1\tilde{v}_1+\dots+c_n\tilde{v}_n=0$. Це означає, що перші k компонент стовпця $c_1v_1+\dots+c_nv_n$ дорівнюють нулю. Розглянемо $(k+1)$-у компоненту. Вона дорівнює $c_1a_{k+11}+\dots+c_na_{k+1n}$. Але, завдяки (3.5),

$$a_{k+11}=b_{k+11}a_{11}+\dots+b_{k+1k}a_{k1}\ ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{k+1n}=b_{k+11}a_{1n}+\dots+b_{k+1k}a_{kn}$$

Тому

$$c_1a_{k+11}+\dots+c_na_{k+1n}=b_{k+11}(c_1a_{11}+\dots+c_na_{1n})+\dots+b_{k+1k}\times$$
$$\times(c_1a_{k1}+\dots+\ +c_na_{kn}).$$

У дужках знаходяться перші k компонент стовпця $c_1v_1+\dots+c_nv_n$. Усі вони дорівнюють нулю. Тому дорівнює нулю і обчислена нами $(k+1)$-а компонента. Аналогічно доводиться рівність нулю усіх остатніх компонент.

Стверджения доведене

<u>Теорема 1.</u> Ранг множини рядків прямокутної матриці дорівнює рангу множини її стовпців.

<u>Доведення</u>. Хай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Хай ранг множини її рядків дорівнює k. Тоді знайдеться лінійно незалежна множина з k рядків, така, що усі остатні рядки будуть їх лінійними комбінаціями. Для спрощення запису будемо вважати, що це перші k рядків, інакше ми змінили б нумерацію. Введемо у розгляд матрицю з цих рядків

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Стовпці матриці $\tilde{A}$ є відрізками стовпців матриці A. Оберемо максимальні лінійно незалежні стовпці матриці $\tilde{A}$. Хай їх кількість (ранг) дорівнює r. Усі стовпці матриці $\tilde{A}$ є їх лінійними комбінаціями. Ясно, що $r \le k$. Доповнимо обрані стовпці до повних стовпців матриці A. Отримані стовпці лінійно незалежні, інакше, тобто якщо б вони були лінійно залежні, то і їх відрізки з матриці $\tilde{A}$ були б також лінійно залежні. У силу ствердження 1 (вище) усі стовпці матриці A є їх лінійними комбінаціями Таким чином, ми побудували максимальну лінійно незалежну систему стовпців матриці A, ранг якої дорівнює $r \le k$. Отже, ранг r множини стовпців матриці A не перевищує ранга k множини її рядків. Використовуючи ті ж доведення, маємо, що ранг k множини рядків не перевищує ранга r множини стовпців. Отже, ці ранги рівні. Їх величина називається **рангом матриці**. Доведена теорема дозволяє спростити обчислення рангу матриці за рахунок застосування операцій, що перетворюють систему векторів у еквівалентну до неї, не тільки до рядків матриці, але і до її стовпців. Перехід від даної матриці до матриці, отриманої за рахунок цих операцій, будемо далі позначати символом **~**.

<u>Теорема 2.</u> Для лінійної залежності множини рядків квадратної матриці необхідно та достатньо,щоб її визначник дорівнював нулю.

<u>Доведення</u>.

<u>Необхідність</u>. Припустимо, що $|A| \neq 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рівність $c_1u_1+\ldots+c_nu_n=0$, де $u_1,u_2,\ldots,u_n$ - рядки A, рівносильна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{n1}c_n = 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{n2}c_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n = 0 \end{cases}$$

яка має єдиний ненульовий розв'язок, оскільки $|A^T| = |A| \neq 0$. Іншою мовою, якщо $|A| \neq 0$, то рядки A лінійно незалежні, так що для лінійної залежності необхідно, щоб $|A| = 0$.

<u>Достатність</u>.Застосуємо метод математичної індукції за порядком матриці A. Для $m = 1$ ствердження теореми очевидне, оскільки рівність $|A|=0$ означає, що A складається з нульового елемента. Хай для матриць порядку $m-1$ теорема доведена, і у цьому припущенні доведемо її для матриць порядку m. Без порушення загальності можна вважати $a_{11} \neq 0$. Позначимо через $u_1,u_2,\ldots,u_n$ рядки матриці A та введемо у розгляд рядки

$$v_2 = u_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}u_1 = (0, a'_{22}, \ldots, a'_{2n})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n = u_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}u_1 = (0, a'_{n2}, \ldots, a'_{nn})$$

За властивістю визначників

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

Далі, $|A|=0$, $a_{11}\neq 0$, тому

$$\begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

За індуктивним припущенням, рядки $(a'_{22},\dots,a'_{2n})$, $\dots$, $(a'_{n2},\dots,a'_{nn})$ лінійно залежні, а тоді лінійно залежні і рядки $v_2,\dots,v_n$, з тими ж коефіцієнтами. Отже, існують не рівні одночасно нулю коефіцієнти $c_2,\dots,c_n$ такі, що $c_2v_2+\dots+c_nv_n=0$, і тоді

$$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}c_2 + \dots + \frac{a_{n1}}{a_{11}}c_n\right)u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$$

Теорема цілком доведена.

Нагадаємо, що однорідною називається система з нульовими вільними членами. Розглянемо однорідну систему з n рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

або (у векторній формі)

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = 0 \qquad (3.6)$$

З теорем 1 та 2 випливає, що та ж умова $|A|=0$ є необхідною та достатньою для лінійної залежності стовпців

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

тобто існування $x_1, x_2, \dots, x_n$, що одночасно не дорівнюють нулю. Звідси безпосередньо випливає, що є вірною наступна теорема.

Теорема 3. Для існування нетривіальних розв'язків системи n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими (3.6) не тільки необхідно, але й достатньо, щоб визначник матриці коефіцієнтів системи дорівнював нулю.

Нагадаємо, що необхідність встановлена як наслідок з теореми Крамера. Достатність випливає з того, що розшук розв'язків системи (3.6) рівносильний до розшуку коефіцієнтів $x_1, x_2, \dots, x_n$ лінійної залежності стовпців матриці коефіцієнтів системи.

Теорема 4. Ранг матриці дорівнює найбільшому порядку мінорів, що відрізняються від нуля.

Доведення. Хай ранг матриці дорівнює k. Тоді у будь-якому мінорі порядку $k+1$ та вище (якщо їх можна скласти) будуть лінійно залежні рядки, і усі такі мінори дорівнюють нулю. Далі, у матриці є максимальна лінійно незалежна сукупність з k рядків та максимальна лінійно незалежна сукупність з k стовпців. Розглянемо матрицю, що складається з елементів цих рядків та стовпців. Її рядки лінійно незалежні, бо інакше, у силу ствердження 1, відповідні повні рядки вихідної матриці були б лінійно залежні. Тому визначник порядку k таким чином обраної матриці відрізняється від нуля.

