

С.Н. СТЕПАНЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
МЕЗОМАСШТАБНЫХ
ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ
В АТМОСФЕРЕ



С.Н. СТЕПАНЕНКО

**Математическое моделирование
мезомасштабных процессов и
явлений в атмосфере**

Одесса – 2001

ББК 26.234.1
УДК 551.579
С 79

В монографии рассмотрены используемые в настоящее время подходы к математическому моделированию мезомасштабных атмосферных систем, методы построения схем локального прогноза погоды, решения систем уравнений гидротермодинамики, описывающих атмосферные процессы и явления на ограниченной территории.

Монография предназначена для специалистов, работающих в области численного моделирования и прогнозирования мезомасштабных атмосферных процессов и явлений, а также может быть использована студентами, магистрами и аспирантами по специальности «Метеорология» (направление подготовки «Гидрометеорология»).

Табл. 2. Илл. 38. Библ. 761.

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф. Ефимов В.А.,
д.г.н., с.н.с. Тарнопольский А.Г.

Печатается по решению Ученого Совета Одесского гидрометеорологического института (протокол № 6 от 31 мая 2001 г.)

С $\frac{1805040400}{7079-2001}$ Без объяв.

ISBN 966-7079-60-0

© АО БАХВА, 2001
© С.Н. Степаненко, 2001
© ОГМИ, 2001

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Список обозначений	14
Глава 1. Система уравнений, их свойства	20
1.1. Основная система уравнений	20
1.2. Неупругие уравнения	24
1.3. Полные уравнения	28
1.4. Уравнения в p -системе координат	30
1.5. Квазиконсервативные термодинамические переменные	32
1.6. Учет орографии	37
Глава 2. Параметризация физических процессов подсеточного масштаба	42
2.1. Параметризация подсеточной конвекции	42
2.2. Параметризация атмосферной турбулентности	44
2.3. Параметризация турбулентности над горами	63
2.4. Параметризация микрофизики облаков и осадков	66
2.5. Параметризация радиационных притоков тепла	71
Глава 3. Краевые условия	80
3.1. Общие положения	80
3.2. Условия на боковых границах	86
3.3. Условия на верхней границе	92
3.4. Условия на нижней границе и границе раздела воздух-почва, перенос тепла и влаги в почве	95
Глава 4. Конечно-разностные методы в гидродинамическом моделировании и прогнозе локальных явлений погоды	104
4.1. Общие положения	104
4.2. Погрешность временных и пространственных аппроксимаций	104
4.3. Структура расчетной сетки	107
4.4. Аппроксимация временных производных	110
4.5. Аппроксимация пространственных производных	113
4.6. Расчет массовых долей влаги	114
4.7. Аппроксимация членов, не содержащих дифференцирования	116
4.8. Построение и методы решения дискретного уравнения для давления	119
4.9. Численные схемы для интегрирования полной системы уравнений	122
4.10. Методы дробных шагов в интегрировании негидростатических уравнений	124
4.11. Применение временных и пространственных фильтров	125
4.12. Численная реализация краевых условий	127
4.13. Особенности численного интегрирования в условиях орографической неоднородности	136
4.14. Эксперименты с вложенными сетками	139

Глава 5. Вопросы подготовки начальных полей	141
5.1. Чувствительность мезомасштабных моделей к начальным условиям	141
5.2. Подходы к объективному анализу данных на мелкой сетке	142
5.3. Методы инициализации	143
Список литературы	147
Приложение. Лекции по численным моделям локального прогноза погоды, представленные на семинаре ВМО	185
<i>З. Джанжич.</i> Общие замечания по проблеме моделирования процессов над ограниченной территорией	186
<i>З. Джанжич.</i> Использование выходной продукции моделей и технические требования при моделировании по ограниченной территории	189
<i>А. Аракава.</i> Граничные условия в моделях по ограниченной территории	193
<i>А. Аракава.</i> Параметризация планетарного пограничного слоя	229
<i>Х. Д. Херzog.</i> Инициализация	252
<i>Ф. Мезингер, З. Джанжич.</i> Сила барического градиента и уравнение гидростатики	265

Введение

Многие явления погоды, угрожающие человеческой жизни и наносящие экономический ущерб (интенсивная грозовая деятельность, катастрофические осадки, шквалистые ветры, турбулентность), являются результатом мезомасштабных процессов, протекающих в атмосфере. К ним относятся организованная конвекция, тропические циклоны и взрывной циклогенез во внетропических широтах, интенсивные фронты и некоторые виды орографических циркуляций.

Естественно, что проблема точного и своевременного прогнозирования мезомасштабных систем в атмосфере и связанных с ними опасных явлений погоды существовала всегда, однако до недавнего времени из-за отсутствия соответствующих наблюдательных средств и ограниченных возможностей вычислительной техники не представлялось возможным идентифицировать мезомасштабные возмущения в атмосфере и осуществлять их численное прогнозирование.

С развитием спутниковых, радиолокационных и других методов дистанционных измерений с большим пространственно-временным разрешением, а также наземных сетей станций с большой плотностью наблюдений в отдельных районах стало возможным идентифицировать мезомасштабные атмосферные возмущения по данным о структуре облачного покрова, осадков, влажности. Значительная часть этой информации носит пока что качественный характер и не может быть использована непосредственно в задаче численного прогноза. Однако быстрое совершенствование техники дистанционных измерений в инфракрасном и микроволновом диапазонах, развитие радиолокационной техники свидетельствует о том, что информационная база мезомасштабных численных моделей будет постепенно расширяться и более полно удовлетворять нужды моделей на мелких сетках в исходных данных.

Параллельно с развитием наблюдательных систем происходило совершенствование методов численного решения уравнений гидротермодинамики и методов параметризации различных физических процессов, происходящих в атмосфере. Последнее осуществлялось как в рамках разработки прогностических региональных и глобальных моделей, так и при изучении отдельных явлений в атмосфере.

В результате расширения информационной базы, совершенствования методов численного прогнозирования и увеличения возможностей вычислительной техники в настоящее время создались предпосылки для разработки мезомасштабных моделей, предназначенных для прогнозирования основных элементов погоды: температуры, ветра, давления, влажности, облачности и осадков на очень мелких сетках.

Основное отличие эти моделей состоит в том, что они должны воспроизводить мезомасштабные системы течений и на основе этого давать более детализированные прогнозы основных метеорологических величин на ограниченной территории.

Вопрос о том, где проходит граница между крупномасштабными, мезомасштабными и микромасштабными движениями, обсуждался в литературе многими авторами (см., например, Орлански (1975), Уайт (1978), Аткинсон (1981)). Мы не будем останавливаться на этом вопросе подробно, поскольку спектр атмосферных движений является более или менее непрерывным, а выбор разрешаемого масштаба движений диктуется, как правило, не только теоретическими, но и практическими соображениями.

Поскольку в литературе наиболее широкое распространение приобрела классификация, предложенная Орлански (1975), мы будем в дальнейшем пользоваться

ею. В соответствии с этой классификацией в мезомасштабном участке спектра выделяется три интервала:

- ⇒ мезо- α (200-2000 км): фронты и тропические циклоны;
- ⇒ мезо- β (20-200 км): низкоуровневые струйные течения, линии шквалов, внутренние волны, скопления облаков, орографические возмущения;
- ⇒ мезо- γ (2-20 км): грозы, внутренние гравитационные волны, городские эффекты.

Нетрудно заметить, что определенный таким образом диапазон мезомасштабных движений является весьма широким и практически сложно реализовать модель, которая разрешала бы одновременно движения, горизонтальный масштаб которых отличается на два порядка. Представляется, что на первом этапе мезомасштабные прогностические модели будут ориентированы в основном на воспроизведение атмосферных возмущений масштабов мезо- α и мезо- β , хотя в принципе не исключен подход с иерархией вложенных друг в друга моделей с непосредственным разрешением масштаба мезо- γ в районах, подозрительных на развитие грозовой деятельности.

Вопрос о выборе исходных уравнений для мезомасштабных прогностических моделей будет обсуждаться более подробно в первой главе. Здесь мы лишь отметим, что появившиеся в последнее время прогностически ориентированные мезомасштабные модели отражают две основные тенденции.

Первая из них состоит в том, что при формулировке задачи численного мезомасштабного прогноза используются гидростатические модели, применяющиеся в задачах регионального и глобального прогноза. При этом уссовершенствуются алгоритмы параметризации подсеточных эффектов и вводится повышенное разрешение по горизонтали и вертикали, особенно в пограничном слое атмосферы.

Довольно полные обзоры региональных и мезомасштабных гидростатических моделей были сделаны в работах Антса (1983) и Гэдда (1984), поэтому мы ограничимся здесь упоминанием прогностических схем, способных разрешить движения масштаба мезо- β , т.е. имеющих шаг сетки по горизонтали менее 50 км. Перечень таких гидростатических моделей приведен в табл. 1.

Вторая тенденция состоит в построении мезомасштабных прогностических схем на основе опыта работы с негидростатическими моделями, предназначенными для изучения отдельных мезомасштабных явлений в атмосфере. Список такого рода схем дается в табл. 2. В эту таблицу включены как полностью прогностически ориентированные негидростатические модели, так и некоторые исследовательские модели, которые по своему физическому содержанию весьма близки к прогностическим.

В данной монографии основное внимание будет уделено негидростатическим моделям, поскольку они являются более универсальными с точки зрения воспроизведения мезомасштабных процессов (так как они могут применяться ко всему классу движений от мезо- α до мезо- γ), а использован их в целях прогноза погоды является пока что менее традиционным.

Гидростатические мезомасштабные модели

Модель, источник	Система уравнений, вертикальная координата	Шаги по горизонтали (км)	Число уровней	Шаг по времени (с)	Орография	Параметризация физических процессов			
						атмосферная влага	конвекция	радиация	турбулентность
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Будра (1981)	Полные уравнения; координата Z	40	15	50	нет	Критерий насыщения при 100%, осадки определяются диагностически	Есть, Байер и др. (1976)	нет	$K(Ri)$
МАСС-3 Каплан и др. (1982)	Полные уравнения; координата σ	47,6	14	51	есть	Критерий насыщения при 95%, осадки определяются диагностически	Модификация метода Фритша и Чэпела (1980)	Есть у поверхности Земли	фильтр
ПЕРИДО Жувенон дю Ваша и др. (1983)	Полные уравнения; координата σ	35	15	240	есть	Облака, осадки по Кесслеру (1969)	Желен и др. (1982)	Есть в атмосфере и на поверхности Земли	K в формулировке Прандтля при устойчивой стратификации, $K=100 \text{ см}^2/\text{с}$ при неустойчивой стратификации
Орлански и Полински (1984)	Неупругие уравнения; координата Z	50	17	-	Есть	Критерий насыщения при 95%, осадки определяются диагностически	Рассчитывается явно	нет	$K(Ri)$
ЛАМПС Калб (1985)	Полные уравнения; координата σ	35	15	40	есть	Критерий насыщения при 100%, осадки по Кесслеру (1969)	Метод Крайцберга и Перки (1976)	Есть у поверхности Земли	$K \Delta^4$ по горизонтали; $K \Delta^2$ - по вертикали

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Метеорологическое агентство Японии, Ниномия (1985)	Полные уравнения; координата σ	42	13	-	есть	Критерий насыщения при 100%, осадки определяются диагностически	Влажное конвективное приспособление	Есть у поверхности Земли	Модель замыкания уровня 2 (см. 2.2)
Норвежский метеорологический институт, ВМО ТД № 79 (1985)	Полные уравнения; координата σ	50	11	-	есть	Крупномасштабная конденсация, осадки определяются диагностически	Типа методики Куо (1965) или влажное конвективное приспособление	Есть в атмосфере и на поверхности Земли	К-теория
Курихара и др. (1986)	Полные уравнения; координата σ	25	13	-	есть	-	Конвективное приспособление	Есть у поверхности Земли	Модель замыкания уровня 2, Мэллор и Ямада (1974)

Таблица 2

Трехмерные негидростатические модели

Модель, источник	Система уравнений, вертикальная координата	Шаги по горизонтали и вертикали (км) ¹⁾	Число уровней	Шаг по времени (с)	Орография	Параметризация физических процессов			
						атмосферная влага	конвекция	радиация	турбулентность
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Пастушков (1970а,б; 1973, 1975)	неупругая ²⁾ ; координата Z	1/1	11	20	нет	Облака; осадки определяются диагностически	Рассчитывается явно	нет	Упрощенный вариант нелинейной турбулентной вязкости (НТВ)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Дирдорф (1972а); Сомеррия (1976); Редельспергер и Сомеррия (1981; 1982 а, б ³)	неупругая; координата Z	1/0.4	25	10-20	нет	Облака; вероятностная модель распределения влаги в расчетной ячейке (Дирдорф, 1976а; Сомеррия и Дирдорф, 1977)	Рассчитывается явно	Есть только в атмосфере	Уточненная НТВ (с учетом стратификации тепла и влаги) с прогностическим уравнением для E
Щтайнер (1973); Яу (1980); Терпайнен и Яу (1981); Яу и Мишо (1982); Терпайнен (1982)	неупругая; координата Z	0.5/0.3	16	20	нет	Облака; осадки по Кесслеру (1969)	Рассчитывается явно	нет	НТВ с упрощенным учетом стратификации тепла
Миллер и Пирс (1974); МонКрифф и Миллер (1976); Миллер (1978); Беннет и Раулинс (1981); Беннет и Бэйдер (1982)	неупругая; координата P	1/50 гПа	19	15	нет	Облака; осадки по Кесслеру (1969)	Рассчитывается явно	нет	Диффузия с постоянным коэффициентом; преимущественно для контроля устойчивости
Шлезингер (1975, 1978, 1980, 1982, 1984а,б)	неупругая; координата Z	1.8/0.7	20	50	нет	Облака; осадки по Такеда (1966)	Рассчитывается явно	нет	НТВ
Липс (1977); Липс и Хемлер (1982)	неупругая; координата Z	0.375/0.25	40	5-10	нет	Облака; ; осадки по Кесслеру (1969)	Рассчитывается явно	нет	Уточнения НТВ с учетом стратификации тепла и влаги
Тэп и Уайт (1976); Карпентер (1979); Голдинг (1984, 1986); Голдинг и Мэхин (1984)	Полная; координата ζ^4	15/ переменный -0.1 км $\leq \Delta z \leq$ 1.5 км; нижний расчетный уровень 10 м	16	60	есть	Облака; осадки по Сандквисту (1978)	Параметризация по Фритшу и Чеппелю (1980)	Есть только у Земли	Одномерная, с прогностическим уравнением для E

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кларк (1977, 1979); Хо и Кларк (1981); Кларк и Гэлл (1982); Пелтайр и Кларк (1983)	Неупругая; координата ξ^5	1/0.3	35	20	есть	Облака; осадки по Кесслеру (1969)	Рассчитывается явно	нет	НТВ с упрощенным учетом стратификации тепла и влаги
Клемп и Вильхельмсон, 1978 а,б); Клемп и др. (1981); Вильхельмсон и Чен (1982)	Полная; координата Z	1/ переменный - $0.1 \text{ км} \leq \Delta z \leq 0.9 \text{ км}$; нижний расчетный уровень 40 м	25	10	нет	Облака; осадки по Кесслеру (1969)	Рассчитывается явно	нет	НТВ с прогностическим уравнением для E
Коттон и Триполи (1978); Триполи и Коттон (1980, 1982, 1986); Коттон и др. (1982)	Полная; координата ξ^5	0.5/0.5	37	5	есть	Облака; осадки в жидкой и твердой фазах	Рассчитывается явно	нет	НТВ с упрощенным учетом стратификации тепла и влаги
Вельтищев и др. (1982); Кисельникова и др. (1984); Прессман (1984)	неупругая; координата Z	10/ переменный – $8 \text{ м} \leq \Delta z \leq 800 \text{ м}$; нижний расчетный уровень 2 м	15	200	нет	Облака; осадки по Кесслеру (1969)	Рассчитывается явно	Есть в атмосфере и у поверхности Земли	НТВ с упрощенным учетом стратификации тепла и влаги
	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Алоян (1984); Пеленко и Алоян (1985)	Неупругая ⁶⁾ ; координата $\xi^5)$	1/ переменный – $0.1 \text{ км} \leq \Delta z \leq 0.3 \text{ км}$; нижний расчетный уровень 100 м	20	180	есть	Облака; осадки определяются диагностически	Рассчитывается явно	нет	НТВ с упрощенным учетом стратификации тепла
--------------------------------------------	-----------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----	-----	------	--------------------------------------------	---------------------	-----	---------------------------------------------

Примечания:

- 1) Выбор шагов сетки по пространственным и временной координатам, число уровней варьируется иногда значительно в пределах каждой модели от эксперимента к эксперименту и от публикации к публикации. Здесь приводятся некоторые характерные показатели.
- 2) Термины «неупругая» и «полная» системы уравнений разъясняются в §§ 1.2 - 1.3.
- 3) Публикации по этой и последующим моделям даются лишь выборочно.
- 4) $\zeta = z - \Gamma$.
- 5) $\xi = (z - \Gamma) N / (N - \Gamma)$.
- 6) Авторы приводят алгоритм расчета также и для варианта с полными уравнениями, однако образцы и параметры расчетов в этом варианте неизвестны.

Гидростатические модели мезомасштабных процессов на мелкой сетке не отличаются принципиально от моделей для крупномасштабных процессов, по которым имеется достаточно полная библиография. В этой связи они будут обсуждаться менее подробно. При изложении подходов к моделированию и параметризации различных физических процессов в атмосфере мы будем опираться на опыт, накопленный как в гидростатических, так и негидростатических моделях к концу 80-х годов как за рубежом, так и в бывшем Советском Союзе.

Структура и содержание монографии базируется на лекциях, прочитанных в ОГМИ в 1990-1991 гг. ведущими сотрудниками Гидрометцентра СССР Н.Ф. Вельтищевым, Д.Я. Прессманом и Е.М. Пекелисом. В монографии, исходя из поставленных прогностических задач, последовательно излагаются подходы к формулировке систем уравнений и способы параметризации подсеточных физических процессов. Поскольку мезомасштабные прогностические задачи решаются на ограниченной территории и имеют повышенное разрешение в пограничном слое атмосферы, значительное внимание уделяется формулировке условий на боковых границах и поверхности земли. Отдельный раздел посвящен вопросам численного интегрирования негидростатических систем уравнений.

Так как имеются некоторые особенности в подготовке начальных данных для мезомасштабных моделей и существуют различные подходы к решению задачи их информационного обеспечения, этому вопросу также уделено достаточное внимание.

В связи с тем, что термин «*мезомасштабная модель*» используется в настоящее время применительно к моделям с достаточно широким диапазоном горизонтального разрешения (от 10 до 100 км), и учитывая, что по моделям с разрешением $\cong 100$ км были сделаны достаточно обстоятельные обзоры (см., например, Антс (1983), Гэдд (1984)), приведем здесь лишь на описании результатов, полученных в конце 80-х годов с помощью моделей, способных описывать в явном виде атмосферные возмущения масштаба мезо- β (20-200 км), т.е. на моделях, горизонтальный шаг которых составляет 50 км и менее.

Модели этого класса пока что немногочисленны и приводимые по ним краткосрочные прогнозы являются в подавляющем большинстве экспериментальными, поэтому значительная статистика по успешности применения мезомасштабных моделей в прогностических целях в наших условиях пока отсутствует. Однако даже анализ отдельных случаев прогнозов, известных на конец 80-х годов, представляет определенный интерес, поэтому ниже будет приведен краткий обзор такого рода работ.

На тот период времени действующие в экспериментальном или оперативном режиме прогностические модели являлись в подавляющем большинстве случаев гидростатическими и отличались от соответствующих крупномасштабных моделей более высоким разрешением по горизонтали и вертикали, а также более полными параметризациями физических процессов. В рамках численных экспериментов с такого рода моделями удалось получить результаты относительно влияния на качество прогноза повышения пространственного разрешения и качества начальных данных, а также более полного учета протекающих в атмосфере физических процессов.

Вопросы влияния разрешающей способности модели на качество краткосрочного прогноза были рассмотрены в работах Каплана и др. (1982), Орлански и Полински (1984), Ниномия (1985), Кальба (1985). В работе Ниномия (1985) приводятся результаты сравнения краткосрочных прогнозов по 11-уровневой модели с шагом сетки 64 км и 197 км (первая из них является оперативной моделью Метеорологического агентства

Японии) с 13-уровневой моделью с шагом сетки 42 км. Анализ прогнозов по этим моделям с фактическими данными показал, что успешность прогнозов по модели с шагом сетки 42 км является максимальной. Особенно большой выигрыш от повышения разрешающей способности модели получается при прогнозировании осадков: предвычисленные зоны осадков становятся более узкими, а сами осадки более интенсивными, что приближает их к фактически наблюдавшимся. Положительный эффект при увеличении разрешающей способности сетки до 50 км, 47.625 км, 35 км и 25 км был получен соответственно в работах Орлански и Полински (1984), Каплана и др. (1982), Кальба (1985), Курихары и Миуры (1986).

Выводы относительно влияния качества исходной информации на краткосрочный прогноз можно найти в работах Дюрана и Жуванон дю Ваши (1983), Кальба (1985), Танако и Сегами (1986). В работе Кальба (1985) было показано, что присутствие в начальном анализе мезомасштабного возмущения в значительной мере обусловило успешность прогноза осадков по модели ЛАММП Дрексельского университета на 10-11 апреля 1979 года, когда в области мезомасштабной ложбины образовалась зона интенсивной конвекции и осадков, не предсказанная оперативной региональной моделью Национального метеорологического центра США. Опыт включения спутниковых данных о температуре и влажности с **TOVS** с полным разрешением ($\cong 30$ км) в начальные поля, используемые затем в модели ПЕРИДОТ, свидетельствует о том, что более детальный анализ, особенно полей влажности, повышает качество прогноза осадков по мезомасштабной модели (Дюран и Жуванон дю Ваши, 1985). Повышение качества прогноза по мезомасштабной модели при включении в начальные данные анализа ветра по спутниковой информации было получено в эксперименте, проведенном Танако и Сегами (1986). О положительном эффекте учета мезомасштабных неоднородностей в приземном анализе метеорологических полей и анализе поля влажности в свободной атмосфере свидетельствует также опыт работы с мезомасштабной прогностической моделью Метеорологической службы Великобритании (Голдинг, 1985, 1986).

Из параметризационных процедур в проведенных экспериментах с мезомасштабными прогностическими моделями наибольшее внимание уделялось параметризации конвекции. Информация по этому вопросу содержится в работах Каплана и др. (1982), Жуванона дю Ваши и др. (1983), Кальба (1985). Во всех указанных выше работах отмечалось, что параметризационный учет конвекции повышает качество прогноза осадков.

Наибольший опыт использования мезомасштабных моделей для численного прогнозирования погоды накоплен, по-видимому, во Франции и Великобритании, где на регулярной основе с середины 80-х годов осуществляются краткосрочные прогнозы на гидростатической модели с шагом 35 км. Основные характеристики этих моделей были приведены в табл.2.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ¹

A - альbedo подстилающей поверхности

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ - скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b}

$[\vec{a} \times \vec{b}]$ - векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b}

C_{gr}^i - групповая скорость в направлении i

c_p - теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении

\vec{C}_{ph} - «истинная» фазовая скорость

\widehat{C}_{ph}^i - «ложная» фазовая скорость в направлении i

C_s - теплоемкость почвы

c, c_1, c_{φ_i} - коэффициенты пропорциональности в схеме нелинейной турбулентной вязкости

Def – полная деформация

D_{ij} - компонент тензора деформации

$\vec{D}_{\vec{v}} = \{D_{u_1}, D_{u_2}, D_{u_3}\}$ - вектор дивергенции турбулентных напряжений

$$D_{u_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij})$$

D_{φ} - члены, описывающие источники и стоки субстанции за счет турбулентных процессов

d – высота вытеснения

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ - оператор индивидуальной производной $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi \frac{d}{dt}$

$\frac{\partial}{\partial \ell}$ - оператор производной в направлении ℓ

- дискретный аналог оператора $\frac{\partial}{\partial \ell}$

E – кинетическая энергия турбулентности

F – радиационный поток

f – параметр Кориолиса

¹ Пояснение части локально употребляемых переменных и коэффициентов приводится по тексту

G_0 - якобиан преобразования из (x, y, z) – в (ξ, η, ζ) – систему координат

G_1 и G_2 - компоненты метрического тензора преобразования из (x, y, z) – в (ξ, η, ζ) – систему координат

g – ускорение свободного падения

H – высота верхней границы расчетной области

H_p - высота верхней границы планетарного пограничного слоя (ППС)

$H_\theta = c_p \frac{\bar{\theta}}{g}$ - высота изэнтропической атмосферы

h_s - высота верхней границы приземного слоя (ПС) атмосферы

I – поправка в теории подобия для ПС для учета стратификации водяного пара в генерации турбулентности

$I_m(z)$ - мнимая часть числа Z

K – коэффициент турбулентной диффузии

K_m - коэффициент турбулентного обмена для импульса

K_s^q - диффузионная проводимость в почве

K_s^0 - коэффициент температуропроводности в почве

\tilde{K}_q - коэффициент гидравлической проводимости в почве

K_φ - коэффициенты вертикального турбулентного обмена для субстанции Φ

K_{φ_i} - коэффициент турбулентного обмена для скалярной величины Φ по координате x_i

$\bar{k} = \{k_x, k_y, k_z\} = \{k_{1x}, k_2, k_3\}$ - волновой вектор

$\bar{k} = \{0, 0, 1\}$ - единичный вектор в вертикальном направлении

κ_0 - постоянная Кармана

L - 1) скрытая теплота парообразования; 2) масштаб длины Монино-Обухова в теории подобия для ПС

L_1 - скрытая теплота сублимации

ℓ - масштаб турбулентности

ℓ_m - характерный вертикальный масштаб турбулентных вихрей

ℓ_E - характерный пространственный масштаб турбулентных вихрей

M_{ϕ} - члены, описывающие источники и стоки субстанции за счет влажностных процессов

N - частота Брента-Вяйсяля

P - давление смеси

\bar{P} - фоновое значение давления смеси

P_0 - наземное значение \bar{P}

p - отклонение давления смеси от фонового значения

$Q = Q_v + Q_c$ - массовая доля водяного пара и облачной влаги

$Q_c = Q_{cw} + Q_{ci}$ - массовая доля облачной влаги в жидком и кристаллическом виде

$Q_{ci} = \bar{q}_{ci} + q_{ci}$ - массовая доля облачного льда

$Q_{cw} = \bar{q}_{cw} + q_{cw}$ - массовая доля облачной воды

$Q_r = Q_{rw} + Q_{ri}$ - массовая доля осаждающейся влаги в жидком и кристаллическом виде

$Q_{ri} = \bar{q}_{ri} + q_{ri}$ - массовая доля осаждающегося льда

$Q_{rw} = \bar{q}_{rw} + q_{rw}$ - массовая доля осаждающейся воды

Q_s - влажность почвы

Q_{sat} - массовая доля насыщенного водяного пара

$Q_t = Q_c + Q_r + Q_v$ - общее влагосодержание

$Q_v = \bar{q}_v + q_v$ - массовая доля водяного пара

$\bar{q} = \bar{q}_v + \bar{q}_c$ - сумма массовых долей водяного пара и облачной влаги для фонового состояния

$q = q_v + q_c$ - отклонение от фоновых значений суммы массовых долей водяного пара и облачной влаги

$\bar{q}_c = \bar{q}_{cw} + \bar{q}_{ci}$ - фоновое значение массовой доли облачной влаги

$q_c = q_{cw} + q_{ci}$ - отклонение от фоновых значений массовой доли облачной влаги

\bar{q}_{ci} - фоновое значение массовой доли облачного льда

q_{ci} - отклонение от фоновых значений массовой доли облачного льда

\bar{q}_{cw} - фоновое значение массовой доли облачной воды

q_{cw} - отклонение от фоновых значений массовой доли облачной воды

\bar{q}_r - фоновое значение массовой доли осаждающейся влаги

q_r - отклонение от фоновых значений массовой доли осаждающейся влаги

\bar{q}_{ri} - фоновое значение массовой доли осаждающейся кристаллической влаги

\bar{q}_{rw} - фоновое значение массовой доли осаждающейся жидкой влаги

q_{ri} - отклонение от фоновых значений массовой доли осаждающейся кристаллической влаги

q_{rw} - отклонение от фоновых значений массовой доли осаждающейся жидкой влаги

\bar{q}_v - фоновое значение массовой доли водяного пара

q_v - отклонение от фоновых значений массовой доли водяного пара

q_* - масштаб влажности в теории подобия для ПС

R_d - удельная газовая постоянная для сухого воздуха

$\text{Re}(z)$ - действительная часть комплексного числа Z

Ri - число Ричардсона

Ri_B - массовое число Ричардсона

Ri_{3D} - трехмерное число Ричардсона

Ri_{3D}^* - обобщение трехмерного числа Ричардсона на случай учета полного сдвига в поле потенциальной температуры

T - абсолютная температура

\bar{T} - фоновое значение абсолютной температуры

T' - отклонение абсолютной температуры от фоновых значений

T_g - наземное значение абсолютной температуры

t - координата времени

u, v, w или u_1, u_2, u_3 - составляющие вектора скорости потока \vec{V} в координатах x, y, z

u_* - динамическая скорость (масштаб скорости в теории подобия для ПС)

V_G - скорость геострофического ветра

V_T - скорость гравитационного падения осадков

x, y, z или x_1, x_2, x_3 - пространственные декартовы координаты

z_a - нижний уровень применимости теории подобия в поле температуры

z_0 - уровень (высота) шероховатости подстилающей поверхности

$z_{0\phi}$ - значение высоты шероховатости для субстанции ϕ

z_g - уровень поверхности Земли

$\Gamma(x, y)$ - рельеф земной поверхности

Δ - 1) оператор Лапласа $\Delta = \nabla \cdot \nabla$; 2) масштаб расчетной сетки

$\Delta \ell$ - шаг дискретной сетки по координате ℓ ($\ell = x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta$)

δ_{ij} - оператор Кронекера

Θ - потенциальная температура сухого воздуха

$\Theta_a = \Theta(z_a)$

$\bar{\Theta}$ - фоновое значение потенциальной температуры сухого воздуха

θ - отклонение потенциальной температуры сухого воздуха от фоновых значений

Θ_e - эквивалентная потенциальная температура

$\Theta_{i\ell}$ - водо-ледяная потенциальная температура

Θ_s - температура почвы

$\Theta_{v\ell}$ - виртуальная потенциальная температура с учетом жидкой и твердой фаз влаги («обобщенная виртуальная потенциальная температура»)

$\bar{\Theta}_{v\ell}$ - фоновое значение обобщенной виртуальной потенциальной температуры

$\theta_{v\ell}$ - отклонение обобщенной виртуальной потенциальной температуры от фоновых значений

θ_* - потоковая температура (масштаб температуры в теории подобия для ПС)

$\alpha = c_p - c_v$ - отклонение теплоемкостей для сухого воздуха

$\lambda = \frac{g}{\Theta_{v\ell}}$ - параметр плавучести; $\lambda_1 = \frac{\lambda}{c_p}$

ν - кинематический коэффициент молекулярной вязкости воздуха

ν_θ - кинематический коэффициент молекулярной диффузии тепла

ν_q - кинематический коэффициент молекулярной диффузии водяного пара

ξ, η, ζ - пространственные координаты в орографических системах координат

Π - функция Экснера

\bar{p} - фоновое значение функции Экснера

p - отклонение функции Экснера от фоновых значений

ρ - плотность смеси (атмосферного воздуха, содержащего влагу)

$\bar{\rho}$ - фоновое значение плотности смеси

ρ' - отклонение плотности смеси от фоновых значений

ρ_s - плотность почвы

ρ_w - плотность воды

σ - координата Филлипса (1957)

$\sigma_\varphi = \frac{d\varphi}{dz}$ - параметр фоновой стратификации субстанции Φ

$\tau_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j}$ - компонент тензора турбулентных напряжений Рейнольдса

Φ - 1) гепотенциал; 2) общее обозначение одного из искомым полей (субстанций); 3) универсальная функция для масштаба скорости в теории подобия для ПС

$\bar{\varphi}$ - 1) фоновое значение поля Φ ; 2) символ осреднения в теории подсеточной турбулентности (см. § 2.3)

φ - отклонение значений поля Φ от фоновых значений

φ' - турбулентная пульсация величины Φ

$\overline{\varphi' f'}$ - одноточечный второй момент для турбулентных пульсаций φ' и f' величин Φ и F

$\varphi^{(n)}$ - значение переменной φ в момент времени $t = n \Delta t$

φ_i - значение переменной φ в i -той точке дискретной сетки

Ψ - универсальная функция для масштабов температуры и влажности в теории подобия для ПС

ω - 1) вертикальная скорость в орографической или в p -системе координат; 2) частота гармонической волны

$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ - оператор градиента

Глава 1. Система уравнений, их свойства

1.1. Основная система уравнений

Негидростатические численные модели прогностического типа, о которых будет идти речь в настоящей работе, используют различные системы уравнений, представляющие собой упрощенные версии полной системы гидротермодинамических законов сохранения. Эта система в декартовых координатах t, x, y, z может быть записана в следующем виде:

$$\frac{d\rho\bar{V}}{dt} + f[\bar{k} \times \rho\bar{V}] + \rho g\bar{k} + \rho c_p \Theta_{v\ell} \nabla \Pi = \bar{D}_{\bar{v}}, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \bar{V} = M_\rho, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{\rho c_p \Pi} \frac{\partial F}{\partial z} + M_\Theta + \frac{1}{\rho} D_\Theta, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = M_\Phi + \frac{1}{\rho} D_\Phi, \quad \Phi = Q_v, Q_{cw}, Q_{ci}, Q_{rw}, Q_{ri}, \quad (1.1.4)$$

$$\Theta_{v\ell} = \Theta(1 + 0.61Q_v - Q_c - Q_r), \quad Q_c = Q_{cw} + Q_{ci}, \quad Q_r = Q_{rw} + Q_{ri} \quad (1.1.5)$$

$$\rho \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right) = 10^5 \frac{\Pi^{1/(k-1)}}{R_d \Theta_{v\ell}} \quad (1.1.6)$$

Большинство обозначений в (1.1.1) - (1.1.6) - общепринятые. Полные сведения приведены в списке обозначений. Уравнения (1.1.1) - (1.1.4) вместе с выражениями (1.1.5), (1.1.6) для виртуальной температуры с учетом жидкой и твердой фаз, $\Theta_{v\ell}$, и плотности смеси ρ образуют систему десяти скалярных уравнений относительно десяти искомых скалярных функций:

- трех компонентов скорости $\bar{V} = \{u, v, w\}$,
- потенциальной температуры Θ ,
- функции Экснера Π ,
- пяти компонентов атмосферной влаги: массовых долей водяного пара (Q_v), облачной (Q_c) и осаждающейся (Q_r) воды в жидкой и ледяной фазах каждая.

