

PACS numbers: 72.10.-d, 72.20.Dp, 73.23.Ad, 73.40.-c, 73.50.Bk, 84.32.Ff, 85.35.-p

## Физика нанотранзисторов: рассеяние электронов и модель прохождения MOSFET

Ю. А. Кругляк

*Одесский государственный экологический университет,  
ул. Львовская, 15,  
65016 Одесса, Украина*

Подробно рассмотрена качественная картина явлений рассеяния электронов в канале проводимости нанотранзисторов и сформулированы важнейшие результаты в виде сводки формул (18), в которой ключевым является понятие о коэффициенте прохождения  $T(E)$ , связывающем среднюю длину свободного пробега назад  $\lambda(E)$  с длиной канала проводимости  $L$ . Затем обобщённая теория транспорта Ландауэра–Датта–Лундстрёма (ЛДЛ) позволила построить модель прохождения MOSFET с учётом рассеяния электронов. Ограничения, накладываемые электростатикой MOS, учтены в выражении Ландауэра для тока (19). Итогом явилась модель прохождения MOSFET в виде сводки формул (36) для вычисления линейной области и области насыщения выходной характеристики нанотранзистора, которую полезно сравнить с баллистической моделью MOSFET (69/[1]). Если транзистор работает в подпороговом режиме, можно воспользоваться невырожденной статистикой. Однако в режиме выше порога зона проводимости на вершине барьера близка или даже ниже уровня Ферми, так что нужно пользоваться статистикой Ферми–Дирака. Тем не менее, стало практикой в теории устройств со структурой MOS использовать невырожденную статистику Максвелла–Больцмана, поскольку использование её сильно упрощает расчёты, ведёт к более простым формулам и делает теорию более понятной. На практике также обычно некоторые параметры транзистора не известны с достаточной точностью, и в случае использования невырожденной статистики они могут рассматриваться в качестве параметров подгонки, обеспечивая вполне приемлемые результаты. Полученные уравнения хорошо согласуются с физикой процессов в линейной области, как и в области насыщения, чего нельзя сказать обо всей области изменения напряжения на стоке, поскольку у нас нет достаточно надёжной модели для зависимости  $T(V_{DS})$ . Далее будет показано, как можно объединить модель прохождения и модель виртуального истока и таким образом выйти на моделирование всей цельной выходной характеристики MOSFET.

Детально розглянуто якісну картину явищ розсіювання електронів у каналі провідності нанотранзисторів і сформульовано найважливіші результати у вигляді зведення формул (18), в якому ключовим є поняття про коефіцієнт проходження  $T(E)$ , що зв'язує середню довжину вільного пробігу назад  $\lambda(E)$  із довжиною каналу провідності  $L$ . Потім узагальнена теорія транспорту Ландауера–Датта–Лундстрема (ЛДЛ) уможливила побудувати модель проходження MOSFET з урахуванням розсіювання електронів. Обмеження електростатики MOS враховано у виразі Ландауера для струму (19). Підсумком став модель проходження MOSFET у вигляді зведення формул (36) для обчислення лінійної області й області насичу вихідної характеристики нанотранзистора, яку корисно порівняти з балістичним моделюванням MOSFET (69/[1]). Якщо транзистор працює в підпороговому режимі, можна скористатися невиродженою статистикою. Однак у режимі вище порога зона провідності на вершині бар'єру близька або навіть нижче рівня Фермі, так що потрібно користуватися статистикою Фермі–Дірака. Проте стало практикою в теорії пристроїв зі структурою MOS використовувати невироджену статистику Максвелла–Больцманна, оскільки використання її сильно спрощує розрахунки, веде до більш простих формул і робить теорію більш зрозумілою. На практиці також зазвичай деякі параметри транзистора не відомі з достатньою точністю, і в разі використання невиродженої статистики вони можуть розглядатися в якості параметрів припущення, забезпечуючи цілком прийнятні результати. Одержані рівняння добре узгоджуються з фізикою процесів у лінійній області, як і в області насичу, чого не можна сказати про всю область зміни напруги на стоці, оскільки у нас немає достатньо надійного моделювання залежності  $T(V_{DS})$ . Далі буде показано, як можна об'єднати модель проходження та модель віртуального витоку і таким чином вийти на моделювання всієї цілісної вихідної характеристики MOSFET.

A qualitative pattern of electron-scattering phenomena in the conduction channel of nanotransistors is considered in detail, and important results are formulated in the form of a summary of formulas (18), in which the concept of the transmission coefficient  $T(E)$  connecting the mean free path  $\lambda(E)$  with the conduction channel length  $L$  is key. Then, the generalized theory of Landauer–Datta–Lundstrom (LDL) transport enables to construct a model for the MOSFET transmission with allowance for the scattering of electrons. The limitations imposed by the MOS electrostatics are taken into account in the Landauer expression for the current (19). The result is a model for passing the MOSFET in the form of a summary of formulas (36) for calculating both the linear region and the saturation region of the output characteristic of a nanotransistor, which can be compared with the ballistic model of a MOSFET (69/[1]). If the transistor operates in a subthreshold mode, one can use nondegenerate statistics. However, in the regime above the threshold, the conduction band at the barrier top is close to or even below the Fermi level, so we need to use the Fermi–Dirac statistics. Nevertheless, it has become a practice in the theory of MOS devices to use the nondegenerate Maxwell–Boltzmann statistics, since its use greatly simplifies calculations, leads to simpler formulas, and makes the theory more understandable. In practice usually, some

parameters of the transistor are not known with sufficient accuracy, and in the case of using nondegenerate statistics, they can be considered as fitting parameters, providing quite acceptable results. The obtained equations are in a good agreement with the physics of processes in the linear region as well as in the saturation region that cannot be said concerning the whole region of voltage variation in the drain, since we do not have a sufficiently reliable model for the  $T(V_{DS})$  dependence. Next, we show how you can combine the penetration model and the virtual source model, and thus to simulate the entire MOSFET output characteristic.

**Ключевые слова:** наноэлектроника, полевой транзистор, MOSFET, модель ЛДЛ, метрика транзисторов, рассеяние электронов, модель прохождения.

**Ключові слова:** наноелектроніка, польовий транзистор, MOSFET, модель ЛДЛ, метрика транзисторів, розсіювання електронів, модель проходження.

**Key words:** nanoelectronics, field effect transistor, MOSFET, LDL model, transistor metrics, electron scattering, penetration model.

*(Получено 17 марта 2019 г.)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

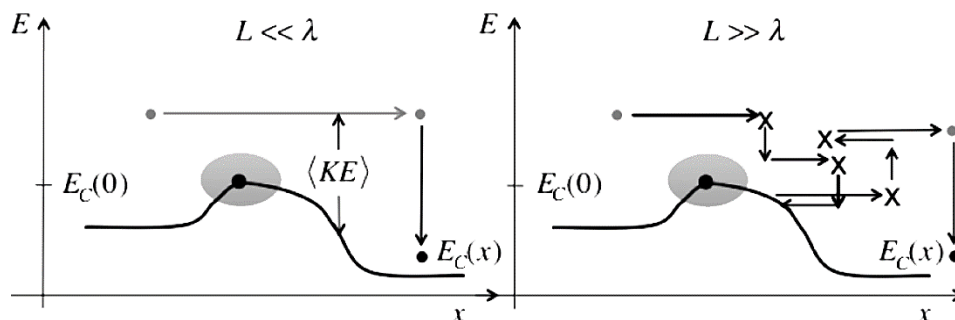
При вычислении характеристик баллистических MOSFET мы начинали с уравнения (57/[1]), в котором предполагалось, что коэффициент прохождения  $T(E)$  равен единице. Рассеяние электронов на заряженных примесях, колебаниях решётки и тому подобные процессы уменьшают прохождение. Для вычисления характеристик транзисторов с учётом рассеяния в целом справедливо уравнение

$$I_{DS} = \frac{2q}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} T(E)M(E)(f_s(E) - f_D(E)) dE. \quad (1)$$

Траектория электрона при баллистическом переносе схематически показана на рис. 1 в сравнении с квазибаллистическим переносом, включающим множественные процессы рассеяния.

Как показано на левом рис. 1, электроны впрыскиваются истоком, где они подвержены рассеянию, в канал проводимости, в котором не происходят процессы рассеяния, и входят в сток, где они опять подвержены рассеянию. Разница в электрохимических потенциалах на концах канала проводимости ускоряет электроны, они теряют кинетическую энергию  $KE$ , которая передаётся стоку. Это баллистический перенос.

Справа на рис. 1 условно показана траектория переноса в при-



**Рис. 1.** Иллюстрация баллистического (слева) и квазibalлистического (справа) переноса электрона. В обоих случаях показаны траектории электрона, инжектированного истоком при определённой энергии  $E$ . Рассеяние — это стохастический процесс, так что траектория справа — одна из множества возможных траекторий.<sup>1</sup>

сутствии актов рассеяния. Некоторые акты рассеяния упругие: изменяется направление движения, но не энергия. Другие акты неупругие: изменяются и направление и энергия. Например, электроны могут приобрести энергию путём поглощения фононов (колебаний решётки) или могут передать энергию колебаниям решётки, генерируя фононы. В частности, для показанной справа траектории электрон, впрыснутый истоком, достигает стока, однако, рассеяние это стохастический процесс, и могут реализовываться траектории, когда инжектированный истоком электрон рассеивается назад и возвращается в исток. Прохождение от истока до стока есть отношение потока электронов, впрыснутых истоком, к потоку электронов, покидающих канал проводимости через сток, с неизбежностью уменьшается из-за рассеяния.