Приклад. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Віднімемо від третього стовпця другий, а від першого та четвертого - другий, помножений на два. Дістанемо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -9 \\ -4 & 3 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Віднімемо від третього рядку перший, а від другого та четвертого рядків - перший, помножений на 3. Дістанемо

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -9 \\ -4 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Далі, віднімемо від другого рядку суму двох останніх. Тоді дістанемо рядок лише з нулів; його можна відкинути і тому

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -9 \\ -4 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -9 \\ -4 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Віднімемо від останнього стовпця перший і додамо третій, помножений на 2. Тоді, відкидаючи стовпець з одних нулів, знайдемо, що

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -9 \\ -4 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Скорочуємо останній рядок на -2 та додаємо до нього подвійний другий:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Міняємо місцями перший та другий рядки:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Усі рядки A лінійно незалежні, тому її ранг дорівнює 3.

Розділ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

4.1. Основні поняття

Теорія систем лінійних рівнянь кладе початок великому та практично важливому розділу алгебри - лінійній алгебрі. Коефіцієнти рівнянь, що розглянуті тут, значення невідомих і взагалі усі числа, з якими ми будемо зустрічатися, будемо вважати дійсними, хоча зміст даних обговорень переноситься і на випадок довільних комплексних чисел. На відміну від елементарної алгебри ми будемо вивчати системи з довільною кількістю рівнянь та невідомих, при чому інколи кількість рівнянь системи не буде навіть припускатися таким, що збігається з кількістю невідомих. Загальноприйнято невідомі позначати буквами $x_1, x_2, \ldots$ Рівняння відносно невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається **лінійним**, якщо його можна записати у вигляді $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$. Тут $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та b - довільні дійсні (або комплексні) числа. Сукупність значень невідомих $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n$ задовольняє даному рівнянню, якщо у результаті підстанови цих значень невідомих у рівняння воно перетвориться на арифметичну тотожність. Припустимо, що дана система m лінійних рівнянь відносно невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. У загальному випадку таку систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

Цей запис припускає, що рівняння системи занумеровані числами $1, 2, \ldots, m$, при чому $m <>= n$. Коефіцієнти при невідомих мають два індекси. Перший з них є номером рівняння, яке містить даний коефіцієнт, а другий - номером відповідної невідомої. Так, наприклад, a_{ij} є коефіцієнт при невідомій x_j у i-му рівнянні. Для скорочення ці індекси звичайно не розділяються комою; не слід, однак, у випадку a_{11} замість "а один один" читати "а одинадцять", у випадку a_{34} замість "а три чотири" читати "а тридцять чотири".

Зведемо коефіцієнти при невідомих у системі (4.1) у матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ця матриця називається **матрицею** (коефіцієнтів) **системи**. Якщо матрицю A доповнити зправа стовпцем вільних членів, то дістанемо нову матрицю

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

яка називається **розширеною матрицею системи**. Якщо ввести у розгляд **матрицю-стовпець (вектор-стовпець)** невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и матрицю-стовпець (вектор-стовпець) вільних членів

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а також використовуючи правило множення матриць та ознаку їх рівності, дістанемо **запис системи** (4.1) у **матричній формі**: $AX=B$.
Сукупність чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ називається **розв'язком** системи (4.1), якщо у результаті заміни невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ вони задовольняють **усім** рівнянням системи, тобто усі рівняння системи перетворюються на арифметичні тотожності.

Система називається **сумісною**, якщо вона має, принаймні, один розв'язок. У протилежному випадку система називається **несумісною**. Сумісна система може мати єдиний розв'язок (**визначена система**), але може мати і більш чим один розв'язок (**невизначена система**).
Поряд з системою (4.1), розглянемо систему

$$\begin{cases} a'_{11} x_1 + a'_{12} x_2 + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ a_{21}' x_1 + a'_{22} x_2 + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{l1} x_1 + a'_{l2} x_2 + \ldots + a'_{ln} x_n = b'_l \end{cases} \tag{4.2}$$

Хай системи (4.1) та (4.2) обидві сумісні. Системи (4.1) та (4.2) називаються **рівносильними**, якщо множина розв'язків першої системи збігається з множиною розв'язків другої системи. Очевидно, при зміні порядку послідовності рівнянь системи (4.1) множина її розв'язків зостається незмінною (при підстанові розв'язку у систему усі рівності так само перетворюються на тотожності). Це ж буде справедливим, якщо обидві частини будь-якого рівняння помножити на одне й те ж число, яке не дорівнює нулю. Тому **при перестанові місцями рівнянь системи або множенні обох частин одного з них на ненульове число дістанемо рівносильну систему**.
Додамо до другого рівняння системи (4.1) перше рівняння, помножене на число λ. Дістанемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \ldots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.3}$$

Якщо позначити ліві частини рівнянь системи (4.1) відповідно через I_1, I_2, …, I_m, її можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} I_1 = b_1 \\ I_2 = b_2 \\ \ldots\ldots \\ I_m = b_m \end{cases}$$

Тоді систему (4.3) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} I_1 = b_1 \\ I_2 + \lambda I_1 = b_2 + \lambda b_1 \\ \dots\dots \\ I_m = b_m \end{cases}$$

Хай сукупність чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є розв'язком системи (4.1), тобто при підстанові $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ дістанемо тотожності $I_1 = b_1$, $I_2 = b_2, \dots, I_m = b_m$. Система (4.3) тому також буде у результаті цієї підстанови складатися з тотожностей, крім другого рівняння $I_2 + \lambda I_1 = b_2 + \lambda b_1$. Але це теж тотожність, тому що $I_1 = b_1, I_2 = b_2$. Тому множина розв'язків системи (4.1) є розв'язками системи (4.3). Хай сукупність чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є розв'язком системи (4.3), тобто при підстанові $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ дістанемо тотожності $I_1 = b_1, I_2 + \lambda I_1 = b_2 + \lambda b_1, \dots, I_m = b_m$. Система (4.1) у результаті цієї ж підстанови буде складатися з тотожностей, крім другого рівняння $I_2 = b_2$. Але це теж тотожність, тому що з тотожностей $I_1 = b_1, I_2 + \lambda I_1 = b_2 + \lambda b_1$, очевидно, слідує тотожність $I_2 = b_2$. Тому множина розв'язків системи (4.3) є розв'язками системи (4.1). Отже, отримали, що множини розв'язків систем (4.1) та (4.3) збігаються, тобто системи (4.1) та (4.3) рівносильні. Оскільки при перестанові рівнянь системи (4.1), а також при заміні другого рівняння сумою першого та другого дістають рівносильну систему, дістанемо

Теорема 1. Якщо у системі (4.1) i-е рівняння $I_i = b_i$ замінити сумою $I_i + \lambda I_j = b_i + \lambda b_j$, де $I_j = b_j$ - інше рівняння цієї системи, то дістанемо рівносильну систему.

