

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І. Герасимов, І.С. Андріанова, В.А. Настасюк

**МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ
І ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ
В ЗАДАЧАХ УБЕЗПЕЧЕННЯ ДОВКІЛЛЯ**

Затверджено на засіданні вченої ради
Одеського державного екологічного
університету Міністерства освіти і
науки України як навчальний
посібник для здобувачів вищої освіти
за спеціальностями “Технології
захисту навколишнього середовища”,
“Екологія”, “Науки про Землю”
(протокол № 6 від 4.07.2019 р.)

Одеса 2020

УДК 517.954:502.2

Г37

Герасимов О.І, Андріанова І.С., Настасюк В.А. Методи математичної і теоретичної фізики в задачах убезпечення довкілля: навчальний посібник [для студентів ЗВО]. Одеса: ОДЕКУ, 2019. с.

У посібнику розглянуто фізичні моделі, постановку і методи розв'язання задач математичної фізики, що так чи інакше виникають у фізиці довкілля.

Коло розглянутих питань охоплює одновимірні крайові задачі теорії коливань і дифузії, приклади постановки й розв'язання відповідних задач у просторі з потрібними елементами теорії спеціальних функцій, дифузію у складних середовищах

Рецензенти: д.фіз.-мат.наук, проф. Чалий О.В. Національний медичний університет ім. О.О.Богомольця

д.фіз.-мат.наук, проф. Ковальчук В.В. Коледж комп'ютерних технологій ОДЕКУ

© О.І.Герасимов, І.С.Андріанова, В.А.Настасюк

Зміст

Вступ	5
1. Крайові задачі математичної фізики	
1.1. Класифікація рівнянь математичної фізики	7
1.2. Крайові умови	9
2. Коливання систем із розподіленими параметрами	
2.1. Поперечні коливання в одному вимірі	11
2.2. Рівняння малих поздовжніх коливань	13
2.3. Розв'язання хвильового рівняння методом характеристик	15
2.4. Метод продовження для напівобмеженої системи	18
2.5. Розв'язання хвильового рівняння відокремленням змінних. Вільні коливання	23
2.6. Вимушені коливання в обмеженій системі	28
2.7. Коливання за наявності опору	29
2.8. Коливання неоднорідних систем	34
3. Задачі дифузії й теплопровідності	
3.1. Вивід рівняння дифузії	37
3.2. Окремий (автомодельний) розв'язок рівняння дифузії	45
3.3. Задача Коші для рівняння дифузії у нескінченному просторі Метод функцій Гріна	51
3.4. Застосування перетворень Фур'є для розв'язання рівняння дифузії	53
3.5. Дифузія на півосі. Крайові умови	56
3.6. Розв'язання рівняння дифузії у сферичних координатах. Метод відокремлення змінних	62
3.7. Дифузія на відріжку	68
3.8. Експоненціальні за часом розв'язки рівняння дифузії	70
3.9. Стаціонарні розв'язки рівняння дифузії	77
3.10. Задачі з народженням частинок	81
3.11. Аномальна дифузія та фракційна кінетика	89
3.12. Моделювання процесів дифузії в задачах довкілля. Приклади	91
4. Просторові крайові задачі	
4.1. Поперечні коливання мембрани	109
4.2. Метод відокремлення змінних у двовимірних задачах із круговою симетрією	111
4.3. Коливання круглої мембрани. Загальний випадок	116

4.4 Рівняння руху ідеальної рідини	120
4.5 Звукові хвилі	123
4.6 Коливання рідини в обмеженому просторі	126
4.7 Поверхневі хвилі в полі тяжіння	127
4.8 Океанські припливи	130
5. Метод інтегральних перетворень	133
5.1 Перетворення Лапласа	133
5.2 Перетворення Фур'є	142
6. Рівняння Беселя	
6.1 Рівняння Беселя і функції Беселя	146
6.2 Задача Штурма-Ліувілля для рівняння Беселя	150
Список використаних літературних джерел	154
Іменний покажчик	155
Предметний покажчик	156

Вступ

У цьому посібнику йдеться про аналітичні методи розв'язання рівнянь математичної фізики. Рівняння математичної фізики належать до класу диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП), застосування яких охоплюють широке коло галузей: механіку рідини, механіку твердого тіла, електрику та магнетизм, тепломасообмін, поширення хвиль, низку модельних задач наук про довкілля. Природні системи, як правило, набагато складніші від ізольованих “лабораторних” об'єктів, для яких, власне, і розроблено математичний апарат фізики; тож можна розглядати дослідження в галузі фізики й хімії як постачальник “будівельних блоків” для цілісного опису довкілля.

Говорячи тут про фізику довкілля та екологію, ми побічно торкаємось питань екологічних технологій і зосереджуємось на природних явищах в гідро-, атмо-, кріо-, літо-, біо- та йоносферах. ДРЧП і теорія поля в їхній основі лишаються описовою мовою для явищ у цих середовищах. Математично поєднуючи пов'язані з цим задачі, ДРЧП виступають для цих явищ міждисциплінарним підходом.

На сьогодні розв'язання ДРЧП є одним з основних рубежів прикладної математики та обчислень, а отже, і екології та інженерії. Звичайно, ДРЧП у практичних задачах, з їхніми незручною геометрією (не регулярними границями), змінними коефіцієнтами, нелінійностями набагато складніші, ніж канонічні рівняння математичної фізики і потребують чисельного розв'язання. Ми не ставимо на меті охопити в одному посібнику ще й чисельні методи, застосовні до ДРЧП (а їх два основних: скінчених різниць і скінчених елементів); наша задача скромніша – познайомити читача з основними типами рівнянь математичної фізики та відомими методами їх аналітичного розв'язання, забезпечивши таким чином ґрунт для подальшого вивчення предмету.

Слід наголосити на цінності аналітичних розв'язків. Їх можна диференціювати та інтегрувати, виділяти в них суттєві компоненти. Вони сприяють аналізу чутливості системи до тих чи інших чинників; забезпечують підказки про потрібну і достатню кількість умов на межі системи; формують уявлення про загальну поведінку системи. Іноді вдається наближено знайти основні характеристики досліджуваного процесу заміною розв'язання початкових задач розв'язанням простіших задач.

Загальні аналітичні розв'язання, які ми вивчаємо, включають методи перетворення (Фур'є, Лапласа); відокремлення змінних; функції Гріна; методи характеристик (Д'Аламбера) і перетворення подібності. Більшість з цих добре розвинених підходів зменшує розмірність ДРЧП, спрощує їх, зводячи до звичайних диференціальних рівнянь (Маємо на думці, що читач уже знайомий з курсу вищої математики з прийомами їх розв'язання).

Зауважимо також, що посібник не претендує на охоплення всіх аналітичних методів математичної фізики. Тут, наприклад, не розглянуто варіаційний метод та інтегральні рівняння, які навряд чи найближчим часом знайдуть застосування в задачах фізики довкілля.

Посібник складається з шести розділів, у першому з яких читач знайомиться з різновидами рівнянь математичної фізики і крайових умов для них. Другий, третій та четвертий розділи присвячені розв'язанню крайових задач для рівнянь гіперболічного і параболічного типів. У п'ятому розділі винесено окремо розгляд методів перетворень Лапласа та Фур'є, як таких, що годяться для розв'язання будь-якого типу лінійних ДРЧП. У шостому розділі викладено теорію рівняння і функцій Беселя, що виникають у багатьох задачах математичної фізики. Викладення завершується розглядом деяких типів нелінійних ДРЧП та нечисленних методів їх аналітичного розв'язання.

1

Крайові задачі математичної фізики

1.1 Класифікація рівнянь математичної фізики

Величезна кількість фізичних задач приводить до ДРЧП другого порядку відносно шуканої функції. Рівняння називається **лінійним**, коли сама функція та її похідні входять у нього в першому ступені. Коли рівняння має доданок, який не залежить від шуканої функції, воно називається **неоднорідним**, інакше воно **однорідне**.

Типізацію ДРЧП визначають коефіцієнти при старших похідних. Для рівнянь, в яких шукана функція $u(x, y)$ залежить лише від двох змінних,

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

(а a , b c і f можуть бути взагалі функціями u , du/dx , du/dy , x , y) вона виглядає так, як показано в таблиці:

Співвідношення	Рівняння
$b^2 - 4ac > 0$	гіперболічне
$b^2 - 4ac = 0$	параболічне
$b^2 - 4ac < 0$	еліптичне

Прикладом гіперболічного рівняння може слугувати **хвильове рівняння**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

(тут x має зміст координатної змінної, а t є час); до класу параболічних належить **рівняння дифузії (теплопровідності)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (1.2)$$

еліптичним є рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

(x та y – координати). У тривимірному варіанті рівняння (1.1) – (1.3) виглядають відповідно так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (1.5)$$

$$\Delta u = 0 \quad (1.6)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Кожен з цих типів ДРЧП має свої особливі вимоги до потрібних і достатніх умов існування розв'язку в межах області визначення.

Еліптичні рівняння зазвичай описують стаціонарні задачі (без часової залежності) і потребують завдання умов на межах області визначення. Всі незалежні змінні відповідають просторовим напрямкам і входять у рівняння однаково через другі похідні. У багатьох випадках задача на еліптичні рівняння є граничним випадком динамічної (перехідної) задачі.

Рівняння еліптичного типу можна отримати з гіперболічного або параболічного рівняння процедурою пониження розмірності. Воно потребує крайових умов тих же типів, що і гіперболічні та параболічні рівняння. У цьому курсі окремо його не розглядатимемо.

Параболічні рівняння зазвичай відповідають необоротним процесам, причому просторова частина рівняння типово еліптична і описує миттєвий “зріз” процесу. Залежність від часу потребує завдання початкової умови задля однозначного розв'язання задачі:

$$u|_{t=0} = u_0(\vec{r}). \quad (1.7)$$

Гіперболічні рівняння у цьому сенсі є подібними до параболічних. Вони описують деякий коливальний процес, а присутність другої похідної по часу потребує завдання уже двох початкових умов: до (1.7) додається умова

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(\vec{r}). \quad (1.8)$$

Коли функції координат $u_0(\vec{r})$ та $v_0(\vec{r})$ задані, кажуть, що поставлено **задачу Коші**.

Наведені вище ДРЧП є однорідні (на разі, якщо u є розв'язок, то cu , де c – будь-яке число, є також розв'язок). Існує багато задач, які зводиться до неоднорідного рівняння з членом, що відповідає “джерелам” або

“силам”. Наприклад, рівняння коливань струни, до якої прикладено силу $f(x, t)$ на одиницю довжини виглядає як

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Якщо сила f залежить ще й від шуканої функції u у ступені відмінному від одиниці, то рівняння стає нелінійним.

1.2 Крайові умови

Будь-яке диференціальне рівняння, взагалі, має нескінчену кількість розв’язків. Питання, який з них відповідає конкретному процесові, можливо з’ясувати, встановивши додаткові умови, що виділяють цей процес із решти. Про потребу встановлення початкових умов уже йшлося. Крім цього в задачах вказують у просторі область, для якої записано диференціальне рівняння, і задають фізичні умови на її межі. Такі умови називаються **межевими** або **крайовими**. Чисто з математичних міркувань, для знаходження однозначного розв’язку ДРЧП другого порядку по координатній змінній потрібна пара таких умов.

На межі може бути задана сама шукана функція, її перша похідна по координаті або складніша комбінація функції та похідної. Наприклад, якщо йдеться про коливання струни (стрижня), то може бути відомий закон руху окрайку $u(0, t) = \mu(t)$, закон зміни сили, прикладеної до окрайку, $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = v(t)$. Ще один варіант крайової умови виникає, коли прикладена на межі сила, сама залежить від шуканої функції: $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -hu(0, t)$. Ця сила може мати і більш складну залежність від часу. Загалом виділяють три типи граничних умов:

Тип	Задано	Крайова умова
I	u	Дірихле
II	$\frac{\partial u}{\partial x}$	Неймана
III	$au + b \frac{\partial u}{\partial x}$	Ньютона

Для дво- і тривимірних випадків умови задають у кожній точці межі. Умови мають вигляд, аналогічний наведеному у таблиці, тільки похідна замінюється градієнтом (похідною по нормалі до поверхні).

Розглянуті крайові умови є лінійними, позаяк шукана функція та її похідні входять у них лінійно. Вони називаються однорідними, якщо їхні праві частини дорівнюють нулю, в неоднорідними – у протилежному випадку.

В цілому крайову задачу можна сформулювати таким чином: знайти функцію $u(\vec{r}, t)$, що задовольняє в означеній області простору ДРЧП, початкові та крайові умови (певного типу).

Окремо слід виділити задачу *про поширення крайового режиму*, коли початкові умови не відіграють ніякої ролі, $u(\vec{r}, t) = \frac{\partial u(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0$, і фізичний процес в області визначають лише крайові умови. Можливий в певному сенсі протилежний випадок, коли цікавими є значення функції у точках, настільки віддалених від границі, що впливом граничного режиму можна знехтувати. Тоді ставлять задачу Коші.

2

Коливання систем із розподіленими параметрами

2.1 Поперечні коливання в одному вимірі

Розглянемо деяке суцільне середовище, характерний параметер u якого неперервним чином залежить лише від однієї координати і може коливатися за гармонічним законом. У механіці такій системі вповні відповідає **струна**, натягнута між двома затискачами. Параметром $u(x, t)$ тут є величина відхилення струни від положення рівноваги, яким є вісь Ox . Струну зазвичай вважають нерозтяжною і такою, що не чинить опору згину.

Оскільки струна суттєво не видовжується, то а) зміщення $u(x, t)$ є малим (наближення малих коливань) і б) завжди перпендикулярним до осі Ox . Відсутність опору згину математично виражається в тому, що напруження T в струні завжди напрямлені по дотичній до її миттєвого профілю (рис. 1.1). Припускаємо, що ніякого тертя, відповідного за загасання коливань, немає, і прагнемо знайти рівняння, яке керує динамікою руху.

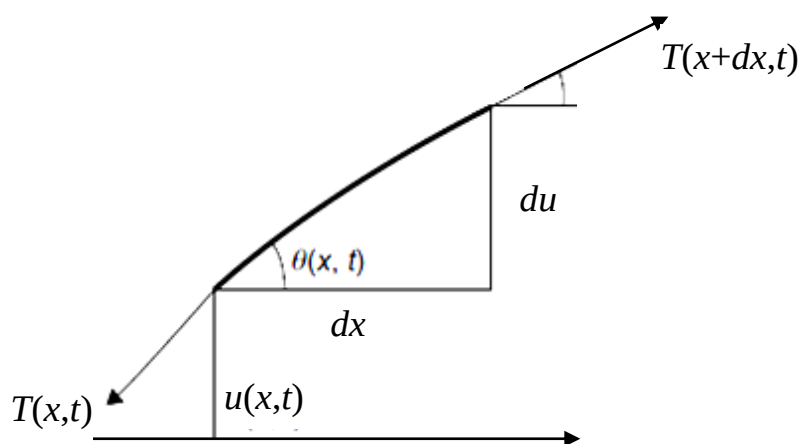


Рис. 2.1

Вочевидь, за малого кута нахилу θ відтягнутої струни проекція сили T на напрямок зміщень $T_u = T \sin \theta \approx T \tan \theta = T du/dx$. Відповідно, вислідна сила, яка прагне повернути струну в стан рівноваги дорівнює

$$T(x+dx) \cdot (\partial u / \partial x)_{x+dx} - T(x) \cdot (\partial u / \partial x)_x.$$

Імпульс елементарного відрізка струни масою $\rho(x)dx$ можливо записати як $\rho(x)dx \cdot du/\partial t$. За другим законом Ньютона його зміна за час dt дорівнює імпульсу сил, які можуть складатися із сил натягу та якихось ще зовнішніх сил $F(x,t)$:

$$\begin{aligned} & \rho(x) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t+dt} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_t \right] dx \\ &= \left[T(x+dx) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - T(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] dt + F(x,t) dx dt \end{aligned} \quad (2.1)$$

Розділивши обидві частини рівняння (2.1) на $dxdt$, отримуємо диференціальне рівняння малих поперечних коливань струни

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t). \quad (2.2)$$

У випадку, коли $T = \text{const}$ і $\rho = \text{const}$, рівняння (2.2) записують у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (2.3)$$

де $a^2 = T/\rho$, $f(x,t) = F(x,t)/\rho$.

Рівняння (2.3) називається **одновимірним неоднорідним хвильовим рівнянням**. За відсутності зовнішніх сил воно стає однорідним:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Рівняння (2.2) або (2.3)–(2.4) має безліч розв'язків. Аби вибрати з цієї множини один розв'язок потрібні ще додаткові умови, які мають впливати з фізичного змісту задачі. Ними є **початкові умови** – відхилення усіх точок струни та його похідна в момент часу $t = 0$,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=0} = v_0(x). \quad (2.5)$$

Крім того, потрібно вказати, що відбувається на кінцях. Наприклад, для жорстко закріпленої струни довжиною l

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \quad (2.6)$$

Тепер постановка задачі звучить так: *знайти розв'язок рівняння (2.2) (або (2.3), (2.4)), яке задовольняє крайові умови (2.5), (2.6).*

2.2 Рівняння малих поздовжніх коливань

Нехай зміщення $u(x, t)$ елементів пружного середовища може відбуватися лише вздовж осі Ox . Механічним аналогом такої системи є **стрижень** – тіло, у якого один із розмірів (довжина) l значно перевищує два інших і для розтягу-стиснення (або згину) якого потрібно докласти певне зусилля. Цим стрижень відрізняється від струни, яка гнеться цілком безперешкодно. Якщо дещо розтягнути (стиснути) стрижень уздовж його осі симетрії, а потім залишити напризволяще, в ньому виникнуть поздовжні коливання.

Нехай у стані спокою кінці стрижня знаходяться в точках з координатами $x = 0$ та $x = l$ (рис. 2) і x – абсциса деякого перерізу стрижня коли він у спокої. Позначимо через u зміщення цього перерізу в момент часу t . Тоді у той же момент зміщення перерізу з абсцисою $x + dx$ дорівнює $u + (\partial u / \partial x) dx$ – відносно видовження стрижня в перерізі з абсцисою x виражається похідною $\partial u / \partial x$.

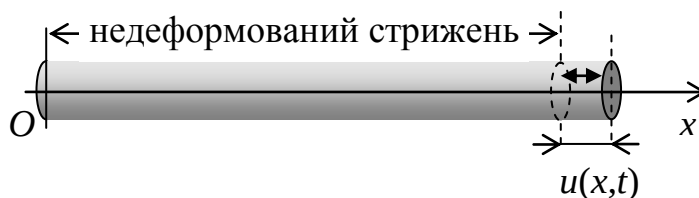


Рис. 2.2

Натяг у перерізі за законом Гука

$$T = ES \frac{\partial u}{\partial x},$$

де E – модуль Юнга, S – площа поперечного перерізу.

На елемент стрижня, обмежений двома перерізами з абсцисами x та $x + dx$, діють у протилежні боки дві сили натягу T_x і T_{x+dx} , вислідна яких уздовж осі Ox має величину

$$T_{x+dx} - T_x = ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \approx ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

За другим законом Ньютона ця сила дорівнює добутку маси елемента $\rho S dx$ на його прискорення $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тож можемо записати рівність

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

де ρ – об’ємна густина стрижня. Поклавши $a = \sqrt{E/\rho}$ та скоротивши на Sdx , отримуємо рівняння поздовжніх коливань однорідного стрижня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.7)$$

тотожне рівнянню (2.4).

У задачах на поширення коливань граничні умови, взагалі, можуть бути такими:

1) обидва кінці жорстко закріплені,

$$u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0. \quad (2.8)$$

2) один кінець закріплено, другий вільний

$$u(0, t) = 0; \quad (\partial u / \partial x)_{x=l} = 0. \quad (2.9)$$

3) обидва кінці вільні,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.10)$$

Рівність похідної $\partial u / \partial x$ нулю на вільних кінцях пояснюється відсутністю натягу $T = ES \cdot \partial u / \partial x = 0$ (немає зовнішніх сил).

4) один кінець, скажімо $x = l$, закріплений пружно. У цьому випадку сила натягу, спричинена закріпленням, прагне повернути зміщений кінець у положення рівноваги. Згідно закону Гука, вона пропорційна величині зміщення:

$$ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -cu(l, t).$$

Тож виходить гранична умова III типу

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -hu(l, t), \quad h = \frac{c}{ES}.$$

Коефіцієнт пропорційності c називається коефіцієнтом жорсткості закріплення.

Якщо точка пружного закріплення переміщується і відомо її відхилення від початкового положення $\theta(t)$, то гранична умова набирає форми

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -h[u(l, t) - \theta(t)]. \quad (2.11)$$

Умова пружного закріплення на лівому кінці має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)].$$

Можливо розглядати коливання в одному вимірі у *нескінчених* та *напівнескінчених* середовищах. Обидва варіанти є ідеалізацією випадку, коли границі системи настільки віддалені від області спостережень, що не чинять суттєвого впливу на коливання.

2.3 Розв'язання хвильового рівняння методом характеристик

Існує два методи розв'язання хвильового рівняння:

- 1) метод біжучих хвиль;
- 2) метод стоячих хвиль.

Нижче розглянемо перший з них, який має ще назву **методу Д'Аламбера** або **характеристик**. У його основі лежить той факт, що за допомогою заміни $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ хвильове рівняння (2.4), (2.7) перетворюється на рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.12)$$

Інтегруючи (2.12) один раз, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = y(\xi). \quad (2.13)$$

де $y(\xi)$ – довільна функція ξ . Інтегруючи тепер отримане по ξ і розглядаючи η як параметр, знайдемо

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + X(\eta),$$

що є загальним розв'язком (2.12). Відповідно, у змінних (x, t) розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = \Phi(x + at) + X(x - at) \quad (2.14)$$

і називається **розв'язок Д'Аламбера**.

Для визначення довільних диференційованих функцій Φ і X потрібні початкові умови. Задамо їх для нескінченної струни в загальному вигляді:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad - \text{форму струни в початковий момент,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = v_0(x) \text{ — профіль швидкості в початковий момент,}$$

тим самим поставши задачу Коші.

Після підстановки в них виразу (2.14) дістаємо систему рівнянь

$$\Phi(x) + X(x) = u_0(x),$$

$$\frac{d\Phi}{dx} - \frac{dX}{dx} = \frac{1}{a} v_0(x).$$

або

$$\begin{aligned} \Phi(x) + X(x) &= u_0(x), \\ \Phi(x) - X(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x v_0(s) ds. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким чином функції Φ і X визначено через задані функції u_0 та v_0 , причому рівності (2.15) повинні мати місце для будь-якого значення аргументу. Тож з пари рівнянь (2.15) маємо шукані функції

$$\Phi = \frac{u_0}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x v_0(s) ds, \quad X(x) = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x v_0(s) ds,$$

а для довільного моменту часу можемо записати повний розв'язок у загальному вигляді:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - at) + u_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(s) ds. \quad (2.16)$$

Це так звана **формула Д'Аламбера**. Неважко пересвідчитися, що вона задовольняє хвильове рівняння і початкові умови.

Фізична інтерпретація

Функція (2.16) описує процес поширення початкового збурення u_0 та початкової швидкості v_0 . Для будь якого моменту часу $t = t_0$ функція $u(x, t_0)$ дає профіль струни, а фіксуючи $x = x_0$, отримаємо процес $u(x_0, t)$ у точці з цією координатою. Розглянемо частину розв'язку, пропорційну $f(x - at)$. Нехай спостерігач, який у початковий момент $t = 0$ фіксував у точці $x = 0$ відхилення $u(0, 0) = f(0)$, рухається зі швидкістю a у позитивному напрямку осі Ox . За час t він пересунеться на відстань $x = at$, а відхилення в точці його теперішнього знаходження буде таким: $u(x, t) = f(x - at) = f(0)$ (рис.

2.3). Тобто спостерігач весь час бачитиме той же самий профіль u . Це означає, що незмінний профіль $u(x, t) = f(x - at)$ пересувається вправо зі швидкістю a і являє собою **біжучу хвилю**. Функція $f(x + at)$ репрезентує, очевидно, хвилю, яка поширюється вліво зі швидкістю a . Таким чином загальний розв'язок (2.16) задачі Коші для нескінченної струни є суперпозиція двох зустрічних хвиль $f(x + at) + f(x - at)$.

Прямі на площині (x, at)

$$x + at = \text{const},$$

$$x - at = \text{const}$$

називаються **характеристиками гіперболического рівняння**. Функція $u = f(x - at)$ вздовж характеристики $x - at = \text{const}$ зберігає стале значення; функція $u = f(x + at) = \text{const}$ уздовж характеристики $x + at = \text{const}$.

Припустимо, що початкове збурення $f(x)$ має місце лише в інтервалі $[x_1, x_2]$. Характеристики

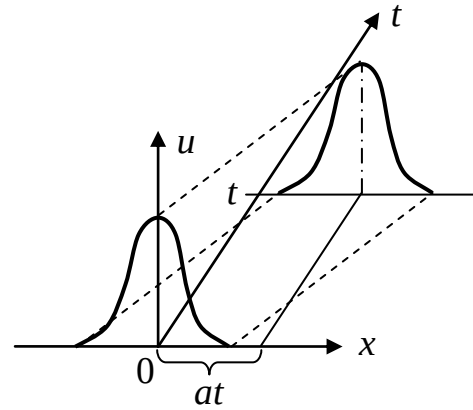


Рис. 1.3

$$x - at = x_1, \quad x - at = x_2 \quad (2.17)$$

і пара

$$x + at = x_1, \quad x + at = x_2 \quad (2.18)$$

розбивають півплощину (x, at) на шість областей (рис. 2.4). Функція $u = f(x - at)$ відмінна від нуля лише в області II+VI і характеристики (2.17) являють собою передній і задній фронти хвилі, що поширюється вправо. Хвиля $u = f(x + at)$ поширюється в “коридорі” IV+VI, відповідно, прямі (2.18) репрезентують її обидва фронти. Таким чином,

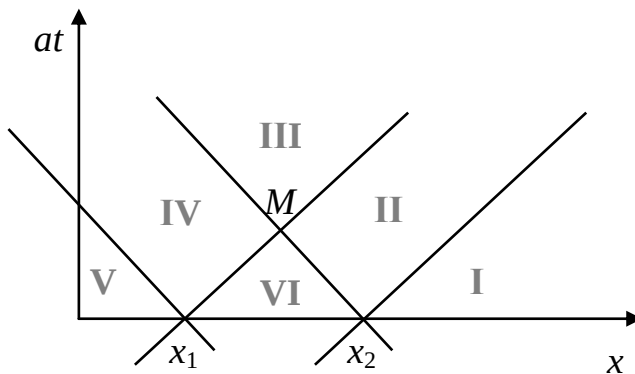


Рис. 2.4

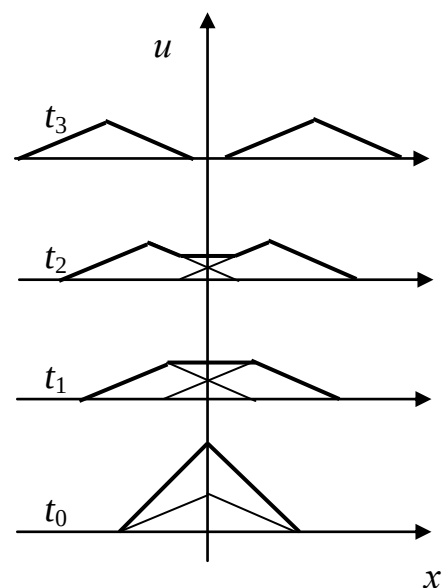


Рис. 2.5

в областях I, III, V хвильовий процес відсутній, тоді як в області VI присутні обидві хвилі. Відхилення струни в точці M (рис. 2.4) визначається значеннями в точках x_1, x_2 у момент часу $t = 0$.

Еволюція збурення, наприклад, трикутної форми в координатах (u, x) виглядає як на рис. 2.5, де знизу вгору показані послідовні положення струни через деякі проміжки часу. Початкове збурення розбігається на два імпульси, що поширюються на різні боки. Жирною лінією показана їхня обвідна (сума).

2.4. Метод продовження для напівобмеженої системи

Припустимо тепер, що система обмежена з одного боку і займає, скажімо, півпростір $x \geq 0$. Коли область початкового збурення знаходиться близько лівої границі $x = 0$, то рано чи пізно хвилі досягнуть її. Відтоді характер коливань суттєво залежатиме від відповідної граничної умови. Протилежний крайок системи можна вважати нескінченно віддаленим, якщо за час спостереження збурення не встигають його досягти. Таким чином доходимо **задачі для хвильового рівняння на півосі**. Вона важлива у дослідженні процесів відбиття хвиль від границі і поставлена таким чином: розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (2.19)$$

яке задовольняє одну з крайових умов,

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{або} \quad (\partial u / \partial x)(0, t) = v(t), \quad (2.20)$$

і початкові умови

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x).$$

Варіант умови (2.20)

$$u(0, t) = 0 \quad (2.21)$$

стосується задачі про **поширення коливань на струні із закріпленням лівим кінцем**. Розв'яжемо її так званим **методом продовження**. Ідея методу полягає у тому, щоб до визначити шукану функцію $u(x, t)$ системи разом з початковими функціями $u_0(x)$ та $v_0(x)$ на від'ємну піввісь $x < 0$, розв'язати задачу вже для необмеженої системи і після того залишити лише ту частину розв'язку, яка стосується додатної півосі.

Позначимо довизначені на область $x < 0$ функції $u_0(x)$ та $v_0(x)$ через $U_0(x)$, $V_0(x)$ відповідно. Розв'язок хвильового рівняння для всієї осі x вже знаємо, це формула Д'Аламбера. У нових позначеннях вона виглядає як

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [U_0(x - at) + U_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} V_0(s) ds. \quad (2.22)$$

Накладаючи крайову вимогу (2.21), дістаємо співвідношення

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [U_0(-at) + U_0(at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} V_0(s) ds = 0,$$

де перший і другий доданки дорівнюють нулю окремо, позаяк функції $u_0(x)$ і $v_0(x)$ незалежні. Звідси випливає, що функція U_0 , що підлягає довизначенню, є *непарною*:

$$U_0(-at) = -U_0(at),$$

Коли $V_0(s)$ також непарна, інтеграл у симетричних границях у формулі Д'Аламбера дорівнює нулю автоматично.

Отож непарні продовження початкових функцій на всю вісь мусять бути такими:

$$U_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x > 0 \\ -u_0(x), & x < 0 \end{cases}, \quad V_0(x) = \begin{cases} v_0(x), & x > 0 \\ -v_0(x), & x < 0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Тоді функція (2.22), задовольняючи вимогу (2.21), разом з виразами (2.23) надає розв'язок формальної задачі Коші для необмеженої прямої.

Повертаючись до початкової задачі для напівобмеженої осі, перепишемо розв'язок (2.22) для фізично допустимих значень змінних x і t за правилами (2.23).

При $x > at > 0$ усі значення аргументів у формулі (2.22) додатні, тож можемо її переписати:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - at) + u_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(s) ds, \quad x > 0, 0 < t < \frac{x}{a}. \quad (2.24)$$

Цей розв'язок збігається з розв'язком (2.16) для необмеженої системи. Очевидно, що протягом часу $t < x/a$ вплив границі $x = 0$ лишається не відчутним, бо збурення від точки з координатою x не встигає її досягнути.

Для точок, ближчих до лівої межі, $x < at$, вплив крайових умов помітніший. Для них праву частину формули (2.22) з урахуванням (2.23) можна переписати так:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [U_0(x - at) + U_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} V_0(s) ds = \\ &= \frac{1}{2} [u_0(x + at) - u_0(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} V_0(s) ds. \end{aligned}$$

Завдяки непарності функції $V_0(x)$ інтеграл від неї трансформується таким чином:

$$\begin{aligned} &\int_{x-at}^{x+at} V_0(s) ds = \int_{x-at}^0 V_0(s) ds + \int_0^{x+at} V_0(s) ds = \\ &= - \int_{at-x}^0 V_0(-s) ds + \int_0^{x+at} V_0(s) ds = \int_{at-x}^0 V_0(s) ds + \int_0^{x+at} V_0(s) ds. \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + at) - u_0(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} V_0(s) ds, \quad x > 0, t > \frac{x}{a}. \quad (2.25)$$

Пара формул (2.24), (2.25) і є розв'язок задачі про коливання струни із закріпленим кінцем.

Тепер розглянемо ситуацію, коли **кінець** при $x = 0$ **вільний**,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (2.26)$$

і знову для розв'язання задачі скористаємося методом продовження. Для проміжку $-\infty < x < \infty$ можемо записати формулу Д'Аламбера (2.22), де $U_0(x)$ та $V_0(x)$ – продовження початкових функцій $u_0(x)$ та $v_0(x)$ на від'ємну половину осі. Їх слід побудувати так, щоб справджувалася умова (2.26). Підставивши (2.22) у (2.26), дістаємо таке обмеження на продовженні функції:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x}(at) + \frac{\partial U_0}{\partial x}(-at) + \frac{1}{a}(V_0(at) - V_0(-at)) = 0.$$

Воно означає, що продовження початкових функцій мусить бути парним (похідна від парної функції є функція непарна):

$$\frac{\partial U_0(-x)}{\partial x} = -\frac{\partial U_0(x)}{\partial x}, \quad V_0(-x) = V_0(x).$$

Тоді розв'язок рівняння коливань за граничної умови (2.26) виглядає так:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[u_0(x - at) + u_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v_0(s) ds, & t < \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}[u_0(at - x) + u_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{at-x} v_0(s) ds + \int_0^{x+at} v_0(s) ds \right], & t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Можемо сформулювати отримані результати у вигляді правила:

для розв'язання задачі на напівобмеженій прямій з крайовою умовою першого роду $u(0, t) = 0$ початкові функції слід продовжити на всю пряму непарно, а за крайової умови другого роду $(\partial u / \partial x)(0, t) = 0$ – парно.