Далее мы вначале качественно рассмотрим рассеяние электронов и введём понятие о коэффициенте прохождения, а затем построим модель прохождения MOSFET.

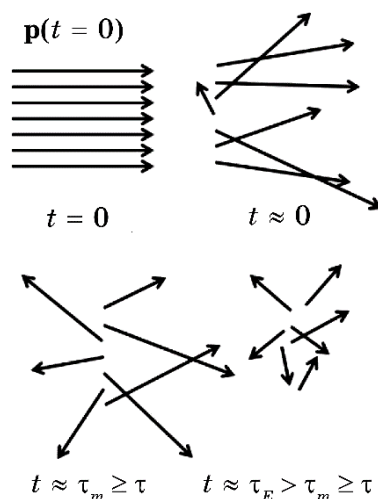
## 2. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ И КОЭФФИЦИЕНТ ПРОХОЖДЕНИЯ

Наноразмерные MOSFET не являются ни чисто баллистическими ( $T(E) = 1$ ), ни чисто диффузионными ( $T(E) \ll 1$ ): они работают в квазibalлистическом режиме с  $T(E) < / \cong 1$ . Наша задача — научиться пользоваться уравнением (1) в квазibalлистическом режиме. Более подробно с прохождением при рассеянии можно познакомиться в [2–5].

**Характеристические времена и длины.** Удобный подход к пониманию рассеяния дают характеристические времена, такие как среднее время между столкновениями  $\tau$ , или скорость рассеяния

$1/\tau$  как вероятность акта рассеяния за единицу времени. Удобно ввести также характеристические длины, такие как средняя длина свободного пробега  $\Lambda$ , среднее расстояние между актами рассеяния, а  $1/\Lambda$  есть вероятность рассеяния на единицу длины. В общем случае эти характеристические времена и длины зависят от энергии электронов. Нас будут интересовать средние времена рассеяния и средние длины свободного пробега, когда усреднение проводится по физически существенному распределению энергий электронов.

Три важных характеристических времени проиллюстрированы на рис. 2. Рассмотрим поток электронов с квазиимпульсом  $\mathbf{p}(E) = p(E)\hat{x}$ , инжектированных в полупроводник в момент времени  $t = 0$ . Будем считать, что энергия электронов  $E$  намного больше равновесной энергии  $3kT/2$ . По истечении времени  $\tau(E)$  пусть каждый электрон испытает в среднем хотя бы один акт рассеяния. Величина  $\tau(E)$  есть среднее время рассеяния, а обратная величина  $1/\tau(E)$  — средняя скорость рассеяния. При этом предполагается, что все состояния, в которые рассеиваются электроны, свободны и отсутствуют электроны, привнесённые из других состояний. Более точно величину  $\tau(E)$  можно назвать сред-



**Рис. 2.** Качественная визуализация различных характеристических времён рассеяния. В момент времени  $t = 0$  электроны с одинаковыми импульсами впрыскиваются в проводник в одном направлении. Электроны испытывают в среднем одно столкновение через время  $t \approx \tau(E)$ . Суммарный импульс первоначального ансамбля электронов зануляется через время  $t \approx \tau_m(E) \geq \tau(E)$ , а энергия принимает своё равновесное значение через время  $t \approx \tau_E(E) > \tau_m(E) \geq \tau(E)$ . Длина векторов на рисунках символически связана с энергией [2, 4].<sup>2</sup>

ним временем рассеяния электронов наружу (out-scattering time).

Как показано на рис. 2, полезно определить и другие характеристические времена. Например, преимущественным механизмом рассеяния может быть упругое и анизотропное рассеяние, так что акт рассеяния не изменяет энергию и лишь незначительно отклоняет электрон. В этом случае по прошествии времени  $\tau(E)$  электроны все ещё характеризуются импульсом преимущественно в направлении оси  $x$  и их энергия приблизительно та же, что и при впрыскивании. Позже, через время релаксации импульса  $\tau_m(E)$  импульсы электронов рандомизируются и релаксируют и суммарный импульс уже не направлен вдоль оси  $x$ , однако, средняя энергия все ещё близка к энергии при инжектировании, если доминантный механизм рассеяния все ещё остаётся упругим. Наконец, через несколько более длительное время, время релаксации энергии  $\tau_E(E)$ , впрыснутые электроны потеряют свою избыточную энергию и придут в равновесное состояние. Соотношение между этими характеристическими временами приблизительно такое:

$$\tau_E(E) \gg \tau_m(E) \gg \tau(E), \quad (2)$$

где отражено, что может потребоваться несколько актов неупругого рассеяния, чтобы сбросить избыточную энергию. Если рассеяние изотропное, т.е. электроны равновероятно рассеиваются в любых направлениях, то  $\tau(E) = \tau_m(E)$ .

Можно определить также характеристические длины рассеяния, такие как средняя длина свободного пробега (mean-free-path—mfp)

$$\Lambda(E) = v(E) \tau(E), \quad (3)$$

иначе среднее расстояние между актами рассеяния, или mfp релаксации импульса и mfp релаксации энергии, если это необходимо.

**Скорости рассеяния и энергия.** Фундаментальным понятием в теории рассеяния является матрица рассеяния  $S(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}')$ , переводящая систему частиц из первоначального состояния  $\mathbf{p}$  в некоторое конечное состояние  $\mathbf{p}'$ .

Скорость рассеяния, иначе вероятность рассеяния за единицу времени, есть просто единица, делённая на среднее время между соседними столкновениями, и получается путём суммирования по всем возможным конечным состояниям, а именно:

$$\frac{1}{\tau(\mathbf{p})} = \sum_{\mathbf{p}'} S(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'). \quad (4)$$

В предположении, что электроны впрыскиваются в проводник с начальным импульсом, направленным вдоль оси  $x$ , для скорости импульсной релаксации, по аналогии с (4), имеем [2]:

$$\frac{1}{\tau_m(\mathbf{p})} = \sum_{\mathbf{p}'} S(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') \frac{\Delta p_x}{p_x}. \quad (5)$$

Анизотропное рассеяние стремится отклонить электроны на небольшие углы, в результате чего время импульсной релаксации растёт, а соответствующая скорость падает. Аналогичным образом записывается скорость релаксации энергии через время соответствующей релаксации.

Время импульсной релаксации можно рассчитать из скорости перехода. Техника вычислений скорости перехода подробно изложена в [2]. Здесь мы обрисовем лишь её основные моменты. Рассмотрим акт рассеяния подробнее (рис. 3).

Пусть электрон с импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  и описываемый волновой функцией  $\psi_i(\mathbf{r})$  оказался в области действия потенциала рассеяния  $U_s(\mathbf{r}, t)$ , который может быть как статическим (рассеяние на заряженных примесях), так и динамическим (рассеяние на фононах). В результате акта рассеяния первоначальный импульс электрона становится иным  $\mathbf{p}'$ , изменяется и его волновая функция на  $\psi_f(\mathbf{r})$ . Нужно рассчитать вероятность (за единицу времени)  $S(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}')$  перехода электрона из первоначального состояния  $\mathbf{p}$  в конечное  $\mathbf{p}'$ .

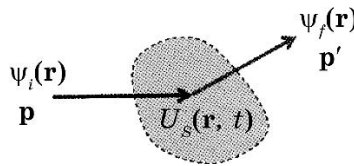
В первом порядке теории возмущений

$$S(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{p',p}|^2 \delta(E' - E - \Delta E), \quad (6)$$

где матричный элемент перехода

$$|H_{p',p}|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_f^*(\mathbf{r}) U_s(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Выражение (6) известно в квантовой теории как золотое правило Ферми–Дирака [6, 7]. Фигурирующая в (6)  $\delta$ -функция от-



**Рис. 3.** Переход электрона из начального состояния в конечное в результате акта рассеяния на потенциале  $U_s(\mathbf{r}, t)$ .<sup>3</sup>

ветствена за сохранение энергии. В случае статического потенциала рассеяния (например, на заряженных примесях) энергия не релаксирует ( $\Delta E = 0$ ). Для периодического потенциала с характерной частотой  $\omega$  (колебания решётки)  $\Delta E = \pm \hbar\omega$ , что соответствует излучению или поглощению фонона. В любом случае сначала нужно задаться потенциалом рассеяния, затем воспользоваться (6) и далее вычислить характерное время (4) или (5).

Согласно (4), скорость рассеяния зависит от числа конечных состояний при энергии  $E(\mathbf{p}')$ , доступных для электрона. Специфические механизмы рассеяния могут отбирать специальные конечные состояния, в чем мы убедимся ниже при обсуждении рассеяния на заряженных примесях, а в простейшем случае скорость рассеяния должна быть пропорциональной плотности конечных состояний. Для изотропного упругого рассеяния электронов в зоне проводимости

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{\tau_m(E)} \propto D(E - E_c), \quad (7)$$

а для изотропного неупругого рассеяния, когда электрон поглощает или излучает энергию  $\hbar\omega$ , например, при взаимодействии с фононом,

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{\tau_m(E - E_c)} \propto D(E \pm \hbar\omega - E_c). \quad (8)$$

Для простых зон параболического профиля известны аналитические выражения для времён рассеяния [2], а для более сложных зон не обойтись без численного суммирования по конечным состояниям.