Отримання з даної системи їй рівносильної назвемо **елементарними перетвореннями**. З вищенаведеного, а також з теореми 1, можна записати у вигляді наступних пунктів припустимі (тобто ті, що призводять до рівносильної системи) елементарні перетворення:

1. перестанова місцями рівнянь системи;

2. множення обох частин одного з рівнянь на число, яке не дорівнює нулю;

3. додавання до одного з рівнянь іншого, помноженого на число, з наступною заміною першого на отриману суму.

4.2. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь

Метод Гаусса заснований на пристосуванні елементарних перетворень над системою з метою отримання такої рівносильної системи, яка легко розв'язується. Він складається з двох частин: прямого та зворотнього хода. При цьому метод дозволяє визначити, сумісна система чи ні. Метод Гаусса належить до точних методів розв'язання систем рівнянь.

Теорема 2. Будь-яка сумісна система лінійних рівнянь зводиться шляхом елементарних перетворень і, може бути, зміни нумерації невідомих до рівносильної системи з трапецієвидною матрицею. Для системи n рівнянь з n невідомими з відмінним від нуля визначником матриці коефіцієнтів система зводиться до рівносильної системи з трикутною матрицею.

Доведення зводиться до застосування прямого хода метода Гаусса до системи рівнянь (4.1) з метою отримання рівносильної системи з вказаною у формулюванні теореми матрицею коефіцієнтів. Цей же метод відповідає на питання про сумісність даної системи.

Перейдемо до переказу **прямого хода** метода Гаусса. Хай дана довільна система лінійних рівнянь (4.1). Припустимо, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$, хоча насправді він може, звичайно, дорівнювати нулю, і ми повинні будемо почати з будь-якого іншого, відмінного від нуля, коефіцієнта з першого рівняння системи. Перетворимо тепер систему (4.1), виключаючи невідоме x_1 з усіх рівнянь, крім першого. Для цього обидві частини першого рівняння помножимо на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і віднімемо від відповідних частин другого рівняння, потім обидві частини першого рівняння, помножені на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, віднімемо від відповідних частин третього рівняння, і т.с.

Ми прийдемо цим шляхом до нової системи з m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}, \qquad (4.4)$$

де $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$, $b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1$.

В силу теореми 1 система (4.4) рівносильна до системи (4.1). Будемо тепер далі перетворювати систему (4.4). При цьому до першого рівняння ми не будемо більш торкатися зовсім і будемо вважати, що належить перетворювати лише частину системи (4.4), що складається з усіх рівнянь, крім першого. При цьому ми вважаємо, звичайно, що серед цих рівнянь немає таких, усі коефіцієнти лівих частин яких дорівнюють нулю, - такі рівняння ми скасували б, якщо б і їх вільні члени дорівнювали нулю, а у протилежному випадку ми вже довели б несумісність нашої системи. Таким чином, серед коефіцієнтів a'_{ij} є відмінні від нуля; будемо вважати, що $a'_{22} \neq 0$. Перетворимо тепер систему (4.4), віднімаючи від обох частин третього та кожного з наступних рівнянь обидві частини другого рівняння, помножені відповідно на числа $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}, \frac{a'_{42}}{a'_{22}}, \dots, \frac{a'_{m2}}{a'_{22}}$. Цим буде виключене невідоме x_2 з усіх рівнянь, крім першого та другого, і ми прийдемо до наступної системи рівнянь, що рівносильна до системи (4.4), а тому і до системи (4.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a''_{t3}x_3 + \dots + a''_{tn}x_n = b''_t \end{cases}$$

Ця система містить тепер t рівнянь, $t \leq m$, оскільки деякі рівняння виявились, можливо, відкинутими. Зрозуміло, що кількість рівнянь системи могла зменшитися вже після виключення невідомого x_1. У подальшому буде перетворюватися лише частина отриманої системи, що містить усі рівняння, крім двох перших.

Коли зупиниться цей процес послідовного виключення невідомих? Якщо ми прийдемо до такої системи, одне з рівнянь якої має відмінний від нуля вільний член, а усі коефіцієнти лівої частини дорівнюють нулю, то, як ми знаємо, наша вихідна система несумісна.

У протилежному випадку ми дістанемо наступну систему рівнянь, що рівносильна до системи (4.1):

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a^{(k-2)}_{k-1k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}_{k-1k}x_k + \dots + a^{(k-2)}_{k-1n}x_n = b^{(k-2)}_{k-1} \\
a^{(k-1)}_{kk}x_k + \dots + a^{(k-1)}_{kn}x_n = b^{(k-1)}_k
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

Тут $a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \dots, a^{(k-2)}_{k-1k-1} \neq 0, a^{(k-1)}_{kk} \neq 0$

Підкреслимо також, що $k \leq t$ та, очевидно, $k \leq n$. Використовуючи поняття розширеної матриці системи, систему (4.5) можна записати компактно у вигляді матриці

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2k-1} & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a^{(k-2)}_{k-1k-1} & a^{(k-2)}_{k-1k} & \dots & a^{(k-2)}_{k-1n} & b^{(k-2)}_{k-1} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a^{(k-1)}_{kk} & \dots & a^{(k-1)}_{kn} & b^{(k-1)}_k
\end{array}\right)
\tag{4.5'}
$$

(праворуч від риски стоїть стовпець вільних членів), яку природно назвати **сходинковою**, оскільки нижче головної діагоналі у неї розташовані лише нулі. На цьому прямий хід метода Гаусса завершується.

Теорема 3. Якщо система (4.1) прямим ходом метода Гаусса перетворюється у рівносильну до неї систему (4.5) ($k \leq n$), то система сумісна; вона буде визначеною при $k = n$ та невизначеною при $k < n$

Доведення.

Доведення першого ствердження теореми випливає з прямого хода метода Гаусса. Хай система сумісна та вона перетворена до вигляду (4.5). Для доведення другої частини ствердження теореми пристосуємо **зворотній хід** метода Гаусса. Перейдемо до його переказу.
Хай $k = n$. Тоді система (4.5) має вигляд

