

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до практичних занять студентів з дисципліни

“ЕКОЛОГІЧНА ФІЗИКА”

Одеса - 2019

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Екологічна фізика” для студентів 3-го курсу бакалаврату “Технології захисту навколишнього середовища”

Укладачі: Герасимов О.І., Андріанова І.С. Одеса, ОДЕКУ, 2019р., 35с., укр. мова.

ЗМІСТ

	Стор.
Вступ	4
1. Дослідження на стійкість термодинамічних процесів. Ентропійний аналіз.	5
2. Макроскопічні моделі екологічних систем	15
2.1. Планетарний клімат як задача фізики	15
2.2. Методи кінетичних моделей. Модель Лотки – Вольтера	19
3. Основні рівняння математичної фізики. крайової задачі. застосування операційного методу при вирішенні нестационарних рівнянь дифузії при різних граничних умовах	24
Додаток	34
Література	35

Вступ

Сучасна екологічна фізика займається визначенням та оцінкою проблем довкілля і має на меті упередження можливих екологічних проблем та послаблення чинних. Вона задіює дослідні технології та інструментарій з різних розділів фізики і потребує аналітичних методів математичної фізики.

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Екологічна фізика” спрямовані на полегшення засвоєння студентами матеріалів курсу “Екологічна фізика” та формування навиків їх практичного застосування.

1. ДОСЛІДЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ ТЕРМОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ. ЕНТРОПІЙНИЙ АНАЛІЗ.

Основні поняття і формули

Термодинамічні параметри та термодинамічні функції. Умови термодинамічної стійкості.

Методи рівноважної та нерівноважної термодинаміки та статистичної фізики є важливим інструментом опису та дослідження фізичних, біофізичних процесів та явищ, що відбуваються у реальних системах, які є відкритими системами і можуть обмінюватися енергією та речовиною з навколишнім середовищем, складовою частиною якого вони являються.

Термодинамічні системи, які не можуть обмінюватися речовиною із зовнішнім середовищем, називають закритими. Серед них виділяють замкнені (ізолювані) системи, для яких неможливим є обмін енергією із зовнішнім середовищем.

Сукупність значень фізичних величин, які характеризують стан системи, називають термодинамічними параметрами стану. Головні термодинамічні параметри – температура T , тиск p , об'єм V .

Одним з термодинамічних параметрів, який є мірою неупорядкованості системи і характеризує ступінь наближення термодинамічної системи до рівноважного стану є її ентропія S . Ентропія – це функцією стану, зміна якої у випадку оборотних (квазістатичних) процесів відбувається за рахунок передачі (віднімання) системі деякої кількості теплоти δQ при температурі T .

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.1)$$

В ізолюваних системах ентропія або залишається незмінною (при протіканні оборотних процесів), або зростає внаслідок необоротних процесів (дифузії, теплопровідності, в'язкості, хімічних реакцій тощо), досягаючи максимуму в стані термодинамічної рівноваги:

$$dS \geq 0. \quad (1.2)$$

Отже, зріст ентропії ізолюваної системи означає рух системи у напрямку найбільш імовірного рівноважного стану, оскільки згідно статистичній фізиці

$$S = k \ln \Gamma, \quad (1.3)$$

де Γ – термодинамічна імовірність стану, тобто кількість мікроскопічних станів (розподілів мікрочастинок системи), якими може бути реалізований даний макроскопічний стан системи.

З урахуванням виразу (1.1) рівнянню першого закону термодинаміки, згідно якому кількість теплоти, що надана системі йде на зміну її внутрішньої енергії (dU) та виконання системою роботи проти зовнішніх сил ($\delta A = pdV$) $\delta Q = dU + pdV$ можна надати вигляду

$$TdS = dU + pdV .$$

Звідки для зміни внутрішньої енергії термодинамічної системи отримуємо вираз:

$$dU = TdS - pdV . \quad (1.4)$$

Рівняння (1.4) дозволяє ввести функції стану – термодинамічні функції, необхідні для аналізу того чи іншого явища.

Ентальпія (теплова функція) H :

$$H = U + pV . \quad (1.5)$$

Її зміна $dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp$.

Якщо $p = const$, $dH = TdS = \delta Q$, тобто ентальпія – функція стану, приріст якої у квазістатичному ізобарному процесі надає кількість теплоти, отриманої системою.

Вільна енергія F (функція Гельмгольца):

$$F = U - TS . \quad (1.6)$$

Зміна вільної енергії $dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$. В ізотермічному процесі ($T = const$) $dF = -pdV = -\delta A$.

Тобто вільна енергія – функція стану системи, збиток якої в квазістатичному ізотермічному процесі надає роботу. Яку виконала система:

$$A = F_1 - F_2 .$$

Термодинамічний потенціал (потенціал Гіббса): $G = G(p, T)$

$$G = U + pV - TS . \quad (1.7)$$

Зміна термодинамічного потенціалу $dG = -SdT + Vdp$.

Кожна термодинамічна функція залежить від свого набору незалежних змінних, які називають природними змінними:

$$U = U(V, S);$$

$$H = H(p, S);$$

$$F = F(T, V);$$

$$G = G(p, T).$$

Термодинамічні функції U, H, F, G , так саме як ентропія S , є адитивними величинами, тобто залежать від кількості частинок речовини N , що містить система. Якщо розглядати N як ще один незалежний параметр, то у випадку системи, яка складається з однакових частинок, вирази диференціалів термодинамічних функцій приймають вигляд:

$$\begin{aligned}dU &= TdS - pdV + \mu dN; \\dH &= TdS + Vdp + \mu dN; \\dF &= -pdV - SdT + \mu dN; \\dG &= -SdT + Vdp + \mu dN,\end{aligned}\tag{1.8}$$

де μ – хімічний потенціал, який дорівнює термодинамічному потенціалу, віднесеному до однієї молекули.

$$\mu = \frac{G}{N}.$$

Для системи, яка містить декілька різних компонент,

$$G = \sum_{j=1}^n \mu_j N_j$$

Наведені співвідношення дозволяють дістати повну інформацію про термічні та інші властивості системи, виразити термодинамічні параметри через різні змінні. Формули, які надають зв'язок між частинними похідними різних термодинамічних параметрів і мають назву співвідношень Максвелла, можуть бути отриманими з виразів (1.8).

Основним критерієм стійкості адіабатично ізольованої системи є максимальне значення її ентропії.