Здесь и в дальнейшем мы не используем знаков осреднения, но предполагаем, что каждое искомое поле ϕ представляет собой уже осредненное поле - результат рейнольдсова осреднения исходного поля ($\phi = \bar{\phi} + \phi'$).

Уравнение (1.1.4) выписано исходя из упрощающего предположения, что образовавшийся в атмосфере конденсат можно описать с помощью только интегральной характеристики (например, массовой доли влаги) и подразделить его на две фракции (облачную и осаждающуюся воду), каждая из которых может находиться как в жидкой, так и в ледяной фазе.

Потенциальная температура (Θ) и функция Экснера (Π) следующим образом выражаются через давление смеси P и абсолютную температуру T :

$$\Theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}, \quad \Pi = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa},$$

откуда Π есть отношение абсолютной и потенциальной температур:

$$\Pi = \frac{T}{\Theta}.$$

Выражение (1.1.6) для плотности является следствием определения $\Theta_{v\ell}$ (1.1.5) и уравнения состояния смеси, принимаемого в виде:

$$P = \rho R_d T (1 + 0.61 Q_v - Q_c - Q_r).$$

Потенциальная температура и функция Экснера в качестве основных термодинамических параметров используются, например, в работах Тэппа и Уайта (1976), Клемпа и Вильгельмсона (1978а), Яу (1980), Кисельниковой и др. (1984). Другие авторы используют потенциальную температуру и давление (Пастушков, 1970; Шлезингер, 1975; Сомеррия, 1976; Кларк, 1977; Коттон и Триполи, 1978; Пененко и Алоян, 1985). Триполи Коттон (1982) используют прогностическое уравнение для плотности сухого воздуха.

В уравнении (1.1.1) через \vec{D}_v обозначен вектор, параметризующий влияние турбулентных потоков импульса, а в (1.1.2)-(1.1.4) через M_ϕ и D_ϕ - члены, параметризующие источники и стоки субстанции ϕ ($\phi = \rho, \Theta, Q_v, Q_{cw}, Q_{ci}, Q_{rw}, Q_{ri}$) за счет влажностных и турбулентных процессов соответственно. Первое слагаемое в правой части (1.1.3) представляет собой параметризацию радиационных потоков тепла. Методика представления всех этих членов через искомые функции рассматривается в следующей главе. В ряде моделей для более точного описания турбулентных процессов в выражения для \vec{D}_v и D_ϕ вводятся дополнительные характеристики (прежде всего кинетическая энергия турбулентности). В этом случае для них записываются уравнения, пополняющие систему (1.1.1) - (1.1.4). Учет масштабного множителя не производится ввиду небольших размеров расчетной области (порядка нескольких сотен километров).

Следует отметить, что описание атмосферных процессов на основе системы (1.1.1)-(1.1.4) не обязательно ограничивается численным интегрированием этих уравнений. Так, в приземном слое расчет обычно ведется на основе теории подобия. В вышележащих слоях атмосферы не все процессы могут быть адекватно описаны в рамках численного интегрирования системы (1.1.1) - (1.1.4). Именно при данных параметрах расчетной сетки уравнения (1.1.1) - (1.1.4) описывают процессы двух крайних масштабов - разрешимых данной сеткой и подсеточных, малых по сравнению с шагом сетки. Описание первых процессов дается непосредственно аппроксимацией уравнений на данной сетке, а вторые параметризуются выражениями D_ϕ и M_ϕ на основе предположения об их статистической однородности в пределах расчетной ячейки. Что же касается процессов промежуточного масштаба, сравнимого с размерами расчетной ячейки, для их адекватного учета возможны параметризационные процедуры, выполняемые на каждом шаге по времени вместо прямого расчета согласно (1.1.3) - (1.1.4).

В некоторых из вопросов, разбираемых в настоящей главе, не только конкретный вид, но и самое наличие радиационного, турбулентных и влажностных членов в уравнениях (1.1.1) - (1.1.4) будет несущественно. В таких случаях мы будем опускать эти члены для краткости записи.

Обычное преобразование уравнений (1.1.1) - (1.1.4) заключается в выделении заданного фонового распределения (переменные с "крышкой") и мезомасштабных возмущений (переменные со штрихом) термодинамических характеристик и влаги:

$$\begin{aligned}\Theta &= \bar{\theta}(z) + \theta', & \Pi &= \bar{\pi}(z) + \pi', & \rho &= \bar{\rho}(z) + \rho', & Q_v &= \bar{q}_v(z) + q'_v, \\ Q_{cw} &= \bar{q}_{cw} + q'_{cw}, & Q_{ci} &= \bar{q}_{ci} + q'_{ci}, & Q_{rw} &= \bar{q}_{rw} + q'_{rw}, & Q_{ri} &= \bar{q}_{ri} + q'_{ri}.\end{aligned}\quad (1.1.7)$$

Фоновое распределение величины $\Theta_{v\ell}$ определяется в силу (1.1.5) как

$$\bar{\theta}_{v\ell} = \bar{\theta}(1 + 0.61\bar{q}_v - \bar{q}_c - \bar{q}_r), \quad \bar{q}_c = \bar{q}_{cw} + \bar{q}_{ci}, \quad \bar{q}_r = \bar{q}_{rw} + \bar{q}_{ri}$$

а возмущение как

$$\theta_{v\ell} = \Theta_{v\ell} - \bar{\theta}_{v\ell} = \Theta(0.61q'_v - q'_c - q'_r) + \theta'(1 + 0.61\bar{q}_v - \bar{q}_c - \bar{q}_r), \quad (1.1.8)$$

$$q'_c = q'_{cw} + q'_{ci}, \quad q'_r = q'_{rw} + q'_{ri}$$

Профили $\bar{\theta}_{v\ell}$ и $\bar{\pi}$ предполагаются связанными соотношением статики:

$$c_p \bar{\theta}_{v\ell} \frac{d\bar{\pi}}{dz} + g = 0. \quad (1.1.9)$$

Выражая в уравнении (1.1.2) ρ через Π и $\Theta_{v\ell}$ согласно (1.1.6) и переходя от полных величин к возмущениям, получим с учетом (1.1.9) уравнения (1.1.1)-(1.1.4) в следующем виде² (радиационное слагаемое опускаем):

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + f[\bar{k} \times \bar{v}] - \lambda \theta_{v\ell} \bar{k} + c_p \Theta_{v\ell} \nabla \Pi = \frac{1}{\rho} \bar{D} \bar{v}, \quad (1.1.10)$$

$$\frac{d\pi}{dt} - \lambda_1 w + (\kappa - 1) \Pi \left[\nabla \cdot \bar{v} - \frac{1}{\Theta_{v\ell}} \left(\frac{d\theta_{v\ell}}{dt} + \sigma_{\theta_{v\ell}} w \right) \right] = M_p, \quad (1.1.11)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \sigma_\varphi w = M_\varphi + \frac{1}{\rho} D_\varphi, \quad (1.1.12)$$

$$\varphi = \theta, q_v, q_{cw}, q_{ci}, q_{rw}, q_{ri}, \quad \lambda = \frac{g}{\theta_{v\ell}}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{c_p \bar{\rho}}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Целесообразность перехода от исходных уравнений (1.1.1) - (1.1.4) к уравнениям в возмущениях вида (1.1.10) - (1.1.12) заключается в ряде моментов:

² Здесь и далее для упрощения записи штрифовое обозначение возмущений убираем, помня, что строчная буква обозначает полную величину, а прописная без "крышки" - возмущение.

1) в записи (1.1.10) - (1.1.12) явно обособляются члены, "ответственные" за эффекты, связанные с расслоенностью атмосферы по высоте в отношении термодинамических и влажностных характеристик. Это оказывается полезным не только при теоретическом изучении атмосферы, но и при изучении схем численного интегрирования данных уравнений;

2) появляется возможность количественных упрощений: в большинстве моделей полные величины заменяются в (1.1.10) - (1.1.12) фоновыми там, где они фигурируют в качестве коэффициентов (не дифференцируются). В выражении (1.1.8) для $\theta_{v\ell}$ обычно пренебрегают величинами 2-го порядка малости и т.д. Это сокращает алгоритм, экономит память и время работы ЭВМ;

3) при построении численных алгоритмов запись (1.1.10) - (1.1.12) позволяет путем неявной аппроксимации членов вида $\sigma_{\phi} w$ повышать устойчивость алгоритма без его заметного удорожания (подробней см. главу 4);

4) переход от полных величин к возмущениям повышает точность вычислений, т.к. избавляет от необходимости искать малые разности больших величин при численном дифференцировании полей;

5) при учете орографии посредством перехода в орографическую систему координат (см. § 1.6) выделение гидростатически сбалансированного фона уменьшает погрешности аппроксимации градиента давления (см. главу 4).

Представление термодинамических и влажностных характеристик в виде "фона" и "возмущений" с последующей формулировкой прогностических уравнений в терминах возмущений принято в той или иной форме во всех моделях. Однако выбор фона может осуществляться по-разному:

1) принимается $\bar{\theta} = \text{const.}$ (Тэпп и Уайт (1976), Кларк (1977), Яу (1980));

2) используется представление полных величин в виде суммы трех слагаемых - заданного гидростатического нейтрально стратифицированного фона ($\bar{\theta}_0 = \text{const.}$), заданной горизонтально-однородной гидростатической добавки, стратифицированной согласно натурным замерам ($\bar{\theta}_1(z)$), и искомым возмущений $\theta(t, x, y, z)$ (Кларк, 1979);

3) учитывается зависимость фоновых распределений и от времени, и от пространственных координат (Дирдорф, 1972а; Соммерия, 1976; Сунг и Огура, 1980; Сунг и Тао, 1980, 1984).

Тот или иной выбор связан со спецификой изучаемых явлений. Для целей локального прогноза оптимальным компромиссом представляется выбор гидростатического фона $\bar{\theta}(z)$ и $\bar{p}(z)$, стратифицированного согласно натурным замерам в начальный момент прогноза, при условии, что структура крупномасштабной циркуляции учитывается в ходе прогноза (подробней см. главы 3 и 4). В ходе прогноза время от времени может производиться пересчет фоновых распределений $\bar{\theta}(z)$, $\bar{p}(z)$.

1.2. Неупругие уравнения

Один из основных принципов упрощения уравнений гидротермодинамики при их применении к описанию атмосферных процессов заключается, как известно, в фильтрации быстрых волн. Под "быстрыми" при этом понимаются волны, скорость которых велика относительно скорости интересующих нас процессов. Такие волны энергетически несущественны в этих процессах и в то же время затрудняют построение вычислительных алгоритмов, устойчивых при величине шага по времени Δt , адекватной данным процессам.

К числу волн, подлежащих фильтрации, в динамической метеорологии относятся прежде всего акустические волны. В гидростатических уравнениях приближение статики является механизмом, фильтрующим трехмерные звуковые волны (Холтон, 1972). В негидростатических уравнениях единственный путь фильтрации звуковых волн заключается в пренебрежении локальной производной плотности по времени, $\partial \rho / \partial t$, в уравнении неразрывности (1.1.2). Эта модификация фильтрует из уравнений акустические волны (в том числе и волны Лэмба, в отличие от гидростатического приближения, сохраняющего волны Лэмба), несколько - в пределах 20%, искажая фазовую скорость внутренних гравитационных волн (завышая при высокоустойчивой стратификации фона и занижая при слабоустойчивой). Искажение тем больше, чем больше длина волны по вертикали, но и здесь она слабо выражена (Кадышников, 1984).

Покажем эти эффекты на примере линеаризованной системы уравнений для сухой атмосферы, записанной в отклонениях от фона (т.е. на предельно упрощенном варианте исходной системы уравнений, представленной в § 1.1).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial x} - f v &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial y} + f u &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\theta}} \theta' &= 0, \\ \frac{\partial \Pi'}{\partial t} + (\kappa - 1) \bar{\Pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + w \frac{d \bar{\theta}}{d z} &= 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Решение системы уравнений (A.1) ищем в виде волны:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 \\ v &= V_0 \\ w &= W_0 \\ \Pi &= \Pi_0 \\ \theta &= \Theta_0 \end{aligned} \right\} \times \exp[i(\omega t - k x - m y - n z)] \tag{A.2}$$

Здесь $\omega = 2\pi/\Gamma$ - частота, k, m, n - волновые числа (размерность $[M^{-1}]$) по координатам X, Y, Z , соответственно; Γ - период волны; $L_x = 2\pi/k$, $L_y = 2\pi/m$, $L_z = 2\pi/n$ - длина волны по координатным осям X, Y, Z , соответственно.

Зависимость частоты ω от волновых чисел k, m, n устанавливается *дисперсионным соотношением*, которое можно получить, подставив в систему (А.1) решение (А.2). При этом получим:

$$\begin{vmatrix} (u) & (v) & (w) & (\pi) & (\theta) \\ i\omega & -f & 0 & -ic_p\Theta k & 0 \\ f & i\omega & 0 & -ic_p\Theta m & 0 \\ 0 & 0 & i\omega & -ic_p\Theta n & \frac{g}{\Theta} \\ -i(\kappa-1)\Pi k & -i(\kappa-1)\Pi k & -i(\kappa-1)\Pi k & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\Theta}{dz} & 0 & i\omega \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ \Pi_0 \\ \Theta_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (A.3)$$

Для того, чтобы выполнялось (А.3) при амплитудах отличных от нуля, необходимым условием является, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -f & 0 & -ic_p\Theta k & 0 \\ f & i\omega & 0 & -ic_p\Theta m & 0 \\ 0 & 0 & i\omega & -ic_p\Theta n & \frac{g}{\Theta} \\ -i(\kappa-1)\Pi k & -i(\kappa-1)\Pi k & -i(\kappa-1)\Pi k & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d\Theta}{dz} & 0 & i\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (A.4)$$

Раскрывая определитель в (А.4), получим дисперсионное соотношение

$$\omega \{ \omega^4 - [f^2 + N^2 + c^2(k^2 + m^2 + n^2)]\omega^2 + N^2[f^2 + c^2(k^2 + m^2)] + f^2c^2n^2 \} = 0. \quad (A.5)$$

Здесь: $N^2 = \frac{g}{\Theta} \frac{d\Theta}{dz}$ - частота Брента-Вяйсяля, размерность $[N] = c^{-1}$. Эта частота представляет собой частоту колебаний частицы воздуха, выведенной из состояния равновесия, при стратификации $\frac{d\Theta}{dz}$ при средней температуре слоя, равной Θ .

$$c^2 = c_p \Theta (\kappa - 1) \Pi = \kappa R_d T \text{ - скорость звука;}$$

Уравнение (А.5) имеет относительно ω пятую степень, т.е. имеет пять корней - пять частот ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$). Первый корень $\omega_1 = 0$ представляет собой стационарную волну Россби при $f = \text{const}$. Остальные волны ($\omega_2, \omega_4 > 0$; $\omega_3, \omega_5 < 0$) представляют собой инерционно-акустические (скорость которых равна скорости звука c) и инерционно-гравитационные волны (с частотой N).

Для отфильтрования волн, распространяющихся со скоростью звука из системы уравнений (А.1), необходимо исключить из дисперсионного соотношения решения, содер-

жащие c^2 . Это можно сделать, если в определителе системы в строке, связанной с уравнением неразрывности (четвертая строка), член, связанный с π (четвертый столбец), изменить с $i\omega$ на нуль. Это равносильно тому, что положить в уравнении неразрывности системы (А.1) $\frac{\partial \pi'}{\partial t} = 0$. Тогда дисперсионное соотношение (А.5) принимает вид

$$\omega \{ \omega^2 (k^2 + m^2 + n^2) - N^2 (k^2 + m^2) - f^2 n^2 \} = 0 \quad (\text{А.6})$$

Если положить $f = 0$, чтобы отфильтровать стационарные волны Россби, тогда получим

$$\omega = \frac{N \sqrt{k^2 + m^2}}{\sqrt{k^2 + m^2 + n^2}}. \quad (\text{А.7})$$

Так как величина $\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{\sqrt{k^2 + m^2 + n^2}} \leq 1$, следовательно $|\omega| \leq N$, т.е частота

Брента-Вяйсяля является верхним пределом для частоты волн, содержащихся в решении системы (А.1).

Итак, при условии, что $\frac{\partial \pi'}{\partial t} = 0$ (что равносильно условию $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) в решении системы (А.1) остаются стационарная и инерционно-гравитационные волны, а акустические и инерционно-акустические (волна Лэмба) - отфильтровываются.

Исторически системы уравнений, не содержащие $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ в уравнении неразрывности, ведут свое происхождение от уравнений для несжимаемой среды, изучавшихся Буссинеском (1903) и еще раньше Обербеком (1879). Получению и обоснованию приближенных систем уравнений этого типа для атмосферы без учета и с учетом вязкости и теплопроводности, атмосферной влаги и осадкообразования посвящен значительный ряд работ, продолжающийся до настоящего времени (Бэтчелор, 1953; Шпигель и Веронис, 1960; Огура и Чарни, 1962; Огура и Филлипс, 1962; Михальян, 1962; Малкус, 1964; Филлипс, 1967; Даттон и Фихтль, 1969; Гаф, 1969; Липс и Хемлер, 1980; Бузингер, 1982; Вульфсон, 1982; Липс и Хемлер, 1982, 1985; Мэрт, 1986). Основополагающей в определенном смысле явилась здесь работа Огура и Филлипса (1962), в которой данные системы и получили название "неупругих" (со ссылкой на Дж. Чарни). Здесь же неупругие системы уравнений, в зависимости от принимаемых упрощений, классифицированы на уравнения "глубокой" конвекции и "мелкой" конвекции. Первые уравнения репрезентативнее вторых за счет двух факторов:

- 1) учета падения плотности с высотой в уравнении неразрывности и
- 2) представления силы плавучести через возмущения потенциальной (а не абсолютной) температуры.

Соответственно уравнения глубокой конвекции применимы в слое, толщина которого сравнима с толщиной изэнтропической атмосферы H_0 (~ 30 км), а мелкой конвекции - в слое с толщиной, на порядок меньшей H_0 . На практике в качестве характерной толщины слоя, в котором репрезентативны эти системы, принимают: для уравнений глубокой конвекции - 10 км, мелкой конвекции - 2 км³.

³ Шатцман и Поликастро (1984) рассмотрели вопрос о репрезентативности уравнений мелкой конвекции ("буссинесковых" уравнений) в задачах распространения промышленных примесей в атмосфере и водоемах.

В работе Огуры и Филлипса уравнения глубокой конвекции получены в предположении $\bar{\theta} = \text{const.}$, а в последующих работах аналогичные уравнения стали рассматривать и в случае переменной (устойчивой) стратификации фона $\bar{\theta}(z)$ (Даттон и Фихтль, 1969; Вильгельмсон и Огура, 1972; Пелтайр и Кларк, 1979; Липс и Хемлер, 1982).

Характерная особенность неупругих систем уравнений с точки зрения их численного интегрирования в моделях локального прогноза заключается в отсутствии уравнения, которое могло бы служить для восстановления величины Π на каждом шаге по времени. Поэтому при построении численных схем эти системы предварительно преобразовывают, конструируя недостающее уравнение и заменяя им уравнение неразрывности. Это выполняется следующим образом. Уравнение (1.1.2), которое теперь имеет вид

$$\nabla \cdot \rho \bar{v} = 0, \quad (1.2.1)$$

дифференцируют по времени, после чего $(\rho \bar{v})_t$ выражается из (1.1.1). Это дает (правые части в (1.1.1) и (1.1.2) опускаем):

$$\nabla \cdot \left\{ (\rho \bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + g \rho \bar{k} + f [\bar{k} \times \rho \bar{v}] + \rho c_p \Theta_{v\ell} \nabla \Pi \right\} = 0.$$

Данное равенство интерпретируется как уравнение

$$\nabla \cdot (\rho c_p \Theta_{v\ell} \nabla \Pi) = \nabla \cdot \left\{ (\rho \bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + g \rho \bar{k} + f [\bar{k} \times \rho \bar{v}] \right\} \quad (1.2.2)$$

для восстановления Π по известным \bar{v} , $\Theta_{v\ell}$ и ρ . Это уравнение эллиптического типа, поскольку старшие производные образуют выражение

$$\rho c_p \Theta_{v\ell} \nabla \Pi.$$

Система уравнений (1.1.1), (1.2.2), (1.1.3), (1.1.4) эквивалентна системе тех же уравнений, но с (1.2.1) вместо (1.2.2) при условии, что начальные поля удовлетворяют (1.2.1).

Используемые в настоящее время неупругие системы уравнений конвекции, глубокой или мелкой, представляют собой тот или иной вариант упрощения системы (1.1.1), (1.2.2), (1.1.3), (1.1.4) за счет разделения термодинамических характеристик на "фон" и "возмущения" аналогично тому, как описано в предыдущем параграфе. Благодаря появлению уравнения (1.2.2) алгоритм численного интегрирования теперь может быть построен как восстановление \bar{v} и Φ ($\Phi = \Theta, Q_v, Q_{cw}, Q_{ci}, Q_{rw}, Q_{ri}$) из эволюционных уравнений (1.1.1), (1.1.3), (1.1.4) и восстановление Π решением краевой задачи для уравнения (1.2.2). Такова общая структура численного алгоритма во всех современных негидростатических моделях, основанных на использовании неупругих систем уравнений (Пастушков, 1970а; Дирдорф, 1972а; Штайнер, 1973; Миллер и Пирс, 1974; Шлезингер, 1975; Шемм и Липс, 1976; Кларк, 1977; Яу, 1980; Вельтищев и др., 1982; Пененко и Алоян, 1985 и др.).

Типичная форма неупругой системы уравнений, применяемой сегодня в мезомасштабных моделях, в термодинамических переменных p, θ имеет вид (Вельтищев и др., 1982):

$$\nabla \cdot \bar{p} \bar{v} = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{d\bar{\rho}\bar{v}}{dt} + f[\bar{k} \times \bar{\rho}\bar{v}] - \bar{\rho}[\lambda\theta + g(0.61q_v - q_c - q_r)]\bar{k} + \bar{\rho}c_p\bar{\theta}_{v\ell}\nabla\pi = \bar{D}_{\bar{v}}, \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \sigma_\theta w = -\frac{1}{\bar{\rho}c_p}\frac{\partial F}{\partial z} + M_\theta + \frac{1}{\bar{\rho}}D_\theta, \quad (1.2.5)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \sigma_\varphi w = M_\varphi + \frac{1}{\bar{\rho}}D_\varphi, \quad \varphi = q_v, q_{cw}, q_{ci}, q_{rw}, q_{ri}, \quad (1.2.6)$$

$$\bar{q}_{cw} = \bar{q}_{ci} = \bar{q}_{rw} = \bar{q}_{ri} = \sigma_{q_{cw}} = \sigma_{q_{rw}} = \sigma_{q_{ci}} = \sigma_{q_{ri}} = 0.$$

Уравнение для восстановления π , аналогичное (1.2.2), получает в этом случае вид:

$$\nabla \cdot (\bar{\rho}c_p\bar{\theta}_{v\ell}\nabla\pi) = \nabla \cdot \left\{ (\bar{\rho}\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} + f[\bar{k} \times \bar{\rho}\bar{v}] - \bar{\rho}[\lambda\theta + g(0.61q_v - q_c - q_r)]\bar{k} + \bar{D}_{\bar{v}} \right\} \quad (1.2.7)$$

и таким образом окончательному интегрированию подлежит система (1.2.3) - (1.2.7).

1.3. Полные уравнения

При выборе системы уравнений для прогнозирования того или иного класса явлений, наряду с вопросом о ее физической репрезентативности, важнейшим в настоящее время является вопрос о возможностях построения эффективных численных алгоритмов для интегрирования данной системы уравнений. В этом отношении "досадная" особенность рассмотренных только что неупругих систем заключается в необходимости интегрирования на каждом шаге по времени краевой задачи для уравнения (1.2.7). Как уже отмечалось, это уравнение эллиптического типа, поэтому алгебраическая система уравнений, к которой приводит его дискретизация, может решаться итеративными методами. На практике, однако, даже наиболее совершенные из таких методов (Федоренко, 1961, 1964; Вэкспресс, 1966) оказываются недостаточно эффективными (Фэрнелл, 1980). Поэтому общим правилом является применение прямых (безитерационных) методов для интегрирования уравнения (1.2.7) (Дирдорф, 1972а; Шлезингер, 1975; Шемм и Липс, 1976; Кларк, 1977; Яу, 1980; Вельтищев и др., 1982; Шерман и Уортл, 1983; Пененко и Алоян, 1985) иногда в сочетании с итеративными методами (Тэпп и Уайт, 1976).

Прямые методы уязвимы, однако, в отношении чувствительности к особенностям дискретных аппроксимаций - неравномерности расчетной сетки, использованию многоточечных конечно-разностных аналогов 1-й и 2-й производных, варьированию краевых условий и т.д.: каждая такая модификация может повлечь за собой неприменимость данного прямого метода или заметное усложнение его реализации⁴. Положение особенно обостряется, если мы хотим учесть такой физический фактор, как рельеф земной поверхности (а именно данный фактор, едва ли не прежде всех других ведет к необходимости отказа от гидростатического приближения, см. ниже § 1.6). В этом случае по-

⁴ Применение прямых методов затрудняет даже изменение величины шага по времени Δt в ходе прогноза (Δt целесообразно уменьшать в периоды резких перестроек радиационного и теплового режима атмосферы), поскольку при этом может потребоваться заново вычислять собственные значения и собственные вектора матрицы, аппроксимирующей левую часть уравнения (1.2.7).

требность в итерациях при решении уравнения (1.2.7) резко возрастает, а их эффективность быстро падает с ростом высоты и крутизны рельефа и занимаемой им доли расчетной территории. Не случайно поэтому, что в настоящее время имеется, по-видимому, лишь одна негидростатическая трехмерная модель, основанная на интегрировании неупругих уравнений и систематически используемая в расчетах для орографически неоднородных территорий (Кларк и Гэлл, 1982; Пелтайр и Кларк, 1983; Кларк и Фэрли, 1984). Другой фактор, учет которого ведет к аналогичной ситуации, - верхнее краевое условие типа незакрепленной поверхности раздела, положение которой определяется в ходе прогноза (Шуман и Ховермэйл, 1968; Дивен, 1976; Марер и Пилке, 1976а,б; МакНайдер и Пилке, 1981; Пененко и Алоян, 1985). Еще один фактор, исключаящий интегрирование уравнения (1.2.7) прямым методом - учет переменной высоты приземного слоя.

В этой связи с середины 70-х годов начинают появляться негидростатические модели, основанные на интегрировании полной системы уравнений гидротермодинамики. Под "полной" мы в данном случае понимаем такую систему уравнений, в которой сохранены все типы волн, присутствующие в уравнениях Эйлера (в том числе и акустические волны, в связи с чем эти уравнения иногда называют "упругими"), хотя при этом могут приниматься те или иные "количественные" упрощения в целях экономии памяти и операций ЭВМ. Иногда такие системы уравнений называют также "примитивными", но мы остановимся на термине "полные" во избежание путаницы с примитивными гидростатическими уравнениями Чарни (1955). В полной системе уравнений для каждой искомой величины имеется уравнение эволюционного типа, поэтому вычислительные модификации или учет дополнительных физических факторов не вносит принципиальных затруднений (тот или иной *конкретный* алгоритм, понятно, может и не допускать учета того или иного фактора). Одновременно, разумеется, возникают вычислительные трудности, связанные с наличием в полной системе уравнений быстрых волн.

Исторически первой мезометеорологической моделью, развитой на основе полных уравнений, является модель локального прогноза, действующая в настоящее время в Метеорологической службе Великобритании (МСВ) (Тэпп и Уайт, 1976; Карпентер, 1979; Бейли и др., 1981; Голдинг и Мэхин, 1984; Голдинг, 1984)⁵ За ней последовали модели кучевой облачности Клемпа и Вильхельмсона (1978а) и Коттона и Триполи (1978) и осесимметричная модель циклона (Виллоуби и др., 1983, 1984; Лорд и др., 1984). В этих моделях используются разные варианты полной системы уравнений. Однако, как уже отмечалось, любые упрощения (например, связанные с разбиением термодинамических и влажностных полей на фон и возмущения аналогично тому, как было рассмотрено выше, пренебрежение членами $(\vec{v} \cdot \nabla p)$ в уравнении (1.1.11) и т.д.) здесь преследуют цели лишь экономии программистских и вычислительных усилий. Принципиальной потребности в упрощении наиболее полной системы уравнений (1.1.1) - (1.1.4) здесь не возникает. Так, модель Тэппа и Уайта (1976) оперирует именно с такой системой в части, не связанной с турбулентными и влажностными процессами. Поэтому типичной формой полных уравнений естественно считать саму систему (1.1.1)-(1.1.4), т.е. уравнения Эйлера, пополненные учетом турбулентной диффузии и атмосферной влаги.

⁵ На интегрировании полных уравнений основана также более ранняя модель Хилла (1974) для конвективного облака. Однако по своим физическим и вычислительным характеристикам (два пространственных измерения, неадекватные прогнозу условия на боковых границах, явная вычислительная схема, требующая шага по времени ~ 1 сек) данная модель не может рассматриваться как "прогностическая" даже в том расширенном смысле. Который мы придаем здесь этому термину.