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

З останнього рівняння ми дістанемо досить визначене значення для невідомого x_n. Підставляючи його у передостаннє рівняння, ми знайдемо однозначно визначене значення для невідомого x_{n-1}. Продовжуючи так далі, ми знайдемо, що система (4.6), а тому і система (4.1), мають єдиний розв'язок, тобто сумісні та визначені. Якщо ж $k < n$, то для "вільних" невідомих $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ми візьмемо довільні числові значення, після чого, рухаючись по системі (4.5) знизу догори, ми, як і вище, знайдемо для невідомих $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1$ досить визначені значення. Оскільки значення для вільних невідомих можна обрати нескінченною кількістю різних засобів, то наша система (4.5) і, звісно, система (4.1) будуть сумісними, але невизначеними. При цьому ми дістанемо усі розв'язки даної системи. Узагальнюючи усе, що переказано у цьому пункті, ми дістанемо, що **метод Гаусса можна пристосувати до будь-якої системи лінійних рівнянь. При цьому система буде несумісною, якщо у процесі перетворень ми дістанемо рівняння, у якому коефіцієнти при усіх невідомих дорівнюють нулю, а вільний член відрізняється від нуля** (випадок 1); **якщо ж ми такого рівняння не зустрінемо, то система буде сумісною. Сумісна система буде визначеною, якщо вона призводиться до трикутного вигляду (4.6)** (випадок 2), **і невизначеною, якщо призводиться до трапецієвидного вигляду (4.5) при $k < n$** (випадок 3). У випадку 1 розширена матриця перетвореної системи виглядає так:

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & a_{1k} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2k-1} & a'_{2k} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & a_{k-1k-1}^{(k-2)} & a_{k-1k}^{(k-2)} & \ldots & a_{k-1n}^{(k-2)} & b_{k-1}^{(k-2)} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \ldots & a_{kn}^{(k-1)} & b_k^{(k-1)} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{k+1}^{(k-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_s^{(k-1)}
\end{array}\right)
$$

де $b_{k+1}^{(k-1)}, \ldots, b_s^{(k-1)}$ не дорівнюють нулю. У випадку 3 вона має вигляд (4.5'). У випадку ж 2 вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right)$$

При практичному розв'язанні системи лінійних рівнянь методом Гаусса належить виписати матрицю з коефіцієнтів системи, приєднати до неї стовпець з вільних членів, для зручності відділений вертикальною рискою, і усі перетворення виконувати над рядками цієї розширеної матриці.

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Перетворимо розширену матрицю цієї системи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Ми приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \end{cases},$$

що має єдиний розв'язок $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$. Вихідна система виявилася визначеною.

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

Перетворимо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Ми прийшли до системи, що містить рівняння $0 = 2$. Вихідна система буде несумісною.

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Тут кількість рівнянь менш за кількість невідомих; тому якщо вона і буде сумісною, то невизначеною. Перетворимо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Оскільки останній стовпець складається з нулів та внаслідок елементарних перетворень не змінюється, то далі при перетвореннях його писати не будемо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{10}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Ми прийшли до системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 9x_2 + 5x_3 - 13x_4 = 0 \\ 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Вільним невідомим можна обрати будь-яке з невідомих x_3 та x_4. Хай $x_4 = a$. Тоді з третього рівняння випливає $x_3 = \frac{4}{5}a$, після чого з другого рівняння дістанемо $x_2 = a$ та, нарешті, з першого рівняння $x_1 = \frac{3}{5}a$. Таким чином, $x_1 = \frac{3}{5}a$, $x_2 = a$, $x_3 = \frac{4}{5}a$, $x_4 = a$ буде загальним виглядом розв'язків даної системи рівнянь.

Приклад 4. Дослідити систему у залежності від параметра λ:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Переставимо останній рядок на місце першого, а перший - на місце третього:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right).$$

Відіймемо від другого рядку перший, а від третього рядку – потрійний перший:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & \lambda-6 & 2 \end{array}\right).$$

Відіймемо від третього рядку другий:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 4 \end{array}\right).$$

Проведемо дослідження отриманої матриці; а саме, проаналізуємо рядок матриці, де знаходиться параметр λ . Розглянемо випадки:

1. $\lambda - 1 = 0$, тобто $\lambda = 1$. У цьому випадку матриця $\bar{A}$ має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right),$$

Переходячи від матриці до запису системи рівнянь, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -3x_2 - 5x_3 = -2 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

Третє рівняння системи не має розв'язків, тому уся система несумісна.
2. $\lambda - 1 \neq 0$, тобто $\lambda \neq 1$. У цьому випадку третій рядок матриці $\bar{A}$ можна поділити на $\lambda - 1$. Поділимо її на $\lambda - 1$, дістанемо:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{\lambda-1} \end{array}\right)$$

За допомогою елементарних перетворень матрицю можна привести до діагонального вигляду. У даному випадку система має єдиний розв'язок. Отже, при $\lambda=1$ система несумісна, а при $\lambda\neq1$ система сумісна та має єдиний розв'язок.

4.3. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Розглянемо системи n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.7)$$

У матричній формі цю систему перепишемо у вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матриця коефіцієнтів,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - вектор невідомих, $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - стовпець вільних членів.

Якщо обернена до A матриця A^{-1} існує (а ми знаємо, що це можливо тоді і тільки тоді, коли визначник $|A| \neq 0$), то, розв'язавши матричне рівняння $AX = B$, дістанемо $X = A^{-1}B$, тобто досить однозначну відповідь. Таким чином, **розв'язок системи (4.7) існує і єдиний тоді і тільки тоді, коли** $|\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}$. Розв'язання системи (4.7) за формулою $X = A^{-1}B$ має назву **розв'язання матричним засобом**.

4.4. Формули Крамера

Помножимо перше з рівнянь системи (4.7) на A_{1j}, друге на A_{2j}, …, n-е на A_{nj} та додамо, де A_{ij} -алгебраїчне доповнення до елементу a_{ij} матриці коефіцієнтів A. Дістанемо

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\ldots+a_{n1}A_{nj})x_1+\ldots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj})x_j+\ldots+$$
$$+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\ldots+a_{nn}A_{nj})x_n=b_1A_{1j} + +b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}.$$

Коефіцієнти перед $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ є сумами добутків алгебраїчних доповнень j-го стовпця матриці A на елементи паралельного стовпця, які, як випливає з властивостей визначників, дорівнюють нулю. Коефіцієнт при x_j, з властивостей визначників, дорівнює визначнику матриці A. Тому дістали рівняння $|A| x_j = b_1A_{1j} + \ldots + b_nA_{nj}$. Права частина цього рівняння, як бачимо, є

$$b_1A_{1j} + \ldots + b_nA_{nj} = |A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

розклад визначника $|A_j|$ по j-му стовпцю; $|A_j|$ дістанемо з $|A|$ заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів. Виконаємо тепер описані дії для $j = 1, 2, \ldots, n$, дістанемо рівносильну систему рівнянь (кожна з дій - елементарне перетворення над системою рівнянь):

$$\begin{cases} |A| x_1 = |A_1| \\ |A| x_2 = |A_2| \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ |A| x_n = |A_n| \end{cases}$$

З кожного рівняння отриманої системи знайти x_j можна тільки у випадку $|A| \neq 0$. У цьому випадку $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$. Таким чином, є вірною наступна теорема.

<u>**Теорема 4**</u> (Крамера). Розв'язок системи n лінійних рівнянь з n невідомими (4.7) існує та єдине тоді і тільки тоді, коли визначник матриці коефіцієнтів відрізняється від нуля $|A| \neq 0$ та розв'язки знаходяться за формулами

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}. \tag{4.8}$$

Формули (4.8) мають назву **формул Крамера**.

