



МІНІСТРЕСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет магістерської та аспірантської підготовки

Кафедра загальної та теоретичної фізики

Рівень вищої освіти магістр

Спеціальність 183 Технології захисту навколишнього середовища

(шифр і назва)

(наказ № 235-С , від 18.10.2019 )

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри загальної та  
теоретичної фізики Герасимов О. І.

“ 28 ” 10 2019 р

ЗАВДАННЯ  
НА МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТА

Харченко Владислав Ігорович

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи: *Аналіз станів систем довкілля та оцінка степені їх безпеки*  
*за допомогою хвильового аналізу*

керівник роботи д.ф-м.н, проф. Герасимов Олег Іванович

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом вищого навчального закладу від “ 18 ” жовтня

2019 року № 235-С

2. Срок подання студентом роботи 10 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи

## Зміст розрахунково-пояснювальної записки

1. Описання екологічний моніторинг.
2. Постанова задачі
3. Розгляд дробово диференціального, фракційного рівняння
4. Перелік графічного матеріалу

Рис. 1.1. Мікрофотографії живих клітин печінки миші, отримані різними методами дослідження: а - світле поле; б - фазовий контраст; в - інтерференційний контраст; г - темне поле; а - флуоресценція (забарвлення акридиновим помаранчевим); е - поляризоване світло; т - ультрафіолетові промені. Рис. 1.2. Метод темного поля у відбитому світлі: 1 - препарат; 2 - об'єктив; 3 - епі-конденсор; 4 - кільцеве дзеркало. Рис. 1.3. Метод фазового контрасту в світлі: 1 - апертур-ва діафрагма; 2 - конденсор; 3 - препарат; 4 - об'єктив; 5 - фазова пластинка; 6 - зображення. Рис 3.1. Аналітичний розв'язок для електричного поля  $E(z)$  коли  $\alpha = 0,92$ ,  $(\omega / c) = (5 / \Lambda)$   $\alpha$  і  $\Lambda = 12,5$  (суцільна лінія) і  $\alpha = 1$  (пунктирна лінія). Рис.3.2 - Контур Ханкеля. Рис. 3.3. Зображення поведінки (неявний метод) при  $t = 2$  при  $\Delta t = 0,0200$ ,  $h = 0,0250$ . Рис. 3.4. Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 2$  при  $\Delta t = 0,0100$ ,  $h = 0,0333$ . Рис. 3.5. Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 2$  при  $\Delta t = 0,0025$ ,  $h = 0,050$  і  $\alpha = 2$ . Рис. 3.6. Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 6$  при  $\Delta t = 0,010$ ,  $h = 0,050$  і  $\alpha = 2$ . Рис. 3.7. Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 1$  при  $\Delta t = 0,0025$  і  $h = 0,050$ . Рис.3.8. Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 1,5$  при  $\Delta t = 0,015$  і  $h = 0,050$ .

№ п/п	Назва етапів дипломного проекту (магістерської роботи)	Термін виконання етапів роботи	Відмітка про виконання	
			За 4-х бально ю шкало ю	%
1	Огляд новітніх літературних джерел за темою дипломного проекту	3 1.10.2019		
2	Узагальнення основних теоретичних положень проекту	29.10.2019		
3	Рубіжна атестація	18 - 23.11.2019		
4	Попередній захист кваліфікаційної роботи	24.12.2019		
5	Перевірка на плагіат	12 - 14.12.2019		
6	Рецензування	20.12.2019		
7	Інтегральна оцінка виконання етапів календарного плану (як середня по етапам)			

Магістр Харченко Владислав Ігорович

Керівник проєку Герасимов О.І. д. ф-м.н,проф.

## АНОТАЦІЯ

«Аналіз станів систем довкілля та оцінка степені їх безпеки  
за допомогою хвильового аналізу»

В роботі детально проаналізовано метод хвильового моніторингу об'єктів довкілля за умов фракційного характеру як скануючого інструментарію, так і об'єкту, який досліджується. Показано, що врахування неевклідовського характеру хвильових процесів у середовищі, виникають помітні поправки до відповідних евклідовських термінах напруженостей. Встановлені співвідношення спрямовані на покращення розв'язання фізичних процесів, які лежать в основі хвильового моніторингу.

Ключові слова: фракційне рівняння, дробові диференціальні рівняння, екологічний моніторинг, екологічний моніторинг, дистанційне зондування Землі

Научний керівник: д.ф-м. н., професор Герасимов О. І.

Робота містить:

Сторінок – 49

Таблиць – 2

Рисунків – 9

## SUMMARY

«Analysis of the state of environmental systems and assessment of their degree of safety using wave analysis »

In the work, the method of the conformational monitoring of the assets for the minds of the fractional nature of the scanning tools is thoroughly analyzed in such a way, so that they can be accessed. It is shown that in general, the nature of vowel processes is not included in the middle of the contract, we shall amend the amendments to the official terms of the workload. It has been established that there is direct recognition of the abbreviation of the development of physical processes, which should lie at the base of the licensed monitoring.

Keywords: fractional differential equations, fractional differential equations, environmental monitoring, environmental monitoring, remote sensing of the Earth

Scientific adviser: Ph.D. Professor, Gerasimov O.I

The work contains:

Pages - 49

Sheets - 2

Drawings - 9

Literary references - 19

## ЗМІСТ

ВСТУП . . . . .	8
1.1 Сканування електромагнітним випромінюванням . . . . .	13
1.2 Лазерне сканування . . . . .	17
1.3 Дистанційне зондування Землі . . . . .	19
2. ПОСТАНОВА ЗАДАЧІ . . . . .	28
3. РОЗВ'ЯЗКИ . . . . .	29
3.1 Дробові диференціальні рівняння . . . . .	29
3.2 Фракційне рівняння . . . . .	32
3.3 Дискретизація для двостороннього просторово-дробового хвильового рівняння . . . . .	38
3.4. Числові результати . . . . .	42
ВИСНОВКИ . . . . .	47
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . .	48

## ВСТУП

Екологічний моніторинг (Моніторинг навколишнього середовища) – це комплексні спостереження за станом навколишнього середовища, в тому числі природних екологічних систем і компонентів природного середовища та що відбуваються в них, явища, оцінка та прогноз змін стану навколишнього середовища.

Зазвичай на території вже є ряд мереж спостережень, що належать різним службам, і які установчо роз'єднані, не скоординовані в хронологічному, параметричній та інших аспектах. Тому завдання підготовки оцінок, прогнозів, критеріїв альтернатив вибору управлінських рішень на базі наявних в регіоні відомчих даних стає, в загальному випадку, невизначеною. У зв'язку з цим, центральними проблемами організації екологічного моніторингу є еколого-господарське районування і вибір «інформативних показників» екологічного стану територій з перевіркою їх системної достатності.

### Розробка основ екологічного моніторингу

Термін «моніторинг» вперше з'явився в рекомендаціях спеціальної комісії СКОПА (науковий комітет з проблем навколишнього середовища) при ЮНЕСКО в 1971 р, а потім питання проведення екологічного моніторингу розглядалися на що проходила в 1972 р в Стокгольмі конференції Організації об'єднаних націй з проблем навколишнього середовища. Пропозиції з екологічного моніторингу були озвучені в 1972 р перед конференцією ООН членами спеціальної комісії Наукового комітету з проблем навколишнього середовища Міжнародної ради наукових спілок, створеної американськими вченими Гілбертом Уайтом і Томасом Маслоном. Під екологічним моніторингом ними розумілися «систематичні спостереження за станом



навколишнього середовища, можливі зміни у зв'язку з антропогенною діяльністю, контроль таких змін і проведення заходів з управління навколишнім середовищем».

Розробки радянських вчених в галузі екологічного моніторингу були представлені в 1974 р на міжурядовому нараді, скликаній організацією за програмою навколишнього середовища при ООН, де розглядалися питання створення світової системи екологічного моніторингу. Який брав участь в нараді керівник гідрометеорологічної служби Ю. А. Израель в цьому ж році опублікував статтю «Глобальна система спостережень. Прогноз і оцінка зміни навколишнього природного середовища. Основи моніторингу », де під екологічним моніторингом він пропонував розуміти систему спостережень, що дозволяє виділити зміни стану біосфери під впливом людської діяльності. У 1975 р Ю. А. Израель очолив секцію «Моніторинг стану біосфери» Наукової ради з проблем біосфери при Президії АН СРСР і став керувати розробкою заходів з екологічного моніторингу в СРСР.

#### Види і підсистеми екологічного моніторингу

При організації моніторингу виникає необхідність вирішення декількох завдань різного рівня, тому І. П. Герасимов (1975) запропонував розрізняти три ступені (виду, напряму) моніторингу: біоекологічний (санітарно-гігієнічний), геосистемний (природно-господарський) і біосферний (глобальний). Однак даний підхід в аспекті екологічного моніторингу не дає чіткого поділу функцій його підсистем, ні районування, ні параметричної організації і представляє, в основному, історичний інтерес.

#### Можна виділити класифікацію видів екологічного моніторингу

За просторового принципу виділяються: локальний, регіональний, національний і глобальний моніторинг. Останній передбачає екологічні дослідження взаємодії людини і природи в масштабах всієї біосфери. Національний, як правило, має на увазі організацію моніторингу в межах однієї держави. Досить складно однозначно визначити масштаби

регіонального моніторингу. Існують і більш великі за площею моніторинги акваторій і територій міждержавного рівня (Балтійське море, Північне море, Альпи і тощо.) і внутрішньодержавного (Байкал, Урал і тощо.). Локальний моніторинг включає вивчення простору одного джерела при впливі сукупності підприємств промислової зони, муніципального освіти (міста, району).

По об'єкту стеження:

- фоновий (базовий)
- імпактних
- тематичний
- територіальний
- акваторіальних.

В рамках фонового моніторингу ведуться дослідження, спрямовані на виявлення природних закономірностей зміни природних компонентів і комплексів. Під Імпактний моніторингом розуміється спостереження, оцінка і прогноз стану природного середовища в районах розташування небезпечних і потенційно небезпечних (АЕС) джерел антропогенного впливу. Тематичний моніторинг - моніторинг природних компонентів, об'єктів, наприклад, лісових або особливо охоронюваних природних територій. Значною мірою по явищах і способам вивчення відрізняється мережу спостережень на суші і у водному середовищі.

За природним компонентам виділяється геологічний, атмосферний, гідрологічний, геофізичний, ґрунтовий, лісової, біологічний, геоботанічних, зоологічний. Моніторинг атмосферного повітря - система спостережень за станом атмосферного повітря, його забрудненням і за що відбуваються в ньому природними явищами, а також оцінка і прогноз стану атмосферного повітря, його забруднення. Аналогічно можна визначити і інші компонентні моніторинги.