1.4. Уравнения в p-системе координат

В негидростатическом моделировании p-система координат Сатклиффа (1947) и Элиассена (1949) получила определенное распространение, хотя и несравненно меньшее, чем в гидростатических моделях. Здесь главным образом должны быть названы работы британских ученых, прежде всего Миллера, который в 1974 году получил фильтрованную систему уравнений в p-координатах и совместно с Пирсом построил на ее основе численную модель (Миллер, 1974; Миллер и Пирс, 1974). Это была едва ли не первая в литературе - наряду с моделью Пастушкова (1970а,б) - негидростатическая модель, близкая по своим характеристикам к современным моделям прогностического типа (три пространственные координаты, учет осадкообразования, условия открытых границ на боковых границах расчетной области). С тех пор эта модель модифицировалась (Монкрифф и Миллер, 1976; Беннет и Раулинс, 1981) и в разнообразных версиях использовалась при расчетах в натурном и модельном материале (Монкрифф и Миллер, 1976; Миллер, 1978; Беннет, 1978; Торп и Миллер, 1978; Торп и др., 1982; Беннет и Бэйдар, 1982).

Полная система уравнений в p-координатах не используется в силу своей громоздкости (в частности, в уравнении неразрывности здесь фигурирует третья индивидуальная производная, d^3/dt^3 от геопотенциала). Фильтрованная система, эвристически найденная Миллером (1974), получила обоснование в работе Миллера и Уайта (1984) как система для первого приближения при разложении решения в степенной ряд по малому параметру, имеющему в тропосфере для ненасыщенного воздуха характерное значение 0.1, а для насыщенного - 0.01. Для записи этой системы уравнений в сухой атмосфере абсолютная температура T и геопотенциал Φ представляются в виде суммы гидростатически сбалансированного фона, $\bar{T}(p)$ и $\bar{\varphi}(p)$ и отклонений T' и φ :

$$\Phi = gz = \bar{\varphi}(p) + \varphi; \quad T = \bar{T}(p) + T'; \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dp} = -\left(\frac{R\bar{T}}{p}\right).$$

Система уравнений относительно φ , T' и трех компонентов скорости в скалярной форме для случая идеальной атмосферы имеет вид:

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (1.4.1)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (1.4.2)$$

$$\frac{R}{g} \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{T}\omega}{p} \right) + \frac{gp}{R\bar{T}} \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{g}{\bar{T}} T' = 0, \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (1.4.4)$$

$$\frac{dT'}{dt} - \sigma_0 \omega - \frac{(\kappa - 1)\omega T'}{\kappa p} = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\omega = \frac{dp}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}, \quad \sigma_0 = -\frac{d\bar{T}}{dt} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{T}}{p} = -\frac{\bar{T}}{\theta} \frac{d\theta}{dp}. \quad (1.4.6)$$

Мы привели эту систему в формулировке Миллера и Уайта (1984). В более ранних работах (Миллер, 1974; Миллер и Пирс, 1974) она записывалась в несколько иной форме. В (1.4.1)-(1.4.6) $\bar{\theta}(p)$ - фоновое распределение потенциальной температуры. Для учета атмосферной влаги температура заменяется виртуальной температурой, а параметр статической устойчивости σ_0 видоизменяется по сравнению с (1.4.6), чтобы учитывать выделение/поглощение тепла в процессах конденсации/испарения. Это может быть сделано с разной степенью сложности. Согласно принятой схеме параметризации фазовых переходов (Миллер и Уайт, 1984).

Система (1.4.1) - (1.4.5) квалифицируется как квазинегидростатическая, аналогичная неупругим уравнениям глубокой конвекции (1.2.3) - (1.2.5), на том основании, что малый параметр, разложение по степеням которого получена данная система, сходен с параметром, аналогичным образом приводящим (Огура и Филлипс, 1962) к уравнениям (1.2.3) - (1.2.5). При записи системы (1.4.1) - (1.4.5) в координатах X, Y, Z и в переменных p и θ она, однако, не переходит полностью в систему (1.2.3) - (1.2.5), хотя и отличается от нее слагаемыми, малыми относительно порядка точности обеих систем. Так как уравнение неразрывности (1.4.4), как и уравнение (1.2.3), диагностично, при численном интегрировании его заменяют диагностическим уравнением для ϕ , аналогичным (1.2.7):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{g p}{R T} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = F$$

где через F обозначены слагаемые, не содержащие ϕ .

Недостаток уравнений (1.4.1) - (1.4.5), сближающий их с гидростатическими примитивными уравнениями, заключается в том, что в них не отфильтрованы волны Лэмба (хотя скорость их заметно уменьшена по сравнению с полной системой уравнений: вдвое для волны длиной в 16 км и в 10 раз для волны длиной в 130 км), что осложняет построение эффективных вычислительных алгоритмов. В линейной модели фильтрация этих волн достигается надлежащим нижним краевым условием ($\omega=0$ при $p=1000$ гПа), но в более общих условиях данный механизм фильтрации становится проблематичным.

В качестве преимущества уравнений в p -координатах перед уравнениями в z -координатах отмечается лишь уточнение процедуры конденсационного приспособления (см. § 1.5), поскольку теперь отпадает необходимость замены полной величины Π фоновой величиной $\bar{\pi}$ в формуле Тетенса (1930) или ее аналога. Однако численные эксперименты и оценки ряда авторов (Вильгельмсон и Огура, 1972; Миллер и Пирс, 1974; Клемп и Вильгельмсон, 1978а; Липс и Хемлер, 1982) показали, что данная аппроксимация необременительна, поскольку лежит в границах точности, с которой в рассматриваемых моделях описываются фазовые переходы влаги.

1.5. Квазиконсервативные термодинамические переменные

Специальные преобразования прогностической системы уравнений применяются в связи с особенностями описания фазовых переходов влаги и связанных с ними источников и стоков субстанции θ , Q_v , Q_{cw} , Q_{ci} , Q_{rw} и Q_{ri} при численном интегрировании уравнений (1.1.12). В настоящем параграфе приведем общие сведения по этому вопросу, в некоторых случаях для краткости ограничиваясь парообразной и жидкой фазами ($Q_{ci} = Q_{ri} = 0$).

В данной точке пространства (x, y, z) на данном временном интервале Δt возможны два качественно разных режима влажностных процессов:

1) состояние насыщенности или ненасыщенности воздуха водяным паром сохраняются

2) водяной пар из ненасыщенного становится насыщенным или наоборот.

В первом случае выражения M_φ ($\varphi = \theta, q_v, q_{cw}, q_{rw}$) представляют собой гладкие функции независимых переменных, и их аналитические выражения единообразны на всем интервале Δt . В этом случае специальных трудностей в интегрировании уравнений (1.1.12) не возникает. Во втором случае выражения M_φ на интервале Δt терпят разрыв, и их аналитические представления меняются. В этом случае, следовательно, возникают трудности как в алгоритмическом плане, так и в плане больших вычислительных погрешностей при дискретной аппроксимации разрывных функций и функций с разрывными производными. Здесь же возникает трудность в описании турбулентных процессов: так как при фазовых превращениях субстанции $\theta, q_v, q_{cw}, q_{rw}$ перестают быть консервативными, раздельная параметризация турбулентных потоков этих субстанций упускает из вида роль конденсации/испарения в генерации турбулентности (Коттон, 1975).

Вычислительные методики, которыми в этом случае оперируют мезометеорологические модели, основаны на особенностях в структуре выражений M_φ ($\varphi = \theta, q_v, q_{cw}, q_{rw}$). Именно, имеются четыре комбинации этих выражений, такие, что в них частично или полностью взаимно аннулируются те негладкости (связанные с процессами конденсации/испарения), которые присутствуют в каждом из этих выражений порознь. Это следующие комбинации:

$$\begin{aligned} M_\theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} M_{q_v}, \quad M_\theta - \frac{L}{c_p \bar{p}} (M_{q_{cw}} + M_{q_{rw}}), \\ M_{q_v} + M_{q_{cw}}, \quad M_{q_v} + M_{q_{cw}} + M_{q_{rw}}. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Данные комбинации возникают вследствие физических упрощений, которые принимаются при описании фазовых переходов влаги в атмосфере. Из (1.5.1) следует, что, беря соответствующие комбинации уравнений (1.1.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} q_v \right) + \vec{v} \cdot \left(\nabla \theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} \nabla q_v \right) + \left(\sigma_\theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} \sigma_{q_v} \right) w = \\ = M_\theta + \frac{1}{\rho} D_\theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} \left(M_{q_v} + \frac{1}{\rho} D_{q_v} \right), \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\theta - \frac{L}{c_p \bar{\Pi}} (q_{cw} + q_{rw}) \right] + \bar{v} \cdot \left[\nabla \theta - \frac{L}{c_p \bar{\Pi}} \nabla (q_{cw} + q_{rw}) \right] + \left[\sigma_\theta - \frac{L}{c_p \bar{\Pi}} (\sigma_{q_{cw}} + \sigma_{q_{rw}}) \right] w = \\ = M_\theta + \frac{1}{\rho} D_\theta - \frac{L}{c_p \bar{\Pi}} \left(M_{q_{cw}} + M_{q_{rw}} + \frac{1}{\rho} D_{(q_{cw} + q_{rw})} \right), \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

$$\frac{d}{dt} (q_v + q_{cw}) + \sigma_{(q_v + q_{cw})} w = M_{q_v} + M_{q_{cw}} + \frac{1}{\rho} D_{(q_v + q_{cw})}, \quad (1.5.4)$$

$$\frac{d}{dt} (q_v + q_{cw} + q_{rw}) + \sigma_{(q_v + q_{cw} + q_{rw})} w = M_{q_v} + M_{q_{cw}} + M_{q_{rw}} + \frac{1}{\rho} D_{(q_v + q_{cw} + q_{rw})}, \quad (1.5.5)$$

получим в правых частях этих уравнений выражения более гладкие, чем в правых частях (1.1.12).

На этом обстоятельстве основана наиболее распространенная методика конденсационного приспособления. Она применяется в разных вариантах, но по-существу остается одной и той же и заключается в следующем. Уравнения (1.1.12) для θ и q_v интегрируются на данном временном интервале $(t, t + \Delta t)$ в данной точке (x, y, z) по явной конечно-разностной схеме, но при этом в правых частях уравнений опускаются те члены (источники-стоки субстанций θ и q_v), которые взаимно аннулируются при составлении уравнения (1.5.2). Полученные таким образом из неточных уравнений величины $(\theta^*)^{t+\Delta t}$ и $(q_v^*)^{t+\Delta t}$ не являются окончательными, однако значение их линейной комбинации $\left[\theta^* + \left(L/c_p \bar{\Pi} \right) q_v^* \right]^{t+\Delta t}$ будет окончательным, поскольку оно же могло бы быть получено непосредственно из точного уравнения (1.5.2), не содержащего в правой части разрывных слагаемых. Используя значение данного выражения, а также значение $(q_v + q_{cw})^{t+\Delta t}$, определяемое интегрированием уравнения (1.5.4), восстанавливаем окончательные значения θ , q_v и q_{cw} в момент $(t + \Delta t)$, исходя из предположений, что пересыщение водяного пара не происходит (весь избыточный пар мгновенно конденсируется) и что в ненасыщенном состоянии облачная вода отсутствует. Этот заключительный этап оперирует только локальными зависимостями (не содержащими производных) и поэтому не ведет к погрешностям, связанным с дискретными аппроксимациями.

Данная методика впервые была применена, по-видимому, Асаи (1965). Впоследствии в тех или иных вариантах она применялась множеством авторов (специфические варианты возникают, в частности, в связи с применением численных схем расщепления) как в работах по моделированию конвективной облачности, осадков на фронтах, тропических циклонов и т.п., так и в моделях прогностического типа (Муррэй, 1970; Сунг и Огура, 1973, 1980; Сунг, 1974; Вильгельмсон, 1974; Миллер и Пирс, 1974; Шлезингер, 1975; Соммерия, 1976; Коттон и Триполи, 1978; Триполи и Коттон, 1980; Риан и Лалузи, 1979; Росс и Орлански, 1978, 1982; Джонс, 1980; Яу, 1980; Сунг и Тао, 1980, 1984; Вельтищев и др., 1982; Дюрен и Клемп, 1982б, 1983; Пененко и Алоян, 1985). Особенно широко апробировался вариант, предложенный Сунгом и Огурой (1973). Сходная методика с дополнительным привлечением уравнения (1.1.12) для q_{rw} может быть развита и на основе уравнений (1.5.3), (1.5.5).

Процедуре конденсационного приспособления свойственен, однако, ряд недостатков. Один из них был указан выше: раздельная параметризация турбулентных потоков

(слагаемые D_θ и D_{q_v} в уравнении (1.5.2) и аналогично D_θ и $D_{(q_{c_w} + q_{r_w})}$ в уравнении (1.5.3)) не позволяет учесть турбулентность, генерируемую фазовыми переходами влаги. Далее, эта методика исключает использование неявных численных схем, а также консервативных численных схем. Данные недостатки были бы исключены, если бы комбинации неизвестных, фигурирующие в (1.5.2) или в (1.5.3), а именно

$$\Theta_e = \Theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} Q_v, \quad (1.5.6)$$

$$\Theta_\ell = \Theta - \frac{L}{c_p \bar{p}} (Q_{c_w} + Q_{r_w}), \quad (1.5.7)$$

наряду с

$$Q = Q_v + Q_{c_w} \quad (1.5.8)$$

или в случае осадкообразования

$$Q_t = Q_v + Q_{c_w} + Q_{r_w} \quad (1.5.9)$$

могли бы рассматриваться как консервативные с точностью до выпадения осадков и турбулентного перемешивания. В этом случае вместо уравнений (1.5.2), (1.5.3) можно было бы записать уравнения, аналогичные (1.5.4), (1.5.5):

$$\frac{d\theta_e}{dt} + \sigma_{\theta_e} w = M_\theta + \frac{L}{c_p \bar{p}} M_{q_v} + \frac{1}{\rho} D_{\theta_e}, \quad (1.5.10)$$

$$\frac{d\theta_\ell}{dt} + \sigma_{\theta_\ell} w = M_\theta - \frac{L}{c_p \bar{p}} (M_{q_{c_w}} + M_{q_{r_w}}) + \frac{1}{\rho} D_{\theta_\ell}. \quad (1.5.11)$$

Величину Θ_e называют *эквивалентной потенциальной температурой*, а величину Θ_ℓ - *водной потенциальной температурой*. Формулы (1.5.6) и (1.5.7) дают приближенные значения для Θ_e и Θ_ℓ , соответствующие приближенному описанию фазовых переходов влаги выражениями M_φ ($\varphi = \theta, q_v, q_{c_w}, q_{r_w}$)⁶.

Ранние модели облачной конвекции без учета осадков основывались на трактовке Θ_e как консервативной величины в рамках уравнений мелкой конвекции и предположения, что $L/(c_p \bar{p}) = \text{const}$. Это давало возможность вместо трех уравнений (1.1.12) (для θ, q_v, q_{c_w}) интегрировать два уравнения вида (1.5.10), (1.5.4) (Матвеев, 1959; Огура, 1963; Орвилл, 1965, 1968; Амиров, 1968; Орвилл и Слоан, 1970; Штайнер, 1973). В дальнейшем при обращении к процессам глубокой конвекции данный подход уступил место вышеописанной более точной методике конденсационного приспособления. Новая попытка оперировать лишь консервативными величинами при расчете фазовых превращений связана с водной потенциальной температурой Θ_ℓ , эвристически использованной Амировым (1971) и систематически введенной в атмосферную термодинамику Бетсом (1973), в обоих случаях без рассмотрения осадкообразования. Преимущество Θ_ℓ

⁶ Систематическое рассмотрение и более выражение для эквивалентной потенциальной температуры имеется, например, у Холтона (1972) и Даттона (1976), а для водной потенциальной температуры - у Бетса (1973).

перед Θ_e как квазиконсервативной характеристики связано с рядом моментов, отмеченных Дирдорфом (1976) для случая $Q_{rw} = 0$. В частности:

1) в ненасыщенной атмосфере Θ_e превращается в основную термодинамическую характеристику;

2) в насыщенной атмосфере консервативность Θ_e выполняется с большой точностью, поскольку при подъеме насыщенной частицы относительный рост величины $L/(c_p \bar{p})$ составляет $\sim 4\%/км$, в то время как относительный рост Q_{cw} может значительно превосходить $100\%/км$;

3) интегрирование уравнений может вестись в терминах лишь двух характеристик, Θ_e и Q без решения вопросов, какая часть водяного пара сконденсировалась или воды - испарилась;

4) появляется возможность учета процессов конденсации/испарения в генерировании турбулентных потоков в рамках уже имеющейся методики.

Однако расчеты, произведенные Вильгельмсоном (1977), показали, что для насыщенной атмосферы и в отсутствие осадкообразования трактовка Θ_e как консервативной характеристики точна только для мелкой конвекции, а при рассмотрении процессов во всей тропопаузе может приводить к значительному перегреву частицы влажного воздуха, перемещающейся вверх. Наилучшую аппроксимацию точного уравнения обратимого влажно-адиабатического процесса дает, согласно расчетам той же работы, конденсационное приближение типа (1.5.2). Поэтому в модели глубокой конвекции, развитой Клемпом и Вильгельмсоном (1978а), предложен компромиссный подход: эквивалентная потенциальная температура трактуется как консервативная характеристика только при параметризации турбулентности, а при описании процессов, разрешимых на выбранной расчетной сетке, сохраняется неконсервативное представление. Другими словами, левая часть уравнения заимствуется из (1.5.2), а правая часть - из (1.5.10). На основе данной методики были успешно рассчитаны случаи сильных штормов (Клемп и др., 1981; Вильгельмсон и Клемп, 1981; Ротуно и Клемп, 1982; Рэй и др., 1982; Вильгельмсон и Клемп, 1983) и облачных кучевых ансамблей (Сунг и Огура, 1980; Сунг и Тао, 1980, 1984; Тао и Симпсон, 1984).

Одновременно школой Дирдорфа-Соммерия продолжалось усовершенствование методики учета фазовых превращений на основе сохранения водной потенциальной температуры как консервативной характеристики, т.е. использования уравнения (1.5.11) (Соммерия и Дирдорф, 1977; Редельспергер и Соммерия, 1981), что привело к репрезентативному описанию глубокой конвекции при параметрах сетки $\Delta x = \Delta y = 1$ км, $\Delta z = 400$ м (Редельспергер и Соммерия, 1982в).

Альтернативный подход к сохранению водной потенциальной температуры как консервативной характеристики и уравнения вида (1.5.11) в условиях глубокой конвекции был предложен Триполи и Коттоном (1981), которые ввели в качестве консервативной водо-ледяную потенциальную температуру

$$\Theta_{i\ell} = \Theta \left[1 + \frac{L(273K)(Q_{cw} + Q_{rw}) + L_i(273K)(Q_{ci} + Q_{ri})}{c_p \max(T, 253K)} \right]^{-1}$$

Очевидно данная характеристика с точностью до малых величин представляет собой водную потенциальную температуру Θ_e , эмпирически скорректированную в области

низких температур и обобщенную на случай учета твердой фазы. Тестовые расчеты, аналогичные тем, которые провел Вильгельмсон (1977), указали, что использование уравнения вида

$$\frac{d\Theta_{i\ell}}{dt} = \dots,$$

трактуемого $\Theta_{i\ell}$ как квазиконсервативную характеристику, приводит к результатам, сравнимым по точности с теми, которые дает использование уравнения с левой частью вида (1.5.2), позволяя вместе с тем избежать процедуры конденсационного приближения и учесть роль фазовых переходов в генерации турбулентности. Прогностические уравнения для водо-ледяной потенциальной температуры и общего влагосодержания реализованы в трехмерной модели облачности и мезометеорологических процессов университета штата Колорадо (Триполи и Коттон, 1982, 1986; Коттон и др., 1982).

В работе Пуантена (1984) предложены еще две квазиконсервативные термодинамические характеристики: влажно-эквивалентная потенциальная температура и влажно-эквивалентная энтальпия, каждая из которых в паре с общим влагосодержанием позволяет вести расчет фазовых превращений, минуя конденсационное приспособление. Сравнительные тестовые расчеты показали преимущество в точности обеих характеристик перед водо-ледяной потенциальной температурой. Автор отмечает целесообразность использования влажно-эквивалентной потенциальной температуры в негидростатических моделях, поскольку данная характеристика сохраняет гладкость при учете вертикальных ускорений. Мы не останавливаемся на этих переменных подробнее, поскольку в мезометеорологических моделях они еще не опробовались.

В плане задачи локального прогноза представляется, что существующий сегодня набор уже апробированных методов (более простая методика Клемпа-Вильгельмсона на основе эквивалентной потенциальной температуры и более громоздкие методы Дирдорфа-Соммерия и Триполи-Коттона на основе водной потенциальной температуры) достаточен для развития прогностических моделей ближайших поколений.

1.6. Учет орографии

Мезомасштабные орографические неоднородности являются тем физическим фактором, адекватный учет которого едва ли не прежде всех других требует отказа от гидростатического приближения. Не случайно исторически первыми исследованиями в динамической метеорологии, выполненными на основе негидростатических уравнений, были работы по моделированию подветренных горных волн (Лира, Кеней, Дородницын). Необходимость в негидростатических уравнениях возникает, во всяком случае, как только наклон горы становится не намного меньше 1 (Пилке, 1981)⁷. Лонг в работе 1954 года формулирует следующий критерий применимости гидростатического приближения при описании атмосферных процессов над горами: *толщина рассматриваемого атмосферного слоя должна быть мала по сравнению с радиусом кривизны рельефа* (см. Пилке, 1981, с. 222). Поучительно применить этот критерий к традиционному колоколообразному рельефу

$$z = a^2 b / (x^2 + b^2). \quad (1.6.1)$$

Имея в виду расчет атмосферных движений в слое толщиной 10 км, потребуем, чтобы минимум радиуса кривизны рельефа (1.6.1), $r(x)$, достигаемый при $x = 0$, составлял 100 км (для практического применения это требование слишком жестко, но представляет интерес принципиальная оценка). Примем $b = 10$ км - фактическая протяженность протяженность препятствия при этом составляет 60 км (30 км от подошвы горы до вершины). Тогда находим, что $r(0) \geq 100$ км, если высота $a^2/b \leq 500$ м, т.е. средний наклон такого препятствия (допускающего гидростатическое приближение) составляет 1/60.

Учет орографии в современных моделях осуществляется путем перехода к новой системе координат, в которой искривленная поверхность Земли становится координатной плоскостью. В негидростатических моделях (нередко и в гидростатических) в качестве такой системы обычно используется так называемая "орографическая" или "сигма Z" система координат (ξ, η, ζ), которая в случае, если расчетная область ограничена сверху плоскостью $Z = \text{const} = H$, имеет вид:

$$\xi = x, \eta = y, \zeta = \frac{z - \Gamma}{H - \Gamma} H, \quad (1.6.2)$$

где $z = \Gamma(x, y)$ - форма рельефа.

Преобразование (1.6.2) представляет собой частный случай широко распространенного в динамической метеорологии преобразования координат, при котором временная и горизонтальные координаты сохраняются, а вертикальная координата заменяется новой "обобщенной вертикальной координатой" (Касахара, 1974). Таковы, наряду с ζ -координатой (1.6.2), p -координата Сатклиффа и Элиассена, θ -координата Монтгомери (1937) и Старра (1946), σ -координата Филлипса (1957), а также различные комбинации этих координат (Аракава и Лэмб, 1977; Крайцберг, 1978).

Преобразование (1.6.2) эвристически использовалось еще в 60-х годах при численном решении задач мезометеорологии (Зейтунян, 1963), Касахара (1974) изучал его в контексте примитивных уравнений, а в работе Галчена и Соммервиля (1975) данное преобразование было рассмотрено как конкретный образец в контексте общего анализа замены независимых переменных в неупругих уравнениях Навье-Стокса. С тех пор это

⁷ Ниже мы укажем происхождение данной оценки.

преобразование широко вошло в практику гидродинамического описания мезометеорологических процессов над горами. Естественное обобщение (1.6.2) используется и в моделях, где расчетная область ограничена сверху незакрепленной поверхностью (Марер и Пилке, 1975; Марер и Пилке, 1977а,б; Мак-Найдер и Пилке, 1981).

Запись уравнений в координатах (ξ, η, ζ) осуществляется с помощью трех безразмерных коэффициентов: якобиана преобразования (1.6.2) G_0 , характеризующего высоту рельефа, и двух коэффициентов G_1 и G_2 , характеризующих наклон рельефа по осям X и Y , соответственно

$$G_0 = 1 - \frac{\Gamma}{H}, \quad G_1 = \left(\frac{\zeta}{H} - 1 \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}, \quad G_2 = \left(\frac{\zeta}{H} - 1 \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}. \quad (1.6.3)$$

Поскольку $G_0 \neq 0$, преобразование (1.6.2) обратимое. Компоненты горизонтальной скорости в новой системе координат по величине остаются прежними:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} = v,$$

а вертикальная скорость меняется:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{G_1 u + G_2 v + w}{G_0} \equiv \omega. \quad (1.6.4)$$

неупругие уравнения неразрывности и движения (1.2.3), (1.2.4) в орографических координатах принимают вид (в скалярной форме):

$$(G_0 \bar{\rho} u)_\xi + (G_0 \bar{\rho} v)_\eta + (G_0 \bar{\rho} \omega)_\zeta = 0 \quad (1.6.5)$$

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{C_p \bar{\theta}_{v\ell}}{G_0} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (G_0 \Pi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (G_1 \Pi) \right] = \frac{1}{\rho} D_u \quad (1.6.6)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{C_p \bar{\theta}_{v\ell}}{G_0} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (G_0 \Pi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (G_2 \Pi) \right] = \frac{1}{\rho} D_v \quad (1.6.7)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{C_p \bar{\theta}_{v\ell}}{G_0} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} - [\lambda \theta + g(0.61q_v - q_c - q_r)] = \frac{1}{\rho} D_w \quad (1.6.8)$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \eta} + \omega \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (1.6.9)$$

Внешний вид уравнений (1.2.5) и (1.2.6) сохраняется (с учетом нового содержания (1.6.9) оператора индивидуальной производной), только радиационный приток тепла в уравнении притока тепла (1.2.5) заменяется на

$$- \frac{1}{C_p G_0 \bar{\rho} \Pi} \frac{\partial F}{\partial \zeta}$$

Представление дивергенции турбулентных потоков D_ϕ в новых координатах, как и в исходных, будет рассмотрено в следующей главе. Во всяком случае, поскольку в выражения для D_ϕ участвуют вторые производные, для гладкости преобразования (1.6.2) необходимо, чтобы рельеф Γ обладал вторыми непрерывными производными.

Из (1.6.4), (1.6.6)-(1.6.8) может быть получено также уравнение для новой вертикальной скорости ω (турбулентные слагаемые и члены с параметром Кориолиса опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} - u^2 \left(\frac{G_1}{G_0} \right)_\xi - uv \left[\left(\frac{G_2}{G_0} \right)_\xi + \left(\frac{G_1}{G_0} \right)_\eta \right] - v^2 \left(\frac{G_2}{G_0} \right)_\eta - uw \left(\frac{1}{G_0} \right)_\xi - u\omega \left(\frac{G_1}{G_0} \right)_\xi - \\ - vw \left(\frac{1}{G_0} \right)_\eta - v\omega \left(\frac{G_2}{G_0} \right)_\xi + C_p \bar{\theta}_{v1} \left\{ \left(\frac{G_1}{G_0} \right) \Pi_\xi + \left(\frac{G_2}{G_0} \right) \Pi_\eta + \left[\frac{(1+G_1^2+G_2^2)}{G_0^2} \right] \Pi_\zeta \right\} - \\ - \frac{[\lambda\theta + g(0.61q_v - q_c - q_r)]}{G_0} = 0, \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

откуда видно, что приближение статики

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = \frac{G_0}{C_p \bar{\theta}_{v1}} [\lambda\theta + g(0.61q_v - q_c - q_r)],^8$$

вообще говоря, требует ограничений и на высоту, и на крутизну, и на кривизну рельефа (в частности, малости абсолютной величины коэффициентов G_1/G_0 , G_2/G_0 и их производных по ξ и η ⁹).

Вид уравнения неразрывности (1.6.5) указывает, что в новой системе координат роль плотности берет на себя произведение $(G_0 \bar{\rho})$. Это обстоятельство оказывается существенным при параметризации турбулентности над горами (см. § 2.3).

Из (1.6.5) - (1.6.10) находим, что уравнение (1.2.7) для восстановления давления приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \bar{\rho} C_p \bar{\theta}_{v1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (G_0 \Pi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (G_1 \Pi) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \bar{\rho} C_p \bar{\theta}_{v1} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (G_0 \Pi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (G_2 \Pi) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \bar{\rho} C_p \bar{\theta}_{v1} \left[G_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + G_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} + \frac{1+G_1^2+G_2^2}{G_0^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \right] \right\} = F, \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

где через F обозначены все слагаемые, не содержащие Π . Из вида слагаемых со старшими производными

⁸ Данная, более жесткая версия гидростатического приближения означает, что мы пренебрегаем ускорениями вдоль оси Z . Более мягкая версия состоит в пренебрежении ускорениями вдоль оси ζ , при сохранении ускорений вдоль осей ξ и η , частично включающих в себя ускорение вдоль оси Z (см. Вонг и Хейдж, 1983; Пилке и Мартин, 1983). Соответствующее, более полное уравнение гидростатики можно получить, сохраняя целиком слагаемое $\left[\frac{(1+G_1^2+G_2^2)}{G_0^2} \right] \Pi_\zeta$, которое в только что приведенном уравнении урезано до Π_ζ / G_0^2 .

⁹ Как видно из уравнения (1.6.10), исключение составляют случаи слабого ветра (например, ночью, в условиях сильной приземной инверсии), когда приближение статики может сохранять силу даже над сильно пересеченной местностью.

$$\bar{\rho} c_p \bar{\theta}_{v\ell} \left[G_0 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1 + G_1^2 + G_2^2}{G_0^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \zeta^2} + 2G_1 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi \partial \zeta} + 2G_2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \zeta} \right]$$

следует, что уравнение (1.6.11) сохраняет эллиптический вид при любой форме рельефа. Однако, численное интегрирование требует теперь применения итерационных методов по всем координатным направлениям (не забудем, что не только коэффициенты G_i , $i = 0, 1, 2$, но и $\bar{\rho}$ и $\bar{\theta}_{v\ell}$ зависят теперь от всех пространственных переменных; и краевые условия по вертикали также содержат теперь переменные коэффициенты).

В связи с известной громоздкостью уравнений (1.6.5) - (1.6.11) в мезометеорологическом моделировании находит применение еще одна, "простейшая" орографическая система координат (Ямада, 1981; Гэрет и Смит, 1984; Пененко и Алоян, 1985):

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z - \Gamma. \quad (1.6.12)$$

В настоящих лекциях данное преобразование заслуживает упоминания еще и потому, что оно используется в единственной в настоящее время негидростатической модели, работающей в полуоперативном режиме - упомянутой выше модели МСВ (Карпентер, 1979).

Для преобразования (1.6.12) имеем в этой системе координат

$$G_0 \equiv 1, \quad G_1 = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}, \quad G_2 = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}. \quad (1.6.13)$$

С учетом (1.6.13) уравнения движения, использованные в работе Карпентера (1979), сходны с (1.6.6), (1.6.7) и (1.6.10), где выражения для индивидуальной производной d/dt и вертикальной скорости ω по-прежнему приводятся в виде (1.6.9) и (1.6.4) (отличие уравнений, принятых в работе Карпентера (1979), состоит в том, что в них не произведено упрощений, связанных с представлением термодинамических полей в виде суммы фона и возмущений, а также в том, что в качестве фоновой принята адиабатическая стратификация $\bar{\theta} = \text{const}$). Что касается уравнения неразрывности (1.1.2), оно принято в полном виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} - \lambda_1 w + (\kappa - 1) \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \frac{1}{\theta_{v1}} \frac{d\theta_v}{dt} \right) = 0.$$

Хотя, таким образом, в основе модели МСВ лежит полная система уравнений, но численная методика здесь такова (Тэпп и Уайт, 1976; подробнее см. в главе 4), что, как и при интегрировании неупругих систем уравнений, предполагает на каждом шаге по времени решение эллиптического уравнения для Π . С этим и связан выбор преобразования (1.6.21) - благодаря тому, что в этом случае $G_0 \equiv 1$ и что $\bar{\theta} = \text{const}$, большое количество членов в уравнении, аналогичном (1.6.11), удается аппроксимировать неявно при сохранении прямого метода интегрирования по вертикальной координате.