В случае полупроводников времена рассеяния часто записывают в форме степенного закона

$$\tau_m(E) = \tau_{m0} \left( \frac{E - E_c}{kT} \right)^s, \quad (9)$$

где  $s$  — характерный показатель степени, соответствующий тому или иному механизму рассеяния. Например, рассеяние электронов на акустических фононах допустимо рассматривать как почти упругое и изотропное при комнатной температуре. Скорость рассеяния должна быть пропорциональной плотности состояний, которая для  $3D$ -электронов при параболической зонной структуре полупроводника пропорциональна  $(E - E_c)^{1/2}$ , так что для времени рассеяния можно ожидать пропорциональность величине  $(E - E_c)^{-1/2}$ . Характерный показатель степени для рассеяния на акустических фононах  $s = -1/2$ . Для  $2D$ -электронов плотность

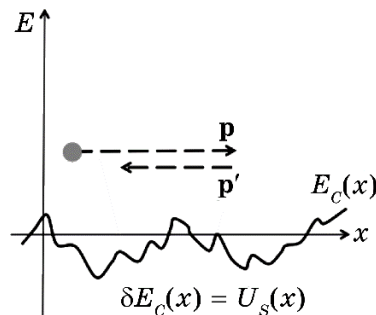


состояний не зависит от энергии, так что характерный показатель степени  $s = 0$ . Для  $1D$ -электронов плотность состояний пропорциональна  $(E - E_C)^{-1/2}$  и характерный показатель степени в степенном законе (9)  $s = +1/2$ . Не всегда можно описать время рассеяния степенным законом, но если это возможно, тогда расчёты сильно упрощаются.

Когда при рассеянии учитываются электростатические взаимодействия, например, при рассеянии на заряженных примесях или при рассеянии на фононах в полярных средах, зависимость времени рассеяния от энергии иная. Как показано на рис. 4, расположенные случайным образом заряды вызывают флуктуации профиля дна зоны проводимости  $E_C(x)$ , приводящие к рассеянию электронов. Однако высокоэнергетические электроны чувствуют флуктуирующий потенциал в меньшей степени, чем электроны с более низкой энергией, так что в случае рассеяния на заряженных примесях или на полярных фононах можно ожидать, что скорость рассеяния  $1/\tau(E)$  уменьшится (время рассеяния  $\tau(E)$  увеличится) с ростом энергии электронов. Для  $3D$ -электронов времени рассеяния в степенном законе соответствует значение  $s = +3/2$  [2]. При рассеянии на неполярных фононах время рассеяния уменьшается с энергией электронов.

В отношении рассеяния на заряженных примесях важно отметить его анизотропию. Значительная доля электронов характеризуется большой энергией и почти не меняют свои траектории в поле заряженных примесей. В результате время релаксации импульса при рассеянии на заряженных примесях существенно больше среднего времени рассеяния:  $\tau_m(E) \gg \tau(E)$ .

Средняя длина свободного пробега также может быть записана в виде степенного закона. Из уравнения (3), помня, что для пара-



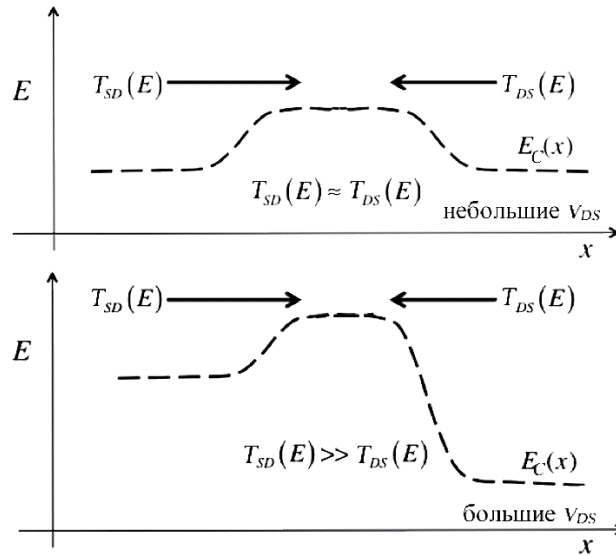
**Рис. 4.** Флуктуирующий потенциал, создаваемый случайно расположенными зарядами, иллюстрирует рассеяние на заряженных примесях. Электроны с высокой энергией чувствуют возмущающий потенциал в меньшей степени по сравнению с электронами с меньшей энергией и поэтому рассеиваются меньше.<sup>4</sup>

болических зон  $\nu(E) \propto (E - E_C)^{1/2}$ , имеем

$$\Lambda(E) = \nu(E) \tau(E) \propto (E - E_C)^{1/2} \left( \frac{E - E_C}{kT} \right)^s = \Lambda_0 \left( \frac{E - E_C}{kT} \right)^r, \quad (10)$$

где характеристический показатель степени для средней длины свободного пробега  $r = s + 1/2$ . Для рассеяния на акустических фононах в  $3D$   $s = -1/2$ , так что  $r = 0$ : средняя длина свободного пробега не зависит от энергии. При рассеянии на акустических фононах в  $2D$   $s = 0$ , так что  $r = 1/2$ : средняя длина свободного пробега увеличивается с ростом энергии электронов.

**Коэффициент прохождения.** Различие между прохождением  $T_{SD}(E)$  от истока к стоку и  $T_{DS}(E)$  от стока к истоку иллюстрируется на рис. 5. Величина  $T_{SD}(E)$  есть отношение стационарного потока электронов, выходящего из стока, к потоку, инжектированному истоком, а величина  $T_{DS}(E)$  — отношение потока электронов, выходящего из истока, к потоку, инжектированному стоком. При нулевом или небольшом напряжении на стоке можно ожидать, что оба напряжения одинаковы:  $T_{SD}(E) \approx T_{DS}(E) = T(E)$ .



**Рис. 5.** Иллюстрация двух коэффициентов прохождения  $T_{SD}(E)$  и  $T_{DS}(E)$ . При впрыскивании потока электронов истоком прохождение  $T_{SD}(E)$  определяет долю электронов, покидающих сток, а при впрыскивании электронов стоком прохождение  $T_{DS}(E)$  определяет долю электронов, покидающих исток. Верхний рисунок соответствует нулевому или небольшому напряжению  $V_{DS}$ , а нижний рисунок соответствует большому напряжению на стоке.<sup>5</sup>

Этот случай показан в верхней части рис. 5. В нижней части рисунка показана ситуация, когда напряжение на стоке велико. В этом случае совсем не очевидно, будут или не будут одинаковы  $T_{SD}(E)$  и  $T_{DS}(E)$ , но можно показать, что в случае упругого рассеяния оба прохождения одинаковы. Однако при неупругом рассеянии они совершенно различны:  $T_{DS}(E) \ll T_{SD}(E)$ .

При моделировании тока в MOSFET тот факт, что  $T_{DS}(E) \ll T_{SD}(E)$  при большом напряжении на стоке, не имеет большого значения, поскольку при большом  $V_{DS}$  поток электронов, инжектированных истоком, и так слишком незначителен. Таким образом, обычно предполагается, что достаточно вычислять лишь один коэффициент прохождения  $T(E)$ , который определяет прохождение в любом из направлений.

Ранее было показано, что коэффициент прохождения  $T(E)$  связан со средней длиной пробега между столкновениями назад  $\lambda(E)$  согласно (21/[1]):

$$T(E) = \frac{\lambda(E)}{\lambda(E) + L}. \quad (11)$$

Обращает на себя внимание то, что в выражении для коэффициента прохождения используется средняя длина пробега  $\lambda(E)$ , а не  $\Lambda(E)$  по (3). Это уравнение (11) не сложно вывести [3, 4], как и не сложно убедиться в его справедливости.

Уравнение (11) пригодно для описания прохождения во всем интервале от баллистического предела до диффузионного. Когда длина проводника меньше средней длины свободного пробега, тогда

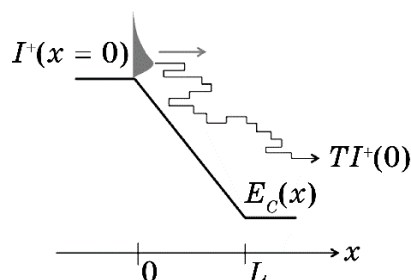
$$T(E) = \frac{\lambda(E)}{\lambda(E) + L} \rightarrow 1 \quad (L \ll \lambda(E)), \quad (12)$$

и перенос электронов в канале проводимости баллистический. Когда длина проводника велика по сравнению с длиной свободного пробега, тогда

$$T(E) = \frac{\lambda}{\lambda + L} \rightarrow \frac{\lambda}{L} \quad (L \gg \lambda). \quad (13)$$

Уравнение (11) описывает прохождение электронов по проводнику в отсутствие электрического поля. То, что происходит при приложении электрического поля к каналу проводимости, иллюстрируется на рис. 6.