Спостереження виділяють міжнародний, державний, місцевий, громадський і відомчий моніторинги. До міжнародного відносяться системи оцінки прогнозу, які організовані міждержавними організаціями глобального характеру, наприклад, ООН, ЮНЕСКО, ЮНЕП і тощо. Моніторинг може здійснюватися державними та муніципальними службами. Нарешті, промислові та сільськогосподарські підприємства, галузі ведуть відомчий моніторинг. Екологічний моніторинг можуть організувати окремі фізичні особи, громадські об'єднання громадян.

Моніторинг є багаторівневою системою. У хорологічному аспекті зазвичай виділяють системи (або підсистеми) детального, локального, регіонального, національного і глобального рівнів.

Нижчою ієрархічним рівнем є рівень детального моніторингу реалізується в межах невеликих територій (ділянок) і т. Д.

При об'єднанні систем детального моніторингу в більш велику мережу (наприклад, в межах району і т. П.) Утворюється система моніторингу локального рівня. Локальний моніторинг призначений забезпечити оцінку змін системи на більшій площі: території міста, району.

Локальні системи можуть об'єднуватися в більші - системи регіонального моніторингу, що охоплюють території регіонів в межах краю або області, або в межах декількох з них. Подібні системи регіонального моніторингу, інтегруючи дані мереж спостережень, що розрізняються за підходами, параметрам, територіям відстеження та періодичності, дозволяють адекватно формувати комплексні оцінки стану територій та давати прогнози їх розвитку.

Системи регіонального моніторингу можуть об'єднуватися в межах однієї держави в єдину національну (або державну) мережу моніторингу, утворюючи, таким чином, національний рівень) системи моніторингу.

В рамках екологічної програми ООН поставлено завдання об'єднання національних систем моніторингу в єдину міждержавну мережу - «Глобальну

систему моніторингу довкілля» (ГСМОС). Це вищий глобальний рівень організації системи екологічного моніторингу. Її призначення - здійснення моніторингу за змінами у навколишньому середовищі на Землі і її ресурсами в цілому, в глобальному масштабі. Глобальний моніторинг - це система стеження за станом і прогнозування можливих змін загальносвітових процесів і явищ, включаючи антропогенний вплив на біосферу Землі в цілому. Поки створення такої системи в повному обсязі, що діє під егідою ООН, є завданням майбутнього, так як багато держав не мають ще власних національних систем.

Глобальна система моніторингу навколишнього середовища і ресурсів покликана вирішувати загальнолюдські екологічні проблеми в рамках всієї Землі, такі як глобальне потепління клімату, проблема збереження озонового шару, прогноз землетрусів, збереження лісів, глобальне опустелювання і ерозія ґрунтів, повені, запаси харчових і енергетичних ресурсів та ін. прикладом такої підсистеми екологічного моніторингу є глобальна спостережна мережа сейсмомоніторингу Землі, що діє в рамках Міжнародної програми контролю за вогнищ землетрусів та ін.

#### Системи дистанційного зондування

У програмах моніторингу широко задіяно дистанційне зондування навколишнього середовища з використанням літаків або супутників, забезпечених багатоканальними датчиками.

Дистанційне зондування дозволяє збирати дані про небезпечні або важкодоступних районах. Застосування дистанційного зондування включають моніторинг лісів, наслідки дії зміни клімату на льодовики Арктики і Антарктики, дослідженнях прибережних і океанських глибин.

Дані з орбітальних платформ, отримані з різних частин електромагнітного спектра в поєднанні з наземними даними, щорічно надає інформацію для контролю тенденцій прояву довгострокових і короткострокових явищ, природних і антропогенних. Інші області

застосування включають управління природними ресурсами, планування використання землі, а також різні галузі наук про Землю.

### 1.1 Сканування електромагнітним випромінюванням

Мікроскопія оптична - сукупність методів спостереження і дослідження за допомогою оптичного мікроскопу.

Структуру будь-якого об'єкта (препарату) можна розрізнити, якщо різні його частки по-різному поглинають і відображають світло або відрізняються одна від одної (або від середовища) показниками заломлення. Ці відмінності зумовлюють різницю амплітуд або фаз світлових хвиль, що пройшли через різні ділянки препарату, від чого, в свою чергу, залежить контрастність зображення. Залежно від властивостей досліджуваного об'єкта і завдань дослідження існують різноманітні методи спостереження, що дають дещо відмінні зображення об'єкта (рисунок 1.1).

Метод світлого поля в прохідному світлі найбільш поширений. Він використовується для дослідження прозорих об'єктів з включеними в них абсорбуючими частинками і деталями. Пучок світла, проходячи через непоглинаючі зони препарату, дає рівномірно освітлене поле. Абсорбуюча частка на шляху пучка світла частково поглинає його, частково розсіює, внаслідок чого амплітуда пройшов через частку світла буде менше і частка виглядає на світлому тлі темною плямою (рис. 1.1, а). Контраст зображення мікроструктури об'єкта тим більше, чим більшим поглинанням у видимій області спектра має абсорбуюча частка. Біологічні об'єкти, в більшості своїй не володіють цією властивістю, попередньо фарбуються спец. барвниками.

Метод світлого поля у відбитому світлі застосовують для спостереження непрозорих об'єктів, шліфування металів, сплавів, рудних мінералів. Структура препарату видно внаслідок відмінності відбивної

здатності його елементів. Препарат 1 (рисунок 1.2) висвітлюється через об'єктив 2 (виконує одночасно роль конденсора) за допомогою опакілюмінатора, в к-ром встановлюється напівпрозора пластинка 3 або призма 4.

Метод темного поля в прохідному світлі застосовують в біології для спостереження прозорих неабсорбуючих об'єктів, невидимих при методі світлого поля, наприклад, бактерій. Пучок променів (рисунок 1.3), які висвітлюють препарат 2, виходить з конденсора 1 спец. конструкції (конденсор темного поля) у вигляді порожнього конуса і безпосередньо в об'єктив 3 не потрапляє. Зображення створюється тільки світлом, розсіяним елементами структури препарату, к-які відрізняються від навколишнього середовища показником заломлення. В полі зору мікроскопа на темному фоні видно світлі зображення деталей (рисунок 1.1). Цим методом по виду зображення не можна визначити, прозорі частки або непрозорі, більший або менший показник заломлення вони мають в порівнянні з навколишнім середовищем.

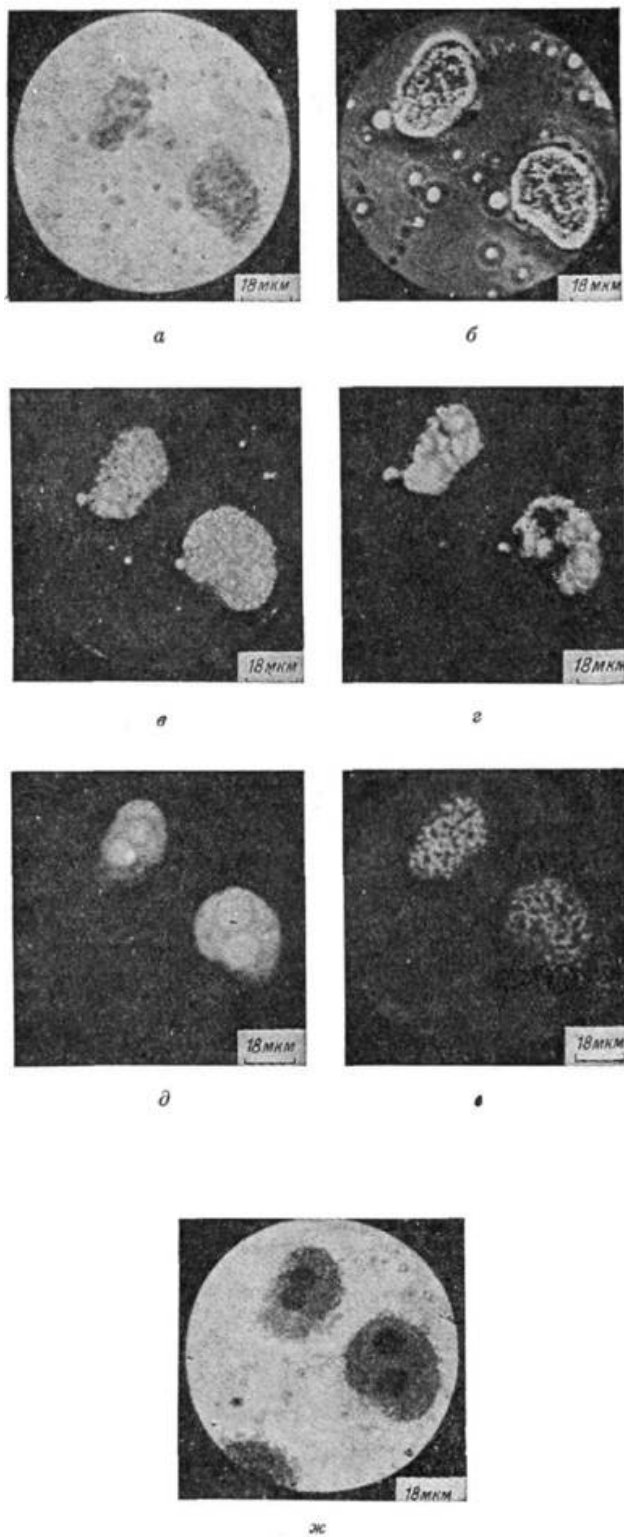


Рис. 1.1 - Мікрофотографії живих клітин печінки миші, отримані різними методами дослідження: а - світле поле; б - фазовий контраст; в - інтерференційний контраст; г - темне поле; д - флуоресценція (забарвлення акридиновим помаранчевим); е - поляризоване світло; ж - ультрафіолетові промені.

Метод ультрамікроскопії, заснований на тому ж принципі (освітлення препарату в ультрамікроскопа проводиться перпендикулярно напрямку спостереження), дає можливість при використанні яскравих р1 джерел світла виявляти частки, розміри яких брали лежать далеко за межами дозволу найбільш сильних мікроскопів (до 0,002 мкм). При цьому, однак, зображення частинок мають вигляд дифракції точок, що не дозволяє робити висновок про їхню справжню форму.

Метод темного поля у відбитому світлі (рисунок 1.2) здійснюється при освітленні препарату 1 (напр., шліфування металу) зверху за допомогою дзеркал 4 і спец. кільцевої дзеркальної системи 3, розташованої навколо об'єктива і званої епіконденсором.