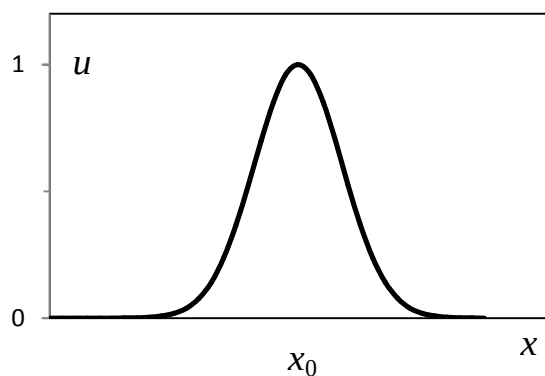
Фізична інтерпретація

Проаналізуємо процес відбиття від закріпленого кінця хвилі, наприклад, сплеску $u_0(x) = \exp[-(x - x_0)^2/l^2]$, який у початковий момент часу $t = 0$ виник на струні на відстані до точки закріплення $x_0 > l/2$ ($l = 1$ на рис. 2.6а). Цю відстань вважаємо досить великою, щоб можна було нехтувати впливом окрайку струни на профіль $u_0(x)$. За деякий час після того, як струну залишено напризволяще, початкова деформація за формулою Д'Аламбера розколюється на дві хвилі (рис. 6б),

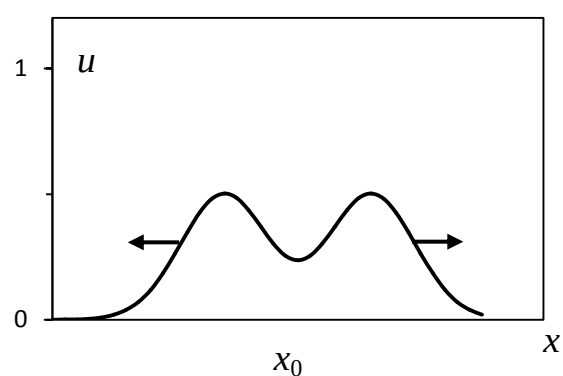
$$u(x, t) = u_0(x + at) + u_0(x - at) = \frac{1}{2}e^{-(x-x_0+at)^2/l^2} + \frac{1}{2}e^{-(x-x_0-at)^2/l^2},$$

що поширюються зі швидкістю a та половинними амплітудами на протилежні боки. З деякого моменту часу ліва хвиля починає деформуватися, накочуючись на закріплений кінець. Простежити за формуванням відбитої хвилі можна, зробивши непарне продовження функції $u_0(x + at)$ на від'єм-

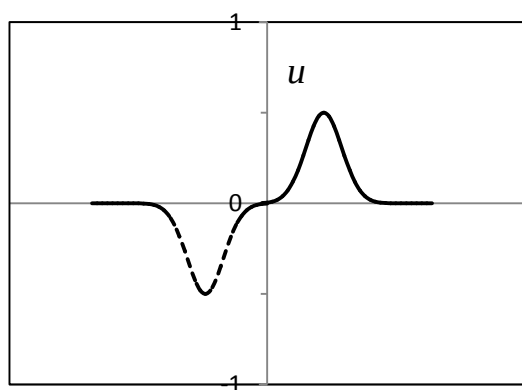
ну піввісь (пунктирна лінія на рис. 2.6*в*). Там початкове збурення $-u_0$ так само розпадається на дві хвилі, які поширюються на обидва боки. У точці $x = 0$ реальна ($x > 0$) та фіктивна ($x < 0$) хвилі зустрічаються, і відбита хвиля стає результатом їхнього накладання. Подальшу еволюцію відбитої хвилі зображено на рис. 2.6*в,г,д,е,є* (суцільна лінія).



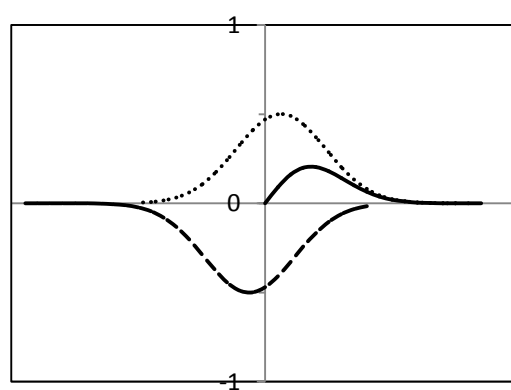
(a)



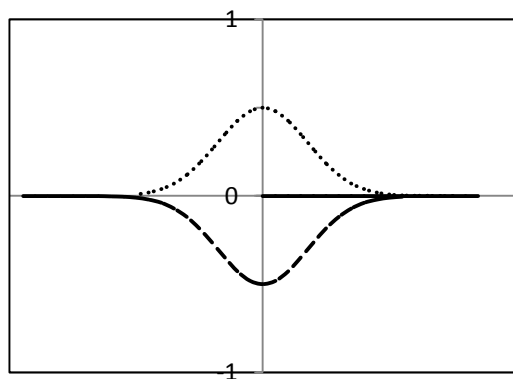
(б)



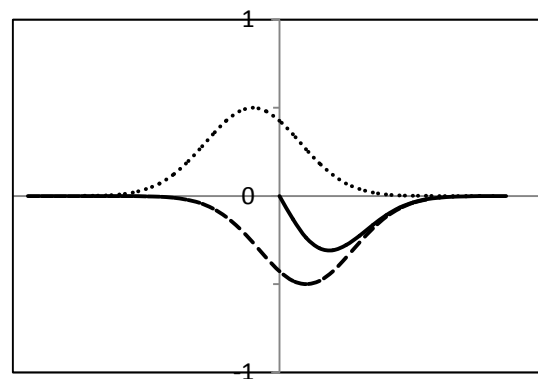
(в)



(г)



(д)



(е)

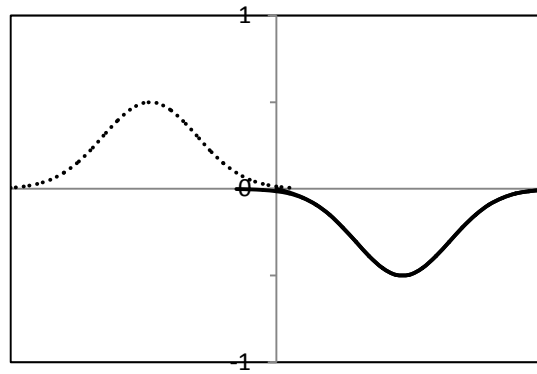


Рис. 2.6

(ϵ)

Таким же чином можна графічно показати, як формується відбита хвиля на струні з незакріпленим кінцем (крайова умова $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$). У цьому випадку кінець струни не відхилятиметься у від'ємну область ($u(0, t) \geq 0$).

2.5 Розв'язання хвильового рівняння відокремленням змінних. Вільні коливання

Метод характеристик є застосовний як до напівнескінченої, так і до скінченної струни з різними типами закріплення на кінцях. Формула Д'Аламбера є сумою двох біжних хвиль, які рухаються в протилежних напрямках. Коли система обмежена, скажімо проміжком $0 < x < l$, хвилі відбиваються від меж і, накладаючись одна на одну, стають стоячими. Тоді розумніше шукати розв'язок у вигляді суперпозиції найпростіших коливань. Для цього більш придатний **метод Фур'є** або **відокремлення змінних**. Метод полягає у пошуку розв'язку в вигляді ряду Фур'є по деякій системі функцій.

Нехай задане хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.27)$$

яке потрібно розв'язати за умов

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Якщо мова йде про струну, то перша з умов (2.27) задає профіль закріпленої на кінцях струни на початку спостережень за нею, друга стосується початковому розподілу швидкостей. Струна, що очевидно з останньої умови, жорстко закріплена на кінцях відрізка $[0, l]$.

Спробуємо шукати розв'язок (2.27) – (2.28) у вигляді $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Підстановка цього добутку у хвильове рівняння дає

$$X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Відокремимо змінні, тобто перепишемо рівняння так, щоб уся залежність від часової змінної опинилася в одній частині рівняння, а координатні функції – в іншій:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

Оскільки обидві частини рівняння змінюються, одне з часом, друге у просторі, незалежно одне від одного, робимо висновок про те, що обидва є константою:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 = \text{const.}$$

Таким чином первісне рівняння у частинних похідних (2.4) розпадається на два звичайних, по просторовій змінній та по часовій:

$$\begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

загальні розв'язки яких відомі з теорії звичайних диференціальних рівнянь:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$T(t) = C \cos a \lambda t + D \sin a \lambda t.$$

Для знаходження невизначених сталих інтегрування A, B, C, D, λ користуємося з граничних і початкових умов (2.28). З умови відсутності руху на кінцях інтервалу спостережень випливає, що

$$0 = X(0) = A \cos 0 + B \sin 0,$$

звідки $A = 0$ та $0 = X(l) = B \sin \lambda l$.

Відкидаючи тривіальний випадок $B = 0$, бачимо, що $\sin \lambda l = 0$, а для цього має бути:

$$\lambda l = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

тобто розв'язок $X(x)$ існує лише для дискретного набору значень

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

ОТОЖ

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Відповідно й перше з рівнянь (2.29) конкретизується за формою:

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + D_n \sin \frac{a\pi n}{l} t.$$

Тепер можемо записати частинний розв'язок хвильового рівняння, отриманий завдяки відокремленню змінних:

$$u_n(x, t) = B_n \sin \frac{\pi n}{l} x \left(C_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + D_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right).$$

Загальним же розв'язком хвильового рівняння буде лінійна комбінація частинних розв'язків, яких є безліч ($0 \leq n < \infty$):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + Q_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.30)$$

Коефіцієнти P_n і Q_n підбирають так, щоб виконувались початкові умови, а саме:

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

$$v_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

Очевидно, що P_n і Q_n є коефіцієнти Фур'є-розкладення заданих функцій $u_0(x)$ та $v_0(x)$:

$$P_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (2.31a)$$

$$Q_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (2.31б)$$

Таким чином вираз (2.30) разом із формулами (2.31) надає повний розв'язок поставленої крайової задачі.

Фізична інтерпретація

Кожен член ряду (2.30), виходячи з тригонометричних тотожностей, можливо переписати у вигляді:

$$u_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t + \beta_n\right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де $A_n = \sqrt{P_n^2 + Q_n^2}$.

Очевидно, що це рівняння **стоячої хвилі**, бо всі точки x коливаються за гармонічним законом із **власною частотою**

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$$

й однаковою початковою фазою β_n та різними амплітудами $A_n \sin \frac{\pi n}{l} x$. У точках, де $\sin \frac{\pi n}{l} x = 1$, тобто, де $x = x_n = l/2n$, амплітуда максимальна – має місце **пучність**; точки $x_n = l/n$, де коливання відсутні називаються **вузлами** (рис. 7).

Найменша власна частота $\omega_1 = \pi a/l$ називається **частотою основного тону**; решта тонів, $\omega_2, \omega_3, \dots$ називаються **обертонами** або **гармоніками**.

Сукупність амплітуд $\{A_n\}$ характеризують спектр (тембр) коливань. Очевидно, що амплітуда основного тону буде найбільшою, бо виражається через інтеграли (2.31) від знакозмінної функції. Дійсно, припустимо що струну примушено до коливань відтягуванням в один бік без додавання початкової швидкості. На разі $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = u_0(x) > 0$ і

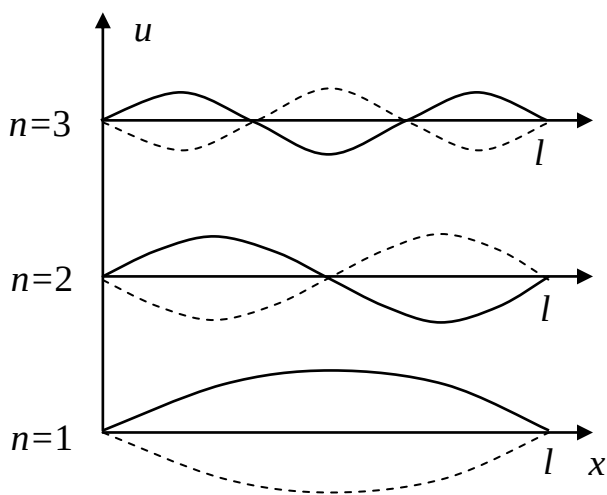


Рис. 2.7

$$A_1 = P_1 = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx > 0,$$

позаяк $\sin \frac{\pi n}{l} x > 0$ усюди на інтервалі інтегрування. Наступні коефіцієнти $A_{n>1}$, взагалі, менші від A_1 , бо при $n \geq 2$ гармонічна функція під інтегралом встигає кілька разів поміняти знак.

Примітка. Метод відокремлення змінних при першому знайомстві може дещо збити з пантелику. Чому власне розв'язок ДРЧП треба шукати у вигляді $u(x, t) = X(x)T(t)$? Тим більше що у підсумку виходить

$$u(x, t) = \sum_k T_k(t) X_k(x). \quad (2.32)$$

Пояснення можливо надати, розв'язуючи ДРЧП в іншій послідовності. Тож, шуканий розв'язок $u(x, t)$ за довільного t від початку зобразимо у вигляді (2.32), що після підстановки до ДРЧП дає

$$\sum_k \ddot{T}_k \cdot X_k = \sum_k T_k \cdot L X_k.$$

Тут літерою L позначено операцію диференціювання $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ над функцією X_k (можлива і складніша операція (див. розділ 2.8)).

Тепер, якщо вдається знайти розв'язки рівняння

$$L X_k = \lambda_k X_k \quad (2.33)$$

(разом із значеннями сталої λ , при яких ці розв'язки існують), то можливо перетворити останню рівність на

$$\sum_k \ddot{T}_k \cdot X_k = \sum_k \lambda_k T_k \cdot X_k,$$

для справедливості чого достатньо

$$\ddot{T}_k = \lambda_k T_k. \quad (2.34)$$

Стає зрозуміло, що спочатку потрібно знайти набір функцій X_k , тобто розв'язати (2.33) (з урахуванням крайових умов), аж потім братися до (2.34). Отже, в методі відокремлення змінних підстановка $u = X \cdot T$ приводить до набору частинних розв'язків $u_k = T_k X_k$, які надалі потрібно об'єднати в суму (2.32).

2.6 Метод перетворення Фур'є

Метод інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа корисний тим, що дозволяє замінити диференціювання алгебраїчною операцією множення, що може значно спростити розв'язання ДРЧП у багатьох випадках. Обґрунтування методу перетворень викладено в розділі 5. Тут наведемо простий приклад його застосування.

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

за початкових умов $u(x, 0) = f(x)$, $\partial u / \partial t(x, 0) = F(x)$. Згідно з визначенням перетворення Фур'є функція

$$u_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

є Фур'є-образом $u(x, t)$ за змінною x . При цьому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = -k^2 u_k(t),$$

у чому не важко пересвідчитися, взявши інтеграл частинами.

Отож для функції $u_k(t)$ маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + a^2 k^2 u_k = 0,$$

яке потрібно розв'язати за початкових умов

$$u_k(0) = f_k, \quad \partial u(0) / \partial t = F_k,$$

де f_k , F_k – Фур'є-образи функцій $f(x)$ та $F(x)$ відповідно. Розв'язком буде сума гармонічних функцій

$$u_k(t) = f_k \cos(akt) + (F_k/ak) \sin(akt).$$

Тепер, аби дістати шуканий розв'язок, застосуємо зворотне перетворення

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} \cos ak dk +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_k}{ak} e^{ikx} \sin ak \, dk = \\
& = \frac{1}{2} (f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Таким чином, дещо в інший спосіб отримано відомий вже розв'язок Д'Аламбера (2.16), на що і слід було очікувати.

2.7 Вимушені коливання в обмеженій системі

Розглянемо тепер ситуацію, коли в системі діють сили, які можна класифікувати як зовнішні. Хвильове рівняння при цьому отримує додатковий член $f(x, t)$, як це було показано в п. 2.1, тобто стає неоднорідним:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l. \quad (2.35)$$

Колівання під дією зовнішньої сили називаються **вимушеними**.

Нехай потрібно знайти розв'язок (2.35) в граничних умовах

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (2.36)$$

коли шукана функція відома у початковий момент часу,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x). \quad (2.37)$$

Задача (2.35) – (2.37) безперечно лінійна, тож її розв'язок можна зобразити у вигляді суми однорідного й неоднорідного рівнянь: $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$. Тоді постають по суті дві задачі: однорідна

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
& \begin{cases} v(0, t) = v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

та неоднорідна:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$\begin{cases} w(0, t) = w(l, t) = 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок однорідної задачі вже знаємо, це рівняння (2.30) – (2.31). Вони описує **вільні коливання**, збуджені початковими умовами $u_0(x)$, $v_0(x)$. На вільні коливання з часом накладаються вимушені коливання, ініційовані силою $f(x, t)$.

Шукатимемо розв'язок неоднорідної задачі у вигляді розкладення в ряд Фур'є по x

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.38)$$

Для знаходження $w_n(t)$ зобразимо всі функції, які входять у задачу в вигляді рядів Фур'є:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx; \\ u_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx; \\ v_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x, & b_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \end{aligned} \quad (2.39)$$

і підставимо їх разом з формою (2.38) у початкове рівняння (2.35). Отримане розкладення дорівнює нулю,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 w_n(t) - \frac{d^2 w_n}{dt^2} + f_n(t) \right\} = 0, \quad (2.40)$$

тільки якщо має нульові коефіцієнти:

$$\frac{d^2 w_n}{dt^2} + a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 w_n(t) = f_n(t). \quad (2.41)$$

Таким чином для знаходження $w_n(t)$ отримано звичайне диференціальне рівняння (2.41) зі сталими коефіцієнтами.

Нульові початкові умови дають:

$$w(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dw_n(0)}{dt} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

звідки отримуємо початкові умови для функцій $w_n(t)$: рівняння (2.41):

$$w_n(0) = \partial w_n / \partial t = 0,$$

які повністю визначають його розв'язок:

$$w_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) f_n(\tau) d\tau.$$

Тоді шуканий розв'язок (2.38) набирає форми

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau) d\tau.$$

Користуючись виразом (2.39) для $f_n(t)$, знаходимо:

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^l \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} s f(s, \tau) ds d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x, s, t - \tau) f(s, \tau) ds d\tau. \quad (2.42)$$

де

$$G(x, s, t) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n} \sin \frac{\pi n}{l} a t \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} s \quad (2.43)$$

- так звана **функція Гріна**, фізичний зміст якої буде видно з подальшого.

Таким чином вдалося знайти розв'язок неоднорідної задачі у вигляді ряду Фур'є (2.42) – (2.43).

Проаналізуємо дію на розглядувану систему точкового джерела (сили) f , зосередженого в $x = x_0$, за нескінченно малий проміжок часу, тобто задамо

$$f(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) \delta(t). \quad (2.48)$$

Підстановка (2.43) у (2.42) показує, що

$$w(x, t) = F_0 \int_0^t \int_0^l G(x, s, t - \tau) \delta(s - x_0) \delta(\tau) ds d\tau = F_0 G(x, x_0, t),$$

тобто розв'язок хвильового рівняння за наявності точкового миттєвого джерела дорівнює функції Гріна, помноженій на амплітуду сили.

Відгук системи на дію чинника $f(x, t) = f(x) \delta(t)$, що “вмикається” у момент часу $t = 0$, є згортка f з функцією Гріна,

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, s, t - \tau) f(s, \tau) ds d\tau = \int_0^l G(x, s, t) f(s) ds.$$

Іншими словами, функція Гріна залежить від властивостей системи і описує її реакцію на зовнішню дію. Знаючи функцію Гріна, можна за допомогою рівняння (2.42) розрахувати відгук системи на будь-який зовнішній вплив.

2.7 Коливання обмеженої струни за наявності опору

Вільні гармонічні коливання відповідають ідеалізованій ситуації, коли дисипативні явища в середовищі відсутні. Наявність таких в реальних середовищах призводить до поступового загасання коливань (наприклад, коливань струни у в'язкому середовищі).

Дослід показує, що сила в'язкого тертя, яка діє з боку середовища на тіло, у першому наближенні пропорційна швидкості тіла: $F = -2\eta\rho(\partial u/\partial t)dx$, де коефіцієнт тертя $\eta > 0$. Тоді рівняння коливань (2.32) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\eta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (2.44)$$

Коливання можна і надалі називати вільними, якщо розглядати дисипативну силу як не зовнішню, а таку, що притаманна самій системі.

Для струни із жорстко закріпленими кінцями розв'язок (2.44) шукаємо знов у вигляді ряду (2.38):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.45)$$

Для початкових умов

$$w(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

можемо знайти

$$w_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \frac{\partial w(0)}{\partial t} = \frac{2}{l} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (2.46)$$

Підставивши (2.45) у рівняння (2.44), доходимо до такої системи рівнянь:

$$\frac{d^2 w_n}{dt^2} + 2\eta \frac{dw_n}{dt} + \omega_n^2 w_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.47)$$

де $\omega^2 = a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$.

Розв'язок (2.47) відомий з теорії звичайних диференціальних рівнянь:

$$w_n(t) = A_n e^{-\eta t} \cos \Omega_n t + B_n e^{-\eta t} \sin \Omega_n t, \quad \Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 - \eta^2}.$$

Коефіцієнти A_n , B_n можна виразити через початкові значення (2.46), діставши таким чином

$$w_n(t) = e^{-\eta t} \left[w_n(0) \cos \Omega_n t + \left(\frac{dw_n(0)}{dt} + \eta w_n(0) \right) \frac{\sin \Omega_n t}{\Omega_n} \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Отримана функція описує коливання з частотою Ω_n та амплітудою, яка з часом зменшується, про що свідчить множник $e^{-\eta t}$. При $\eta < \omega = a\pi/l$ можна говорити про періодичні коливання. Якщо ж $\eta > \omega$ величина Ω_n стає чисто уявною, на разі система замість коливань демонструє аперіодичне наближення до свого рівноважного стану. Підстановка $w_n(t)$ у вираз (2.45) надає розв'язок задачі про вільні коливання за наявності дисипації.

2.8 Коливання обмежених неоднорідних систем

Досі ми розглядали малі коливання *однорідних* систем і методи розв'язання лінійних ДРЧП, які описують ці коливання. Ці методи (біжучих хвиль, стоячих хвиль або розділення змінних, функцій Гріна) можливо поширити на задачі про одновимірні коливання *неоднорідних* систем, тобто таких, параметри яких змінюються від точки до точки. Коливальний рух у неоднорідних одновимірних системах описується скалярною функцією $u(x, t)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (2.2). Нагадаємо, що у тому рівнянні $\rho(x)$ і $T(x)$ мають фізичний зміст погонної густини системи (струни) в точці x та (сталі) сили натягу. Сила T напрямлена по дотичній до її миттєвого коливального профілю, тож на коливання має вплив лише її компонента, яка паралельна зміщенню u . У загальному випадку окрім дотичних сил у хвильовому рівнянні слід врахувати і пружні сили, пропорційні за законом Гука величині зміщення – $q(x)u(x, t)$. Така ситуація характерна для коливань струни у пружному зовнішньому середовищі, для неї хвильове рівняння виглядає як

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u. \quad (2.48)$$

За наявності ще якихось зовнішніх сил воно стає неоднорідним:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u + F(x, t). \quad (2.49)$$

Для постановки крайової задачі рівняння (2.48) або (2.49) слід супроводити початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (2.50)$$

та граничними умовами. Вважаємо, що крайні точки теж беруть участь у коливаннях і для них справедливі умови

$$T(0, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha u(0, t), \quad T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\alpha u(l, t) \quad (2.51)$$

Якщо йдеться про струну довжиною l , то умови (2.51) відповідатимуть пружному закріпленню кінців. Надамо їм дещо іншого вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + h_2 u(l, t) = 0, \quad h_1, h_2 > 0. \quad (2.52)$$

Рівняння (2.48) (або (2.49)) та початкові й крайові умови (2.50), (2.51) лінійні й однорідні, тому сума частинних розв'язків, що задовольняють їх,

також є розв'язком і можливо застосувати метод Фур'є розділення змінних. Шукатимемо розв'язок (2.45) у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Виконуючи послідовність дій п. 2.5, отримуємо пару звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)] - q(x)X(x) = -\lambda\rho(x)X(x), \quad T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Та ж підстановка у граничні умови дає

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u\right)_{x=0} = T(t)(X'(0) - h_1 X(0)) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_1 u\right)_{x=l} = T(t)(X'(l) + h_1 X(l)) = 0.$$

Зауважуємо, що отримані рівності мають задовольнятися за будь-яких t .

Отже доходимо крайової задачі для функції $X(x)$ на відрізку $[0, l]$:

$$-(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) - \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad (2.53)$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_1 X(l) = 0, \quad (2.54)$$

яка має назву **крайової задачі Штурма-Ліувілля**. Разом із нетривіальними розв'язками її шукають значення параметра λ , при яких ці розв'язки існують. Такі значення λ називаються **власними значеннями**, а відповідні розв'язки – **власними функціями** задачі Штурма-Ліувілля.

Заміною змінних (для $p(x) > 0$)

$$dx' = \frac{dx}{p(x)}, \quad \text{або} \quad x' = \int_0^x \frac{dy}{p(y)}$$

рівняння (2.53) переводиться у рівняння

$$-\frac{d^2 X}{dx'^2} + \kappa(x')X = \lambda r(x')X, \quad (2.55)$$

де $\kappa = pq, r = p\rho$. Отримане належить до класу еліптичних рівнянь. Складність його розв'язання залежить від функцій $\kappa(x)$ та $r(x)$.

Рівняння з $r(x) = 1$ широко вживане в квантовій фізиці, це стаціонарне рівняння Шредінгера для поодинокі частинки з енергією λ у зов-

нішньому полі, що характеризується потенціалом $\kappa(x)$. Для його розв'язання, точного або наближеного, розроблено багато методів, огляд яких не включено до цього посібника.

Окремий випадок задачі Штурма-Ліувілля буде розглянуто в розділі 6.2.

На практиці частіше за все зустрічаються чотири типи задачі Штурма-Ліувілля, як показано в таблиці нижче.

Тип моделі	Задача	Спектр	Власні функції
Однорідна крайова умова Дірихле	$u'' + \lambda u(x) = 0$ $u(0) = u(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$	$u_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$ $n = 1, 2, \dots$
Однорідна крайова умова Неймана	$u'' + \lambda u(x) = 0$ $u'(0) = u'(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $n = 0, 1, \dots$	$u_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$ $n = 0, 1, \dots$
Змішана крайова умова I	$u'' + \lambda u(x) = 0$ $u(0) = 0, u'(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$	$u_n = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}$ $n = 1, 2, \dots$
Змішана крайова умова II	$u'' + \lambda u(x) = 0$ $u'(0) = 0, u(l) = 0$	$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\right)^2$ $n = 1, 2, \dots$	$u_n = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$ $n = 1, 2, \dots$

3

Задачі дифузії та теплопровідності

Рівняння дифузії та теплопровідності належать до типових рівнянь, які керують процесами в задачах дослідження структури й кінетики домішок у довкіллі, радіоекологічного моніторингу, поширення тепла та ін. Ці рівняння є рівняннями у частинних похідних другого порядку за просторовими змінними та першого порядку за часом. Такі рівняння є рівняннями параболічного типу.

3.1 Вивід рівняння дифузії

Дифузія є процес вирівнювання концентрації домішкових частинок в середовищі (газі, рідині, твердому тілі).

Розглянемо деякий об'єм V середовища, обмежений поверхнею S . Концентрацію n_0 основних частинок середовища будемо вважати сталою, а розподіл домішкових частинок – неоднорідним, який у будь-який момент часу визначається їхньою концентрацією

$$n(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N(\vec{r}, t)}{\Delta V}, \quad (3.1)$$

де $\Delta N(\vec{r}, t)$ – кількість домішкових частинок в малому околі точки $\vec{r}$ у момент часу t ; ΔV - об'єм цього околу.

Зміну концентрації домішкових частинок можна виразити через вектор густини потоку частинок $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

Вектор густини потоку частинок $\vec{J}(\vec{r}, t)$ чисельно дорівнює кількості частинок, які перетинають за одиницю часу поверхню одиничної площини, перпендикулярної до напрямку руху частинок. Напрямок $\vec{J}(\vec{r}, t)$, за означенням, співпадає з напрямком руху частинок у малому околу точки $\vec{r}$ у момент t . Тоді кількість частинок, які проходять крізь ділянку площини $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, орієнтація якої задається одиничним вектором нормалі $\vec{n}$, за проміжок часу $(t, t + \Delta t)$ визначається нормальною складовою вектора густини потоку частинок $\vec{J}_n(\vec{r}, t) = (\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n})$ і дорівнює

$$dN = \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} dt = J_n(\vec{r}, t) dS(\vec{r}, t) dt. \quad (3.2)$$

У загальному випадку перенесення домішкових частинок зумовлено двома факторами: безпосередньо зіткненнями частинок між собою та рухом середовища, якщо дифузія відбувається у рухомому середовищі. В цьому випадку вектор густини потоку частинок домішки $\vec{J}(\vec{r}, t)$ можна зобразити як суму двох векторів:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}_D(\vec{r}, t) + \vec{J}_a(\vec{r}, t).$$

Вектор $\vec{J}_D(\vec{r}, t)$, який описує перенесення домішкових частинок внаслідок зіткнень між ними, має назву вектора густини дифузійного потоку домішкових частинок. Згідно закону Фіка

$$\vec{J}_D(\vec{r}, t) = -D(\vec{r}) \text{grad } n(\vec{r}, t), \quad (3.3)$$

де $D(\vec{r})$ – коефіцієнт дифузії, який у неоднорідному середовищі може залежати від координат.

Вектор $\vec{J}_a(\vec{r}, t)$ описує перенесення домішкових частинок разом із середовищем, тобто надає конвективну частину потоку:

$$\vec{J}_a(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t) \quad (3.4)$$

де $\vec{v}(\vec{r}, t)$ – вектор швидкості руху середовища в точці $\vec{r}$ в момент t відносно нерухомого спостерігача.

Домішкові частинки можуть також виникати або знищуватися в середовищі внаслідок хімічних або ядерних реакцій. Внесок таких процесів у концентрацію домішкових часток оцінюють за допомогою **функції джерел** $f(n(\vec{r}, t), \vec{r}, t)$, яка надає густину потужності джерел або стоків часток. Тоді кількість домішкових частинок, які народжуються або зникають у малому околі точки $\vec{r}$ з об'ємом ΔV інтервал часу $(t, t + \Delta t)$ дорівнюватиме $f(n(\vec{r}, t), \vec{r}, t) \Delta V \Delta t$. Для хімічних реакцій першого порядку

$$f(n(\vec{r}, t), \vec{r}, t) = \chi(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t), \quad (3.5)$$

де $\chi(\vec{r}, t)$ – коефіцієнт реакції.

У випадку зовнішніх джерел або поглиначів функція джерел може й не залежати від концентрації.

Виведемо узагальнене рівняння дифузії, яке враховує як рух середовища, так і ймовірне народження та знищення частинок унаслідок деяких реакцій в середовищі.

Скористаємося законом збереження кількості домішкових частинок. За малий проміжок часу $(t, t + \Delta t)$ кількість частинок в об'ємі V змінюється на величину ΔN , яка дорівнює кількості частинок ΔN_1 , що пройшли крізь поверхню S , і кількості частинок ΔN_2 , які утворюються (поглинаються) джерелами (стоками) частинок в об'ємі:

$$\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2. \quad (3.6)$$

Аби знайти ΔN , весь об'єм розбиваємо на окремі області $dV(\vec{r})$ такі, що кожна з них містить достатню кількість частинок, щоб вважати її макроскопічною. В той же час характерний розмір (діаметр) цих областей повинен бути достатньо малим, щоб зміною концентрації $n(\vec{r}, t)$ у межах кожної з них можна було знехтувати.

Тоді зміна кількості частинок $dN(\vec{r}, t)$ в елементарному об'ємі $dV(\vec{r})$ дорівнює

$$dN(\vec{r}, t) = \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} dV dt,$$

а зміна кількості домішкових частинок у всьому об'ємі:

$$\Delta N = \left(\int_V \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} dV \right) dt. \quad (3.7)$$

Для розрахунку ΔN_1 розіб'ємо поверхню S на малі ділянки і розглянемо ділянку площиною $d\vec{S}(\vec{r})$. Кількість частинок, які проходять крізь цю ділянку за проміжок часу $(t, t + \Delta t)$, визначається нормальною складовою $\vec{J}_n(\vec{r}, t)$ вектора густини потоку часток і, з урахуванням виразів (3.2) – (3.4), дорівнює

$$\begin{aligned} dN_1(\vec{r}, t) &= -J_n(\vec{r}, t) dS(\vec{r}, t) dt = -(J_{dn}(\vec{r}, t) + J_{Dn}(\vec{r}, t)) dS(\vec{r}, t) dt = \\ &= -(\vec{v}(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t) - D(\vec{r}) \text{grad } n(\vec{r}, t)) dS(\vec{r}, t) dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

Знак „–” показує, що dN_1 – додатна величина, якщо частинки входять до області V (потік спрямований до об'єму) і від'ємна, коли область втрачає частинки, тобто потік спрямований назовні.

Загальну кількість частинок ΔN_1 знаходимо інтегруванням виразу (3.8) по всіх елементарних ділянках dS :

$$\Delta N_1 = - \left(\oint_S J_n dS \right) dt.$$

За умовою, що компоненти векторного поля $\vec{J}$ є безперервно диференціюваними, переходячи до інтегрування по об'єму згідно з теоремою Остроградського, можна записати:

$$\begin{aligned} \Delta N_1 = & \left(- \int_V \operatorname{div} J_n dV \right) dt = - \left(\int_V \operatorname{div} (v(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t)) dV \right) dt + \\ & + \left(\int_V \operatorname{div} (D(\vec{r}) \operatorname{grad} n(\vec{r}, t)) dV \right) dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

Якщо $f(n, \vec{r}, t)$ - густина потужності джерел (стоків) частинок, які діють в області dV , то кількість частинок, що виникають (поглинаються) ними в елементарному об'ємі $dV(\vec{r})$ за проміжок часу $(t, t + \Delta t)$ дорівнює

$$dN_2 = f(n(\vec{r}, t)) dV(\vec{r}) dt.$$

Відповідно кількість частинок, що генерується за цей проміжок у всіх елементарних областях

$$\Delta N_2 = \left(\int_V f(n(\vec{r}, t), \vec{r}, t) dV \right) dt. \quad (3.10)$$

З урахуванням виразів (3.7), (3.9), (3.10) закон збереження числа частинок домішки (3.6) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \left(\int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV \right) dt = & - \left(\int_V \operatorname{div} (v(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t)) dV \right) dt + \left(\int_V \operatorname{div} (D(\vec{r}) \operatorname{grad} n(\vec{r}, t)) dV \right) dt \\ & + \left(\int_V f(n(\vec{r}, t), \vec{r}, t) dV \right) dt \end{aligned}$$

Ця рівність є справедливою для довільної області розглянутого середовища, що можливо тільки у разі, коли підінтегральні вирази в обох частинах рівності дорівнюють один одному. Таким чином отримуємо **взагальнене рівняння дифузії**:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div} (v(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t)) + \operatorname{div} (D(\vec{r}) \operatorname{grad} n(\vec{r}, t)) + f(n(\vec{r}, t), \vec{r}, t) \quad (3.11)$$

Для реакцій першого порядку воно має вигляд:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div}(v(\vec{r}, t)n(\vec{r}, t)) + \operatorname{div}(D(\vec{r}) \operatorname{grad} n(\vec{r}, t)) + \chi(\vec{r}, t)n(\vec{r}, t).$$

Слід зауважити, що:

1. Залежність коефіцієнта дифузії від часу зустрічається дуже рідко.
2. Для однорідного середовища, властивості якого всюди однакові D і χ не залежать від координат, тобто є постійними.
3. При $D = \text{const}$ і $\chi = \text{const}$ за відсутності конвективної течії ($\vec{v}(\vec{r}, t) = 0$) рівняння дифузії зводиться до **лінійного диференціального рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами**:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\Delta n(\vec{r}, t) + \chi n(\vec{r}, t), \quad (3.13)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

4. Процес поширення теплоти у середовищі описує рівняння теплопровідності, подібне рівнянню (3.13):

$$\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \chi \Delta T(\vec{r}, t) + f, \quad (3.14)$$

де T – температура середовища; $\chi = \kappa/c_p$ – коефіцієнт температуропровідності (κ – коефіцієнт теплопровідності; c_p – теплоємність за постійного тиску); f – функція, яка характеризує густину джерел теплоти.