З цієї теореми можна дістати два простих наслідка, що легко доводяться від протилежного.

Наслідок 1. Якщо відомо, що система n лінійних рівнянь з n невідомими не має розв'язків, то визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо система n лінійних рівнянь з n невідомими має більш чим один розв'язок, то визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю.

Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо усі її вільні члени дорівнюють нулю. Однорідна система (незалежно від кількості рівнянь) завжди має розв'язок, що складається з нульових значень для усіх невідомих. Для однорідних систем цікавим є питання про те, чи є нульовий розв'язок єдиним чи крім нього існують інші, нетривіальні, розв'язки.

Наслідок 3. Для того, щоб система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими мала нетривіальні розв'язки, необхідно, щоб визначник матриці з її коефіцієнтів дорівнював нулю.

Дійсно, якщо хоча б один нетривіальний розв'язок є, то система має більш чим один розв'язок, так як нульовий завжди є. Тому визначник матриці коефіцієнтів системи дорівнює нулю.

4.5. Схема Халецького

Метод полягає у розкладі матриці коефіцієнтів A системи (4.7) на дві матриці D та C, при чому D нижньотрикутна, а C верхньотрикутна. $A=DC$, де

$$D=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Помножуючи послідовно усі рядки матриці D на перший стовпець матриці C, ми дістанемо (у першому стовпці матриці C тільки один ненульовий елемент, що дорівнює одиниці) відповідні значення, що дорівнюють d_{i1}, і вони повинні бути однаковими (так як $DC=A$) a_{i1}, тобто $d_{i1}=a_{i1}$. Отже, перший стовпець матриці D ми легко обчислимо. Знаючи перший стовпець матриці D, обчислимо елементи першого рядку матриці C. Для цього помножимо послідовно перший рядок матриці D на усі стовпці матриці C, починаючи з другого. Дістанемо $d_{11}c_{1j}$, що відповідно повинно дорівнювати елементам a_{1j} матриці A, тобто $d_{11}c_{1j} = a_{1j}$, звідки

$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{d_{1j}}$. Припустимо, ми вже знаємо значення елементів стовпців $1,2,\dots,i$ матриці D та значення елементів рядків $1,2,\dots,i$ матриці C. Обчислимо елементи $i+1$ стовпця матриці D. Для цього будемо множити рядки $i+1, i+2, \dots, n$ матриці D послідовно на стовпець $i+1$ матриці C. Дістанемо $\sum_{j=1}^{i} d_{i+kj} c_{ji+1} + d_{i+ki+1} = a_{i+ki+1}$, звідки

$d_{i+ki+1} = a_{i+ki+1} - \sum_{j=1}^{i} d_{i+kj} c_{ji+1}$ (помітимо, що усі значення елементів правої частини останньої рівності ми вже знаємо!). Тепер обчислимо елементи $i+1$ рядку матриці C, помноживши для цього рядок $i+1$ матриці D послідовно на стовпці $i+2$, $i+3,\dots,n$ матриці C. Дістанемо

$\sum_{j=1}^{i} d_{i+1j} c_{ji+k} + d_{i+1i+1} c_{i+1i+k} = a_{i+1i+k}$, звідки

$c_{i+1i+k} = \frac{1}{d_{i+1i+1}} \left(a_{i+1i+k} - \sum_{j=1}^{i} d_{i+1j} c_{ji+k} \right)$ Отже, обчислення d_{ij} та c_{ij} виконуються за вказаними формулами "ялинкою", тобто спочатку обчислюють елементи 1-го стовпця D, потім елементи 1-го рядку C, потім 2-го стовпця D, - 2-го рядку C і т.с.

Зауваження. При обчисленні елементів c_{ij} можливо зустріти ділення на нуль. У цьому випадку треба за допомогою елементарних перетворень над системою (4.7) змінити матрицю коефіцієнтів для виключення подібного випадку.

Повернемося до рівняння AX=B. Підставимо у нього замість A розклад A=DC. Дістанемо DCX=D(CX)=B. Введемо у розгляд новий вектор невідомих

$$CX = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Вектор Y обчислюється за формулами (зворотній хід метода Гаусса)

$$y_1 = \frac{b_1}{d_{11}}, y_i = \frac{1}{d_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik} y_k); (i > 1).$$

Шуканий вектор X обчислюється за формулами (знов використовується зворотній хід метода Гаусса) :

$$x_n = y_n, x_i = y_i - \sum_{k+1}^{n} c_{ik} x_k; (i < n)$$

Розв'яжемо за схемою Халецького систему з прикладу 1. Для цієї системи

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$. Знайдемо матриці D та C, що пов'язані співвідношенням DC=A. Як бачимо з вищенаведених формул, перший стовпець матриці D збігається з першим стовпцем матриці A, тобто $d_{11}=1$, $d_{21}=1$, $d_{31}=3$. Отже,

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & d_{22} & 0 \\ 3 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помноживши перший рядок D на другий та третій стовпець матриці C, прирівнявши отримані результати відповідно до a_{12}, a_{13}, дістанемо $c_{12}=2$, $c_{13}=5$. Тому

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & d_{22} & 0 \\ 3 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помноживши другий та третій рядки D на другий стовпець C, прирівнявши отримане до a_{22}, a_{32}, знайдемо $1*2+d_{22} = a_{22} = -1$, $3*2+d_{32} = a_{32} = -6$, тобто $d_{22}= -3$,$d_{32}= -12$. Тому

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & d_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо c_{23}, помноживши другий рядок D на третій стовпець C: $1*5+ +(-3)c_{23} = a_{23} = 3$, тобто $c_{23} = 2/3$. Нарешті, знайдемо d_{33}, помноживши третій рядок D на третій стовпець C:
$3*5+(-12)*(2/3)+d_{33}= -1$, $d_{33}= -8$. Отже,

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Тепер послідовно знайдемо Y з системи рівнянь DY=B:

$$\begin{cases} y_1 = -9 \\ y_1 - 3y_2 = 2 \\ 3y_1 - 12y_2 - 8y_3 = 25 \end{cases}, \quad y_1= -9,\ y_2= -11/3,\ y_3= -1.$$

Вектор шуканих невідомих X знайдемо з системи рівнянь CX=Y:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \end{cases}, \quad x_3= -1,\ x_2= -3,\ x_1= 2.$$

4.6. Наближені (ітераційні) методи розв'язання систем лінійних рівнянь

Ми розглянемо три методи розв'язання для системи рівнянь (4.7) у припущенні, що розв'язок системи рівнянь існує та єдиний:

- Метод простих ітерацій. Метод Зейделя,
- Метод релаксації,
- Метод найскорішого спуску.