Нерівність Клаузіуса

$$\frac{\delta Q}{T} \leq dS\tag{1.9}$$

для нескінченно малого необоротного процесу, який самочинно відбувається в системі має вигляд $\delta Q < TdS$ або, з урахуванням рівняння першого закону термодинаміки $\delta Q = dU + pdV$, може бути записана у вигляді

$$dU + pdV - TdS < 0. \quad (1.10)$$

Використання термодинамічних функцій дозволяє конкретизувати умови стійкості термодинамічних систем в окремих випадках, коли залишаються незмінними деякі термодинамічні параметри системи.

Вираження термодинамічних функцій через статистичну суму.

У статистичній фізиці імовірність P_α того, що незамкнена підсистема частинок, яка може обмінюватися енергією з іншими підсистемами частинок, які утворюють разом з нею замкнену систему, знаходиться у стані з енергією ϵ_α надається розподілом Гіббса (канонічним розподілом):

$$P_\alpha = e^{-\beta\epsilon_\alpha} / \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha}, \quad (1.11)$$

де $\beta = \frac{1}{kT}$, k - стала Больцмана.

За допомогою розподілу Гіббса обчислюють середні значення величин, які є динамічними характеристиками системи. Якщо деяка величина f у стані α має значення f_α , то її середнє значення дорівнює:

$$\langle f \rangle = \sum_\alpha f_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha} / \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha}.$$

Так, середнє значення енергії системи, яке є її важливою характеристикою, дорівнює

$$\langle \epsilon \rangle = \sum_\alpha \epsilon_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha} / \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha}. \quad (1.11)$$

Вираз $z = \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha}$ (1.12) має назву статистичної суми і виграє велику роль, оскільки за його допомогою у статистичній фізиці виражають важливі характеристики системи.

З урахуванням позначення (1.12) середню енергію системи можна представити у вигляді

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}. \quad (1.13)$$

При відсутності руху центра мас системи частинок:, тобто при $V = const$, вираз (1.13) можна прийняти за статистичне означення її внутрішньої енергії U . З урахуванням того, що

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{k\beta}\right)}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \cdot \left(-\frac{1}{k\beta^2}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V kT^2$$

для внутрішньої енергії отримуємо вираз:

$$U = -\left(\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}\right)_V = \left(\frac{\partial \ln z}{\partial T}\right)_V kT^2 \quad (1.13a)$$

Вираження вільної енергії через статистичну суму дає:

$$F = -kT \ln z. \quad (1.14)$$

Інші термодинамічні функції та термодинамічні параметри можна виразити через вільну енергію, скориставшись формулами (1.5), (1.7), (1.8):

ентропія $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k \ln z + kT \left(\frac{\partial \ln z}{\partial T}\right)_V;$ (1.15)

тиск $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T;$ (1.16)

ентальпія $H = U + pV;$

температура та об'єм $T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p;$ $V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S;$ (1.17)

термодинамічна функція Гіббса $G = U + pV - TS.$

Таким чином, за відомою статистичною сумою можна провести повний аналіз термодинамічного стану системи.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. За умови незмінної кількості частинок в системі з виразу для зміни внутрішньої енергії термодинамічної системи знайти зв'язок між частинними похідними температури та тиску.

Розв'язання

З формули $dU = TdS - pdV$ виражаємо температуру та тиск як частинні похідні внутрішньої енергії:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V; \quad p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S.$$

Звідки

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}; \quad \frac{\partial p}{\partial S} = - \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}.$$

Тобто відповідне співвідношення Максвелла має вигляд:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V.$$

Приклад 1.2. Знайти зв'язок між теплоємкостями системи, вимірними при постійному тиску C_p та постійному об'ємі C_V і коефіцієнтами ізотермічної стисливості k_T та термічного розширення α_T .

Розв'язання

$$\text{Теплоємкість системи при } V = \text{const} \quad C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V.$$

Теплоємкість системи при $p = \text{const}$

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

Для установлення зв'язку між теплоємкостями, вимірними за різними умовами зручно скористатися якобіаном перетворень $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, яким

називають детермінант $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$.

При цьому використаємо такі властивості якобіану перетворень:

$$а) \frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)};$$

$$б) \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y;$$

$$в) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(t, s)} \cdot \frac{\partial(t, s)}{\partial(x, y)}.$$

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = T \frac{\partial(S, V)}{\partial(T, V)} = T \frac{\frac{\partial(S, V)}{\partial(T, p)}}{\frac{\partial(T, V)}{\partial(T, p)}} = T \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial T} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p} =$$

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p - T \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T} = C_p - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T}.$$

З урахуванням співвідношення Максвелла $\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ та виразів для коефіцієнта ізотермічної стисливості $k_T = -V^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ та коефіцієнта термічного розширення $\alpha_T = V^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ остаточно отримуємо:

$$C_p - C_v = T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T} = TV \frac{\alpha_T^2}{k_T}.$$

Приклад 1.3. Виразити критерій стійкості системи з постійним тиском та ентропією.

Розв'язання

За умов $p = const$; $S = const$ нерівності (1.10) можна надати вигляду

$$d(U + pV) < 0, \text{ тобто } dH < 0,$$

тобто в системі самочинно можуть відбуватися лише такі процеси, які супроводжуються зменшенням її ентальпії H .

Отже, стійким є стан системи, якому відповідає мінімум її ентальпії.

Приклад 1.4. Статистичну суму одноатомного ідеального газу, надає формула

$$z = \frac{e^n V^n}{(2\pi\hbar)^{3n} n^n} (2\pi mkT)^{3n/2}, \quad (1.18)$$

де n – кількість частинок системи, m – маса частинки. Визначити вільну енергію системи.

Розв'язання

За формулою (1.13) з використанням виразу (1.17) для статистичної суми ідеального газу знаходимо

$$F = -kT \ln z = -kT \ln \left(\frac{e^n V^n (2\pi mkT)^{3n/2}}{(2\pi\hbar)^{3n} n^n} \right) = -nkT \left[\ln \left(\frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{n (2\pi\hbar)^3} \right) + 1 \right]. \quad (1.19)$$

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Використовуючи вирази для повних диференціалів ентальпії, вільної енергії та термодинамічного потенціалу за умови незмінного складу системи вивести відповідні співвідношення Максвелла.

$$\text{Відповідь: } \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T.$$

1.2. Отримати вираз для різниці теплоємностей $C_p - C_v$ перетворенням виразу $C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$.

$$\text{Відповідь: } C_p - C_v = -T \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T}.$$

1.3. За допомогою співвідношення Максвелла $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ вивести рівняння Клапейрона – Клаузіуса, яке надає залежність рівноважного тиску від температури для системи “рідина – насичена пара”.