Преобразование (1.6.12) по сравнению с (1.6.2) имеет очевидное достоинство простоты, экономя время и память ЭВМ и, как мы только что видели, давая преимущество в построении эффективных численных алгоритмов. Недостаток же его связан с выбором краевых условий на верхней границе расчетной области $\zeta = \text{const}$, которая в случае (1.6.12) повторяет форму рельефа, а в случае (1.6.2) совпадает с плоскостью $z = \text{const}$.

Пока мы довольствуемся упрощенными краевыми условиями, основанными на предположении о затухании тех или иных мезомасштабных возмущений с приближением к верхней границе (в работе Карпендера (1979) принято условие затухания возмущений в поле w), это различие двух преобразований несущественно. Но в ситуации, когда заметная часть энергии мезомасштабных возмущений переносится вверх за пределы расчетной области и на верхней границе требуется какая-либо разновидность условий открытых границ, искривленность верхней границы может оказаться существенным недостатком. Таким образом, можно думать, что необходимое условие применимости преобразования (1.6.12) - пологий рельеф местности. Максимальная крутизна рельефа, используемая в модели МСВ, составляет $\sim 1/75$ (Голдинг, 1984), т.е. допускает применение гидростатического приближения (см. оценку в начале настоящего параграфа). В этой связи отметим, что Пененко и Алоян (1985) используют преобразование (1.6.12) именно в гидростатической модели, а в негидростатической используют преобразование (1.6.2). Аналогично Ямада (1981) использует преобразование (1.6.12) в контексте гидростатических уравнений.

Кроме неортогональных орографических координатных систем в литературе изучалась и применялась ортогональная система, полученная вращением исходной системы (x, y, z) таким образом, чтобы плоскость (x, y) перешла в плоскость, касательную к поверхности горы в данной точке (МакНайдер, 1982; Гэррет, 1983; Пилке и др., 1985). Однако эта система рассматривалась лишь для гидростатических уравнений и рельефа с постоянным наклоном.

Упомянем в заключение еще об одной обобщенной вертикальной координате, переводящей поверхность Земли в координатную плоскость $-\sigma$ -координате. Полная система уравнений в σ -координатах так же, как и в p -координатах неоправданно громоздка. Фильтрованная неупругая ("квази-негидростатическая") система уравнений в σ -координатах, аналогичная системе в p -координатах, получена Миллером и Уайтом (1984). Недостаток этой системы тот же, что и системы в p -координатах: наличие быстрых волн Лэмба. Здесь этот недостаток усугублен тем, что даже в простейшем случае волны Лэмба не фильтруются надлежащим выбором краевого условия. В мезометеорологическом моделировании данная система до сих пор не использовалась.

Таким образом, "рабочими" методами учета орографии в мезометеорологическом моделировании и прогнозировании остаются в настоящее время (и, очевидно, останутся в моделях ближайших поколений) координатные преобразования вида (1.6.2) и (1.6.12). Выбор между ними связан с проблемой краевых условий на верхней границе расчетной области, которая пока не имеет общепринятого решения (см. ниже § 3.3).

Глава 2. Параметризация физических процессов подсеточного масштаба

2.1. Параметризация подсеточной конвекции

Конвекция трансформирует пространственно осредненные метеорологические поля посредством вертикального переноса тепла, влаги и импульса, а также за счет нагрева (охлаждения), возникающего в результате фазовых переходов атмосферной влаги (конденсации, испарения, плавления, замерзания). Все эти процессы являются крайне нелинейными и зависят сложным образом от крупномасштабного потока.

Тем не менее, начиная с работы Смагоринского (1956), в различных странах стали разрабатываться процедуры приближенного представления некоторых суммарных эффектов конвекции, за которыми постепенно установился термин «*параметризации кучевой конвекции*».

Процедуры параметризации кучевой конвекции преследовали две основные цели:
 ⇒ учесть приближенно конвективное перемешивание и конвективные осадки;
 ⇒ препятствовать образованию в численных моделях неустойчивой стратификации, которая может привести к вычислительной неустойчивости при использовании гидростатической системы уравнений.

В подавляющем большинстве случаев эти процедуры строились применительно к крупномасштабным гидростатическим моделям с горизонтальным шагом более 100 км. В этом случае характерные горизонтальные масштабы непосредственно разрешаемых движений и масштабы конвекции являются весьма различными. Это разделение пространственно-временных масштабов позволяет использовать с определенным основанием ряд упрощающих гипотез и понятий, таких как однородность конвективных облаков в пределах вычислительной ячейки, мгновенность или наперед заданную длительность конвективных процессов и т.д. На основании такого рода гипотез и данных о потенциальной неустойчивости, поступающих из прогностической схемы, строится приближенная модель конвективного облака или ансамбля кучевых облаков, решающая две отмеченные выше задачи. Практика использования процедур параметризации кучевой конвекции оказалась весьма полезной в задачах общей циркуляции атмосферы и численного прогноза в региональном масштабе (см., например, Херес, 1977).

Параметризация эффектов кучевой конвекции как функции разрешаемых моделью масштабов становится спорной при сетках с горизонтальным шагом порядка десятков километров, так как масштаб разрешаемых движений становится весьма близким к конвективному и большая часть упрощающих гипотез параметризации, основанная на значительных различиях в пространственно-временной структуре конвективных и непосредственно разрешаемых движений, становится мало оправданной. Поэтому Антсом (1983) высказывалось мнение, что в моделях с высоким разрешением, возможно, предпочтительней опустить концепцию параметризации кучевой конвекции в пользу явных описаний конденсации и испарения.

При рассмотрении вопроса о включении процедуры параметризации кучевой конвекции в мезомасштабную прогностическую модель необходимо исходить из конкретного выбора исходной системы уравнений, горизонтального шага сетки и используемой методики параметризации подсеточной турбулентности.

При использовании мезомасштабной гидростатической модели включение процедуры параметризации кучевой конвекции, по-видимому, целесообразно даже при сравнительно высоком пространственном разрешении вычислительной сетки, поскольку такая модель не в состоянии воспроизвести достаточно хорошо глубокую конвекцию, а

появляющаяся вертикальная неустойчивость температурной стратификации может вызвать вычислительную неустойчивость.

С параметризациями, применявшимися в гидростатических моделях на сетках с горизонтальным шагом менее 100 км, можно ознакомиться в работах Крайцберга и Перки (1978), Ниномия и Татсуми (1980), Фритша и Чэппела (1980а). Эксперименты по включению этих способов параметризации кучевой конвекции в соответствующие модели дали обнадеживающие результаты (см. цитировавшиеся выше работы, а также статью Фритша и Чэппела (1980б)).

При использовании для прогноза негидростатической модели применение процедуры параметризации кучевой конвекции становится действительно спорным, поскольку исходные уравнения обеспечивают гораздо более полный учет сил плавучести, нежели приближенные соотношения в известных способах параметризации кучевой конвекции, а при использовании соответствующих методик параметризации микрофизики облаков - гораздо более точный расчет конвективных осадков. Если при этом плавучесть входит в параметризацию подсеточной турбулентности, то эффекты конвекции оказываются учтенными и на масштабах, не разрешаемых данной сеткой. Таким образом, для негидростатических мезомасштабных моделей, где кучевая конвекция может воспроизводиться непосредственно, введение её параметризации представляется менее обоснованным, чем в случае гидростатических моделей. Приближенное представление подсеточной конвекции будет неизбежно убирать элемент конвективной неустойчивости из модели, поэтому негидростатическая модель с процедурой параметризации кучевой конвекции будет автоматически лишена возможности воспроизведения конвективных систем, разрешаемых данной сеткой. Если шаг сетки настолько мал, что могут быть воспроизведены непосредственно крупные ансамбли (скопления) кучево-дождевых облаков (с горизонтальным размером $\approx 40-50$ км), то производить параметризацию кучевой конвекции, по-видимому, не следует. Если шаг сетки в негидростатической модели настолько велик, что воспроизвести даже крупные массивы конвективной облачности не представляется возможным, то введение процедуры параметризации кучевой конвекции может оказаться полезным.

В настоящее время еще не выработалось единого подхода по вопросам применения параметризаций кучевой конвекции в мезомасштабных моделях. Так, например, в прогностически ориентированной негидростатической модели Метеорологической службы Великобритании с горизонтальным шагом сетки 15 км (Голдинг и Махин (1984)) используется модификация процедуры параметризации кучевой конвекции, предложенной в работе Фритша и Чэппела (1980), в то время как в сходной негидростатической модели Гидрометцентра СССР с шагом сетки 10 км (Кисельникова и др. (1984)) такого рода процедура отсутствует.

Опыт по применению параметризаций кучевой конвекции в мезомасштабных моделях в настоящее время еще очень мал, чтобы высказываться совершенно категорично в пользу их включения или исключения из моделей. Из общих соображений совершенно ясно лишь то, что с переходом к негидростатическим моделям и уменьшением пространственного шага сетки нужда в процедурах параметризации кучевой конвекции отпадает.

2.2. Параметризация атмосферной турбулентности

Согласно современным представлениям (Антс и др., 1985; Лилли, 1986) устойчивое развитие многих мезомасштабных циркуляций, в том числе и наиболее опасных, а, следовательно, возможность их эффективного гидродинамического описания и предсказания, обусловлено двумя факторами:

- ⇒ спецификой внутренней динамической структуры этих процессов (высоким уровнем спиральности, подавляющим каскадную передачу энергии на инерционном участке спектра и препятствующим диссипации кинетической энергии турбулентности;
- ⇒ локальными устойчивыми вынуждающими воздействиями на нижней границе области, связанными с неоднородностью подстилающей поверхности - орографической, термической, аэродинамической (шероховатость), отражательной, тепло- и влагопроводящей.

Учет неоднородности подстилающей поверхности оказывается, следовательно, одним из первостепенных условий успешности мезометеорологического прогнозирования. Голдинг и Мэхин (1984), работающие с единственной пока полуоперативной негидростатической схемой мезомасштабного прогноза, отмечают, что наилучших результатов прогноза можно ожидать в ситуациях, обусловленных орографическими неоднородностями. Об орографических воздействиях как факторе, повышающем предсказуемость, говорят также на материале той же прогностической схемы Броунинг и Голдинг (1984). Но взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью совершается, как известно, через турбулентные процессы в планетарном пограничном слое (ППС). Таким образом, адекватное описание комплекса «подстилающая поверхность- атмосферная турбулентность» - необходимый элемент схемы гидродинамического локального прогноза.

Ряд фактических иллюстраций содержится в обзорной статье Антса (1983). Антс и Кайзер (1979) нашли, что при прогнозе на сутки по 7-уровневой гидростатической модели на сетке с шагом 60 км с учетом и без учета приземного трения минимум давления в циклоне различается на 5-20 гПа. Лесли (1980) прогнозировал на сутки развитие теплых циклонов в северной Австралии, с одной стороны, - по 6-уровневой модели без учета теплового баланса на границе «воздух-почва», с другой стороны, - по аналогичной 7-уровневой модели с вдвое улучшенным разрешением в нижнем слое ($1 \geq \sigma \geq 0,7$) и с учетом теплового баланса. В последнем варианте прогноз оказался лучше в 35 случаях из 37, а средняя по всем случаям ошибка в предсказании минимума давления упала с 2.5 гПа до 0.9 гПа. Дополнительные эксперименты указали, что успех связан именно с одновременным введением обеих модификаций - теплового баланса и повышенного вертикального разрешения в пределах ППС. Бенжамен (частное сообщение, Антс (1983)) приводит пример прогноза на 12 часов штормовой ситуации (поданным SESAME-I) на сетке с шагом 100 км с учетом и без учета приземных турбулентных потоков: различие в приземном давлении достигает 3 гПа, в температуре на нижнем расчетном уровне - 8 °К, в массовой доле влаги на том же уровне - 4г/кг. Различия того же порядка имели место и в других прогнозах по данным SESAME-I и SESAME-IV.

Цель настоящего параграфа - дать картину существующих сегодня методов описания атмосферной турбулентности в плане их применения в схемах локального прогноза погоды. С аналитической точки зрения это значит указать методы представления

слагаемых D_ϕ системы уравнений (1.1.1)-(1.1.4) и её последующих разновидностей через зависимые и независимые переменные этой системы в тех слоях атмосферы, где эта система применяется для описания мезомасштабных процессов, и указать заменяющие эту систему соотношения в других слоях.

Освещая данный круг вопросов, мы не будем ограничивать себя только тем, что сегодня фактически реализовано в тех или иных конкретных моделях, но учтем весь материал, так или иначе апробированный и доступный для реализации на современных ЭВМ. Это позволит рассмотреть вопрос систематически, переходя от нижележащих слоев атмосферы к вышележащим.

На рис. 2.1 изображен схематически разрез нижней атмосферы применительно к дифференциации методов описания турбулентных процессов. Прокомментируем представленную здесь структуру в целом.

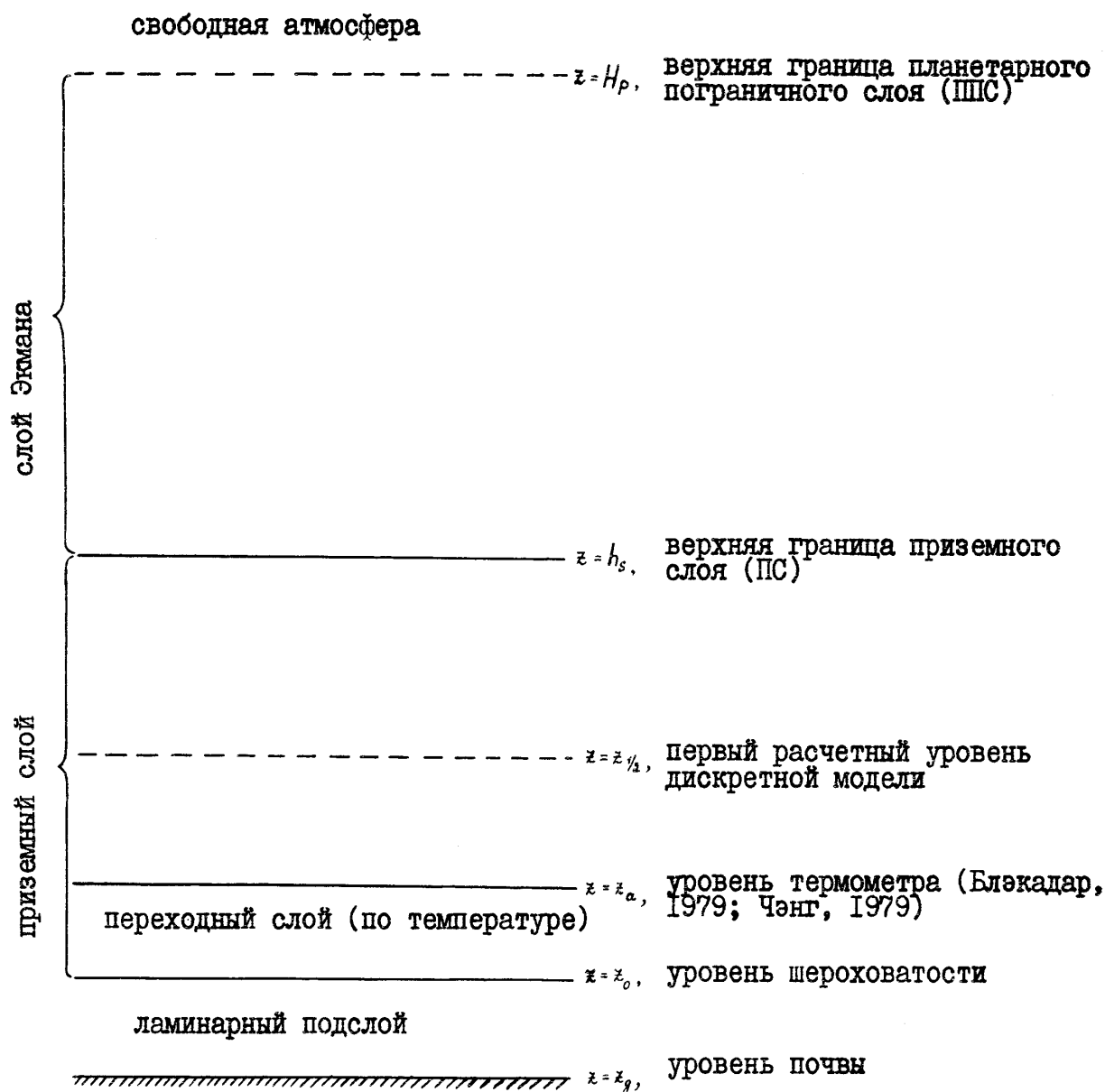


Рис 2.1. Схема строения нижнего слоя атмосферы

Наиболее универсальным элементом этой структуры является наличие приземного слоя (ПС) постоянных турбулентных потоков. Данный слой особенно развит в дневных условиях неустойчивой стратификации, когда его толщина может достигать 100 м и более. В ночных условиях устойчивой стратификации толщина ПС убывает до 10 м и менее (Вингаар, 1985). С точки зрения гидродинамического описания, характерной чертой ПС является безусловное преобладание теории подобия над другими методами параметризации. Напротив, в вышележащем переходном слое (или слое Экмана) методы теории подобия играют в настоящее время второстепенную роль, уступая так называемым К-параметризациям, особенно при детальном описании ППС. Далее, само представление о слое Экмана конечной толщины, подразумевающее наличие верхней границы ППС, выше которой турбулентности «нет», не бесспорно. Это представление мотивировано главным образом для дневных условий и в литературе служит предметом дискуссии (Дирдорф и Мэрт, 1982). Применительно к задаче локального прогноза, может быть, предпочтительнее другая концепция (Блэкэдар, 1979), согласно которой вся атмосфера представляет собой, в некотором смысле пограничный слой (подробнее см. ниже). Наконец, как изображено на рис.2.1, в пределах ПС, на основе тех или иных признаков, обособляются внутренние слои со своими методами параметризации в каждом. Мы коротко опишем также и эти методы.

Приземный слой

Между поверхностью Земли, z_g , и уровнем шероховатости, z_0 , располагается *ламинарный подслой*, в котором господствуют силы молекулярной вязкости. Что касается распределения скорости и давления (функции Экснера), наличие этого подслоя обычно не учитывают, принимая, что всюду в нем

$$u = v = w = 0$$

и что
$$P(z_0) = P(z_g), \quad \Pi(z_0) = \Pi(z_g).$$

Во многих моделях ламинарный подслой не учитывают также и для полей температуры и влажности, принимая

$$\Theta(z_0) = \Theta(z_g), \quad Q_v(z_0) = Q_v(z_g). \quad (2.2.1)$$

Однако для этих величин имеется соотношение между их значениями при $z = z_g$ и $z = z_0$ (Оуэн и Томсон, 1963), и при более детальном мезометеорологическом моделировании их учитывают, принимая (Дирдорф, 1974a; Пилке и Марер, 1975; Марер и Пилке, 1976, 1977a,б; Марер, 1982)

$$\begin{aligned} \Theta(z_0) - \Theta(z_g) &= 0,0962(\theta_*/K_0)(u_* z_0/v)^{0,45}, \\ Q_v(z_0) - Q_v(z_g) &= 0,0962(q_*/K_0)(u_* z_0/v)^{0,45}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где u_* , θ_* , q_* - масштабы скорости, температуры и влажности в теории подобия для ПС, о которых будет сказано ниже. Необходимость в тех или иных соотношениях между значениями Θ и Q_v при $z = z_g$ и $z = z_0$ связана с тем, что балансы тепла и влаги на

поверхности земли формулируются в терминах $\Theta(z_g)$ и $Q_v(z_g)$ (см. § 3.4), а выражения для вертикальных турбулентных потоков в ПС, согласно теории подобия, - в терминах $\Theta(z_0)$ и $Q_v(z_0)$. В результате без привлечения соотношений (2.2.1) или (2.2.2) система соотношений оказывается незамкнутой.

Высота уровня шероховатости, $z = z_0$, характеризует аэродинамические свойства подстилающей поверхности и изменяется от 0,001 см (гладкая ледяная поверхность) до 1-3 м (высокая городская застройка). Конкретное значение z_0 над водной поверхностью определяют по формуле Чарнока (1955)

$$z_0 = C_0 u_*^2 / g, \quad (2.2.3)$$

где C_0 - коэффициент, который оценивают по данным наблюдений для разных ситуаций весьма различно - в диапазоне 0,008-0,05 (Дикон и Уэбб, 1962; Ву, 1969, 1982; Хикс и др., 1977)¹⁰. В мезометеорологических моделях обычно C_0 принимают равным 0,032 (Пилке, 1974а; Марер и Пилке, 1976, 1977а, б) или 0,035 (Голдинг и Мэхин, 1984)¹¹ с дополнительным ограничением (Кларк, 1970)

$$z_0 \geq 0,0015 \text{ см}. \quad (2.2.4)$$

Над сушей величину z_0 определяют из таблиц, составленных по данным измерений, по построенным на их основе эмпирическим графикам и т.п. (Пилке, 1981; Голдинг, 1986). Для не слишком высокой растительности в логарифмических координатах z_0 в среднем линейная функция высоты (Розенберг, 1974). В условиях орографической неоднородности величину z_0 , следуя Леттау (1969), нередко определяют по эмпирической формуле как долю от высоты орографии или городской застройки.

Выражения (2.2.3) и (2.2.4) непосредственно служат для описания потока импульса. Шероховатости для описания потоков тепла и влаги $z_{0\theta}$ и z_{0q} в общем случае даются выражениями (Свердруп, 1951; Шепард, 1958)

$$z_{0\theta} = \frac{\nu_\theta}{(K_\theta u_*)}, \quad z_{0q} = \frac{\nu_q}{(K_q u_*)},$$

где ν_θ и ν_q - коэффициенты молекулярной диффузии для тепла и влаги. В мезомасштабных моделях до настоящего времени чаще всего принимают $z_{0\theta} = z_{0q} = z_0$, но при детальном моделировании с нижним расчетным уровнем на высоте 1-2 м и менее (например, Ямада, 1979, 1981, 1982) используют соотношения (Оуэн и Томсон, 1963; Гэррет и Хикс, 1973):

$$\ln(z_0/z_{0\theta}) = 0,2(30 u_* z_0/\nu)^{0,45} (\nu/\nu_\theta)^{0,8},$$

$$\ln(z_0/z_{0q}) = 0,2(30 u_* z_0/\nu)^{0,45} (\nu/\nu_q)^{0,8}.$$

¹⁰ Зависимость (2.2.3) относится к режимам не слишком слабых ветров («вполне шероховатое обтекание», подробнее см. Гэррет и Хикс, 1973; Казаков и Лысоков, 1982).

¹¹ В последней модели значение C_0 в настоящее время принято равным 0,0185 (Голдинг, 1986).

Если покрытие таково, что на высоте z_0 воздушный поток уже заметно турбулизирован, вводится поправочная величина d , «называемая «высотой вытеснения», которую также принимают различной для разных типов покрытия и определяют по таблицам, эмпирическим зависимостям и графикам. Как и z_0 , в логарифмических координатах величина d в среднем является линейной функцией высоты растительного покрова (Розенберг, 1974). Для высокой растительности величина d заключена обычно между половиной и целой высотой растительности и изменяется от нескольких сантиметров (трава) до 20 м (высокий лес) (Оук, 1978). Сравнительно с величиной z_0 , значение d обычно в несколько раз больше (среднее соотношение $d = 4z_0$). Учет d заключается в том, что z_0 отсчитывают от высоты $z = d$, а в выражениях для универсальных функций Φ и ψ (см. ниже) вместо z фигурирует «эквивалентная высота» ($z - d$). Согласно Хинксу и др. (1979), аналогично параметру шероховатости и высоту вытеснения следует принимать различной для потоков импульса, тепла и влаги.

Неоднородность подстилающей поверхности по её шероховатости и высоте вытеснения (как, впрочем, и остальных характеристик) приводит к формированию внутренних пограничных слоев, влияющих на циркуляционный режим в нижней тропосфере. В мезометеорологической литературе учет этих явлений осуществлялся неоднократно при моделировании бриза, городского острова тепла, горных циркуляций (Пилке, 1974а; Пилке и Марер, 1975; Физик, 1976; Вукович и др., 1976; Марер и Пилке, 1976, 1977 а,б; Зорбиан и Ульяч, 1982; Ивануй и Мершич, 1982; Хьельмфельт, 1982; Чэнг, 1982; Сегал и др., 1982). Учет шероховатости над водоемами согласно (2.2.3), (2.2.4) - общепринят, а переменная шероховатость суши учитывается реже, хотя изменчивость z_0 над сушей выше, чем над водой. Характерный диапазон изменения z_0 над сушей в мезометеорологических моделях при прогностических схемах составляет от 1 см до 1 м. Ло (1977) в рамках двумерной стационарной задачи нашел, что резкое изменение шероховатости и высоты вытеснения могут генерировать вертикальную скорость, достигающую 25% скорости натекающего потока.

Концепция параметра z_0 , как она фигурирует в теории подобия для ПС и используется в большинстве моделей, предполагает однородную подстилающую поверхность. В условиях выраженной неоднородности вводят среднюю «эффективную шероховатость» (Найштадт, 1978; Бельяр, 1982). Таблицу эффективных шероховатостей для различных типов местности приводят, например, ван Ульден и Хольтслэг (1985). В случае, если эффективная шероховатость используется в контексте теории подобия, физически адекватных результатов можно ожидать лишь при $z > 2\delta$, где δ - высота основных препятствий (Бельярд, 1982), а для расчета потоков при меньших z теория подобия для ПС должна быть модифицирована (Бельяр и др., 1983).

Другой подход к выбору параметра z_0 - в зависимости от геострофического коэффициента трения $\left(u_* / V_G\right)^2$ (здесь V_G - скорость геострофического ветра на верхней границе ППС) - а также оценка z_0 в условиях холмистой местности содержится в работе Смита и Карсона (1977).

Методика оценки шероховатости и высоты вытеснения над высокой растительностью, основанная на сравнительно новых и более принципиальных физических интерпретациях этих параметров, и освещение ряда смежных вопросов имеется в работе де Брюна и Мура (1985).

Выше уровня $z = z_0$ располагается собственно ПС, в котором вертикальные турбулентные потоки определяются на основе теории подобия. Это традиционное положение получило дальнейшее уточнение в работе Блэкэда (1979), указавшего, что только поле скорости подчиняется теории подобия вниз вплоть до уровня $z = z_0$, а в поле температуры имеется тонкий слой, примыкающий к уровню $z = z_0$, в котором совершается переход от режима, определяемого радиационными процессами (в нижней части слоя), к режиму, определяемому турбулентными процессами (в верхней части слоя). Отвлекаясь от суточных колебаний верхней границы этого слоя $z = z_a$, Блэкэдар отождествляет z_a с уровнем метеорологической будки и условно принимает $z_a - z_0 = 1$ м. Уравнение для эволюции «приземной» температуры $\Theta_a = \Theta(z_a)$ сформулировано Блэкэдаром применительно к ночным условиям (устойчивая стратификация). Чэнг (1979) обобщил это уравнение на случай произвольной стратификации (уровень z_a Чэнг определяет как удвоенную высоту растительности). Роль величины Θ_a заключается в том, что она используется вместо $\Theta(z_0)$ в выражениях теории подобия для масштаба температуры и вертикального потока тепла (см. ниже уравнения (2.2.7) и (2.2.8)). Тем самым уравнение для эволюции Θ_a , балансы тепла и влаги в почве (см. § 3.4), уравнения теории подобия (2.2.7), (2.2.8) и соотношения (2.2.1) или (2.2.2) образуют сцепленную систему (методика решения системы такого вида для случая (2.2.1) приведена у Блэкэда). Эффект от учета Θ_a тестирован в указанных работах Блэкэда (прогноз на ночь) и Чэнга (прогноз на сутки) по материалам наблюдений в О'Нейле (Небраска) 1953 года (Леттау и Дэвидсон, 1953) и найден значительным: разность $(\Theta_a - \Theta(z_g))$ в течении суток может меняться от (-10К) днем до 5К ночью в весьма разнообразных режимах.

При $z > z_0$ (или $z > z_a$ для температуры) расчет ведется на основе системы (1.1.1)-(1.1.4), и возникает проблема параметризации вторых моментов

$$\overline{u'_i \varphi'}, \quad \varphi = u_j, \theta, q_v; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.2.5)$$

поскольку слагаемые D_φ в этих уравнениях имеют вид

$$D_\varphi = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u'_j \varphi'}); \quad \varphi = u_i, \theta, q_v; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2.6)$$

В соотношениях (2.2.6) предполагается суммирование по повторяющемуся индексу.

Основой определения вторых моментов для ПС в современных моделях остается как уже отмечалось, теория подобия Монина-Обухова (1953, 1954), согласно которой в приземном слое

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_3} &= -c_D (u^2 + v^2)^{1/2} u_i; \quad c_D = 1/\Phi^2; \quad i = 1, 2 \\ \overline{q' u'_3} &= -c_H (u^2 + v^2)^{1/2} \Delta F; \quad c_H = 1/(\Phi \Psi); \quad f = \theta, q_v, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

а масштабы u_* (скорость трения), θ_* (поточковая температура) и q_* равны

$$u_* = K_0 (u^2 + v^2)^{1/2} / \Phi ;$$

$$f_* = K_0 \Delta F / \Psi, \quad f = \theta, q_v. \quad (2.2.8)$$

В (2.2.7) и (2.2.8) ΔF - разность между значениями величины F на уровнях $z = z_0$ или $z = z_a$ и данном уровне z , который будем обозначать как $z_{1/2}$, а Φ и Ψ - универсальные функции двух безразмерных аргументов: $z_{1/2}/z_0$ (для температуры θ по Блэкэдару - $z_{1/2}/z_a$) и ζ . При данном $z_{1/2}$ значение первого аргумента дается непосредственно или (в случае $z_{1/2}/z_a$) связывает уравнение (2.2.9) (см. ниже) с уравнением для Θ_a . Значение второго аргумента $\zeta = z_{1/2}/L$ (L - масштаб длины Монина-Обухова), должно быть найдено как решение уравнения

$$\zeta = Ri_B \frac{\Phi^2}{\Psi}, \quad Ri_B = \frac{g z_{1/2} \Delta \Theta}{(u^2 + v^2) \Theta}, \quad (2.2.9)$$

где u, v, Θ в выражении для коэффициента уравнения, массового числа Ричардсона Ri_B вычисляются $z = z_{1/2}$. Различным вариантам аналитических представлений функций Φ и Ψ посвящена большая литература (Монин и Обухов, 1954; Чарнок, 1967; Свибэнк и Дайер, 1967; Дайер, 1967; Паульсон, 1970; Уэбб, 1970; Дайер и Хикс, 1970; Бузингер и др., 1971; Дайер, 1974; Никерсон и Смайли, 1975; Хикс, 1976; Яглом, 1977; Казаков и Лазриев, 1978; Вайринга, 1980а,б; Дайер и Бредли, 1982; Уэбб, 1982; ван Ульден и Хольтслэг, 1985). Решение уравнения (2.2.9) в одних пределах изменения ζ дается явно, а в других - там, где это уравнение трансцендентно, - ищется приближенно: итерациями или по номограммам или интерполяцией по заранее табулированным таблицам или по приближенным аналитическим формулам (Физик, 1976; Казаков и Лазриев, 1978; Луи, 1979; Каплан и др., 1982; Голдинг и Мэхин, 1984). Формулы, аналогичные (2.2.7)-(2.2.8), могли бы быть записаны для жидкой и твердой фаз воды. До сих пор в мезометеорологических моделях таких расчетов не проводилось, но в моделях (Дирдорф, 1980е; Ямада, 1979, 1981), оперирующих квазиконсервативными переменными Θ_i и Q_i (см. § 1.5 при $Q_{r_w} = 0$), соотношения теории подобия записываются для этих переменных и тем самым учитывается жидкая облачная влага.

Приведенная методика пренебрегает ролью стратификации атмосферного пара (Q_v) в генерации турбулентности. При учете этого фактора уравнение (2.2.9) переходит в

$$\zeta = Ri_B (1 + I) \frac{\Phi^2}{\Psi}, \quad I = 0,61 \frac{T q_*}{\theta_*} = 0,61 \frac{T \Delta Q_v}{\Delta \Theta} \quad (2.2.10)$$

По теоретическим оценкам, $|I| \sim 0.1$, однако, данные измерений указывают значительно большие величины $|I|$, при которых учет данного параметра становится суще-

ственным: среднее значение I для случаев $I > 0$ составляет 0.7, а для случаев $I < 0$ в умеренных широтах летом - (-0.4). По данным экспедиции ГГО 1961 года, доля ситуаций, в которых $|I| > 1$ - когда учет стратификации влажности становится важнее, чем учет стратификации температуры, - составляет 18%.