Розв'язання цього рівняння відбувається тими самими способами, які в подальшому будуть розглянуті для рівняння дифузії.

5. Рівняння (3.13) і (3.14) є рівняннями параболічного типу. Як і випадку коливань, повний опис розподілу частинок домішки або теплоти у просторі потребує завдання початкового розподілу частинок або температури у середовищі (початкова умова) та крайових умов.

Завдання. Виведіть рівняння теплопровідності (3.14) подібно розглянутому виводу рівняння дифузії. При цьому скористайтесь рівнянням Фур'є, яке надає густину потоку тепла за малих градієнтів температури:

$$\vec{J}_q = -\kappa \nabla T.$$

Властивості розв'язків рівняння дифузії у нескінченному середовищі

Можливо безпосередньо з рівняння дифузії отримати деякі властивості розв'язків, не маючи для них конкретних виразів.

Розглянемо найпростіший випадок: нехай течія і джерела частинок у середовищі відсутні. У цьому випадку рівняння дифузії (3.13) набуває вигляду

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \Delta n(\vec{r}, t).$$

Перепишемо рівняння дифузії для густини ρ , яка пов'язана з чисельною густиною молекул домішки співвідношенням $\rho = m_0 n$, де m_0 – маса молекули домішки:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \Delta \rho(\vec{r}, t). \quad (3.14)$$

Розглянемо простіший одновимірний випадок, коли $\Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ і рівняння (3.14) має вигляд

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.15)$$

Отримані при цьому властивості розв'язків рівняння будуть зберігатися на площині і в просторі. Будемо також вважати, що при $x \rightarrow \pm\infty$ густина домішки ρ достатньо швидко прямує до 0.

1. Принцип суперпозиції.

З математичної точки зору властивість суперпозиції слідує з лінійності та однорідності рівняння (3.15) і означає, що сума його розв'язків також є розв'язок. З принципу суперпозиції випливає, зокрема, що, хоча густина за своїм фізичним змістом є величина не від'ємна, можна розглядати розв'язки рівняння (3.15) і довільного знаку, вважаючи, що вони надають різницю двох реальних густин.

2. Закон збереження маси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = M_0 = \text{const}. \quad (3.16)$$

Для доведення збереження маси домішки візьмемо похідну від лівої частини виразу (3.16) за часом t як за параметром, після цього скористаємося рівнянням (3.15) і дістанемо інтеграл:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = D \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

Але на обох кінцях інтервалу, тобто при $x = \pm\infty$, за умовою $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$.

Таким чином

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = 0,$$

звідки $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = \text{const}$.

3. Інваріантною за часом є не тільки маса домішки, але й її момент першого порядку $\rho(x, t)$, тобто

$$M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x, t) dx = \text{const}$$

Завдання. Довести цю властивість аналогічно попередньому диференціюванням за параметром t із подальшим використанням рівняння (3.15) і інтегруванням за частинами.

4. З інваріантності маси M_0 і моменту першого порядку M_1 випливає нерухомість центра тяжіння розглянутого середовища, який розраховується за формулою

$$x_{ц.м.} = \frac{M_1}{M_0}.$$

Ця інваріантність є наслідком ізотропності закону дифузії. Симетрія розподілу густини при цьому зовсім не обов'язкова.

5. Момент другого порядку M_2 змінюється з часом за лінійним законом:

$$M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho_0(x, t_0) dx + 2D \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx \cdot (t - t_0)$$

Завдання. Довести цю властивість аналогічно попередньому.

6. Інша група властивостей розв'язків рівняння (3.16) має локальний характер і пов'язана з поступовим зникненням максимумів та мінімумів цих розв'язків.

Дійсно, нехай у деякий момент $t = t_1$ густина $\rho(x, t)$ має найбільше значення ρ_1 у деякій точці x_1 . Відомо, що в точці максимуму друга похідна є від'ємною, $\left. \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right|_{\substack{t=t_1 \\ x=x_1}} \leq 0$. Тоді з рівняння дифузії отримуємо, що й $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{t=t_1} < 0$, а тому максимум $\rho(x, t)$ при $t > t_1$ і близьких до t_1 буде меншим за ρ_1 . Звідки в силу довільності обраного моменту t отримуємо, що розглянуте найбільше значення зменшується для всіх t . Аналогічно можна показати, що значення ρ в околі точки мінімуму зростають.

Завдання.

1. Отримайте аналог закону збереження маси для неоднорідного рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$f(x, t)$ - густина потужності джерел (стоків) частинок.

Відповідь: $\frac{d}{dt} \int \rho dx = \int f(x, t) dx$.

2. Знайдіть закон, за яким змінюється з часом момент третього порядку при розв'язанні рівняння дифузії.

Відповідь: $M_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \rho_0(x, t_0) dx + 6D \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho dx \cdot (t - t_0)$

3. Покажіть, що значення густини ρ в околі точки мінімуму з часом зростають. До яких наслідків у розподілі домішок може призвести зменшення максимумів і зростання сусіднього мінімумів із часом?

3.2 Окремий (автомодельний) розв'язок рівняння дифузії

Автомодельними називають окремі розв'язки диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u,$$

які не змінюються за масштабних перетворень та поворотів відносно координатних осей на довільні кути.

Лінійне рівняння дифузії

Для простоти розглядаємо одновимірний випадок рівняння дифузії (3.14):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (3.17)$$

Розв'язуючи рівняння, візьмемо до уваги розмірність. З величин x , t і D (розмірність $[D] = m^2 \cdot c^{-1}$), які можуть увійти в розв'язок, можна скласти, з точністю до піднесення у степінь, тільки одну комбінацію, яка не має розмірності, а саме $s = \frac{x^2}{Dt}$. Тому, якщо в розв'язок входить будь-яка безрозмірна функція від аргументу, який не має розмірності, то вона повинна мати вигляд

$$f(s) = f\left(\frac{x^2}{Dt}\right).$$

Додаємо як множник степінь t , що зберігається з точністю до постійного коефіцієнта при зміні масштабу й отримуємо форму розв'язку

$$\rho = At^\alpha f\left(\frac{x^2}{Dt}\right), \quad (3.18)$$

де A – постійний коефіцієнт, який внаслідок лінійності рівняння дифузії залишається довільним.

Вважатимемо розв'язок (3.18) парною функцією x . Для зменшення кількості невизначених параметрів скористаємось законом збереження маси (3.16), який за окремого ρ набуває вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} At^{\alpha} f\left(\frac{x^2}{Dt}\right) dx = 2 \int_0^{\infty} At^{\alpha} f\left(\frac{x^2}{Dt}\right) dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{Dt} = s \\ dx = \frac{\sqrt{Dt}}{2\sqrt{s}} ds \end{array} \right] = 2 \int_0^{\infty} At^{\alpha} f(s) \frac{\sqrt{Dt}}{2\sqrt{s}} ds =$$

$$= A\sqrt{Dt}^{\alpha+1/2} \int_0^{\infty} s^{-1/2} f(s) ds = const$$

Результат не повинен залежати від часу, тому $\alpha + 1/2 = 0$, звідки $\alpha = -1/2$ і

$$\rho = At^{-1/2} f\left(\frac{x^2}{Dt}\right), \quad (3.19)$$

Для знаходження функції $f\left(\frac{x^2}{Dt}\right)$ визначаємо похідні ρ з (3.19) і після підстановки в рівняння (3.17) отримуємо:

$$-\frac{A}{2} t^{-3/2} f(s) - \frac{A}{D} t^{5/2} x^2 f'(s) = 2At^{-3/2} f'(s) + \frac{4A}{D} t^{-5/2} x^2 f''(s);$$

Після множення лівої й правої частини останнього виразу на $2A^{-1}t^{3/2}$ маємо:

$$-f(s) - \frac{2x^2}{Dt} f'(s) = 4f'(s) + \frac{8x^2}{Dt} f''(s),$$

або

$$8sf''(s) + (2s + 4)f'(s) + f(s) = 0.$$

Тим самим для невідомої функції в автомоделному розв'язку отримали звичайне диференціальне рівняння, розв'язок якого суттєво простіший, ніж розв'язок початкового рівняння. В цьому полягає перевага автомоделних розв'язків, якщо їх вдасться побудувати.

Звичайні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами рідко допускають інтегрування у квадратурах. Однак, ліва частина отриманого рівняння дозволяє зображення у вигляді ітерації двох диференціальних виразів першого порядку. Якщо позначити операцію диференціювання буквою d , ліву частину рівняння можна переписати у вигляді

$$(8sd^2 + (2s + 4)d + 1)f = (8sd^2 + 2sd + 4d + 1)f = (2sd + 1)(4d + 1)f = 0.$$

Позначивши $(4d + 1)f = h$, отримуємо:

$$(2sd + 1)h = 0,$$

тобто
$$2s \frac{dh}{ds} + h = 0.$$

Розв'язок цього рівняння:

$$h = C_1 s^{-1/2} = \frac{C_1}{\sqrt{s}}.$$

Повертаючись до функції f , маємо:

$$(4d + 1)f = \frac{C_1}{\sqrt{s}},$$

Таким чином, тримаємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$4f' + f = \frac{C_1}{\sqrt{s}}.$$

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $f = u(s)v(s)$.

Підставляємо $\frac{df}{ds} = u \frac{dv}{ds} + v \frac{du}{ds}$ у рівняння й отримуємо

$$u \left(\frac{dv}{ds} + \frac{1}{4}v \right) + v \frac{du}{ds} = \frac{C_1}{4\sqrt{s}}.$$

Виберемо функцію v таким чином, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Тоді

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{4}ds,$$

звідки $v = e^{-\frac{1}{4}s}$.

З урахуванням значення v попереднє рівняння набуває вигляду:

$$e^{-\frac{s}{4}} \frac{du}{ds} = \frac{C_1}{4\sqrt{s}},$$

звідки

$$u = \frac{C_1}{4} \int \frac{e^{s/4}}{\sqrt{s}} ds + C_2,$$

i

$$f(s) = \left(\frac{C_1}{4} \int \frac{e^{s/4}}{\sqrt{s}} ds + C_2 \right) e^{-s/4}.$$

Таким чином, отримано два лінійно незалежні розв'язки

$$f_1(s) = e^{-s/4} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{s_1}} e^{s_1/4} ds_1;$$

$$f_2(s) = e^{-s/4}.$$

Перший з розв'язків при $s \rightarrow 0$ має порядок $\sqrt{s} \sim x$, тобто є непарною функцією x , попри припущенню. Навіть, якщо знехтувати цією обставиною, але обмежитися додатними розв'язками, цей розв'язок треба відкинути як той, що змінює знак.

Другий розв'язок є допустимим. Підставивши $f_2(s)$ у вираз (3.19), отримуємо

$$\rho = A t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt}, \quad (3.20)$$

де A – довільна константа.

Графіки побудованого автомоделного розв'язку при різних значеннях $t > 0$ є симетричними кривими, які відповідають розподілу Гауса (рис. 3.1). Площа між будь-яким із графіків і віссю x дорівнює сумарній масі частинок і залишається незмінною.

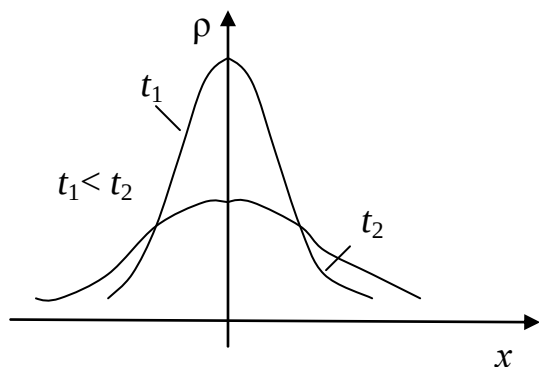


Рис. 3.1

Обчислимо сумарну масу часток

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{+\infty} A t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt} dx = \left[x = 2\sqrt{Dt} y \right] = \\ &= \frac{A}{\sqrt{t}} 2\sqrt{Dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = 2A\sqrt{\pi D}. \end{aligned}$$

Отриманий результат не залежить від t , тобто задовольняє закон збереження маси.

При зменшенні часу t крива $\rho(x)$ поступово наближується до осі ρ , а її висота більшає, тож при $t \rightarrow +0$ $\rho(x, t)$ стає пропорційній дельта функції $\delta(x)$. З урахуванням значення M , отримуємо

$$\rho(x, +0) = 2A\sqrt{\pi D} \cdot \delta(x).$$

Таким чином, розв'язок (3.20) описує еволюцію згустку частинок маси $M = 2A\sqrt{\pi D}$, який у момент $t = 0$ був сконцентрований у початку координат. Зокрема, при $M = 1$ отримуємо розв'язок, який описує еволюцію згустку одиничної маси, який спочатку знаходився в точці $x = 0$. При тому $A = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}}$, тобто

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}.$$

Авто модельний розв'язок рівняння дифузії на площині та у просторі будується аналогічним способом. У просторі

$$\rho(x, y, z, t) = At^{-3/2} e^{-(x^2+y^2+z^2)/4Dt},$$

де довільна стала A пов'язана з сумарною масою частинок, які дикундують, формулою

$$M = (2\sqrt{\pi D})^3 A.$$

Нелінійне рівняння дифузії

У випадку, коли коефіцієнт дифузії не є постійною величиною, дифузій домішок описує нелінійне рівнянням, яке за відсутності джерел та руху середовища має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(D(\vec{r}) \operatorname{grad} \rho(\vec{r}, t)),$$

або для одновимірної дифузії вздовж осі Ox :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \right).$$

Приклад. Розглянемо розв'язання цього рівняння у випадку лінійної залежності коефіцієнта дифузії від густини $D \propto \rho$ з початковою умовою $\rho(x, 0) = \delta(x)$. За цих умов рівняння дифузії набуває вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} \right).$$

Для побудови авто модельного розв'язку проводимо аналіз розмірності при перетворенні розтягу $t \rightarrow \mu t$, $x \rightarrow \lambda x$, $\rho \rightarrow \nu \rho$. Рівняння залиша-

ється інваріантним за умови $\lambda = \mu^{1/3}$. Початкова умова зберігає свій вигляд при $v = \mu^{-1/3}$ (розмірність δ - функції дорівнює оберненій розмірності її аргументу). Звідки для автомодельної функції отримуємо вираз

$$\rho(x, t) = t^{-1/3} f(\xi), \quad \xi = xt^{-1/3}.$$

Якщо підставити цей вираз у записане рівняння нелінійної дифузії, то для функції $f(\xi)$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$(ff')' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{1}{3}f = 0.$$

Рівняння допускає однократне інтегрування. Константу інтегрування можна визначити за умови, що при $t \rightarrow +0$, $x \neq 0$ розв'язок повинен зникати. Тому при $\xi \rightarrow \infty$ функція f повинна дорівнювати нулю разом зі своєю першою похідною. Друга умова випливає з нормування δ -функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

Після інтегрування та вибору нульової постійної інтегрування внаслідок першої з умов, отримуємо

$$ff' + \frac{1}{3}\xi f = 0$$

Рівняння має два розв'язки. Розв'язок $f = 0$ повинен справджуватися для великих за абсолютною величиною ξ . Другий розв'язок, який можна отримати з рівняння $f' + \frac{1}{3}\xi f = 0$, має вигляд $f = C - \frac{\xi^2}{6}$. Отже розв'язкові в усій області можна надати вигляду:

$$f(\xi) = \begin{cases} C - \frac{\xi^2}{6}, & \xi^2 \leq 6C; \\ 0, & \xi^2 > 6C. \end{cases}$$

Константу C можна знайти з умови нормування: $C = \frac{6^{1/3}}{4}$.

Графіки отриманого розв'язку для різних моментів часу зображені на рис. 3.2.

На відміну від попереднього випадку розв'язок має різку границю, яка є фронтом дифузійної хвилі. Розширення домішки відбувається за

законом $l(t) \sim t^{1/3}$. Площа під кривими зберігається, що відповідає закону збереження маси.

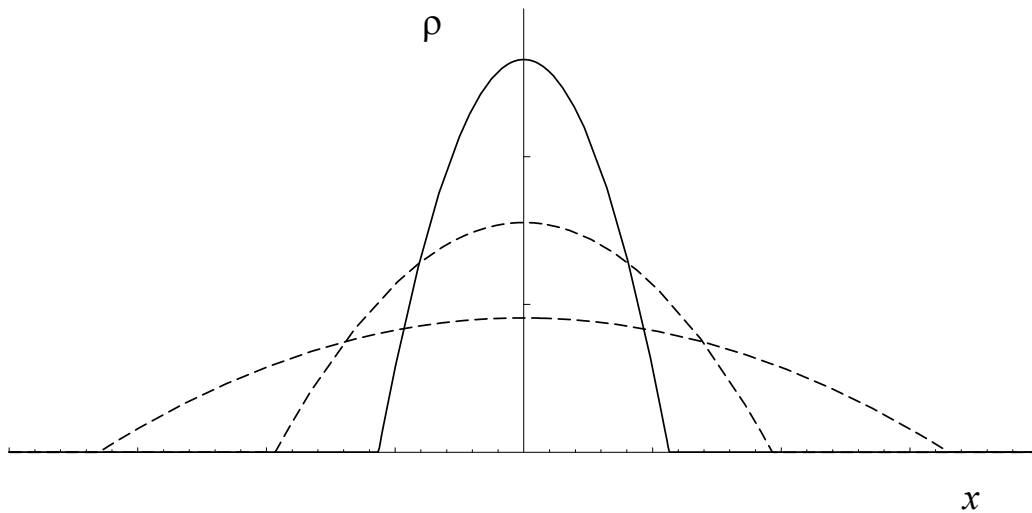


Рис. 3.2 Автомоделний розв'язок нелінійного рівняння дифузії.

3.3 Задача Коші для рівняння дифузії у нескінченному просторі. Метод функцій Гріна

Рівняння дифузії, як і кожне диференціальне рівняння, має не скінченну кількість розв'язків. Щоб отримати один певний розв'язок, потрібно задати додаткові умови.

Наприклад, розподіл густини буде різним залежно від початкового розподілу, заданого для певного моменту часу t_0 .

Фізичні умови на межах (крайові умови) і дія джерел частинок – фізичні чинники, які визначають хід процесів у системі. Всі зміни концентрації частинок після t_0 , підпорядковуються рівнянню дифузії (із коефіцієнтами, які виражені через параметри системи, й неоднорідним членом, який описує вплив джерел) та крайовим умовам.

Загальна проблема визначення функції певного класу, яка при $t > t_0$ задовольняє рівнянню досліджуваного процесу, а при $t = t_0$ набирає форми початкових умов, є **задача з початковими умовами**, або **задача Коші**.

Будемо шукати розв'язок рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (3.17)$$

який відповідає довільній початковій умові

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.21)$$

Внаслідок лінійності задачі (рівняння дифузії) розв'язок $\rho(x, t)$ залежить від початкової умови $\rho_0(x)$ за лінійним законом. Тому при побудові розв'язку можна скористатися загальним методом, який базується на **функції впливу (функції Гріна)**.

Метод функцій Гріна є одним з найпоширеніших методів розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Він полягає в тому, що спочатку знаходять деякий спеціальний розв'язок задачі того самого типу, через який виражають розв'язок початкової задачі.

За такий спеціальний розв'язок візьмемо отриманий автомоделний розв'язок рівняння (3.17) за початкової умови $\rho|_{t=t_0} = \delta(x - \xi)$, який позначимо через $G(x, t; \xi, t_0)$. Тобто функція Гріна в нашій задачі описує еволюцію у часі частинок сумарної одиничної маси, які в момент часу $t = t_0$ були сконцентровані в точці $x = \xi$. Тому при $t = t_0$, $\xi = 0$ вираз для неї має вигляд

$$G(x, t; 0, 0) = \rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}.$$

За довільних t_0 і ξ вираз можна отримати за допомогою додаткового зсуву по t і x , що припустимо внаслідок однорідності в часі та просторі розглядуваної системи.

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}} e^{-(x - \xi)^2/4D(t - t_0)}. \quad (3.22)$$

Знання функції Гріна дозволяє записати шуканий розв'язок за довільної початкової умови (3.21):

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; \xi, t_0) \rho_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-(x - \xi)^2/4D(t - t_0)} d\xi. \quad (3.23)$$

(формулу отримав видатний французький фізик і математик С. Пуассон).

Ця формула надає можливості в окремих випадках точно, а частіше чисельно отримувати розв'язки розглянутої задачі.

Проаналізуємо асимптотичну поведінку отриманого розв'язку при $t \rightarrow \infty$. Виділимо в правій частині множник, незалежний від ξ :

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}} e^{-x^2/4D(t - t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-(2x\xi - \xi^2)/4D(t - t_0)} d\xi.$$

При $t \rightarrow \infty$, якщо тільки координата x має скінчене значення, експонента під знаком інтеграла також є скінченою і прямує до 1, а значення всього інтегралу прямує до $\int \rho_0(\xi) d\xi = M$, тобто до загальної маси дифузійних частинок. З урахуванням останнього зауваження розв'язок має асимптотичний вигляд

$$\rho(x, t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-x^2/4D(t-t_0)} = MG(x, t; 0, t_0).$$

Отже, отримано автомоделний розв'язок, який був побудований раніше. Це природно, оскільки початковий розподіл частинок стає несуттєвим через достатньо великий проміжок часу, суттєвою залишається тільки сумарна маса частинок.

3.4 Застосування перетворень Фур'є для розв'язання рівняння дифузії

Для розв'язання лінійних автономних диференціальних рівнянь, а також рівнянь у частинних похідних можна застосовувати перетворення Фур'є.

Розглянемо застосування перетворень Фур'є до розв'язання рівняння дифузії на всій осі x за заданого початкового розподілу густини частинок домішки. Кожній функції $f(x)$, визначеній на всій осі x і такої, що достатньо швидко згасає при $x \rightarrow \pm\infty$, можна поставити у відповідність її Фур'є-образ (спектральну густину) $F(k)$, яка пов'язана з $f(x)$ формулами:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk.$$

Далі використовуються такі властивості перетворень Фур'є:

1. Це перетворення – лінійне: при додаванні функцій $f(x)$ їхні образи $F(k)$ також додаються.
2. З попереднього випливає, що при залежності функції і відповідно її образу від деякого параметра μ , диференціювання одного з них за цим параметром приводить до диференціювання іншого за тим самим параметром:

$$f'_\mu(x, \mu) \rightarrow F'_\mu(k, \mu).$$

3. При диференціюванні функції по x образ множиться на ik .

Розв'язання задачі. Позначимо через $R(k, t)$ Фур'є-образ шуканого розв'язку $\rho(x, t)$ для фіксованого t . Тоді

$$R(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) e^{-ikx} dx; \quad \rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(k,t) e^{ikx} dk. \quad (3.24)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

приходимо до рівняння, яке повинен задовольняти Фур'є - образ розв'язку.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = D(ik)^2 R,$$

тобто

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -Dk^2 R.$$

Останнє рівняння при будь-якому фіксованому k є звичайним диференціальним рівнянням, яке розв'язується методом відокремлення змінних:

$$\frac{dR}{R} = -Dk^2 dt.$$

$$R = C(k) e^{-Dk^2 t} \quad (3.25)$$

де стала інтегрування C може залежати від k . Довільна функція $C(k)$ визначається початковою умовою: при $t = 0$ $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, звідки згідно з (3.24)

$$C(k) = R|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(x) e^{-ikx} dx. \quad (3.26)$$

Повертаючись від Фур'є-образу розв'язку до самого розв'язку за допомогою другої формули (3.24) з урахуванням (3.25) і (3.26) записуємо:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t + i(x-\xi)k} dk. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Отриманий розв'язок можливо спростити, оскільки внутрішній інтеграл можна обчислити. Перепишемо його у вигляді

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2 + i\beta k} dk,$$

де $\alpha = Dt$ – дійсне позитивне число, $\beta = x - \xi$. Доповнюємо показник степеня до повного квадрата:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(k^2 - \frac{i\beta}{\alpha} k\right)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(k^2 - \frac{i\beta}{2\alpha} k\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}} dk = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(k - \frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2} dk = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha (k - i\lambda)^2} dk,$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Щоб з'ясувати залежність інтеграла від λ , візьмемо від інтеграла

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha (k - i\lambda)^2} dk \text{ похідну за } \lambda \text{ як за параметром:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha (k - i\lambda)^2} [-\alpha(-i)2(k - i\lambda)] dk = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha (k - i\lambda)^2} [-\alpha(k - i\lambda)^2]_k' dk = \\ &= -ie^{-\alpha (k - i\lambda)^2} \Big|_{k=-\infty}^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Тобто I не залежить від λ , а тому при обчисленні інтеграла можна покласти $\lambda = 0$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} dk = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\alpha} k = z; \\ dk = dz / \sqrt{\alpha} \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Тоді

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2 + i\beta k} dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2 / 4\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}, \quad \alpha > 0.$$

З урахуванням отриманого для інтеграла I розв'язок (3.27) набуває вигляду;

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi. \quad (3.28)$$

Отже, розв'язок співпадає з отриманим раніше виразом (3.23) при $t = t_0$.

3.5 Дифузія на півосі. Крайові умови

Розглянемо випадок, коли частинки блукають вздовж половини осі. У цьому випадку закон, за яким змінюється густина залежить не тільки від початкового розподілу часток, але й від того, що з ними трапиться в кінцевій точці $x = 0$ половини осі, тобто від граничної умови в цій точці.

Вважатимемо, що частинки, які потрапили в точку $x = 0$, назавжди покидають вісь. За такого припущення густина часток повинна задовольняти рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

та *крайову умову першого роду*

$$\rho|_{x=0} = 0. \quad (3.29)$$

З постановки задачі (рівняння дифузії та крайової умови) випливає, що кількість частинок системи не буде залишатися постійною, як у попередньому випадку, а буде безперервно зменшуватися. Дійсно,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^\infty \rho(x, t) dx = \int_0^\infty \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int_0^\infty D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = D \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_0^\infty = 0 - D \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (3.30)$$

та оскільки $\rho|_{x=0} = 0$, а $\rho|_{x>0} > 0$, то $\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} \geq 0$, а $\frac{dM}{dt} < 0$.

Завдання. Показати, що в розглянутому випадку момент першого порядку M_1 залишається інваріантним у часі, тобто $dM_1/dt = 0$.

Для отримання конкретного розв'язку потрібно задати початковий розподіл густини

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x), \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

Таким чином маємо задачу з початковими та крайовими умовами.

Побудуємо функцію Гріна для випадку, коли в початковий момент t_0 порція частинок одиничної маси знаходиться в точці ξ . Для цього припустимо, що частинки можуть розповсюджуватися вздовж усієї осі, тобто в точці $x=0$ немає ніякої особливості, причому, в момент t_0 у точці ξ сконцентрована одинична додатна маса частинок, а в точці $(-\xi)$ – одинична від'ємна маса. Зрозуміло, що тоді внаслідок симетрії розподілу частинок у

точці $x=0$ густина весь час буде дорівнювати нулю. Тому, якщо картину розглядати тільки на половині осі $0 \leq x \leq \infty$, то отримуємо процес, який відповідає потрібним початковій та крайовій умовам, а також нерівності $\rho \geq 0$. Остання нерівність є наслідком того, що завдяки симетрії за кожний інтервал часу в точку $x=0$ приходить однакова кількість додатних і від'ємних часток, які нейтралізують одна одну. Тому на половині осі $0 \leq x \leq \infty$ лишаються тільки частки додатної маси.

Зроблене припущення дозволяє виразити функцію Гріна в поставленій задачі через таку, що була отримана в задачі для всієї осі (тільки з початковою умовою):

$$G_1(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0) \quad (3.31)$$

Далі, використовуючи формулу (3.22)

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}},$$

отримуємо розв'язок задачі за довільної початкової умови $\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x)$ і крайової умови $\rho|_{x=0} = 0$.

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) \rho_0(\xi) d\xi. \quad (3.32)$$

Використаний метод приведення нової задачі до задачі з уже відомим розв'язком через розширення області, в якій будується розв'язок, на основі симетрії має назву **методу відображень** або **методу фіктивних джерел**.

Приклад. Нехай, $\rho_0(\xi) \equiv \rho_0 = \text{const}$, тобто в початковий момент частки домішки були розподілені з постійною густиною. Тоді при $t > t_0$

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) d\xi.$$

Цей інтеграл легко виразити через інтеграл ймовірностей (рис. 3.3)

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} ds.$$

Після деяких перетворень вийде:

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi \right) = \\
&\left[\begin{aligned} s &= \frac{x \mp \xi}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ ds &= \mp \frac{d\xi}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ d\xi &= \mp \sqrt{2D(t-t_0)} ds; \\ \xi &= 0; s = \frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ \xi &= \pm\infty; s = \mp\infty. \end{aligned} \right] = -\frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \cdot \sqrt{2D(t-t_0)} \left[\int_{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}}^{-\infty} e^{-s^2/2} ds + \int_{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-s^2/2} ds \right] = \\
&= -\frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds + \int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds \right] = \\
&= \rho_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds = \rho_0 \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \right) \tag{3.33}
\end{aligned}$$

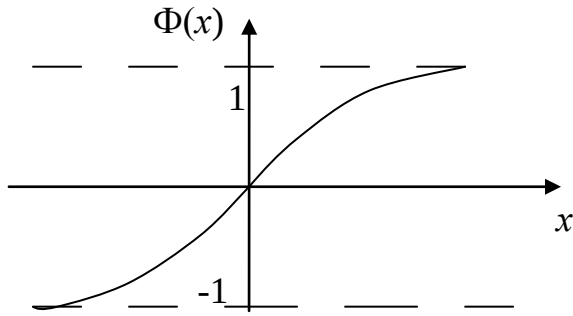


Рис. 3.3

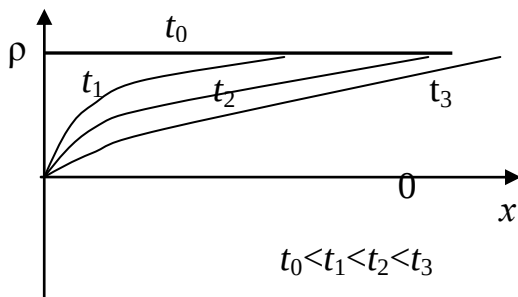


Рис. 3.4

Отримали автомодельний розв'язок, графіки якого у послідовні моменти часу зображені на рис.3.4. Всі графіки отримано з одного (рис. 3.3) розтягненням уздовж осі x . У цьому і полягає зміст автомодельного розв'язку.

Згідно з методом симетрії така сама картина виникатиме, якщо дифузія відбувається на всій осі Ox за початкової умови $\rho_0(x) = \rho_0$ ($x > 0$); $\rho_0(x) = -\rho_0$ ($x < 0$), тобто коли у початковій густини при $x = 0$ спостерігається стрибок (рис.3.5).

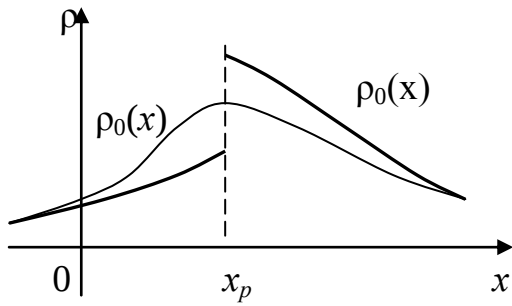


Рис. 3.5

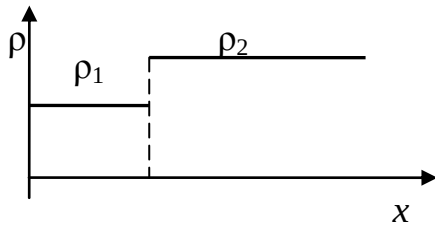


Рис.3.6

Тому знайдений розв'язок, продовжений непарним способом, описує асимптотичну поведінку розв'язку за будь-якої початкової густини, яка має точку кінцевого розриву x_p , поблизу цієї точки та при настільки малих $t - t_0$, що далекі значення початкової густини не встигли вплинути на густину в околі точки x_p .

Приклад. У найпростішому прикладі розривної початкової функції, коли $\rho_0(x) = \rho_1$ при $x < x_p$; $\rho_0(x) = \rho_2$, при $x > x_p$ (рис.3.6) у відповідності з формулою (3.33) отримуємо точний розв'язок:

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \Phi\left(\frac{x - x_p}{\sqrt{2D(t - t_0)}}\right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}$$

$$(t_0 < t < \infty; -\infty < x < \infty).$$

Розглянемо детальніше розв'язання цієї задачі.