Відповідь: $\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v_2 - v_1)}$, де r – питома теплота випаровування, v_2 та v_1 – питомі об’єми пари та рідини відповідно.

1.4. Виразити критерій стійкості системи з постійним об’ємом та ентропією ($V = const$; $S = const$).

Відповідь: стійким є стан системи, якому відповідає мінімум внутрішньої енергії.

1.5. Виразити критерій стійкості системи з постійним об’ємом та температурою ($V = const$; $T = const$).

Відповідь: стійким є стан системи, якому відповідає мінімум вільної енергії.

1.6. Виразити критерій стійкості системи з постійним тиском та температурою ($p = const$; $T = const$).

Відповідь: стійким є стан системи, якому відповідає мінімум термодинамічного потенціалу.

1.7. За допомогою виразу (1.18) для статистичної суми ідеального газу знайти його ентропію.

Вказівки: використати співвідношення (1.15) та вираз для свобідної енергії (1.19).

Відповідь:
$$S = nk \left[\ln \left(\frac{V (2\pi mkT)^{3/2}}{n (2\pi\hbar)^3} \right) + \frac{5}{2} \right]. \quad (1.20)$$

1.8. За допомогою виразів (1.18) і (1.19) для статистичної суми та вільної енергії ідеального газу знайти його внутрішню енергію та тиск.

Вказівки: для розв’язання задачі використати співвідношення (1.13a) та (1.16).

Відповідь:
$$U = \frac{3}{2} nkT; \quad p = \frac{\nu RT}{V}.$$

1.9. Знайти зміну ентропії при змішуванні двох мас одноатомного газу, які до змішування займали об'єми V_1 і V_2 при температурах T_1 і T_2 . Маса газів m_1 та m_2 відповідно.

Вказівки:

1. Процес змішування можна розбити на два послідовних процеси: а) процес ізотермічного поширення кожного з газів від свого об'єму до кінцевого об'єму $V = V_1 + V_2$; б) процес вирівнювання температур до температури T при постійному об'ємі. Кінцеву температуру T слід визначити за допомогою рівняння теплового балансу.

2. Початковий стан кожного з газів описується за допомогою рівняння Менделєєва –Клапейрона; $p_1V_1 = \nu_1RT_1$; $p_2V_2 = \nu_2RT_2$, де $\nu_1 = \frac{m_1}{M}$ і $\nu_2 = \frac{m_2}{M}$ - кількість молів у кожній з частин газу; M – молярна маса газу.

3. Кінцевий стан системи після змішування та установлення рівноваги (вирівнювання температури та тиску) описує рівняння $pV = \nu RT$, де $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

4. Вираз для ентропії (1.20) за допомогою співвідношень $V = \frac{\nu RT}{p}$,

$n = \nu N_A$, $R = kN_A$ привести до вигляду:

$$S = \nu R \left[\ln \left(\frac{kT(2\pi mkT)^{3/2}}{p(2\pi\hbar)^3} \right) + \frac{5}{2} \right].$$

5. Визначити зміну ентропії кожної з мас газу при її поширенні до кінцевого об'єму V і тиску p і подальшої зміни температури до кінцевого значення T .

Відповідь:
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \nu_1 R \ln \left[\frac{p_1}{p} \cdot \left(\frac{T}{T_1} \right)^{5/2} \right] + \nu_2 R \ln \left[\frac{p_2}{p} \cdot \left(\frac{T}{T_2} \right)^{5/2} \right]$$

2. МАКРОСКОПІЧНІ МОДЕЛІ ЕКОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

2.1. Планетарний клімат як задача фізики

Основні поняття і формули

• **Теплове випромінювання** – випромінювання тілами електромагнітних хвиль за рахунок внутрішньої енергії.

Характеристики та закони теплового випромінювання.

Випромінювальна здатність тіла $R(T)$ – кількість енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла по всім напрямкам за одиницю часу в усьому інтервалі частот:

$$R = \frac{dW}{dt \cdot ds} \cdot [R_e] = \left[\frac{Вт}{м^2} \right] \quad (2.1)$$

Спектральна випромінювальна здатність тіла $r(\lambda, T)$ або $r(\nu, T)$ – відношення кількості енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла за одиницю часу в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ або інтервалі частот $(\nu, \nu + d\nu)$, до цього інтервалу:

$$r(\lambda, T) = \frac{dW_\lambda}{dt \cdot ds \cdot d\lambda} ; \quad r(\nu, T) = \frac{dW_\nu}{dt \cdot ds \cdot d\nu} \quad (2.2)$$
$$[r(\lambda, T)] = \left[\frac{Вт}{м^3} \right]; \quad [r(\nu, T)] = \left[\frac{Дж}{м^2} \right].$$

Повна випромінювальна здатність R_e пов'язана із спектральною випромінювальною здатністю r_λ співвідношенням

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda. \quad (2.3)$$

Поглинальна здатність тіла $a(T)$ показує, яку долю падаючого випромінювання поглинає тіло при заданій температурі.

Спектральна поглинальна здатність тіла $a(\lambda, T)$ або $a(\nu, T)$ – показує, яку частину падаючого випромінювання в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ або інтервалі частот $(\nu, \nu + d\nu)$ тіло поглинає при заданій температурі.

Абсолютно чорне тіло – тіло, яке здатне повністю поглинати падаюче на нього випромінювання всіх довжин хвиль при будь-якій температурі, тобто для абсолютно чорного тіла $a(T) = a(\lambda, T) = a(\nu, T) \equiv 1$.

Сірим називають тіло, спектральна поглинальна здатність якого не залежить від довжини хвилі (частоти), але < 1 .

Закон Стефана – Больцмана для абсолютно чорного тіла

$$R_e = \sigma T^4, \quad (2.4)$$

де R_e – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла; σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$; T – температура за термодинамічною шкалою температур.

Якщо тіло не абсолютно чорне, а сіре, то

$$R = a \sigma T^4 \quad (2.5)$$

де a – поглинальна здатність сірого тіла; завжди < 1 .

Для абсолютно чорного тіла справедливі перший та другий закони Віна.

Закон зміщення Віна (перший закон Віна)

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (2.6)$$

де λ_{\max} – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання, тобто яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла; b – стала закону зміщення Віна, $b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Приклад 2.1. Температура сонячної поверхні дорівнює приблизно 5800К. Оцінити енергію фотонів, які відповідають максимуму емісійного спектру випромінювання Сонця.