Теория подобия применяется для расчета приземных турбулентных потоков в большинстве мезометеорологических моделей с детальным описанием ППС, а также нередко и в моделях с грубым (~ 0.5 км) разрешением по вертикали. Целесообразность её использования в негидростатических схемах локального прогноза не вызывает сомнений. Из выражений (2.2.5)-(2.2.10) видно, что практическая реализация теории подобия в прогностической модели сводится к расчету Ri_v по данным, имеющимся в модели, и к решению уравнения (2.2.9) или (2.2.10). Экономичную и адекватную (с одной стороны, рекомендациям экспериментальных исследований, а с другой стороны, - наличию «температурного подслоя» ($z_a - z_0$)) методику реализации обоих этапов предложил Вэнг (1981) применительно к двум наиболее употребительным представлениям Φ и Ψ - Бузингера (Бузингер и др., 1971; Бузингер, 1973) и Дайера-Хикса (Дайер и Хикс, 1970; Дайер, 1974; Хикс, 1976). Методика апробирована на данных измерений в Керанге (Австралия, 1964), Канзасе (1968) и Миннесоте (1973).

Соотношения теории подобия позволяют рассчитать величины только вертикальных турбулентных потоков. Привлекая упрощенную систему алгебраических соотношений для вторых моментов, Мэнтон и Коттон (1977а) предложили выражения для всех вторых моментов (2.2.5), участвующих в системе (1.1.1) - (1.1.4), через моменты (2.2.7). Полученные выражения в той же работе апробированы на натуральных данных, а затем были использованы в мезомасштабных моделях, развитых Триполи и Коттоном (1980, 1982).

Планетарный пограничный слой и свободная атмосфера

Описание турбулентности за пределами ПС отличается большим, чем в ПС, разнообразием не только конкретных формулировок, но и принципиальных подходов. Мы обсудим только «К-параметризации», выражающие турбулентные напряжения и потоки с помощью коэффициентов обмена, поскольку этот подход до настоящего времени безусловно преобладает и очевидно останется преобладающим в моделях ближайших поколений (из методов, не использующих коэффициенты обмена, отметим параметризацию Чэнга (1979) - процедуру приспособления на основе сопоставления чисел Ричардсона в каждой паре смежных слоев модели).

Все К-параметризации в методическом отношении распадаются на три класса:

- 1) эмпирические одномерные формулировки, адаптированные к экспериментальным данным;
- 2) формулировки, которые могут быть аргументированы, исходя из трехмерной системы уравнений для вторых моментов;
- 3) гибридные способы, т.е. способы из первого класса, усовершенствованные за счет привлечения уравнений для вторых моментов, и способы из второго класса, существенно модифицированные эвристически.

Данная классификация условна, но она упорядочивает многочисленные способы в отношении их теоретической и/или экспериментальной обоснованности, а также и хронологически.

Эмпирические К-параметризации (одни из лучших обзоров этих параметризаций дан Блэкэдаром, 1979) рассматривают только вертикальные (осредненные по x , y) напряжения и потоки, полагая

$$\overline{w' \varphi'} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.2.11)$$

Здесь, в свою очередь, имеется два подкласса представления K :

- ⇒ представления, в которых зависимость от координаты z дана явно,
- ⇒ представления, в которых K явно зависит только от искомых величин и уже через них неявно от z .

Известный образец явной параметризации - формула О'Брайена (1970), представляющая K в виде кубического полинома с заданными значениями K и $\partial K/\partial z$ на верхних границах ПС (h_s) и ППС (H_p), причем $\partial K/\partial z = 0$ при $z = H_p$. Значения K и $\partial K/\partial z$ при $z = h_s$ дает теория подобия для ПС (отдельно для импульса и тепла), значение $K(H_p)$ обычно принимают равным заданной постоянной ($\sim 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ сек}^{-1}$), а высоту ППС, H_p , либо также фиксируют, либо определяют из дополнительного диагностического или прогностического уравнения. Такие уравнения предложены в ряде работ как для нейтральной и неустойчивой стратификации (Блэкэдар и Тенникс, 1968; Сталл, 1976; Тенникс и Драйдонкс, 1981; Драйдонкс, 1982), так и для устойчивой стратификации (Дирдорф, 1972б; Шмеда, 1979; Мэрт, 1981; Найштадт и Тенникс, 1981; Ветцель, 1982; Найштадт, 1984 а,б; ван-Ульден и Хольтслэг, 1985). В мезометеорологических моделях чаще других использовалось прогностическое уравнение для высоты H_p неустойчивого ППС, предложенное Дирдорфом (1974а). Профиль О'Брайена многократно апробировался в мезометеорологическом моделировании как с заданным H_p (Сасамори, 1970; Пилке, 1974а; Борнштейн, 1975; Никерсон, 1979), так и в сочетании с прогнозом H_p (Пилке и Марер, 1975; Марер и Пилке, 1975, 1976, 1977а,б; Билленштайн, 1980; Мак-Найдер и Пилке, 1981; Хьельмфельт, 1982; Сегал и др., 1982). Другое явное выражение для K предложено Широм и Ши (1974).

Явные K -формулы экономичны, удобны и будучи применяемы в ситуациях, адекватных физическим предпосылкам, на которых они основаны, гарантируют репрезентативные в среднем результаты. Но с точки зрения специфики локального прогноза им свойственен ряд недостатков:

- 1) применимость данных формул ограничена ППС, тогда как область локального прогноза должна включать тропосферу, в а районе тропопаузы турбулентность нередко не менее активна, чем в ППС (Шапиро, 1980; Андрэ, 1983);
- 2) применение данных формул сопряжено с априорными допущениями, например, о величине H_p и/или h_s (в частности, Пилке, 1974а; Пилке и Марер, 1975; Марер и Пилке, 1975, 1976, 1977а,б; Мак-Найдер и Пилке, 1981, - следуя Блэкэдару и Тенниксу (1968), принимают $h_s = \frac{H_p}{25}$). Эти допущения могут варьироваться и оправдывать себя применительно к отдельным расчетам, но в контексте схемы оперативного прогноза они менее уместны;
- 3) сходная потребность «адаптации» к специфике конкретного процесса возникает не только в отношении параметров внутри формулы, но и в отношении методики в целом. Так, Мак-Найдер и Пилке (1981) принимают для неустойчивой

стратификации явное представление (2.2.14) - (2.2.15), а для устойчивой - неявное представление (2.2.18) (см. ниже). Необходимость варьировать формулы и/или методику для расчета коэффициента турбулентности - результат невысокой чувствительности априорно задаваемых профилей $K(z)$ к структуре (и прежде всего к устойчивости) осредненного потока;

- 4) Фиксированная зависимость $K(z)$ исключает адекватное описание внутренних пограничных слоев, возникающих в атмосфере вследствие неоднородностей подстилающей поверхности и определяющих особенности местных циркуляций.

Неявные эмпирические формулировки соотносят величину K не с высотой z непосредственно, а со значениями искоемых функций и их производных при данном z . Все эти формулировки имеют вид:

$$K = l^2 (u_z^2 + v_z^2)^{1/2} f(Ri),$$

$$Ri = \frac{g}{\Theta_{v,l}} \frac{\partial \Theta_{v,l}}{\partial z} / (u_z^2 + v_z^2), \quad (2.2.12)$$

отличаясь видом универсальной функции f и выражением для масштаба турбулентности l , характеризующего масштаб энергетически преобладающих турбулентных вихрей. Выражение для l формулируют, исходя из того, что при малых z $l \sim k_0 z$, а при больших z $l \sim \text{const.} = l_\infty$:

$$l = \frac{k_0 z}{\left[1 + (k_0 z)/l_\infty\right]}. \quad (2.2.13)$$

Величину l_∞ задают по-разному: $l_\infty = 70$ (Мак-Найдер и Пилке, 1981), $l_\infty = 0,00027 V_G / f$ (Блэкэдар, 1962), $l_\infty = 0,0063 u_* / f$ (Блэкэдар, 1979) и т.д. Формулировка (2.2.13) - наиболее распространенная в мезометеорологических моделях (Ли и Ольф, 1974; Гутман и Торранс, 1975; Мак-Найдер и Пилке, 1981, 1984 и т.д.). К обсуждению величины l мы вернемся ниже, в другом контексте.

Выражения для функции $f(Ri)$ также многочисленны. Следующая формулировка (Блэкэдар, 1979) принадлежит к числу наиболее апробированных на материалах наблюдений (Пановски и др., 1960; Дайер, 1974):

$$f(Ri) = \begin{cases} (1 - 18 Ri)^{1/2}, & \text{если } Ri \leq 0 \\ (1 - 5 Ri)^2, & \text{если } Ri \geq 0 \end{cases} \quad (2.2.14)$$

К формулировке этого рода примыкает и следующая зависимость $f(Ri)$, полученная Блэкэдаром (1978) на основе уравнений для вторых моментов, но в рамках гипотезы одномерной турбулентности

$$f_m = (1 - 21 Ri)^{1/2}, \quad f_h = (1 - 87 Ri)^{1/2}, \quad \text{если } Ri \leq 0$$

$$f_m = f_h = 1.1(1 - 5 Ri), \quad \text{если } 0 \leq Ri \leq 0.2$$

$$f_m = f_h = 0, \quad \text{если } Ri \geq 0.2 \quad (2.2.15)$$

Здесь f_m и f_h - зависимости, используемые в (2.212) для расчета потоков импульса и тепла и скалярных субстанций, соответственно. Другое представление $f(Ri)$, основанное на одномерной трактовке уравнений для вторых моментов, предложено Меллором и Ямадой (1974) и на основе асимптотических рассмотрений - Луи (1979). Параметризация Блэкэда (2.2.11), (2.2.12), (2.2.15), включенная в его собственную модель ППС, апробировалась на данных эксперимента в О'Нейле в условиях ночного ППС (Блэкэдар, 1979).

В (2.2.15) в качестве критического числа Ричардсона Ri_c , разделяющего турбулентный и ламинарный режимы, принята величина 0.2, близкая к указаниям теории. Данные наблюдений, однако, более разноречивы, и в связи с этим, а также с учетом погрешностей, вносимых конечными разностями, существует много способов задания Ri_c в численных моделях (Шир и Борнштейн, 1977). Значение Ri_c задается постоянными величинами в пределах $0.2 \div 1.0$, функцией устойчивости среднего потока, функцией сеточного разрешения и т.д. Например, Мак-Найдер и Пилке (1981) использовали зависимость

$$Ri_c = 0.115(\Delta z)^{0.175}$$

с тем, чтобы в нижних слоях, где Δz мало, $Ri_c \sim 0.25$, а в верхних слоях, где $\Delta z = 0.5 \div 1.0$, $Ri_c \approx 1$.

В схеме локального прогноза неявные эмпирические формулы предпочтительнее явных при условии, что разрешающая способность дискретной сетки в тропосфере достаточно велика¹². Действительно, эти формулы, с одной стороны, контролируют развитие турбулентности во всей области прогноза (а не только в ППС) и формирование внутренних пограничных слоев, а с другой стороны, содержат меньше априорного произвола, чем явные формулы.

Принципиальный дефект всех эмпирических формул, как явных, так и неявных, - их квазиодномерный характер, неучет горизонтальных сдвигов (скорости, температуры, влажности) как факторов развития турбулентности. Вместе с тем, во многих случаях (фронты, линии шквалов, границы кучевых облаков) горизонтальные сдвиги так же важны, как и вертикальные. Например, летом над сушей сильные бури конвективного происхождения обычно связаны именно с горизонтальными неоднородностями характеристик влажнонеустойчивой воздушной массы в ППС (Голдинг и др., 1985). Масштабный анализ позволяет заключить, что учет горизонтальной диффузии становится важным при шагах сетки 30 км и менее (Мак-Биан и др., 1979). Показателен опыт работы со схемой прогноза Британской метеорологической службы, в которой горизонтальная диффузия трактуется как чисто вычислительный фактор (Карпендер, 1979): физически необоснованная формулировка горизонтальной вязкости привела - в контексте вычислительной схемы чехарды - к неудовлетворительному описанию поверхностей разрыва фронтального типа (сходный эффект наблюдали Пэррет и Каллен (1984), интегрируя уравнения мелкой воды по схеме, близкой к схеме чехарды), вследствие чего нелинейную формулировку диффузии пришлось заменить линейной (Голдинг и Мэхин, 1984). Задача адекватного описания трехмерной турбулентности требует обращения к уравнениям для вторых моментов.

¹² Блэкэдар (1979) говорит, что естественная сфера приложения явных зависимостей - диагноз, но не прогноз.

Параметризация, содержащая представление всех вторых моментов, первоначально развивалась как параметризация подсеточной турбулентности (осреднение полных полей по объему расчетной ячейки), исходя из анализа размерностей для вихрей, принадлежащих инерционному участку турбулентного спектра, Основы параметризации были даны Лилли (1962), и на первом этапе она широко применялась для описания двумерной турбулентности главным образом в моделях общей циркуляции атмосферы (Смагоринский, 1963; Смагоринский и др., 1965; Лейт, 1968; Миякода и др., 1971). В последующих работах Лилли (1967) и Дирдорфа (1970, 1971, 1972a) данная параметризация была развита для трехмерной турбулентности и успешно апробирована в численном моделировании ППС на натуральных данных для случаев нейтральной и неустойчивой стратификации. Дирдорф (1973б) указал, каким образом эта параметризация следует из системы уравнений для вторых моментов.

В параметризации, о которой идет речь, - её обычно называют «нелинейной турбулентной вязкостью» - анизотропная часть тензора рейнольдсовых напряжений пропорциональна тензору деформации, а потоки скалярных величин пропорциональны производным этих величин по соответствующим направлениям (здесь и далее предполагаем суммирование по повторяющемуся индексу):

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \delta_{ij} E - K_m D_{ij}, \quad E = \frac{1}{2} u'_k u'_k, \quad D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}; \quad (2.2.16)$$

$$\overline{u'_i \phi'_j} = -K_{\phi i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \Phi = \Theta, Q_v; \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Кинетическая энергия турбулентности E пропорциональна квадрату полной деформации

$$E = c^2 \Delta^2 Def^2, \quad Def^2 = D_{ij} D_{ij}, \quad (2.2.17)$$

А коэффициент турбулентного обмена для импульса, K_m , и коэффициенты обмена для скалярных величин Φ , $K_{\phi i}$, пропорциональны $E^{1/2}$:

$$K_m = c_1 \Delta E^{1/2}, \quad K_{\phi i} = c_{\phi i} K_m, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.18)$$

Постоянная величина Δ называется «масштабом расчетной сетки». Она аналогична масштабу турбулентности l эмпирических параметризаций и «главному масштабу длины» в моделях, основанных на осреднении по ансамблю (см. ниже). Если сетка равномерная, Δ равен шагу сетки. Если же

$$\Delta x \approx \Delta y \approx \Delta z, \quad (2.2.19)$$

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}. \quad (2.2.20)$$

Величины c , c_1 , $c_{\phi i}$ в этой параметризации - постоянные и несколько варьируются в разных работах (Лилли, 1967; Дирдорф, 1970, 1971, 1972a, 1973a,б; 1974a; Шемм и Липс, 1976; Липс, 1977; Кларк, 1977; Шлезингер, 1978; Вильгельмсон и Клемп, 1978a; Клаасен и Кларк, 1985), составляя примерно

$$c^2 = 0.08; \quad c_1 = 0.2; \quad c_{\varphi i} = 2.5; \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.21)$$

Чтобы воспрепятствовать развитию коротковолновых возмущений, ряд авторов (Дрэк и др., 1974; Коттон и др., 1976), следуя работе Смагоринского (1967), принимают эвристическую зависимость $C_{\theta i}$ (величина, обратная турбулентному числу Прандтля) от числа Ричардсона вида:

$$c_{\theta i} = (3 - 3\text{Ri} + \text{Ri}^2) / \left[1 + (1 - \text{Ri})^{3/2} \right], \quad 0 \leq c_{\theta i} \leq 10, \quad i = 1, 2, 3.$$

Другую форму зависимости $C_{\theta i}$ от рассчитанных характеристик предложил Дирдорф (1980в). К ней мы вернемся ниже.

При апробации схемы (2.2.16) - (2.2.18) в условиях устойчиво стратифицированного ППС выяснилось, что здесь эта схема неприемлемо завышает величины турбулентных потоков (Дирдорф, 1972с, 1973а, 1974а). В этой связи Соммерия (1976) рассмотрел систему уравнений для вторых моментов в несколько более общих предположениях, чем те, что дают схему (2.2.16) - (2.2.18), учтя действие сил плавучести и частично анизотропии. Результатом явилась та же параметризация вида (2.2.16)-(2.2.18), но в которой c , c_1 , $c_{\varphi i}$ - заданные функции трехмерного числа Ричардсона Ri_{3D} и его обобщения на случай учета полного сдвига в поле потенциальной температуры Ri_{3D}^* :

$$c = c(\text{Ri}_{3D}, \text{Ri}_{3D}^*); \quad c_1 = c_1(\text{Ri}_{3D}, \text{Ri}_{3D}^*); \quad (2.2.22)$$

$$c_{\varphi i} = c_{\varphi i}(\text{Ri}_{3D}, \text{Ri}_{3D}^*); \quad i = 1, 2, 3; \quad \varphi = \theta, q_v; \quad c_{\varphi 1} = c_{\varphi 2}$$

Параметризация (2.2.22) успешно апробировалась на натуральных данных (Соммерия, 1976; Соммерия и Лемон, 1978; Никольс и др., 1982). Её основной дефект - отсутствие критического числа Ричардсона, за пределами которого энергия турбулентности резко затухает (Дирдорф, 1973б)¹³.

Как уже отмечалось, обе параметризационные схемы (2.2.16) - (2.2.18) плюс (2.2.21) или (2.2.22) оправданы, если масштаб параметризуемых вихрей лежит внутри инерционного участка турбулентного спектра. Это ограничивает шаг дискретной сетки величиной 50÷100 м. Поэтому дальнейшие разработки имели целью обобщить методику на случай больших пространственных масштабов осреднения. В этом направлении были предложены две основные модификации.

С одной стороны, для кинетической энергии подсеточной турбулентности вместо диагностической параметризации (2.2.17) было введено полное эволюционное уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E) + \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{g}{\theta_{vl}} \overline{w' \theta'_{vl}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(0.2 \rho l_m E^{1/2} \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) + 0.7 \frac{E^{3/2}}{l_e}, \quad (2.2.23)$$

в котором полагалось

¹³ Финдикакис и Стрит (1979) развили сходную параметризацию, обладающую указанным свойством, однако, как нам известно, в пространственных мезометеорологических моделях она не апробировалась.

$$l_m = l_e = \Delta. \quad (2.2.24)$$

Выражение для третьего слагаемого в (2.2.23) дается соотношением (2.2.16), а с методикой расчета четвертого слагаемого связана вторая модификация.

Термодинамические процессы были сформулированы в терминах водной потенциальной температуры Θ_i и общего влагосодержания Q_i (см. (1.5.7), (1.5.9)), трактуемых как квазиконсервативные величины (Дирдорф, 1976). Следствием этого явилась возможность отказаться от традиционного предположения о единообразном (насыщенном или ненасыщенном) состоянии всего объема расчетной ячейки $\Delta x \Delta y \Delta z$. Такое предположение становится неприемлемым, когда величина Δ возрастает до нескольких сот метров. В этом случае предполагается вероятностное распределение Θ_i и Q_i по общему нормальному закону в данный момент времени внутри данного объема $\Delta x \Delta y \Delta z$, и на этой основе была разработана более точная методика восстановления температуры, компонентов влаги, а также ковариации $\overline{w' \theta'_{v_i}}$ (фигурирующей в (2.2.23)) по рассчитываемым в модели Θ_i и Q_i (Соммерия и Дирдорф, 1977). При этом, в частности, жидкая фаза может присутствовать, даже если среднее по ячейке состояние ненасыщенное. Сходная работа на основе более полной системы уравнений для вторых моментов была выполнена Меллором (1977), подтвердившим результаты Соммерия и Дирдорфа¹⁴.

Параметризация (2.2.16), (2.2.18), (2.2.22), (2.2.23) представляют собой упрощенный вариант модели турбулентности «уровня 2.5» Ямады и Мэллора (1975) в контексте концепции подсеточной турбулентности. Она была разработана Редельспергером и Соммерия (1981) и позволила увеличить шаги расчетной сетки на порядок ($\Delta x = \Delta y = 1$ км, $\Delta z = 400$ м) и вести расчет в условиях глубокой конвекции (Редельспергер и Соммерия, 1982а, б).

Параллельно с указанным систематическим развитием схемы нелинейной турбулентной вязкости эта схема с определенным успехом эвристически использовалась рядом авторов с разрешением ~ 1 км, главным образом в работах по моделированию конвективной облачности. Так, у Пастушкова (1970а, б) $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ км; у Вильгельмсона и Огуры $\Delta x = \Delta z = 500$ м; у Сунга и Огуры (1973) $\Delta x = \Delta z = 400$ м; у Коттона и Триполи (1978), Триполи и Коттона (1980) $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 750$ м; у Шлезингера $\Delta x = \Delta y = 1.8$ км, $\Delta z = 0.7$ км (1978, 1980) и $\Delta x = \Delta y = 2$ км, $\Delta z = 0.9$ км (1984а, б); у Кларка (1979) $\Delta x = \Delta y = 1.5$ км, $\Delta z = 0.5$ км; у Кларка и Гэлла (1982) $\Delta x = \Delta y = 1$ км, $\Delta z = 0.5$ км и т.д. В качестве эвристической модификации (2.2.16)-(2.2.18), до некоторой степени эквивалентной (2.2.22), выполненному Соммерией, Дирдорф (1972а) предложил при вычислении полной деформации Def использовать вместо компонентов скорости u_i ($i = 1, 2, 3$) их отклонения от средних по горизонтали, u_i^* :

$$u_i^* = u_i - \langle u_i \rangle, \quad (2.2.25)$$

¹⁴ Мэнтон и Коттон (1977в), Бэнга и Коттон (1980) развили аналогичную методику в предположении нормального распределения величины $(Q_{SAT} - Q_i)$.

где $\langle \rangle$ - знак осреднения по x, y по всей области расчета. Это соответствует предположению, что величина коэффициента турбулентности определяется скоростью диссипации лишь турбулентной (а не общей) энергии. Модификация (2.2.25) апробировалась Шлезингером (1978, 1980, 1984*а,б*). Другой упрощенный способ учета стратификации (Лилли, 1962; Кларк, 1979; Хо и Кларк, 1981; Кларк и Гэлл, 1982; Пелтайр и Кларк, 1983; Кларк и Фэрли, 1984; Клаасен и Кларк, 1985) также связан с поправкой к полной деформации. Именно, при вычислении K вместо Def используется величина Def^* :

$$Def^* = \begin{cases} Def (1 - c_\theta Ri_{3D})^{1/2}, & \text{если } c_\theta Ri_{3D} \leq 1 \\ 0 & , \text{ если } c_\theta Ri_{3D} > 1 \end{cases} \quad (2.2.26)$$

В цикле работ Дюрэна и Клемпа (1982*а,б*; 1983) учет влажности при вычислении K , аналогичный (2.2.26), осуществлен более детально и обоснованно и апробирован расчетами по двумерной модели. Данная методика реализована в прогностической модели Гидрометцентра СССР (Кисельникова и др., 1984).

Как дальнейший шаг на пути эвристической трактовки схемы (2.2.16)-(2.2.18) отметим опыты по применению данной параметризации по горизонтальным координатам в сочетании с одной из одномерных формулировок по вертикали при описании мезомасштабных циркуляций с еще большими шагами $\Delta x, \Delta y = 5 \div 10$ км (например, Пилке, 1974*б*; Пилке и Марер, 1975; Марер и Пилке, 1976; Пененко и Алоян, 1985). Мы уже упоминали, что физическая обоснованность в таких случаях минимальна, а вычислительная целесообразность зависит от специфики рассчитываемых процессов и вычислительной схемы.

Оценивая данное направление в целом в контексте задачи локального прогноза, надо отметить следующее. Основное достоинство данного направления - физически обоснованный учет горизонтальных турбулентных напряжений и потоков. Однако в рамках достаточно простых представлений типа (2.2.16) этот учет достигается ценой упрощающих предположений о принадлежности параметризуемых турбулентных вихрей инерционному интервалу спектра¹⁵. В свою очередь это означает, что шаги расчетной сетки

- 1) достаточно малы и
- 2) достаточно однородны,

так что масштаб осреднения может быть охарактеризован единственной величиной Δ . Первое ограничение может быть ослаблено посредством модификаций, приемлемых с точки зрения объема дополнительных вычислений (Редельспергенр и Соммерия, 1981¹⁶), но что касается второго ограничения (2.2.19), оно представляется более принципиальным. Схема локального прогноза должна оперировать с сеткой, в которой $z_{\min}/z_{\max} \sim 10^{-2}$, а $z_{\min}/\Delta x \sim 10^{-3}$, что включает трактовку подсеточной турбулентности как квазиизотропной и её параметризацию на основе единого масштаба Δ (2.2.20). В

¹⁵ Мы не касаемся здесь методов более полного описания турбулентности на основе решения полной системы уравнений для вторых моментов (Дирдорф, 1973*а*, 1974*а,б*; Меллор и Ямада, 1974, 1982). Эти методы позволяют обоснованно описывать турбулентность за пределами инерционного участка спектра, но по своей вычислительной дороговизне они не могут найти применение в прогностических моделях ближайших поколений.

¹⁶ Впрочем, достигнутое здесь горизонтальное разрешение $\Delta x \approx \Delta y \approx 1$ км все еще на целый порядок меньше того, которое требуется для модели локального прогноза.

этой связи в работах Сана и Орлански (1981) по моделированию мезомасштабной конвекции и бриза на сетке с $\Delta x = 200$ м, $\Delta z_{\min} = 35$ м, Росса и Орлански (1982), по прогнозу эволюции холодного фронта на 48 часов на сетках с горизонтальным разрешением 246 км и 61.5 км, коэффициент горизонтального турбулентного обмена определяется как коэффициент вертикального обмена для той же субстанции, умноженный на $(\Delta x / \Delta z)^2$. Однако сам коэффициент вертикального обмена определяется при этом не на основе (2.2.17), (2.2.18), а эвристически, как заданная функция числа Ричардсона. Сходная зависимость в рамках более последовательно проведенной параметризации (2.2.16) - (2.2.18) использована в мезометеорологической модели университета штата Колорадо (Триполи и Коттон, 1982) и в модели локального прогноза Гидрометцентра СССР (Кисельникова и др., 1984). Но вопрос об оправданности и границах применимости этих эвристических приемов остается открытым. Упомянем также затруднение, возникающее при параметризации тензора турбулентных напряжений $\overline{u'_i u'_j}$ с использованием разных масштабов Δ в разных диагональных членах тензора: если параметризовать, согласно (2.2.16), лишь анизотропную часть тензора, дивергенция тензора утрачивает диссипативный смысл.

Таким образом, ни эмпирические одномерные формулировки турбулентных потоков и напряжений, ни трехмерные формулировки, обоснованные уравнениями для вторых моментов, не обладают комплексом свойств, вполне удовлетворяющих требованиям модели локального прогноза: первые не дают описания горизонтальных напряжений и потоков, а вторые для описания этих потоков требуют либо квазиоднородной расчетной сетки, либо применения модели «уровня 4», т.е. в любом случае - неприемлемо большого объема вычислений. Мы должны заключить, что задача описания турбулентности в модели локального прогноза еще ожидает своего достаточного решения. Косвенным подтверждением данного положения служит применяемая параметризация турбулентности в двух прогностических моделях с наиболее детализированной расчетной сеткой - Британской метеорологической службы (пять расчетных уровней до высоты 1 км, высота нижнего уровня 10 м, $\Delta x = \Delta y = 15$ км; см. Голдинг, 1984) и Французской метеорологической службы (столько же уровней до высоты 1 км, высота нижнего уровня 18 м, $\Delta x = \Delta y = 38$ км; см. Жуванон дю Ваши и др., 1983). В обеих моделях обоснованно параметризуются только вертикальные потоки, и даже они, особенно во французской модели, параметризуются далеко не с той полнотой, которая возможна в современных моделях атмосферной турбулентности.

В моделях последних лет наметилась тенденция по использованию «гибридных» схем параметризации турбулентности, в которых гибридность проявляется в двух аспектах:

- 1) эволюционное уравнение (2.2.23) для кинетической энергии E совмещается с возвращением к одномерным формулировкам эмпирических параметризаций коэффициента обмена и масштабу турбулентности l ;
- 2) концепция «масштаба расчетной сетки», характерная для теории подсеточной турбулентности, совмещается с концепцией «основного масштаба длины», характерного для техники осреднения по ансамблю.

Именно гибридность данного типа параметризаций объясняется тот факт, что на нем сходятся исследователи, исходящие из разных предпосылок и преследующие противоположные цели. Так, для авторов британской прогностической схемы представле-

ние коэффициента обмена через E (с использованием (2.2.23) и методики вероятностного распределения Θ_i и Q_i внутри ячейки по Соммерия и Дирдорфу, 1977) и l сменило параметризацию О'Брайена (1970) как средство более локализованного и чувствительного описания турбулентности (Карпентер, 1979; Голдинг и Мэхин, 1984). Напротив, те же элементы в моделях Редельспергера и Соммерия (1981, 1982*a, б*), Клемпа и Вильгельмсона (1978*a*) стали средством более интегрального описания турбулентности, осредненной по большим расчетным ячейкам (модель Клемпа и Вильгельмсона, использующая уравнение для E в контексте нелинейной турбулентной вязкости, апробировалась на сетках с $\Delta x = \Delta y = 2 \div 3$ км и Δz , возрастающим от 300 м до 1 км у верхней границы области расчета (Клемп и Вейсман))¹⁷. Наконец, в контексте систематического изучения системы уравнений для вторых моментов уравнение (2.2.23) возникает при разложении решения по степеням тензора анизотропии как средство первичного учета этой анизотропии (Мэллор и Ямада, 1974, 1982).

Отметим основные фактические моменты данной тенденции.

Необходимость использования в параметризационной схеме эволюционного уравнения (2.2.23) для кинетической энергии турбулентности является в настоящее время общепризнанной¹⁸ (идея включения уравнения (2.2.23) в схему нелинейной турбулентной вязкости была высказана Лилли еще в 1967 году). При этом обычно ограничиваются лишь одномерной параметризацией, согласно (2.2.11), где коэффициент обмена для импульса полагают

$$K_m = c_m l_m E^{1/2}. \quad (2.2.27)$$

Постоянную c_m в (2.2.27) в разных моделях меняют (в зависимости от стратификации) в пределах $0.0256 \div 0.2$ (Петерсон, 1969; Делаж, 1974; Дирдорф, 1975, 1980*и*; Клемп и Вильгельмсон, 1978*a*; Доран и Хорст, 1981; Редельспергер и Соммерия, 1981; Вильгельмсон и Чен, 1982).

Поскольку E определяется из полного уравнения, центр тяжести эвристических модификаций переносился на формулировку масштаба турбулентности l_m . Укажем здесь лишь наиболее распространенные и/или принципиальные подходы. Более полные сведения имеются, например, в работе Мак-Биана (1979).

В рамках формулировки Блэкэдра (1962) (2.2.13) Мэллор и Ямада (1974) предложили выражение для l_∞ , допускающее сколь угодно большие значения данной величины¹⁹:

¹⁷ Параметризация Клемпа и Вильгельмсона используется в двумерных моделях конвективного облачного ансамбля (Сунг и Огура, 1980; Суг и Тао, 1980, 1984; Тао и Симпсон, 1984) и тропического циклона (Виллоуби и др., 1983, 1984; Лорд и др., 1984), апробированных на натуральных данных.