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}} \int_{-\infty}^{x_p} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi + \frac{\rho_2}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}} \int_{x_p}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi.$$

Розраховуємо кожен з інтегралів окремо.

$$I_1 = \frac{\rho_1}{2\sqrt{\pi D(t - t_0)}} \int_{-\infty}^{x_p} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi = \left[\begin{array}{l} s = \frac{(x - \xi)}{\sqrt{2D(t - t_0)}}; \\ ds = -\frac{d\xi}{\sqrt{2D(t - t_0)}}; \\ d\xi = -\sqrt{2D(t - t_0)} ds; \\ \xi = x_p; s = \frac{x - x_p}{\sqrt{2D(t - t_0)}}; \\ \xi = -\infty; s = \infty \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho_1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\infty}^{\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds \right] = -\frac{\rho_1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds \right] = \\
&= \frac{\rho_1}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds \right] = \frac{\rho_1}{2} - \frac{\rho_1}{2} \Phi \left(\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \right). \\
\\
I_2 &= \frac{\rho_2}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_{x_p}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi = \left[\begin{aligned} s &= (x-\xi)/\sqrt{2D(t-t_0)}; \\ ds &= -d\xi/\sqrt{2D(t-t_0)}; \\ d\xi &= -\sqrt{2D(t-t_0)} ds; \\ \xi &= x_p; s = \frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}}; \\ \xi &= \infty; s = -\infty \end{aligned} \right] = \\
&= -\frac{\rho_2}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-s^2/2} ds \right] = -\frac{\rho_2}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds \right] = \\
&= \frac{\rho_2}{2} - \frac{\rho_2}{2} \Phi \left(\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \right).
\end{aligned}$$

Тоді отримуємо наведений вище результат:

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \Phi \left(\frac{x-x_p}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \right) \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Підрахуємо середній час життя частинки, тобто час до зникнення частинки, яка в момент t_0 знаходилася в точці ζ .

Якщо вважати, що в момент t_0 у точці ξ знаходилася сконцентрована порція частинок загальної одиничної маси, то в момент $t > t_0$ за час dt із цієї порції зникне частина загальної маси, яка дорівнює

$$\left| \frac{dM}{dt} \right| \cdot dt = D \left. \frac{d\rho}{dx} \right|_{x=0} \cdot dt. \quad (\text{див. (3.30)})$$

Це ймовірність того, що час життя τ частинки буде у проміжку між $t - t_0$ і $t - t_0 + dt$. Тоді середнє значення часу життя становить

$$\langle \tau \rangle = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0) D \frac{d\rho}{dx} \Big|_{x=0} dt,$$

куди замість ρ слід підставити

$$G_1(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0)$$

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) \right] \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\xi}{2\sqrt{\pi D}^{3/2} (t-t_0)^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4D(t-t_0)}} \end{aligned}$$

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^{\infty} (t-t_0)^{-1/2} e^{-\frac{\xi^2}{4D(t-t_0)}} dt.$$

На верхній границі асимптотичне значення підінтегральної функції дорівнює $t^{-1/2}$. Отже, інтеграл розходиться, тобто $\langle \tau \rangle = \infty$, але частинки все ж таки зникають з імовірністю одиниця.

Другий тип крайової умови для рівняння дифузії відповідає випадку, коли частинки не можуть проникнути крізь кінець на півосі – точку $x = 0$. Тоді потік маси там дорівнюватиме нулю, тобто

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (3.34)$$

Це **крайова умова другого роду**. Згідно з нею у поставленій задачі число частинок у системі в процесі еволюції не змінюється. Дійсно

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \rho dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = D \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = D \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\infty} = 0.$$

Для розв'язання цієї задачі, так само, як і попередньої, можна скористатися з методу відображень. Вважатимемо, що дифузія відбувається

вздовж усієї осі x , і продовжимо початковий розподіл густини парним способом через $x = 0$ на від'ємну половину осі x . Внаслідок симетрії цей розподіл залишиться парним і в усі наступні моменти часу, а тому крайова умова автоматично виконуватиметься. Тоді функція Гріна для розглянутої задачі на півосі $0 \leq x \leq \infty$ з крайовою умовою (3.34) і довільним початковим розподілом має вигляд

$$G_1(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) + G(x, t; -\xi, t_0). \quad (3.35)$$

Аналогічно попередньому можна записати розв'язок задачі за заданої початкової умови $\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x)$:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) \rho_0(\xi) d\xi.$$

Можна розглянути випадок, коли частинки „просочуються” з півосі $0 \leq x \leq \infty$ крізь точку $x = 0$, після чого зникають назавжди. Природно вважати при цьому вихідний потік маси пропорційним густині середовища в кінцевій точці, тобто у скільки разів „напір” є сильнішим, у стільки разів більша швидкість проникнення. Тоді з формули для потоку маси випливає *крайова умова третього роду*:

$$D \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = b \rho|_{x=0}, \quad (3.37)$$

де b - коефіцієнт пропорційності.

Крайова умова (3.37) включає у себе як граничні випадки умови як першого (при $b \rightarrow \infty$), так і другого (при $b \rightarrow 0$) роду.

3.6 Розв'язання рівняння дифузії у сферичних координатах. Метод відокремлення змінних

Розглянемо спочатку випадок сферично-симетричної задачі. Сферично-симетричну (центральносиметричну у просторі) задачу для рівняння дифузії простою підстановкою можна привести до задачі про дифузію вздовж півоси.

Запишемо рівняння дифузії у сферичній системі координат. У випадку сферично-симетричного розподілу густини ρ оператор Лапласа (у сферичній системі координат)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

залежить лише від r :

$$\Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

а рівняння дифузії набуває вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right). \quad (3.38)$$

Для перетворення рівняння введемо змінну $\rho = r^k \bar{\rho}$ (показник степеня k підберемо пізніше). Тоді

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} = k(k+1)r^{k-2} \bar{\rho} + 2(k+1)r^{k-1} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} + r^k \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial r^2}.$$

Підставляємо вираз у формулу (3.38) та ділимо на r^k ,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{Dk(k+1)}{r^2} \bar{\rho} + \frac{2D(k+1)}{r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} + D \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial r^2}.$$

При $k = -1$ отримуємо найпростіше рівняння дифузії

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial r^2}; \quad \bar{\rho} = r\rho.$$

У випадку, коли задача про дифузію розглядається в усьому просторі, змінна r змінюється в інтервалі $0 \leq r \leq \infty$. Крім того, з рівності $\bar{\rho} = r\rho$ бачимо, що $\bar{\rho}|_{r=0} = 0$. Таким чином, можна використати результати розв'язання попередньої задачі про дифузію на півосі. За початкової умови

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(r)$$

з урахуванням $\rho = \bar{\rho}/r$ отримуємо розв'язок задачі при $t \geq 0$:

$$\rho(r, t) = \frac{1}{2r\sqrt{\pi Dt}} \int_0^\infty \left(e^{-(r-s)^2/4Dt} - e^{-(r+s)^2/4Dt} \right) s \rho_0(s) ds.$$

Зокрема, густина на початку координат (у точці $r = 0$) на основі правила Л'Опіталя дорівнює

$$\begin{aligned}\rho(0, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r, t) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\int_0^\infty \left(-2(r-s)e^{-\frac{(r-s)^2}{4Dt}} + 2(r+s)e^{-\frac{(r+s)^2}{4Dt}} \right) s \rho_0(s) ds}{2\sqrt{\pi Dt \cdot 4Dt}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} (Dt)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4Dt}} s^2 \rho_0(s) ds.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що при дифузії на півосі за крайової умови $\rho_{r=0} = 0$ маса середовища зменшувалась. У сферично-симетричному випадку маса

$$M = \int_0^\infty \rho(r, t) 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^\infty r \bar{\rho} dr,$$

тобто (якщо повернутися до дифузії на півосі) момент першого порядку M_1 , який є інваріантом. Таким чином у цій задачі маса середовища з часом не змінюється.

У загальному випадку у сферичних координатах рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.39)$$

де $a^2 = D$.

Припустимо, що його розв'язок можна зобразити у вигляді:

$$\rho(r, \theta, \phi) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)\Psi(t).$$

Після підстановки цього виразу в (1.8.1) і ділення на ρ отримуємо

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\Psi'}{\Psi} = -\lambda^2, \quad (3.40)$$

де λ - параметр відокремлення. Тобто, маємо рівняння

$$\frac{d\Psi}{dt} + \lambda^2 a^2 \Psi = 0,$$

розв'язок якого відомий:

$$\Psi = C_1 e^{-\lambda^2 a^2 t}. \quad (3.41)$$

З (3.40) також випливає

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{H r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda^2 \right] = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2,$$

звідки отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0,$$

з розв'язком

$$\Phi = C_1 e^{im\phi} + C_2 e^{-im\phi}. \quad (3.42)$$

Зараз друге розділене рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + r^2 \lambda^2 = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{H \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) = n(n+1).$$

Після перегрупування це рівняння можна привести до двох, а саме:

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left(\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0; \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H = 0. \quad (3.44)$$

Нехай $R = (\lambda r)^{-1/2} \beta(r)$. Тоді рівняння (3.43) приводиться до такого

$$\beta''(r) + \frac{1}{r} \beta'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right) \beta(r) = 0.$$

Це диференціальне **рівняння Беселя** порядку $n + \frac{1}{2}$. Його розв'язок має вигляд

$$\beta(r) = A J_{n+1/2}(\lambda r) + B Y_{n+1/2}(\lambda r)$$

$$i \quad R(r) = (\lambda r)^{-1/2} (A J_{n+1/2}(\lambda r) + B Y_{n+1/2}(\lambda r)), \quad (3.45)$$

де $J_{n+1/2}(\lambda r)$ і $Y_{n+1/2}(\lambda r)$ — **функції Беселя** першого й другого роду.

Для розв'язання рівняння (3.44) покладемо $\cos \theta = \mu$. Тоді

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}};$$

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{dH}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\theta} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{dH}{d\mu};$$

$$\frac{d^2 H}{d\theta^2} = (1-\mu^2) \frac{d^2 H}{d\mu^2} - \mu \frac{dH}{d\mu}.$$

З урахуванням проведеної заміни рівняння (3.44) набуває вигляду:

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 H}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dH}{d\mu} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right) H = 0.$$

Це є диференціальне рівняння **приєднаних функцій Лежандра**. Його розв'язок

$$H(\theta) = C P_n^m(\mu) + D Q_n^m(\mu), \quad (3.46)$$

де $P_n^m(\mu)$ та $Q_n^m(\mu)$ — приєднані функції Лежандра степеня n порядку m відповідно першого й другого роду.

Функції $Q_n^m(\mu)$ і $(\lambda r)^{-1/2} Y_{n+1/2}(\lambda r)$ виключено при розгляді розв'язків через особливості в точках $\mu = \pm 1$ та $r = 0$ відповідно. З урахуванням цього загальний фізично значущий розв'язок рівняння дифузії у сферичних координатах виглядає як

$$\rho(r, \theta, \phi) = \sum_{\lambda, m, n} (\lambda r)^{-1/2} \cdot J_{n+1/2}(\lambda r) \cdot P_n^m(\cos \theta) e^{\pm i m \phi - a^2 \lambda^2 t}. \quad (3.47)$$

Приклад. Визначити розподіл густини всередині кулі радіуса R , якщо на її поверхні $r = 0$ і відомий початковий розподіл густини $\rho_0(r, 0)$.

Розв'язання. Оскільки початковий розподіл густини й крайова умова не залежать від ϕ , то в будь-який момент часу ρ не буде залежати від ϕ , тобто

$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = 0$. Тоді рівняння дифузії у сферичних координатах набуває вигляду:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Розв'язки цього рівняння, отримані методом відокремлення змінних, які мають фізичний зміст дорівнюють

$$\rho(r, \theta) = \sum_{\lambda, n} C_{\lambda n} (\lambda r)^{-1/2} \cdot J_{n+1/2}(\lambda r) \cdot P_n(\mu) e^{-a^2 \lambda^2 t}, \quad \mu = \cos \theta$$

за умовою $\rho = 0$ на сфері, тобто при $r = R$. Звідки випливає, що

$$Y_{n+1/2}(\lambda R) = 0. \quad (3.48)$$

Нехай $\lambda_{n_0}, \lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots$ – корені рівняння (3.48). Тоді

$$\rho = \sum_{n,i} C_{n_i} (\lambda_{n_i} r)^{-1/2} \cdot J_{n+1/2}(\lambda_{n_i} r) \cdot P_n(\mu) e^{-a^2 \lambda_{n_i}^2 t}.$$

Визначимо коефіцієнти C_{n_i} . На початку часу в момент $t_0 = 0$ густина $\rho = \rho(r, \theta)$:

$$\rho(r, \theta, t)|_{t=0} = \rho_0(r, \theta) = \sum_{n,i} C_{n_i} (\lambda_{n_i} r)^{-1/2} \cdot J_{n+1/2}(\lambda_{n_i} r) \cdot P_n(\mu).$$

Множимо обидві частини рівності на $(\lambda_{n_j} r)^{3/2} J_{n+1/2}(\lambda_{n_j} r) \cdot P_n(\mu)$ та двічі інтегруємо по r від 0 до R й по μ від -1 до +1.

$$\begin{aligned} \int_0^R (\lambda_{n_j} r)^{3/2} J_{n+1/2}(\lambda_{n_j} r) \int_{-1}^1 \rho_0(r, \theta) P_m(\mu) d\mu = \\ = \sum_{n,i} C_{n_i} (\lambda_{n_i})^{-1/2} (\lambda_{n_j})^{3/2} \int_0^R r J_{n+1/2}(\lambda_{n_j} r) J_{n+1/2}(\lambda_{n_i} r) dr \int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \frac{2}{2m+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

$$\int_0^R r J_{n+1/2}(\lambda_{n_j} r) J_{n+1/2}(\lambda_{n_i} r) dr = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j; \\ \frac{R^2}{2} \left[J_{n+1/2}(\lambda_{n_j} R) \right]^2 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

R – радіус сфери. Тоді

$$\int_0^R (\lambda_{n_j} r)^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{n_j} r) dr \int_{-1}^1 \rho_0(r, \theta) P_m(\mu) d\mu = C_{m_j} \lambda_{m_j} \frac{R^2}{2m+1} \left[J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda_{m_j} R) \right]^2,$$

звідки

$$C_{m_j} = \frac{2m+1}{\lambda_{m_j} R^2} \left[J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda_{m_j} R) \right]^{-2} \int_0^R (\lambda_{n_j} r)^{\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{n_j} r) dr \int_{-1}^1 \rho_0(r, \theta) P_m(\mu) d\mu. \quad (3.49)$$

Розв'язок має вигляд

$$\rho = \sum_{m,j} C_{m_j} (\lambda_{m_j} r)^{-\frac{1}{2}} \cdot J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda_{m_j} r) P_m(\mu) e^{-a^2 \lambda_{m_j}^2 D t},$$

де C_{m_j} визначається формулою (3.49).

3.7 Дифузія на відрізку

Розглянемо випадок блукання частки вздовж відрізка $0 \leq x \leq l$. Потрібно задати крайові умови на кожному з кінців відрізка. Нехай виконуються крайові умови першого роду:

$$\rho|_{x=0} = 0; \quad \rho|_{x=l} = 0,$$

тобто частинки вільно залишають відрізок назавжди через обидва кінці відрізка.

Функцію впливу для побудови розв'язку за заданого початкового розподілу (початкової умови) можна побудувати за вже відомим методом відображень. Для цього відобразимо згусток, розташований у точці ξ , від кінців відрізка, одночасно змінюючи при цьому знак маси згустку. Це дає суму

$$G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0) - G(x, t; 2l - \xi, t_0) \quad (3.50)$$

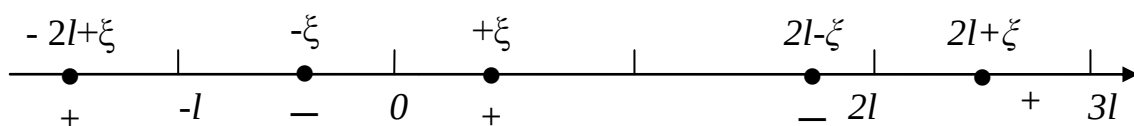


Рис. 3.7

Зараз вплив згустків в точках $+\xi$ та $-\xi$ взаємно компенсується, але виникає вплив згустку в точці $2l - \xi$. Тому відобразимо його в точці $x = 0$, одночасно змінюючи знак; аналогічно згусток у точці $(-\xi)$ потрібно відобразити в точці l . Продовження процедури призводить до нескінченної послідовності згустків (рис. 3.7).

Нехай $t_0 = 0$. З використанням формули (3.22) для $G(x, t; \xi, 0)$ отримуємо такий вираз для функції Гріна:

$$\begin{aligned} G_l(x, t; \xi, 0) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-2jl-\xi)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x-2jl+\xi)^2}{4Dt}} \right). \end{aligned}$$

За допомогою цієї функції записуємо закон еволюції густини за наданому початковому розподілу $\rho_0(x)$:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \int_0^l G_l(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^l (G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0)) \rho_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Цей розв'язок можна переписати в іншому вигляді, якщо формально продовжити функцію $\rho_0(x)$ через точку $x = 0$ у непарний спосіб, а потім із відрізка $-l \leq x \leq l$ на всю вісь x як $2l$ - періодичну функцію.

Позначимо продовжену функцію також через $\rho_0(x)$. Оскільки

$$\begin{aligned} \int_0^l G(x, t; 2jl + \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi &= \int_{2jl}^{(2j+1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi; \\ - \int_0^l G(x, t; 2jl - \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi &= - \int_{2jl}^{(2j-1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \int_{(2j-1)l}^{2jl} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

вираз (3.51) можна переписати у вигляді

$$\rho(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{il}^{(i+1)l} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; \xi, 0) \rho_0(\xi) d\xi. \quad (3.52)$$

Отриманий розв'язок найбільш зручний при малих значеннях часу, оскільки тоді різні члени в сумі по l мають різний порядок малости. Один з

них з $i = 0$ є головним, один з сусідніх (залежно від значення x) надає поправку до нього і т. ін.

3.8 Експоненціальні за часом розв'язки рівняння дифузії

В лінійних однорідних автономних (тобто інваріантних за часом) задачах математичної фізики важливу роль відіграють розв'язки, які є експоненціальними за часом, тобто розв'язки типу $f(x)e^{-\lambda t}$, де λ - стала, яка в загальному випадку є комплексним числом, а знак „-“, використаний для зручності, оскільки експонента частіше буває такою, що згасає, ніж зростає.

Значення λ визначає характер процесу:

λ – дійсне, > 0 – розв'язку відповідає процес, який згасає з однаковою швидкістю в усіх точках;

λ – чисто уявне – розв'язку відповідає процес гармонічних коливань;

λ – комплексне, з додатною дійсною частиною – процес гармонічних коливань зі згасанням і т. ін.

Сукупність розв'язків вигляду $Cf(x)e^{-\lambda t}$, (C – довільна стала), є загальним видом однопараметричної сукупності розв'язків, інваріантних у часі. В багатьох задачах загальний розв'язок є результатом додавання таких однопараметричних сукупностей, визначити які значно легше, ніж безпосередньо будувати загальний розв'язок.

Можливі значення сталої λ та вигляд відповідної функції $f(x)$, яка надає просторову залежність розглянутого експоненціального розв'язку, визначається, по-перше, диференціальним рівнянням; по-друге, крайовими умовами.

Кожне зі значень λ має назву **власного значення** розглянутої задачі, відповідна функція $f(x)$ – **власної функції**.

Визначимо експоненціальні за часом розв'язки рівняння дифузії на відрізьку $0 \leq x \leq l$ за крайових умов

$$\rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0.$$

Для того в рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

і в граничні умови підставимо функцію $\rho = f(x)e^{-\lambda t}$:

$$-\lambda f(x)e^{-\lambda t} = Df''(x)e^{-\lambda t}.$$

Таким чином функція $f(x)$ повинна задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{D} f = 0 \quad (3.53)$$

$$\text{і крайові умови} \quad f(0) = f(l) = 0. \quad (3.54)$$

Потрібні розв'язки можливі лише при певних значеннях λ . А саме, рівняння (3.53) і граничні умови (3.54) визначають синусоїдальні розв'язки

$$f_k(x) = \sin k_m x,$$

де $k_m x = n\pi$, тобто

$$k_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m=1,2,\dots \quad (3.55)$$

Звідки, внаслідок рівняння (3.53)

$$-\frac{m^2\pi^2}{l^2} + \frac{\lambda}{D} = 0,$$

тобто

$$\lambda = \lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{l^2} D = k^2 D. \quad (3.56)$$

Формула (3.56) визначає послідовність власних значень у розглянутій задачі, а формула (3.55) – послідовність віжповідних власних функцій.

Набір допустимих властних значень λ має назву *спектру* задачі.

Бачимо, що для рівняння *дифузії на обмеженому відрізьку* отриманий спектр – *дискретний*. Це є характерною властивістю задач, сформульованих на скінченій області.

Таким чином, послідовність розв'язків рівняння дифузії, експоненціальних за часом і віжповідних крайовим умовам, має вигляд:

$$\rho_m(x) = \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t} = \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot e^{-D\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 t}, \quad m=1,2,3,\dots \quad (3.57)$$

Якщо вважати цю функцію додатком до деякої густини, то отримуємо періодичну послідовність розріджень та згущень із хвильовим числом k_m , які розсмоктуються з часом тим швидше, чим більший k_m . Це природно,

оскільки при заданому середньому пробігу частинок за одиницю часу взаємна компенсація розріджень та згущень відбувається тим швидше, чим ближче вони розташовані.

Побудуємо із розв'язків (3.57) загальний розв'язок рівняння дифузії, яке відповідає крайовим умовам та довільно заданій початковій умові

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Суперпозиція розв'язків також є розв'язком рівняння, тому розв'язком є сума ряду по функціях (3.57) із довільними постійними коефіцієнтами b_m :

$$\rho = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t}, \quad (k_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \lambda_m = D \frac{m^2 \pi^2}{l^2}). \quad (3.58)$$

Тоді

$$\rho_0 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \quad (0 \leq x \leq l). \quad (3.59)$$

Початкову умову можна задовольнити за рахунок вибору коефіцієнтів b_m .

Легко перевірити безпосередньо, що побудовані власні функції є ортогональними одна до одної на відрізьку $0 \leq x \leq l$, тобто

$$\int_0^l \sin k_m x \sin k_n x dx = 0, \quad m \neq n.$$

Завдання. Довести ортогональність власних функцій самостійно.

Тоді, якщо розкладення (3.59) можливе, то коефіцієнти b_m визначаються однозначно таким способом: множимо обидві частини (3.59) на одну з власних функцій $\sin k_m x$, а далі дістанемо інтеграл виразу від 0 до l і скористуємося ортогональністю функцій, а також рівністю

$$\int_0^l \sin^2 k_m x dx = \frac{l}{2}.$$

$$\int_0^l \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \sin k_n x dx = \int_0^l \rho_0 \sin k_m x dx;$$

$$b_m \int_0^l \sin^2 k_m x dx = \int_0^l \rho_0 \sin k_m x dx.$$

Для коефіцієнтів ряду (3.58) отримуємо такий вираз:

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l \rho_0 \sin k_m x dx, \quad m=1,2,3,\dots \quad (3.60)$$

Оскільки розв'язок задачі визначається початковою умовою однозначно, то формули (3.58) і та, що отримана в попередньому розділі, дають однакові результати. Однак, якщо попередня формула була зручнішою за малих значення часу, то формула (3.58) є ефективною при $t \rightarrow \infty$, оскільки $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ і перший член ряду є головним, другий надає поправку до нього і т. ін.

Приклад. Початковий розподіл густини домішки на відрізку $0 \leq x \leq l$ задається формулою $\rho_0(x) = \alpha x(l-x)$. Знайти розподіл густини в наступні моменти часу.

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{l} \int_0^l \alpha x(l-x) \sin k_m x dx = \frac{2\alpha}{l} \int_0^l x(l-x) \sin k_m x dx = \\ &= \frac{2\alpha}{l} \left[l \int_0^l x \sin k_m x dx - \int_0^l x^2 \sin k_m x dx \right]; \end{aligned}$$

Обчислюємо кожний з інтегралів:

$$l \int_0^l x \sin k_m x dx = \left[\begin{array}{l} x = u; dx = du; \\ dv = \sin k_m x dx; v = -\frac{1}{k_m} \cos k_m x \end{array} \right] = l \left(-\frac{x}{k_m} \cos k_m x \right) \Big|_0^l +$$

$$+ l \int_0^l \frac{1}{k_m} \cos k_m x dx = -\frac{l^2}{k_m} \cos k_m l + \frac{l}{k_m^2} \sin k_m x \Big|_0^l = -\frac{l^2}{k_m} \cos k_m l;$$

$$\begin{aligned} - \int_0^l x^2 \sin k_m x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2; du = 2x dx; \\ dv = \sin k_m x dx; v = -\frac{1}{k_m} \cos k_m x \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{k_m} x^2 \cos k_m x \Big|_0^l - \frac{2}{k_m} \int_0^l x \cos k_m x dx = \frac{l^2}{k_m} \cos k_m l - \frac{2}{k_m^3} \cos k_m l + \frac{2}{k_m^3}; \end{aligned}$$

$$b_m = \frac{4\alpha}{lk_m^3} (1 - \cos k_m l) = \frac{4\alpha l^2}{m^3 \pi^3} (1 - \cos m\pi) = \frac{4\alpha l^2}{m^3 \pi^3} (1 - (-1)^m).$$

Тоді

$$\rho = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t} =$$
$$= \frac{8\alpha l^2}{\pi^3} \left(\frac{1}{1^3} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{4\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right),$$

де λ_m визначається формулою (3.56).

Цей ряд швидко збігається навіть за малих значеннях t . Інтеграл від нього, який дає повну масу домішки, збігається ще краще.

Завдання

1. Інтегруванням знайти масу домішки за умовою попереднього прикладу та показати збіжність отриманого для маси ряду

Відповідь:

$$M = \frac{16\alpha l^3}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{4\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right).$$

2. Початковий розподіл густини домішки на відрізку $0 \leq x \leq l$ задається формулою $\rho_0(x) = \rho_0 = \text{const}$. Подати розподіл густини в наступні моменти часу як суму ряду, члени якого експоненціальні за часом.

Відповідь: $\rho = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5} \sin \frac{4\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right) \rho_0.$

Примітка. Початковий розподіл в останній задачі не задовольняє крайові умови, тому вищі члени ряду повинні мати більшу вагу. Крім того, внаслідок неузгодженості крайових умов початкова швидкість віддачі маси повинна бути велика, звідки впливає повільна збіжність ряду.

3. А) за отриманим у попередній задачі виразом для густини інтегруванням визначити у вигляді суми ряду масу домішки.

Б) Знайти вираз для швидкості зміни маси домішки за часом - $\left(\frac{dM}{dt} \right)$. Показати, що при $t = 0$ $\frac{dM}{dt} = \infty$, тобто для правильного опису процесу потрібно брати тим більшу кількість членів ряду, чим менше t .

Метод побудови довільних розв'язків із використанням розв'язків, які є експоненціальними за часом, приводить, як ми бачили, до розкладення їх у ряд Фур'є (для нескінченної області – в інтеграл Фур'є) або в

подібного виду ряд по повній системі ортогональних функцій. Тому цей метод побудови розв'язків має назву *методу Фур'є*.

Розглянемо застосування методу Фур'є до задачі, в якій, на відміну від попередніх (із граничними умовами I і II роду), безпосередня побудова функції Гріна становить труднощі.

Приклад. Розглянемо дифузію частинок на відрізку $0 \leq x \leq l$ за заданої початкової густини частинок $\rho_0(x)$, якщо на лівому кінці відрізка частинки зникають назавжди, а на правому відбувається їх просочування, тобто виконуються такі крайові умови:

$$\rho|_{x=0} = 0; \quad \left(D \frac{\partial \rho}{\partial x} + b\rho \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (3.61)$$

Для експоненційних за часом розв'язків (типу $\rho = f(x)e^{-\lambda t}$), на основі рівняння $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{D} f = 0$ і першої із крайових умов з точністю до коефіцієнта пропорційності, який не має суттєвого значення, отримуємо

$$f(x) = \sin kx.$$

З другої крайової умови випливає, що число k повинно задовольняти рівняння

$$Dk \cos kl + b \sin kl = 0, \text{ тобто } \operatorname{tg} kl = -\frac{D}{b} k. \quad (3.62)$$

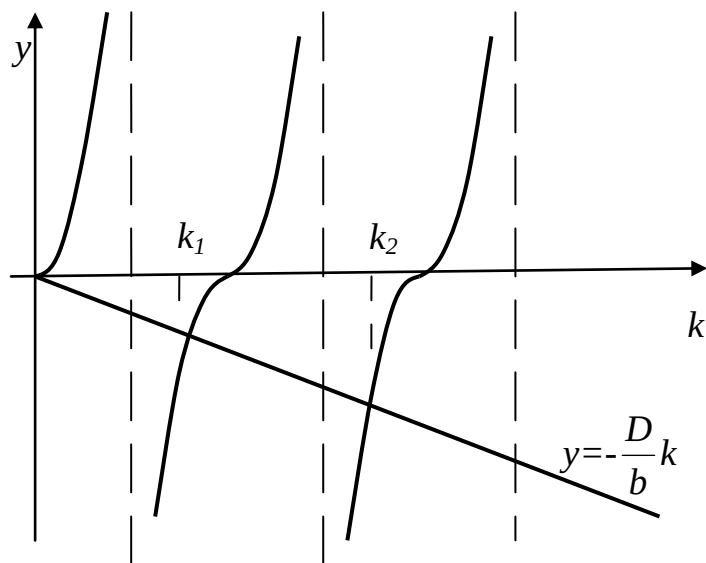


Рис. 3.8

Це трансцендентне рівняння, графічний розв'язок якого при різних k показаний на рис. 3.8. Отримана нескінченна послідовність можливих значень k .

Можна показати, що уявних або комплексних розв'язків рівняння (3.62) не має, тобто отримано всі експоненціальні за часом розв'язки рівняння.

Для побудови загальнішого розв'язку рівняння дифузії за заданих крайових умовах можна

скористатися рядом із знайденими розв'язками типу $\rho = \sin(k_m x) e^{-Dk_m^2 t}$ з довільними сталими коефіцієнтами.

$$\rho(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(k_m x) e^{-Dk_m^2 t},$$

де k_m - корені рівняння (1.10.13), а b_m - довільні сталі, які слід визначити.

При $t = 0$

$$\rho_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(k_m x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Цю рівність слід задовольнити підбором коефіцієнтів b_m .

Таким чином, ми знов прийшли до задачі про розкладення довільної заданої функції у ряд за системою власних функцій. Але оскільки крайові умови змінилися, то й власні функції стали іншими.

Перевіримо ортогональність побудованої системи власних функцій. При $m \neq n$ з урахуванням (3.62)

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin k_m x \cdot \sin k_n x dx &= \frac{1}{2} \int_0^l (\cos(k_m - k_n)x - \cos(k_m + k_n)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k_m - k_n)l}{k_m - k_n} - \frac{\sin(k_m + k_n)l}{k_m + k_n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} k_m l - \operatorname{tg} k_n l}{k_m - k_n} - \frac{\operatorname{tg} k_m l + \operatorname{tg} k_n l}{k_m + k_n} \right) \cos k_m l \cos k_n l = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{D}{b} \left(\frac{k_m - k_n}{k_m - k_n} - \frac{k_m + k_n}{k_m + k_n} \right) \cos k_m l \cos k_n l = 0. \end{aligned}$$

Ортогональність системи доведена. Повноту системи доводити складніше.

Якщо система власних функцій ортогональна та повна, неважко отримати вирази для коефіцієнтів розкладення. Для цього обидві частини розкладення помножимо на одну з власних функцій $\sin k_m x$, далі беремо інтеграл у межах від 0 до l і використовуємо ортогональність.

$$b_m = \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx : \int_0^l \sin^2 k_m x dx = 2 \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx : \left(l + \frac{D}{b} \cos k_m l \right).$$

Тут вираз у знаменнику перетворено аналогічно попередньому, а саме:

$$\int_0^l \sin^2 k_m x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2k_m x) dx = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2k_m} \sin k_m x \Big|_0^l = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2k_m} \sin k_m l \cdot \frac{\cos k_m l}{\cos k_m l} =$$

$$\frac{1}{2} \left(l - \frac{1}{2k_m} \sin k_m l \cdot \cos k_m l \right) = \frac{1}{2} \left(l + \frac{D}{b} \cos k_m l \right).$$

У задачах розглянутого типу система власних функцій завжди повна й ортогональна. Скориставшись цими властивостями у випадках, коли вдається ефективно побудувати систему власних функцій, можливо побудувати розв'язок у вигляді суми ряду по експоненційних за часом розв'язках, що відповідає будь-якій початковій умові. Таким рядом можна користуватися для чисельних розрахунків, а також для аналізу асимптотичної поведінки розв'язку при $t \rightarrow 0$.

3.9 Стаціонарні розв'язки рівняння дифузії

Розглянемо процес дифузії у деякій обмеженій області (Ω). Зрозуміло, що стаціонарний неоднорідний ($\rho \neq \text{const}$) розподіл густини речовини, дифузія якої спостерігається, можливий тільки у випадках:

- 1) якщо ця область має межі, через які частинки можуть проходити у систему або зникати з неї;
- 2) якщо дифузія примусово збуджується поведінкою частинок на нескінченності, тобто на нескінченності існують джерела та стоки частинок.

Якщо розв'язок рівняння дифузії стаціонарний, тобто не залежить від часу, то $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ і в одновимірному випадку маємо $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$, у тривимірному – рівняння Лапласа.

$$\nabla^2 \rho = 0. \quad (3.63)$$

В одновимірному випадку розв'язки очевидні: то є лінійні функції, яким відповідає однорідний потік маси. Тому розглянемо дифузію у просторі. Стаціонарні розв'язки рівняння дифузії задовольняють рівняння Лапласа (3.63), тобто є гармонічними функціями. Розв'язок, побудований для деякої області, суттєво залежить від того, що відбувається на її межах (S), тобто від крайових умов (рис. 3.9).