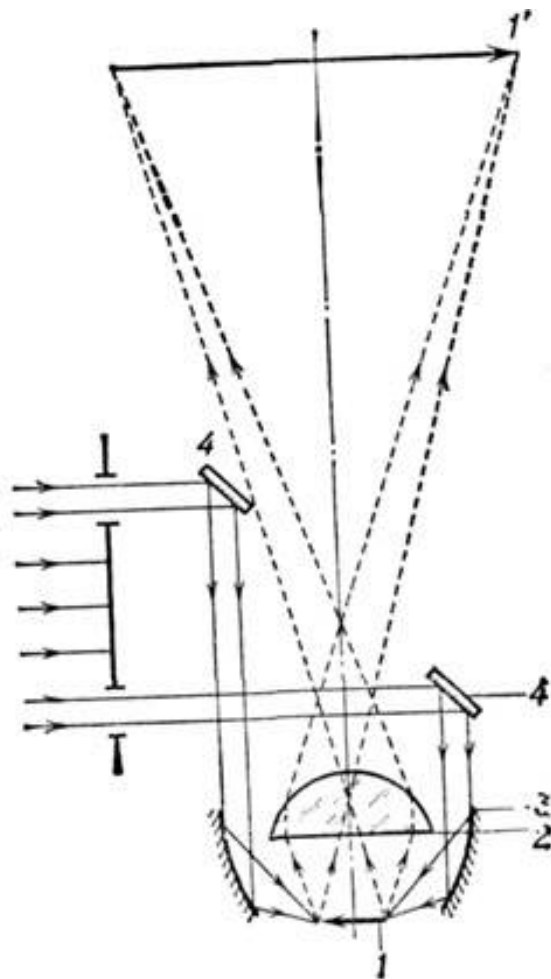


Рис. 1.2 - Метод темного поля у відбитому світлі: 1 - препарат; 2 - об'єктив; 3 - епі-конденсор; 4 - кільцеве дзеркало.



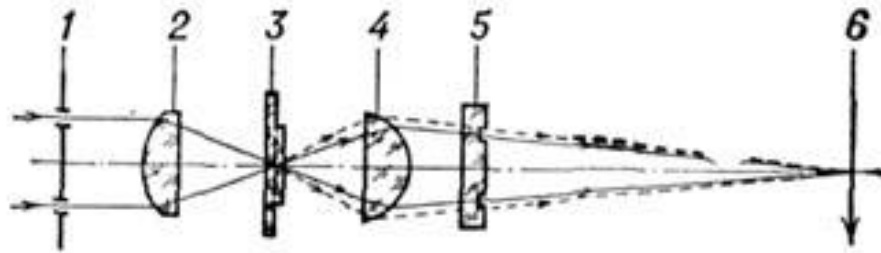


Рис. 1.3 - Метод фазового контрасту в світлі: 1 - апертур-ва діафрагма; 2 - конденсор; 3 - препарат; 4 - об'єктив; 5 - фазова пластинка; 6 - зображення.

## 1.2 Лазерне сканування

Сучасні цифрові технології постійно розвиваються. Відносно недавно з'явилася технологія лазерне сканування і 3D-модель, яка стала широко використовуватися для створення цифрових моделей різноманітних інженерних споруд і будівель, а також місцевості з різним рельєфом.

Ця технологія передбачає проведення оптико-механічного сканування за допомогою лазерних променів, що володіють високою частотою більше 150 кГц, а також реєстрацію одержуваної інформації. Для того, щоб більш точно обчислити місця відображення лазерних променів, застосовуваний сканер інтегрується з системою GPS.

Застосування лазерного сканування

На сьогоднішній день ця технологія широко застосовується для виконання наступних завдань:

- Створення високоточних цифрових моделей рельєфу складній місцевості. Ця технологія дає можливість отримувати високоточні моделі навіть на густонаселеній місцевості, прикритої зеленими насадженнями.

- Отримання тривимірних сіткових моделей різноманітних об'єктів.

- Створення тривимірних моделей забудованої території, а також різноманітних будівель.

- Проведення обстеження різних електричних моделей таких як, підстанції і лінії електропередач.

- Проведення обстеження транспортних розв'язок.

- Моніторинг лісів.

- Проведення інвентаризації об'єктів нерухомості.

- Моніторинг місць розробки різноманітних корисних копалин.

Види лазерного сканування

На сьогоднішній день існує два основних типи лазерного сканування:

- Мобільний, яке є досить технологічним методом і дає можливість дуже оперативно отримувати точні моделі об'єктів будь-якої складності. Цей метод передбачає подання різноманітних об'єктів у вигляді точок з різноманітними просторовими координатами. Цей метод передбачає використання обладнання, встановленого на автомобільний транспорт.

- Повітряне. Цей метод передбачає застосування спеціалізованого обладнання, яке сканує навколишній простір і за допомогою лазерного далекоміра визначають відстань до різноманітних об'єктів. Ця технологія передбачає використання обладнання, встановленого на вертольоти, невеликі літаки, а також безпілотні літальні апарати. Подібний спосіб дає можливість отримувати більш деталізовані тривимірні об'єкти місцевості, що володіють складним рельєфом.

Той чи інший метод сканування підбирається в залежності від типу досліджуваних об'єктів.

### 1.3 Дистанційне зондування Землі

(ДЗЗ) - спостереження поверхні Землі наземними, авіаційними і космічними засобами, оснащеними різними видами знімальної апаратури. Робочий діапазон довжин хвиль, що приймаються знімальною апаратурою, становить від часток мікрометра (видиме оптичне випромінювання) до метрів (радіохвилі). Методи зондування можуть бути пасивні, тобто використовують природне відбите або вторинне теплове випромінювання об'єктів на поверхні Землі, обумовлене сонячною активністю, і активні - використовують вимушене випромінювання об'єктів, ініційоване штучним джерелом направленої дії. Дані ДЗЗ, отримані з космічного апарату (КА), характеризуються великим ступенем залежності від прозорості атмосфери. Тому на КА використовується багатоканальне обладнання пасивного і активного типів, що реєструє електромагнітне випромінювання в різних діапазонах.

Дистанційне зондування є методом отримання інформації про об'єкт або явище без безпосереднього фізичного контакту з даним об'єктом. Дистанційне зондування є підрозділом географії. У сучасному розумінні, термін в основному відноситься до технологій повітряного або космічного зондування місцевості з метою виявлення, класифікації та аналізу об'єктів земної поверхні, а також атмосфери і океану, за допомогою розповсюджуваних сигналів (наприклад, електромагнітної радіації). Поділяють на активну (сигнал спочатку випромінюється літаком або космічним супутником) і пасивне дистанційне зондування (реєструється тільки сигнал інших джерел, наприклад, сонячне світло).

Пасивні сенсори дистанційного зондування реєструють сигнал, що випромінюється або відбитий об'єктом або прилеглою територією. Відбите сонячне світло - найбільш часто використовуваний джерело випромінювання, що реєструється пасивними сенсорами. Прикладами пасивного

дистанційного зондування є цифрова і плівкова фотографія, застосування інфрачервоних, приладів із зарядним зв'язком і радіометрів.

Активні прилади, в свою чергу, випромінюють сигнал з метою сканування об'єкта і простору, після чого сенсор має можливість виявити і виміряти випромінювання, відбите або утворене шляхом зворотного розсіювання метою зондування. Прикладами активних сенсорів дистанційного зондування є радар і лідар, якими вимірюється затримка в часі між випромінюванням і реєстрацією повернутого сигналу, таким чином визначаючи розміщення, швидкість і напрямок руху об'єкта.

Дистанційне зондування надає можливість отримувати дані про небезпечні, важкодоступних та об'єктів, що швидко об'єктах, а також дозволяє проводити спостереження на великих ділянках місцевості. Прикладами застосування дистанційного зондування може бути моніторинг вирубки лісів (наприклад, в басейні Амазонки), стану льодовиків в Арктиці й Антарктиці, вимір глибини океану за допомогою лота. Дистанційне зондування також приходиться на заміну дорогим і порівняно повільним методам збору інформації з поверхні Землі, одночасно гарантуючи невторчання людини у природні процеси на спостережуваних територіях чи об'єктах.

За допомогою орбітальних космічних апаратів вчені мають можливість збирати і передавати дані в різних діапазонах електромагнітного спектра, які, в поєднанні з більш масштабними повітряними і наземними вимірами і аналізом, забезпечують необхідний спектр даних для моніторингу актуальних явищ і тенденцій, таких як Ель-Ніньо і інші природні феномени, як в коротко-, так і в довгостроковій перспективі. Дистанційне зондування також має прикладне значення в сфері геонаук (наприклад, природокористування), сільському господарстві (використання і збереження природних ресурсів), національної безпеки (моніторинг прикордонних областей).

Сільське господарство

За допомогою супутників можна з певною циклічністю отримувати зображення окремих полів, регіонів і округів. Користувачі можуть отримувати цінну інформацію про стан угідь, в тому числі ідентифікацію культур, визначення посівних площ сільськогосподарських культур і стан врожаю. Супутникові дані використовуються для точного управління і моніторингу результатів ведення сільського господарства на різних рівнях. Ці дані можуть бути використані для оптимізації фермерського господарства і просторово-орієнтованого управління технічними операціями. Зображення можуть допомогти визначити місце розташування врожаю і ступінь виснаження земель, а потім можуть бути використані для розробки і реалізації плану лікування, для локальної оптимізації використання сільськогосподарських хімікатів. Основними сільськогосподарськими додатками дистанційного зондування є наступні:

рослинність:

- класифікація типу культур
- оцінка стану посівів (моніторинг сільськогосподарських культур, оцінка збитку)
- оцінка врожайності
- ґрунт
- відображення характеристик ґрунту
- відображення типу ґрунту
- ерозія ґрунту
- вологість ґрунту
- відображення практики обробітку ґрунту

Моніторинг лісового покриву

Дистанційне зондування також застосовується для моніторингу лісового покриву та ідентифікації видів. Отримані таким способом карти можуть покривати більшу площу, одночасно відображаючи детальні вимірювання та характеристики території (тип дерев, висота, щільність).

Використовуючи дані дистанційного зондування, можливо визначити і розмежувати різні типи лісу, що було б важко досягти, використовуючи традиційні методи на поверхні землі. Дані доступні в різних масштабах і дозволах, що цілком відповідає локальним або регіональним вимогам. Вимоги до детальності відображення місцевості залежить від масштабу дослідження. Для відображення змін в лісовому покриві (текстури, щільності листя) застосовуються:

Мультиспектральні зображення: для точної ідентифікації видів необхідні дані з дуже високою роздільною здатністю. Багаторазові знімки однієї території, використовуються для отримання інформації про сезонні зміни різних видів

Стереодіаграфії - для розмежування видів, оцінки щільності і висоти дерев. Стереодіаграфії надають унікальний вид на лісовий покрив, доступний тільки через технології дистанційного зондування

Радари широко застосовуються в зоні вологих тропіків, завдяки їх властивості отримувати зображення за будь-яких погодних умовах

Лідари дозволяють отримувати 3-мірну структуру лісу, виявляти зміни висоти поверхні землі і об'єктів на ній. Дані радару допомагають оцінити висоту дерев, області корон і кількість дерев на одиниці площі.