¹⁸ Приведем, впрочем, выводы Сегами (1986), полученные на основе прогнозов по оперативной модели Японской метеорологической службы (13-слойная «примитивная» модель с шагом по горизонтальным координатам 63.5 км): преимущества параметризации с использованием прогностического уравнения (2.2.23) для E перед более простой схемой «уровня 2» (где E дается диагностическим соотношением) сказываются главным образом 1) если горизонтальный шаг сетки достаточно мал (меньше вышеуказанного), 2) если срок прогноза достаточно велик (более суток) и 3) в условиях сильноустойчивой стратификации.

¹⁹ Вопрос о том, как ведет себя величина l в областях, где интенсивность турбулентности исчезающе мала, остается неясным (Ямада и Мэллор, 1979).

$$l_{\infty} = \alpha \frac{\left(\int_0^{\infty} E z dz \right)}{\left(\int_0^{\infty} E dz \right)}, \quad \alpha \approx 0.1. \quad (2.2.28)$$

Выражение (2.2.28) апробировалось ими же (Ямада и Мэллор, 1975) на данных наблюдений в Ваангаре (Кларк и др., 1971). Апробация показала, между прочим, невысокую чувствительность результатов к значению коэффициента α . Представление (2.2.28) широко распространено и в настоящее время (см., например, Пененко и Алоян, 1985),

Ряд авторов (Андрэ и др., 1978; Хасид и Гальперин, 1983) отмечает, что представление (2.2.28) утрачивает репрезентативность в условиях высокой устойчивости, когда рост турбулентных вихрей парализуется силами гравитации. В этой связи соотношение (2.2.28) предлагается дополнить ограничением вида (Хасид и Гальперин, 1983):

$$l_m \leq 0.53 \left[\frac{2E}{\left(\beta g \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)} \right]^{1/2},$$

где β - коэффициент объемного расширения ($\sim 1/273$ град $^{-1}$).

Параметризация (2.2.11), (2.2.23), (2.2.27) с несколько модифицированным, по сравнению с (2.2.28), представлением l_{∞}

$$l_{\infty} = 0.1 \frac{\left(\int_0^z \rho E \zeta d\zeta \right)}{\left(\int_0^z \rho E d\zeta \right)}, \quad (2.2.29)$$

успешно апробировалась Мяккодой и Сирутисом (1977) в модели общей циркуляции атмосферы с высоким разрешением в ППС (нижний расчетный уровень $z = 18$ м, приземные потоки определяются из теории подобия) для прогноза на один месяц. Авторы отмечают существенность использования уравнения (2.2.23) и наверняка впервые предлагают гибридную формулировку для l_m :

$$l_m = \min \left\{ \Delta z; l_m, \text{ определенная согласно (2.2.13), (2.2.29)} \right\}. \quad (2.2.30)$$

Подход, намеченный формулировкой (2.2.30), был развит и распространен также на формулировку отношения коэффициентов обмена, $C_{\theta} = K_{\theta}/K_m$, в работе Дирдорфа (1980г) в условиях равномерной и квазиравномерной сеток ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 50$ м и $\Delta x = \Delta y = 125$ м и $\Delta z = 50$ м). Здесь, по-видимому, впервые, было предложено различать два масштаба длины, l_m и l_{ε} , в уравнении (2.2.23), полагая последний

$$l_{\varepsilon} = 0.7 l_m / \left(0.19 + 0.51 \frac{l_m}{\Delta} \right), \quad (2.2.31)$$

где l_ε - масштаб, характеризующий скорость диссипации турбулентной энергии и тем самым размеры вихря в целом в отличие от l_m , характеризующего, прежде всего, вертикальные размеры вихря.

При равенстве горизонтальных и вертикальных масштабов соотношение (2.2.31) дает $l_\varepsilon = l_m$, а при неравенстве учитывается преобладание горизонтального масштаба над вертикальным $l_\varepsilon > l_m$.

Идея различия двух масштабов длины в уравнении (2.2.23) получила подробное развитие в работе Терри и Лаккара (1983), где выражение для l_ε получено, исходя из гипотезы

$$l_m / l_\infty \approx \overline{w'^2} / E$$

(здесь же предложена модифицированная параметризация $\overline{w'\theta'}$, допускающая противогradientный поток тепла). Авторы сообщают, что их методика успешно апробирована на данных наблюдений в Ваангаре, лабораторных экспериментов и расчетов по системе уравнений для третьих моментов. Указано также, что включение методики в двумерную мезометеорологическую модель привело к значительным отличиям результатов сравнительно с более традиционными методами параметризации ППС.

Последнее направление в представлении масштаба l_m , которое следует отметить, - формулировка прогностического уравнения для l_m . На эвристической основе такое уравнение было предложено в работе Буша и др. (1976), но, насколько известно, в других работах оно не апробировалось. Более систематическое развитие и апробацию получило прогностическое уравнение для величины $(E l_m)$, предложенное Ямадой и Мэллором (1975). Параметризация турбулентности в терминах двух эволюционных уравнений - для E и $E l_m$ - и ряда алгебраических соотношений образует в собственном смысле «модель уровня 2.5», многократно апробированную на натурном материале в работах Ямады, 1977; Миякоды и Сирутиса, 1977; Ямады и Мэллора, 1979; Ямады, 1978, 1979, 1981, 1982, 1983; Мэллора и Ямады, 1982. Однако эта параметризация пока не нашла применения в моделях мезометеорологии.

Подводя итог вышеописанным тенденциям, надо признать значительный прогресс, достигнутый на их основе, в частности, на основе модели «уровня 2.5» и её упрощенного варианта (Ямада, 1983). Что же касается упомянутой выше существенной для локального прогноза задачи описания горизонтальных турбулентных потоков в негидростатическом приближении и в условиях сильной неоднородности расчетной сетки, то удовлетворительного решения здесь пока не найдено. Модель «уровня 2.5» дает выражения для всех напряжений и потоков, однако, поскольку она основана на пренебрежении большей частью анизотропных эффектов, использование этих выражений для горизонтальных напряжений и потоков, очевидно, не слишком оправданно. Сам Ямада (1978, 1979, 1981, 1983) принимает для этих потоков формулировку типа нелинейной турбулентной вязкости, возлагая на неё лишь задачу подавления «вычислительных шумов». Можно предположить, что параметризация типа (2.2.11), (2.2.23), (2.2.27) с одной из упомянутых формулировок для масштабов турбулентности, l_m и l_ε , или модель «уровня 2.5» Ямады и Мэллора, пополненные мотивированным учетом основных эффектов горизонтальной мезомасштабной диффузии, станут основой описания турбулентности в схемах локального прогноза ближайших поколений.

2.3. Параметризация турбулентности над горами

Хотя мезомасштабные орографические неоднородности заметно активизируют турбулентные процессы, нередко превращая их в фактор первостепенного значения, учет орографии в схемах параметризации турбулентности принадлежит к наименее устоявшимся аспектам мезометеорологического моделирования. Здесь особенно широко привлекаются упрощающие предположения и эвристические приемы. В силу этого, а также в силу громоздкости аналитического материала, мы ограничимся кратким и преимущественно качественным освещением этого вопроса.

В методах параметризации подсеточной турбулентности уже само осреднение турбулизованных полей над горами выполняется по-разному.

В более полных моделях, ориентированных на описание трехмерной турбулентности, оперирующих негидростатическими уравнениями, квазиоднородными сетками и схемой нелинейной турбулентной вязкости, осреднение выполняют непосредственно в исходной системе координат, следуя Дирдорфу (1973в)

$$\bar{\varphi}(t, x, y, z) = \left(\int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \varphi(t, x+x', y+y', z+z') dx' dy' dz' \right) / (\Delta x \Delta y \Delta z)$$

В этом случае вторые моменты параметризуют согласно схеме типа (2.2.16)-(2.2.20) и замкнутую таким образом систему уравнений для осредненного движения преобразуют затем в орографическую систему координат (Кларк, 1977; Триполи и Коттон, 1980, 1982; Дюрэн и Клемп, 1982в, 1983)²⁰.

В упрощенных моделях, ориентированных на квазиоднородную параметризацию турбулентности, оперирующих гидростатическими уравнениями, сильно неоднородными сетками и эмпирическими К-теориями, осреднение выполняется после записи уравнений в орографических координатах (здесь и ниже мы используем терминологию и обозначения § 1.6) с учетом эффектов криволинейности расчетной ячейки (Пилке, 1981; Пилке и Мартин, 1981):

$$\bar{\varphi}(t, \xi, \eta, \zeta) = \left(\int_{-\Delta \zeta/2}^{\Delta \zeta/2} \int_{-\Delta \eta/2}^{\Delta \eta/2} \int_{-\Delta \xi/2}^{\Delta \xi/2} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \varphi(t, \xi+\xi', \eta+\eta', \zeta+\zeta') dt' d\xi' d\eta' d\zeta' \right) / (\Delta t \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta) \quad (2.3.1)$$

В этом случае возникает задача параметризации вертикальных потоков в новой системе координат

$$\rho G_0 \overline{\omega' \varphi'}, \quad \varphi = u, v, \theta, \quad (2.3.2)$$

которую решают, предполагая гору пологой, а потоки (2.3.1) в направлении ζ - близкими к потокам в направлении z :

$$\rho G_0 \overline{\omega' \varphi'} \approx \overline{\rho w' \varphi'} \quad (2.3.3)$$

²⁰ Фолькерт и Шуман (1986) используют данный подход в рамках гидростатических уравнений и на неравномерной сетке с использованием DeF^* из (2.2.26). Своеобразным моментом их параметризации является также определение масштаба расчетной сетки $\Delta = (\Delta x + \Delta y + \Delta z)/3$ вместо (2.2.20).

и получая окончательно одномерную параметризацию

$$\overline{\omega' \varphi'} = -\frac{1}{G_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right). \quad (2.3.4)$$

Поскольку в (2.3.2) роль плотности выполняет выражение (ρG_0) , для того, чтобы можно было пренебречь пульсациями этой величины, необходимо, чтобы якобиан G_0 и его производные не сильно менялись в пределах расчетной ячейки. Более общее условие гласит, что для выполнения параметризации на основе осреднения (2.3.1) необходимо, чтобы изменения величин $1/G_0$, G_1/G_0 и G_2/G_0 в пределах расчетной ячейки были относительно малы (Пилке и Мартин, 1981). Из других соображений для описания турбулентности над горами необходимо выполнение условия (Пекелис и Прессман, 1986)

$$\left(\frac{G_1 \Delta x}{G_0 \Delta z} \right)^2 + \left(\frac{G_2 \Delta y}{G_0 \Delta z} \right)^2 \leq 1,$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ размеры криволинейных расчетных ячеек, соответствующих прямоугольным ячейкам в ζ -координатах.

Как было замечено выше, в основе представлений типа (2.3.4) лежит предположение о пологости рельефа. Тем не менее, данная методика не без успеха эвристически использовалась в условиях «мезомасштабных» крутизны и кривизны склонов (граничной величиной для крутизны, разделяющей рельеф синоптического и мезомасштаба, принято считать 0.01; эта величина условно принимается в качестве верхнего предела для характерных наклонов макромасштабного рельефа и нижнего предела для характерных наклонов мезомасштабного рельефа). Марер и Пилке (1977б) прогнозировали развитие мезопроцесса на сутки над рельефом с максимальным наклоном ~ 0.04 и средним наклоном 0.02. В другой работе тех же авторов (1977а) моделируется поток над натурным рельефом с максимальной крутизной ~ 0.09 и минимальным радиусом кривизны ~ 42 км при общей толщине атмосферного слоя 10 км (см. в этой связи оценки в начале § 1.6). Никерсон (1979) моделировал поток над Гавайями при максимальной крутизне рельефа ~ 0.08 . Мак-Найдер и Пилке (1984) моделировали стоковый ветер над двумерным рельефом с крутизной, близкой к 0.2 и минимальным радиусом кривизны 8 км, а также над трехмерным рельефом с максимальной крутизной 0.25 и минимальным радиусом кривизны 3 км при общей толщине слоя 9 км.

Альперт и Нейман (1984) оценили погрешность аппроксимации (2.3.4), учтя в расчетах члены, которыми данная аппроксимация пренебрегает: $\left(\alpha \rho \overline{u'^2} + \beta \rho \overline{u' v'} \right)_\zeta$ в уравнении для u -составляющей и $\left(\beta \rho \overline{v'^2} + \alpha \rho \overline{u' v'} \right)_\zeta$ в уравнении для v -оставляющей, где α и β - наклоны рельефа в направлении осей X и Y соответственно²¹. Оказалось, что пренебрежение указанными членами ведет к заметному сглаживанию течения уже при наклонах рельефа 0.05 и круче.

²¹ Данная работа выполнена для гидростатических уравнений в σ -координатах, но авторы замечают, что общий вывод верен, вероятно, для любой орографической системы координат.

В методическом плане большей независимостью от выбора системы координат и принципиальной отчетливостью обладает методика, основанная на осреднении по ансамблю и уравнениях для вторых моментов. Однако и здесь в конкретных расчетах принимают формально оправданное лишь для пологих и малоискривленных рельефов «приближение пограничного слоя», сохраняя производные только по нормали к границе и пренебрегая эффектами, связанными с переменными размерами расчетных ячеек и криволинейностью координатных осей (Мэллор и Ямада, 1974, 1982; Ямада, 1981, 1983; Хайльмэн и Добози, 1985). Впрочем, как и при осреднении по расчетным ячейкам и даже еще заметнее, названные упрощения начинают сказываться на структуре осредненных полей, очевидно, лишь при значительной крутизне и кривизне рельефа. Во всяком случае, Ямада успешно моделировал потоки над горами с максимальной крутизной $\sim 1/7$ и минимальным радиусом кривизны ~ 3.5 км при толщине расчетного слоя 1.3 км (1981), а также над рельефом с максимальной крутизной $\sim 1/5$ и минимальным радиусом кривизны ~ 0.3 км при толщине расчетного слоя 1.2 км (1983).

Отдельного упоминания заслуживает расчет турбулентных потоков в приземном слое, поскольку в большинстве случаев он выполняется согласно теории подобия, хотя последняя основана, как известно, на предположении о горизонтальной однородности ПС. В мезометеорологических моделях, учитывающих орографию, обобщение теории подобия производится простейшим способом, локально: в выражениях (2.2.7) под u и v понимаются скорости в орографической системе координат. Надо сказать, что результаты измерений оправдывают данную методику, поскольку именно вертикальные потоки - т.е. как раз те, которые даются теорией подобия - меньше всего изменяются под действием горизонтальных неоднородностей (Пановски и др., 1982). Теория подсеточной турбулентности практически не оставляет альтернативы использованию в приземном слое теории подобия: параметризационные формулы подсеточной турбулентности не могут быть распространены вплоть до уровня z_0 , т.к. это сопряжено с необходимостью дробления шагов Δz , т.е. с сильной неоднородностью расчетной сетки и, следовательно, - невозможностью оперировать единым масштабом Δ . Теория осреднения по ансамблю представляет больше возможностей в этом отношении, т.к. не требует квазиоднородной расчетной сетки. Правда, на самом уровне z_0 (где производные от искомых величин и погрешности аппроксимации могут быть очень велики) и здесь используется теория подобия (Ямада, 1981, 1982, 1983). Но она используется лишь в тонком слое 1-3 м, где её применимость не вызывает сомнений²², а выше расчет ведется на основе прогностической системы уравнений с использованием сильно неравномерных сеток: Ямада (1981, 1983) применяет сетки с $\Delta z_{\max}/\Delta z_{\min} \sim 15$ - считая по «основным» уровням, и с на порядок большей неоднородностью - считая по «промежуточным» уровням. Отношение $\Delta x/\Delta z_{\min}$ в его расчетах достигает 60.

Таким образом, в том, что касается представления турбулентности над горами в схемах локального прогноза, скорее, чем в других вопросах, можно говорить о преимуществах техники осреднения по ансамблю перед техникой осреднения по сеточному объему.

²² Марер (1982) получил хорошее совпадение рассчитанной температуры с наблюдавшейся, используя теорию подобия в нижнем 2-метровом слое атмосферы для рельефа с наклоном 1,7.

2.4. Параметризация микрофизики облаков и осадков

В настоящее время существуют численные модели образования облаков и осадков с детальным расчетом микрофизики, однако использование их в прогностической практике требует значительных ресурсов ЭВМ, так как при этом резко возрастает количество используемых переменных и объем вычислений.

С другой стороны, крайне упрощенный подход к моделированию облаков и осадков, используемый в крупномасштабных прогностических моделях и состоящий, как правило, в мгновенном выведении образовавшегося конденсата (или его части) в виде осадков, является чрезмерно идеализированным. В нем не учитывается конечность процессов укрупнения капель и их испарения в ненасыщенной среде, а также конечная скорость оседания гидрометеоров. В условиях краткосрочного и свехкраткосрочного прогноза облаков и осадков учет характерного времени «созревания облаков и конечности (во времени) процессов осадкообразования является существенным. Поэтому применительно к мезомасштабным прогностическим моделям целесообразно, по-видимому, искать процедуры параметризации микрофизики процессов, которые, с одной стороны, были бы достаточно экономичными и не требовали введения большого числа дополнительных новых переменных и эволюционных уравнений, а с другой стороны, отражали бы в первом приближении микрофизические процессы, протекающие в облаках и осадках.

При обсуждении исходных уравнений в Главе 1 уже отмечалось, что на современном этапе целесообразно ограничиться сравнительно простыми процедурами параметризации, в которых облака и осадки можно характеризовать лишь с помощью одной интегральной переменной типа массовой или объемной концентрации, для которой решаются эволюционные уравнения. Это упрощающее предположение было использовано заданием исходного уравнения (1.1.4) и его последующих модификаций.

Вторая упрощающая гипотеза, используемая обычно в прогностических моделях, состоит в том, что конденсация водяного пара и испарение облачных капель происходят мгновенно и условия пересыщения отсутствуют. Эта гипотеза может быть сохранена и в мезомасштабных моделях. Она использовалась нами при формировании новых термодинамических переменных с использованием исходных уравнений (1.1.3) и (1.1.4).

Процессы укрупнения гидрометеоров в результате их слияния, а также испарения осадков в ненасыщенных районах могут быть учтены наиболее простым способом с помощью параметризации типа Кесслера (1969). Семейство эти параметризаций является в настоящее время достаточно большим, и мы не будем останавливаться подробно на модификациях, предложенных позднее различными авторами, а остановимся лишь на сути метода, его преимуществах и недостатках.

Основная гипотеза в параметризации Кесслера состоит в том, что конденсат образует сначала облачность, которая характеризуется только объемной (массовой) концентрацией. Осадки продуцируются из облаков и характеризуются также объемной (массовой) концентрацией и априорно заданной формой спектра осаждающихся частиц.

Оригинальная методика Кесслера (1969) использует ряд гипотез и констант, относящихся к осадкам в жидкой фазе, поэтому, строго говоря, может быть применена лишь для параметризации некристаллических осадков.

Параметризация Кесслера приближенно представляет три процесса:

- ⇒ укрупнения мелких капель,
- ⇒ коагуляцию облачных капель на частицах осадков и
- ⇒ испарение частиц осадков в ненасыщенных районах.

Процесс укрупнения мелких капель до размеров, когда начинает сказываться гравитационное оседание, параметризуется Кесслером с использованием простой формулы

$$\left(\frac{\partial Q_r}{\partial t} \right)_{AU} = K_{AU} (Q_c - \tilde{a}), \quad (2.4.1)$$

где K_{AU} - эмпирический коэффициент (c^{-1}), описывающий характерное время укрупнения мелких капель, а \tilde{a} - некоторое пороговое значение водности облаков, начиная с которого процесс перехода облаков в осадки (автоконверсия) может реализоваться. Кесслером (1969) предложены значения $K_{AU} = 10^{-3} c^{-1}$ и $\tilde{a} = 0.5$ г/кг. Численные эксперименты по моделированию облаков и осадков, проведенные различными авторами, показали, что, несмотря на свою простоту, эмпирическое соотношение (2.4.1) для автоконверсии дает результаты сходные с более полными и физически обоснованными методиками расчета укрупнения мелких капель. В крупномасштабных моделях иногда используется более длительное характерное время укрупнения облачных капель (например, $K_{AU} = 10^{-4} c^{-1}$ в работе Сундквиста (1978)). На основе имеющихся экспериментов по моделированию облаков и осадков можно рекомендовать к использованию значения K_{AU} и \tilde{a} , предложенные в работе Кесслера (1969).

Для расчета процесса захвата облачных капель более крупными каплями осадков (процесс аккреции), а также для расчета испарения осадков необходима некоторая гипотеза о спектре частиц осадков. Наиболее часто для описания спектра осадков используется формула Маршалла-Пальмера

$$N = N_0 e^{-\chi D}, \quad (2.4.2)$$

где N - объемная концентрация капель (m^{-3}), N_0 (m^{-4}) - константа, определенная из экспериментов, χ (m^{-1}) - параметр, а D - диаметр капли. В работе Кесслера (1969) рекомендуется использовать $N_0 = 10^7 m^{-4}$, в некоторых других работах принимаются значения $6 \cdot 10^6 \leq N_0 \leq 10^7$.

Для вычисления скорости падения гидрометеоров в атмосфере в качестве исходных служат обычно те или иные аппроксимации экспериментальных данных. Перечень предложенных формул является довольно большим, и мы его приводить не будем. Среди предложенных аппроксимаций можно выделить два основных класса:

- (1) аппроксимационные формулы, единые для всех размеров частиц,
- (2) аппроксимационные формулы, различные для определенных интервалов размера частиц.

Аппроксимации второй группы (см. например, Уобус и др., 1971) дают лучшие результаты, но их нельзя применить в рамках двухпараметрического спектра (2.4.2), поскольку для этого необходима информация о размерах частиц. Применение таких формул возможно только при использовании более общих формул распределения частиц осадков, например, Γ -распределения. Аппроксимации первой группы могут быть применены в рамках двухпараметрической функции распределения (2.4.2). Они задаются чаще всего в виде степенной или полиномиальной зависимости скорости падения частицы от её радиуса (диаметра). Примеры аппроксимации скорости падения дождевых капель в зависимости от их размера можно найти в работах Кесслера (1969), Линя и др., (1983), Ратледжа и Хоббса (1983). При проведении расчетов скорости падения осадков аппроксимационные формулы относятся к некоторому представительному диаметру

частиц в спектре - медианному диаметру, разделяющему водность осадков на две равные половины, или рассчитываются взвешенные по массе значения скорости.

При использовании исходной аппроксимации

$$V_{Ti} = -K D_i^{1/2} (\rho_0 / \rho)^{1/2}, \quad (2.4.3)$$

(где $K=130$, ρ_0 - плотность воздуха у поверхности земли, ρ - плотность воздуха на данном уровне, D - диаметр частиц) Кесслер (1969) получает выражение для скорости падения частиц осадков

$$V_T = -38.3 N_0^{-1/8} (\rho Q_r)^{1/8}. \quad (2.4.4)$$

Несколько отличные формулы для расчета V_T жидких частиц можно найти, например, в работах Линя и др. (1983), Ратледжа и Хоббса (1983).

По известным значениям Q_c , Q_r и V_T можно определить приближенно скорость захвата облачных частиц осадками. Она вычисляется, исходя из предположения, что частицы имеют сферическую форму. Тогда объём, вымываемый в единицу времени частицей диаметром D_i , падающей со скоростью V_{Ti} , составляет $(-\pi D_i^2 V_{Ti} / 4)$, а скорость аккумуляции на ней облачной воды равна

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial t} \right)_{AC} = -\frac{E \rho \pi D_i^2}{4} V_{Ti} Q_c, \quad (V_{Ti} < 0). \quad (2.4.5)$$

Здесь E - эффективность захвата. Подставляя (2.4.3) в соотношение (2.4.5), интегрируя по спектру и переходя к массовой доле осадков, получим

$$\left(\frac{\partial Q_r}{\partial t} \right)_{AC} = 6.96 \cdot 10^{-4} E N_0^{1/8} Q_c (\rho Q_r)^{7/8} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (2.4.6)$$

Скорость изменения массы свободно падающей капли под действием испарения может быть рассчитана по формуле Байерса (1965) или другим формулам, в которых учитываются так или иначе следующие основные факторы:

- 1) диффузия водяного пара с поверхности капли, пропорциональная градиенту влажности между её поверхностью, находящейся в условиях насыщения, и окружающим воздухом;
- 2) фактор вентиляции, зависящий от скорости падения капли.

С использованием приближенного представления фактора вентиляции Кесслер (1969) получил довольно простую формулу для скорости испарения единичной капли, которая дает ошибку не более $\pm 40\%$ для большинства значений диаметров частиц, температуры и влажности:

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial t} \right)_{EV} = 2.24 \cdot 10^{-2} (Q_{SAT} - Q_V) D^{8/5}. \quad (2.4.7)$$

Интегрируя (2.4.7) по спектру и переходя к массовой доле влаги, получаем

$$\left(\frac{\partial Q_r}{\partial t}\right)_{EV} = 1.93 \cdot 10^{-6} N_0^{7/20} (Q_{SAT} - Q_v) (\rho Q_r)^{13/20}. \quad (2.4.8)$$

Формулы (2.4.4) - (2.4.8) представляют собой оригинальные параметризации, предложенные Кесслером. Позднее были предложены их модификации, с которыми можно познакомиться, например, в работах Линя и др. (198), Ратледжа и Хоббса (1983). Исторически параметризации типа Кесслера применялись наиболее часто для моделирования конвективных облаков и осадков, однако она не содержит в себе специфических конвективных характеристик и может быть применена и к слоистообразным облакам.

Определенная ограниченность этой параметризации в её оригинальном виде (2.4.4) - (2.4.8) состоит в том, что она относится к осадкам в жидкой фазе, в то время как в задаче прогноза расчеты проводятся, как правило, во всей толще тропосферы и в большинстве реальных случаев наряду с жидкой присутствует и кристаллическая фаза облаков и осадков.

Численные эксперименты по использованию параметризации Кесслера в моделях глубокой конвекции показали (Брегман, 1984), что в своем оригинальном виде она дает завышенные значения V_T и, вследствие этого, чрезмерно большую скорость процессов осадкообразования и завышенную интенсивность осадков у поверхности земли. Наиболее экономичным образом этот недостаток можно преодолеть, введя эмпирический коэффициент $0 \leq K_0 \leq 1$ в формуле (2.4.4), который задается функцией температуры и обеспечивает учет меньшей скорости падения кристаллов по сравнению с каплями. Использование значений:

- * $K_0 = 1$ при $T > 0$ °C;
- * $K_0 = 0,6$ при 0 °C $\geq T \geq -10$ °C;
- * $K_0 = 0,2$ при $T < -10$ °C;

значительно улучшает качество расчетов осадков при моделировании облаков и осадков во всей толще атмосферы (Бремен, 1984). Модифицированная таким образом методика параметризации Кесслера использовалась в мезомасштабной прогностической модели Гидрометцентра СССР (Кисельникова и др., 1984). Она является достаточно экономичной и может быть рекомендована к использованию в прогностических моделях.

В более поздние годы были предложены методики параметризации с учетом кристаллической фазы облаков и осадков (см., например, Триполи и Коттон, 1982; Линь и др., 1983; Ратледж и Хоббс, 1983; Сергеев, 1983). Непосредственное их применение в прогностических моделях затруднительно, так как это требует введения дополнительных переменных и решения соответствующих эволюционных уравнений. Задачу учета кристаллической фазы облаков и осадков можно существенно упростить, если ввести ряд дополнительных предположений. Например, если принять, что при отрицательных температурах осадки существуют только в кристаллической фазе, а при положительных - только в жидкой фазе (при переходе через нулевую изотерму происходит их мгновенное плавление или замерзание), то осадки можно по-прежнему характеризовать лишь одной переменной - массовой долей осадков. Если предположить дополнительно, что при отрицательной температуре облачная влага может находиться в жидкой и кристаллической фазах, а доля ледяных облачных кристаллов является в каждый момент времени известной функцией температуры, то при решении эволюционных уравнений можно по-прежнему характеризовать облачность и влажность единственной переменной - их общим влагосодержанием Q и остаться в рамках той же системы уравнений,

что и при параметризации Кесслера, но с другими формулировками членов, описывающих фазовые переходы атмосферной влаги. При таком подходе требуется дополнительное диагностическое соотношение для разделения облачной воды Q_c на жидкую Q_{cw} и ледяную Q_{ci} фазы. При составлении такого соотношения можно использовать гипотезу о пропорциональности Q_{ci} концентрации активированных ледяных ядер h_c и массовой доле переохлажденной облачной воды $Q_{cw} = Q_c - Q_{ci}$

$$Q_{ci} = \alpha_i (Q_c - Q_{ci}) h_c. \quad (2.4.9)$$

Здесь $\alpha_i \ll 1$ - коэффициент пропорциональности, а значение h_c можно рассчитать, например, по формуле Флетчера (1962)

$$h_c = n_{co} e^{-\beta T}, \quad (2.4.10)$$

где n_{co} и β - константы, T - температура в $^{\circ}\text{C}$. Формулу (2.4.9) удобнее представить в долях ледяной фазы по отношению к общей водности облаков $C_{ci} = \frac{Q_{ci}}{Q_c}$. Тогда (2.4.9) приобретает следующий вид

$$C_{ci} = \frac{h_c}{1/\alpha_i + h_c}$$

Значение коэффициента α_i подбирается, исходя из характерных соотношений между ледяной и жидкой фазами в смешанных облаках. Так, например, если принять, исходя из эмпирических данных (Мазин и Шметер, 1983), что при $T = -15^{\circ}\text{C}$ появление ледяных кристаллов и переохлажденной воды равновероятно, то при $\beta = 0,6$ в (2.4.10) получим $\alpha_i^{-1} n_{co}^{-1} = 8100$. Из (2.4.11) следует, что доля ледяной облачной фазы будет возрастать от очень малых значений при нулевой температуре до единицы при низких температурах.

При таком подходе в толще атмосферы выделяется две области:

- (1) область кристаллических и смешанных облаков, кристаллических осадков ($T < 273 \text{ K}$),
- (2) область капельных облаков и осадков ($T \geq 273 \text{ K}$).

В области отрицательных температур ($T < 273 \text{ K}$) представляется возможным существенно модифицировать параметризацию Кесслера и учесть:

- ⇒ отложение водяного пара на снеге (испарение снега),
- ⇒ особенности автоконверсии облачных кристаллов в снег,
- ⇒ особенности захвата облачных кристаллов и переохлажденных капель частицами снега,
- ⇒ различную скорость оседания кристаллических частиц разной формы.

Алгоритмы для расчета этих процессов можно найти, например, в работах Линя и др. (1983), Ратледжа и Хоббса (1983).

Такого рода алгоритм был разработали в Гидрометцентре СССР применительно к мезомасштабной прогностической модели и протестирован сравнением рассчитанных конвективных облаков и осадков с наблюдавшимися (Вельтищев и Полежаев, 1985).

Сопоставление расчетов с использованием модифицированной параметризации Кесслера и расчетов с процедурами параметризации кристаллической фазы облаков и осадков показало, что последняя более реалистично воспроизводит эволюцию радиоэха, время достижения осадками поверхности земли, продолжительности осадков, а также верхнюю границу облаков. Затраты времени на ЭВМ увеличиваются при этом на 3-5% по сравнению с использованием параметризации Кесслера. Учитывая эти обстоятельства, параметризации описанного выше типа можно считать хорошими кандидатами для использования в мезомасштабных прогностических схемах.

2.5. Параметризация радиационных притоков тепла

Система уравнений гидротермодинамики, составляющая математическую основу задачи локального прогноза погоды, наряду с турбулентными и фазовыми притоками тепла содержит в качестве источника энергии слагаемое ε_v , характеризующее радиационное нагревание или охлаждение воздуха.

В общем случае радиационный приток тепла выражается через дивергенцию потока радиации

$$\varepsilon_v = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \operatorname{div} \vec{F}. \quad (2.5.1)$$

Поскольку потоки радиации существенно меняются только по вертикали, можно записать

$$\varepsilon_v = -\frac{1}{\bar{\rho} c_p} \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (2.5.2)$$

(здесь $F = \vec{F}^\uparrow - \vec{F}^\downarrow$ - вектор результирующего потока, равный разности восходящих \vec{F}^\uparrow и нисходящих \vec{F}^\downarrow потоков радиации), или в р-системе координат

$$\varepsilon_v = \frac{g}{c_p} \frac{\partial F}{\partial p}. \quad (2.5.3)$$

Таким образом, для расчета радиационных притоков тепла на рассматриваемом уровне в атмосфере необходимо предварительно рассчитать нисходящие и восходящие потоки радиации на том же уровне.