На рисунке 6 показан короткий канал проводимости, к которому приложено сильное электрическое поле. Равновесный поток электронов впрыскивается истоком. Электроны быстро наращивают кинетическую энергию, и скорость их рассеяния увеличивается. Моделирование электронного транспорта через короткие

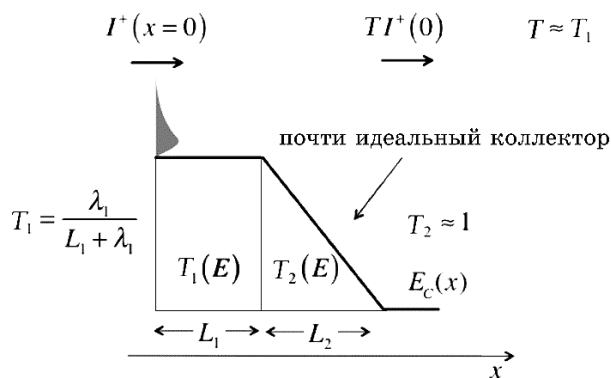


**Рис. 6.** Иллюстрация траектории электрона в коротком канале проводимости при высоком приложенном электрическом поле. Электроны впрыскиваются истоком из равновесного состояния, и большая их часть достигает стока, даже если и происходят акты рассеяния [8].<sup>6</sup>

каналы с большим перепадом напряжения, как в рассматриваемом случае, когда наблюдаются такие эффекты как резкие всплески скорости, одна из интригующих задач современной полуклассической теории транспорта [2]. Расчёт средней скорости в зависимости от положения электрона в проводнике весьма непростая задача, однако, детальное моделирование её с использованием понятия прохождения приводит к весьма понятным и простым результатам [8]. Обнаружено, что если инжектированные электроны проникают даже на короткое расстояние вглубь области с сильным электрическим полем, тогда даже если они и подвергаются актам рассеяния, то они всё равно обречены достичь конца канала проводимости [8]. Даже если имеет место сильное рассеяние, коэффициент прохождения может быть почти равен единице, поскольку сильное электрическое поле подхватывает электроны и выносит их из канала проводимости в стоковый терминал.

В высококачественном MOSFET при большом напряжении на стоке электрическое поле вблизи вершины барьера у входа в канал проводимости слабое, а вблизи стока сильное. Для понимания того, что происходит в такой ситуации, рассмотрим модель на рис. 7.

В этой модели энергетический профиль канала проводимости состоит из двух участков: короткого участка длиной  $L_1$  с постоянным потенциалом и средней длиной свободного пробега  $\lambda_1$  и длинного участка длиной  $L_2$  с сильным электрическим полем. Прохождение через первый участок есть  $T_1 = \lambda_1 / (L_1 + \lambda_1)$ , а через второй участок —  $T_2 \approx 1$ . Суммарное прохождение, очевидно, будет  $T \approx \lambda_1 / (L_1 + \lambda_1)$ . Важным выводом из такого рассмотрения является следующий: прохождение через сложную структуру, состоящую из низкополевого участка и далее через участок с высоким электрическим полем, контролируется длиной низкополе-



**Рис. 7.** Модельный профиль канала проводимости, иллюстрирующий прохождение электрона сначала через область с низким электрическим полем, а затем — с высоким электрическим полем.<sup>7</sup>

вого участка. На практике, когда электрическое поле меняется плавно вдоль канала проводимости, бывает трудно надёжно определить длину низкополевого участка [9, 10], но это проведённое выше простое рассмотрение физически наглядно поясняет результаты математического моделирования [8].

Подведём итоги обсуждения понятия коэффициента прохождения.

1. Прохождение связано со средней длиной свободного пробега назад  $T = \lambda / (L + \lambda)$ .

2. При баллистическом транспорте  $T \rightarrow 1$ , если  $L \ll \lambda$ .

3. При диффузионном транспорте  $T \rightarrow \lambda / L \ll 1$ , если  $L \gg \lambda$ .

4. Область в канале проводимости с высоким электрическим полем является хорошим коллектором электронов;  $T \approx 1$ .

5. В канале проводимости, в котором электрическое поле меняется от слабого значения до сильного значения, как это имеет место в MOSFET при большом напряжении на стоке, прохождение контролируется областью с низким электрическим полем.

**Средняя длина свободного пробега назад.** Мы пользуемся двумя разными понятиями средней длины свободного пробега. Длина  $\Lambda$  (3) есть среднее расстояние между двумя актами рассеяния. Именно этот смысл большинство физиков вкладывает в понятие «средней длины свободного пробега». Обратная величина  $1/\Lambda$  есть вероятность рассеяния на единицу длины. Однако, в нашем контексте величина  $\lambda$ , как средняя длина свободного пробега назад, более существенна. Её обратная величина  $1/\lambda$  есть вероятность на единицу длины того, что прямой (в положительном направлении) поток рассеется назад (в обратном направлении). Прохождение (11) определяется через понятие величины  $\lambda$ . Как

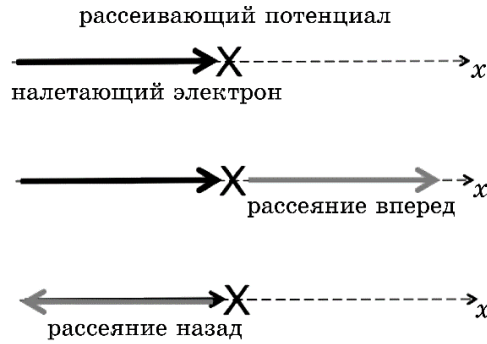


Рис. 8. Рассеяние вперед и рассеяние назад в канале  $1D$  [3, 4].<sup>8</sup>

связаны между собой понятия длин  $\lambda$  и  $\Lambda$ ?

Рисунок 8 иллюстрирует рассеяние в  $1D$ -канале проводимости, например, в NW MOSFET.

Пусть рассеяние будет изотропным и среднее время между двумя актами рассеяния есть  $\tau$ . Если электрон, движущийся в прямом направлении, совершит акт рассеяния через время  $\tau$ , он с одинаковой вероятностью может рассеяться как вперед, так и назад. Только рассеяние назад, которое в среднем происходит через время  $2\tau$ , существенно для поддержания тока. В соответствии с этим очевидным утверждением средняя длина свободного пробега назад в  $1D$ -канале есть

$$\lambda(E) = 2v(E) \tau_m = 2\Lambda, \quad (14)$$

где используется время релаксации импульса, поскольку предполагается изотропное рассеяние, для которого  $\tau_m = \tau$ .

В  $2D$ - и  $3D$ -каналах определение средней длины свободного пробега назад предполагает усреднение по углам [11], как это показано на рис. 9 для канала  $2D$ .

Для  $2D$ -канала проводимости окончательно имеем

$$\lambda(E) = \frac{\pi}{2} v(E) \tau_m = \frac{\pi}{2} \Lambda, \quad (15)$$

а для  $3D$ -канала  $\lambda(E) = 4\Lambda/3$  [3, 4, 11]. Для корректного расчёта прохождения важно учитывать различие между двумя средними длинами  $\lambda$  и  $\Lambda$ .

Простое выражение для коэффициента прохождения (11) связывает среднюю длину свободного пробега назад  $\lambda$  и длину низкополевой части канала проводимости, приходящейся на небольшую область вершины барьера. Для вычисления прохождения нужно знать величину  $\lambda$ . Её можно вычислить по (15) или

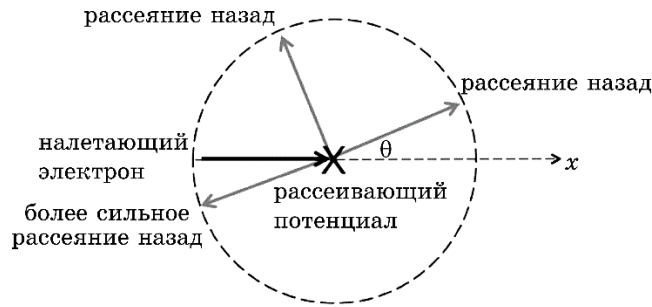


Рис. 9. Рассеяние вперед и рассеяние назад в канале  $2D$ .<sup>9</sup>

определить экспериментально. Ситуация в классическом понимании выглядит как задача диффузии — частицы инжектируются левым терминалом, диффундируют через канал и покидают его через противоположный терминал. Выходящий поток электронов определяется коэффициентом прохождения; в классической постановке задачи всё дело в коэффициенте диффузии. Тщательный анализ этой ситуации [3, 4] показывает, что имеет место следующее простое соотношение между коэффициентом диффузии и средней длиной свободного пробега назад  $\lambda$ , а именно,

$$D = \frac{v_T \langle \lambda \rangle}{2}, \quad (16)$$

где  $\langle \lambda \rangle$  — средняя длина свободного пробега, усреднённая по энергии. Именно это удивительно простое соотношение открывает возможность определить среднюю длину свободного пробега экспериментально. Обратим только внимание на то, что выражение (16) пригодно лишь для невырожденной статистики электронов. Более общий случай статистики Ферми–Дирака применительно к этой задаче обсуждается в [3, 4].

Легче измерить подвижность, чем коэффициент диффузии, так что в литературе проще найти сведения о подвижности. Соотношение между ними даётся уравнением Эйнштейна:

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{q}, \quad (17)$$

которое, правда, справедливо вблизи равновесия, однако, и электроны в низкополевой части канала в области вершины барьера, которая, собственно, и контролирует прохождение, тоже находятся вблизи равновесия.