#### Моніторинг поверхні

Моніторинг поверхні є одним з найбільш важливих і типових застосувань дистанційного зондування. Отримані дані використовуються при визначенні фізичного стану поверхні землі, наприклад, ліси, пасовища, дорожнього покриття і тощо, в тому числі результатів діяльності людини, такі, як ландшафт в промислових і житлових зонах, стану сільськогосподарських територій і тощо. Спочатку повинна бути встановлена система класифікації земельного покриву, яка зазвичай включає в себе рівні і класи земель. Рівні і класи повинні бути розроблені з урахуванням мети використання (на національному, регіональному або місцевому рівні),

просторового і спектрального дозволу даних дистанційного зондування, запиту користувача і так далі.

Виявлення зміни стану поверхні землі необхідно для оновлення карт рослинного покриву і раціоналізації використання природних ресурсів. Зміни, як правило, виявляються при порівнянні декількох зображень, що містять кілька рівнів даних, а також, в деяких випадках, при порівнянні старих карт і оновлених зображень дистанційного зондування.

Сезонні зміни: сільськогосподарські угіддя та листяні ліси змінюються по-сезонно

Річні зміни: зміни поверхні землі або території землекористування, наприклад, райони вирубки лісу або розростання міст

Інформація про поверхні землі і зміни характеру рослинного покриву прямо необхідні для визначення і реалізації політики захисту навколишнього середовища і можуть бути використані спільно з іншими даними для проведення складних розрахунків (наприклад, визначення ризиків ерозії).

#### Геодезія

Збір геодезичних даних з повітря вперше був використаний для виявлення підводних човнів і отримання гравітаційних даних, що використовуються для побудови військових карт. Ці дані являють собою рівні миттєвих збурень гравітаційного поля Землі, які можуть бути використані для визначення змін в розподілі мас Землі, що в свою чергу може бути затребуване для проведення різних геологічних досліджень.

#### Акустичні та близько-акустичні застосування

Сонар: пасивний гідролокатор, реєструє звукові хвилі, які виходять від інших об'єктів (судно, кит і тощо.); активний гідролокатор, випромінює імпульси звукових хвиль і реєструє відбитий сигнал. Використовується для виявлення, визначення місця розташування і вимірювання параметрів підводних об'єктів і місцевості.

Сейсмографи - спеціальний вимірювальний прилад, який використовується для виявлення і реєстрації всіх типів сейсмічних хвиль. За допомогою сейсмограм, знятих в різних місцях певній території, можна визначити епіцентр землетрусу і виміряти його амплітуду (після того як воно сталося) шляхом порівняння відносних інтенсивностей і точного часу коливань.

УЗД: датчики ультразвукового випромінювання, які випускають високочастотні імпульси і реєструють відбитий сигнал. Використовується для виявлення хвиль на воді і визначення рівня води.

При координації серій масштабних спостережень, більшість систем зондування залежать від наступних факторів: розташування платформи і орієнтації датчиків. Високоякісні інструменти в даний час часто використовують позиційну інформацію від супутникових систем навігації. Обертання і орієнтація часто визначається електронними компасами з точністю близько одного - двох градусів. Компаси можуть вимірювати не тільки азимут (тобто градусне відхилення від магнітної півночі), а й висоти (значення відхилення від рівня моря), так як напрямок магнітного поля відносно Землі залежить від широти, на якій відбувається спостереження. Для більш точного орієнтування необхідно застосування інерціальної навігації, з періодичними поправками різними методами, включаючи навігацію по зірках або відомим орієнтирів.

Огляд основних приладів дистанційного зондування

Радари, в основному, застосовуються в системах контролю повітряного трафіку, раннього оповіщення, моніторингу лісового покриву, сільському господарстві і для отримання метеорологічних даних великого масштабу. Радар Допплера використовується правоохоронними організаціями для контролю швидкісного режиму автотранспорту, а також для отримання метеорологічних даних про швидкість і напрям вітру, місцезнаходження та інтенсивності опадів. Інші типи одержуваної інформації включають в себе



дані про іонізованому газі в іоносфері. Інтерферометричний радар штучної апертури використовується для отримання точних цифрових моделей рельєфу великих ділянок місцевості (див RADARSAT, TerraSAR-X, Magellan).

Лазерні і радіолокаційні висотоміри на супутниках забезпечують отримання широкого спектру даних. Вимірюючи відхилення рівня води океану, викликані гравітацією, дані прилади відображають особливості рельєфу морського дна з дозволом близько однієї милі. Вимірюючи висоту і довжину хвилі океанських хвиль за допомогою висотомірів, можна дізнатися швидкість і напрям вітру, а також швидкість і напрямок поверхневих океанічних течій.

Ультразвукові (акустичні) і радіолокаційні датчики використовуються для вимірювання рівня моря, припливів і відливів, визначення напрямку хвиль в прибережних морських регіонах.

Технологія світлового виявлення і визначення дальності (ЛИДАР) добре відома своїм застосуванням у військовій сфері, зокрема, в лазерної навігації снарядів. Лидара використовується також для виявлення та вимірювання концентрації різних хімічних речовин в атмосфері, в той час як ЛИДАР на борту літака може бути використаний для вимірювання висоти об'єктів і явищ на землі з більшою точністю, ніж та, яка може бути досягнута за допомогою радіолокаційної техніки. Дистанційне зондування рослинності також є одним з основних застосувань лидара.

Радіометри та фотометри є найбільш поширеними використовуваними інструментами. Вони фіксують відбите і випускається випромінювання в широкому діапазоні частот. Найбільш поширеними є датчики видимого і інфрачервоного діапазонів, потім йдуть мікрохвильові, датчики гамма-променів і, рідше, датчики ультрафіолету. Ці прилади також можуть бути використані для виявлення емісійного спектра різних хімічних речовин, надаючи дані про їх концентрації в атмосфері.

Стереозображення, отримані за допомогою аерофотозйомки часто використовуються при зондуванні рослинності на поверхні Землі, а також для побудови топографічних карт при розробці потенційних маршрутів шляхом аналізу зображень місцевості, в поєднанні з моделюванням особливостей навколишнього середовища, отриманих наземними методами.

Мультиспектральні платформи такі як Landsat активно використовувалися починаючи з 70-х років. Ці прилади використовувалися для побудови тематичних карт шляхом отримання зображень в декількох довжинах хвиль електромагнітного спектру (мульти-спектра) і, як правило, вони застосовуються на супутниках спостереження за Землею. Прикладами таких місій є в тому числі програма Landsat або супутник IKONOS. Карти рослинного покриву і землекористування, отримані методом тематичного картографування можуть бути використані для розвідки корисних копалин, виявлення і моніторингу використання земель, вирубки лісів, і вивчення здоров'я рослин і сільськогосподарських культур, в тому числі величезних ділянок сільськогосподарських земель або лісових масивів. Космічні знімки програми Landsat використовуються регулюючими органами для контролю параметрів якості води, включаючи глибину Секки, щільність хлорофілу і загальний вміст фосфору. Метеорологічні супутники використовуються в метеорології і кліматології.

Методом спектральної візуалізації отримують зображення, в яких кожен піксель містить повну спектральну інформацію, відображаючи вузькі спектральні діапазони в межах безперервного спектра. Прилади спектральної візуалізації використовуються для вирішення різних завдань, в тому числі застосовуються в мінералогії, біології, військовій справі, вимірах параметрів довкілля.

В рамках боротьби з опустелюванням, дистанційне зондування дозволяє спостерігати за областями, які знаходяться в зоні ризику в довгостроковій перспективі, визначати фактори опустелювання, оцінювати

глибину їх впливу, а також надавати необхідну інформацію особам, відповідальним за прийняття рішень щодо прийняття відповідних заходів охорони навколишнього середовища.

## 2. ПОСТАНОВА ЗАДАЧІ

З урахуванням вищевикладеного в роботі, буде розглянутий підхід до параметризації даних хвильового моніторингу, за допомогою методів які враховують їх складний характер, зокрема, масштабів і розмірностей. Особливу увагу буде приділено вивченню хвильових процесів у системах із фракційною розмірністю, які моделюють структурні та динамічні властивості реальних систем довкілля.

### 3. РОЗВ'ЯЗКИ

#### 3.1 Дробові диференціальні рівняння

Це узагальнення класичних диференціальних рівнянь цілого порядку. В останні роки нелінійні дробові диференціальні рівняння отримали значний інтерес. Це викликано розвитком самої теорії дробового числення, а також застосуванням таких конструкцій у різних науках, таких як фізика, інженерія, біологія та інші сфери. Серед досліджень дробових диференціальних рівнянь важливою темою є дослідження пошуку точних рішень, а також їх застосування до практичних завдань. Точні рішення рівняння електромагнітної хвилі для неоднорідного середовища для фізично значущих діелектричних функцій привертало багато уваги фізика ще багато років тому. Докладено значних зусиль для того, щоб отримати точні рішення рівняння електромагнітної хвилі для неоднорідного середовища. У цій роботі деякі основні властивості дробового числення були успішно використані для отримання аналітичного рішення фракційного хвилеподібного рівняння, де ми включили змінні діелектричні середовища для поширення хвиль у неоднорідне середовище. Тут ми розглянули особливу діелектричну функцію дробової поліноміальної форми:

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon(z) = \left( \frac{a}{b+z^\alpha} \right)^2 \quad (3.1)$$

Метод розв'язання рівняння дробової хвилі заснований на модифікованій дробовій похідній Рімана-Ліувілля порядку  $\alpha$  та аналітичних рішеннях для дробового диференціального рівняння Ріккати без використання обмежувального припущення. Точні рішення електричних полів рівняння дробової хвилі виражаються у вигляді простих поліномних функцій у дробовій змінній  $z$ , пов'язаних із напрямком поширення хвилі. З історичної точки зору дробове обчислення може бути описане як розширення поняття

похідного оператора від цілого порядку  $n$  до довільного порядку  $\alpha$ , де  $\alpha$  - дійсне або комплексне число:

$$\frac{d^n}{dx^n} \rightarrow \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \quad (3.2)$$

Фізиків приваблювали дробові диференціальні рівняння, які застосовувались у кількох областях, таких як: хвильові та дифузійні рівняння, рівняння Шредінгера, теорія Ян-Міллса, ядерна фізика та фізика частинок.

Нещодавня поява дробових диференціальних рівнянь та їх застосування у фізико-математичних задачах змушують досліджувати методи рішення таких рівнянь (аналітичні та чисельні). У літературі існує декілька визначень для дробових похідних, тут ми розглянемо лише модифіковане визначення Джумарі Рімана-Ліувілля для дробової похідної, тому що фракційна похідна, визначена таким чином, виявляється дуже корисною при дослідженні аналітичних рішень дробових диференціальних рівнянь. Після цього ми представляємо загальні аналітичні рішення для дробового диференціального рівняння Ріккаті.