Другой важной характеристикой радиационных процессов в системе Земля-атмосфера является величина поглощенной поверхностным слоем солнечной радиации. Количество этой радиации S зависит главным образом от облачности и альбедо подстилающей поверхности. Сумма значений S , длинноволнового противоизлучения атмосферы (D) и длинноволнового излучения подстилающей поверхности ($B = \sigma T_g^4$, где $\sigma = 5,67032 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²К⁴) - постоянная Стефана-Больцмана, T_g - температура подстилающей поверхности) используется обычно в моделях прогноза погоды в уравнении теплового баланса на нижней границе атмосферы.

Таким образом, целью радиационного блока в моделях прогноза погоды является определение функций ε_v , S , D и B . Действительная картина радиационных процессов в реальной атмосфере очень сложна, зависит от большого числа рассеивающих и поглощающих субстанций, облаков и аэрозоля, оптических и геометрических характеристик

подстилающей поверхности, спектральных характеристик поглощения, излучения и рассеяния газообразных и мелкодисперсных составляющих воздуха, В настоящее время математические модели прогноза погоды не в состоянии адекватно воспроизводить всю эту многопараметрическую картину радиационных процессов и их взаимодействия с динамикой атмосферных процессов. Обычно в моделях для определения ε_v , S, D и В используется температура, влажность, давление, водность облаков и осадков, т.е. искомые характеристики состояния атмосферы, в узлах трехмерной разностной сетки. Все остальные характеристики, определяющие радиационные процессы, либо параметризуются через указанные функции, либо считаются равными некоторым известным средним значениям.

Функции ε_v , S, D и В, по-видимому, нельзя считать постоянными во времени. Их изменчивость связана, прежде всего, с динамикой облачности, температуры, влажности и альbedo подстилающей поверхности.

Характеристики солнечного и земного спектров излучения

Исходя из современных представлений, целесообразно выделить три спектральных интервала, обладающих относительной однородностью процессов поглощения (излучения) радиации: $0,3 \text{ мкм} \leq \lambda_1 < 0,75 \text{ мкм}$; $0,75 \text{ мкм} \leq \lambda_2 < 4 \text{ мкм}$; $4 \text{ мкм} \leq \lambda_3 < 50 \text{ мкм}$.

Расчеты потоков радиации в длинноволновом диапазоне ($\lambda > 4 \text{ мкм}$) и коротковолновом ($\lambda \leq 4 \text{ мкм}$) участках спектра можно проводить отдельно, независимо друг от друга, так как спектр излучения Солнца и системы «атмосфера - подстилающая поверхность» практически не перекрываются. В соответствии с законом излучения абсолютно черного тела 99% энергии солнечного излучения сосредоточено в области $0,3 \div 5 \text{ мкм}$ с максимумом около $0,47 \text{ мкм}$ и лишь 0.4% энергии приходится на длины волн с $\lambda > 5 \text{ мкм}$. В спектре же излучения атмосферы и подстилающей поверхности, наоборот, 99% излучаемой тепловой энергии приходится на диапазон $5 \div 50 \text{ мкм}$ и только 0.4% - на область длин волн с $\lambda < 5 \text{ мкм}$. Отдельное решение уравнений переноса радиации в длинноволновом и коротковолновом участках спектра позволяет их существенно упростить - в длинноволновом участке спектра пренебречь процессом рассеяния радиации, а в коротковолновом - собственным излучением Земли, облаков и атмосферы.

Для задач энергетики атмосферы требуется знать лишь интегральные по длинам волн радиационные параметры. Однако процессы преобразования солнечной энергии различны в спектральных интервалах ультрафиолетового ($\lambda < 0.4 \text{ мкм}$), видимого ($0.4 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 0.75 \text{ мкм}$) и инфракрасного ($0.75 \text{ мкм} < \lambda < 4 \text{ мкм}$) излучения, поэтому их следует рассматривать отдельно. Составляющие солнечной постоянной в этих интервалах равны (Гинзбург и Фейгельсон, 1980):

$$I_0^{\text{УФ}} = 120 \text{ Вт/м}^2, \quad I_0^{\text{еСБ}} = 590 \text{ Вт/м}^2, \quad I_0^{\text{Сж}} = 660 \text{ Вт/м}^2;$$

$$I_0 = I_0^{\text{УФ}} + I_0^{\text{ВИД}} + I_0^{\text{ИК}} = 1370 \text{ Вт/м}^2.$$

Индексы УФ, ВИД и ИК здесь и далее обозначают величины, проинтегрированные по спектру длин волн в диапазонах ультрафиолетового, видимого и инфракрасного солнечного излучения соответственно.

Наличие неравенства $I_0^{УФ} \ll I_0^{Вид}$, а также близость методических подходов позволяет обычно объединить задачи об определении ультрафиолетовых и видимых потоков излучения (λ_1) и рассматривать отдельно только область инфракрасного (λ_2) солнечного излучения. В тоже время следует отметить, что поглощение УФ-излучения в стратосферном слое озона существенно влияет на термический режим стратосферы.

В спектральном интервале λ_1 имеются полосы поглощения радиации атмосферными газами (кислород, азот, водяной пар и др.), в которых выполняется закон Буге и имеет смысл коэффициент поглощения. Но поскольку радиационный эффект этих процессов ничтожно мал, им обычно пренебрегают. В то же время поглощение солнечной радиации в видимой области спектра аэрозолем может создавать значительный энергетический эффект. Трудность учета этого эффекта обусловлена разнообразием содержания аэрозоля, его химического состава, размеров и формы частиц в атмосфере.

Процессы рассеяния видимой радиации непосредственного радиационного эффекта не имеют, однако существенно перераспределяют поток видимого излучения по направлениям, что в итоге оказывается важным при расчетах потока радиации, дошедшей до подстилающей поверхности. При наличии облаков рассеивающая способность атмосферы пренебрежимо мала по сравнению с рассеивающей способностью облачности.

В области инфракрасного солнечного излучения (λ_2) сосредоточены наиболее сильные полосы поглощения радиации водяным паром и гидрометеорами. Поглощение радиации углекислым газом можно пренебречь с погрешностью менее 5%. Релеевское рассеяние безоблачной атмосферы в инфракрасном участке солнечного спектра пренебрежимо мало. Убывание рассеяния и значительное поглощение приводят к неравенству $A^{ИК} < A^{Вид}$.

В длинноволновой части спектра (λ_3) рассеяние очень мало. По современным данным альбеда облаков лишь в «окне прозрачности» 8÷12 мкм может достигать величин 0.05÷0.1, в среднем по спектру оно еще меньше, поэтому рассеянием теплового излучения можно пренебречь. Излучение и поглощение газовых компонентов атмосферы (N_2 , O_2 , инертных газов) весьма мало. Наиболее сильные полосы поглощения и излучения в этой области спектра принадлежат водяному пару, углекислому газу и гидрометеорам.

Методы расчета потоков радиации

Алгоритмы расчета потоков радиации в разных моделях существенно отличаются и всегда являются приближенными по отношению к точным решениям строгих уравнений теории переноса радиации. Приближенность расчетов неизбежна ввиду следующих обстоятельств:

- ⇒ в динамических задачах не содержится достаточной информации для расчета радиационных потоков;
- ⇒ пространственное (в том числе и вертикальное) разрешение моделей недостаточно велико;
- ⇒ алгоритм расчета радиации в схеме прогноза должен быть экономным - он должен занимать малое время по сравнению с остальными расчетами в модели.

В современных неадиабатических моделях прогноза, близких к задаче мезомасштабного прогноза погоды, применяются различные радиационные алгоритмы. Ниже рассмотрены некоторые из них.

(1) Простейший подход - учет только суточного хода температуры подстилающей поверхности

В этом случае пренебрегают радиационным притоком тепла к атмосфере ε_v . Для вычисления температуры воздуха вблизи подстилающей поверхности и учета суточного хода в качестве минимального приближения можно предложить метод расчета радиационных составляющих баланса тепла (Дымников и Ишимова, 1975):

$$H = S - B + D, \quad (2.5.4)$$

где H - нерадационные члены уравнения баланса.

(1а). В системе уравнений модели прогноза погоды имеется уравнение для водяного пара, отсутствует эволюционное уравнение для жидкой воды облаков и осадков.

Самый простой способ расчета S дает применение формулы Мёллера-Кастрова (Фейгельсон и Дмитриева, 1983):

$$S = I_0(1 - A) \cos \varphi \left[1 - 0.009 \left(\frac{M_v - m_v(z_1)}{\cos \varphi} \right)^{0.3} \right], \quad (2.5.5)$$

где φ - зенитный угол Солнца, A - альbedo подстилающей поверхности, M_v , m_v - поглощающая масса водяного пара

$$m_v(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} q_v(z) \left[\frac{P(z)}{P(0)} \right]^n dz, \quad (2.5.6)$$

где q_v - отношение смеси водяного пара. При расчете значения M_v по формуле (2.5.6) принимается: $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, $n = 0.5$. В работе Фейгельсона и Дмитриевой (1983) принято $A=0.08$, $z_1 = 0$ в отсутствии облаков и $z_1 = Z_{\text{вг}}$ - высоте верхней границы облаков в их присутствии.

Простой способ расчета эффективного излучения с применением интегральных функций пропускания предложен в работе Дымникова и Ишимовой (1975):

$$D - B = \sigma T_g^4 \left[(1 - n_1)(1 - n_2)(1 - 0.3n_3^{2.5}) + 0.2(1 - n_1)n_2 + 0.04n_1 \right] P_\delta(H), \quad (2.5.7)$$

где n_1 , n_2 , n_3 - доля облачности нижнего (1000-850 гПа), среднего (850-500 гПа), и верхнего (500-300 гПа) ярусов соответственно. Их можно определять по линейным соотношениям (Смагоринский, 1960):

$$n_i = \alpha_i v_i + \beta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5.8)$$

Здесь v_i - относительная влажность., коэффициенты

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 3,33 & \beta_1 &= -2,00 \\ \alpha_2 &= 2,00 & \beta_2 &= -0,70 \\ \alpha_3 &= 1,73 & \beta_3 &= -0,43 \end{aligned}$$

а $P_{\delta}(H)$ - интегральная функция пропускания для всей тропосферы при отсутствии облачности. В качестве основной поглощающей субстанции принят водяной пар. Величину $P_{\delta}(H)$ можно аппроксимировать по формуле (Градус и др., 1972):

$$P_{\delta}(H) = \sum_{i=1}^2 a_i \exp\left(\frac{-1,66\alpha_i}{g} \int_0^P g dp\right), \quad (2.5.9)$$

где $\alpha_1 = 0,3$, $a_1 = 0,347$; $\alpha_2 = 0,226$, $a_2 = 0,192$.

(16). Система содержит эволюционные уравнения для водяного пара и жидкокапельной воды.

В мезомасштабной прогностической системе Метеорологической службы Великобритании расчет величин в уравнении (2.5.4) производится следующим образом (Голдинг и Мэхин, 1984).

В расчетах S учитываются изменения зенитного угла Солнца. Влияние слоистообразных облаков учитывается посредством применения функции пропускания τ_c , которая зависит от интегральной плотности жидкой воды в единичном столбе прогнозируемой модельной атмосферы. Функция составлена в соответствии с данными Слинго и Шрекера (1982):

$$\tau_c = \exp\left\{-\frac{7,9 w^{0,3}}{(1,84 + \cos^2 \varphi)}\right\}, \quad (2.5.10)$$

где w - поглощающая масса жидкой воды в $\text{кг}/\text{м}^2$.

Степень непрозрачности для солнечной радиации конвективных облаков определяется баллом кучевой облачности в каждом эле сетки, а сам балл определяется с помощью процедуры параметризации конвекции. Подобным же образом параметризуется обычно много меньшие эффекты рассеяния аэрозолем (τ_s) и поглощения водяным паром (τ_{wv}). Окончательное выражение для коротковолновой радиации у земной поверхности без учета конвективных облаков имеет вид

$$S = I_0 \cos \varphi (1 - A) \tau_s \tau_{wv} \tau_c. \quad (2.5.11)$$

Поверхность земли рассматривается как черное тело, излучающее при температуре поверхности T_g . Инфракрасное излучение слоистых облаков (ε_c) также зависит от значения w и рассчитывается по схеме Линда и Капароса (1982)

$$\varepsilon_c = 1 - \exp(-70w). \quad (2.5.12)$$

Излучение к земной поверхности идет при температуре основания облака T_c . Конвективные облака излучают как черные тела при температуре их основания в зависимости от балла облачности в данном узле сетки. Инфракрасное излучение водяного пара также рассчитывается по соотношению, предложенному Линдом и Капаросом (1982)

$$\varepsilon_{wv} = 0,157 \log_{10} U + 0,611,$$

где U - оптическая толщина водяного пара в $\text{кг}/\text{м}^2$. Излучающая температура (\bar{T}) определяется как невзвешенная средняя из трех модельных уровней ниже 400 м. Учитывается также поглощение водяным паром радиационного потока в слое от нижней границы облака до поверхности земли. Полный баланс инфракрасных потоков без учета конвективных облаков имеет вид

$$D - B = \sigma \left\{ \varepsilon_{wv} \bar{T}^4 + \varepsilon_c (1 - \varepsilon_{wv}) T_c^4 - T_g^4 \right\}. \quad (2.5.13)$$

(2) Расчет радиационных притоков тепла в атмосфере при наличии в модели эволюционного уравнения для водяного пара

В работе Джеррити (1977) приведен способ расчета радиационных притоков тепла в модели прогноза Национального метеорологического центра США по ограниченной территории.

Приходящая от Солнца коротковолновая радиация зависит от астрономических факторов, поэтому в модели рассматривается её суточный и годовой ход. Параметризуется прямое поглощение солнечной радиации водяным паром. Моделируется косвенное нагревание пограничного слоя под воздействием приходящей коротковолновой радиации. Весь этот процесс зависит от рассчитываемых в модели распределений водяного пара и облачности в атмосфере.

Скорость длинноволнового радиационного выхолаживания считается постоянной и зависящей только от облачного покрова.

В рассматриваемой модели водяной пар может присутствовать только в нижних трех слоях.

Для того, чтобы рассчитать выхолаживание, связанное с дивергенцией длинноволнового радиационного потока тепла, в модели предполагается, что в слое будет существовать облачность, если относительная влажность не менее 60%. Далее проводится проверка для определения самого верхнего из трех несущих водяной пар слое, относительная влажность внутри которого указывает на наличие облачности. Затем все слои модели (кроме верхнего изэнтропического слоя), расположенные над самым верхним облачным слоем, охлаждаются со скоростью $1,6666 \cdot 10^{-5}$ град/с. Эта скорость охлаждения применяется на каждом временном шаге. Каждый час производится проверка и пересмотр наличия облачности и связанного с ней длинноволнового выхолаживания. Отметим, что три верхних слоя модели всегда подвержены этому выхолаживанию, так как внутри них и над ними никогда нет водяного пара.

Учитывается также дополнительный физический фактор, связанный с длинноволновым радиационным выхолаживанием в пограничном слое модели. Если относительная влажность менее 60% во всех слоях и если поверхность покрыта снегом или льдом, и если высота Солнца менее 10^0 , то пограничный слой модели охлаждается с повышенной скоростью. Полная скорость выхолаживания в пограничном слое (включая постоянные эффекты и только что отмеченные) составляет $4,4445 \cdot 10^{-5}$ град/с (т.е. 0,16 град/час).

Коротковолновая солнечная радиация нагревает атмосферу в модели двумя путями. Прямое поглощение солнечной энергии водяным паром рассчитывается в нижних трех слоях с учетом оптической толщины водяного пара над данным уровнем (осажденная вода в см), зенитного угла Солнца (для высоты Солнца $> 10^0$) и разности давления

в соответствующих слоях модели. Используется предположение, что $\theta \approx T$, это приводит к недооценке нагревания в верхних слоях, где $\theta > T$.

Для параметризации косвенного нагревания нижней части атмосферы за счет переноса ощутимого тепла от подстилающей поверхности, которая сама нагревается при поглощении приходящей солнечной радиации, вычисляется величина

$$\text{GNDWRM} = k_1 \{1,86 - \text{АН}(1)\} \cos \varphi \{1 - \text{TOPCLD}\} (1 - A). \quad (2.5.14)$$

Здесь: k_1 - множитель, зависящий от параметров модели;
 1,18 - величина, принятая в модели для потока солнечного радиационного тепла, достигающего земной поверхности в относительно сухой атмосфере (в кал/см² мин);
 АН(1) - значение потока солнечной радиации, поглощенного водяным паром;
 $\{1 - \text{TOPCLD}\}$ принимает значения от нуля (при относительной влажности на первом уровне более 60% ($R_1 \geq 60\%$)) до 1 (при $R_k \leq 60\%$, $K = 1, 2, 3$).

Для сухого воздуха над сушей при Солнце в зените скорость нагревания составляет около 0,7 град/час.

(3) Расчет потоков в трех участках спектра с применением интегральных функций пропускания

Ниже описан метод расчета радиационных потоков, примененный в схеме локального прогноза Гидрометцентра СССР (Вельтишев и др., 1982). Для определения ε_v , S , D и B в расчетах используются значения температуры, влажности, водности облаков и осадков, а также давления, вычисленных в узлах трехмерной сетки. Задача одномерная в вертикальном направлении.

Видимый участок спектра: $0,3 \text{ мкм} \leq \lambda_1 < 0,75 \text{ мкм}$

В этом участке спектра учитывается интегральное ослабление потока радиации всей атмосферой или облачностью. Формула для расчета потока радиации на подстилающую поверхность имеет вид

$$F_{\lambda_1}^{\downarrow} = I_0^{(\lambda_1)} (1 - A_i). \quad (2.5.15)$$

Здесь:

- $I_0^{(\lambda_1)}$ - солнечная постоянная в ультрафиолетовом и видимом участках спектра ($I_0^{(\lambda_1)} = I_0^{\text{УФ}} + I_0^{\text{ВИД}} = 710 \text{ Вт/м}^2$). Если верхняя граница области в модели прогноза в модели прогноза расположена ниже озонового слоя (100÷50 гПа), в качестве $I_0^{(\lambda_1)}$ можно применять так называемую «подозонную» солнечную постоянную $I_0^{(\lambda_1)} = 590 \text{ Вт/м}^2$;
- A_i - интегральное альbedo системы «атмосфера - подстилающая поверхность» ($i = 1$ - безоблачная, $i = 2$ - облачная атмосфера).

В облачной атмосфере можно пренебречь рассеивающей способностью атмосферы по сравнению с рассеиванием облаков:

$$A_2 = 1 - (1 - A_1) \exp \left[- \frac{\alpha}{(\cos \varphi)^\beta} \tau_{\text{обл}}^\gamma \right]. \quad (2.5.16)$$

Здесь: $\alpha = 0,14$; $\beta = 0,35$; $\gamma = 0,67$. Оптическая толщина облака вычисляется по формуле:

$$\tau_{\text{обл}} = \delta_1 \bar{\rho} \bar{q}_c h, \quad (2.5.17)$$

где \bar{q}_c - удельная водность облака, $\delta_1 = 0,13 \text{ м}^2/\text{г}$ - осредненная величина коэффициента рассеяния.

Формула (2.5.15) дает погрешность порядка $5 \div 10\%$ в диапазоне значений $5 \leq \tau_{\text{обл}} \leq 100$ и $0 \leq \varphi \leq 80^\circ$.

Инфракрасная солнечная радиация: $0,75 \text{ мкм} \leq \lambda_2 < 4 \text{ мкм}$

В этом спектральном интервале сосредоточены полосы поглощения радиации водяным паром и капельной водой облаков. Поглощение солнечной радиации углекислым газом с погрешностью меньшей 5% можно пренебречь. В модели применяется описанная в работе Краснокутской и Фейгельсон (1973) параметризация переноса излучения солнечной ИК-радиации с использованием интегральных функций пропускания и учетом суммарного (по всему слою) поглощения радиации в облаках. Перенос радиации рассматривается отдельно в надоблачном (безоблачном) и подоблачном слоях.

Вследствие процессов многократного рассеяния в облачных слоях атмосферы поглощающая масса на пути пропущенного или отраженного луча оказывается больше, чем оптическая толщина облака. Поэтому в модели при определении поглощения в облачном слое вводят поправку, учитывающую средние пути пробега фронтов в отраженном и пропущенном лучах.

Тепловое излучение: $4 \text{ мкм} \leq \lambda_3 < 50 \text{ мкм}$

Поле теплового излучения атмосферы зависит от величины температуры подстилающей поверхности, высоты, температуры границ облачного слоя, профилей температуры, влажности и водности, содержания и распределения аэрозоля и CO_2 . Потоки теплового излучения в меньшей степени, чем потоки солнечного излучения зависят от оптических свойств облачности. В модели (Вельтищев и др., 1982) не учитывается ослабление аэрозолем и процессы рассеяния теплового излучения. Рабочие формулы для расчета потоков тепловой радиации записываются с применением функций пропускания из работы Фейгельсон, 1970.

Более подробно приведенные здесь методы описаны в работе Желнина (1984).

Сравнение расчетов радиационных потоков различными методами

В работе Фейгельсон и Дмитриевой (1983) было произведено сравнение результатов расчетов радиации различными методами по одним и тем же исходным данным. В сравнении участвовали методики различных авторов. При расчетах потоков солнечной радиации были реализованы практически точные численные методы решения уравнения переноса: метод сферических гармоник, двухпотокное приближение Эддингтона, метод Монте-Карло. В расчетах теплового излучения участвовали следующие методы:

- ⇒ вычисление потоков в 17-ти спектральных интервалах с последующим их суммированием,
- ⇒ применение различных интегральных функций пропускания.

Результаты различных расчетов затем сравнивались с 17-полосной моделью, принимаемой в качестве эталонной. В результате было показано, что погрешности в определении радиационного баланса подстилающей поверхности в диапазоне 10 Вт/м² могут приводить к погрешностям в прогнозе приземной температуры 1 К. Различия в методах расчета радиационных потоков дают расхождения температуры лучистого равновесия у земной поверхности в 10÷20 К, на уровне тропопаузы - 4÷6 К, в стратосфере - десятки и сотни градусов.

Результаты расчетов по одномерным моделям показывают, что в диапазоне теплового излучения в безоблачной атмосфере величина $\epsilon_v \approx 0$. При наличии облачности ϵ_v отлична от нуля и велика на границах облаков, при этом расчетное значение ϵ_v сильно зависит от вертикального шага (несколько град/час при $O(\Delta z) \approx 0$ и десятые доли град/час при $O(\Delta z) \approx 10^3$ м).

Особенно большой вклад в энергетику мезомасштабных движений дают члены S и D, величины которых существенно зависят от характеристик облачности. Таким образом, пространственно-временное распределение облачности в модели прогноза связано с лучистыми притоками тепла к подстилающей поверхности, что указывает на большое значение адекватного воспроизведения микрофизических процессов в задаче мезомасштабного прогноза погоды.

Глава 3. Краевые условия

3.1. Общие положения

В настоящей главе речь будет идти преимущественно о формулировке краевых условий для дифференциальной прогностической системы уравнений. Данное ограничение следует иметь в виду, поскольку краевые условия, особенно на боковых границах, - та сфера, в которой велика роль эвристических приемов, формулируемых непосредственно в терминах конечных разностей. Эти «вычислительные» краевые условия соотносятся с «дифференциальными» условиями различным образом: часть из них представляют собой дискретизацию дифференциальных условий, другие - избыточны, что связано с тем, что дискретизация повышает порядок прогностической системы уравнений по каким-либо координатам. Наконец, имеется проблема дискретных краевых условий, которой вообще не может быть поставлена в соответствие проблематика дифференциальных краевых условий (такова в значительной степени краевая проблема «вложенных сеток»). Краевые условия для дискретных уравнений рассматриваются в следующей главе, в контексте численных схем.

Вопрос о краевых условиях для прогностической системы уравнений имеет два аспекта.

Во-первых, краевые условия должны быть такими, чтобы приводить к корректной смешанной краевой задаче, т.е. такой задаче, решение которой единственно и устойчиво. В этом отношении речь должна идти прежде всего о количестве независимых краевых условий на каждой границе, и также и об их структуре. Причем, это вопрос должен решаться отдельно для каждого типа прогностической системы. Методы определения требуемого числа краевых условий и условия для конкретных систем уравнений (баротропных и бароклинических гидростатических систем без учета и с учетом вязкости и негидростатических систем также без учета и с учетом вязкости) изучаются в ряде работ главным образом 70-х годов (Чарни и др., 1960; Чарни, 1962; Прессман, 1969; Крайс, 1970, 1974; Сандстрем, 1973, 1977; Крайс и Олигер, 1973; Пекелис, 1974; Кисельникова и Пекелис, 1974; Олигер и Сандстрем, 1978; Густафссон и Сандстрем, 1976, 1978; Эльвиус, 1977; Гордин, 1978а; Сандстрем и Эльвиус, 1979). Общая картина достаточно сложна. Например, для гидростатической системы без учета вязкости нельзя указать корректных краевых условий на боковых границах, поскольку различные моды решения требуют различного распределения суммарного числа краевых условий по данной координате между границами втека и истока²³.

В типичных системах негидростатических уравнений число краевых условий определяется следующими правилами. Для температуры, составляющих скорости и неосаждающихся фаз атмосферной влаги - по одному условию для каждой субстанции на каждой границе (поскольку для этих субстанций по всем координатам так или иначе учитывается диффузия). Для осаждающихся фаз влаги - по одному условию на каждой границе $x_i = \text{const.}$, если диффузия по этому направлению учитывается, и одно условие на границе втека в противном случае. Для давления (или функции Экснера) турбулентную диффузию обычно не учитывают, и поэтому здесь различают два случая. С одной

²³ Данное обстоятельство стимулировало, в частности, развитие спектрально-разностной методики интегрирования примитивных уравнений, при которой каждая мода рассчитывается отдельно (Эльвиус, 1997; Хэк и Шуберт, 1981).

стороны, если используются неупругие уравнения, а также упругие уравнения, в которых пренебрегают адвекцией давления - в этом случае краевые условия для давления вообще не требуются (точнее, они требуются на границе меньшей размерности). С другой стороны, при использовании полные (упругие) уравнения с сохранением адвекции давления требуется одно условие на границе втока по каждой координате x_i .

Практическая значимость указанных правил частично снижается, однако, когда мы переходим ко второму аспекту проблемы краевых условий. Действительно, только на нижней границе расчетной области условия отчетливо формулируются как именно краевые условия, исходя из характера физических процессов, связанных с этой границей. Что же касается верхней и боковых границ, ситуация усложняется, поскольку та «идеальная» задача гидродинамического прогноза, к решению которой мы должны стремиться, - это, очевидно, не смешанная краевая задача, а начальная задача (задача Коши) на сфере или в полупространстве $Z \geq 0$. Смешанная краевая задача возникает лишь как результат ограничений, накладываемых численным решением на ЭВМ. Краевые условия должны, следовательно, «угадывать» решение задачи Коши - таков общий принцип их конструирования. Для прогностических систем сколько-нибудь общего вида «угадывание» возможно лишь с тем или иным приближением. В этой ситуации распространенная практика (Чен, 1973; Чен и Миякода, 1974; Орлански, 1976; Миякода и Розати, 1977) заключается в том, чтобы, ориентируясь непосредственно на условия, требуемые системой дискретных уравнений, ставить избыточное число краевых условий, поскольку и «основные» условия, и «избыточные» в равной степени представляют собой лишь приближенное «угадывание» условий, выполняющихся на решении задачи Коши²⁴. Другая, еще более распространенная практика (Кларк, 1977, 1979; Клемп и Вильгельмсон, 1978а; Триполи и Коттон, 1982 и т.д.), также ориентированная на решение не «объявленной» смешанной краевой задачи, а «подразумеваемой» задачи Коши, заключается в применении разных краевых условий к одной и той же искомой величине в разных членах уравнений (например, адвективных и турбулентных).

Несколько слов об упомянутой «идеальной» формулировке задачи локального прогноза как задачи Коши и о принятых приближениях к ней. Для простоты будем иметь в виду задачу в полупространстве $Z \geq 0$ (а не на сфере) и проблему условий на боковых границах, и таким образом ограничимся рассмотрением задачи на плоскости (X, Y), хотя обсуждаемые ниже вопросы относятся также и к верхней границе.

Задача локального прогноза, о приближенном решении которой может в настоящее время идти речь, формулируется, очевидно, как задача Коши при определенной структуре начального поля. Именно, начальное поле имеет вид $(F^0 + f^0)$, где F^0 и f^0 отличаются в двух отношениях (см. рис. 3.1):

- 1) $F^0 \neq 0$, вообще говоря, всюду, а f^0 - только в области прогноза S ;
- 2) характерный масштаб пространственной изменчивости F^0 на один-два порядка больше, чем f^0 (скажем, 1000-3000 км против 30-300 км)²⁵.

Т.е. F^0 - это крупномасштабный «фон», а f^0 - «наложенные» на этот фон мезомасштабные «возмущения». Основное упрощающее предположение заключается в том,

²⁴ В спектрально-разностных моделях, где имеется возможность формулировать краевые условия для каждой моды отдельно, иногда краевая задача формулируется корректно для одних типов волн (мод) и определяется в избытке (переопределяется) для других (Эльвиус, 1977).

²⁵ Для краткости изложения мы говорим об одном скалярном начальном поле, хотя речь должна идти о начальных полях для всех компонентов решения, а также о различии пространственных масштабов всех неоднородностей подстилающей поверхности в S и вне S .

что за пределами территории прогноза эти возмущения в начальный момент времени отсутствуют (понятие «фона» и «возмущений» здесь и ниже понимаются условно, поскольку линеаризация, вообще говоря, не предполагается и два указанных компонента начального поля F^0 и f^0 , в ходе прогноза могут свободно обмениваться энергией). Решение задачи Коши для прогностической системы уравнений с начальным полем ($F^0 + f^0$) и есть, очевидно, тот идеальный результат, к которому должна стремиться численная схема прогноза.

На практике вместо одной задачи Коши рассматривают две смешанные краевые задачи:

- ◆ задачу с начальным полем F^0 в области S и
- ◆ задачу с начальным полем ($F^0 + f^0$) в области s .