Таким образом, налицо довольно простой путь оценить среднюю длину свободного пробега назад через измерение подвижности электронов. Сначала определяется коэффициент диффузии из по-

движности по (17), а затем — средняя длина свободного пробега по (16). Учёт вырождения, что важно в области выше порога, обсуждается в [3, 4].

В качестве примера вычислим среднюю длину свободного пробега и коэффициент прохождения 22 нм MOSFET. Рассмотрим *n*-Si MOSFET с каналом длины  $L = 22$  нм при  $T = 300$  К в квазиклассическом режиме. Пусть ориентация подложки (100) и заселена лишь нижняя подзона. Подвижность  $\mu = 250$  см<sup>2</sup>/(В·с). Найдём  $\langle \lambda \rangle$  и  $T$ .

Вычисляем коэффициент диффузии из подвижности по (17):

$$D = \mu \frac{kT}{q} = 6,5 \text{ см}^2/\text{с}.$$

Возьмём  $m^* = 0,19m_0$ , так что  $v_T = 1,23 \cdot 10^7$  см/с, и определим  $\langle \lambda \rangle$  по (16):

$$\langle \lambda \rangle = \frac{2D}{v_T} = \frac{2 \times 6,5}{1,2 \cdot 10^7} = 10,5 \text{ нм},$$

а далее определяем прохождение по (11):

$$T \approx \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \lambda \rangle + L} = \frac{10,5}{10,5 + 22} = 0,32.$$

Этот результат является приблизительным, поскольку величина  $\langle \lambda \rangle$  в этом выражении не усреднялась по энергии, как того требует формула (11). Тем не менее, полученный результат говорит о том, что такой MOSFET в линейной области работает на одну треть в баллистическом режиме. При высоком напряжении на стоке электроны обладают большей энергией, что ведёт и к более интенсивному рассеянию. Однако дальнейшее рассмотрение, как это ни удивительно, покажет нам, что MOSFET при высоком напряжении на стоке работает ближе к баллистическому режиму, чем при низком напряжении.

Итак, существенные результаты таковы:

$$T(E) = \frac{\lambda(E)}{\lambda(E) + L}, \quad \lambda(E) = \frac{\pi}{2} v(E) \tau_m, \quad \langle \lambda \rangle = \frac{2D}{v_T}, \quad (18)$$

где под  $L$  нужно понимать низкополевую часть канала проводимости. Множитель  $\pi/2$  возникает из-за усреднения по углам в  $2D$ -канале. Последнее уравнение показывает простой путь оценить среднюю длину свободного пробега через коэффициент диффузии в предположении невырожденной статистики. Далее мы рассмотрим модель прохождения MOSFET и выясним, каким образом рассеяние назад влияет на работоспособность транзисторов.



### 3. МОДЕЛЬ ПРОХОЖДЕНИЯ MOSFET

Перейдём к построению модели наноразмерных MOSFET с учётом рассеяния. Именно учёт рассеяния делает моделирование транспортных явлений трудной задачей, а в случае MOSFET — особенно сложной [9, 12]. Тем не менее, мы убедимся в том, что основные принципы моделирования MOSFET с учётом рассеяния легко понять и использовать далее для интерпретации экспериментальных данных и результатов вычислений при моделировании.

Итак, для тока мы имеем общее выражение (2/[1]) с учётом всех возможных режимов протекания тока

$$I_{DS} = \frac{2q}{h} \int T(E)M(E)(f_s(E) - f_D(E)) dE \quad [A]. \quad (19)$$

Если на сток подано большое напряжение, тогда  $f_s(E) \gg f_D(E)$ , и ток насыщения

$$I_{DSAT} = \frac{2q}{h} \int T(E)M(E)f_s(E)dE. \quad (20)$$

В квазиравновесном режиме ток небольшой,  $f_s \approx f_D$ , и для тока и проводимости на линейном участке имеем (10/[1]):

$$I_{DLIN} = G_{ch} V_{DS} \quad [A], \quad G_{ch} = \frac{2q^2}{h} \int T(E)M(E) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) dE \quad [Cm]. \quad (21)$$

По этим уравнениям можно вычислить линейный ток, величину  $I_{ON}$  и ток во всей области изменения  $V_{DS}$  от  $V_{DS} = 0$  до  $V_{DS} = V_{DD}$ .

С целью упрощения дальнейших построений будем предполагать, что средняя длина свободного пробега не зависит от энергии:

$$T(E) = \frac{\lambda(E)}{\lambda(E) + L} \rightarrow T = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + L}, \quad (22)$$

так что выражения для прохождения будем считать соответствующим образом усреднёнными по энергии.

**Резюме баллистической модели MOSFET.** Выпишем окончательные результаты баллистической модели (69/[1]) следующим образом. Ток стока

$$I_{DS} = W \left| Q(V_{GS}, V_{DS}) \right| F_{SAT} v_{inj}^{ball}. \quad (23)$$

Функция насыщения тока стока для обеих статистик даётся выражениями:

$$F_{SAT} = \left[ \frac{1 - \mathfrak{I}_{1/2}(\eta_{FD}) / \mathfrak{I}_{1/2}(\eta_{FS})}{1 + \mathfrak{I}_0(\eta_{FD}) / \mathfrak{I}_0(\eta_{FS})} \right] \text{ (Ферми–Дирак /FD),}$$

$$F_{SAT} = \left[ \frac{1 - e^{-qV_{DS}/kT}}{1 + e^{-qV_{DS}/kT}} \right] \text{ (Максвелл–Больцман /MB),} \quad (24)$$

$$\eta_{FS} = \frac{E_{FS} - E_c(0)}{kT}, \quad \eta_{FD} = \eta_{FS} - \frac{qV_{DS}}{kT}.$$

Баллистическая скорость впрыскивания

$$v_{inj}^{ball} = v_T \frac{\mathfrak{I}_{1/2}(\eta_{FS})}{\mathfrak{I}_0(\eta_{FS})} \text{ (FD), } v_{inj}^{ball} = v_T \text{ (MB), } v_T = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \quad (25)$$

Баллистический ток в линейной области

$$I_{DLIN} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| \left( \frac{v_{inj}^{ball}}{2kT/q} \right) \frac{\mathfrak{I}_{-1/2}(\eta_{FS})}{\mathfrak{I}_{1/2}(\eta_{FS})} V_{DS} \text{ (FD),} \quad (26)$$

$$I_{DLIN} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| \left( \frac{v_T}{2kT/q} \right) V_{DS} \text{ (MB),}$$

а для тока насыщения имеем:

$$I_{DSAT} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| v_{inj}^{ball} \text{ (FD), } I_{DSAT} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| v_T \text{ (MB).} \quad (27)$$

Наконец, электронный заряд на вершине барьера

$$Q(V_{GS}, V_{DS}) = -q \frac{N_{2D}}{2} [\mathfrak{I}_0(\eta_{FS}) + \mathfrak{I}_0(\eta_{FD})] \text{ (FD),} \quad (28)$$

а для статистики Максвелла–Больцмана интегралы Ферми–Дирака просто сводятся к экспонентам.

Для учёта рассеяния, казалось бы, нужно эти уравнения умножить только на прохождение  $T$ . Мы далее убедимся, что это действительно так для линейного тока, но не для тока насыщения и не для электронного заряда.

**Линейная область.** Для вычисления линейного тока с учётом рассеяния начинаем с уравнения (21) для проводимости. Для числа мод пользуемся уравнением (60/[1]). При записи функции Ферми учитываем, что  $E_F \approx E_{FS} \approx E_{FD}$ . После вычисления интеграла получим уравнение, похожее на (47/[1]), в котором нужно лишь заменить прохождение в диффузионном пределе  $\lambda_0/L$  на прохождение  $T$ , как в исходном уравнении (21) для описания транспорта во всех режимах от баллистического до диффузионного, а именно,

$$I_{DLIN} = T \left[ W \frac{2q^2}{h} \left( \frac{g_v \sqrt{2\pi m^* kT}}{2\pi\hbar} \right) \mathfrak{Z}_{-1/2}(\eta_F) \right] V_{DS}, \quad (29)$$

которое есть ничто иное как уравнение баллистического тока в линейной области (61/[1]), умноженное на прохождение  $T$ .

Уравнение (29) справедливо для линейной области MOSFET, работающего во всех режимах от баллистического до диффузионного, однако, выглядит оно непривычно по сравнению с традиционным выражением (5/[13])

$$I_{DLIN} = \frac{W}{L} \mu C_{ox} (V_{GS} - V_T) V_{DS}. \quad (30)$$

В полном соответствии этих уравнений друг другу мы убедимся позже.

**Область насыщения.** Для вычисления тока в области насыщения начинаем с уравнения (20) и вычисляем интеграл таким же образом, как и в линейном случае выше. Окончательно получаем уравнение

$$I_{DSAT} = T W \frac{2q}{h} \left( \frac{g_v \sqrt{2m^* kT}}{\pi\hbar} \right) kT \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_F), \quad (31)$$

которое является ничем иным как уравнением баллистического тока в области насыщения (64/[1]), умноженным на прохождение  $T$ . Уравнение (31) справедливо для области насыщения MOSFET, работающего во всех режимах от баллистического до диффузионного, однако, выглядит оно непривычно по сравнению с традиционным выражением (7/[13]) через скорость насыщения

$$I_{DSAT} = W C_{ox} (V_{GS} - V_T) v_{sat}. \quad (32)$$

Связь между этими уравнениями, полученными в разных моделях, обсудим позже.