Якщо ми розглянемо застосування диференціального чи інтегрального числення просто як відображення з заданого набору функцій  $f$  на інший набір  $g$ , наприклад,

$$g(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad (3.3)$$

Тоді взагалі з цього відношення ми не можемо вивести будь-яку достовірну інформацію про можливу подібність функції та її похідної. Тому дивно і примітно, що для конкретних функціональних класів ми спостерігаємо дуже просту залежність щодо їх похідних. Неважко показати, що для експоненціальної, тригонометричної та функцій сил може бути написано просте правило для всіх:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{kx} = k^n e^{kx} \quad (3.4)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(kx) = k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (3.5)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} \quad (3.6)$$

Для довільного порядку  $n$ , мабуть, виникає своєрідна подібність, наприклад, всі похідні експоненціальної ведуть до експоненціалів, всі похідні тригонометричних функцій призводять до тригонометричних функцій. Оскільки похідна задана в закритому вигляді, це правило можна просто поширити з цілих коефіцієнтів похідних  $n \in \mathbb{N}$  на дійсні і навіть уявні коефіцієнти  $\alpha$  і постулювати дробову похідну як:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{kx} = k^\alpha e^{kx}, \quad k \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \sin(kx) = k^\alpha \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad k \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\alpha)} x^{k-\alpha}, \quad x \geq 0, k \neq -1, -2, -3, \dots \quad (3.9)$$

Малюнок 3 ілюструє поведінку аналітичного рішення та для електричного поля  $E(z)$ , коли  $\alpha = 0,92$ ,  $(\omega / c) = (5 / \Lambda)$   $\alpha$  і  $\Lambda = 12,5$ , ми також показали аналітичний розв'язок і для електричне поле  $E(z)$ , коли  $\alpha = 1$ ,  $(\omega / c) = 5 / \Lambda$  і  $\Lambda = 12.5$ . З цих результатів ми можемо спостерігати, що одним із головних наслідків розгляду поширення хвилі дробового порядку в неоднорідному середовищі є поява цілого сімейства рішень як функції параметра дробного порядку  $\alpha$ . Також з фігури 2 ми помічаємо, що довжина хвилі розчину збільшується, коли параметр дробового порядку  $\alpha$  змінюється від 1 і наближається до 0. Додатково можна зазначити, що отриманий розчин зменшується до відомого раніше рішення для граничного випадку  $\alpha = 1$ , що раніше повідомлялося в літературі, таким чином рішення, отримані методами дробового обчислення, є більш загальними і містять як граничний випадок

добре відомий розчин для явищ поширення хвиль цілого порядку. Слід зазначити, що результати аналітики і добре узгоджуються з наближеними рішеннями, отриманими раніше Mohyud-Din et al., Де вони застосували метод гомотопічного аналізу до хвилеподібного дробового нелінійного рівняння.

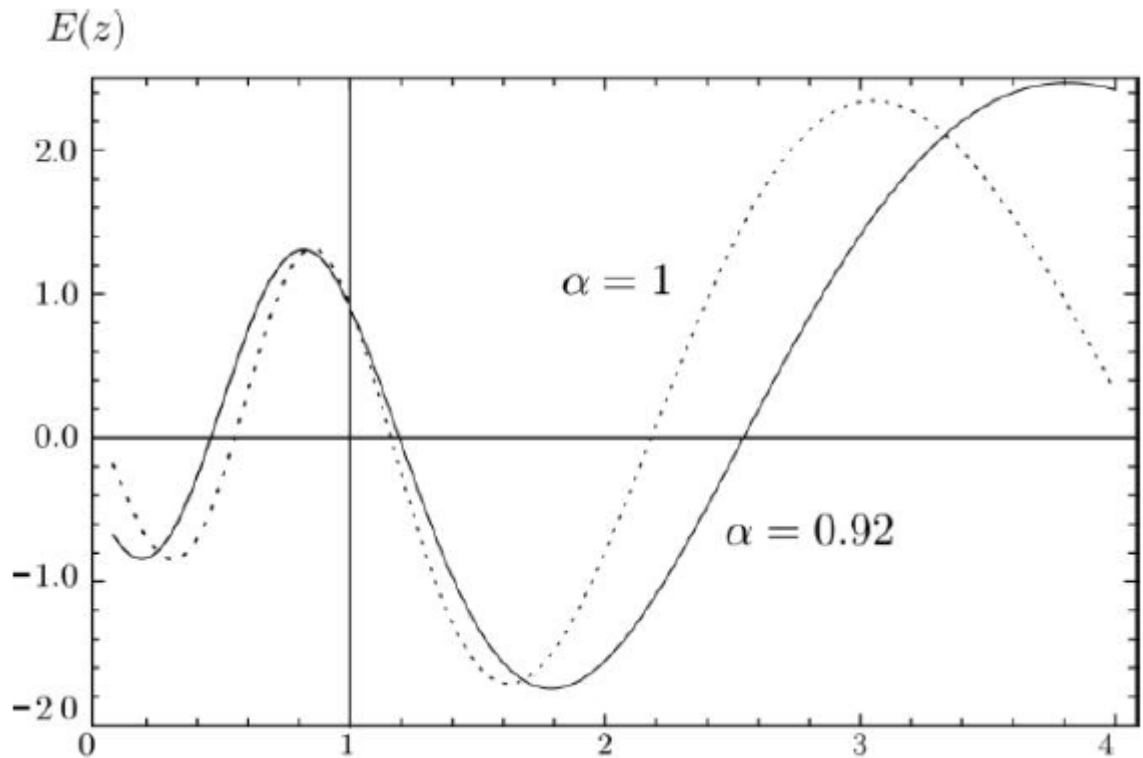


Рис 3.1 - Аналітичний розв'язок для електричного поля  $E(z)$  коли  $\alpha = 0,92$ ,  $(\omega / c) = (5 / \Lambda) \alpha$  і  $\Lambda = 12,5$  (суцільна лінія) і  $\alpha = 1$  (пунктирна лінія).

### 3.2 Фракційне рівняння

Відділення математичного аналізу, який вивчає можливість взяття повноважень дійсного числа або повноважень комплексного числа оператора диференціювання і оператор інтеграції Дж.

У цьому контексті термін повноваження відноситься до повторюваного заявою лінійного оператора, що діє на функцію, на деякій аналогії зі складом



функції, чинним на змінну. Наприклад, можна задати питання значущою інтерпретації як аналог функціонального квадратного кореня для оператора диференціювання (оператор наполовину повторив), вираз для деякого лінійного оператора, який, коли застосовано двічі до будь-якої функції буде мати той же самий ефект як диференціювання. Фракційні відмінні рівняння (також відомий як екстраординарні відмінні рівняння) є узагальненням диференціальних рівнянь при застосуванні фракційного обчислення.

Важливий момент - те, що фракційна похідна в пункті  $x$  - локальна властивість тільки коли ціле число; у випадках нецілого числа ми не можемо сказати, що фракційна похідна в  $x$  функції  $f$  залежить тільки від значення  $f$  дуже поруч  $x$  в способі, яким, звичайно, роблять похідні влади цілого числа. Тому очікується, що теорія включає свого роду граничні умови, включаючи інформацію про функції далі. Щоб використовувати метафору, фракційна похідна вимагає деякого периферійного бачення.

Наскільки існування такої теорії порушено, початок предмета було покладено Ліувілльом в газеті з 1832. Фракційна похідна функції до замовлення а часто тепер визначається за допомогою інтеграла Фур'є або Меллина.

В даний час широкий розвиток отримало математичне моделювання фрактальних процесів. Під фрактальними процесами розуміються різні процеси природних, економічних, історико-соціальних явищ з урахуванням їх фрактальних властивостей. Математична інтерпретація таких явищ дається, добре розробленим за більш ніж 300 років, апаратом дробового числення.

Особливістю математичних побудов фрактальних моделей є обобщення диференціальних рівнянь целочисленного порядку на речовий порядок, що призводить до рішень зі статечною залежністю. В якості такого рішення часто виступає ціла спеціальна функція типу Миттаг-Леффлера. Обчислення цієї функції по визначенню в системах типу «MAPLE»

призводить часто до некоректних результатів: або зовсім не обчислюється, або через похибки обчислення дає невірну відповідь. Тому в роботі ми зупинимося докладно на обчислювальному алгоритмі цієї функції, але спочатку наведемо некоото-які її властивості.

У роботі Г. Мітагг-Леффлер ввів в розгляді узагальнену показникову функцію:

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+ak)}, z \in \mathbb{C}, a \in [0, \infty] \quad (3.10)$$

Тут  $\Gamma(x)$  - гамма-функція Ейлера. З співвідношення видно, що якщо  $z = 0$ , то функція Миттаг-Леффлера стає константою  $E_a(0) = 1$ , а також в разі  $a = 1$  стає експонентою  $E_1(z) = ez$ .

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta+ak)} \quad (3.11)$$

Функцію прийнято називати функцією типу Миттаг-Леффлера. Вона являється рішенням багатьох диференціальних рівнянь в похідних дробового порядку. Наприклад, фрактальное осциляційного рівняння, а також в роботі автора:

$$\partial_{0t}^{\beta} u(t) + \omega^{\beta} u(t) = 0, \quad 1 < \beta < 2 \quad (3.12)$$

Має рішення:  $u(t) = C_1 E_{\beta,1}(-(\omega t)^{\beta}) + C_2 t E_{\beta,2}(-(\omega t)^{\beta})$ ,

де  $C_1$  і  $C_2$  - константи інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Відзначимо деякі властивості функції типу Миттаг-Леффлера, що впливають з визначення:

- 1)  $E_{a,\beta}(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}, E_{a,1}(z) = E_a(z) \Rightarrow E_{1,1}(z) = e^z$ ;
- 2)  $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, E_{2,1}(z) = ch(\sqrt{z})$  і  $E_{2,2}(z) = \frac{sh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ ;
- 3)  $E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + z E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + z \alpha \frac{dE_{\alpha,\beta+1}(z)}{dz}$ ;
- 4)  $\left(\frac{d}{dz}\right)^m \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^{\alpha})\right) = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^{\alpha}), m \geq 1$ ;
- 5)  $E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} E_{\alpha/m,\beta}(z^{1/m} e^{i2\pi k/m})$ ;

$$6) \int_0^z z^{\beta-1} E_{a,\beta}(\lambda t^a) t^{\beta-1} dt = z E_{a,\beta+1}(\lambda z^a).$$

Вивчення функцій типу Міттаг-Леффлера в комплексній площині

Будемо рахувати  $\beta > 0$ . Розглянемо контур (петлю) Ханкеля  $\gamma(\varepsilon, \delta)$ , який складається з наступних трьох частин: променя  $S_\delta = \{\arg(\xi) = -\delta, |\xi| \geq \varepsilon\}$ , променя  $S_{-\delta} = \{\arg(\xi) = \delta, |\xi| \geq \varepsilon\}$  і дуги кола  $C_\delta(0, \varepsilon) = \{-\delta \leq \arg(\xi) \leq \delta, |\xi| = \varepsilon\}$ . У свою чергу контур  $\gamma(\varepsilon, \delta)$  розбиває площину  $\xi$  на дві нескінченні подобласти:  $G^{(-)}(\varepsilon, \delta)$  і  $G^{(+)}(\varepsilon, \delta)$ . В роботі показано, що якщо виконуються умови