Якщо у розглянутих вище методах за певну кількість арифметичних дій можна дістати відповідь (тому вони і називаються точними або прямими), то при використанні ітераційних методів таких дій, власне кажучи, може бути нескінченно багато. Процес обчислювання при їх використанні зупиняється при отриманні більш чи менш задовільного результата. При отриманні та використанні ітераційних формул використовуються такі важливі поняття, як стійкість, коректність, збіжність. Однак вони виходять за межі стандартного курсу "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" і входять у розділи математики, що пов'язані з чисельними методами. Тому ми наведемо лише самі ці формули.

Почнемо з **метода простих ітерацій**. Перетворимо систему (4.7) $AX=B$ до вигляду

$X=\beta+\alpha X$, де

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \ \beta_1 = \frac{b_i}{a_{ii}}, \ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} (i \neq j), \ \alpha_{ij} = 0 (i = j), \ i,j = 1,2,\dots,n.$$

Для отримання такого вигляду треба у кожному з n рівнянь виразити невідоме x_i через усі остатні його частини. У методі простих ітерацій обирається нульове наближення $X^{(0)}$, потім обчислюється наближення $X^{(1)}=\beta+\alpha X^{(0)}$, потім обчислюється $X^{(2)}=\beta+\alpha X^{(1)}$, і т.с. Процес може як збігатися до розв'язку, так і розбігатися. У результаті багатократного повторення цього процесу (або **ітерацій**) дістанемо послідовність значень $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}, \dots$ Кажуть, що ця послідовність **збігається** до точного розв'язку X_0, якщо при нескінченному зростанні кількості ітерацій границя цієї послідовності існує та дорівнює X_0: $\lim\limits_{n\to\infty} X^{(n)} = X_0$. У цьому випадку маємо збіжний чисельний метод.

Приведемо достатню умову збіжності цього методу: **якщо виконана хоча б одна з умов: 1)** $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1(i = \overline{1,n})$ **; 2)** $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1(j = \overline{1,n})$**, то процес збігається незалежно від обрання початкового наближення**.
Можна довести, що за **допомогою елементарних перетворень система (4.7) перетворюється до вигляду, для якого виконується ця достатня умова**. Ці умови не означають, що при інших a_{ij} ітераційний процес не буде збігатися.

Метод простих ітерацій припускає нескладну модифікацію, яка має назву **метода Зейделя**. Ідея полягає у тому, що при обчисленні $(k+1)$-го наближення невідомого x_i з вектора X враховуються вже обчислені раніше $(k+1)$-і наближення невідомих $x_1, \dots, x_{i-1}$. По Зейделю, $(k+1)$-е наближення обчислюють за формулами:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + a_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} a_{2j} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} + a_{nn} x_n^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Розв'яжемо систему з прикладу 1 методом Зейделя:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Перетворимо систему з ціллю отримання збіжного ітераційного процесу таким чином: від подвійного першого рівняння відіймемо потрійне друге, додамо третє та запишемо на місці першого; третє рівняння запишемо на місці другого; перше рівняння запишемо на місці третього. Отримана система буде виглядати так:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \end{cases}$$

Тепер виразимо з першого рівняння x_1, з другого - x_2, з третього - x_3:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 = -\frac{25}{6} + \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{6} x_3 \\ x_3 = -\frac{9}{5} - \frac{1}{5} x_1 - \frac{2}{5} x_2 \end{cases}, \qquad \text{або}$$

$$X=\beta+\alpha X, \quad \text{де} \quad \alpha=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{25}{6} \\ -\frac{9}{5} \end{pmatrix}.$$

Випишемо для цього прикладу формули методу Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{25}{6} + \frac{1}{2}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{6}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{9}{5} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} - \frac{2}{5}x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

За початкове наближення візьмемо $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$.
Хід подальших розрахунків можна побачити у наступній таблиці:

Номер ітерації	x_1	x_2	x_3
k = 0	0	0	0
k = 1	0,5	-3,916667	-0,333333
k = 2	2,458333	-2,881944	-1,138889
k = 3	1,940972	-3,006366	-0,985648
k = 4	2,003183	-3,000801	-1,000316
k = 5	2,0004	-2,999747	-1,000181
k = 6	1,999874	-3,000033	-0,999961
k = 7	2,000017	-2,999998	-1,000004
k = 8	1,999999	-3	-0,999999
k = 9	2	-3	-1

У **методі релаксації** перетворюють систему (4.7) $AX = B$ до вигляду (відокремлюючи з i-го рівняння невідоме x_i):

$$\begin{cases} 0 = c_1 - x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} b_{1j}x_j \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ 0 = c_i - x_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij}x_j \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ 0 = c_n - x_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{nj}x_j \end{cases}, \text{ де } b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, (i \neq j), c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad (4.9)$$

Хай $X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ - k-е наближення. Підставляючи ці значення у систему, дістанемо **нев'язки** (відхил правих частин системи (4.9) від нуля) $R_i^{(k)}$:

$$\begin{cases} R_1^{(k)} = c_1 - x_1^{(k)} + \sum\limits_{j=2}^{n} b_{1j}x_j^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ R_i^{(k)} = c_i - x_i^{(k)} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij}x_j^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots \\ R_n^{(k)} = c_n - x_n^{(k)} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} b_{nj}x_j^{(k)} \end{cases}$$

Хай i_0 - номер максимальної по модулю нев'язки $R_i^{(k)}$. Тоді наступне наближення $X^{(k+1)}$ обчислюється за формулами: $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)}, (i \neq i_0)$, $x_{i_0}^{(k+1)} = x_{i_0}^{(k)} + R_{i_0}^{(k)}$. У результаті чого дістанемо $R_{i_0}^{(k+1)} = 0$

Розв'яжемо систему з прикладу 1 методом релаксації. Скористаємося перетвореннями системи, що отримані при її розв'язанні методом Зейделя:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \end{cases}$$

Далі перетворимо рівняння цієї системи у вигляд, що потрібний для розв'язання методом релаксації:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} - x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ 0 = -\frac{25}{6} - x_2 + (\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_3) \\ 0 = -\frac{9}{5} - x_3 + (-\frac{1}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2) \end{cases}$$

Формули для обчислення нев'язок виглядають так:

$$\begin{cases} R_1^{(k)} = \frac{1}{2} - x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_2^{(k)} \\ R_2^{(k)} = -\frac{25}{6} - x_2^{(k)} + (\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{6}x_3^{(k)}) \\ R_3^{(k)} = -\frac{9}{5} - x_3^{(k)} + (-\frac{1}{5}x_1^{(k)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)}) \end{cases}$$

За початкове наближення візьмемо $x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$.