**От линейного тока до насыщения.** Для вычисления тока при любом значении напряжения на стоке с учётом рассеяния начинаем с уравнения (19) с вычислением интегралов таким же образом, как и прежде. Окончательно получаем:

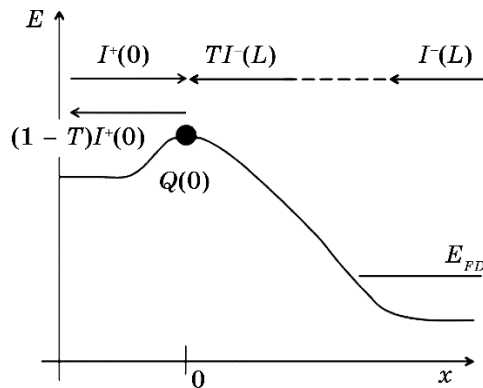
$$I_{DS} = T W \frac{q}{h} \left( \frac{g_v \sqrt{2\pi m^* kT}}{\pi\hbar} \hbar \right) kT \left[ \mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FS}) - \mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FD}) \right], \quad (33)$$

$$\eta_{FS} = \frac{E_{FS} - E_C(0)}{kT}, \quad \eta_{FD} = \eta_{FS} - \frac{qV_{DS}}{kT}.$$

Уравнение (33) отличается от аналогичного результата в баллистическом пределе (66/[1]) лишь умножением на прохождение  $T$ . Оно переходит в уравнение (29) для малых  $V_{DS}$  и в (31) для больших  $V_{DS}$ , в чем не сложно убедиться. Мы видим, что ток стока с учётом рассеяния отличается от баллистического тока лишь умножением на коэффициент прохождения  $T$ . Если же ток выразить через электронный заряд, то ситуация окажется не такой же простой, в чем мы сейчас убедимся.

Мы до сих пор рассматривали  $2D$ -электроны. Не сложно вывести аналогичные формулы для  $1D$ -электронов в NW MOSFET.

**Выражение для тока через электронный заряд.** Уравнение (33) в модели ЛДЛ справедливо для произвольного напряжения на стоке, но в нём не видна зависимость от инверсионного электронного заряда  $Q$ . Однако всегда предпочтительно выражать ток через заряд  $Q$ , связанный непосредственно с электростатикой структуры MOS. Для вычисления заряда  $Q$  нужно ввести в рассмотрение положительные потоки электронов, инжектированных истоком, которые заселяют состояния  $+v_x$  на вершине барьера, и отрицательные потоки электронов, инжектированные стоком, которые заселяют состояния  $-v_x$  на вершине барьера. В баллистических MOSFET результат нам известен в виде формул для тока и заряда (69/[1]). Этот результат изменится из-за необходимости учёта рассеяния назад, поскольку нам нужно учесть все возможности заселения состояний на вершине барьера. Как показано на рис. 10, как и прежде, у нас есть баллистический поток, инжектированный истоком, заселяющий состояния на вершине барьера, но добавляется также и возвратный поток рассеяния назад в направлении истока, а величина баллистического потока, инжек-



**Рис. 10.** Заселённость состояний на вершине барьера определяется тремя потоками электронов: со стороны истока, возвратным потоком рассеяния назад в направлении истока и потоком со стороны стока, уменьшенным на коэффициент прохождения.<sup>10</sup>

тированного стоком в направлении вершины барьера, уменьшается на коэффициент прохождения. Таким образом, уравнение для заряда (29) нужно заменить следующим уравнением:

$$Q(V_{GS}, V_{DS}) = -q \frac{N_{2D}}{2} [\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS}) + (1-T)\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS}) + T\mathfrak{Z}_0(\eta_{FD})]. \quad (34)$$

Первое слагаемое в выражении для заряда на вершине барьера (34) есть баллистический поток, инжектированный истоком. Его величина зависит от положения электрохимического потенциала в истоке. Второе слагаемое есть вклад в заряд на вершине барьера от потока рассеяния назад в сторону истока. Поскольку этот возвратный поток берет своё начало на истоке, он тоже зависит от положения электрохимического потенциала в истоке. Третье слагаемое обязано баллистическому потоку, берущему своё начало на стоке и потому зависящего от электрохимического потенциала на стоке и уменьшенному на коэффициент прохождения.

Уравнения (33) и (34) позволяют теперь выразить ток через электронный заряд. Для этого (33) умножим и разделим на заряд  $Q$ , так что

$$I_{DS} = TW \frac{|Q|}{|Q|} \frac{q}{\hbar} \left( \frac{g_v \sqrt{2\pi m^* kT}}{\pi \hbar} \right) kT [\mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FS}) - \mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FD})], \quad (35)$$

а затем заряд в знаменателе заменим уравнением (34). После несложных алгебраических преобразований получаем следующие окончательные результаты с учётом рассеяния для тока, выраженного через электронный заряд, во всем диапазоне изменения напряжения на стоке:

$$I_{DS} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| v_{inj} \frac{1 - \frac{\mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FD})}{\mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FS})}}{1 + \frac{T}{2-T} \frac{\mathfrak{Z}_0(\eta_{FD})}{\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS})}},$$

$$Q = -q \frac{N_{2D}}{2} [\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS}) + (1-T)\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS}) + T\mathfrak{Z}_0(\eta_{FD})], \quad (36)$$

$$v_{inj} = v_{inj}^{ball} \left( \frac{T}{2-T} \right), \quad v_{inj}^{ball} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m^*}} \frac{\mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FS})}{\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS})} = v_T \frac{\mathfrak{Z}_{1/2}(\eta_{FS})}{\mathfrak{Z}_0(\eta_{FS})},$$

$$\eta_{FD} = \eta_{FS} - \frac{qV_{DS}}{kT}.$$

Полученные уравнения с учётом рассеяния можно сравнить с уравнениями (69/[1]) для баллистического тока. Так как  $T < 1$ ,

скорость впрыскивания с учётом рассеяния назад  $v_{inj}$  меньше баллистической скорости впрыскивания:  $v_{inj} < v_{inj}^{ball}$ , что приводит к току, меньшему по сравнению с баллистическим током.

Уравнения (36) можно упростить для небольших и больших напряжений на стоке таким же образом, как было получено выражение (70/[1]). Для линейного участка тока получаем

$$I_{DLIN} = W |Q(V_{GS})| T \frac{v_{inj}^{ball}}{2kT/q} \frac{\mathfrak{I}_{-1/2}(\eta_{FS})}{\mathfrak{I}_{1/2}(\eta_{FS})} V_{DS} \quad (FD),$$

$$I_{DLIN} = W |Q(V_{GS})| T \frac{v_T}{2kT/q} V_{DS} \quad (MB),$$

где обе скорости  $v_{inj}^{ball}$  и  $v_T$  нужно брать по (25). Аналогично получаем выражения для тока насыщения:

$$I_{DSAT} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| \left( \frac{T}{2-T} \right) v_{inj}^{ball} \quad (FD),$$

$$I_{DSAT} = W |Q(V_{GS}, V_{DS})| \left( \frac{T}{2-T} \right) v_T \quad (MB).$$

При использовании статистики Ферми–Дирака нужно знать положение уровня Ферми. Его значение находим по известному значению электронного заряда из второго уравнения в (36).

Эти результаты, полученные с учётом рассеяния, сравним с баллистическими результатами (26) и (27). Оказывается, что линейный ток с учётом рассеяния отличается от линейного баллистического тока лишь умножением на прохождение  $T$ , а ток насыщения с учётом рассеяния получается из баллистического тока насыщения умножением его на  $T/(2-T)$ . Это различие, связанное с балансом потоков (34), определяющих электронный заряд при учёте рассеяния, мы обсудим ниже.

Уравнение (36) описывает цельную вольт-амперную характеристику Ландауэра–Датта–Лундстрёма (ЛДЛ) MOSFET через электронный заряд на вершине барьера  $Q$  и коэффициент прохождения  $T$ . Однако эти уравнения не так просто использовать на практике, поскольку коэффициент прохождения  $T$  зависит от напряжения на стоке  $V_{DS}$ , что мы обсудим ниже.

Выходную характеристику ЛДЛ (36) можно вычислить следующим образом. Сначала вычисляем  $Q(V_{GS}, V_{DS})$  из электростатики структуры MOS, используя, например, полуэмпирическое уравнение (46/[14]). Затем, задавшись значением  $Q$  во втором уравнении (36), вычисляем положение электрохимического потенциала истока  $\eta_{FS}$ . Это создаёт некоторые проблемы, потому что для этого нам нужно знать значение  $T$  и понять, как коэф-

коэффициент прохождения  $T(V_{GS}, V_{DS})$  зависит от подачи напряжений. Далее вычисляем баллистическую скорость впрыскивания из четвёртого уравнения (36), а затем скорость впрыскивания с учётом рассеяния из третьего уравнения (36). Наконец, вычисляем ток в точке  $(V_{GS}, V_{DS})$  из первого уравнения. Основная проблема вычислений по этой модели состоит в том, что до сих пор не существует достаточно хороших моделей для оценки  $T(V_{GS}, V_{DS})$ . Именно поэтому такое широкое применение нашла полуэмпирическая модель виртуального истока.