Розв'язання

Для оцінки довжини хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності Сонця, скористаємося першим законом Віна (2.6):

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Енергія відповідних фотонів дорівнює

$$\varepsilon = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = \frac{hcT}{b}.$$

$$\varepsilon = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5,8 \cdot 10^3}{2,9 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 3,97 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,48 \text{ eV}$$

Приклад 2.2. Оцінити густину потоку енергії, яку Земля отримує від Сонця. Радіус Сонця $R_C = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$; відстань між Сонцем і Землею $r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

Розв'язання

Якщо припустити, що сонячне випромінювання є випромінюванням абсолютно чорного тіла, повний потік енергії W_C , випромінюваний Сонцем, можна оцінити, скориставшись законом Стефана – Больцмана (2.4):

$$W_C = 4\pi R_C^2 \cdot \sigma T^4,$$

де R_C - радіус Сонця; T – його температура.

Частку k цієї енергії, яку отримує Земля, можна оцінити, як відношення тілесного кута $d\Omega = \frac{\pi R_3^2}{r^2}$ (R_3 - радіус Землі, r - відстань від Сонця до Землі), в межах якого сонячне випромінювання падає на Землю, до повного тілесного кута $\Omega = 4\pi$, у якому випромінює Сонце:

$$k = \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{R_3^2}{4r^2}.$$

Тоді потік енергії W_3 , що падає щосекунди на поверхню Землі, дорівнюватиме

$$W_3 = 4\pi R_C^2 \cdot \sigma T^4 \cdot k = \frac{\pi R_C^2 \cdot \sigma T^4 R_3^2}{r^2},$$

а густина потоку енергії S :

$$S = \frac{W_3}{\pi R_3^2} = \sigma T^4 \left(\frac{R_C}{r} \right)^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5,8^4 \cdot 10^{12} \left(\frac{6,96 \cdot 10^8}{1,49 \cdot 10^{11}} \right)^2 = 1.399 \cdot 10^3 \frac{Вт}{м^2}.$$

Приклад 2.3. Оцінити середню температуру земної атмосфери.

Розв'язання

У стаціонарному стані енергія, яку отримує Земля від Сонця мала б дорівнювати енергії, яку вона випромінює у космічний простір. При цьому необхідно урахувати, що певна відносна кількість сонячної енергії, яку задає альbedo a , відбивається назад у космос.

Рівняння балансу енергії випромінювання можна записати у вигляді:

$$(1 - a)\pi R_3^2 S = 4\pi R_3^2 \sigma T^4$$

де $a = 0,34$ – альbedo; густина потоку сонячної енергії S , тобто енергія сонячного випромінювання на одиницю площі, перпендикулярної до напрямку її розповсюдження; T - відповідна температура земного випромінювання, яка спостерігається зовні. Звідки:

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1-a)S}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{(1-0,34) \cdot 1,399 \cdot 10^3}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} \approx 255 \text{ K}$$

Зауважимо, що температура біля поверхні Землі є трохи вищою і становить приблизно 288K.

Завдання. Спробуйте пояснити цей феномен.

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. - 2.8. За наведеними в таблиці 2.1 даними 1) оцінити густина потоку енергії, яку планета отримує від Сонця; 2) визначити середню температуру атмосфери планети та порівняти отримані значення з довідниковими; 3) за знайденою температурою визначити довжину хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності планети та енергію відповідних фотонів.

Таблиця 2.1. Деякі параметри планет сонячної системи

Назва	Середній радіус, (км)	Радіус орбіти, млн. км	Альbedo
Меркурій	2439.7 ± 1.0	58	0.10
Венера	6051.8 ± 1.0	108	0.65
Земля	6371.00 ± 0.01	150	0.37
Марс	3389.508 ± 0.003	228	0.15
Юпітер	69911 ± 6	778	0.52
Сатурн	58232 ± 6	1429	0.47
Уран	25362 ± 7	2871	0.51
Нептун	24622 ± 19	4504	0.41

2.2. Методи кінетичних моделей. Модель Лотки – Вольтера

Методи кінетичних моделей, які були покладені в основу сучасної теорії дисипативних структур широко застосовують в екологічних задачах, оскільки закони, що керують зростанням, розпадом і взаємодією в біологічних популяціях схожі на закони фізико-хімічної кінетики.

У якості приклада такої кінетичної моделі розглянемо відому модель трофічної взаємодії «хижак-жертва», запропоновану Лотки і Вольтера.

Система лінійних диференціальних рівнянь цієї моделі має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2) \end{cases}, \quad (2.7)$$

Перше рівняння описує динаміку першого типу тварин – «жертв» (наприклад, зайців або карасів), які споживають рослини. Перший доданок у правій частині цього рівняння надає природне розмноження жертв, другий – їх зменшення за рахунок зустрічі з «хижаками» (наприклад, рисями або щуками). Друге рівняння характеризує динаміку зміни чисельності хижаків: збільшення кількості хижаків, які харчуються жертвами (перший доданок), їх природне зменшення при відсутності їжі (другий доданок)

Отже, у системі рівнянь (2.7):

N_1 – чисельність популяції жертви;

N_2 – чисельність популяції хижаків;

ε_1 – коефіцієнт природного розмноження жертв;

γ_1 – швидкість споживання жертви хижаком;

$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ – коефіцієнт приросту жертви;

ε_2 – коефіцієнт смертності хижака у відсутності жертви;

γ_2 – коефіцієнт «переробки» біомаси жертви хижаком у власну біомасу;

$\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2$ – коефіцієнт приросту хижаків.

Усі коефіцієнти є додатними і постійними.