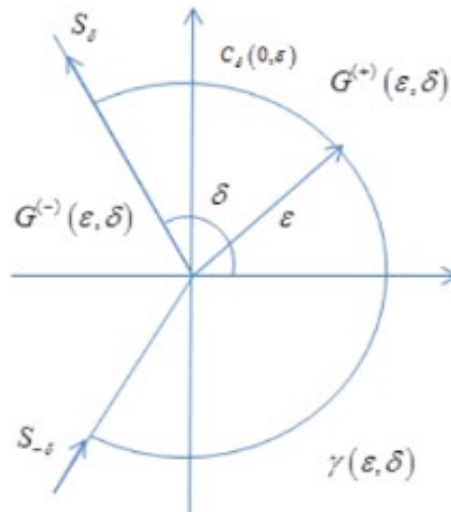


Рис.3.2 - Контур Ханкеля

$$0 < a < 2 \text{ і } a\pi < \delta \leq \min\{\pi, \pi a\},$$

то мають місце наступні інтегральні перетворення:

$$E_{a,\beta}(z) = \frac{1}{2a\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\delta)} \frac{e^{\xi a^1 a}}{\xi - z} d\xi, z \in G^{(-)}(\varepsilon, \delta). \quad (3.13)$$

$$E_{a,\beta}(z) = \frac{1}{a} z^{\frac{1-\beta}{a}} e^{z^{\frac{1}{a}}} + \frac{1}{2a\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\delta)} \frac{e^{\xi a^1 a}}{\xi - z} d\xi, z \in G^{(-)}(\varepsilon, \delta). \quad (3.14)$$

Інтеграл, що стоїть в співвідношеннях, обчислюється по кожній з частин контуру  $\gamma(\varepsilon, \delta)$ , вважаючи  $\xi = \varepsilon e^{i\delta}$  і слідуючи результатам робіт:

$$E_{a,\beta}(z) = \int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, \delta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, z \in G^{(-)}(\varepsilon, \delta),$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{a} z^{\frac{1-\beta}{a}} e^{z^{\frac{1}{a}}} + \int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, \delta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, z$$

$$\in G^{(+)}(\varepsilon, \delta),$$

$$K(\alpha, \beta, \delta, r, z) = \frac{1}{\alpha\pi} r^{\frac{1-\beta}{a}} e^{r^{\frac{1}{a}} \cos(\delta/a)} \frac{r \sin(\varphi - \delta) - z \sin(\varphi)}{r^2 - 2rz \cos(\delta) + z^2}, \quad (3.15)$$

$$P(\alpha, \beta, \delta, r, z) = \frac{\varepsilon^{1+(1-\beta)/a} e^{\varepsilon^{\frac{1}{a}} \cos(\frac{\delta}{a})} (\cos(\omega) + i \sin(\omega))}{\alpha\pi \varepsilon e^{i\phi} - z}, \quad (3.16)$$

$$\varphi = r^{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\delta}{a}\right) + \delta(1 + (1 - \beta)/a), \quad (3.17)$$

$$\omega = \varepsilon^{\frac{1}{a}} \sin(\phi/a) + \phi(1 + (1 - \beta)/a). \quad (3.18)$$

Інтегральне перетворення складається з двох частин (інтегралів): перший інтеграл - монотонна частина, а другий - осциляційна. Розглянемо випадок  $0 < \alpha < 1$ . Тодя отримаємо, що  $\delta = \min\{\pi, \alpha\pi\} = \alpha\pi$ . Тому будемо мати:

$$K(\alpha, \beta, \alpha\pi, r, z) = K(\alpha, \beta, r, z) = \frac{r^{\frac{1-\beta}{a}} e^{-r^{\frac{1}{a}}} r \sin(\pi(1-\beta)) - z \sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{\alpha\pi r^2 - 2rz \cos(\alpha\pi) + z^2}$$

(3.19)

Тут можливі три випадки:

1)  $|\arg(z)| = \alpha\pi$ ;

2)  $|\arg(z)| > \alpha\pi$ ;

3)  $|\arg(z)| < \alpha\pi$ ;

В роботі доведені теореми для цих випадків. Наведемо результат. В першому випадку функцію типу Миттаг-Леффлера можна обчислити з допомогою наступного співвідношення:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, \delta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, \varepsilon \geq |z|. \quad (3.20)$$

У другому випадку

$$E_{\alpha,\beta}(z) =$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, r, z) dr, \beta < 1 + \alpha$$

$$-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-r\frac{1}{a}}}{r^2 - 2rz\cos(\alpha\pi) + z^2} dr - \frac{1}{z}, \beta = 1 + \alpha$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, \varepsilon > 0, \beta > 0 \quad (3.21)$$

У третьому випадку

$$E_{a,\beta}(z) =$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, r, z) dr + \frac{z^{(1-\beta)/a} e^{\frac{1}{za}}}{a}, \beta < 1 + a$$

$$-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-r\frac{1}{a}}}{r^2 - 2rz\cos(\alpha\pi) + z^2} dr + \frac{e^{\frac{1}{za}} - a}{a_z}, \beta = 1 + a$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi + \frac{z^{\frac{1-\beta}{a}} e^{\frac{1}{za}}}{a}, \varepsilon > 0, \beta > 0 \quad (3.22)$$

Алгоритм обчислення функції типу Миттаг-Леффлера

В інтегральних уявленнях інтерес представляє невластний інтеграл. Його можна уявити в ролі певного інтеграла. Введемо, згідно роботі, фіксовану константу  $q = 0,9$ . Розглянемо наступні три випадки:

- 1)  $|z| \leq q, 0 < a;$
- 2)  $|z| > q, 0 < a \leq 1;$
- 3)  $|z| > q, 1 < a;$

У першому випадку, згідно:

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{z^k}{\Gamma(\beta - ak)} + \eta(z), |\eta(z)| < p, \quad (3.23)$$

$$k_0 = \max\{[(1 - \beta) / a] + 1, [\ln(p(1 - |z|)) / \ln(|z|)]\}. \quad (3.24)$$

Тут  $p$ - точність обчислення,  $[ \ ]$  - ціла частина числа.

У другому випадку

$$\int_a^\infty K(\alpha, \beta, r, z) dr = \int_a^{r_0} K(\alpha, \beta, r, z) dr + \eta(z), |\eta(z)| < p, a \in (0, \varepsilon),$$

(3.25)

$$r_0 = \max\{1, 2|z|, (-\ln(\pi p / 6))^a\}. \quad (3.26)$$

У третьому випадку, з урахуванням властивості  $m = [a] + 1$  і  $a < a / m \leq 1$ , де функція типу Миттаг-Леффлера обчислюється за формулою:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} E_{\alpha/m, \beta}(z^{1/m} e^{i2\pi k/m}) \quad (3.27)$$

для випадків  $|z|^{1/m} \leq q$  і  $|z|^{1/m} > q$ .

### 3.3 Дискретизація для двостороннього просторово-дробового хвильового рівняння

В цьому розділі неявні і явні методи вирішення двостороннього просторово-дробового хвильового рівняння а також умови стійкості для обох випадків. Застосовуючи зрушену формулу Грюнвальда, в разі неявного методу виходить:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{1}{h^a} \left[ \sum_{k=0}^{i+1} \omega_k c_{+,i}^{n+1} u_{i-k+1}^{n+1} + \sum_{k=0}^{N-i+1} \omega_k c_{-,i}^{n+1} u_{i+k-1}^{n+1} \right] + d_i^{n+1}$$

(3.28)

Визначаємо

$$c_{-,i}^n = c_-(x_i, t_n), c_{+,i}^n = c_+(x_i, t_n), \phi_i = c_{+,i}^{n+1} (\Delta t)^2 / h^a$$

І

$$\psi_i = c_{-,i}^{n+1} (\Delta t)^2 / h^a$$

Тоді система рівнянь, з граничними умовами визначає лінійну систему:

$$AU^{n+1} = 2U^{n+1} - U^{n-1} + (\Delta t)^2 D^{n+1},$$

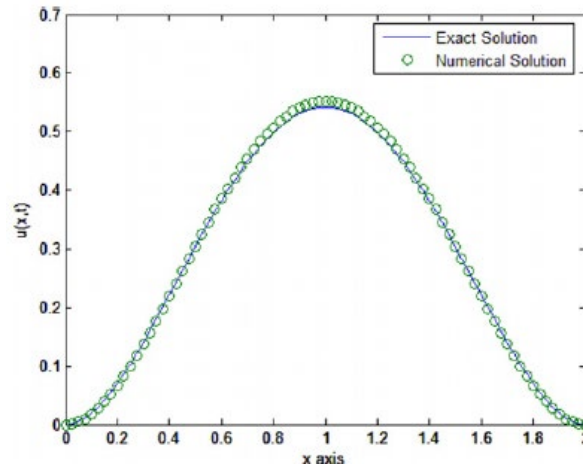


Рис. 3.3 - Зображення поведінки (неявний метод) при  $t = 2$  при  $\Delta t = 0,0200$ ,  $h = 0,0250$ .

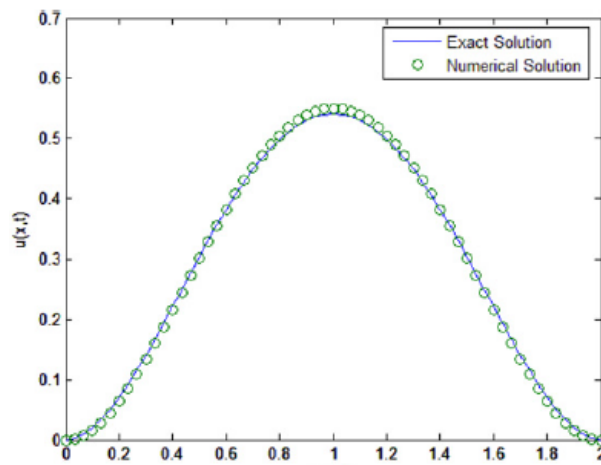


Рис. 3.4 - Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 2$  при  $\Delta t = 0,0100$ ,  $h = 0,0333$ .