На межі може задаватись густина частинок, дифузія яких спостерігається. Тоді маємо крайову умову I-го роду: задано

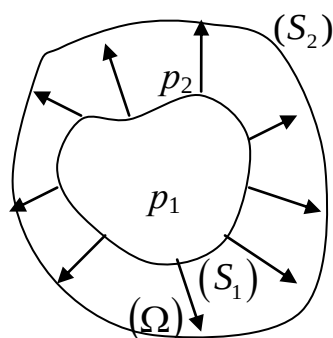


Рис. 3.9

$$\varphi(p) = \rho(p)|_{p \in (S)}$$

В іншому разі на поверхні (S) може бути задана швидкість введення частинок у систему. З урахуванням закону Фіка $J_p = -D \nabla \rho$ для потоку маси, а також загальних властивостей потоку, отримуємо крайову умову II-го роду. Якщо крізь елемент поверхні ds , який включає граничну точку P , за час dt в область входить $\Psi(P)dsdt$ одиниць маси частинок, які дифундують, то крайова умова II роду виглядає як

$$\Psi(P) = D \frac{d\rho}{dn} \Big|_{p \in (S)},$$

де n – напрямок зовнішньої нормалі до (S) . Зрозуміло, що загальна маса частинок, які пертинає межі системи за будь-який проміжок часу повинна дорівнювати нулю, тобто

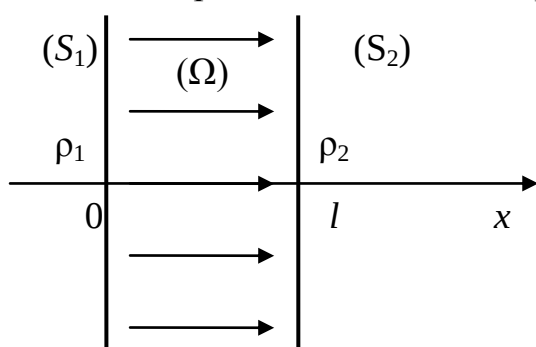


Рис. 3.10

$$\int_{(s)} \Psi(P) ds = 0.$$

З іншого боку в розглянутому випадку розв'язок визначений із точністю до довільної сталої величини, оскільки для однорідної крайової умови (тобто при $\Psi(P) \equiv 0$), коли частинки в систему не

проникають, у ній можливий розподіл частинок з будь-якою постійною густиною.

Для однорідного тіла, через яке відбувається дифузія частинок, вводять поняття **коефіцієнта масопередачі**.

Нехай тіло (Ω) обмежено двома поверхнями (S_1) і (S_2) (рис. 3.10), на яких підтримуються постійні значення густини часток ρ_1 і ρ_2 , причому $\rho_2 < \rho_1$. Тоді в (Ω) установиться стаціонарний процес дифузії: через (S_1) в (Ω) буде входити маса з деякою інтенсивністю Q , а через (S_2) – із такою самою інтенсивністю виходити.

Задача – лінійна, тому Q пропорційно $(\rho_1 - \rho_2)$:

$$Q = \mu(\rho_1 - \rho_2), \quad (3.64)$$

де μ – коефіцієнт масопередачі.

Якщо значення густин ρ_1 і ρ_2 залежать від часу, але змінюються досить повільно, тож розподіл густини наближається до стаціонарного, то процес має назву квазістаціонарного для його розрахунку можна користуватися формулою (3.64) із тим самим коефіцієнтом μ , що в стаціонарному випадку.

Приклад. Визначимо коефіцієнт масопередачі для випадку, зображеному на рис. 3.9, де (Ω) - область простору між двома паралельними нескінченними площинами (S_1) і (S_2) , відстань між якими дорівнює l .

Знаходимо розв'язок рівняння Лапласа.

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} = 0; \quad \frac{d\rho}{dx} = C_1; \quad \rho = C_1 x + C_2.$$

Для визначення C_1 та C_2 використовуємо крайові умови.

$$\rho(0) = C_2 = \rho_1; \quad \rho(l) = C_1 l + \rho_1 = \rho_2; \quad C_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{l}.$$

Розв'язок має вигляд $\rho = \rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{l} x$. Тут інтенсивність Q передачі маси нескінченна, тому розглянемо потік маси, тобто інтенсивність потоку крізь одиницю площини $q = \tilde{\mu}(\rho_2 - \rho_1)$. Але відповідно до рівняння Фіка $q = -D \frac{d\rho}{dx} = \frac{D}{l}(\rho_1 - \rho_2)$, тобто $\tilde{\mu} = \frac{D}{l}$.

Звідси випливає ще один зміст коефіцієнта дифузії: D – це коефіцієнт масопередачі однорідного потоку, віднесений до одиниці площі та одиниці довжини ($l = 1$).

Якщо l необмежено зростає, то розв'язок переходить у $\rho = \rho_0$, вплив площі з координатою $x = l$, яка віддаляється, стає несуттєвим. Коефіцієнт масопередачі $\tilde{\mu} = \frac{D}{l}$, розрахований на одиницю площини, прямує до нуля, оскільки шар безмежної товщини є нездоланною перепорою для частинок.

Отримані результати можна також віднести до задачі про дифузію частинок від однієї основи циліндра (вхід) до другої (вихід), якщо бічна поверхня циліндра непроникна.

Приклад.

Стационарна дифузія відбувається між двома коаксіальними циліндрами, бічні поверхні яких задані рівняннями

$$(S_1): x^2 + y^2 = r_0^2; \quad (S_2): x^2 + y^2 = R_0^2$$

при крайових умовах $\rho|_{r=r_0} = \rho_1; \quad \rho|_{r=R_0} = \rho_2$.

Потрібно визначити залежність ρ від r , а також коефіцієнт масопередачі.

Задача має осьову симетрію, тому розв'язок залежатиме тільки від відстані r до осі.

Записуємо рівняння стаціонарної дифузії для густини домішки $\rho = \rho(r)$. Скористаємось тим, що потік маси, яка проходить внаслідок дифузії крізь поверхню $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq z \leq z_0$, не повинен залежати від r .

Тоді $\frac{d}{dr} \left(z_0 2\pi r \cdot D \frac{d\rho}{dr} \right) = 0$, тобто $\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\rho}{dr} \right) = 0$. Звідки $r \frac{d\rho}{dr} = C_1$;

$d\rho = C_1 \frac{dr}{r}$, і загальний розв'язок цього рівняння має вид $\rho = C_1 \ln r + C_2$.

C_1 і C_2 знаходимо з крайових умов $\rho_1 = C_1 \ln r_0 + C_2$; $\rho_2 = C_1 \ln R_0 + C_2$.

Звідки $C_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\ln \frac{R_0}{r_0}}$; $C_2 = \rho_1 - C_1 \ln r_0 = \rho_1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln r_0$. Остаточного отрим-

маємо $\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln r + \rho_1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln r_0 = \rho_1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0}$.

Розв'язок прямує до границі $\rho \equiv \rho_1$ при $R_0 \rightarrow \infty$.

Коефіцієнт масопередачі, віднесений до одиниці висоти циліндра за рівнянням Фіка дорівнює $\frac{q}{l} = -\frac{D}{z_0} \frac{d\rho}{dr}$. З іншого боку, при розв'язанні

задачі отримано $-2\pi D \frac{d\rho}{dr} = \frac{2\pi D}{\ln \left(\frac{R_0}{r_0} \right)} (\rho_1 - \rho_2)$. Тоді $\tilde{\mu} = \frac{q}{z_0} = \frac{2\pi D}{\ln \left(\frac{R_0}{r_0} \right)}$.

Як і в попередньому випадку знайдений коефіцієнт масопередачі прямує до нуля при $R_0 \rightarrow \infty$.

Завдання

Стационарна дифузія відбувається між двома концентричними сферами, поверхні яких задані рівняннями

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2; \quad (S_2): x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$$

за крайових умов

$$\rho|_{r=r_0} = \rho_1; \quad \rho|_{r=R_0} = \rho_2.$$

Визначити залежність ρ від r , а також коефіцієнт масопередачі.

$$\text{Відповідь: } \rho = \frac{r_0 R_0 (\rho_1 - \rho_2)}{(R_0 - r_0)r} + \frac{R_0 \rho_2 - r_0 \rho_1}{R_0 - r_0}; \quad \mu = \frac{4\pi D r_0 R_0}{R_0 - r_0}.$$

3.10 Задачі з народженням частинок

Розглянемо випадок одновимірної дифузії, коли внаслідок деяких (взагалі нестационарних) процесів у систему за заданим законом надходять нові частинки, або система може втрачати частинки. Причому, ці процеси можуть відбуватися в усіх точках середовища.

Припустимо, що частинки народжуються з просторово-часовою густиною $S(x, t)$, тобто за час $(t; t + dt)$ на інтервалі $(x; x + dx)$ народжуються, або зникають, якщо $s(x, t) < 0$, частинки загальної маси $S(x, t)dxdt$. Тоді рівняння дифузії набирає вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + S(x, t).$$

Розв'язок рівняння за заданих початкових та крайових умовах особливо наочний, якщо відома відповідна функція Гріна $G(x, t; \xi, t_0)$ для задачі з початковою умовою.

Нехай у момент t_0 задана початкова густина $\rho_0(x)$, та потрібно знайти розподіл густини в наступні моменти часу $t > t_0$. Кожна порція частинок $S(\xi, \tau)d\xi d\tau$, яка з'явилася в системі в момент τ в точці ξ бере участь у дифузії за законом $d(d\rho) = G(x, t; \xi, t_0) S(\xi, \tau)d\xi d\tau$. Усі ці порції частинок розповсюджуючись впливають на первинну густину, що також бере участь у дифузії, внаслідок чого густина $\rho(x, t)$ є результатом суперпозиції двох доданків:

$$\rho(x,t) = \int G(x,t;\xi,t_0) \rho_0(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t d\xi \int G(x,t;\xi,\tau) S(\xi,\tau) d\tau.$$

Приклад. Нехай дифузія відбувається вздовж усієї осі. Функція Гріна для цього випадку нам відома:

$$G(x,t;\xi,t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}}. \quad (3.22)$$

За наявності надходження частинок до виразу слід додати ще один, який враховує цей процес, а саме

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}} S(\xi,\tau) d\tau. \quad (3.65)$$

Розглянемо випадок, коли частинки надходять у систему в одній точці a з певною інтенсивністю $\varphi(t)$ одиниць маси в одиницю часу, тобто $S(x,t) = \varphi(t)\delta(x-a)$, за нульової початкової умови ($\rho_0(x,t_0) = 0$). З (3.65) отримуємо закон еволюції густини

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4D(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau. \quad (3.66)$$

Цей інтеграл, невластивий на верхній границі, залежить від x і τ як від параметрів. Можна показати, що за умови обмеженості функції $\varphi(t)$, цей інтеграл правильно і навіть рівномірно збіжний. Тому $\rho(x,t)$ - безперервна функція. Але похідна $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ при $x = a$ буде розривною, тобто залежність $\rho(x)$ має злам.

Для доведення візьмемо від $\rho(x, t)$ похідну за координатою x як за параметром:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{1}{4\sqrt{\pi D^3}} \int_{t_0}^t \frac{x-a}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4D(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Вважатимемо, що $\varphi(t) = 0$ при $t < t_0$. Тоді нижню границю можна покласти рівною $-\infty$. Після заміни змінної $\frac{|x-a|}{2\sqrt{D(t-\tau)}} = s$ отримуємо (показати самостійно)

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi D}} \frac{x-a}{|x-a|} \int_{t_0}^t \varphi \left(t - \frac{(x-a)^2}{4Ds^2} \right) e^{-s^2} ds.$$

За малих $|x-a|$ функція $\varphi \left(t - \frac{(x-a)^2}{4Ds^2} \right)$ може набирати значення, далекі від $\varphi(t)$ тільки за малих s , тому при обчисленні інтеграла її можна замінити на $\varphi(t)$. З урахуванням значення інтеграла ймовірностей отримуємо:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=a-0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi D}} \cdot (-1) \int_0^\infty \varphi(t) e^{-s^2} ds = +\frac{1}{2D} \varphi(t); \quad (3.67a)$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=a+0} = -\frac{1}{2D} \varphi(t). \quad (3.67b)$$

Цей результат зрозумілий з фізичної точки зору. Оскільки похідна $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ пов'язана з потоком маси q формулою $\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{q}{D}$, то вирази (3.67) відображають той факт, що половина частинок, які надходять у систему, йде у правий бік, а половина – у лівий.

Приклад. Частинки можуть надходити крізь межі середовища. Розглянемо для прикладу дифузії частинок на півосі $0 \leq x \leq \infty$, причому через точку $x = 0$ на піввісь поступають частинки заданим потоком $S_0(t)$.

На разі задача зводиться до розв'язання однорідного рівняння дифузії $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ за неоднорідної крайової умови другого роду

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{D} S_0(t), \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Її можна розв'язати досить просто за допомогою функції Гріна для задачі на півосі з довільною початковою умовою і граничною умовою

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Порція часток $S_0(\tau) d\tau$, яка виникла в точці $x = 0$ у момент τ , далі бере участь у дифузії за законом

$$d\rho = G_2(x, t; 0, \tau) S_0(\tau) d\tau = 2G(x, t; 0, \tau) S_0(\tau) d\tau,$$

де $G_2(x, t; 0, \tau) = G(x, t; \xi, \tau) + G(x, t; -\xi, \tau)$ (див. формулу (3.35))

Інтегруванням знаходимо додатак до розв'язку (3.35) :

$$\rho_{\partial\partial\partial am.} = 2 \int_{t_0}^t G(x, t; 0, \tau) S_0(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/4D(t-\tau)} S_0(\tau) d\tau.$$

Припустимо, що частинки надходять з постійною інтенсивністю, тобто $S_0 = const$, а в початковий момент $t=0$ частинок у системі не було. Тоді

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{S_0}{\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-x^2/4D(t-\tau)} d\tau = \left. \begin{aligned} t-\tau &= \frac{1}{p^2}; d\tau = 2p^{-3} dp; \\ \tau &= 0; p = \frac{1}{\sqrt{t}}; \\ \tau &= t; p = \infty \end{aligned} \right| = \\ \frac{2S_0}{\sqrt{\pi D}} \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{p^2} e^{-x^2 p^2/4D} dp &= \left. \begin{aligned} u &= e^{-x^2 p^2/4D}; du = -\frac{px^2}{2D} e^{-x^2 p^2/4D} \\ dv &= \frac{dp}{p^2}; v = -\frac{1}{p} \end{aligned} \right| = \\ \frac{2S_0}{\sqrt{\pi D}} \left(-\frac{1}{p} e^{-x^2 p^2/4D} \Big|_{1/\sqrt{t}}^{\infty} - \int_{1/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{x^2}{2D} e^{-x^2 p^2/4D} dp \right) &= \left. \begin{aligned} \frac{xp}{\sqrt{2D}} &= q; dp = \frac{\sqrt{2D}q}{x} \\ p &= \frac{1}{\sqrt{t}}; q = \frac{x}{\sqrt{2Dt}} \\ p &= \infty; q = \infty \end{aligned} \right| = \\ \frac{2S_0}{\sqrt{\pi D}} \left(\sqrt{t} e^{-x^2/4Dt} - \frac{x}{\sqrt{2D}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2Dt}}}^{\infty} e^{-\frac{q^2}{2}} dq \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2S_0}{\sqrt{\pi D}} \left(\sqrt{t} e^{-x^2/4Dt} - \frac{x}{\sqrt{2D}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{q^2}{2}} dq - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2Dt}}} e^{-\frac{q^2}{2}} dq \right) \right) = \\
& \frac{2S_0}{\sqrt{\pi D}} \left(\sqrt{t} e^{-x^2/4Dt} - \frac{x}{\sqrt{2D}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right) \right) \right) = \\
& 2S_0 \sqrt{\frac{t}{\pi D}} e^{-x^2/4Dt} - \frac{S_0 x}{D} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right) \right),
\end{aligned}$$

де Φ – інтеграл ймовірностей. Зокрема в точці $x = 0$

$$\rho(0) = 2S_0 \sqrt{\frac{t}{\pi D}}.$$

Необмежене зростання густини при $t \rightarrow \infty$ пояснюється тим, що надходження частинок у систему пропорційне часу, а їхній середній пробіг пропорційний $\sqrt{t}$, отже частинки не встигають розходитися.

Для точкового джерела постійної інтенсивності на площині густина також необмежено зростає при $t \rightarrow \infty$. Для джерела інтенсивності S_0 у просторі, розташованому на початку координат, розподіл густини при $t \rightarrow \infty$ прямує до стаціонарного $\rho = \frac{S_0}{4\pi Dr}$, де r - довжина радіуса-вектора.

При цьому маса середовища в кожній скінченій області простору залишається скінченою, а загальна маса необмежено зростає з часом: $M = S_0(t - t_0)$.

Застосування методу Фур'є до задач з народженням частинок

Розглянемо неоднорідне рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + S(x, t) \quad (3.68)$$

на відрізку $0 \leq x \leq l$ при однорідних граничних умовах $\rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0$. Для спрощення обмежимося початковою умовою $\rho|_{t=0} = 0$.

Ідея методу полягає в розкладенні всіх функцій, що входять до рівняння, в ряд за системою власних функцій, які відповідають однорідному рівнянню.

При розв'язанні задачі для однорідного рівняння було показано, що власними є функції $\sin \frac{m\pi}{l} x$ ($m=1,2,3\dots$). Таким чином, слід скористатися рядом

$$S(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad (3.69)$$

в якому коефіцієнти є заданими функціями

$$S_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l S(x,t) \sin \frac{m\pi}{l} x dx, \quad (3.70)$$

а також рядом

$$\rho(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad (3.71)$$

коефіцієнти R_m в якому слід визначити.

Підставляємо розклади (3.69) і (3.71) у рівняння (3.68) та урівнюємо коефіцієнти при однакових власних функціях. Приходимо до звичайних диференціальних рівнянь:

$$R'_m(t) = -\frac{Dm^2\pi^2}{l^2} R_m(t) + S_m(t).$$

Позначимо $\lambda_m = \frac{Dm^2\pi^2}{l^2}$.

$$R'_m(t) = -\lambda_m R_m(t) + S_m(t). \quad (3.72)$$

Коефіцієнти як функції t повинні задовольняти ці рівняння.

Задоволення граничних умов забезпечено самою структурою формули (3.71); початкова умова, згідно (3.71) означає, що всі $R_m(0)=0$. Тому потрібно знайти розв'язок (3.72), який відповідає нульовій початковій умові.

Розв'язок рівнянь такого типу відомий. Його можна бути знайти, наприклад, методом варіації довільної сталої:

1. Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$R'_m(t) = -\lambda_m R_m(t).$$

$$\ln R_m = -\lambda_m t + \ln C(t); \quad R_m = C(t)e^{-\lambda_m t}.$$

Підставляємо в рівняння (1.13.5) і отримуємо $C'e^{-\lambda_m t} = S_m$. Звідки

$$C = \int_0^t S_m e^{\lambda_m \tau} d\tau.$$

Відповідно

$$R_m(t) = \int_0^t S_m e^{-\lambda_m(t-\tau)} d\tau. \quad (3.73)$$

Приклад. Визначимо $\rho(x, t)$, якщо частинки надходять до відрізка з постійною інтенсивністю, тобто $S(x, t) \equiv S_0 = \text{const}$. Тоді

$$S_m = \frac{2}{l} S_0 \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{m\pi} (1 - \cos m\pi) S_0 = \frac{2}{m\pi} (1 - (-1)^m) S_0.$$

Відповідно, згідно з (3.73) з урахуванням виразу для $\lambda_m = \frac{Dm^2 \pi^2}{l^2}$ отримуємо

$$R_m = \frac{2}{m\pi} (1 - (-1)^m) S_0 \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} d\tau = \frac{2}{m\pi} (1 - (-1)^m) S_0 \frac{l^2}{Dm^2 \pi^2} (1 - e^{-\lambda_m t}).$$

За формулою (3.71)

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{2l^2 S_0}{D\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} (1 - (-1)^m) S_0 (1 - e^{-\lambda_m t}) \sin \frac{m\pi}{l} x = \\ &= \frac{4l^2 S_0}{D\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} (1 - e^{-\lambda_{2k-1} t}) \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (3.74)$$

З (3.74) можна отримати асимптотичну поведінку густини при $t \rightarrow \infty$:

$$\rho(x, \infty) = \frac{4l^2 S_0}{D\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x. \quad (3.75)$$

Можна показати, що формула (3.75) є розкладом функції $\frac{S_0}{2D} x(l-x)$ в ряд Фур'є по власних функціях. Але до цього можна прийти інакше: якщо народження частинок є стаціонарним, тобто не залежить від часу, то внаслідок процесу встановлення, тобто граничного переходу при $t \rightarrow \infty$ із нестаціонарного розподілу густини отримуємо стаціонарне, яке повинно задовольняти граничну форму рівняння (3.68)

$$D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + S(x) = 0 \quad (3.76)$$

і поставлені граничні умови. Це дозволяє отримати граничний закон для нестационарного розподілу без його безпосереднього дослідження через розв'язання граничної стаціонарної задачі.

Приклад. В останньому прикладі граничний розподіл густини $\rho|_{t=\infty}$ повинен відповідати такому рівнянню і крайовим умовам:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\frac{1}{D} S_0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad \rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0.$$

Інтегруємо двічі і підбираємо постійні інтегрування за граничними умовами.

$$\frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{D} S_0 x + C_1; \quad d\rho = -\frac{1}{D} S_0 x dx + C_1 dx;$$

$$\rho = -\frac{S_0}{2D} x^2 + C_1 x + C_2;$$

$$\rho(0) = C_2 = 0; \quad \rho(l) = -\frac{S_0}{2D} l^2 + C_1 l = 0; \quad C_1 = \frac{S_0 l}{2D}.$$

$$\rho(x) = -\frac{S_0}{2D} x^2 + \frac{S_0 l}{2D} x;$$

$$\rho(x) = \frac{S_0}{2D} x(l - x).$$

У розгляді дифузії з народженням частинок у просторі аналогом рівняння (3.68) буде $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho + S(r, t)$, а аналогом рівняння для стаціонарного розподілу – рівняння Пуассона $\nabla^2 \rho = -\frac{1}{D} S(r)$. При розв'язанні його в обмеженій області (Ω) повинні задаватися крайові умови, наприклад,

$$\varphi(p) = \rho(p)|_{p \text{ на } (S)},$$

або

$$\Psi(P) = D \frac{d\rho}{dn} \Big|_{P \text{ на } (S)}.$$

При цьому в останньому випадку для граничної умови повинно виконуватися рівняння балансу $\int_{(\Omega)} S d\Omega + \int_{(s)} \Psi ds = 0$, а розв'язок визначається з точністю до сталого доданку.

3.11 Аномальна дифузія та фракційна кінетика

Складні системи, де реалізуються ідеї детермінованого хаосу і фрактальної геометрії, неможливо описати простими диференціальними рівняннями, тому виникає потреба у нових, відмінних від стандартного статистичного аналізу методах дослідження станів складних систем.

Останнім часом особливий інтерес привертають нелінійні динамічні системи. Їх привабливість зумовлена тим, що закономірності таких систем стають базовими для встановлення сутності широкого кола явищ, охоплюючи не тільки фізичні, але і хімічні, геофізичні, біологічні, соціально-економічні системи.

Проникнення ідей фрактальної геометрії в природознавство сформуло нову концепцію **фракталів**. Особливий інтерес в концепції фрактала становить аналітичний підхід, заснований на використанні математичного апарату дрібного інтегродиференціювання, в рамках якого вдається не тільки відтворити відомі, але і отримати принципово нові результати.

Субдифузія і супердифузія

Дробові та фрактальні обчислення (тобто, обчислення похідних і інтегралів довільного дійсного або комплексного порядку) виявилися важливим інструментом для багатьох наукових царин. Ця теорія дозволяє розв'язувати аналітично та чисельно фракційні диференціальні рівняння та фракційні диференціальні рівняння у частинних похідних, які можуть описати складні системи. Зокрема, вона використовується у розгляді аномальних дифузійних процесів.

Останнє явище може бути описано зі статистичної точки зору. Дійсно, в різних складних систем, дифузійні процеси, як правило, перестають бути гаусовими за статистикою, і, таким чином, другий закон Фіка не описує відповідним чином поведінку процесу переносу. Зокрема, спостерігаються відхилення від лінійної залежності середнього квадрата зміщення що характерно для броунівського руху, процес не узгоджується з центральною граничною теоремою і є немарковський за своїм характером.

Аномальна дифузія виявляється в широкому розмаїтті систем, й її особливістю є нелінійне зростання середнього квадрата зміщення у часі, тобто відмінність показника степені t від 1:

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^\gamma \quad (3.77)$$

Така залежність є характерною для багатьох систем, але можливий й інший характер залежності від часу, наприклад, логаритмічний. Аномальна дифузія, як показує рівняння, пов'язана з порушенням центральної граничної теореми, спричиненим або широкими розподілами, або далекими кореляціями, що, наприклад, є типовим для самоорганізації систем поблизу критичної точки. Замість цього аномальна дифузія ґрунтується на справедливості загальної центральної граничної теореми Леві – Гнеденко. Зокрема, широкі просторові стрибки або розподіл часу очікування призводять до негаусового розподілу і немарковської часової еволюції системи.

Аномальна дифузія відома з трактату Річардсона про турбулентну дифузію в 1926 році, і сьогодні перелік систем з аномальною динамічною поведінкою досить великий. Наведемо лише деякі приклади: перенесення носіїв заряду в аморфних напівпровідниках, пористі системи, транспорт при фрактальній геометрії й т. ін.

У цьому випадку дробове обчислення використовується для загальнення лінійного рівняння Фоккера-Планка, справедливого для процесів, які характеризуються співвідношенням:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \nabla^2 P(x, t), \quad (3.78)$$

де $P(x, t)$ - густина ймовірності у просторі $x = [x_1, x_2, x_3]$ і часі t , а $D > 0$ - коефіцієнт дифузії. Прикладом узагальнення рівняння (3.77) є рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \nabla^\alpha P^\beta(x, t), \quad -\infty < \alpha \leq 2, \quad \beta > -1,$$

де $\nabla^\alpha P^\beta(x, t)$ являють собою дробові похідні Лапласіана $\sum_i (\partial^\alpha / \partial x^\alpha)_i$ ($i = 1, 2, 3$), від нелінійного члена $P^\beta(x, t)$. Інша загальнена форма зображена рівнянням, яке враховує також дробову похідну за часом. Ці дрібно-описані процеси демонструють статистичний закон, виражений рівнянням (3.77).

В теорії турбулентності зазвичай розглядають дивні процеси переносу з показником μ (інваріантний параметр, що характеризує топологію порожнин), який лежить в межах від 0 до 2. При $0 \leq \mu \leq 1$ кажуть про

субдифузійний процес перенесення, а при $1 < \mu \leq 2$ - про супердифузійний процес. Введено також поняття супербалістичного процесу, відповідного умові $\mu > 2$. Супербалістичні процеси припускають прискорення частинок вздовж траєкторій. Поряд із параметром μ в літературі часто вико-
 ристовують так званий показник Херста H , пов'язаний з μ співвідношенням: $\mu = 2H$. Легко побачити, що субдифузійні процеси відповідають значенням $0 \leq H \leq \frac{1}{2}$, а супердифузійні – значенням $\frac{1}{2} \leq H \leq 1$. Величина H визначає фрактальну розмірність траєкторій частинок в області турбулентности:

$$d_w = \frac{1}{H}, \quad d_w \geq 1$$

3.12 Моделювання процесів дифузії в задачах довкілля. Приклади

Опис міграції домішок у системах зі складною морфологією за допомогою рівняння дифузії є складною задачею, яка не завжди допускає аналітичні розв'язки. Іноді моделювання процесів, що відбуваються у таких системах, є кроком, який значно спрощує розв'язання подібних задач.

Розглянемо кілька прикладів вдалого моделювання процесу дифузії у складних системах.

А. Моделювання процесу дифузії в відтинково-неперервних неоднорідних середовищах

Дифузія при паралельній морфології каналів

Розглянемо модель, в якій механізм дифузії домішок реалізується в пористих шаруватих системах, в яких прошарки речовин розташовані всюди паралельно напрямку головного потоку. Такий розподіл може бути притаманним середовищам з усталеною неоднорідною структурою, які пронизують всю товщу зразка (великі прошарки чужорідних фаз, великі пори, границі зернини та дислокації), якщо всі вони являють собою взаємно переплетені та взаємонезалежні сітки каналів по яких можлива незалежна міграція гамма-радіонуклідів. Той же механізм часто використовується в методі, так званій, термодесорбційній спектроскопії, коли визволення адсорбенту з потенціалу поверхні – різних типів потенційних ям, розташованих на поверхні відбувається одночасно. Механізм звичайної паралельної дифузії зустрічається також в режимі газопроникності мембран змінної товщини для гранульованих матеріалів. Якщо реалізується випадок, коли частинка (нуклід) зонду цього матеріалу, що потрапив випадково в один з

транспортних каналів, не спроможний надалі перейти до іншого каналу, то кінетика встановлення потоку газу крізь мембрану може бути зображена сумою елементарних потоків J_i по кожному з каналів за формулою:

$$J = J_1 + J_2 + \dots = \sum_{i=1}^n J_i$$

або

$$S \frac{D_f \Gamma}{L} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i \Gamma_i}{l_i} S_i$$

де S площа поверхні i -ї трубки струму на поверхні мембрани (повна поверхня мембрани $S = \sum s_i$). Зазвичай вважають, що $l_i = L$, тоді:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n D_i \Gamma_i \Phi_i$$

де n – кількість дифузійних каналів. Розчинність $\Gamma = \sum \Gamma_i \Phi_i$.

Нестаціонарні режими дифузії задовольняють системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} \\ \dots \\ \frac{\partial C_n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 C_n}{\partial x^2} \end{cases}$$

за відповідних початкових та крайових умов для багатоканальної моделі середовища.

Можна ввести характерний параметр — час запізнення внаслідок обмеження дифузійної проникності:

$$\frac{1}{\tau_{зан.}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_{зан.i}}$$

Наприклад, для двошарового модуля ця величина має вигляд:

$$\tau_{зан.} = \frac{L^2}{6(D_1 \Phi_1 + D_2 \Phi_2)}$$

Загальна формула для визначення параметра τ процесу паралельної дифузії має вигляд:

$$\frac{1}{\tau_{зан.}} = \frac{1}{\tau_{зан.1}} + \frac{1}{\tau_{зан.2}} = \frac{6D_1\Phi_1}{L_1} + \frac{6D_2\Phi_2}{L_2}$$

тоді:

$$\frac{1}{\tau_{зан.}} = \frac{6D_1\Phi_1L_2 + 6D_2\Phi_2L_1}{L_1L_2}$$

а також:

$$\tau_{зан.пар.} = \frac{L_1L_2}{6(D_1\Phi_1L_2 + D_2\Phi_2L_1)}$$

Можна показати, що цей параметр для двошарового модуля гранульованих матеріалів, у випадку послідовної морфології має вигляд:

$$\tau_{зан.посл.} = \frac{\frac{L_1^2}{D_1} \left(\frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{L_2^2}{D_2} \left(\frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}}$$

Загальна формула, за якою визначається час запізнення при комбінації паралельної та послідовної морфології каналів:

$$\tau_{зан.1} + \tau_{зан.2} = \frac{L_1L_2}{6(D_1\Phi_1L_2 + D_2\Phi_2L_1)} + \frac{\frac{L_1^2}{D_1} \left(\frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{L_2^2}{D_2} \left(\frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}}$$

Дифузія за послідовної морфології каналів

Механізм послідовної дифузії зонда реалізуватиметься в шаруватих системах гранульованих матеріалів, в яких шари розташовані перпендикулярно напрямку головного потоку радіонуклідів. Процеси розчинення та дифузії в багатошарових системах подібного типу за припущення, що розчинення зонда в кожному шарі, наприклад, у випадку газів можуть бути описані за допомогою класичного закону Генрі, в якому відношення концентрацій на межі шарів дорівнює відношенню констант розчинення зонда в речовинах суміжних шарів, а на вхідний і вихідний поверхнях шаруватого зразка, виконуються крайові умови 1-го роду. За вищеза-

значених припущеннях для послідовної дифузії, «прохід» радіонуклідів крізь багат шарову систему каналів гранульованих матеріалів, що складається з m різних шарів, можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{J_{cm}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{J_i} = \sum_{i=1}^m \frac{l_i}{D_i \Gamma_i}$$

де Γ_i та D_i є коефіцієнт Генрі та коефіцієнт дифузії в кожному шарі, а L_i – товщина конкретного шару. Товщина збірної мембрани дорівнює:

$$L = \sum_{i=1}^m l_i$$

Константа проникнення крізь шари мембрани $P = J_{ст}/p_0$ пов'язана парціальними константами проникнення шарів співвідношенням:

$$\frac{L}{P} = \frac{l_1}{P_1} + \frac{l_2}{P_2} + \dots$$

або:

$$\frac{1}{P} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{l_i}{P_i}}{L}$$

а константа розчинності дорівнює:

$$\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^m l_i \Gamma_i}{\sum_{i=1}^m l_i}$$

Для опису процесу нестационарного проникнення зонда гранульованих матеріалів крізь шарувату мембрану потрібно розв'язати рівняння:

$$D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} = \frac{\partial C_i}{\partial t}$$

за звичайних крайових умов: $C_i(x, t=0) = 0$ при $l_{i-1} \leq x \leq L_m$

$$D_i \frac{\partial C_i(t)}{\partial x} = D_{i+1} \frac{\partial C_{i+1}(t)}{\partial x}, \quad x = L_i$$

$$C_1(x=0, t) = \Gamma_1 P_0; \quad C_m(x=L, t) = 0$$

$$\frac{C_i(t)}{C_{i+1}(t)} = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{i+1}}, \quad x = l_i$$

Для сегменту з трьох шарів можна отримати:

$$\begin{aligned} \tau_{зан.} = & \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left(\frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{2\Gamma_3 D_3} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left(\frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{2\Gamma_3 D_3} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{\Gamma_3 D_3}} + \\ & + \frac{\frac{l_3^2}{D_3} \left(\frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{6\Gamma_3 D_3} \right) + \left(\frac{\Gamma_1 l_1 l_2 l_3}{D_1 D_3 \Gamma_1 \Gamma_3} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2} + \frac{l_3}{\Gamma_3 D_3}} \end{aligned}$$

Зауважимо, що час запізнення не залежить від зміни шарів 1 та 3, тобто від напрямку дифузійного струму радіонуклідів, але істотно змінюється за умови зміни шарів 1 та 2 або 2 та 3. Величини стаціонарного струму зонда крізь мембрану та константи проникнення не залежать від переміщення шарів. Ефективний коефіцієнт дифузії, наприклад, для складової тришарової мембрани дорівнює:

$$D_{ef} = \frac{L^2}{6\tau_{зан}}$$

У випадку шаруватої системи константа розчинності зонда, що визначена за формулою $\Gamma = \frac{P}{D_{ef}}$, не буде співпадати зі значенням константи розчинності, яка одержана завдяки чисельним рівноважним сорбційним експериментам. Ця обставина дозволяє однозначно відокремлювати шарувате середовище від однорідного середовища. Завдяки цьому час запізнення для двошарової мембрани складає:

$$\tau_{зан.} = \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left(\frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left(\frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}}$$

Із симетрії цієї формули випливає, що величина часу запізнення не залежить від напрямку потоку. Для тонкого шару 1, нанесеного на підкладку 2, $\tau_{\text{зап}}$ прагне до $\tau_{\text{зап}2}$ при досить великих коефіцієнтах дифузії і розчинності зонда в шарі 1. Якщо ж розчинність зонда в шарі 1 мала, то $\tau_{\text{зап}}$ двошарової мембрани суттєво зростає порівняно з $\tau_{\text{зап}2}$, прямуючи до значення $3\tau_{\text{зап}2}\Gamma_2\Gamma_1 \rightarrow 0$ або $D_2D\Gamma_1 \rightarrow 0$.