Стационарні розв'язки моделі визначаються з рівнянь (2.7) за умов

$$\frac{dN_1}{dt} = 0; \quad \frac{dN_2}{dt} = 0;$$

$$\begin{cases} N_{10} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ N_{20} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \end{cases} \quad (2.8)$$

Доля хижаків у загальній масі тварин надається формулою

$$\frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{\varepsilon_1 / \gamma_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \gamma_1 / \gamma_2} \quad (2.9)$$

Лінеаризація рівнянь системи (2.7) поблизу стаціонарного розв'язку, тобто представлення розв'язку у вигляді суми стаціонарних значень змінних N_{10} і N_{20} та малих збурень $\zeta = A \exp(\lambda t)$ і $\eta = B \exp(\lambda t)$, приводить до характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda & (\gamma_2/\gamma_1)\varepsilon_2 \\ -(\gamma_2/\gamma_1)\varepsilon_1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0,$$

звідки шукані корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = \pm i(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{1/2}$ (2.10)

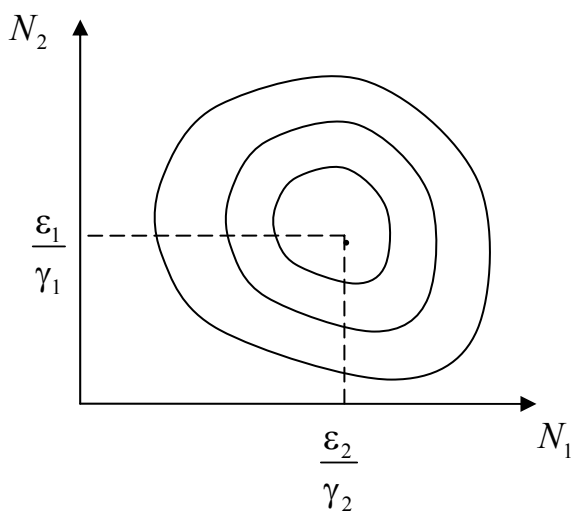


Рис.2.1 Фазовий портрет класичної системи «хижак – жертва»

У відповідності з класифікацією особливих точок за Пуанкаре особлива точка в моделі «хижак – жертва» є «нейтрально» стійкою (центр або граничний цикл). Тобто, будь-які відхилення від рівноваги не згасають, а переводять систему у коливальний режим з амплітудою, яка залежить від величини збурення. Траєкторії системи на фазовій площині (N_1, N_2) мають

вигляд замкнених кривих, які розташовані на різних відстанях від точки рівноваги (рис. 2.1).

Диференціальне рівняння кривої на фазовій площині можна отримати діленням першого рівняння системи (2.1) на друге:

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{N_1}{-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1} \frac{\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2}{N_2}. \quad (2.11)$$

Інтегруванням рівняння (2.5) можна отримати його розв'язок:

$$N_1^{-\varepsilon_2} N_2^{-\varepsilon_1} e^{\gamma_2 N_1} e^{\gamma_1 N_2} = C,$$

де C – стала інтегрування, яка дорівнює

$$C = N_1^{-\varepsilon_2} e^{\gamma_2 N_1} / N_2^{\varepsilon_1} e^{-\gamma_1 N_2}.$$

Отриманий в моделі Лотки – Вольтера результат відображує періодичні зміни чисельності популяцій хижаків та жертв, яке спостерігається у реальних умовах. Нею пояснювали коливання чисельності хижих та мирних тварин у промислових зонах, коливання в популяціях риб і т. ін.

В той же час модель є спрощеним відображенням взаємодії в системі хижак – жертва порівняно з реальними умовами:

- у рівняннях (2.7) не враховується обмеженість споживчих ресурсів для жертв, що приводить до висновку про необмежене зростання їх кількості, якщо чисельність хижака дорівнює нулю;
- ані жодна з фазових кривих не виділена з точки зору стійкості системи;
- випадкові зміни чисельності одного з видів впливають на амплітуди коливань кожного виду і т. ін..

У той же час модель стала основою для побудови багатої кількості більш загальних моделей, які в тій чи іншій мірі враховують реальні ситуації, що існують у природі.

Задачі для самостійного розв'язування

2.9-2.15. У рамках моделі Лотки–Вольтера за заданими параметрами моделі дослідити зміну чисельності двох біологічних видів (карасі та щуки), які сумісно існують в ізольованій системі (озері). Середовище стаціонарне і забезпечує у необмеженій кількості усім необхідним один з видів, який є жертвою (карасі). Другий вид – щуки (хижак) також

знаходиться у стаціонарних умовах, але годується тільки карасями.

Вказівки.

Задану екосистему описує система двох диференціальних рівнянь (2.7):

$$\begin{cases} \frac{dN_{\kappa}}{dt} = N_{\kappa} (\varepsilon_{\kappa} - \gamma_{\kappa} N_{\psi}) \\ \frac{dN_{\psi}}{dt} = N_{\psi} (\gamma_{\psi} N_{\kappa} - \varepsilon_{\psi}) \end{cases},$$

де ε_{κ} , ε_{ψ} , γ_{κ} , γ_{ψ} – параметри моделі.

Змінюючи параметри і розв'язуючи систему рівнянь, можна дослідити закономірності зміни стану екологічної системи.

Інтегрування рівнянь за часом у межах від початкового моменту часу t_0 до $t_0 + T$, де T – період за який відбуваються зміни в екосистемі (за припущенням $T=1$ року) дає:

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_0+1} \frac{dN_{\kappa}(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_0+1} N_{\kappa} (\varepsilon_{\kappa} - \gamma_{\kappa} N_{\psi}) dt \\ \int_{t_0}^{t_0+1} \frac{dN_{\psi}(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_0+1} N_{\psi} (\gamma_{\psi} N_{\kappa} - \varepsilon_{\psi}) dt \end{cases};$$

$$\begin{cases} N_{\kappa}(t) \Big|_{t_0}^{t_0+1} = N_{\kappa} (\varepsilon_{\kappa} - \gamma_{\kappa} N_{\psi}) t \Big|_{t_0}^{t_0+1} \\ N_{\psi}(t) \Big|_{t_0}^{t_0+1} = N_{\psi} (\gamma_{\psi} N_{\kappa} - \varepsilon_{\psi}) t \Big|_{t_0}^{t_0+1} \end{cases}$$

Приймаємо, що $N_{\kappa} = N_{\kappa}(t_0)$ і $N_{\psi} = N_{\psi}(t_0)$, після приведення подібних отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} N_{\kappa}(t_0 + 1) = N_{\kappa}(t_0) + N_{\kappa} (\varepsilon_{\kappa} - \gamma_{\kappa} N_{\psi}) \\ N_{\psi}(t_0 + 1) = N_{\psi}(t_0) + N_{\psi} (\gamma_{\psi} N_{\kappa} - \varepsilon_{\psi}) \end{cases},$$

підстановка в яку вихідних даних надає популяцію щук та карасів рік потому.

Отримані значення чисельності популяцій використовуємо для розрахунку за тими самими формулами кількості хижаків та жертв після проходження ще одного року.

1. За даними, наведеними у таблиці 2.2, повторюючи розрахунки за наведеною схемою з кроком в один рік визначити зміни в обох популяціях на протязі 10 років. Результати розрахунків представити у вигляді таблиці та графіків.

Таблиця 2.2.