Де  $U^n = [u_0^n, u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T$  і  $D^n = [0, d_1^n, d_2^n, \dots, d_{N-1}^n, 0]^T$

Тут зауважимо, що матриця  $A$  є нерозрідженою матрицею. Щоб проілюструвати цю матричну схему, ми наведемо відповідні перші три рівняння для рядків  $i = 1, 2$  та  $3$ :

$$2u_1^n - u_1^{n-1} + (\Delta t)^2 d_1^{n+1} = (\phi_1 \omega_2 + \psi_1 \omega_0) u_0^{n+1} + [1 - (\phi_1 + \psi_1) \omega_1] u_1^{n+1} - (\phi_1 \omega_0 + \psi_1 \omega_2) u_2^{n+1} - \psi_1 \omega_3 u_3^{n+1} - \dots - \psi_1 \omega_N u_N^{n+1} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
2u_2^n - u_2^{n-1} + (\Delta t)^2 d_2^{n+1} &= -\phi_2 \omega_3 u_0^{n+1} - (\psi_2 \omega_2 + \psi_2 \omega_0) u_1^{n+1} + \\
[1 - (\phi_2 + \psi_2) \omega_1] u_2^{n+1} - (\phi_2 \omega_0 + \psi_2 \omega_2) u_3^{n+1} - \psi_2 \omega_3 u_4^{n+1} - \dots - \\
\psi_2 \omega_{N-1} u_N^{n+1}, & \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2u_3^n - u_3^{n-1} + (\Delta t)^2 d_3^{n+1} &= -\phi_3 \omega_4 u_0^{n+1} - (\psi_3 \omega_0 + \psi_3 \omega_2) u_2^{n+1} + \\
[1 - (\phi_3 + \psi_3) \omega_1] u_3^{n+1} - (\psi_3 \omega_2 + \phi_3 \omega_0) u_4^{n+1} - \dots - \psi_3 \omega_{N-2} u_N^{n+1} & \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Матричні записи  $A_{i,j}$  для  $i = 1, 2, \dots, N-1$  і  $j = 1, 2, \dots, N-1$  визначаються через

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 - (\phi_i + \psi_i) \omega_1, & \text{для } j = i; \\ -(\phi_i \omega_2 + \psi_i \omega_0), & \text{для } j = i - 1; \\ -(\phi_i \omega_0 + \psi_i \omega_2), & \text{для } j = i + 1; \\ -\phi_i \omega_{i-j+1} & \text{для } j < i - 1; \\ -\psi_i \omega_{j-i+1} & \text{для } j > i + 1; \end{cases}$$

Поки

$$\begin{aligned}
A_{0,0} = 1, A_{0j} = 0 \text{ для } j = 1, 2, \dots, N, A_{N,N} = 1, \text{ і } A_{Nj} = 0 \text{ для } j \\
= 0, 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Неявне наближення методу, визначене, для рівняння дробової хвилі (1) з  $1 < \alpha \leq 2$  безумовно стійке.

Доказ. Відповідно до теореми Гершгоріна, власні значення матриці  $A$  лежать в об'єднанні  $N$  кіл, зосереджених на  $A_i$ , і, з радіусом

$$r_i = \sum_{k=0, k \neq i}^N A_{i,k} \quad (3.32)$$

Використовуючи визначення  $A$ , ми маємо:

$$A_{i,i} = 1 - (\phi_i + \psi_i) \omega_1 = 1 + (\phi_i + \psi_i) \alpha \quad (3.33)$$

Тоді ми можемо зробити висновок, що:

$$r_i = \sum_{k=0, k \neq i}^N A_{i,k} = \sum_{k=0, k \neq i}^{i+1} \phi_i \omega_k + \sum_{k=0, k \neq i}^{N-i+1} \psi_i \omega_k \leq (\phi_i + \psi_i) \alpha,$$

зі строгою нерівністю, що дотримується істини, коли  $\alpha$  не є цілим числом. Це означає, що власні значення матриці  $A$  всі не менше 1 за величиною. Отже, спектральний радіус зворотної матриці  $A^{-1}$  є меншим або



рівним 1. Таким чином, будь-які похибки в  $U^n$  та  $U^{n-1}$  не збільшуються, тому метод є стабільним.

Тепер явна формула зі зміщеною оцінкою Грюнвальда складається у такій формі:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{1}{h^a} \left[ \sum_{k=0}^{i+1} c_{+,i}^n \omega_k u_{i-k+1}^n + \sum_{k=0}^{N-i+1} c_{-,i}^n \omega_k u_{i+k-1}^n \right] + d_i^n \quad (3.34)$$

при  $h = (b - a) / N$ , при  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Визначити  $\phi_i = c_{+,i}^n (\Delta t)^2 / h^a$  і  $\psi_i = c_{-,i}^n (\Delta t)^2 / h^a$

Тоді можна записати у явній матричній формі:

$$U^{n+1} = BU^n - U^{n-1} + (\Delta t)^2 D^n$$

Для ілюстрації шаблону матриці  $B$  наведемо відповідні перші два рівняння для  $i = 1$  та  $2$ :

$$u_1^{n+1} = (\phi_1 \omega_2 + \psi_1 \omega_0) u_0^n + (2 + \phi_1 \omega_1 + \psi_1 \omega_1) u_1^n + (\phi_1 \omega_0 + \psi_1 \omega_2) u_2^n + \phi_1 \omega_3 u_3^n + \dots + \phi_1 \omega_N u_N^n - u_1^{n-1} + (\Delta t)^2 d_1^n \quad (3.35)$$

$$u_2^{n+1} = \phi_2 \omega_3 u_0^n + (\phi_2 \omega_2 + \psi_1 \omega_0) u_1^n + (2 + \phi_2 \omega_1 + \psi_2 \omega_1) u_2^n + (\phi_1 \omega_0 + \psi_1 \omega_2) u_2^n + \phi_1 \omega_3 u_3^n + \dots + \phi_2 \omega_{N-1} u_N^n - u_2^{n-1} + (\Delta t)^2 d_2^n \quad (3.36)$$

Матричні записи  $B_{i,j}$  для  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  і  $j = 1, 2, \dots, N - 1$

визначаються:

$$B_{ij} = \begin{cases} 2 + (\phi_i + \psi_i) \omega_1, & \text{для } j = i; \\ \phi_i \omega_2 + \psi_i \omega_0, & \text{для } j = i - 1; \\ \phi_i \omega_0 + \psi_i \omega_2, & \text{для } j = i + 1; \\ \phi_i \omega_{i-j+1}, & \text{для } j < i + 1; \\ \phi_i \omega_{j-i+1}, & \text{для } j > i + 1; \end{cases}$$

тоді як  $B_{0,0} = 1$ ,  $B_{0,j} = 0$  для  $j = 1, \dots, N$ ,  $B_{N,N} = 1$  і  $B_{N,j} = 0$  для  $j = 0, \dots, N - 1$ .

### 3.4 Числові результати

У цьому розділі ми представляємо числові результати для прикладів рівняння дробової хвилі для ілюстрації представлених схем, які використовуються в нашій роботі.

У цьому прикладі схеми кінцевих різниць використовуються для вирішення рівнянь дробової хвилі та при  $\alpha = 1,8$  відповідно. Також схеми кінцевих різниць використовуються для вирішення рівнянь дробової хвилі і відповідно.

Розглянемо двостороннє просторово-фракційне хвильове рівняння форми

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c_+(x,t) \frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial_+ x^{1.8}} + c_-(x,t) \frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial_- x^{1.8}} + d(x,t) \quad (3.37)$$

Таблиця 1 - Максимальна помилка (неявний метод) при  $t = 2$ .

$\Delta t$	$\Delta x$	Максимальна похибка
0.0020	$2^{-3}$	0.03066
0.0020	$2^{-4}$	0.01247
0.0020	$2^{-5}$	0.0062
0.0040	$2^{-6}$	0.0031

Таблиця 2 - Максимальна похибка (явний метод) при  $t = 2$ .

$\Delta t$	$\Delta x$	Максимальна похибка	$S_2$
0.0200	$2^{-3}$	0.0379	0.1730
0.0066	$2^{-4}$	0.0164	0.0710
0.0033	$2^{-5}$	0.0083	0.0636
0.0050	$2^{-6}$	0.0042	0.3996

визначена на кінцевій області  $0 < x < 2$  і  $t > 0$  з коефіцієнтом функцій:

$$c_+(x, t) = \Gamma(1.2)x^{1.8} \quad \text{і} \quad c_-(x, t) = \Gamma(1.2)(2 - x)^{1.8}$$

і функція джерела:

$$d(x, t) = 4e^{-t}x^2(2 - x)^2 - 32e^{-t} \left[ (x^2 + (2 - x)^2 - 2.5(x^3 + (2 - x)^3) + \frac{25}{22}(x^4 + (2 - x)^4) \right]$$

з початковими умовами:

$$u(x, 0) = 4x^2(2 - x)^2, \quad u_t(x, 0) = -4x^2(2 - x)^2$$

та умови Діріхле:  $u(0, t) = u(2, t) = 0$ .

Визначаємо, що точне рішення цієї проблеми:

$$u(x, t) = 4e^{-4t}x^2(2 - x)^2$$

що можна перевірити, застосовуючи дробові диференціальні формули:

$$D_{a+}^a(x)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-a)}(x - a)^{m-a} \quad (3.38)$$

і

$$D_{b-}^a(x)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-a)}(b - x)^{m-a} \quad (3.39)$$

У таблиці 1 показано величину максимальної похибки у точці  $t = 2$  між точним рішенням та числовим рішенням, отриманим за допомогою неявного методу, який обговорювався вище, з різними значеннями  $\Delta t$  та  $\Delta x$ . У таблиці 2 показано величину максимальної похибки у точці  $t = 2$  між точним рішенням та числовим рішенням, отриманим за допомогою явного методу, який обговорювався вище при різних значеннях  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  та обмеженої стійкості

$$S_2 = \frac{a(c_{+max} + c_{-max})(\Delta t)^2}{h^a} < 1 \quad (3.40)$$

Рис. 3.5 та 3.6 показують отримані числові рішення, використовуючи метод кінцевих різниць з  $\alpha = 1,8$  у випадку 2. З отриманих числових результатів робимо висновок, що числові розв'язки чудово узгоджуються з

точним рішенням, використовуючи зрушений метод Грюнвальда з кінцевою різницею.