У разі багатошарового композиту гранульованих матеріалів типу 121212... значення для часу запізнювання набуває вигляду:

$$\tau_{\text{зап},n} = \frac{\xi_1 D_2 + K_1 \xi_2 D_2}{6D_1 D_2} \left(\xi_1 + \frac{\xi_2}{K_1} \right) l^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{l^2}{n^2} \left[\frac{\xi_1^3 D_2^2 + K_1 \xi_2^3 D_1^2 + 3\xi_1 \xi_2 D_1 D_2 (K_1 \xi_1 + \xi_2)}{6D_1 D_2 (\xi_1 D_2 + K_1 \xi_2 D_1)} \right]$$

де n - число пар шарів типу 12. Якщо $n = 1$, то:

$$\tau_{\text{зап},n} = \frac{l^2}{6} \left[\frac{\xi_1^3 D_2^2 + K_1 \xi_2^3 D_1^2 + 3\xi_1 \xi_2 D_1 D_2 (K_1 \xi_1 + \xi_2)}{D_1 D_2 (\xi_1 D_2 + K_1 \xi_2 D_1)} \right]$$

Таким чином:

$$\tau_{\text{зап}} = \tau_{L\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \tau_{\text{зап},n} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Подальший аналіз може включати в себе конструювання дифузійних мембран гранульованих матеріалів складного типу з декоруванням шарів та досягненням таким чином якісних дросельних властивостей і т. ін.

Загальна формула, за якою визначається час запізнювання при комбінації паралельної та послідовної морфології каналів:

$$\tau_{\text{зап},1} + \tau_{\text{зап},2} = \frac{L_1 L_2}{6(D_1 \Phi_1 \cdot L_2 + D_2 \Phi_2 \cdot L_1)} + \frac{\frac{l_1^2}{D_1} \left(\frac{l_1}{6\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{2\Gamma_2 D_2} \right) + \frac{l_2^2}{D_2} \left(\frac{l_1}{2\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{6\Gamma_2 D_2} \right)}{\frac{l_1}{\Gamma_1 D_1} + \frac{l_2}{\Gamma_2 D_2}}$$

Вона враховує хаотичність морфології прохідних каналів, яка властива всім типам гранульованих матриць.

Дифузія в однорідному середовищі з окремими великими включеннями простої форми

Розглянемо процес дифузії зонда в однорідному середовищі гранульованих матеріалів, що містить окремі включення простої форми. У цьому випадку виникає задача обтікання дифузійним струмом окремої перепони. Як приклад розглянемо круглий нескінченний циліндр радіусу r_0 з речовини з коефіцієнтом дифузії D_1 і константою розчинності Γ_2 , що знаходиться в нескінченному однорідному середовищі з коефіцієнтом дифузії і константою розчинності Γ_1 , крізь яку проходить стаціонарний дифузійний потік (вісь циліндра спрямована перпендикулярно потоку). Розв'язок будемо шукати в циліндричній системі координат зі стандартними умовами на межі включення і середовища, яке його вміщує. Записуємо рівняння Лапласа у вигляді:

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_2}{\partial \varphi^2} \right\} = 0 .$$

Вважаємо, що на нескінченності поле концентрації однорідне і $C(0) \neq \infty$. Нехай C_i – концентрація зонда в «ідеальному» середовищі з коефіцієнтом дифузії D_1 . Розподіл концентрації зонда в просторі поза циліндром:

$$C_1 = C_i(x) + C_1^*(r);$$

всередині циліндру:

$$C_2 = C_i(x) + C_2^*(r),$$

де $C_1^*(r)$ і $C_2^*(r)$ визначають спотворювальну дію включення.

Збурення концентрації матеріалів поза циліндром має вигляд:

$$C_1^* = -\frac{j}{D_1} r \cos \varphi \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \cdot \frac{KD_2 - D_1}{D_1 + KD_2} \right) = C_i \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \right),$$

де $\nu = KD_2/D_1$.

Збурення концентрації матеріалу всередині циліндра:

$$C_1^* = -\frac{j}{D_1} \cdot \frac{KD_1}{D_1 + D_2 K} r \cos \varphi = C_i \frac{2K}{1 + \nu}$$

Якщо включення однорідної фази є не проникливим для зонда, то:

$$C_1 = C_i \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

З останнього виразу випливає, що циліндричне включення на 5% спотворює розподіл концентрації зонда на відстані, яка в 2,5 рази перевищує його діаметр.

Аналогічно для включення у формі кулі керівне рівняння

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = D_2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_2}{\partial r} \right) \right\}$$

з крайовими умовами

$$C_2 = KC_1 \Big|_{r=r_0, \varphi=\nu\alpha}, \quad D_1 \left(\frac{dC_1}{dr} \right)_{r=r_0} = D_2 \left(\frac{dC_2}{dr} \right)_{r=r_0}$$

дає відповідні збурення концентрації:

$$C_1^*(r, \varphi) = -\frac{j}{D_1} r \cos \varphi \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \cdot \frac{KD_2 - D_1}{2D_1 + KD_2} \right)$$

$$C_1^*(r, \varphi) = -\frac{j}{D_1} r \cos \varphi \left(1 - \frac{KD_2 - D_1}{2D_1 + KD_2} \right) = C_i \frac{3K}{2 + \nu} = C_1 K_\alpha$$

де α – параметр форми (в даному випадку – для кулі).

У випадку газової дифузії стаціонарний розподіл концентрації зонда по товщині мембрани, що містить окреме включення у формі кулі, центр якої розташовується на глибині h від вхідної поверхні мембрани, визначається такими формулами:

$$C_1^* = C_0 \left[1 - \frac{x}{L} + \frac{1}{L} \left(\frac{r_0^3}{r^3} \frac{KD_2 - D_1}{2D_1 + KD_2} \right) (x - h) \right]$$

$$C_1^* = C_0 \left[1 - \frac{x}{L} + \frac{1}{L} \left(\frac{KD_2 - D_1}{2D_1 + KD_2} \right) (x - h) \right]$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2 + h^2 - 2hx)^{1/2}$$

Дифузія в макронеоднорідних дисперсійних середовищах

Модель дифузії в дисперсійних середовищах враховує вплив геометричної форми і розмірів дефектів на процеси масопереносу. Під дефектами в широкому сенсі звичайно розуміють будь-які неоднорідності

структури матеріалу: газові бульбашки, включення сторонніх фаз, наповнювачі, каверни і тріщини.

Розглянемо дифузію в розведеній суміші включень простої форми (куля, сфероїд, циліндр. і т. і.), розміри яких більше довжини дифузійної хвилі, але все ж істотно менше товщини зразка. Будемо припускати, що на межі дефекту існує локальна рівновага, а дифузія зонда сферично симетрична.

Система рівнянь для дифузії в пластині товщиною L , що містить включення сферичної форми радіуса r_0 , має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_1}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - 4\pi r_0^2 n_2 D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial r} \right)_{r=r_0} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= D_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial C_2}{\partial r} \right)_{r=r_0}\end{aligned}$$

$$C_2 = K C_1$$

де C_1 , C_2 – концентрації зонда в матриці і у включенні; D_1 , D_2 – коефіцієнти дифузії в дисперсійному середовищі і в дисперсній фазі відповідно; K – локальна розчинність у включенні (відношення константи розчинності зонда в "дефектній" області до константи розчинності в матриці); n_2 – густина включень.

У такому випадку кінетика газопроникності описується формулою:

$$J(t) = \frac{C_0 D_1 S}{L} \left\{ 1 + \frac{4\pi^2}{K\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(-1)^m \exp(-\Omega \xi_{mn}^2 \tau)}{\xi_{mn}^2 \left[\frac{\Omega}{K\beta} + 1 + \text{ctg}^2 \xi_{mn} - \left(1 - \frac{m^2 \pi^2}{K\beta} \right) \frac{1}{\xi_{mn}^2} \right]} \right\}$$

де ξ_{mn} – визначається розв'язком рівняння:

$$\Omega \xi_{mn}^2 + K\beta(1 - \xi_{mn} \text{ctg} \xi_{mn}) = n^2 m^2$$

$$\Omega = \frac{D_2 L^2}{D_1 r_0^2}$$

Тут $\beta = \frac{\delta D_2 L^2}{D_1 r_0} = \varepsilon \Omega$, $\delta = 4\pi r_0^2 n_2$, $\varepsilon = \frac{V_{вкл}}{V_{обр}}$ – об'ємна доля включень,

$$V_{обр} = SL, \tau = \frac{D_1 t}{L^2}.$$

Вищенаведений вираз має завеликий вигляд: він містить подвійну суму, причому для визначення деяких декрементів згасання потрібно розв'язати трансцендентне рівняння першого порядку. Тому, скажімо, для обробки результатів експериментів зручніше скористатися методом параметричних моментів. Наприклад, у випадку плоскої мембрани:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{T}{6} \\ \mu_2 &= \frac{7T^2}{180} + \frac{TT_2K^*}{9(1+K^*)} \\ \mu_3 &= \frac{31T^3}{2520} + \frac{7T^2T_2K^*}{90(1+K^*)} + \frac{2TT_2^2K^*}{15(1+K^*)}\end{aligned}$$

Якщо включення являють собою циліндри радіуса r_0 з непроникними торцями, то:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{T}{6} \\ \mu_2 &= \frac{7T^2}{180} + \frac{TT_2K^*}{24(1+K^*)} \\ \mu_3 &= \frac{31T^3}{2520} + \frac{7T^2T_2K^*}{240(1+K^*)} + \frac{2TT_2^2K^*}{48(1+K^*)}\end{aligned}$$

Знаючи товщину матеріалу мембрани і вимірявши три перших моменти від проникності шарів, можна знайти параметри D_1 , K^* та T_2 . Для визначення радіусу включення r_0 та коефіцієнта дифузії в ньому D_2 якусь з цих величин потрібно отримати в альтернативний спосіб, скажімо, в експериментах. Відзначимо, що значення першого моменту не залежить ані від розмірів, ані від геометрії включення. У формулі для другого моменту геометричний фактор формально з'являється, але фактично відіграє роль константи K . Тому перші два моменти розглянутої моделі співпадають з отриманими для моделі дифузії з тимчасовим утриманням. Лише вищі моменти завжди залежать від форми включення. Для розрахунку D_1 та D_2 за методом моментів доводиться використовувати вищі моменти, обтяжені великими статистичними похибками, або проводити зміни на зразках різної товщини.

Аналогічний спосіб зможе бути застосований і для опису газопроникності матеріалу мембран, що містять включення різної форми. Наприклад, якщо включення являють собою пластини товщиною L (циліндри або призми з непроникною бічною поверхнею), то:

$$\mu_1 = \frac{T}{6}$$

$$\mu_2 = \frac{7T^2}{180} + \frac{TT_2K^*}{9(1+K^*)}$$

$$\mu_3 = \frac{31T^3}{2520} + \frac{7T^2T_2K^*}{90(1+K^*)} + \frac{2TT_2^2K^*}{15(1+K^*)}$$

Якщо включення являють собою циліндри радіуса r_0 з непроникними торцями, то:

$$\mu_1 = \frac{T}{6}$$

$$\mu_2 = \frac{7T^2}{180} + \frac{TT_2K^*}{24(1+K^*)}$$

$$\mu_3 = \frac{31T^3}{2520} + \frac{7T^2T_2K^*}{240(1+K^*)} + \frac{2TT_2^2K^*}{48(1+K^*)}$$

Як випливає з наведених виразів, геометрична форма включень відіграє роль, починаючи з другого моменту.

Б. Дифузійна модель міграції радіонуклідів у ґрунті

Розглядаємо систему з радіонуклідом та сухого ґрунту у вигляді дрібнодисперсних частинок, на яких можуть адсорбуватися радіонукліди. Передбачається відсутність конвективного переносу та інших процесів, пов'язаних з потоками вологи.

Міграцію радіонукліда і найдрібніших гранул по вертикалі (вісь OX) опишемо системою двох взаємопов'язаних дифузійних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = D_1 n_{1xx}'' + k_1 n_2 (1 - n_1) \end{cases} \quad (3.79)$$

$$\begin{cases} \dot{n}_2 = D_2 n_{2xx}'' - k_2 n_1 - \frac{1}{\tau} n_2 \end{cases} \quad (3.80)$$

Тут n_1 і n_2 - концентрації “забруднених” радіонуклідом гранул і радіонукліда відповідно; D_1 і D_2 - відповідні “ефективні” коефіцієнти дифузії двох компонент; k_1 і k_2 - пов'язані між собою коефіцієнти, що враховують вірогідність зачеплення радіонукліда за гранулу при зустрічі.

Член $k_1 n_2 (1 - n_1)$ рівняння (3.79) описує "розмноження" забруднених гранул за рахунок осідання радіонукліда на "чистих" гранулах і пропорційний їхній концентрації $(1 - n_1)$ і концентрації радіонукліда n_2 .

Спад вільних радіонуклідів за рахунок осідання на гранулах враховує член $-k_2 n_1$ рівняння (3.80). Останній член рівняння (3.80) описує спад концентрації радіонукліда за рахунок радіоактивного розпаду і може бути відкинутий для радіонуклідів з великим середнім часом життя τ .

У теорії сингулярних збурень показано, що при $D_1 \ll D_2$ в подібній системі можуть виникати контрастні просторові структури, що характеризуються поєднанням ділянок плавної і різкої зміни концентрації n_1 (рис. 3.11).

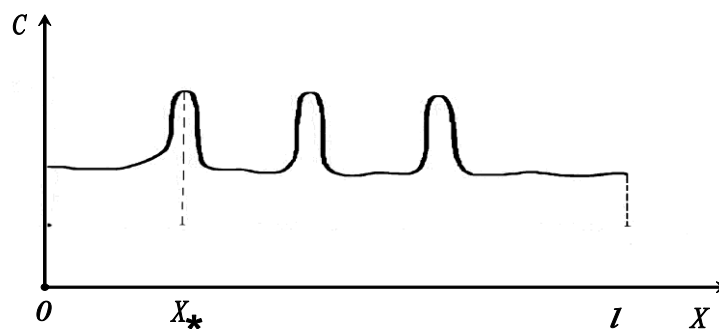


Рис. 3.11

Такі структури описуються відповідною стаціонарною системою, яку, вважаючи $D_1 = \mu^2$ ($\mu > 0$ - малий параметр), запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \mu^2 n_{1xx}'' + k_1 n_2 (1 - n_1) = 0 & (3.81) \\ D_2 n_{2xx}'' - k_2 n_1 = 0 & (3.82) \end{cases}$$

Систему рівнянь розглядаємо на відрізку $0 \leq x \leq l$ (l - глибина проникнення радіонукліда) з крайовими умовами:

$$n_2(l) = 1; \quad (3.83 \text{ а})$$

$$n_2(l) = 0; \quad (3.83 \text{ б})$$

$$n_1(0) = 1, \quad (3.84)$$

де передбачається, що зменшення радіонукліда на поверхні поповнюється постійно діючим джерелом, а усі гранули на поверхні "забруднені" радіонуклідами.

$$\begin{cases} \frac{\mu^2}{k_1} n_{1xx}'' + n_2(1 - n_1) = 0 \\ \frac{D_2}{k_1} n_{2xx}'' - k n_1 = 0, \end{cases}$$

де $k = \frac{k_2}{k_1}$.

Після введення нової змінної $y = x \sqrt{\frac{k_1}{D_2}}$, рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\mu^2}{D_2} n_1'' + n_2(1 - n_1) = 0 \\ n_2'' - k n_1 = 0, \end{cases}$$

де

$$n_1'' = n_{1yy}'' = \frac{k_1}{D_2} n_{xx}'';$$

$$n_2'' = n_{2yy}'' = \frac{k_1}{D_2} n_{xx}''.$$

Після введення позначення

$$\frac{\mu^2}{D_2} = \tilde{\mu}^2 \quad (3.85)$$

рівняння можуть бути записані у вигляді

$$\tilde{\mu}^2 n_1'' + n_2(1 - n_1) = 0; \quad (3.86)$$

$$n_2'' - k n_1 = 0, \quad (3.87)$$

де крайові умови слід розглядати на відрізку $y = \left[0, \tilde{l} = l \sqrt{\frac{k}{D_2}}\right]$, тобто $y(\tilde{l}) = 0$.

Отриману систему диференціальних рівнянь другого порядку (3.86), (3.87) розв'язуємо методом послідовних наближень. У нульовому набли-

женні з урахуванням малости коефіцієнта $\tilde{\mu}^2$ ($\tilde{\mu}^2 \ll 1$) рівняння (3.86) на-
бирає вигляду:

$$n_2(1 - n_1) = 0.$$

Звідки витікає, що $n_1^0 = 1$.

Підставимо значення n_1^0 у рівняння (3.86). У нульовому наближенні

$$n_2^{0''} - kn_1^0 = 0,$$

тобто

$$n_2^{0''} = k.$$

Інтегруванням останнього рівняння двічі по y знаходимо:

$$n_2^{0'} = k(y + C_1)$$

і

$$n_2^0 = k \left(\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_0 \right). \quad (3.88)$$

Сталі C_1 і C_0 знаходимо з крайових умов (3.83) для концентрації
радіонукліда. З умови $n_2(0) = 1$ випливає, що

$$C_0 = \frac{1}{k}. \quad (3.89)$$

При $y = \tilde{l}$

$$n_2^0(\tilde{l}) = k \left(\frac{\tilde{l}^2}{2} + C_1 \tilde{l} + \frac{1}{k} \right) = 0$$

і

$$C_1 = - \frac{\left(1 + \frac{k\tilde{l}^2}{2} \right)}{k\tilde{l}}. \quad (3.90)$$

Підставивши значення констант інтегрування у рівняння (3.88),
знаходимо у нульовому наближенні залежність концентрації n_2 радіо-
нукліда від відстані до джерела:

$$n_2^0(y) = \frac{k}{2} y^2 - \frac{1}{\tilde{l}} \left(1 + \frac{k\tilde{l}^2}{2} \right) y + 1, \quad (3.91)$$

тобто концентрація радіонукліда зменшується з відстанню за параболічним законом.

Для визначення (у першому наближенні) концентрації “забруднених” гранул заздалегідь перетворимо вираз (3.10) для n_2^0 :

$$n_2^0 = \frac{k}{2} \left[(y + C_1)^2 + 2C_0 - C_1 \right].$$

Позначимо $\tilde{y} = y + C_1$; $\gamma^2 = C_1^2 - 2C_0$. Тоді

$$n_2^0 = \frac{k}{2} (\tilde{y}^2 - \gamma^2). \quad (3.92)$$

Підставивши (3.92) у рівняння (3.86), отримуємо у першому наближенні для n_1 таке неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$\tilde{\mu}^2 n_1' + n_2^0 (1 - n_1) = 0,$$

тобто

$$\tilde{\mu}^2 n_1'' - n_2^0 n_1 = -n_2^0,$$

або

$$n_1'' + \frac{k}{2\tilde{\mu}^2} (\gamma^2 - y^2) n_1 = \frac{k}{2\tilde{\mu}^2} (\gamma^2 - y^2).$$

Таким чином,

$$n_1'' + \chi^2 n_1' = \chi^2, \quad (3.93)$$

де

$$\chi^2 = \frac{k}{2\tilde{\mu}^2} (\gamma^2 - y^2). \quad (3.94)$$

Окремий розв’язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (3.93) є очевидним:

$$\tilde{n}_1 = 1.$$

Шукаємо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$$n_1'' + \chi^2 n_1 = 0. \quad (3.95)$$

Рівняння (3.96) є аналогічним квантово-механічному рівнянню Шредінгера для гармонічного осцилятора:

$$\phi'' + k^2(y)\phi = 0.$$

Для розв'язання рівняння (3.95) використовуємо квазікласичне наближення, скориставшись тим, що внаслідок малості $\tilde{\mu}^2 \chi(y)\tilde{l} \gg 1$.

Шукаємо наближений розв'язок рівняння (3.95) у вигляді

$$n_1^* = Ae^{is}, \quad (3.96)$$

где A і S – дійсні функції координати y .

Знаходимо першу та другу похідні n_1^* :

$$n_1' = e^{is}(A' + iS'A),$$

$$n_1'' = e^{is}(A'' + 2iS'A' + iS''A - S'^2A)$$

Підставивши вирази n_1^* і $n_1^{*''}$ у (3.95), маємо

$$A'' + 2iS'A' + iS''A - S'^2A + \chi^2A = 0.$$

Відокремлення дійсної частини від уявної надає два співвідношення:

$$A'' - S'^2A + \chi^2A = 0, \quad (3.97)$$

$$S''A + 2A'S' = 0. \quad (3.98)$$

Перепишемо рівняння (3.98) у вигляді

$$\frac{A'}{A} = -\frac{S''}{2S'}.$$

Звідси

$$A = \frac{a}{\sqrt{S'}}, \quad (3.99)$$

де a – стала величина. З (3.97) маємо:

$$(S')^2 = \frac{A''}{A} + \chi^2.$$

Оскільки χ суттєво змінюється на довжині $\tilde{l}$, то S' і A також суттєво змінюються на цій довжині. Тому $\frac{A''}{A} \sim \frac{1}{\tilde{l}^2}$, тобто $\frac{A''}{\chi^2 A} \sim \frac{1}{(\chi l)^2} \ll 1$, і у першому наближенні можна вважати

$$(S')^2 = \chi^2. \quad (3.100)$$

Розв'язок рівняння (3.100) має вигляд:

$$n_1^* = \frac{a}{\sqrt{|\chi|}} \exp \left[\pm i \int_0^y |\chi| dy \right],$$

тобто

$$n_1^* = \frac{a}{\sqrt{|\chi|}} \cos \left[\int_0^y \chi dy \right] + \frac{b}{\sqrt{|\chi|}} \sin \left[\int_0^y \chi dy \right]$$

або

$$n_1^* = \frac{a}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)}} \cos \left[\int_0^y \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)} dy \right] + \frac{b}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)}} \sin \left[\int_0^y \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)} dy \right]$$

Відповідно розв'язок неоднорідного рівняння (3.93) :

$$n_1 = \tilde{n}_1 + n_1^* = 1 +$$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)}} \cos \left[\int_0^y \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)} dy \right] + \frac{b}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)}} \sin \left[\int_0^y \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)} dy \right]$$

З крайової умови $n_1(0) = 1$ визначаємо константу інтегрування $a = 0$. Остаточнo маємо:

$$n_1 = \tilde{n}_1 + n_1^* = 1 + \frac{b}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}|\gamma^2 - y^2|}} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}} \left(y \sqrt{\gamma^2 - y^2} + \gamma^2 \arcsin \left(\frac{y}{\gamma} \right) \right) \right]$$

$$n_1^* = \frac{a}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)}} \cos \left[\int_0^y \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)} dy \right] + \frac{b}{\sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)}} \sin \left[\int_0^y \sqrt{\frac{k}{2\tilde{\mu}^2}(\gamma^2 - y^2)} dy \right]$$

При графічному зображенні отриманого результату вважатимемо (з урахуванням $\tilde{\mu}^2 \ll 1$, поклавши $\kappa \sim 1$), що $\sqrt{\frac{\kappa}{2\tilde{\mu}^2}} \gg 1$, при цьому $\gamma^2 \sim 0,25$. Із

заміною $\sqrt{\frac{\kappa}{2\tilde{\mu}^2}} = B$ останній вираз отримує вигляд

$$n_1 = 1 + \frac{b}{\sqrt{B(\gamma^2 - y^2)}} \sin \left[\frac{1}{2} B \left(y \sqrt{\gamma^2 - y^2} + \gamma^2 \arcsin \left(\frac{y}{\gamma} \right) \right) \right]$$

Обмежуємося областю значень y , які задовольняють умову $y^2 < \gamma^2$. Це відповідає повільнішому характеру дифузії компоненти n_1 порівняно з радіонуклідом, який вважаємо таким, що мігрував на відстані $\tilde{l} = 1$.

Характерний графік функції $n_1(y)$ зображено на рис. 3.12.

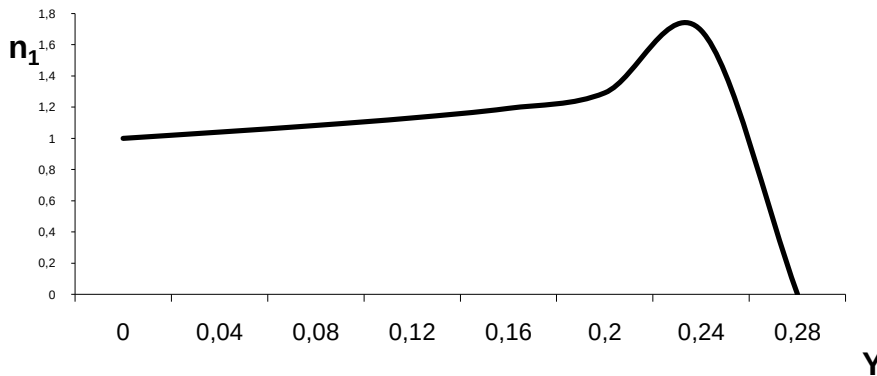


Рис. 3.12 – Характерний графік розподілу концентрації повільної компоненти (дрібнодисперсних гранул) у вертикальному напрямку при $B = 10$.

Характер залежності свідчить про існування області значного зростання концентрації повільної компоненти у фронтальній частині міграційних частинок з подальшим різким її спадом. За виконання певних умов положення цієї ділянки не залежить суттєво від конкретного значення співвідношення коефіцієнтів дифузії компонентів.

4.1 Поперечні коливання мембрани

Мембраною називають натягнуту плівку, що може вільно вигинатися. Нехай у положенні рівноваги мембрана займає деяку область D в площині xOy . Припустимо, що мембрана перебуває під дією рівномірного натягу T , прикладеного до її крайків.

Розглядатимемо лише поперечні коливання, коли кожна точка мембрани зміщується перпендикулярно площині xOy . Тоді зміщення u точки (x, y) мембрани буде функцією від x, y, t .

Надалі будуть цікаві малі коливання мембрани, коли можливо нехтувати квадратами зміщення u та її похідними порівняно із самою u .

Позначимо через S довільну ділянку мембрани, який деформується в ділянку S' , коли мембрану виведено з положення рівноваги (рис. 4.1). Вважаємо, що вигин настільки малий, що площі S і S' однакові.

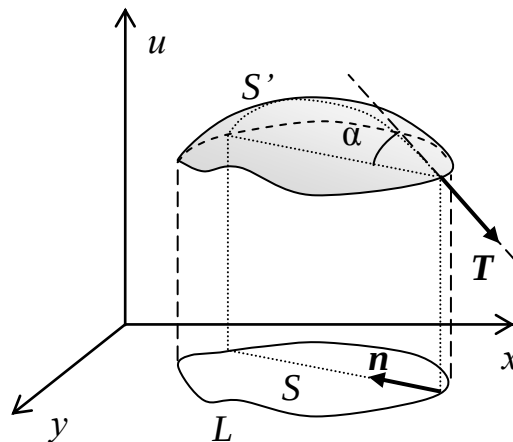


Рис. 4.1

На крайок вигнутої ділянки діє сила натягу T , дотична до поверхні ділянки в точці прикладання. За вигин відповідає компонента сили, перпендикулярна поверхні мембрани, тобто її проекція

$$T_u = T \sin \alpha \approx T \operatorname{tg} \alpha = T \frac{\partial u}{\partial n},$$

де n – напрямок нормали до окрайку області S (рис. 4.1). Звідси випливає, що проекція на вісь Ou сил натягу, прикладених до деякого елемента dl межі L , дорівнює $T(\partial u/\partial n)dl$, а до всього контуру –

$$T \int_L \frac{\partial u}{\partial n} dl.$$

Тоді, застосовуючи формулу Гріна, отримаємо

$$T \int_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = T \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy.$$

Припустимо далі, що паралельно зміщенню u на одиницю площі $dxdy$ мембрани діє зовнішня сила $p(x,y,t)$, тоді вся площа S піддається дії сили $\int_S p(x, y, t) dxdy$. За другим законом Ньютона сума всіх сил, що діють на тіло дорівнює добутку його маси $\rho dxdy \cdot \partial^2 u / \partial t^2$ для одиниці площі густиною ρ). Таким чином, для всієї поверхні маємо рівність

$$\iint_S \left[\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \right] dxdy = 0.$$

Інтеграл по довільній площі S дорівнює нулю тоді, коли є нульовим підінтегральний вираз. Звідси випливає, що

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t), \quad (4.1)$$

Це є **диференціальне рівняння поперечних коливань мембрани**.

У випадку однорідної мембрани $\rho = \text{const}$ воно набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (4.2)$$

де $a^2 = T/\rho$, $f(x, y, t) = p(x, y, t)/\rho$. Рівняння (4.2) називається **двовимірним хвильовим рівнянням**. Коли зовнішня сила відсутня воно ще більше спрощується: отримуємо **рівняння вільних коливань однорідної мембрани**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (4.3)$$

Для повного визначення руху мембрани потрібно, звичайно, ще задати зміщення і швидкість її точок в початковий момент часу:

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x, y). \quad (4.4)$$

Крім того, оскільки мембрана жорстко закріплена, має бути

$$u|_L = 0 \quad (4.5)$$

за будь-якого t . Якщо ж крайок мембрани не закріплений (може вільно рухатися), то крайові умови на них визначаються як

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_L = 0,$$

що відповідає відсутності сил натягу.

4.2 Метод відокремлення змінних у двовимірних задачах із круговою симетрією

Метод відокремлення змінних виявляється ефективним у розв'язанні двовимірних задач у випадку, коли форма крайку збігаються з формою координатних поверхонь тієї чи іншої координатної системи. Належний вибір системи координат дозволяє суттєво спростити математичні викладки.

Розглянемо коливання *круглої* мембрани радіуса R із жорстко закріпленням крайком. Нехай вона розташована в площині (xy) прямокутної декартової системи координат і вісь Oz проходить через її центр симетрії. Постановка крайової задачі для поперечного зміщення $u(x, y, t)$ точок мембрани виглядає таким чином: знайти розв'язок рівняння коливань (4.3) за крайової умови (4.5) та початкових умов (4.4).

Очевидно, що умова (4.5) не дозволяє відокремити просторові змінні x та y . Тож, з огляду на симетрію форми мембрани, перейдемо до полярної системи координат. Перехід здійснюється за формулами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, при цьому оператор Лапласа набуває вигляду

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

і рівняння коливань (4.3), відповідно, стає таким:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + f(t, \varphi, t). \quad (4.6)$$

Умова жорсткого закріплення для крайку та початкові умови записуємо як

$$u(R, \varphi, t) = 0, \quad (4.7)$$

$$u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), \quad (\partial u / \partial t)(r, \varphi, 0) = v_0(r, \varphi). \quad (4.8)$$

Тут потрібно зробити зауваження: за використання криволінійних координат виникають додаткові співвідношення, які у розв'язанні задачі відіграють таку ж роль, що і граничні умови. По-перше, точка $r = 0$ може виявитися особливою для рівняння (4.6) та, відповідно, шуканої функції $u(r, \varphi, t)$, тоді як функція $u(x, y, t)$ була всюди регулярною. Ця особливість за потреби може усуватись накладанням вимоги скінченності

$$|u(0, \varphi, t)| < \infty. \quad (4.9)$$

По-друге, розв'язок u з одного боку повинен бути однозначною функцією кута φ на проміжку $[0, 2\pi]$, а з іншого, залишатися незмінним при поворотах мембрани навколо своєї осі Oz на кути, кратні 2π . Це потребує накладання умови періодичності

$$u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t). \quad (4.10)$$

Коли початкові умови не залежать від полярного кута,

$$u(r, \varphi, 0) = u_0(r), \quad (\partial u / \partial t)(r, \varphi, 0) = v_0(r), \quad (4.8')$$

уся подальша еволюція збурень мембрани теж залишатиметься осесиметричною, якщо цьому не перешкоджають зовнішні сили f . Розв'яжемо задачу (4.6), (4.7), (4.8'), (4.9), (4.10) для випадку вільних коливань ($f = 0$). Для функції $u = u(r, t)$ формулюємо таку крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, t > 0,$$

$$u(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty,$$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = v_0(r).$$

Шукатимемо її частинні розв'язки у вигляді $u(r, t) = X(r)T(t)$. Після відокремлення змінних отримуємо для часової частини вже відомий вираз:

$$T(t) = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t,$$

а для координатної – одновимірну крайову задачу

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \lambda X = 0, \quad (4.11)$$

$$X(R) = 0, \quad X(0) < \infty.$$

Підстановка $r = x/\sqrt{\lambda}$ спрощує останнє рівняння до такого:

$$X''(x) + \frac{1}{x} X'(x) + X(x) = 0. \quad (4.12)$$

Шукатимемо розв'язок звичайного диференціального рівняння (4.12) у вигляді степеневого ряду

$$X(x) = x^q \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+q},$$

де $q \geq 0$ завдяки вимозі $X(0) < \infty$. Бачимо, що

$$\frac{1}{x} X'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q) a_k x^{k+q-2},$$

та

$$X''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+q)(k+q-1) a_k x^{k+q-2}.$$

Після підстановки останніх трьох рядів у рівняння (4.12) отримуємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+q)^2 a_k x^{k+q-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+q} = 0.$$

Виокремимо з першої суми доданки, пропорційні x^{q-2} , x^{q-1} , тобто такі, яких немає у другій сумі. Маємо:

$$a_0 q^2 x^{q-2} + a_1 (1+q)^2 x^{q-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+2} (k+q+2)^2 + a_k) x^{k+q} = 0.$$

Ця рівність реалізується за довільних x , якщо дорівнюють нулю всі коефіцієнти ряду. Звичайно,

$$a_0 q^2 = 0, \quad a_1 (1+q)^2 = 0, \quad a_{k+2} (k+q+2)^2 + a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

З того, що $q \geq 0$, випливає рівність $a_1 = 0$. Тоді з третього рівняння випливає за індукцією, що всі коефіцієнти з непарними номерами

$$a_{2k+1} = 0,$$

а коефіцієнти з парними номерами виражаються через a_0 за формулами

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{(2+q)^2}, a_4 = \frac{a_0}{(2+q)^2(4+q)^2}, \dots, a_{2k} \\ &= \frac{(-1)^k a_0}{(2+q)^2(4+q)^2 \dots (2k+q)^2}. \end{aligned}$$

Для існування нетривіального розв'язку, потрібно щоб a_0 не дорівнювало нулю, але тоді $q = 0$. Отже шуканий розв'язок (4.12)

$$X(x) = a_0 J_0(x)$$

виражається через спеціальну функцію – **функцію Беселя** нульового порядку

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (4.13)$$

(Докладно про функції Беселя буде у розділі 6).