Назва показника	Щуки	Карасі
$N(t_0)$ – початкова чисельність популяції	6000	900
	7000	900
	8000	1000
	8000	1100
	9000	1100
	8000	1200
ε – коефіцієнти природного зростання / смертності	1,1	0,001
γ – коефіцієнти міжвидової взаємодії	0,0001	0,0001

2. **Завдання.** Дослідити вплив зміни параметрів на динаміку чисельності популяцій.

3. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ПРИ ВИРІШЕННІ НЕСТАЦІОНАРНИХ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ ПРИ РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

Основні поняття і формули

- Узагальнене рівняння дифузії у випадку наявності джерел або стоків частинок для реакцій першого порядку має вигляд:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div}(\vec{v}(\vec{r}, t)n(\vec{r}, t)) + \operatorname{div}(D(\vec{r})\operatorname{grad}n(\vec{r}, t)) + \chi(\vec{r}, t)n(\vec{r}, t).$$

Тут $n(\vec{r}, t)$ - концентрація частинок, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ - вектор швидкості руху середовища в точці \vec{r} в момент t відносно нерухомого спостерігача; $\chi(\vec{r}, t)$ - коефіцієнт реакції.

При $D = \text{const}$ і $\chi = \text{const}$ у відсутності конвективної течії ($\vec{v}(\vec{r}, t) = 0$) рівняння дифузії зводиться до лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\Delta n(\vec{r}, t) + \chi n(\vec{r}, t), \quad (3.1)$$

де Δ – оператор Лапласа.

При відсутності джерел та стоків частинок рівняння (3.1) спрощується:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D\Delta n(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

- Задача Коші полягає в визначенні розв'язку $x = x(t)$ лінійного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x^{(1)} + a_0 = f(t),$$

який задовольняє початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x^{(1)}(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

Операційний метод розв'язування цієї задачі полягає в тому, що шукану функцію і праву частину диференціального рівняння вважають оригіналами і переходять від рівняння, яке зв'язує оригінали до рівняння, що зв'язує зображення. Далі застосовують теорему диференціювання оригіналу, враховують лінійність обох частин рівняння, поклавши

$$f(t) \leftarrow F(p); x(t) \leftarrow X(p).$$

Отримують лінійне алгебраїчне рівняння, яке розв'язують відносно $X(p)$. Для знайденого зображення $X(p)$ знаходять оригінал $x(t)$, який і є шуканим розв'язком. Основні оригінали і їх зображення наведені в таблиці 1 додатку.

• Розв'язок задачі Коші (задачі з початковими умовами) можна побудувати, скориставшись загальним методом, який базується на побудові функції впливу (функції Гріна). Функція Гріна, яка описує еволюцію у часі часток сумарної одиничної маси, яка в момент часу $t = t_0$ була сконцентрована в точці $x = \xi$ у одновимірному випадку має вигляд

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-(x-\xi)^2/4D(t-t_0)} \quad (3.3)$$

і дозволяє записати розв'язок рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

який задовольняє довільній початковій умові

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x) \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t; \xi, t_0) \rho_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4D(t-t_0)} d\xi. \quad (3.4)$$

Ця формула надає можливість в окремих випадках точно, а частіше чисельно отримувати розв'язки розглянутої задачі.

Приклад 3.1. Довести виконання у випадку дифузії у нескінченному середовищі закону збереження маси :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = M_0 = const.$$

Для доведення (3.4) візьмемо похідну від лівої частини за часом t як за параметром, після цього скористуємося рівнянням (3.2) і дістанемо інтеграл:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = D \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

На обох кінцях інтервалу, тобто при $x = \pm\infty$, за умовою $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$.

Таким чином

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) dx = 0,$$

звідки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) dx = \text{const}.$$

Приклад 3.2. Знайти розв'язок рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

на всій вісі x при заданому початковому розподілі густини часток домішки із застосуванням перетворень Фур'є.

Розв'язання

Кожній функції $f(x)$, визначеній на всій вісі x і достатньо швидко згасаючій при $x \rightarrow \pm\infty$, можна поставити у відповідність її Фур'є - образ (спектральну щільність) $F(k)$, яка зв'язана з $f(x)$ формулами:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx; \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk.$$

Далі використовуються такі властивості перетворень Фур'є:

1. Це перетворення – лінійне: при додаванні оригіналів $f(x)$ зображення $F(k)$ також додаються.
2. При залежності оригіналу і відповідно зображення від деякого параметра μ , диференціювання одного з них за цим параметром приводить до диференціювання іншого за тим самим параметром:

$$f'_\mu(x, \mu) \rightarrow F'_\mu(k, \mu).$$

3. При диференціюванні оригіналу за x зображення множиться на ik .

Позначимо через $R(k,t)$ Фур'є - образ шуканого розв'язку $\rho(x,t)$ для фіксованого t . Тоді

$$R(k,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,t) e^{-ikx} dx; \quad \rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(k,t) e^{ikx} dk. \quad (3.5)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

приходимо до співвідношення

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -Dk^2 R . \quad (3.6)$$

Рівнянню повинен задовольняти Фур'є - образ розв'язку. Це співвідношення при будь-якому фіксованому k є звичайним диференціальним рівнянням, яке розв'язується методом розділення змінних:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= -Dk^2 dt . \\ R &= C(k)e^{-Dk^2 t} \end{aligned} \quad (3.7)$$

де стала інтегрування C може залежати від k . Довільна функція $C(k)$ визначається початковою умовою:

при $t=0$ $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, звідки згідно з (3.2)

$$C(k) = R|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(x) e^{-ikx} dx . \quad (3.5)$$

Повертаючись від Фур'є - образу розв'язку до оригіналу за допомогою другої формули (3.2) з урахуванням (3.4) і (3.5), отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Dk^2 t + i(x-\xi)k} dk . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отриманий розв'язок можна спростити, оскільки внутрішній інтеграл можна обчислити. Перепишемо його у вигляді

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2 + i\beta k} dk ,$$

де α – дійсне позитивне число. Доповнюємо показник ступеню до повного квадрата:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(k^2 - \frac{i\beta}{\alpha} k \right)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(k^2 - \frac{i\beta}{2\alpha} k \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}} dk = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \left(k - \frac{i\beta}{2\alpha} \right)^2} dk = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} dk ,$$

де $\lambda = \frac{\beta}{2\alpha}$.