Результати розрахунків наведені у наступній таблиці:

Номер ітерації (k)	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	Макс по модулю нев'язка	Зміни для наступної ітерації
0	0	0	0	0,5	**-4,17**	-1,8	4,17	x_3 = =-4,17
1	0	-4,17	0	**2,58**	0	-0,13	2,58	x_1 = =2,58

2	2,58	-4,17	0	0	**1,29**	-0,65	1,29	x_2 = =-2,88
3	2,58	-2,88	0	-0,65	0	**-1,17**	1,17	x_3 = =-1,17
4	2,58	-2,88	-1,17	**-0,65**	0,19	0	0,65	x_1= =1,94
5	1,94	-2,88	-1,17	0	-0,12	**0,13**	0,13	x_3 = =-1,04
6	1,94	-2,88	-1,04	0	**-0,15**	0	0,15	x_2 = =-3,03
7	1,94	-3,03	-1,04	**0,07**	0	0,06	0,07	x_1 = =2,01
8	2,01	-3,03	-1,04	0	0,03	**0,04**	0,04	x_3 = =-1,00
...	...	...	...	...	...	...	...	...
22	2,00	-3,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

За **методом найскорішого спуску** наступне $(k+1)$-е наближення шукається за формулою, що записана у матричній формі:
$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \mu_k A^T F(X^{(k)})$, де A^T - транспонована матриця коефіцієнтів системи $AX = B$, $F(X) = AX - B$,

$$\mu_k = \frac{(F(X^{(k)}), AA^T F(X^{(k)}))}{(AA^T F(X^{(k)}), AA^T F(X^{(k)}))}$$

(у дужках у чисельнику та знаменнику через кому позначений скалярний добуток відповідних векторів).

4.7. Структура множини розв'язків системи лінійних рівнянь

<u>Теорема 5</u>. Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4.10)$$

мала нетривіальні розв'язки, необхідно та достатньо, щоб ранг матриці коефіцієнтів був менший за кількість невідомих.

Доведення. Система може бути записана у вигляді однієї рівності $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n=0$, де $u_1,u_2,\ldots,u_n$ - стовпці матриці коефіцієнтів. Нетривіальні розв'язки системи породжують коефіцієнти нетривіальних (що цілком відрізняються від нуля) лінійних залежностей між стовпцями. Для їх існування необхідно та достатньо, щоб ранг був менший за кількість стовпців, тобто за кількість невідомих.
Систему (4.10), як ми вже знаємо, зручно записати у вигляді $AX=0$.

Твердження 1. Якщо стовпці $z_1,z_2,\ldots,z_k$ - розв'язки системи $AX=0$, то будь-яка їх лінійна комбінація $c_1z_1+c_2z_2+\ldots+c_kz_k$ також є розв'язком.

Дійсно, $A(c_1z_1+c_2z_2+\ldots+c_kz_k)=Ac_1z_1+Ac_2z_2+\ldots+Ac_kz_k=0$.
Сукупність рядків (стовпців) матриці A, що складають максимальну лінійно незалежну множину серед усіх рядків (стовпців), назвемо **базисом**.

Теорема 6. Усі розв'язки лінійної однорідної системи є лінійними комбінаціями лінійно незалежних $n-r$ розв'язків, де n - кількість невідомих, r - ранг матриці коефіцієнтів.

Доведення. Запишемо знов систему (4.10) у вигляді : $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+$ $+x_nu_n=0$, де $u_1,u_2,\ldots,u_n$ - стовпці матриці коефіцієнтів. Серед них є базис з r стовпців. Для зручності запису будемо вважати, що це $u_1,u_2,\ldots,u_r$, інакше можна змінити нумерацію невідомих та, разом з ними, стовпців. Запишемо, що $u_{r+1},\ldots,u_n$ є лінійними комбінаціями $u_1,u_2,\ldots,u_r$. Це приводить до рівностей

$$u_{r+1}=b_{r+11}u_1+b_{r+12}u_2+\ldots+b_{r+1r}u_r\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n=b_{n1}u_1+b_{n2}u_2+\ldots+b_{nr}u_r\ ,$$

звідки випливає, що стовпці

$$z_{r+1}=\begin{pmatrix} b_{r+11}\\ \dots\\ b_{r+1r}\\ -1\\ 0\\ \dots\\ 0 \end{pmatrix},\dots,z_n=\begin{pmatrix} b_{n1}\\ \dots\\ b_{nr}\\ 0\\ 0\\ \dots\\ -1 \end{pmatrix}$$

дають розв'язки системи. Вони, очевидно, лінійно незалежні (щоб впевнитися у цьому, достатньо почати їх читати з $r+1$ координати). Хай $x=(x^*_1,\dots x^*_r,x^*_{r+1},\dots,x^*_n)$- ще який-небудь розв'язок системи.Тоді $y=x+x^*_{r+1}z_{r+1}+\dots+x^*_nz_n$ також є розв'язком системи . У цьому розв'язку усі компоненти, починаючи з $(r+1)$-ї, дорівнюють нулю (оскільки вони складаються з суми $x^*_j+(-1)x^*_j$, $j=r+1,\dots,n$). Тому і усі остатні компоненти дорівнюють нулю, бо стовпці $u_1,u_2,\dots,u_r$ лінійно незалежні. Отже, $y=0$, тобто $x=-x^*_{r+1}z_{r+1}-\dots-x^*_nz_n$. Таким чином, $z_{r+1},\dots,z_n$ - такі лінійно незалежні розв'язки, що усі розв'язки є їх лінійними комбінаціями. Така сукупність розв'язків називається **базисною** або **фундаментальною**. Символьний вираз, який при частинних значеннях для символів дає усі розв'язки даної системи рівнянь, називається **загальним розв'язком** цієї системи. Для системи лінійних однорідних рівнянь загальним розв'язком буде лінійна комбінація фундаментальної системи з символьними коефіцієнтами.

Розглянемо неоднорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

З нею пов'язані дві матриці: матриця коефіцієнтів

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ та розширена матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Теорема 7 (Кронекера - Капеллі). Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною (тобто мала хоча б один розв'язок), необхідно та достатньо, щоб ранг матриці коефіцієнтів дорівнював рангу розширеної матриці.

Доведення. Записавши систему рівнянь у вигляді $x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n=$ $=b$, де $u_1,u_2,\ldots,u_n$ - стовпці матриці коефіцієнтів, а b- стовпець вільних членів, ми бачимо, що для сумісності системи необхідно та достатньо, щоб стовпець b був лінійною комбінацією стовпців $u_1,u_2,\ldots,u_n$. Для цього рівність рангів необхідна, але вона і достатня, бо якщо ранги однакові, то базис для $u_1,u_2,\ldots,u_n$ буде базисом і для $u_1,u_2,\ldots,u_n,b$, так що b є лінійна комбінація базисних стовпців для $u_1,u_2,\ldots,u_n$.

Теорема 8. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь дорівнює сумі частинного розв'язку та загального розв'язку однорідної системи з тією ж матрицею коефіцієнтів.