Повертаючись до координати r , записуємо

$$X(r) = a_0 J_0(\sqrt{\lambda} r)$$

та, накладаючи крайову умову $X(R) = 0$, дістаємо рівняння

$$J_0(\sqrt{\lambda} R) = 0. \quad (4.14)$$

Очевидно, що нетривіальні розв'язки задачі існують лише при тих значеннях $\lambda = \lambda_k$, для яких числа $\sqrt{\lambda_k} R$ є нулями функції $J_0(x)$. Такі значення називаються **власними**. Їм відповідають **власні функції**

$$X_k(r) = a_{0k} J_0(\sqrt{\lambda_k} r), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тоді частинний та повний розв'язки задачі про коливання круглої мембрани можуть бути записані як

$$u_k(r, t) = (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) J_0(\sqrt{\lambda_k} r)$$

та

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t) J_0(\sqrt{\lambda_k} r), \quad (4.15)$$

де $\omega_k = a\sqrt{\lambda_k}$ - частоти вісесиметричних коливань (гармонік u_k) мембрани.
Коефіцієнти C_k і D_k знаходять з початкових умов

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\sqrt{\lambda_k} r) = u_0(r), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k D_k J_0(\sqrt{\lambda_k} r) = v_0(r), \quad (4.16)$$

які являють собою розкладання функцій $u_0(r)$ та $v_0(r)$ в ряд за функціями Беселя. Аби знайти коефіцієнти розкладення, скористаємось властивістю **ортogonalности**

$$\int_0^R J_0(\mu_n r) J_0(\mu_k r) r dr = 0, \quad n \neq k, \quad (4.17)$$

яка доводиться у теорії функцій Беселя (див. розд. 6). А саме, помноживши обидві частини рівностей (4.16) на $J_0(\sqrt{\lambda_n} r)$ та інтегруючи по r від нуля до R , за допомогою (4.17) знайдемо:

$$\begin{aligned} \int_0^R u_0(r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) r dr &= C_k \int_0^R J_0^2(\sqrt{\lambda_k} r) r dr, \\ \int_0^R v_0(r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) r dr &= \omega_k D_k \int_0^R J_0^2(\sqrt{\lambda_k} r) r dr, \end{aligned}$$

звідки

$$C_k = \frac{\int_0^R u_0(r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) r dr}{\int_0^R J_0^2(\sqrt{\lambda_k} r) r dr}, \quad D_k = \frac{\int_0^R v_0(r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) r dr}{a\sqrt{\lambda_k} \int_0^R J_0^2(\sqrt{\lambda_k} r) r dr}. \quad (4.18)$$

Як показано в розділі 6,

$$\int J_v^2(\alpha r) r dr = \frac{1}{2} \left(r^2 (J'_v(\alpha r))^2 + \left(r^2 - \frac{v^2}{\alpha^2} \right) J_v^2(\alpha r) \right) + C.$$

Тож з урахуванням (4.57) і ще однієї тотожності $J'_0(\alpha r) = -J_1(\alpha r)$,
ВИХОДИТЬ

$$\int_0^R J_0^2(\sqrt{\lambda_k} r) r dr = \frac{R^2}{2} (J'_0(\sqrt{\lambda_k} R))^2.$$

Тоді для виразів (4.18) отримуємо

$$C_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\sqrt{\lambda_k} R)} \int_0^R u_0(r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) r dr,$$

$$D_k = \frac{2}{a \lambda_k R^2 J_1^2(\sqrt{\lambda_k} R)} \int_0^R v_0(r) J_0(\sqrt{\lambda_k} r) r dr.$$

Записуючи остаточно розв'язок задачі, ці величини слід підставити у вираз (4.15).

Як і у випадку зі струною, загальний рух мембрани складається з незчисленної кількості власних гармонічних коливань.

4.3 Коливання круглої мембрани. Загальний випадок

Вище було розглянуто вільні коливання закріпленої мембрани за *радіально симетричних* початкових умов (4.8'). Повернемося тепер до загальної задачі (4.6) – (4.8).

Як і раніше розв'язки задачі шукатимемо у вигляді добутку $u(r, \varphi, t) = T(t)\Phi(r, \varphi)$. Підставивши його у (4.6) та поділивши отримане на $a^2 T(t)\Phi(r, \varphi)$, дістанемо рівність

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{1}{\Phi(r, \varphi)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = -\lambda,$$

звідки для часової змінної маємо як і раніше

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

$$T(t) = C_1 \cos a \lambda t + C_2 \sin a \lambda t.$$

а для функції $\Phi(r, \varphi)$ ДРЧП

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \lambda \Phi = 0 \quad (0 < r < R). \quad (4.19)$$

Це рівняння слід доповнити умовами: граничною, обмеженості та періодичності, відповідно

$$\Phi(R, \varphi) = 0, \quad |\Phi(0, \varphi)| < \infty, \quad \Phi(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi + 2\pi). \quad (4.20)$$

Підставивши гадану форму розв'язку $\Phi(r, \varphi) = X(r)\Psi(\varphi)$ у (4.19) і поділивши на $X\Psi$, отримуємо:

$$\frac{r}{X} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dX}{dr} \right) + \frac{1}{\Psi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \lambda r^2 = 0. \quad (4.21)$$

Очевидно, що члени у (4.21), які залежать від змінних r і φ можна відокремити один від одного, якщо покласти

$$\frac{1}{\Psi(r)} \frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\mu^2 = \text{const.}$$

Звідси випливає рівняння

$$\Psi''(\varphi) + \mu^2 \Psi = 0, \quad (4.22)$$

Частинні розв'язки (4.22) мають вигляд $D_1 \cos \mu \varphi$ та $D_2 \sin \mu \varphi$ і згідно з вимогою періодичності повинні задовольняти співвідношення

$$\cos \mu \varphi = \cos(\mu \varphi + 2\pi \mu), \quad \sin \mu \varphi = \sin(\mu \varphi + 2\pi \mu).$$

Звідси випливає, що $\mu = n \in \mathbb{Z}$ є ціле число, причому, враховуючи парність функції $\cos$ та непарність $\sin$, можна обмежитися значеннями $n \geq 0$.

Для радіальної частини розв'язку отримуємо крайову задачу:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dX}{dr} \right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) X = 0,$$

$$X(R) = 0, \quad |X(0)| < \infty.$$

Введення нової змінної $x = \sqrt{\lambda} r$ надає останньому рівнянню вигляду

$$X''(x) + \frac{1}{x} X'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) X(x) = 0.$$

Отримане є рівнянням циліндричних функцій n -го порядку (див. розд. 6). Його загальним розв'язком є

$$X(x) = a_1 J_n(x) + a_2 Y_n(x),$$

де

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (j+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j+n}$$

– функція Беселя, $Y_n(x)$ – функція Неймана порядку n (докладно про неї – у розд. 6). Другий доданок доводиться відкинути, бо функція Неймана розходиться в точці $x = 0$.

Гранична умова набирає форми

$$J_n(\sqrt{\lambda}R) = 0. \quad (4.23)$$

Запис (4.23) є алгебраїчним рівнянням з незчисленною кількістю коренів $\alpha_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Кожному з них відповідає власне значення задачі

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} \right)^2$$

а кожному з власних значень – пара власних функцій

$$\bar{X}_{nk} = J_n \left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r \right) \cos n\varphi, \quad \bar{\bar{X}}_{nk} = J_n \left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r \right) \sin n\varphi. \quad (4.24)$$

Компонуючи з них загальний розв’язок, отримуємо:

$$X_{nk}(r, \varphi) = J_n \left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r \right) (A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi). \quad (4.25)$$

Визначити коефіцієнти A_{nk} та B_{nk} допоможе властивість ортогональності функцій Беселя (для $\nu > -1$)

$$\int_0^R J_\nu \left(\frac{\alpha_i^{(n)}}{R} r \right) J_\nu \left(\frac{\alpha_j^{(n)}}{R} r \right) r dr = \frac{R^2}{2} \delta_{ij} J_{\nu+1}^2(\alpha_i^{(n)}),$$

$$\text{де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

З неї випливає ортогональність власних функцій (4.25). Так, для $\bar{X}_{nk}$ виходить:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{X}_{nk_1} \bar{X}_{nk_2} r dr d\varphi &= \int_0^R J_\nu \left(\frac{\alpha_{k_1}^{(n)}}{R} r \right) J_\nu \left(\frac{\alpha_{k_2}^{(n)}}{R} r \right) r dr \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos n\varphi d\varphi = \\ &= \begin{cases} 0, & k_1 \neq k_2 \\ \frac{R^2}{2} \left(J'_n \left(\alpha_k^{(n)} \right) \right)^2 \pi, & k_1 = k_2 = k \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічні умови мають місце і для $\bar{\bar{X}}_{nk}$. Тоді для розв'язку (4.25) можемо записати

$$\iint X_{nk}^2 dS = \frac{\pi R^2}{2} \left(J_n' \left(\alpha_k^{(n)} \right) \right)^2.$$

Повертаючись до початкової задачі коливань мембрани за заданій початковій умові та початковій швидкості, можемо записати її розв'язок у вигляді

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \bar{X}_{nk}(r, \varphi) \left(A_{nk} \cos \frac{a\alpha_k^{(n)}}{R} t + B_{nk} \sin \frac{a\alpha_k^{(n)}}{R} t \right) + \sum_{n,k=0}^{\infty} \bar{\bar{X}}_{nk}(r, \varphi) \left(C_{nk} \cos \frac{a\alpha_k^{(n)}}{R} t + D_{nk} \sin \frac{a\alpha_k^{(n)}}{R} t \right).$$

Коефіцієнти A_{nk} , B_{nk} , C_{nk} , D_{nk} визначаються з початкових умов

$$u(r, \varphi, 0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (A_{nk} \bar{X}_{nk} + C_{nk} \bar{\bar{X}}_{nk}) = u_0(r, \varphi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \varphi, 0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (B_{nk} \bar{X}_{nk} + D_{nk} \bar{\bar{X}}_{nk}) \frac{a\alpha_k^{(n)}}{R} = v_0(r, \varphi).$$

за формулами

$$A_{nk} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R u_0(r, \varphi) J_n \left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r \right) \cos n\varphi r dr d\varphi}{\frac{\pi R^2}{2} \left(J_n' \left(\alpha_k^{(n)} \right) \right)^2},$$

$$C_{nk} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_0(r, \varphi) J_n \left(\frac{\alpha_k^{(n)}}{R} r \right) \sin n\varphi r dr d\varphi}{\frac{\pi R^2}{2} \left(J_n' \left(\alpha_k^{(n)} \right) \right)^2}.$$

Аналогічні формули мають місце для $a\sqrt{\lambda_{nk}} B_{nk}$ та, відповідно, для $a\sqrt{\lambda_{nk}} D_{nk}$.

4.4 Рівняння руху ідеальної рідини

У гідродинаміці досліджувані середовища розглядають як *суцільні* і такі, що їхні елементи можуть вільно пересуватися одне відносно одного. Частіше за все йдеться про рідини та гази, тому елемент таких середовищ називають “рідка частинка” або “частинка рідини”. Математичний опис стану рухомого суцільного середовища включає в себе визначення у кожній точці простору у будь-який момент часу швидкості $\vec{v}(x, y, z, t)$, тиску $p(x, y, z, t)$ та густини $\rho(x, y, z, t)$. (Зауважимо, що ці функції є належними до певних точок простору, зайнятого середовищем, а не до частинок рідини).

Вивід основних гідродинамічних рівнянь починається з виводу закону збереження речовини у гідродинаміці. Розглянемо деякий об’єм V рідини густиною ρ , обмежений поверхнею S (рис. 4.2). Маса у цьому об’ємі є $\int \rho dV$ (інтегрування провадиться по об’єму V). Крізь елемент $d\vec{S}$ поверхні в одиницю часу протікає кількість $\rho \vec{v} d\vec{S}$ рідини (вектор $d\vec{S}$ за абсолютною величиною дорівнює площі елемента поверхні й напрямлений назовні перпендикулярно до поверхні). Тоді $\rho \vec{v} d\vec{S} > 0$, якщо рідина витікає з об’єму і $\rho \vec{v} d\vec{S} < 0$, якщо рідина втікає. Отже, повна кількість рідини, що витікає з об’єму, є інтеграл по всій замкненій поверхні

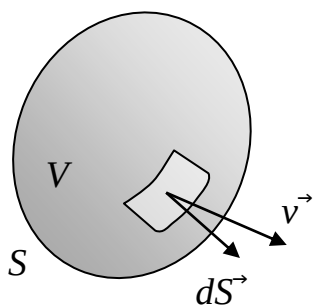


Рис. 4.2

$$\oint \rho \vec{v} d\vec{S}.$$

Цей витік призводить до зменшення маси m речовини в об’ємі:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

і в силу закону збереження речовини

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \vec{v} d\vec{S}. \quad (4.26)$$

Інтеграл по поверхні перетворюється на інтеграл по об’єму:

$$\oint \rho \vec{v} d\vec{S} = \int \operatorname{div} \rho \vec{v} dV.$$

Звідси

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0.$$

Оскільки ця рівність повинна справджуватися для будь-якого об'єму, то має дорівнювати нулю і підінтегральний вираз, тобто

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (4.27)$$

Отримане є *рівняння неперервності*. Записане у формі (4.26) або (4.26) воно виражає собою закон збереження речовини: зменшення кількості речовини (маси) в деякому об'ємі дорівнює потоку речовини крізь поверхню об'єму.

Сила тиску на деякий об'єм з боку навколишньої рідини дорівнює інтегралу

$$-\oint p d\vec{S}$$

по поверхні цього об'єму. Перетворюючи його на інтеграл по об'єму, маємо:

$$-\oint p d\vec{S} = -\int \operatorname{grad} p dV.$$

Іншими словами можна сказати, що на кожний елемент об'єму dV діє сила $-\operatorname{grad} p$. Тоді закон руху елемента об'єму рідини (рідкої частинки) легко записати, прирівнюючи цю силу до добутку маси (на одиницю об'єму) рідкої частинки на її прискорення $d\vec{v}/dt$:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p. \quad (4.28)$$

Прискорення рідкої частинки, яка весь час пересувається у просторі, потрібно виразити через величини, які є належними до нерухомих точок простору. Для цього зауважимо, що зміна швидкості частинки $d\vec{v}$ за час dt складається з двох частин: зі зміни швидкості у поточній точці простору протягом часу dt та з різниці в двох точках, відокремлених відстанню $d\vec{r}$, яку проходить частинка за час dt . Перша з цих частин дорівнює $(\partial \vec{v} / \partial t) dt$, де похідна береться у фіксованій точці простору (x, y, z) . Друга частина зміни швидкості дорівнює

$$dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (d\vec{r} \nabla) \vec{v}.$$

Таким чином,

$$d\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} dt + (d\vec{r} \nabla) \vec{v}.$$

Залишається поділити обидва боки отриманої рівності на dt , аби отримати вираз для повної похідної швидкості

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}.$$

Підставивши отриманий вираз у (4.28), знаходимо:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p. \quad (4.29)$$

Це є одне з основних рівнянь руху рідини – **рівняння Ейлера**.

Якщо рідина перебуває під дією сили тяжіння, то на кожную одиницю її об'єму діє ще сила $\rho\vec{g}$, де $\vec{g}$ – прискорення сили тяжіння. Цю силу в рівнянні (4.29) потрібно додати до сили тиску:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p + \vec{g}. \quad (4.30)$$

Корисною є ще одна форма рівняння Ейлера, яка містить лише швидкість. Скориставшись відомою формулою векторного аналізу

$$\frac{1}{2}\text{grad}v^2 = [\vec{v}\text{rot}\vec{v}] + (\vec{v}\nabla)\vec{v},$$

можна записати формулу (4.29) у вигляді

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}\text{rot}\vec{v}] = -\text{grad}\left(w + \frac{v^2}{2}\right), \quad (4.31)$$

де через $\text{grad}w$ позначено вираз $(1/\rho)\text{grad}p$.

Застосувавши до обох сторін цього рівняння операцію rot , отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{v} = \text{rot}[\vec{v}\text{rot}\vec{v}], \quad (4.32)$$

яке містить лише швидкість.

Щодо рівняння Ейлера слід зробити суттєве зауваження. У виводі ми повністю знехтували дисипацією енергії внаслідок в'язкості і теплообміну між різними її ділянками, яка може бути присутня в реальній текучій рідині. Тому надалі всі висновки, засновані на рівняннях (4.29) – (4.32), стосуватимуться саме бездисипаційних рухів рідини, яку на разі називають **ідеальною**.

До рівнянь руху потрібно додати граничні умови, які повинні виконуватися на стінках, що обмежують рідину. Рідина не може проникати за

тверду поверхню, тому на нерухомих стінках повинна обертатися на нуль нормальна до поверхні компонента швидкості рідини:

$$v_n = 0.$$

На границі між двома рідинами, які не перемішуються, повинні виконуватися умова рівності тисків та умова рівності нормальних до поверхні компонент швидкості.

4.5 Звукові хвилі

Коливальний рух з *малою* амплітудою у товщі рідини називають **звуковими хвилями**. У кожному місці рідини у звуковій хвилі відбуваються по чергово стиснення й розрідження.

У малих коливаннях швидкість теж мала. Це дозволяє в рівнянні Ейлера знехтувати членом $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, пропорційним квадрату швидкості. З цієї ж причини відносні зміни густини ρ' та тиску p' у звуковій хвилі також малі. Змінні ρ і p можливо записати у вигляді

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p'. \quad (4.33)$$

де ρ_0, p_0 – сталі рівноважні густина й тиск, і $\rho' \ll \rho_0, p' \ll p_0$.

Рівняння неперервності (4.27) за підстановки в нього (4.33) і нехтування в ньому величинами другого порядку малості (ρ', p', v потрібно при цьому вважати малими величинами першого порядку) набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (4.34)$$

Рівняння Ейлера (4.29) у тому ж наближенні зводиться до рівняння

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (4.35)$$

Рівняння (4.34) і (4.35) містять невідомі функції $\vec{v}, p', \rho'$. Однієї з них можливо позбутися. Ми можемо вважати, що мала зміна тиску лінійно пропорційна зміні густини:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho'.$$

Замінивши за допомогою цього співвідношення ρ' на p' у рівнянні (4.34), отримаємо:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (4.36)$$

Тепер пара рівнянь (4.35), (4.36) із двома невідомими $\vec{v}$ і p повністю описують звукову хвилю.

Для того, щоб залишити всього одну невідому функцію, наприклад $\vec{v}$, зручно ввести допоміжну величину – потенціал швидкості через вираз

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Тоді замість рівняння (4.34) матимемо рівність

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4.37)$$

яка пов'язує p' з φ . Підставивши (4.37) у (4.36), отримаємо хвильове рівняння, записане для потенціалу швидкості:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi, \quad (4.38)$$

де позначено

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (4.39)$$

Завдання

1. Застосувавши до хвильового рівняння (4.38) операцію grad , пересвідчитися, що таке ж рівняння задовольняють кожна з трьох компонент швидкості, v_x , v_y , v_z .
2. Взявши похідну по часу від (4.37), пересвідчитися, що p' задовольняє хвильове рівняння.

Розглянемо хвилю, в якій усі величини залежать лише від однієї координати x . Інакше кажучи, весь рух є однорідним в площині y, z . Це вже знайома пласка хвиля. Хвильове рівняння спрощується:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Коли хвиля поширюється у необмеженому просторі, для розв'язання задачі найкраще скористатися методом Д'Аламбера (п. 2.3). Вводячи нові змінні $\xi = x - ct$ та $\eta = x + ct$, приводимо хвильове рівняння до рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

яке має такий розв'язок:

$$\varphi = \Phi(x + ct) + X(x - ct). \quad (4.40)$$

Фізичний зміст (4.40) було з'ясовано в п. 2.3: перший доданок описує хвилю, яка поширюється у від'ємному напрямку осі x зі швидкістю c (4.39); другий доданок відповідає за хвилю, що поширюється у додатному напрямку осі x із тією ж швидкістю. У кожен момент часу φ є різною для різних x ; у кожній площині $x = \text{const}$ функція φ змінюється з часом, не будучи при цьому залежною від інших двох координат, тобто хвиля є *пласкою*.

Функції вигляду (4.40) описують розподіл і будь-якої з величин p' , ρ' , v у хвилі. З трьох компонент швидкості $\vec{v} = \text{grad} \varphi$ у пласкій хвилі відмінна від нуля лише компонента $v_x = \partial \varphi / \partial x$. Тож швидкість рідини у звуковій хвилі напрямлена вздовж поширення хвилі: $\vec{v} \parallel \vec{c}$. У зв'язку з цим кажуть, що звукові хвилі в рідині є *подовжними*.

У біжучій пласкій хвилі швидкість $v_x = v$ пов'язана з тиском і густиною співвідношеннями (для $\varphi = X(x - ct)$)

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = X'(x - ct); \quad p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \rho c X'(x - ct).$$

Порівнюючи ці вирази, знаходимо

$$v = \frac{cp'}{\rho}.$$

де швидкість звуку c для конкретного середовища може бути знайдена через його термодинамічні параметри.

Важливим випадком хвиль є монохроматичні хвилі, в яких усі величини є періодичними (гармонічними) функціями часу. Зручно записувати такі функції не через $\cos$ або $\sin$, а в вигляді експоненти уявного аргументу, користуючись співвідношенням Ейлера $\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$. На будь-якому етапі обчислень ми можемо повернутися до дійсної або уявної її частини. Тож, для біжучої пласкої монохроматичної хвилі, яка поширюється у додатному напрямку осі x , де всі величини виражаються через комбінацію $x - ct$, потенціал має вигляд

$$\varphi = \text{Re} \left\{ A e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} \right\}, \quad (4.41)$$

Тут A – (стала) комплексна амплітуда, ω – частота хвилі. Записавши $A = ae^{i\alpha}$, матимемо звичну формулу для гармонічної хвилі

$$\varphi = a \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha\right).$$

Вводиться також **хвильовий вектор**

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n},$$

який показує напрямок поширення хвилі $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$) і пов'язаний з довжиною хвилі λ . У таких позначеннях потенціал швидкості отримує вигляд

$$\varphi = \operatorname{Re}\left\{Ae^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right\}.$$

Загалом, в необмеженому середовищі можуть поширюватися хвилі будь-якої форми. Причому всяку довільну хвилю можливо зобразити у вигляді сукупності плоских монохроматичних хвиль із різними довжинами хвиль і частотами. Таке розкладення на монохроматичні хвилі, **спектральне розкладення** є просто розкладанням у ряд або інтеграл Фур'є. Окремі компоненти цього розкладення називають компонентами Фур'є.

4.6 Коливання рідини в обмеженому просторі

Коли простір, заповнений рідиною, є обмежений, до рівнянь руху слід додати граничні умови на обмежувальних поверхнях (твердих стінок або вільній поверхні рідини). Виявляється, що в таких умовах вільні коливання можуть відбуватися не на будь-яких, а лише на цілком визначених частотах, які залежать від розмірів і форми посудини. Такі частоти називаються **власними** (порів. з випадком одновимірних коливань п. 2.8).

Конкретні значення власних частот залежать від форми і розмірів посудини. Знаходження частот потребує дослідження рівняння руху з конкретними крайовими умовами. Якщо шукати періодичний у часі розв'язок хвильового рівняння, скажімо, для потенціалу швидкості у вигляді $\varphi = \varphi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$, то для φ_0 матимемо рівняння

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0.$$

Це рівняння дійсне як і крайові умови, тож і розв'язок його теж дійсний. Відповідно, потенціал матиме вигляд (беремо дійсну частину від $\varphi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$):

$$\varphi = \varphi_0(x, y, z)\cos(\omega t + \alpha), \quad (4.42)$$

тобто є добутком деякої функції координат на періодичну функцію часу.

Такий розв'язок зовсім не біжуча хвиля, яка б спостерігалася у необмеженому просторі. Згідно з (4.42) в кожному момент часу всі точки середовища коливаються в тій самій фазі $(\omega t + \alpha)$, тобто хвиля є стоячою.

Пласка стояча звукова хвиля (всі величини є функцією лише однієї координати), що є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0$$

має вигляд

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha) \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right).$$

Належним чином вибрана система координат і початок відліку часу дозволяє перетворити початкові фази на нуль, тож буде

$$\varphi = A \cos \omega t \cos \frac{\omega}{c}x.$$

Для швидкості та тиску у хвилі матимемо:

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -A \frac{\omega}{c} \cos \omega t \sin \frac{\omega}{c}x;$$

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho \omega \sin \omega t \cos \frac{\omega}{c}x.$$

У точках $x = 0, \pi c/\omega, 2\pi c/\omega, \dots$ (відстань між якими $\pi c/\omega = \lambda/2$) швидкість завжди дорівнює нулю, тобто це є вузли. Пучності, розташовані посередині між вузлами, мають координати $x = \pi c/2\omega, 3\pi c/\omega, \dots$

Завдання. Пересвідчитися в тому, що максимуми коливань тиску спостерігаються в вузлах швидкості й, навпаки, пучності швидкості характеризуються нульовими коливаннями тиску.

4.7 Поверхневі хвилі в полі тяжіння

Вільна поверхня рідини у рівновазі у полі сили тяжіння є пласкою. Якщо зовнішня дія виводить яку-небудь ділянку поверхні з рівноваги, у рідині виникає рух. Цей рух поширюється вздовж поверхні у вигляді хвиль, мало зачіпаючи глибинні шари рідини.

Розглянемо рухи рідини з малими швидкостями, щоб в рівнянні Ейлера можна було б знехтувати членом $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$, пропорційним квадрату швидкості, порівняно з $\partial\vec{v}/\partial t$. Величина швидкості частинки у коливальному процесі має порядок відношення амплітуди a до періоду коливань T . З іншого боку вона помітно змінюється за проміжки часу порядку T , тож $\partial v/\partial t \sim v/T \sim a/T^2$. Швидкість змінюється також на відстанях порядку довжини хвилі λ вздовж напрямку поширення хвилі, тому $\nabla v \sim v/\lambda \sim a/T\lambda$. Отже, умова $(\vec{v}\nabla)\vec{v} \ll \partial\vec{v}/\partial t$ рівнозначна вимозі $v^2/\lambda \ll v/T$, або

$$a \ll \lambda,$$

тобто амплітуда коливань у хвилі повинна бути малою порівняно з довжиною хвилі. У розділі 4.5 було показано, що нехтування членом $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ дає можливість ввести потенціал швидкості за правилом $\vec{v} = \text{grad}\phi$. Для нестисливої рідини ($\partial\rho/\partial t = 0$) рівняння неперервності $\text{div}\vec{v} = 0$, записане через потенціал, набуває форми рівняння Лапласа

$$\Delta\phi = 0.$$

Можемо тепер знехтувати квадратичним членом $v^2/2$ у рівнянні Ейлера (4.30). Заміна в ньому швидкості на градієнт потенціалу дає таке:

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\right) + \vec{g} = 0,$$

Інтегруючи отримане рівняння, виберемо напрямок осі z вертикально вгору, а за площину (x, y) візьмемо рівноважну пласку поверхню рідини. Тож маємо:

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Позначатимемо через ζ вертикальне відхилення рідкої поверхні від положення рівноваги $z = 0$. Припустимо, що тиск на поверхні є величина стала, $p = p_0 = \text{const}$, тож її можливо усунути перевизначенням потенціалу: $\phi \rightarrow \phi + p_0 t/\rho$, і умова на поверхні рідини набуде вигляду

$$g\zeta + \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} = 0.$$

За малих амплітуд коливань (малих ζ) можна вважати, що вертикальна компонента швидкості $v_z = \partial\zeta/\partial t$. Але $v_z = \partial\phi/\partial z$, тож маємо

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

З огляду на мализну коливань можливо у цій умові взяти значення похідних при $z = 0$ замість $z = \zeta$. У вигляді

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.43)$$

вона слугує за граничну умову для рівняння

$$\Delta \varphi = 0, \quad (4.44)$$

які визначає рух рідини у гравітаційному полі.

Розглянемо малі хвилі на поверхні дуже глибокої рідини, вважаючи цю поверхню необмеженою (щоб не писати граничних умов). Нехай хвиля поширюється вздовж осі x і має характеристики, однакові вздовж осі y . Шукатимемо розв'язок задачі (4.43) – (4.44) у вигляді періодичної функції часу і координати x :

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z).$$

Підстановка цього виразу у рівняння (4.44) надає для функції $f(z)$ рівняння

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0.$$

Розв'язком є функція, яка згасає вглибину рідини:

$$\varphi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t). \quad (4.45)$$

Накладання на неї граничної умови (4.43) надає зв'язок між частотою і хвильовим вектором – **закон дисперсії** хвиль:

$$\omega^2 = kg.$$

Розподіл швидкостей в рідині виходить диференціюванням потенціалу (4.45) по координатах:

$$v_x = Ae^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad v_z = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t).$$

Очевидно, що в кожній точці рідини вектор швидкості обертається по колу з радіусом

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{2} Ae^{kz}.$$

Рідка частинка з такою швидкістю описує у хвилі коло, причому цей рух згасає експоненційно в глибину.

4.8 Океанські припливи

Рівняння руху води на континентальному шельфі описують океанські припливи. Цей рух визначається гравітацією та інерційними силами у планетарному масштабі й є модульований геометрією океанського дна та силами тертя об нього. Повна постановка задачі про океанські припливи дещо не вписується у формат цього посібника. Нижче ми розглянемо спрощену модель т. зв. **довгих хвиль** – хвиль, довжина λ яких перевищує глибину басейну h .

У басейні, необмеженому в двох вимірах (x і y), з трьох компонент швидкості малою є вертикальна v_z . Рівняння Ейлера, розписане покомпонентно, без малих членів набуває вигляду

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

В останньому рівнянні покладено: $\partial v_z / \partial t = g$ (тобто зміною малої величини v_z протягом коливання знехтувано). Проінтегруємо його, зауваживши, що на вільній поверхні ($z = \zeta$) має бути $p = p_0$:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z).$$

Підстановка цього виразу в перші два рівняння дає:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \quad (4.46)$$

Для виведення рівняння неперервності розглянемо об'єм рідини, обмежений двома площинами на відстані dx одна від одної, перпендикулярними осі x і дну басейна. Для басейна глибиною h і шириною b (ширину в напрямку осі y поки що вважатимемо обмеженою) за одиницю часу крізь одну площину ввійде об'єм рідини $(bh \cdot v)_x$, а крізь другу вийде об'єм $(bh \cdot v)_{x+dx}$. Тому об'єм між обома площинами зміниться на

$$(bhv)_{x+dx} - (bhv)_x = b \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} dx,$$

і, оскільки рідина нестислива, ця зміна може відбутися лише за рахунок зміни її рівня. Зміна об'єму рідини між розглядуваними площинами в одиницю часу дорівнює $\frac{\partial(bh)}{\partial t} dx$. Отже можна записати:

$$\frac{\partial(bh)}{\partial t} dx = -b \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} dx,$$

або

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} = 0.$$

Це і є шукане рівняння неперервності. Для довільного напрямку швидкості воно є, відповідно, таким:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(hv_y)}{\partial y} = 0.$$

Глибину запишемо в вигляді $h = h_0 + \zeta$, де h_0 – рівноважна глибина. Тоді

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \quad (4.47)$$

Якщо припустити пласке дно ($h_0 = \text{const}$), то диференціюючи (4.47) по часу та підставляючи (4.46), отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh_0 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right).$$

Це знов таки рівняння типу хвильового; воно відповідає хвилям зі швидкістю поширення

$$c = \sqrt{gh_0}.$$

Для опису дійсного руху океанських хвиль потрібно врахувати ще низку чинників. Відкинемо припущення про пласке дно ($h_0 \neq \text{const}$). Рівняння неперервності в векторній формі запишеться як

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla(h_0 \vec{v}) = 0. \quad (4.48)$$

Рівняння Ейлера дещо ускладниться завдяки врахуванню сили тертя океанської води об дно (член $\kappa \vec{v}$) та сили Коріоліса (член $[\vec{f} \vec{v}]$, $\vec{f} \parallel Oz$):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + g \nabla \zeta + [\vec{f} \vec{v}] + \kappa \vec{v} = 0 \quad (4.49)$$

Фур'є-перетворення диференціальних рівнянь (4.48), (4.49) по часовій змінній до переводить їх у категорію звичайних:

$$i\omega \zeta_\omega + \nabla(hv_\omega) = 0, \quad (4.50)$$

$$i\omega v_\omega + [\vec{f} \vec{v}_\omega] + g \nabla \zeta_\omega + \kappa v_\omega = 0. \quad (4.51)$$

Тепер дослідженню підлягають три скалярних поля, $\zeta_\omega(x, y)$, $v_{x\omega}(x, y)$, $v_{y\omega}(x, y)$ – три комплексні амплітуди руху на заданій частоті ω . Кількість відповідних функцій можна зменшити, відкинувши швидкість. Спочатку розпишемо рівняння (4.51) у скалярній формі:

$$\begin{aligned} i\omega v_{x\omega} - f v_{y\omega} + g \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial x} + \kappa v_{x\omega} &= 0 \\ i\omega v_{y\omega} - f v_{x\omega} + g \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial y} + \kappa v_{y\omega} &= 0. \end{aligned}$$

і оформимо у вигляді матричного рівняння:

$$\begin{pmatrix} i\omega + \kappa & -f \\ f & i\omega + \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x\omega} \\ v_{y\omega} \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

За правилами матричної алгебри розв'язком рівняння $AX = B$ є вектор $X = A^{-1}B$, де A^{-1} – матриця, обернена A . Тож, обертаючи (4.52), отримуємо

$$\begin{pmatrix} v_{x\omega} \\ v_{y\omega} \end{pmatrix} = -\frac{g}{(i\omega + \kappa)^2 + f^2} \begin{pmatrix} i\omega + \kappa & f \\ -f & i\omega + \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

або в векторній формі

$$\vec{v}_\omega = -g \frac{(i\omega + \kappa)\nabla\zeta_\omega - [\vec{f}, \nabla\zeta_\omega]}{(i\omega + \kappa)^2 + f^2}.$$

Підставляючи тепер знайдене в рівняння неперервності (4.50), приходимо до диференціального рівняння суто для функції $\zeta_\omega(x, y)$:

$$i\omega\zeta_\omega - \frac{g}{(i\omega + \kappa)^2 + f^2} \left((i\omega + \kappa)\Delta\zeta_\omega - \nabla[\vec{f}, \nabla\zeta_\omega] \right) = 0. \quad (4.54)$$

Коли розв'язок (4.54) знайдено, можливо з рівняння (4.53) отримати вектор швидкості $\vec{v}_\omega$, а потім через обернене Фур'є-перетворення повернутися до функцій $\zeta(x, y)$ і $\vec{v}(x, y)$.