Щоб з'ясувати залежність інтеграла від λ , візьмемо від нього похідну за λ як за параметром:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} [-\alpha(-i)2(k-i\lambda)] dk = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k-i\lambda)^2} [-\alpha(k-i\lambda)^2]_k' dk = \\ &= -ie^{-\alpha(k-i\lambda)^2} \Big|_{k=-\infty}^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Тобто I не залежить від λ , а тому при обчисленні інтеграла можна покласти $\lambda=0$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} dk = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\alpha}k = z; \\ dk = dz/\sqrt{\alpha} \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Таким чином,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2 + i\beta k} dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

У формулі (3.6) $\alpha = Dt$; $\beta = x - \xi$. З урахуванням отриманого для інтеграла I виразу (3.6) набуває вигляду

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi.$$

Приклад 3.3. Знайти розв'язок рівняння дифузії у випадку блукання частинок вздовж половини осі за граничною умовою першого роду $\rho|_{x=0} = 0$, тобто, якщо частинки, які потрапили в точку $x=0$, назавжди покидають вісь.

Розв'язання

I. Будемо вважати, що частинки, які потрапили в точку $x=0$, назавжди покидають вісь.

Побудуємо функцію Гріна для випадку, коли в початковий момент t_0 порція часток одиничної маси знаходиться в точці ξ . Для цього припустимо, що частинки можуть рухатися вздовж усієї осі, тобто в точці $x=0$ немає ніякої особливості. Нехай в момент t_0 у точці ξ сконцентрована одинична додатна маса часток, а в точці $(-\xi)$ – одинична від'ємна маса. Тоді внаслідок симетрії розподілу часток у точці $x=0$ густина весь час буде дорівнювати нулю. Тому, якщо картину розглядати тільки на половині осі $0 \leq x < \infty$, то отримуємо процес, який задовольняє необхідним початковій та граничній умові, а також нерівності $\rho \geq 0$. Остання нерівність є наслідком того, що завдяки симетрії за кожний інтервал часу в точку $x=0$ приходить однакова кількість додатних і

від'ємних частинок, які нейтралізують одна одну. Тому на половині осі $0 \leq x \leq \infty$ залишаються тільки частинки додатної маси.

Зроблене припущення дозволяє виразити функцію Гріна в даній задачі через таку, що була отримана для всієї осі (тільки з початковою умовою):

$$G_1(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0) \quad (3.7)$$

Далі, використовуючи формулу (3.3)

$$G(x, t; \xi, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}},$$

отримуємо розв'язок задачі при довільній початковій умові $\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x)$ і граничній умові $\rho|_{x=0} = 0$.

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) \rho_0(\xi) d\xi. \quad (3.8)$$

Використаний метод приведення нової задачі до задачі з уже відомим розв'язком шляхом розширення області, в якій будується розв'язок, на основі симетрії носить назву **метода відображення** або **метода фіктивних джерел**.

Приклад 3.4. Знайти розв'язок рівняння дифузії за виконанням граничної умови першого роду при початковому рівномірному розподілу частинок вздовж півосі: $\rho_0(\xi) \equiv \rho_0 \equiv const$

Розв'язання

Скористаємося функцією Гріна (3.8), побудованою у попередньому прикладі. При $t > t_0$

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} \right) d\xi.$$

Цей інтеграл легко виразити через інтеграл ймовірностей (рис. 3.1)

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2} ds.$$

скориставшись заміною: $s = \frac{x \mp \xi}{\sqrt{2D(t-t_0)}}$. $ds = \mp \frac{d\xi}{\sqrt{2D(t-t_0)}}$;

$$d\xi = \mp \sqrt{2D(t-t_0)} ds; \quad \xi = 0; \quad s = \frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}};$$

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-t_0)}} d\xi \right) = \\ &= -\frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \cdot \sqrt{2D(t-t_0)} \left[\int_{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}}^{-\infty} e^{-s^2/2} ds + \int_{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-s^2/2} ds \right] = \\ &= -\frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi}} \left[-\int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds + \int_0^{\infty} e^{-s^2/2} ds - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds \right] = \\ &= \rho_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}}} e^{-s^2/2} ds = \rho_0 \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{2D(t-t_0)}} \right) \end{aligned}$$

Графіки отриманого розв'язку у послідовні моменти часу зображені на рис.3.2.

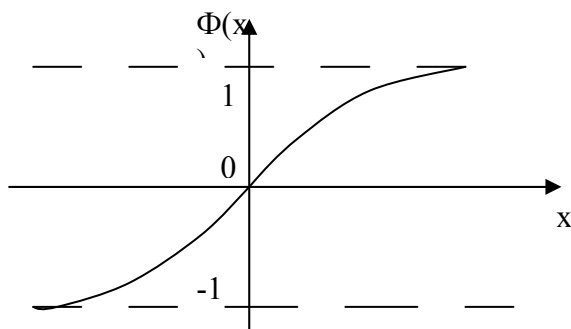


Рис. 3.1

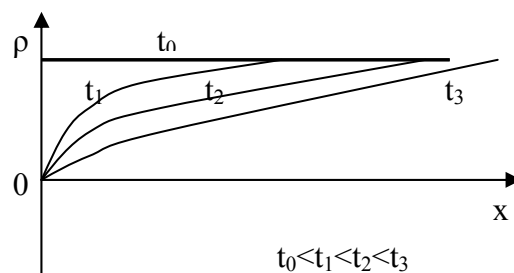


Рис. 3.2

Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Показати, що інваріантною за часом є не тільки маса домішки, але й момент першого порядку $\rho(x, t)$ $M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x, t)dx$.

Вказівки: Довести властивість шляхом диференціювання за параметром із подальшим використанням рівняння дифузії (3.2) і інтегруванням за частинами.

3.2. Показати, що момент другого порядку M_2 змінюється з часом за лінійним законом:

$$M_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho_0(x, t_0) dx + 2D \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx \cdot (t - t_0)$$

Вказівки: довести цю властивість аналогічно попередньому.

3.3. Показати, що з інваріантності маси M_0 і моменту першого порядку M_1 випливає нерухомість центра тяжіння середовища $x_{u.m.} = \frac{M_1}{M_0}$.

3.4. Отримати аналог закону збереження маси для неоднорідного рівняння дифузії

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + f(x, t) .$$

Відповідь: $\frac{d}{dt} \int \rho dx = \int f(x, t)$.

3.5. Знайдіть закон, за яким змінюється з часом момент третього порядку при розв'язку рівняння дифузії.

Відповідь: $M_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \rho_0(x, t_0) dx + 6D \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho dx \cdot (t - t_0)$

3.6. Показати, що у випадку, коли густина частинок задовольняє рівнянню дифузії $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ та граничній умові першого роду

$\rho|_{x=0} = 0$ кількість частинок системи буде безперервно зменшуватися.