Доведення. Хай x_0 – який-небудь частинний розв'язок системи $Ax=b$ лінійних неоднорідних рівнянь. Тоді $Ax_0=b$, і система $Ax=b$ рівносильна $Ax=Ax_0$, або $A(x-x_0)=0$. Тому $x-x_0$ повинно бути розв'язком однорідної системи з тією ж матрицею A. Загальний розв'язок системи $Ax=b$ отримаємо, якщо візьмемо $x-x_0$ рівним загальному розв'язку однорідної системи. Звідси безпосередньо випливає справедливість теореми.

Приклад . Розв'язати наступні системи рівнянь:

$$1.\quad \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2-x_3=-2 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Тут ранг матриці коефіцієнтів дорівнює трьом, також як і ранг розширеної матриці; система сумісна, визначена (три невідомих). Визначник, складений з перших трьох рядків та перших трьох стовпців матриці коефіцієнтів, дорівнює $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14\neq 0$. Тому останнє рівняння системи є лінійною комбінацією перших трьох рівнянь і його можна відкинути. З остатніх перших трьох рівнянь системи, наприклад, за формулами Крамера, знаходимо $x_1 = -1$, $x_2 = =0$, $x_3 = 1$.

$$
2\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}
$$

Тут ранг r матриці A коефіцієнтів системи дорівнює $r(A)=2$. Ранг розширеної матриці B дорівнює $r(B)=2$; система сумісна, але невизначена, оскільки кількість невідомих n дорівнює чотирьом. Визначник, складений з перших двох рядків та перших двох стовпців матриці A, дорівнює $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Тому за базисні рядки та базисні стовпці можна узяти перші два рядки та перші два стовпці матриці A, що відповідає обранню перших двох рівнянь системи (останні є лінійними комбінаціями обраних)

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases};
$$

вибір перших двох стовпців означає, що після переносу x_3 та x_4 у праву частину обраних рівнянь

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}
$$

невідомі x_1 та x_2 однозначно можна виразити через x_3 та x_4, розв'язавши будь-яким засобом отриману систему, надаючи x_3 та x_4 довільні значення. Звідси випливають назви: невідомі у кількості $r(A)$, що входять у базисні стовпці матриці коефіцієнтів, називають **базисними**, а остатні $n - r$ невідомих - **довільні.** Авжеж, розв'язати отриману систему можна багатьма засобами, наприклад, за формулами Крамера, або методом Гаусса. Ми, щоб краще розібратися у описаній вище теорії, знайдемо спочатку загальний розв'язок однорідної системи

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 = -x_3 - 2x_4 \end{cases}.
$$

Розв'язавши її, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{3}x_3 - x_4 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}x_3 + x_4 \end{cases}$$

Надаючи x_3 та x_4 довільні значення $x_3=\alpha, x_4=\beta$, дістанемо загальний розв'язок

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{3}\alpha - \beta \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}\alpha + \beta \\ \quad x_3 = \alpha \\ \quad x_4 = \beta \end{cases}$$

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків, надамо спочатку $x_3=1$, $x_4=0$, а потім -$x_3=0, x_4=1$, підставимо ці значення у загальний розв'язок, дістанемо два вектори $z_1=(-5/3,-2/3,1,0)$ та $z_2=(-1,1,0,1)$, які, очевидно, лінійно незалежні (їх останні координати - це $1,0$ та $0,1$ відповідно) та є розв'язками однорідної системи.

Загальний розв'язок X однорідної системи можна тоді записати так:

$$X = \alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3}\alpha - \beta \\ -\dfrac{2}{3}\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

тобто, природно, такий же, як і записаний вище, оскільки ми поклали спочатку $x_3=1, x_4=0$, а потім - $x_3=0, x_4=1$, або $\alpha x_3=\alpha$, $\beta x_4=0$ та $\alpha x_3=0$, $\beta x_4=\beta$. Знайдемо теперь частинний розв'язок системи неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

Щоб спростити розрахунки, покладемо $x_3=0$, $x_4=0$, тобто розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}.$$

Її розв'язком є $x_1=8/3$, $x_2=-4/3$. Отже, частинний розв'язок системи неоднорідних рівнянь - це вектор $(8/3,-4/3,0,0)$. Ми знаємо (теорема 8), що загальний розв'язок системи неоднорідних рівнянь складається з суми частинного розв'язку та загального розв'язку системи однорідних рівнянь, тобто загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\alpha - \beta \\ -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

або $x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4$, $x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4$, де x_3 та x_4 можна надавати будь-які значення.

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6 \end{cases}$$

Тут $r(A)=2$, а ранг розширеної матриці дорівнює трьом $r(B)=3$. За теоремою Кронекера - Капеллі, система несумісна, тобто розв'язків немає.

Отже, щоб отримати **фундаментальну систему розв'язків (ФСР)** однорідної системи n рівнянь, треба:

1) знайти загальний розв'язок;

2) надати вільним невідомим $x_{r+1},\dots,x_n$ $n-r$ різних значень (r - ранг матриці коефіцієнтів), отримуючи $n-r$ векторів $X_{r+1} = (x_{r+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $X_{r+2} = (x_{r+1}^{(2)},\dots,x_n^{(2)}),\dots,X_n = (x_{r+1}^{(n-r)},\dots,x_n^{(n-r)})$ так, щоб вектори $X_{r+1},\dots,X_n$ були лінійно незалежні (для цього достатньо при побудові вектора X_{r+i} усім вільним невідомим надати нульові значення, крім $x_{r+i}=1$);

3) підставити ці $n - r$ наборів у загальний розв'язок та отримати стільки ж наборів значень базисних невідомих $x_1,\dots,x_r$;

4) сформувати вектори $Y_1,\dots,Y_{n-r}$, перші r координат яких - це значення базисних невідомих $x_1^{(i)},\dots,x_r^{(i)}$ отриманих при підстанові у загальний розв'язок вільних невідомих $x_{r+1}^{(i)},\dots,x_n^{(i)}$ з векторів $X_{r+1},\dots,X_n$. Вектори $Y_1,\dots,Y_{n-r}$ складають ФСР.

Список рекомендованої літератури

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1984. - 416с.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М. Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1971. - 432с.

3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.. "Наука", 1966, - 664с.

4. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. - М., Наука, 1965. - 275с.

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: "Наука", 1976. - 315с.

6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: "Наука", 1975

7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: "Наука", 1971

8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.:"Наука", 1967

Навчальне видання

Глушков Олександр Васелійович, **Кругляк** Юрій Олексійович,
Чернякова Юлія Георгіївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Конспект лекцій

Підписано до друку 15.05.2004 р. Формат 60х84/16 Папір офсетний.
Ум. друк. арк.7.8 Тираж 300 прим. Замовлення 100
Видавництво та друкарня "ТЕС"(Свідоцтво ДК № 771)
Одеса, Канатна 81/2.
Тел. 42-90-98

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15