5

Метод інтегральних перетворень

Метод інтегральних перетворень дозволяє у багатьох випадках замінити диференціювання по одній зі змінних алгебраїчними операціями і привести таким чином ДРЧП до звичайного диференціального або алгебраїчного рівняння.

Застосування методу інтегральних перетворень до розв'язання граничних задач зводиться до такого: обидві частини ДРЧП інтегрують із деякою функцією, ядром інтегрального перетворення, по однієї із змінних на всьому інтервалі її зміни. При цьому ця змінна виключається з обох частин рівняння, розмірність якого стає на одиницю меншою. Після розв'язання отриманої спрощеної задачі оберненим перетворенням отримують розв'язок початкової задачі.

Широковживані типи інтегральних перетворень наведені в таблиці у наступному параграфі. Вони різняться за низкою параметрів. Так, $\sin$ -перетворення використовують (зазвичай до координатної змінної), коли в нулі задана функція, $\cos$ -перетворення – коли в нулі задана похідна, а перетворення Лапласа – коли в нулі задані і функція і похідні (його застосовують зазвичай до часової змінної).

У цьому розділі наведено коротку теорію перетворень Лапласа та Фур'є і на конкретних прикладах показано застосування їх до розв'язання граничних задач.

5.1 Перетворення Лапласа

Зображенням функції $f(t)$ за Лапласом називають функцію комплексного змінного $p = s + i\omega$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (5.1)$$

а сама функція $f(t)$ називається **оригіналом**.

Перетворення	Інтервал	Формула обернення	Перетворення похідних
Фур'є	$] -\infty, \infty[$	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi} e^{-i\xi x} d\xi$	$(-i\xi)^n f_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{i\xi x} dx$ $f^{(k)}(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty,$ $k = 0, 1, \dots, n-1$
sin-Фур'є	$]0, \infty[$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\xi} \sin \xi x d\xi$	$-\xi^2 f_{\xi} + \xi f(0)$ $= \int_0^{\infty} f''(x) \sin \xi x dx$ $f^{(k)}(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, k = 0; 1$
cos-Фур'є	$]0, \infty[$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_{\xi} \cos \xi x d\xi$	$-\xi^2 f_{\xi} - \xi f(0)$ $= \int_0^{\infty} f''(x) \cos \xi x dx$ $f^{(k)}(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, k = 0; 1$
Лапласа	$]0, \infty[$	$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f_{\xi} e^{-ipx} dp$	$p^n f_p - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-px} dx$ $ f(x) < M e^{s_0 x}, M > 0$

Багатьом співвідношенням і операціям над оригіналами відповідають простіші співвідношення між їхніми зображеннями. Цим пояснюється популярність перетворення Лапласа в наукових та інженерних розрахунках.

Функція-оригінал має бути $f(t) = 0$ при всіх $t < 0$, де дійсний аргумент t у фізичних задачах інтерпретовано як час. Така вимога впливає з адаптованості методу до задач Коші, де вся інформація про фізичний процес до моменту початку спостереження $t = 0$ міститься в початкових умовах.

Також усюди на осі t функція $f(t)$ не повинна мати особливостей окрім скінченного числа розривів першого роду та зростати не швидше експоненти:

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}.$$

Тоді зображення $F(p)$ визначено на комплексній півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ і є там аналітичною функцією. Дійсно, при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ інтеграл (5.1) абсолютно збігається, бо

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} M e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}.$$

Звідси зокрема впливає, що якщо $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0,$$

і ця збіжність є рівномірною відносно $\arg p$, за модулем меншим ніж $\pi/2$.

Обернене перетворення має вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (5.2)$$

де інтеграл (5.2) беруть уздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re} p = a > s_0$ і розуміють у сенсі головного значення. Це твердження є однією з теорем теорії функцій комплексного змінного.

Як приклад, не важко провести перетворення Лапласа над найпростішою функцією, функцією Хевісайда,

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Зображенням її буде функція $F(p) = 1/p$.

Оригінали деяких простих функцій та їхні зображення наведені в таблиці:

Оригінал	Зображення
$t^a (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$\frac{e^{bt} - e^{-at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
$J_n(t) (n > -1)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) (n > -1)$	$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{2p}}$

Лаплас-зображенням ще однієї функції,

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

($\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$), що у фізичних задачах має зміст нескінченно великого імпульсу, що “вмикається” на нескінченно малий проміжок часу, є одиниця:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

Для імпульсу, який вмикається із запізненням на час τ , $\delta(t - \tau)$ зображенням буде

$$\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau},$$

а для довільної функції застосовна

Теорема запізнення. Для будь-якого $\tau > 0$ функція $f(t - \tau)$ має своїм зображенням добуток $e^{-p\tau} F(p)$ (запізнення оригіналу на τ (рис. 5.1) рівно-сильне множенню зображення на $e^{-p\tau}$).

Оскільки $f(t - \tau) = 0$ для $t < \tau$, то за допомогою заміни змінних $t - \tau = t'$ можемо отримати

$$\int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t') e^{-p(t' + \tau)} dt' = e^{-p\tau} F(p),$$

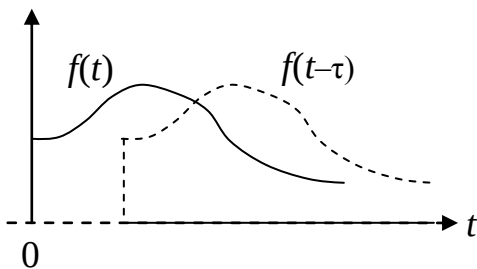


Рис. 5.1

що й потрібно було довести.

Теорему зокрема зручно використовувати для пошуку зображень функцій, які в різні проміжки часу задаються різними аналітичними виразами.

Як приклад, знайдемо зображення ступінчастої функції

$$f(t) = A\{\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \dots\}, \quad (5.3)$$

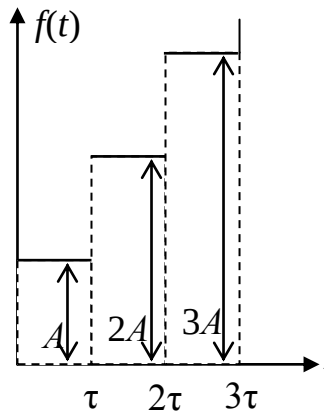


Рис. 5.2

графік якої наведено на 5.2. За теоремою запізнення маємо образ (4.3) у вигляді геометричної прогресії

$$F(p) = A \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right\} \quad (4.4)$$

з показником $e^{-p\tau} < 1$), сумуючи яку, можемо записати

$$F(p) = \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-pt}} = \frac{A}{2p} \left(1 + \coth \frac{p\tau}{2} \right).$$

Інші властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність. Якщо $F(p)$ і $G(p)$ – зображення функцій $f(t)$ і $g(t)$, відповідно, то для будь-яких сталих u і v сума $uf(t) + vg(t)$ має своїм зображенням функцію $uF(p) + vG(p)$.

2. Теорема подібності. Для будь-якого сталого $\alpha > 0$ зображенням оригіналу $f(\alpha t)$ є функція $\alpha^{-1}F(p/\alpha)$.

Справді, покладаючи $\alpha t = \tau$, маємо зображенням $f(\alpha t)$:

$$\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Диференціювання оригінала призводить до множення зображення на p .

Це твердження доводиться інтегруванням частинами:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = f(0) + pF(p). \quad (5.5)$$

Зокрема, коли $f(0) = 0$,

$$pF(p) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Повторне диференціювання дає зображення $p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$.

4. Інтегрування оригіналу зводиться, навпаки, до ділення зображення на p .

Якщо функція $f(t)$ є оригінал, то й інтеграл від неї

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

також задовольняє вимогам до оригінал-функції.

Дійсно, якщо зображенням похідної $g'(t) = f(t)$ є функція

$$pG(p) = \int_0^{\infty} g'(t)e^{-pt} dt,$$

то для зображення $f(t)$ маємо: $F(p) = pG(p)$, звідки $G(p) = F(p)/p$, що й було потрібно.

5. Теорема множення Бореля (без доведення). Добуток зображень, $F(p)G(p)$ функцій $f(t)$ та $g(t)$ є зображенням їхньої *згортки* $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Іншими словами, *множення зображень рівносильне згортанню оригіналів*.

У додатках корисним є наслідок цієї теореми для випадку, коли потрібно знайти оригінал добутку $pF(p)G(p)$. Користуючись правилом диференціювання оригіналу (5.5), можна пересвідчитися, що добуток

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + \{pF(p) - f(0)\}G(p)$$

є зображенням такого виразу: $f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau$ і, в силу симетрії згортки, такого: $f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau$.

Це так званий *інтеграл Дюамеля*. Він дозволяє написати без будь-яких обчислень розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^n x}{dt^n} + q_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + q_{n-1} \frac{dx}{dt} + q_n x = f(t) \quad (5.6)$$

при нульових початкових умовах, якщо відомий розв'язок $x_1(t)$ рівняння з тією ж лівою частиною і правою частиною 1 також при нульових початкових умовах.

При застосуванні перетворення Лапласа згідно властивості 3 *похідні ступеню k замінюються на множники p^k* , тож диференціальне рівняння (5.3) перетворюється на алгебраїчне для зображень:

$$A(p)X(p) = F(p), \quad (5.7)$$

де $X(p)$ – зображення невідомої функції $x(t)$ і багаточлен

$$A(p) = p^n + q_1 p^{n-1} + \dots + q_{n-1} p + q_n = F(p).$$

Для рівняння з одиничною правою частиною перетворення Лапласа дає:

$$A(p)X_1(p) = 1/p. \quad (5.8)$$

Разом рівняння (5.7) і (5.8) дають для зображень

$$X(p) = pX_1(p)F(p),$$

що рівносильно співвідношенню

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau = x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

для оригіналів.

Перетворення Лапласа є зручним у розв'язанні задачі Коші для ДРЧП.

У загальному випадку потрібно розв'язати ДРЧП

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (5.9)$$

де a, b, c, r, q – неперервні функції координати x , яка змінюється в діапазоні $0 \leq x \leq l$, за заданих початкових та граничних умов:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (5.10)$$

(лише для гіперболічного випадку)

$$u(0, t) = g(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t) \quad (5.11)$$

($\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$). При $r < 0$ (5.9) – рівняння *гіперболічного* типу, а при $r = 0, q < 0$ воно відповідає *параболічному* випадкові.

Позначимо зображення функції часу u через

$$U(p, x) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-pt} dt$$

Тоді зображення першої та другої похідних по координаті:

$$\frac{dU}{dx} = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt,$$

а також із врахуванням початкових умов

$$pU - u(x, 0) = pU - \varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-pt} dt,$$

$$p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt.$$

Розглядаючи $f(x)$ як оригінал для деякої функції $F(p)$, з граничних умов (4.10) матимемо

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left[\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi) \right]_{x=l} = \gamma U|_{x=l}. \quad (5.12)$$

Отже, поставлену вище задачу (5.7) – (5.9) зведено до розв'язання звичайного диференціального рівняння

$$a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b \frac{\partial U}{\partial x} + Au + B = 0, \quad (5.13)$$

де $A = c + rp^2 + qp$, $B = -rp\varphi - r\psi - q\varphi$, за граничних умов (5.10).

Якщо відомо, що задачі (5.9) – (5.11) та (5.12) – (5.13) кожна сама по собі мають єдиний розв'язок, то, очевидно, розв'язок задачі Коші (5.9) – (5.11) можливо отримати як оригінал для U .

Приклад. Для уповільнення нейтронів, що звільняються в результаті ланцюгової реакції в ядрових реакторах застосовуються уповільнювачі (частіше – графітові). Нехай уповільнювач займає півпростір $x > 0$, який містить джерело нейтронів у площині $x = x_0$. Процес уповільнення нейтронів описується рівнянням

$$\frac{\partial X(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 X(x, \tau)}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)\delta(\tau), \quad (5.14)$$

де τ – символічний вік нейтронів, $X(x, \tau)$ – число нейтронів на одиницю об'єму за одиницю часу.

Це рівняння потрібно розв'язати за граничної умови

$$\left(X - k \frac{dX}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0,$$

яка фізично є умовою відсутності повного потоку нейтронів крізь площину $x = 0$. Ще одна гранична умова,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} X(x, \tau) = 0 \quad (5.15)$$

для всіх τ вимагає відсутності нейтронів (повного сповільнення) на нескінченості. Початкові умови відсутні, бо рівняння містить імпульсну функцію.

Застосовуючи перетворення Лапласа по τ , приходимо до рівняння

$$pX = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \delta(x - x_0). \quad (5.16)$$

Його загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$X = Ae^{(x_0-x)\sqrt{p}} + Be^{-(x_0-x)\sqrt{p}},$$

але лише для $x < x_0$, бо через дельта-функцію в рівнянні перша похідна його розв'язку, dX/dt має розрив. Для інтервалу $x > x_0$ в силу умови (5.15) розв'язком буде функція

$$X = Be^{-(x_0-x)\sqrt{p}}$$

(A , B , і C – деякі сталі).

5.2 Перетворення Фур'є

Оскільки у формулі обернення Лапласа (5.2) інтегрування проводиться по прямій $\text{Re } p = a$, то там варто покласти $p = a + i\omega$,

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(a + i\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

і провести деякі перепозначення, а саме: $f(t)e^{-at} = g(t)$, $\frac{F(a+i\omega)}{\sqrt{2\pi}} = G(\omega)$. У нових позначеннях остання формула перепишеться у вигляді

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.17)$$

Аналогічно, формулу для прямого перетворення (5.1) можна переписати у вигляді

$$F(a + i\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-at} e^{-i\omega t} d\omega.$$

або в нових позначеннях, як

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (5.18)$$

Формули (5.17) – (5.18) називаються формулами оберненого і прямого **перетворення Фур'є**, відповідно.

Формули перетворення Фур'є (5.17) – (5.18) з точки зору фізики аналогічне розкладанню в ряд Фур'є

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{in\omega t}, \quad G_n = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)e^{-in\omega t} dt$$

бо формулу (5.17) можливо подати як розкладання функції $g(t)$ у суцільний спектр гармонічних коливань $G(\omega)e^{i\omega t}$, частоти яких змінюються неперервно. Амплітуди таких коливань (5.18) є аналогом коефіцієнтів G_n Фур'є.

Наведемо **приклад** застосування перетворення Фур'є, а саме, розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a \quad (5.19)$$

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t \geq 0$$

$$u|_{y=0} = q(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=a} = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.20)$$

Оскільки змінна x змінюється на $] -\infty, \infty[$, то слід скористатися повним перетворенням Фур'є по цій змінній:

$$U_k(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{ikx} dx.$$

Для цього помножимо рівняння (5.19) на e^{ikx} і проінтегруємо по змінній x :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{lkx} dx + \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{lkx} dx = 0.$$

Перший доданок набирає вигляду

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{lkx} dx = (-ik)^2 U_k(y) = -k^2 U_k(y).$$

У другому доданку змінимо порядок інтегрування й диференціювання:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{lkx} dx = \frac{d^2}{dy^2} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{lkx} dx = \frac{\partial^2 U_k(y)}{\partial y^2}.$$

У результаті рівняння (5.19) перетворюється на звичайне диференціальне

$$U_k''(y) - k^2 U_k(y) = 0. \quad (5.21)$$

Застосуємо тепер перетворення Фур'є до крайових умов (4.20):

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{lkx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{lkx} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=a} e^{lkx} dx = 0,$$

звідки

$$U_k(0) = Q(k); \quad U_k'(a) = 0, \quad (5.22)$$

де $Q(k) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{lkx} dx$.

Отримана в результаті одновимірної крайової задачі (5.21) – (5.22) має своїм розв'язком функцію

$$U_k(y) = A \cosh kx + B \sinh kx.$$

З умов (5.7) випливає

$$U_k(0) = A = Q(k); \quad U_k'(a) = k A \sinh ka + k B \cosh ka = 0,$$

звідки $A = Q(k); \quad B = -Q(k) \tanh ka$.

Отже Фур'є-зображення шуканої функції має вигляд

$$U_k(y) = Q(k)[\operatorname{ch} kx - \operatorname{th} ka \cdot \operatorname{sh} kx] = Q(k) \frac{\operatorname{ch} k(x - a)}{\operatorname{ch} ka}.$$

За формулою обернення отримуємо розв'язок поставленої задачі

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(k) \frac{\operatorname{ch} k(x - a)}{\operatorname{ch} ka} e^{-lky} dk.$$

6

Рівняння Бесселя

6.1 Рівняння Бесселя та функції Бесселя

Рівняння Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (6.1)$$

(з числовим параметром ν) виникає при розв'язанні методом розділення змінних задач математичної фізики в циліндричних та полярних координатах. Воно зустрічається і в еквівалентній формі:

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (6.2)$$

Будь-який нетривіальний розв'язок рівняння Бесселя називається **циліндричною функцією**. Окремими прикладами циліндричних функцій є функції Бесселя, Неймана та Ганкеля I і II роду.

Функція Бесселя індекса ν визначена рядом

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}, \quad (6.3)$$

де $\Gamma(z)$ – ще одна спеціальна функція – **Гамма-функція Ейлера** (узагальнення факторіала на нецілі значення) із властивостями:

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu), \quad \Gamma(n + 1) = n!$$

$$\Gamma(k + \nu + 1) = (k + \nu)\Gamma(k + \nu), \quad \Gamma(k + 1) = k\Gamma(k). \quad (6.4)$$

для натуральних чисел n і k .

За ознакою Д'Аламбера ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \quad (6.5)$$

збігається рівномірно за всіх $|z| \leq R$, $|\nu| \leq N$, де R і N – довільні дійсні числа. Оскільки всі члени ряду (6.5) є цілими функціями змінної z при фіксованому ν та змінної ν при фіксованому z , сума ряду має такі ж властивості.

Завдання. Показати, що $J_\nu(x)$ задовольняє рівнянню (6.2).

Вказівка: скористатися властивостями гама-функції

$$\Gamma(k + \nu + 1) = (k + \nu)\Gamma(k + \nu), \quad \Gamma(k + 1) = k\Gamma(k).$$

Оскільки рівняння (6.1) не змінюється при заміні ν на $-\nu$, функція $J_{-\nu}(x)$ також є розв'язком рівняння (6.1).

Коли ν є число *неціле*, розв'язки рівняння Беселя $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ *лінійно незалежні*. Вони по різному поведуться біля точки $x = 0$:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0;$$

$$J_{-\nu}(x) = \frac{2^\nu}{x^\nu \Gamma(1 - \nu)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0.$$

Перша обмежена, друга необмежена.

Якщо ν *ціле*, то

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x),$$

що означає *лінійну залежність*. Тоді аби побудувати загальний розв'язок рівняння Беселя, потрібно знайти другий, лінійно-незалежний від $J_\nu(x)$ частинний розв'язок. Задля цього введемо нову функцію

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}, \quad \nu \neq n. \quad (6.6)$$

Очевидно, що вона також є розв'язком рівняння (6.1), бо являє собою комбінацію частинних розв'язків $J_\nu(x)$ та $J_{-\nu}(x)$. Функція (6.6) називається **функцією Беселя II роду** або **функцією Неймана**. В околі точки $x = 0$ вона, на відміну від функції Беселя, необмежена:

$$Y_\nu(x) \sim \frac{-J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu} \sim \frac{2^\nu}{x^\nu \sin \pi \nu \Gamma(1 - \nu)}, \quad x \rightarrow 0.$$

Такі функції не можуть бути лінійно залежними. Тому при нецілих ν загальний розв'язок рівняння (5.1) записується як лінійна комбінація

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x),$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Нижче наведені графіки функції $J_n(x)$ для $n = 0, 1, 2$ і $Y_0(x)$ та деякі диференціальні співвідношення та рекурентні формули.

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}; \quad (6.7)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x); \quad Y_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}Y_\nu(x) - Y'_\nu(x);$$

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) + J'_\nu(x); \quad Y_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x}Y_\nu(x) + Y'_\nu(x);$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x); \quad Y_{\nu+1}(x) + Y_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}Y_\nu(x);$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x) \quad ; \quad Y_{\nu+1}(x) - Y_{\nu-1}(x) = -2Y'_\nu(x).$$

Окремі випадки функцій Беселя

У фізичних задачах найчастіше зустрічаються циліндричні функції $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $J_{1\pm n/2}(x)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Графіки деяких з них наведені на рис. 6.1,2.

З рекурентних формул видно, що функції старших порядків $n > 1$ можливо отримати з відомих функцій $J_0(x)$ та $J_1(x)$.

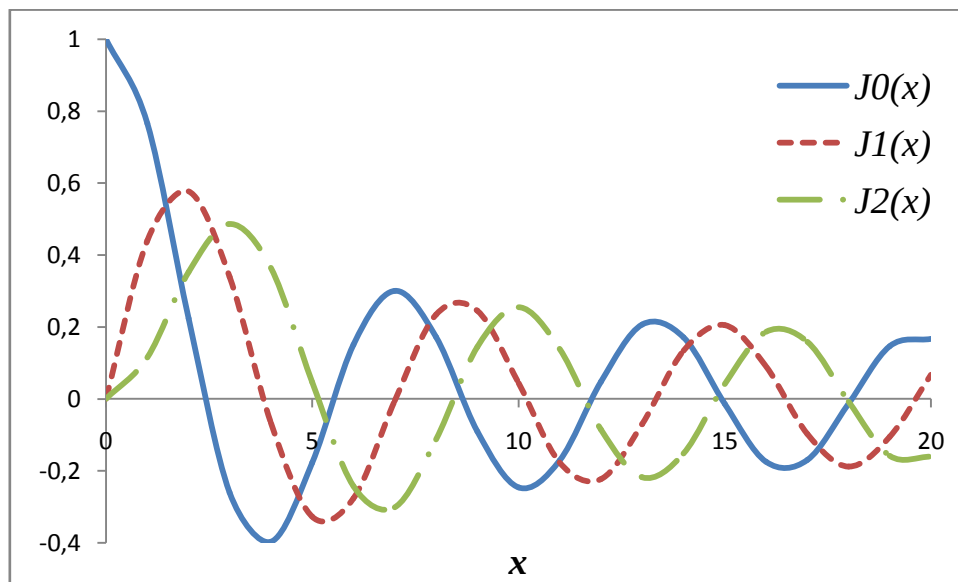


Рис. 6.1

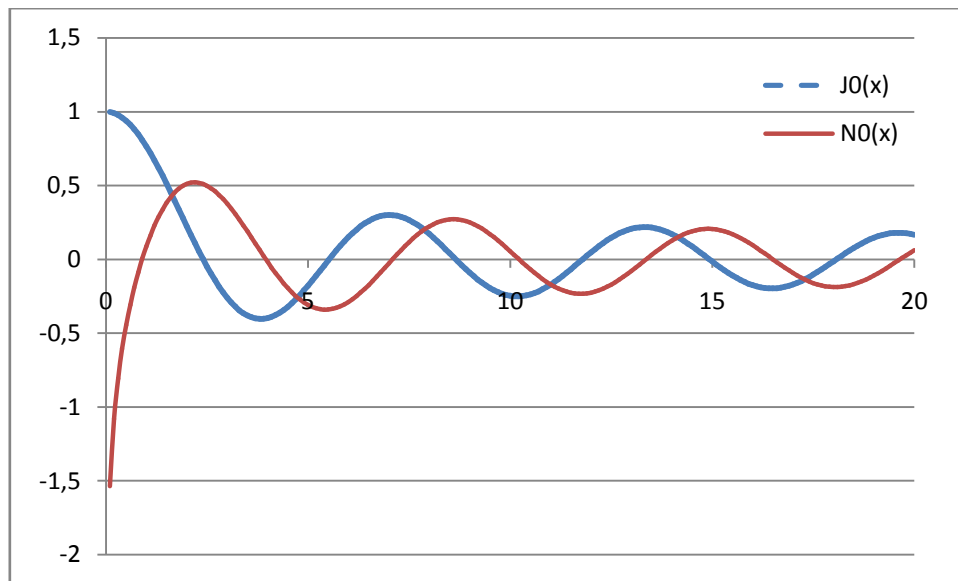


Рис. 6.2

Циліндричні функції порядку $n + \frac{1}{2}$ особливі тим, що виражаються через елементарні. Функція $J_{\frac{1}{2}}(x)$ зображена рядом

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Знаменник можливо розрахувати за допомогою співвідношень (6.4):

$$\begin{aligned} 2^{2k+1}\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) &= \\ &= 2^{2k+1}k![(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})\cdots 3/2\cdot 1/2\cdot\Gamma(\frac{1}{2})] = \\ &= 2\cdot 4\cdots 2(k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)(2k-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}(2k+1)! \end{aligned}$$

Отриманий в результаті ряд є з точністю до множника розкладанням функції $\sin x$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Аналогічна процедура застосовна і до функції $J_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Функції Неймана при $\nu = \frac{1}{2}$ зводяться до знайденого:

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad Y_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Друге з диференціальних співвідношень (6.7) дозволяє записати явно функції Беселя напівцілого індексу за допомогою багатократної похідної від елементарної функції:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

Асимптотична поведінка у функцій $J_{n+1/2}(x)$ та $Y_{n+1/2}(x)$ однакова: при $x \rightarrow \infty$ вони прямують до нуля. При $x = 0$ обертаються на нуль функції $J_{1/2}(x)$ та $Y_{-1/2}(x)$, решта набирають необмежених значень.

6.2 Задача Штурма-Ліувілля для рівняння Беселя

Рівняння Беселя

$$-(xX'(x))' + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x} \right) X(x) = 0. \quad (6.8)$$

на інтервалі $]0, x_0[$ за крайової умови в загальному вигляді

$$X'(x_0) + hX(x_0) = 0. \quad (6.9)$$

є окремим випадком задачі Штурма-Ліувілля (розд. 2.8). Для (6.8) точка $x = 0$ є особливою, у ній слід вимагати обмеженість розв'язку

$$|X(x=0)| < \infty. \quad (6.10)$$

Наведемо розв'язання задачі (6.8) – (6.10) для трьох типів крайових умов.

Задача 1. Розв'язати рівняння (6.8) ($0 < x < x_0$) при $\nu > 0$ та заданих крайових умов

$$|X(x=0)| < \infty, \quad X(x_0) = 0.$$

Розв'язання для $\lambda = 0$.

Рівняння (6.8) перепишемо у вигляді

$$X'' + \frac{1}{x} X' - \frac{\nu^2}{x^2} X = 0$$

і введемо нову змінну $z = \ln x$, що дає можливість перетворити його на рівняння

$$\frac{d^2 X}{dz^2} - \nu^2 X = 0,$$

загальний розв'язок якого відомий:

$$X = C_1 e^{\nu z} + C_2 e^{-\nu z}.$$

Для старої змінної матимемо

$$X = C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu}.$$

Аби задовольнити умову $|X(x=0)| < \infty$, коефіцієнт перед C_2 покладемо рівним нулю. Підстановка функції $X(x) = C_1 x^\nu$ у другу крайову умову дає

$$C_1 x_0^\nu = 0.$$

Оскільки $x_0 > 0$, то звідси випливає, що $C_1 = 0$. Отже, при $\lambda = 0$ існує лише тривіальний розв'язок рівняння, що задовольняє умову $X(x_0) = 0$. А тому $\lambda = 0$ не є власним числом поставленої задачі.

Розв'язання для $\lambda > 0$.

Зробивши в рівнянні (6.8) заміну $z = x\sqrt{\lambda}$, бачимо, що функція $y(z) = X(z/\sqrt{\lambda})$ задовольняє рівняння

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0,$$

яке має розв'язок $y(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$.

Повертаючись до старих змінних, запишемо загальний розв'язок

$$X(x) = C_1 J_\nu(x\sqrt{\lambda}) + C_2 Y_\nu(x\sqrt{\lambda}).$$

Оскільки функція Неймана $Y_\nu(x)$ необмежена в нулі (доведено в розділі 6.1), то, виходячи з умови обмеженості $X(0)$, маємо покласти $C_2 = 0$. З другої крайової умови випливає, що

$$C_1 J_\nu(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Уникаючи тривіального розв'язку, виводимо

$$J_\nu(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Позначимо через μ_k додатні корені рівняння

$$J_\nu(\mu) = 0, \tag{6.11}$$

тобто власними числами задачі є набір $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2$, $k = 1, 2, \dots$, а власні функції (з точністю до сталої C_1) мають вигляд

$$X_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$ - корені рівняння (6.11).

Задача 2. Розв'язати рівняння (6.8) ($0 < x < x_0$) при $\nu > 0$ та крайових умовах

$$|X(x=0)| < \infty, \quad X'(x_0) = 0. \quad (6.12)$$

Розв'язання

Неважко пересвідчитися, що, як і в попередній задачі, умова $\lambda = 0$ обмежує можливі розв'язки лише тривіальним.

При $\lambda > 0$ знову можемо записати

$$X(x) = C_1 J_\nu(x\sqrt{\lambda}) + C_2 Y_\nu(x\sqrt{\lambda}).$$

Оскільки за будь-якого $C_2 \neq 0$ розв'язок $X(x)$ необмежено при $x = 0$, то кладемо $C_2 = 0$. Тоді $X(x) = C_1 J_\nu(x\sqrt{\lambda})$. З крайової умови знаходимо, що

$$C_1 J_\nu'(x\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Знов таки робимо висновок про наявність власних чисел задачі

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2,$$

де μ_k ($0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \mu_{k+1} < \dots$) – корені рівняння $J_\nu'(\mu) = 0$, яким відповідають власні функції

$$X_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Задача 3. Розв'язати рівняння (6.8) ($0 < x < x_0$) при $\nu > 0$ та крайових умовах

$$|X(x=0)| < \infty, \quad X'(x_0) + hX(x_0) = 0 \quad (h > 0). \quad (6.12)$$

Розв'язання

Умова $\lambda = 0$, як і в попередніх прикладах, обмежує можливі розв'язки лише тривіальним, тож нульове λ не є власним числом поставленої задачі. Для $\lambda > 0$ розв'язок

$$X(x) = C_1 J_\nu(x\sqrt{\lambda}).$$

Поклавши $C_1 = 1$, після підстановки $X(x)$ у (6.12) на правому кінці означеного інтервалу x , отримаємо рівняння на власні значення:

$$J'_\nu(x_0\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} + hJ_\nu(x_0\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Зробивши заміну $\mu = x_0\sqrt{\lambda}$, бачимо, що

$$J'_\nu(\mu)\mu + hx_0J_\nu(\mu) = 0.$$

Отримане рівняння має множину додатних коренів $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots$. Тож власні числа задачі

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{x_0}\right)^2,$$

а власні функції

$$X_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k x}{x_0}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Список використаних літературних джерел

1. Д.А Франк - Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука. 1967. 502 с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973. 352с.
3. Базаров И.П., Геворкян Е. В., Николаев П.Н. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: Изд-во МГУ, 1989. 240 с.
4. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с. Наука, 1981.
5. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем, т.1. М.: Янус-К, 2002. 284 с.
6. Герасимов О.І. Фізична кінетика в задачах та прикладах. Одеса, ОГМІ, 1998.
7. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. 284 с.
8. Тихонов, Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. Кошляков Н.С., Глинер Є.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: «Высшая школа», 1970. 712 с.
10. Адамян В.М., Сушко М.Я. Вступ до математичної фізики. Варіаційне числення та крайові задачі. Одеса, 2013. 351 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
12. Lynch, D.R. Numerical partial differential equations for environmental scientists and engineers. Springer, 2005. 388 p.
13. Hillen, T., Leonard, I.E., Van Roessel, H. Partial differential equations: theory and completely solved problems. Wiley, 2012. 678 p.
14. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. 1958. 628 с.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.3, ч. 2., 1957. 674 с.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Бесель 65, 114, 118, 146
Борель 139
Генрі 94
Грін 31, 34, 51, 56, 69, 83. 110
Гук 14
Д'Аламбер 15, 19, 124, 146
Дірихле 9
Дюамель 139
Ейлер 122, 125, 130, 146
Коріоліс 131
Коші 8, 10, 16, 16, 19, 51, 135, 140
Лаплас 7, 41, 62, 77, 111, 128, 133, 136, 138
Лежандр 66
Ліувіллє 35, 150
Нейман 9, 118, 147
Ньютон 9, 12
Планк 90
Пуассон 53, 88
Річардсон 90
Фік 78
Фоккер 90
Фур'є 23, 25, 28, 30, 32, 53, 75, 85, 87, 126, 132, 134, 142
Шредінгер 35, 106
Штурм 35, 150
Юнг 13

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Вектор густини потоку 37
Власне(а) значення, функція 70
Генрі закон 93
Гранульовані матеріали 96
Дисперсія 129
Дифузія 37
Задача Коші 6
– Штурма-Ліувілля 35
– про поширення крайового режиму 8
Інтеграл імовірностей 57
Коефіцієнт жорсткості закріплення 14
– масопередачі 78
Константа розчинності 95, 97, 99
Лапласове зображення 133, 136
Неоднорідна система 34
Метод відображень 57
– відокремлення змінних (Фур'є) 23
– продовження 18
– фіктивних джерел 57
– характеристик 15
Оператор Лапласа 6
Оригінал-функція 133
Ортогональність 72
Показник Херста 91
Початкові умови 12
Рівняння гіперболічне 5
– дифузії 5, 40
– Ейлера 122
– еліптичне 6
– коливань мембрани 110
– Лапласа 5
– лінійне 5
– неоднорідне 5
– неперервності 121
– однорідне 5
– теплопровідності 5
– Фоккера-Планка 90
– хвильове 5
Розв'язок автомобільний 46
– Д'Аламбера 15
Спектр 71
Формула Д'Аламбера 16
Фрактал 89
Функція Беселя 66
– гама Ейлера 146
– Гріна 31, 52
– джерел 38
– Неймана 118
– приєднана Лежандра 66
– Хевісайда 135
Хвильовий вектор 126
Хвиля біжуча 17
– довга 130
– стояча 17