3.7. Показати, що у випадку, коли густина часток задовольняє рівнянню дифузії $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ та граничній умові першого роду $\rho|_{x=0} = 0$

момент першого порядку M_1 залишається інваріантним за часом, тобто $\frac{\partial M_1}{\partial t} = 0$.

3.8. Користуючись таблицею оригіналів та зображень, визначити, які з функцій є функціями-оригіналами: а) $5e^{3t}$; б) $\frac{1}{t-5}$; в) $2t^2 - 5t + 3$.

Відповідь: а) так; б) ні; в) так.

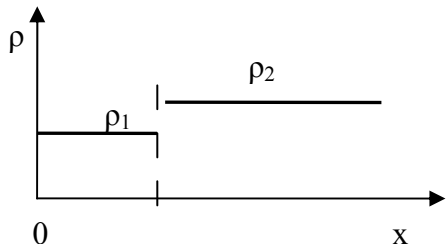
3.9. Знайти зображення за Лапласом наведених функцій, користуючись таблицею оригіналів та зображень

а) $f(t) = t^2 - 2t$; б) $f(t) = 2\sin^2 t + 1$; в) $f(t) = 2\sin 4t \cos 6t - 3e^{7t}$.

Відповідь: а) $F(p) = \frac{2(1-p)}{p^3}$; б) $F(p) = \frac{p^2 + 8}{p(p^2 + 4)}$; в)

$$F(p) = \frac{10}{p^2 + 100} - \frac{2}{p^2 + 4}$$

3.10. Знайти розв'язок рівняння дифузії за виконанням граничної умови першого роду у випадку розривної початкової функції, коли $\rho_0(x) \equiv \rho_1$ при $(x < x_p)$; $\rho_0(x) \equiv \rho_2$, при $(x > x_p)$ (див. рис. 3.3)



Відповідь:

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \Phi\left(\frac{x - x_p}{\sqrt{2D(t - t_0)}}\right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}$$

$(t_0 < t < \infty; -\infty < x < \infty)$.

Рис.3.3

3.10. Побудувати функцію Гріна для випадку блукання частинки вздовж відрізка $0 \leq x \leq l$ за виконанням граничних умов першого роду:

$$\rho|_{x=0} = 0; \quad \rho|_{x=l} = 0.$$

Частинки вільно залишають відрізок назавжди через обидва кінця відрізка.

Відповідь:

$$G_l(x, t; \xi, 0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [G(x, t; 2jl + \xi, 0) - G(x, t; 2jl - \xi, 0)] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-2jl-\xi)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x-2jl+\xi)^2}{4Dt}} \right).$$

3.11. За допомогою функції Гріна, отриманої при розв'язуванні попередньої задачі, записати закон еволюції густини частинок при наданому початковому розподілі $\rho_0(x)$.

Відповідь:

$$\begin{aligned}\rho(x,t) &= \int_0^l G_l(x,t;\xi,0)\rho_0(\xi)d\xi = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^l (G(x,t;2jl+\xi,0) - G(x,t;2jl-\xi,0))\rho_0(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

3.12. Початковий розподіл густини домішки на відрізку $0 \leq x \leq l$ задається формулою $\rho_0(x) = \rho_0 = const$. Представити розподіл густини в наступні моменти часу як суму ряду, члени якого експоненціальні за часом.

Відповідь:

$$\rho = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5} \sin \frac{4\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right) \rho_0.$$

3.13. А) За отриманим у попередній задачі виразом для густини шляхом інтегрування визначити у вигляді суми ряду масу домішки.

Б) Знайти вираз для швидкості зміни маси домішки за часом - $\left(\frac{dM}{dt} \right)$.

Показати, що при $t=0$ $\frac{dM}{dt} = \infty$, тобто для вірного опису процесу

необхідно брати тим більшу кількість членів ряду, чим менше t .

3.14. Побудувати функцію Гріна для випадку одномірної дифузії, коли внаслідок деяких (узагалі нестационарних) процесів у систему по заданому закону надходять нові частинки, або система може їх втрачати. Процеси можуть відбуватися в усіх точках середовища. Просторово-часова густина народження частинок $S(x,t)$

Відповідь:

$$\rho(x,t) = \int G(x,t;\xi,t_0)\rho_0(\xi)d\xi + \int_{t_0}^t d\xi \int G(x,t;\xi,\tau) S(\xi,\tau) d\tau, \text{ де } S(\xi,\tau)$$

Додаток.

Таблиця. Основні оригінали та їх зображення

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	12	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
2.	$t^n (n=1,2,\dots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$e^{\lambda t} sh \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
3.	$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	14	$e^{\lambda t} ch \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
4.	$e^{\lambda t} (\lambda = a + bi)$	$\frac{1}{p - \lambda}$	15	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
5.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$	16	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
6.	$t^\alpha e^{\lambda t} (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p - \lambda)^{\alpha+1}}$	17	$t sh \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
7.	$\sin \omega t (\omega > 0)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	18	$t ch \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
8.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	19	$\sin(t - \tau)$ ($\tau > 0$)	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
9.	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	20	$\cos(t - \tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}$
10	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	21	$t^n \sin \omega t$	$\frac{\text{Im}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
11	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$	22	$t^n \cos \omega t$	$\frac{\text{Re}(p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$
23	$\frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^3} \div \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$				

Література

Основна література

1. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.:Наука, 1985.
2. Климантович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Москва 2001г.
3. Герасимов О.І. Елементи фізики довкілля: Навчальний посібник. – Одеса, Вид-во „ТЕС”, 2003. – 144с
4. Чалий О.В. Сінергетичні принципи освіти і науки. Київ, 2000.

Додаткова література

1. Дойч Д. Структура деятельности. Москва 2001г.
2. Галимов Є.М. Феномен жизни. УРСС. Москва. 2001 г.
3. Єбелінг В., Єнгель А., Файстель Р. Физика процессов. еволюції. УРСС. Москва. 2001г.
4. Герасимов О.І., Співак А.Я., Механіка суцільних середовищ. Одеса. ОГМІ, 2000 р.
5. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.:Мир,1979.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного М.:Мир,1990.
7. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.:Мир, 1980.
9. Капра Ф. Паутина жизни. К.:“София”, 2002

Методичні вказівки

1. Герасимов О.І., Настасюк В.А. Методичні вказівки до практичних робіт «Основи екологічної фізики», Одеса, ОДЕКУ, 2003, 61с.