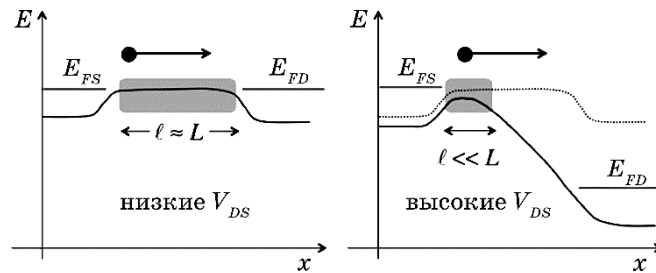
На практике часто используется невырожденная максвелл-большцмановская форма этих уравнений. Это ведёт к некоторой погрешности, особенно выше порога, однако, невырожденные уравнения намного проще, так что приходится выбирать между простотой вычислений и точностью. Отметим все же, что использование невырожденной статистики применительно к III-V FET может привести к слишком большим погрешностям.

**Зависимость прохождения от напряжения на стоке.** Несмотря на всю простоту предложенной выше модели MOSFET, на практике возникают вопросы, связанные с тем, каким образом учесть зависимость коэффициента прохождения от напряжения на стоке. Эту зависимость прохождения от  $V_{DS}$  демонстрирует рис. 11.

При низком напряжении на стоке электрическое поле невелико вдоль всего канала проводимости. Как уже обсуждалось ранее, прохождение определяется длиной низкополевой части канала, так что при низком стоковом напряжении

$$T_{LIN} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + L}. \quad (39)$$

При высоком напряжении на стоке в качественном транзисторе низкополевая область — небольшая, длиной  $\ell$  в самом начале



**Рис. 11.** Иллюстрация эффекта зависимости коэффициента прохождения от напряжения на стоке и почему этот эффект больше при больших  $V_{DS}$ , чем при меньших. Средняя длина свободного пробега в серой зоне предполагается  $\sim \lambda_0$  в обоих случаях.<sup>11</sup>

канала проводимости. Высокополевая область канала работает почти как идеальный коллектор электронов с  $T \approx 1$ . Как уже обсуждалось ранее, прохождение канала в этом случае определяется длиной низкополевого участка, так что при высоких напряжениях на стоке

$$T_{SAT} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \ell}. \quad (40)$$

Таким образом, приходим к выводу, что  $T_{SAT} > T_{LIN}$ , поскольку  $\ell \ll L$ . При высоком напряжении на стоке электроны в высокополевой области канала проводимости обладают большим запасом энергии и рассеиваются более интенсивно, чем при низком  $V_{DS}$ . Тем не менее, коэффициент прохождения выше при высоком  $V_{DS}$ , и транзистор демонстрирует ток, близкий к баллистическому пределу.

Расчёт протяжённости низкополевой области канала в зависимости от напряжений на затворе и стоке потребует, в принципе, самосогласованного решения задачи электростатики в присутствии потока электронов [9, 12]. Когда профиль канала  $E_c(x)$  известен, протяжённость критической длины  $\ell$  может быть рассчитана [10, 15, 16]. Альтернативным подходом может быть использование эмпирической функции насыщения стока и скорости впрыскивания в модели виртуального истока.

Приведём численный пример обсуждаемых понятий на образце ETSOI MOSFET длиной  $L = 25$  нм [17]. Параметры транзистора при 300 К таковы [18]:

$$v_{inj} = 0,82 \cdot 10^7 \text{ см/с}, \quad \lambda_0 = 10,5 \text{ нм}.$$

Воспользуемся также значением  $v_T = 1,2 \cdot 10^7$  см/с согласно (15/[19]). Для  $T_{LIN}$  по (39) имеем:

$$T_{LIN} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + L} = \frac{10,5}{10,5 + 25} = 0,33.$$

Для вычисления  $T_{SAT}$  пользуемся третьим уравнением из (36):

$$T_{SAT} = \frac{2}{1 + v_T/v_{inj}} = 0,8.$$

Как и ожидалось, прохождение намного больше при высоком напряжении на стоке. Длину критической области  $\ell$  находим из (40):

$$\ell = \lambda_0 \left( \frac{1}{T_{SAT}} - 1 \right) = 2,6 \text{ нм} \ll L.$$



Таким образом, протяжённость узкого места на вершине барьера, определяющего ток, составляет приблизительно 10% от длины канала проводимости.

Может показаться странным, что линейный ток с учётом рассеяния (37) отличается от баллистического тока множителем  $T$ , тогда как ток насыщения (38) — множителем  $T/(2-T)$ . Причиной этого в конечном итоге является электростатика MOS, а объяснение этому обстоятельству может дать рассмотрение ситуации при высоком напряжении на стоке с пренебрежимо малым впрыскиванием электронов на вершину барьера со стороны стока.

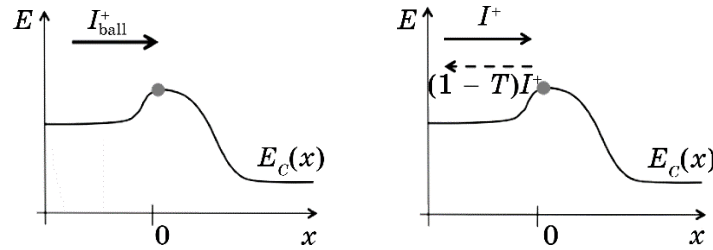
Рассмотрим сначала баллистическую ситуацию, показанную наверху рис. 12. Ток  $I_{ball}^+$  впрыскивается истоком. В этом случае заряд на вершине барьера создаётся лишь электронами, инжектированными истоком. Поскольку ток есть произведение заряда на скорость, то заряд на вершине барьера, в предположении статистики Максвелла–Больцмана,

$$\underline{Q}|_{x=0} = -\frac{I_{ball}^+}{W v_T}. \quad (41)$$

Теперь рассмотрим ситуацию с зарядом при наличии рассеяния. Как показано на рис. 12 внизу, заряд на вершине барьера формируется двумя потоками электронов: потоком электронов со стороны истока с положительными скоростями и обратным потоком электронов с отрицательными скоростями, так что суммарный заряд

$$\underline{Q}|_{x=0} = -\frac{I^+ + (1 - T_{SAT}) I^+}{W v_T} = -\frac{(2 - T_{SAT}) I^+}{W v_T}. \quad (42)$$

В качественном транзисторе электронный заряд на вершине барьера  $\underline{Q}|_{x=0}$  определяется преимущественно электростатикой



**Рис. 12.** Инжектированный и рассеянный назад поток электронов при высоком напряжении на стоке: баллистическая ситуация (слева) и ситуация с рассеянием назад (справа).<sup>12</sup>

MOS и не должен зависеть от транспорта: заряд в баллистических условиях (41) должен быть таким же, как и при учёте рассеяния (42). Уравнивая эти заряды, находим, что

$$I^+ = \frac{I_{ball}^+}{(2 - T_{SAT})}. \quad (43)$$

При учёте рассеяния  $T < 1$ , так что инжектированный меньший поток электронов создаёт на вершине тот же электронный заряд  $Q|_{x=0}$ .

Ток стока больше инжектированного тока в  $T$  раз, так что для баллистического случая  $T = 1$

$$I_{DS}^{ball} = I^+ = I_{ball}^+, \quad (44)$$

а для тока  $I_{DS}$  в общем случае ( $T < 1$ ) с учётом (43) находим

$$I_{DS} = T_{SAT} I^+ = \frac{T_{SAT}}{(2 - T_{SAT})} I_{ball}^+. \quad (45)$$

Требование решающей роли электростатики MOS приводит к тому, что ток насыщения в условиях рассеяния равен баллистическому току насыщения, помноженному на  $T/(2 - T)$ .

Обсудим также, какой смысл имеет понятие подвижности в наноразмерных MOSFET. Согласно уравнению (50/[1]), подвижность пропорциональна средней длине свободного пробега. В транспортной теории понятие подвижности хорошо определено вблизи равновесия в массивном проводнике с длиной, во много раз превышающей среднюю длину свободного пробега [2]. В современных транзисторах длина канала проводимости сравнима со средней длиной свободного пробега и при высоком напряжении на стоке электроны далеки от состояния равновесия. И, тем не менее, практика показывает, что квазиравновесная подвижность надёжно описывает функционирование наноразмерных транзисторов. Как объяснить значимость подвижности для наноразмерных MOSFET? Как уже обсуждалось в связи с рис. 11, почти равновесная средняя длина свободного пробега  $\lambda_0$  контролирует ток во всем диапазоне изменения напряжения на стоке. Пусть равновесный поток электронов впрыскивается истоком. При низком напряжении на стоке эти электроны остаются квазиравновесными во всем канале проводимости. При высоком напряжении на стоке электроны приобретают энергию, их скорость рассеяния увеличивается, а средняя длина свободного пробега уменьшается. Однако, как мы уже убедились, именно низкополевая область канала ответственна за прохождение. Электроны ква-

зиравновесны в этой области канала проводимости, их средняя длина свободного пробега контролирует ток, как при низких, так и при высоких напряжениях на стоке.