Приклад 2. У цьому прикладі для розв'язання рівнянь дробової хвилі з  $\alpha = 2$  та  $\alpha = 1,8$  застосовуються схеми кінцевих різниць відповідно. Розглянемо двостороннє просторово-хвильове рівняння з функцією вільного джерела наступної форми:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c_+(x,t) \frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial_+ x^{1.8}} + c_-(x,t) \frac{\partial^{1.8} u(x,t)}{\partial_- x^{1.8}} \quad (3.41)$$

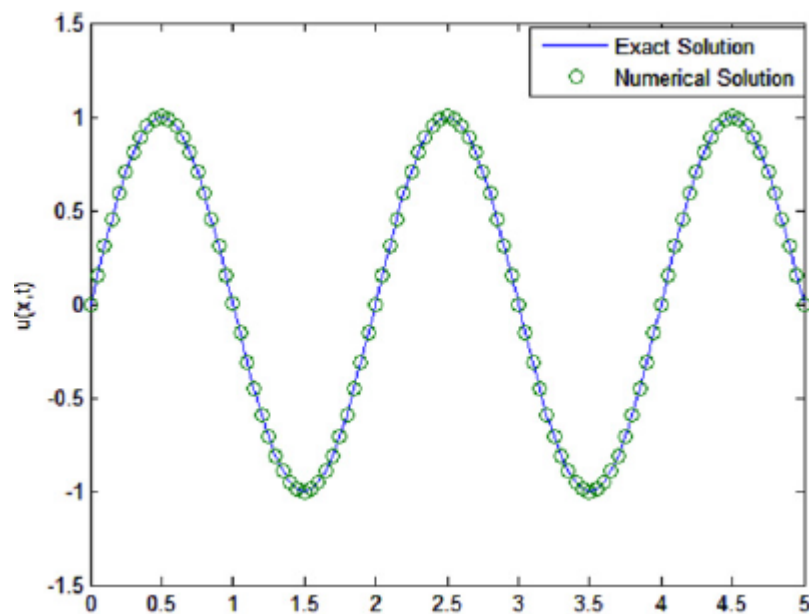


Рис. 3.5 - Зображення поведінки при  $t = 2$  при  $\Delta t = 0,0025$ ,  $h = 0,050$  і  $\alpha = 2$ .

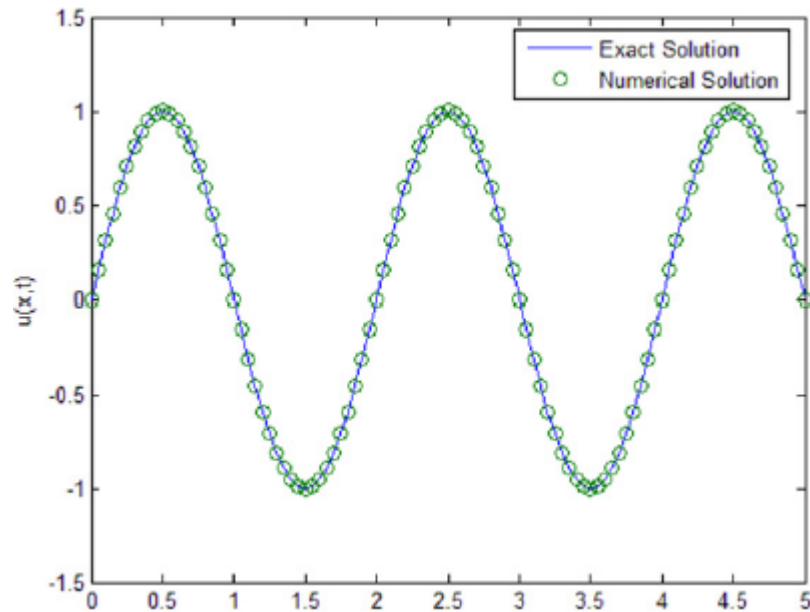


Рис. 3.6 - Зображення поведінки при  $t = 6$  при  $\Delta t = 0,010$ ,  $h = 0,050$  і  $\alpha = 2$ .

визначена на кінцевій області  $0 < x < 5$  і  $t > 0$  з коефіцієнтом функцій:

$$c_+(x, t) = 1,0 \text{ і } c_-(x, t) = 1,0,$$

з початковими умовами:  $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ ,

і умови Діріхле:  $u(0, t) = u(5, t) = 0$ .

Зауважте, що точне рішення цієї проблеми у випадку  $\alpha = 2$ :

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(2\pi t)$$

Рис. 3.7 – 3.8 показують отримані числові розв'язки, використовуючи метод кінцевих різниць відповідно  $\alpha = 2$  та  $\alpha = 1,8$ , з різними значеннями  $t$ . З отриманих числових результатів можна зробити висновок, що чисельні розв'язки чудово узгоджуються з точним рішенням, використовуючи зрушений метод Грюнвальда з кінцевою різницею.

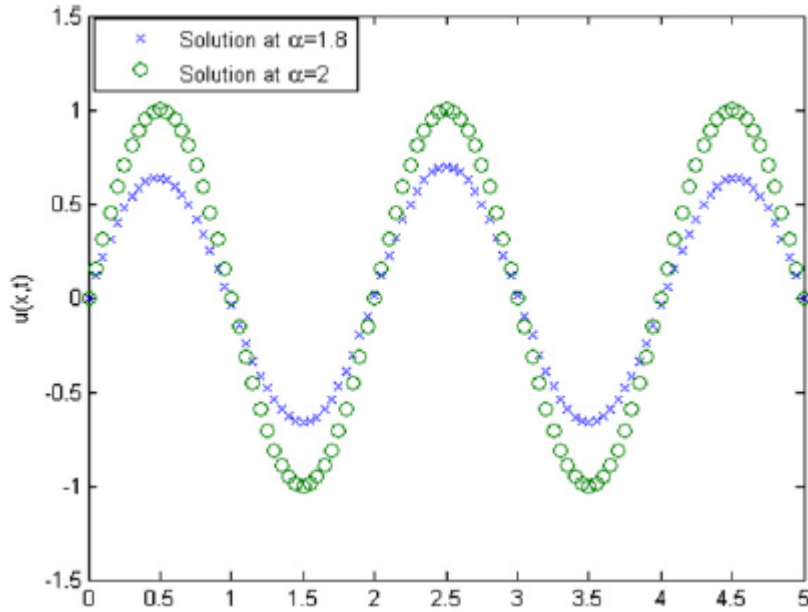


Рис. 3.7 - Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 1$  при  $\Delta t = 0,0025$  і  $h = 0,050$ .

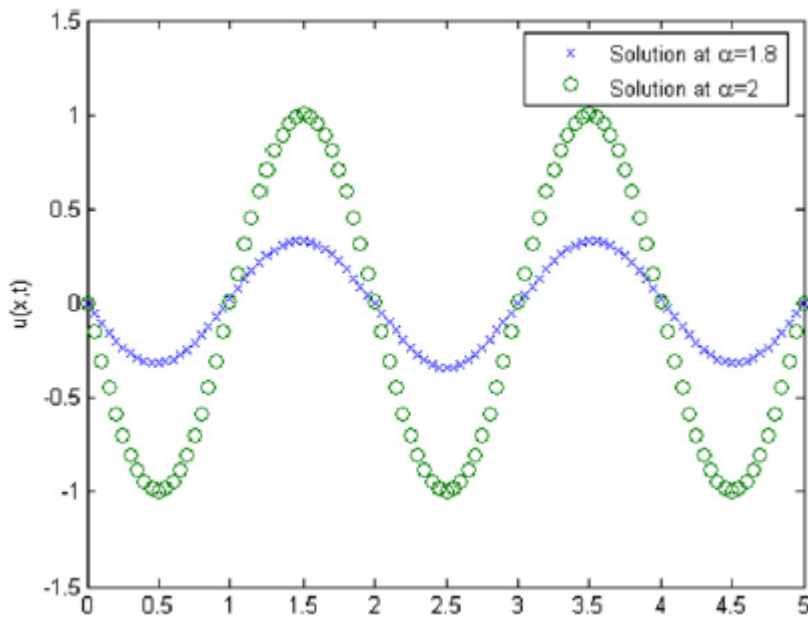


Рис.3.8 - Зображення поведінки (явний метод) при  $t = 1,5$  при  $\Delta t = 0,015$  і  $h = 0,050$ .

## ВИСНОВКИ

На підставі проведеного аналізу можна зробити висновок, що врахування невідомого характеру як структур, так і кінематичних процесів у розглянутих доданків до параметрів фракційних явищ, які лежать в основі хвильового моніторингу. Можна собі уявити, що врахування таких ефектів сприяє кращому порозумінню явищ та ефектів, які супроводжують етап хвильового моніторингу та його параметризації (зокрема встановленню критеріїв критичних режимів, тощо).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Герасимов О.І., Андріанова І.С. “Фізика в задачах. Ч.IV. Коливання та хвилі. Оптика.” Навчальний посібник; ОДЕКУ. – Одеса: ТЕС, 2015. – 152 с. ISBN 978-617-7054-98-5
2. Герасимов О.І. “Фізика гранульованих матеріалів” Монографія. – Одеса: ТЕС, 2015. – 264с.
3. Герасимов О.І. “Радіоекологія за галузями” Підручник; ОДЕКУ. – Одеса: ТЕС, 2016.–100с.
4. Герасимов О.І., Андріанова І.С. “Фізика в задачах.” Підручник; Одеськ. держ. екол. ун-т; Харків: ФОП Панов А.М., 2017, 564 с. ISBN 978-617-7541-35-5
5. Gerasymov O.I. “Structure and Photonics of discrete meso-scaled anisotropic systems” Monography / Odesa State Environmental University. Odesa: TES, 2018, 242с. ISBN978-617-7337-75-0
6. Герасимов О.І. “Теоретичні основи технологій захисту навколишнього середовища.” Навчальний посібник. Одеськ. держ. екол. ун-т; Одеса: ТЕС, 2018, 228с. ISBN 978-617-7337-80-4
7. Герасимов О.І., “Технології захисту навколишнього середовища”, підручник, 2018 .300 с.
8. Герасимов О.І., “Environmental Safety Technologies” навч.посібн. (англ.мовою), 2019.300 с.
9. Герасимов О.І., Андріанова І.С., Настасюк В.А “Методи теоретичної та математичної фізики в задачах убезпечення довкілля”, навч. посібник, 2019.300 с.
10. Герасимов О.І., Співак А.Я.”Окремі задачі фізики м'якої матерії, наукова монографія.” 2019.200с.
11. Parovik R.I. “CALCULATION SPECIFIC FUNCTIONS OF MITTAG-LEFFLER IN THE COMPUTER MATHEMATICS «MAPLE»” Math-Net.Ru



12. Фракційне обчислення [Електроний ресурс]. Режим доступу: ru.knowledgr.com
13. N.H. Sweilama, M.M. Khader, A.M. Nagy Numerical solution of two-sided space-fractional wave equation using finite difference method
14. Mohamed M Khader, Mohamed H Adel Numerical solutions of fractional wave equations using an efficient class of FDM based on the Hermite formula
15. Afshan Kanwal, Chang Phang, Umer Iqbal
16. Екологічний моніторинг [Електроний ресурс]. Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
17. Мікроскопія оптична [Електроний ресурс]. Режим доступу: <http://bourabai.kz/physics/2284.html>
18. Звукові хвилі. Інфразвук і ультразвук [Електроний ресурс]. Режим доступу: <https://fiz.1sept.ru/2006/03/07.htm>
19. Дистанційне зондування Землі [Електроний ресурс]. Режим доступу: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
20. Numerical Solution of Fractional Diffusion Wave Equation and Fractional Klein–Gordon Equation via Two-Dimensional Genocchi Polynomials with a Ritz–Galerkin Method