Экспериментально подтверждаемую корреляцию между функциональностью нанотранзисторов и подвижностью можно объяснить тем, что подвижность пропорциональна квазиравновесной средней длине свободного пробега, которая и контролирует ток нанотранзистора от низких до высоких значений напряжений на стоке. Конечно, это слишком очевидный аргумент. В короткоканальных транзисторах могут случиться перепады с механическим напряжением и допированием, так что электроны не находятся точно в равновесии. В очень коротких каналах электроны, входящие в канал со стороны истока, могут возбудить плазменные колебания вблизи истока, которые понизят среднюю длину свободного пробега [17, 20]. Этот эффект наблюдался экспериментально, однако, утверждение о том, что ток при высоком напряжении на стоке надёжно коррелирует с квазиравновесной подвижностью, как представляется, вполне соответствует сложившимся представлениям о физике процессов в нанотранзисторах и приводит к достаточно точным результатам на практике.

Подведём итоги. Была подробно рассмотрена качественная картина явлений рассеяния электронов в канале проводимости нанотранзисторов и были сформулированы важнейшие результаты в виде сводки формул (18), в которой ключевым является понятие о коэффициенте прохождения  $T(E)$ , связывающем среднюю длину свободного пробега назад  $\lambda(E)$  с длиной канала проводимости  $L$ . Затем обобщённая теория транспорта Ландауэра–Датта–Лундстрёма позволила построить модель прохождения MOSFET с учётом рассеяния электронов. Ограничения, накладываемые электростатикой MOS, учтены в выражении Ландауэра для тока (19). Итогом явилась модель прохождения MOSFET в виде сводки формул (36) для вычисления линейной области и области насыщения выходной характеристики нанотранзистора, которую полезно сравнить с баллистической моделью MOSFET (69/[1]). Если транзистор работает в подпороговом режиме, можно воспользоваться невырожденной статистикой. Однако, в режиме выше порога зона проводимости на вершине барьера близка или даже ниже уровня Ферми, так что нужно пользоваться статистикой Ферми–Дирака. Тем не менее, стало практикой в теории устройств со структурой MOS использовать невырожденную статистику Максвелла–Больцмана, поскольку использование её сильно упрощает расчёты, ведёт к более простым формулам и делает теорию более понятной. На практике также обычно некоторые параметры транзистора не известны с достаточной точностью, и в случае использования невырожденной статистики они

могут рассматриваться в качестве параметров подгонки, обеспечивая вполне приемлемые результаты.

Полученные уравнения хорошо согласуются с физикой процессов в линейной области, как и в области насыщения, чего нельзя сказать обо всей области изменения напряжения на стоке, поскольку у нас нет достаточно надёжной модели для зависимости  $T(V_{DS})$ . Далее будет показано, как можно объединить модель прохождения и модель виртуального истока и таким образом выйти на моделирование всей цельной выходной характеристики MOSFET.

В основу настоящего обзора положены лекции Марка Лундстрема ‘Fundamentals of Nanotransistors’ [5], прочитанные им в 2016 году в рамках инициативы Purdue University/nanohub.org/u.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—REFERENCES

1. Yu. A. Kruglyak, *Nanosistemi, Nanomateriali, Nanotehnologii*, **17**, No. 1: 25 (2019) (in Russian); Ю. А. Кругляк, *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии*, **17**, вып. 1: 25 (2019).
2. M. Lundstrom, *Fundamentals of Carrier Transport* (Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press: 2000).
3. M. Lundstrom and C. Jeong, *Near-Equilibrium Transport. Fundamentals and Applications* (Singapore: World Scientific: 2013).
4. Yu. A. Kruglyak, *Nanoelektronika ‘Snizu–Vverkh’* (Odessa: TEhS: 2015) (in Russian); Ю. А. Кругляк, *Нанoeлектроника «снизу–вверх»* (Одесса: ТЭС: 2015).
5. M. Lundstrom, *Fundamentals of Nanotransistors* (Singapore: World Scientific: 2018); [www.nanohub.org/courses/NT](http://www.nanohub.org/courses/NT).
6. P. A. M. Dirac, *Proc. Royal Soc. A*, **114**: 243 (1927).
7. E. Fermi, *Nuclear Physics* (Chicago: Univ. of Chicago Press: 1950).
8. P. J. Price, *Semiconductors and Semimetals*, **14**: 2498 (1979).
9. P. Palestri, D. Esseni, S. Eminent, C. Fiegna, E. Sangiorgi, and L. Selmi, *IEEE Trans. Electron Dev.*, **52**: 2727 (2005).
10. R. Clerc, P. Palestri, L. Selmi, and G. Ghibaudo, *J. Appl. Phys.*, **110**: 104502 (2011).
11. Changwook Jeong, Raseong Kim, M. Luisier, S. Datta, and M. Lundstrom, *J. Appl. Phys.*, **107**: 023707 (2010).
12. M. V. Fischetti, T. P. O’Regan, N. Sudarshan, C. Sachs, S. Jin, J. Kim, and Y. Zhang, *IEEE Trans. Electron Dev.*, **54**: 2116 (2007).
13. Yu. A. Kruglyak, *Nanosistemi, Nanomateriali, Nanotehnologii*, **16**, No. 2: 233 (2018) (in Russian); Ю. А. Кругляк, *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии*, **16**, вып. 2: 233 (2018).
14. Yu. A. Kruglyak, *Nanosistemi, Nanomateriali, Nanotehnologii*, **16**, No. 4: 599 (2018) (in Russian); Ю. А. Кругляк, *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии*, **16**, вып. 4: 599 (2018).
15. G. Gildenblat, *J. Appl. Phys.*, **91**: 9883 (2002).
16. S. Rakheja, M. Lundstrom, and D. Antoniadis, *Intern. Electron Dev. Mtg. (IEDM), Technical Digest*, 35.1.1 (2014).

17. T. Uechi, T. Fukui, and N. Sano, *Phys. Status Solidi C*, **5**: 102 (2008).
18. A. Majumdar and D. A. Antoniadis, *IEEE Trans. Electron Dev.*, **61**: 351 (2014).
19. Yu. A. Kruglyak, *Nanosistemi, Nanomateriali, Nanotehnologii*, **17**, No. 1: 57 (2019) (in Russian); Ю. А. Кругляк, *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии*, **17**, вып. 1: 57 (2019).

---

*Odesa State Environment University,  
15, Lvivska Str.,  
65016 Odesa, Ukraine*

<sup>1</sup> **Fig. 1.** Illustration of the ballistic (left) and quasi-ballistic (right) electron transfer. In both cases, the trajectories of the electron injected by the source at certain energy are shown. Scattering is a stochastic process; so, the trajectory on the right is one of many possible trajectories.

<sup>2</sup> **Fig. 2.** Qualitative visualization of different characteristic scattering times. At a moment when  $t = 0$ , electrons with the same pulses are injected into the conductor in one direction. Electrons experience on average one collision in time  $t \approx \tau(E)$ . The total momentum of the initial ensemble of electrons is zeroed in time  $t \approx \tau_m(E) \geq \tau(E)$ , and the energy takes its equilibrium value in time  $t \approx \tau_E(E) > \tau_m(E) \geq \tau(E)$ . The length of the vectors in figures is symbolically related to the energy [2, 4].

<sup>3</sup> **Fig. 3.** The transition of the electron from the initial state to the final one because of the scattering event on the potential  $U_S(\mathbf{r}, t)$ .

<sup>4</sup> **Fig. 4.** The fluctuating potential produced by randomly located charges illustrates the scattering by charged impurities. Electrons with high energy feel the perturbing potential to a lesser extent as compared to electrons with lower energy and therefore dissipate less.

<sup>5</sup> **Fig. 5.** Illustration of two transmission coefficients  $T_{SD}(E)$  and  $T_{DS}(E)$ . When the electron flux is injected by the source, the transmission  $T_{SD}(E)$  determines the fraction of electrons leaving the drain, and when the electrons are injected by the sink, the transmission  $T_{DS}(E)$  determines the fraction of electrons leaving the source. The upper figure corresponds to zero or small voltage  $V_{DS}$ , and the bottom figure corresponds to a large voltage on the drain.

<sup>6</sup> **Fig. 6.** Illustration of the trajectory of an electron in a short conduction channel with a high applied electric field. Electrons are injected by the source from the equilibrium state, and most of them reach the drain even if scattering events occur [8].

<sup>7</sup> **Fig. 7.** The model profile of the conduction channel, illustrating the passage of an electron first through a region with a low electric field, and then with a high electric field.

<sup>8</sup> **Fig. 8.** Scattering forward and backward scattering in channel  $1D$  [3, 4].

<sup>9</sup> **Fig. 9.** Scattering forward and backward scattering in channel  $2D$ .

<sup>10</sup> **Fig. 10.** The population of states at the barrier top is determined by three fluxes of electrons: from the source side, a backward flow in the direction of the source and a flow from the side of the drain, reduced by the transmission coefficient.

<sup>11</sup> **Fig. 11.** An illustration of the effect of the dependence of the transmission coefficient on the voltage on the drain and why this effect is greater for larger voltages than for smaller ones. The mean free path in the grey zone is assumed in both cases.

<sup>12</sup> **Fig. 12.** Injected and back-scattered electron flow at high voltage on the drain: the ballistic situation (at the top) and the situation with backward scattering (bottom).