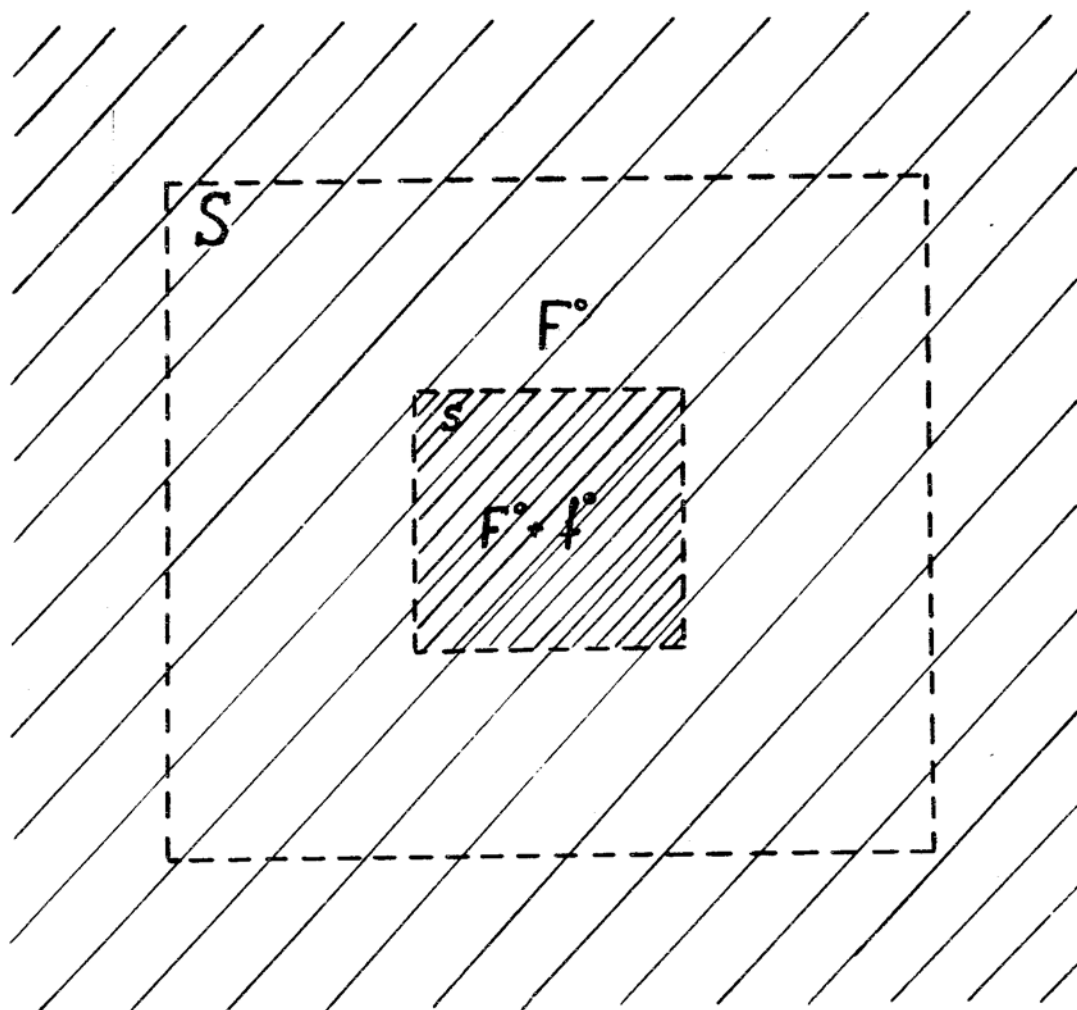


Рис.3.1 Схема соотношения локального прогноза с региональным

Первая из них - это задача «фонового» краткосрочного прогноза, которую, используя гладкость поля F^0 , решают на редкой сетке, а вторая - задача локального прогноза, которую решают на мелкой сетке. При этом возможно:

- 1) рассматривать в S и s одну и ту же систему уравнений или разные системы (например, гидростатическую в S и негидростатическую - в s);

2) решать совместно обе задачи или сначала решить задачу в S , а затем, используя полученное решение, искать решение в s .

В первом случае говорят о *двустороннем взаимодействии* краткосрочного и локального прогнозов, во втором - об *одностороннем* или «паразитическом» воздействии регионального прогноза на локальный прогноз (Филлипс и Шукла, 1973).

Налицо, таким образом, четыре варианта организации локального прогноза в связи с региональным. Из них в гидродинамических моделях и прогностических схемах апробированы три варианта. Четвертый, который, думается, и должен стать основой схем локального прогноза ближайших поколений, состоит в совместном решении гидростатической системы уравнений в области S и негидростатической - в s . Насколько нам известно, этот подход до сих пор не реализован.

Что же касается решения одной и той же системы уравнений в областях S и s , это область так называемых *телескопизированных моделей* или *моделей с вложенными сетками*.

В применении к гидростатическим (баротропным и бароклинным) моделям техника вложенных сеток не только с одинарным, но и с двойным и тройным вложением уже традиционна. Она активно развивалась с конца 60-х годов в одностороннем варианте (Бушби и Тимпсон, 1967; Хилл, 1968; Вэнг и Гальперн, 1970; Шапиро и О'Брайен, 1970; Бенгтссон и Моен, 1971; Асселин, 1972а; Кессель и Виннингоф, 1972; Эльвиус и Сандстрем, 1973; Дэвис, 1973; Чен и Миякода, 1974; Вильямсон и Броунинг, 1974; Крайцберг и др., 1974; Джонс, 1974; Антс, 1974; Окамура, 1975; Бурридж, 1975; Пирке и Крайцберг, 1976; Пирке, 1976; Дивен, 1976; Миякода и Розати, 1977; Эльвиус, 1977; Гаунтлетт и др., 1978; Каленкович и др., 1978, 1984; Дегтярев, 1980; Лесли и др., 1981; Кадышников, 1981; Кричак, 1981, 1985; Каплан и др., 1982; Вонг и др., 1983; Жуванон дю Ваша, 1983; Захариев и др., 1985; Мюллер и др., 1986) и параллельно, хотя и менее активно, чаще всего в моделях тропического циклона, - в двустороннем варианте (Берчфильд, 1960; Мацуно, 1966а; Оокохи, 1972, 1974, 1978, 1979; Гаррисон и Элсбери, 1972; Гаррисон, 1973; Филлипс и Шукла, 1973; Мэтур, 1974; Мадала и Пьяцек, 1975; Элсбери и Лей, 1976; Лей и Элсбери, 1976; Джонс, 1977а,б; 1980; Курихара и др., 1979; Курихара и Бендер, 1980, 1982 (схема с четверным вложением); Хоук и Филлипс, 1981, 1986; Ямада и Банкер, 1986; Бендер и др., 1986; Фалькович, 1986). Вопрос о преимуществах более полной, двусторонней стратегии перед односторонней до сих пор остается решенным скорее в плане методологическом, чем фактическом, поскольку вопрос этот не имеет отчетливой формулировки, т.к. разные авторы реализуют тот или другой вид стратегии по-разному. Филлипс и Шукла (1973) мотивировали качественным анализом и подтвердили тестовыми расчетами на уравнениях мелкой воды преимущество (впрочем, незначительное) двусторонней стратегии. Одновременно Крайс и Оливер (1973), Броунинг и др. (1973) указали на эффект изменения скорости волны при переходе её с грубой сетки на мелкую и обратно, и как результат - на возможность ложной интерференции волн, прошедших и не прошедших через область мелкой сетки. Вообще, генерация вычислительных шумов в окрестности границы области s (рис. 3.1), связанная с различием погрешностей аппроксимации в s и S , - общее явление при использовании вложенных сеток (см., например, Джонс, 1977в, 1980; Магазенков и Шейнин, 1982; Голдинг и др., 1985; Ли Ронг-фенг и Зенг Гинг-кун, 1986).

Решение негидростатических уравнений в области s первоначально рассматривалось в контексте не прогноза в области S , а заданного горизонтально-однородного потока, т.е. одностороннего режима (например, Клемп и Вильгельмсон, 1978аб; Вильгельмсон и Клемп, 1978, 1981; Рэй и др., 1982; Вильгельмсон и Чен, 1982; Вейсман и

Клемп, 1982а; Ротунно и Клемп, 1985; Дрогмайер и Вильгельмсон, 1985 а,б; Кларк, 1979; Хо и Кларк, 1981; Кларк и Гэлл, 1982; Пелтайр и Кларк, 1983). В нескольких работах последних лет негидростатический расчет в s двусторонне сопряжен с негидростатическим же расчетом в S (Блехмн, 1981; Кларк и Фэрли, 1984; Клаассен и Кларк, 1985).

Наконец, в моделях Британской метеослужбы, Отдела прикладных наук США и Гидрометеоцентра СССР в областях S и s решаются разные системы уравнений - негидростатический прогноз в s односторонне сопрягается с гидростатическим прогнозом в области S (Карпенгер, 1979; Голдинг и Мэхин, 1984; Чуанг и др., 1984; Кисельникова и др., 1984).

Обратимся теперь к методам формулировки условий на границах области локального прогноза.

Проблема фиктивных границ и краевых условий на них, не порождающих фиктивных возмущений, возникает в ряде прикладных наук, но в динамической метеорологии и гидрологии (наряду с сейсмологией) - едва ли не наиболее остро. Проблема эта рассматривалась неоднократно как в плане конкретных приложений, так и в более широком плане - как задача вычислительной физики и прикладной математики. Выполненные здесь исследования методически распадаются на две группы. В работах первой группы условия ищутся непосредственно для данной системы уравнений, в работах второй группы - сама система уравнений видоизменяется таким образом, чтобы фиктивные («ошибочные») краевые условия не исказили решение внутри расчетной области.

Первый тип условия называют *условиями излучения*, понимая данный термин расширительно, как условия, выполняющиеся (точно или приближенно) на волнах одного типа, «уходящих», и не выполняющиеся на волнах другого типа, «приходящих» в расчетную область, хотя эти условия не обязательно представляют собой соотношение переноса, как в классическом условии излучения (Зоммерфельд, 1958). Методам построения таких условий посвящена значительная литература (Крайс, 1968; Уортл и др., 1971; Хипс, 1973; Смит, 1974; Пекелис, 1974; Кисельникова и Пекелис, 1974; Лидман, 1975; Белан и Варн, 1975; Беннет, 1976; Хансон и Петчек, 1976; Энквист и Майда, 1977, 1979; Клайтон и Энквист, 1977; Гордин, 1978в; Клемп и Лилли, 1978; Клемп и Вильгельмсон, 1978а; Рейнольдс, 1978; Хедстром, 1979; Бейлис и Туркель, 1980, 1982а,б; Руди и Стрикверда, 1980, 1981).

Необходимым элементом при разработке условий излучения является методика оценки конкретных условий применительно к их способности «выпускать» («излучать») без отражения уходящие волны. Такая методика была предложена на примере уравнения переноса и волнового уравнения в работах Нитты (1964) и Мацуно (1966в) и до настоящего времени применяется без существенных изменений (например, Пирсон, 1974; Пекелис, 1974; Клемп и Лилли, 1978; Клемп и Вильгельмсон, 1978а; Вишневецкий, 1986). Кратко изложим данную методику в более общей, чем обычно, форме, позволяющей исследовать линейные краевые условия с постоянными коэффициентами, достаточно общего вида, для линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим решение системы уравнений вида гармонической волны

$$\vec{\varphi} = \varphi_0(\omega, \vec{k}) \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{x})], \quad (3.1.1)$$

где $\vec{\varphi}$ - вектор искомых функций, $\vec{\varphi}_0$ - амплитудный вектор.

Пусть, например, нас интересуют краевые условия на границе $x = \text{const.}$. Выпишем дисперсионное соотношение для искомой системы уравнений

$$\omega = \omega(k_x, k_y, k_z), \quad (3.1.2)$$

в котором фиксируем значения ω, k_y, k_z . Общее число краевых условий на двух границах $x = \text{const.}$ равно числу волн, допускаемых данной системой при зафиксированных ω, k_y, k_z , т.е. степени (3.1.2) как полинома относительно k_x , а число условий на конкретной (например, левой) границе - числу волн, уходящих с этой границы внутрь области (вправо), причем направление распространения волны определяется в этом случае по знаку групповой скорости. Пусть для определенности общее число условий равно четырем, и из этих четырех волн три, отвечающие значениям k_{x1}, k_{x2}, k_{x3} , распространяются внутрь области, а одна, отвечающая значению k_{x4} , - наружу. Тогда на левой границе должно быть задано три условия²⁶. Пусть нас интересуют «отражательные» свойства некоторого конкретного набора таких условий. Записываем общее решение

$$\bar{\varphi} = \exp[i(\omega t - k_y y - k_z z)](C_1 \bar{\varphi}_{01} e^{-ik_{x1}x} + C_2 \bar{\varphi}_{02} e^{-ik_{x2}x} + C_3 \bar{\varphi}_{03} e^{-ik_{x3}x} + C_4 \bar{\varphi}_{04} e^{-ik_{x4}x}), \quad (3.1.3)$$

в котором без ограничения общности амплитуду C_4 приходящей на границу волны полагаем равной единице. Подставляя выражение (3.1.3) во все три краевые условия, получаем алгебраическую систему уравнений относительно амплитуд отраженных волн C_1, C_2, C_3 . Точными условиями открытых границ будут такие, которые переводят решение

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{04} \exp[i(\omega t - k_{x4}x - k_y y - k_z z)]$$

в нуль при любых ω, k_y, k_z , а приближенными такие, для которых найденные значения $|C_1|, |C_2|, |C_3|$ для любых ω, k_y, k_z (или, по крайней мере, для ω, k_y, k_z , отвечающих энергетически преобладающим волнам) будут малы по сравнению с единицей.

Второй тип краевых условий можно назвать условиями поглощения. Обычно они реализуются на основе фиктивной вязкости: уравнения видоизменяются таким образом, чтобы по мере приближения возмущений к границе на них начинала действовать «сила гашения», как правило, нарастающая с приближением к границе и пропорциональная либо только амплитуде возмущения («релеевская» вязкость), либо - амплитуде и квадрату (иногда более высокой степени) волнового числа (вязкость типа молекулярной).

Этот подход, исторически предшествовавший первому, является более грубым («надежным») и универсальным. Он часто реализуется непосредственно в конечных разностях применением оператора сглаживания, но его дифференциальный «прообраз» обычно достаточно очевиден и поддается «реконструкции». Круг исследований и конкретных алгоритмов этого типа для боковых и/или верхней границ также многочислен

²⁶ Если для разных наборов (ω, k_y, k_z) общее число волн делится на волны, распространяющиеся по X «вправо» и «влево» в разном соотношении, это и значит, что для данной системы уравнений в целом отсутствует корректная система локальных краевых условий по координате X - случай, имеющий место в гидростатической системе уравнений. Далее, если скорость распространения некоторой волны равна нулю (в системах уравнений для идеальной атмосферы это те волны, у которых $\text{Im}(k_x) \neq 0$), то соответствующее краевое условие должно быть задано слева, если $\text{Im}(k_x) < 0$, и справа, если $\text{Im}(k_x) > 0$.

(Бушби Томпсон, 1967; Лизмер и Кюльмайер, 1969; Бенвелл и др., 1971; Кессель и Виннингоф, 1972; Кулей, 1973; Вильямсон и Броунинг, 1974; Крайберг и др., 1974; Бурридж, 1975; Пирке и Крайцберг, 1976; Дивен, 1976; Кларк, 1977; Клемп и Лилли, 1978; Лесли и др., 1981; Серьян и др., 1985; Козлов, 1986). При данном подходе (поскольку возмущения с приближением к границе уничтожаются) режим двухстороннего взаимодействия в значительной степени обесценивается, а одностороннее взаимодействие крупномасштабного фона осуществляется прямым наложением последнего на границе и с затухающим коэффициентом - в некоторой окрестности границы.

На этом мы завершим общий обзор проблемы краевых условий. Некоторые типы алгоритмов, не переводимые в дифференциальную форму, будут дополнительно указаны в следующей главе. Обратимся к более конкретному рассмотрению условий на отдельных границах.

3.2. Условия на боковых границах

В исследованиях по теоретической метеорологии краевые условия типа открытых границ предлагались и изучались, прежде всего, применительно именно к боковым границам расчетной области.

Что касается первого класса условий излучения - большинство развитых здесь методик не достигло той общности, которая требуется для их применения к трехмерной негидростатической системе уравнений. Ограничения связаны с разными моментами:

- ⇒ с определенным типом уравнений или волн (условие строгой гиперболичности в работах Крайса (1968, 1974); Энквиста и Майды (1977, 1979); волны Россби у Белана и Варна (1975));
- ⇒ чрезмерным объемом вычислений (многократное решение задачи у Смита (1974); вычисление функции Грина в работах Линдмана (1975), Белана и Варна (1975), Беннета (1976); вычисление полной системы собственных чисел и векторов у Энквиста и Майды (1977));
- ⇒ с ориентацией на получение стационарного решения в работах Руди и Стрикверда, 1980, 1981;
- ⇒ с одномерностью системы уравнений (Хедстром, 1979).

В результате только один подход - несмотря на то, что и он, строго говоря, даже в случае линейных уравнений с постоянными коэффициентами накладывает ряд ограничений, на практике не выполняющихся (см. ниже), - оказался достаточно общим, чтобы найти систематическое применение в мезометеорологических моделях и схемах прогноза. Речь идет об условии излучения типа Зоммельфельда. Поэтому приведем краткие сведения об этом типе условий применительно к линейным уравнениям. На нелинейные уравнения эти методы распространяются эвристически.

Рассмотрим сначала случай локализованного начального поля ($F^0 \equiv 0$ в обозначениях предыдущего параграфа). Такое поле представляет собой суперпозицию волн вида (3.1.1) (условие финитности начального поля). С течением времени каждая волна перемещается по направлению к границе, и поскольку разные волны движутся с разной скоростью, предполагается, что к моменту достижения границы они рассредоточиваются, так что в каждый данный момент времени в каждой данной точке границы находится лишь одна и притом уходящая волна. Пусть, например, речь идет о границе $x = \text{const}$. Запишем условие, которому удовлетворяет любая волна вида (3.1.1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \widehat{C}_{ph}^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\widehat{C}_{ph}^x = -(\partial \varphi / \partial t) / (\partial \varphi / \partial x) = \omega / k_x \quad (3.2.2)$$

где φ - любой компонент $\vec{\varphi}$, а \widehat{C}_{ph}^x - так называемая «ложная» (см. ниже) фазовая скорость в направлении оси X. Условие (3.2.1) и есть краевое условие излучения на границе $x = \text{const.}$, которому могут быть подчинены все компоненты решения $\vec{\varphi}$, независимо от того, скольких условий по данной координате требует корректная формулировка задачи, т.к. в этом случае избыточные краевые условия «угадываются» в точности. Все сказанное относится и к границам $y = \text{const}$ с заменой в (3.2.1) \widehat{C}_{ph}^x на \widehat{C}_{ph}^y , $\partial/\partial x$ на $\partial/\partial y$ и k_x на k_y .

Условия вида (3.2.1) остаются лишь методологическими, пока не указано, каким образом определять величины \widehat{C}_{ph}^x и \widehat{C}_{ph}^y . В тех исследованиях, где решение задачи ищется аналитически в виде ряда или интеграла Фурье (Элиассен и Пальм, 1960; Кеней, 1973; Хипс, 1973; Дрэзин и Су, 1975; Клемп и Лилли, 1975), выражение для фазовой скорости также дается в аналитическом виде, формируя общее решение из одних «уходящих» волн. В прогностических моделях данная методика, конечно, неприменима. Одной из первых работ, рассматривающих методику восстановления \widehat{C}_{ph} применительно к численному интегрированию уравнений, была работа Пирсона (1974). Пирсон и впоследствии Физик (1976) успешно апробировали данную методику. Тем не менее её возможности слишком ограничены, особенно применительно к негидростатическим уравнениям. В моделях последующих лет она, насколько нам известно, не применялась.

Более общая, широко используемая (например, Чен и Орвилл, 1980; Копп и др., 1983) методика была предложена Клемпом и Вильгельмсоном (1978а). С использованием описанной в предыдущем параграфе техники авторы устанавливают, что применение условия (3.2.1) ведет к меньшему отражению, если фазовая скорость завышена, чем если она занижена. Исходя из этого, поступаем следующим образом. Считаем, что фазовая скорость в данном направлении равна сумме скорости адвекции и фазовой скорости внутренних гравитационных волн в данном направлении. Теоретически оцениваем максимально возможное значение этой последней с учетом размеров расчетной области (или определяют самые быстрые волны, представленные в дискретном решении) и складываем с локальным значением соответствующего компонента скорости, вычисляемым в модели. Полученное таким образом значение фазовой скорости используем в условии (3.2.1).

Еще более общие и широко применяемые методы связаны с численной оценкой величины \widehat{C}_{ph} на основе численной реализации первого из равенств (3.2.2). Эти алгоритмы будут освещены в следующей главе.

В вопросе о том, к скольким и каким именно из искомым полей применяются на каждой данной границе условия излучения, господствует немотивированная эвристика. Подход, наиболее адекватный задаче прогноза, высказан Орлански (1976): на каждой границе независимо излучаются все компоненты решения. В пределах данного подхода, в свою очередь, возможны варианты. Так, сам Орлански и аналогично Буге (1983), хотя и применяют условие (3.2.1) ко всем полям, но \widehat{C}_{ph} восстанавливают независимо

лишь для тех полей, для которых имеются эволюционные уравнения (см. также Хан и др., 1983).

Другой подход используется в работе Миллера и Торпа (1981), а также в модели Гидрометеоцентра СССР (Кисельникова и др., 1984), в котором излучаются лишь те величины, для которых имеются эволюционные уравнения, а для величин, описываемых диагностическими соотношениями, краевые условия получают как следствие краевых условий для «эволюционных» величин и систем уравнений.

Третий, наиболее распространенный подход заключается в излучении только нормального к данной границе компонента скорости, а граничные значения остальных величин восстанавливаются по-разному на границах втока и истока, соответственно корректной формулировке краевой задачи для невязких уравнений (при этом краевые условия для нормальных к границе турбулентных напряжений и потоков формулируются отдельно). Различные варианты такого подхода использованы в работах Клемпа и Вильгельмсона (1978а), Кларка (1979), Хо и Кларка (1981), Триполи и Коттона (1982), Шермана и Уортла (1983). Мы пополним данные сведения в следующей главе в связи с вопросами численной реализации краевых условий.

Независимо от всех отмеченных выше моментов применение условий (3.2.1) в рамках численной методики заведомо предполагает дискретную аппроксимацию этого условия и притом одностороннюю, поскольку значения $\bar{\phi}$ известны лишь по одну сторону границы (внутри расчетной области). Отсюда следует, что вычислительно устойчивый краевой алгоритм на основе (3.2.1) возможен лишь при условии соответствующего знака \hat{C}_{ph}^x - такого, при котором эта скорость направлена вовне области²⁷. Но именно так всегда направлена групповая скорость волн (C_{gr}) у границы (волны с противоположным направлением групповой скорости у данной границы возникнуть не могут). Таким образом, приходим к следующему условию применимости методики излучения по данной координате (например, X): условия вида (3.2.1) могут быть устойчиво реализованы на границе $x=const$, если в прогностической системе уравнений для всего спектра волновых чисел (или для энергетически преобладающих участков его) величины \hat{C}_{ph}^x и \hat{C}_{gr}^x имеют одинаковый знак. Для исходных и негидростатических уравнений это условие выполняется для горизонтальных координат, что обеспечивает успешное применение условий вида (3.2.1) на боковых границах в современных мезометеорологических моделях.

Выше мы говорили о предположениях, лежащих в основе формулировки условия (3.2.1) в численных моделях:

- 1) наличие в данный момент времени в данной точке границы лишь одной уходящей волны;
- 2) финитность начального поля.

Прокомментируем эти ограничения.

Возможность избавиться от первого ограничения изучалась в ряде работ (Линдман, 1975; Белан и Варн, 1975; Беннет, 1976; Энквист и Майда, 1977; Гордин, 1978в). Вместо изолированной уходящей волны рассматривалась суперпозиция всех уходящих волн - «уходящий» компонент функции Грина. Выяснилось, однако, что вычисление

²⁷ Вычислительной устойчивости можно, конечно, добиться в любом случае, насильственно корректируя \hat{C}_{ph}^x там, где она направлена внутрь области. Однако, если такая коррекция выполняется для большинства граничных точек и моментов времени, само «излучение» оказывается фикцией и не обеспечивает выполнение условия открытой границы.

соответствующих выражений требует большого расчетного времени и хранения величин в расчетных точках у границы на много предшествующих моментов времени. В итоге мезометеорологических моделей, основанных на данной технике, создано не было.

Условие финитности начального поля в некоторых простых случаях может быть снято (например, переходом в движущуюся систему координат). В общем случае, когда локальный прогноз выполняется на «фоне» регионального или крупномасштабного прогноза, односторонний учет последнего выполняется на основе «линеаризации» полных полей относительно соответствующих «фоновых» полей. Именно, если φ_s - версия характеристики φ , полученная в ходе расчета в области S , а φ_s - версия той же характеристики, рассчитанная в области s (см. рис. 3.1), строим разность $\delta\varphi = \varphi_s - \varphi_s$. На основе условия (3.2.1), примененного к полю $\delta\varphi$, восстанавливаем граничное значение $\delta\varphi$ и, прибавляя к нему граничное значение φ_s , получаем искомое значение φ_s (Клемп и Лилли, 1978; Клемп и Вильгельмсон, 1978а; Карпендер, 1982; Кисельникова и др., 1984).

Новый вариант техники излучения был предложен в работе Раймонда и Куо (1984). Авторы используют вместо соотношения (3.2.1) уравнение для вектора «истинной» фазовой скорости \vec{C}_{ph} (в отличие от «ложной» скорости \bar{C}_{ph} , фигурирующей в (3.2.1)):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\vec{C}_{ph} \cdot \text{grad}\varphi) = 0, \quad (3.2.3)$$

где i -й компонент \vec{C}_{ph} дается выражением

$$(\vec{C}_{ph})_i = -\frac{\partial\varphi/\partial t}{\partial\varphi/\partial x_i} \frac{(\partial\varphi/\partial x_i)^2}{(\partial\varphi/\partial x_j)(\partial\varphi/\partial x_j)} = \frac{\omega}{k_i} \frac{k_i^2}{k_j k_j}, \quad (3.2.4)$$

а φ - любой компонент искомой вектор-функции. Оценка величины \vec{C}_{ph} выполняется численно на основе первого равенства (3.2.4), а экстраполяционная формула, получаемая при дискретизации (3.2.3), отличается от формул, получаемых из (3.2.1), тем, что к восстановлению граничного значения привлекаются значения не только во внутренних точках области, но и в точках самой границы (за предшествующий момент времени). Авторы апробировали предложенный метод (содержащий также и другие модификации в части численной реализации) на трех двумерных задачах - для уравнения адвекции, баротропного уравнения вихря и системы уравнений холодного фронта - и получили результаты в несколько (четыре-пять) раз лучше, чем при излучении согласно (3.2.1). К сожалению, эта перспективная методика до настоящего времени остается, по-видимому, не апробированной авторами ведущих мезометеорологических моделей.

Завершая обзор условий излучения, отметим следующее обстоятельство. Дискретизация этих условий превращает их в алгоритмы экстраполяции данного граничного значения φ по известным значениям этой функции φ за текущий и предшествующие моменты времени. Существует, однако, и много других, независимых от дискретизации условий излучения, алгоритмов экстраполяции, используемых в численных схемах в качестве условий на открытых границах (часть из них рассмотрена в работе Миллера и Торпа, 1981), и каждому из них можно поставить в соответствие определенный дифференциальный прообраз. Нередко такой экстраполяционный алгоритм функционирует в

качестве алгоритма открытой границы в контексте данной численной схемы для внутренних точек области, а в терминах дифференциальных соотношений отнюдь не является условием открытой границы. Наглядным примером этому может служить многократно и с успехом апробированное при решении гидростатических уравнений (см., например, Прессман, 1978) условие

$$\varphi_N = \varphi_{N-1}, \quad (3.2.5)$$

(где "N" - граничная точка, «N-1» - смежная с ней внутренняя точка в направлении нормали к границе), которое естественно интерпретировать как численную реализацию условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (3.2.6)$$

(где "n" - направление внешней нормали к границе). Детальное численное интегрирование волнового уравнения по схеме Лакса-Вендорфа показывает, что краевое условие (3.2.5), в самом деле, не порождает отражений, позволяя с высокой точностью получать решение задачи Коши при финитном начальном поле. В то же время, в дифференциальной формулировке условие (3.2.6) для волнового уравнения является вполне отражающим (амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей). Условием открытых границ алгоритм (3.2.5) становится в сочетании со схемой Лакса-Вендорфа, а в контексте других численных схем будет порождать отраженные волны (Пекелис, 1974).

Обратимся ко второму типу условий - условиям поглощения. Выше уже отмечалось, что общий смысл этих условий заключается в модификации уравнений посредством введения искусственной вязкости, «съедающей» возмущения по мере их приближения к границе. Данный механизм нередко вводится на уровне численного алгоритма, и его дифференциальный смысл реконструируется *a posteriori*.

В мезометеорологической практике к числу наиболее детально проанализированных и широко апробированных методов этой группы принадлежит метод «губчатой границы», изложенный в работе Пирке и Крайцберга (1976), но уже ранее реализованный в мезометеорологической модели Университета в Дрекселе (Крайцберг и др., 1974) и обобщивший сходную методику других прогностических моделей (Кессель и Виннингоф, 1972; Миякода, 1973; Кулей, 1973; Чен и Миякода, 1974). В последующие годы данная методика продолжала использоваться (Крайцберг, 1978; Ченг и др., 1981, 1982; Мэддокс и др., 1981; Будра, 1981; Танг и др., 1986).

Существо метода иллюстрируется на примере уравнения переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad C_0 = \text{const.} > 0 \quad (3.2.7)$$

Пусть нас интересует решение задачи Коши для этого уравнения с начальными данными, заданными на полупрямой $x \leq X_N$. При численном интегрировании требуется подчинить φ при $x = X_N$ фиктивному краевому условию, которое, однако, мало изменило бы решение при $x < X_N$. Рассмотрим вместо (3.2.7) уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + C(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (3.2.8)$$

где $C=C_0$ всюду вне «левой» окрестности точки $x=X_N$, а при $x \rightarrow X_N$, $C \rightarrow 0$. Тогда, вне указанной окрестности возмущения по-прежнему будут переноситься со скоростью C_0 , согласно (3.2.7), а попадая в эту окрестность, будут замедляться, накапливаясь здесь, - «собираться в гармошку». Если теперь применить к решению оператор сглаживания, аннулирующий короткие волны, то возмущения, накопившиеся в приграничной зоне, будут «съедены». Таким образом, возмущения по мере приближения к границе будут деформироваться и поглощаться, и на самой границе возмущений не будет, поэтому полное решение здесь следует полагать фоновому макроскопическому значению искомой функции. Для поглощения коротких волн авторы применяют двухэтапную процедуру «сглаживания-восстановления» Шумана (1957) и Шапиро (1970) с тем, чтобы не сильно сгладить длинноволновые компоненты решения. Тем не менее, сглаживание, в конце концов, ощущалось на волнах с длиной до $16 \Delta x$.

В принципиальном отношении описанная методика относится к алгоритмам приграничного сглаживания (в частности, с методом «ньютоновского демпфирования» Антса (1974) и Дэвиса (1976, 1983); см. также Курихара и Бендер (1980, 1983)), и в этом смысле используется в многочисленных моделях, начиная с работы Бушби и Тимсона (см. литературу в предыдущем параграфе). Однако, по мере прогресса в методах вычислений и вычислительной технике и роста требований к точности алгоритмов, данная методика неоднократно становилась объектом критики. Так, Миякода и Розати (1977) провели сравнительные расчеты, используя в рамках одной и той же модели с вложенными сетками краевой алгоритм излучения (в численной реализации Орлански, 1976) и алгоритм Пирке и Крайцберга (1976), и нашли последний весьма грубым, уничтожающим, наряду с фиктивными отражениями, заметную долю существенной информации. Другие авторы отмечают, с одной стороны, вычислительную неэффективность методики поглощения (поскольку буферные приграничные зоны занимают значительную часть территории расчетной области), с другой стороны - её принципиальный порок, заключающийся в том, что возмущения, проходя в буферных зонах через среду с переменными свойствами, вообще говоря, должны испытывать частичное отражение²⁸ (Сандстрем, 1977).

В настоящее время, таким образом, основные достижения и перспективы в формулировке условий на боковых границах (особенно для негидростатических моделей) связаны скорее с техникой излучения, чем поглощения. Положение осложняется, однако, когда мы обращаемся к условиям на верхней границе.

²⁸ Отметим, впрочем, что согласно оценкам Баумхейфнера и Пирке (1982) ошибки, вносимые в прогноз на 48 часов за счет применения краевого алгоритма Пирке-Крайцберга, составляют лишь 20% суммарной ошибки этого прогноза.

3.3. Условия на верхней границе

В общем плане верхние краевые условия сходны с условиями по горизонтали: здесь также отсутствует физически обоснованная граница, и условия должны выбираться такими, чтобы имитировать решение в бесконечном полупространстве. Поэтому и принципиальные подходы к формулировке краевых условий аналогичны рассмотренным выше. А именно, если отвлечься от достаточно многочисленных образцов эвристических экстраполяционных формул, не дающих вообще говоря, даже приближенного решения проблемы²⁹, имеется два подхода: методика излучения и методика поглощения.

Своеобразие заключается в том, что применение условий излучения здесь принципиально затруднено. В предыдущем параграфе мы говорили, что формулировка устойчивого краевого алгоритма излучения возможна, если нормальные к границе компоненты фазовой и групповой скоростей имеют одинаковые знаки. Для внутренних гравитационных волн, энергетически преобладающих в явлениях локального масштаба, данное условие по вертикали не выполняется (Лайтхилл, 1978). Поэтому и в общем случае, т.е. при наличии адвекции, для достаточно длинных по вертикали волн упомянутые скорости будут разных знаков (например, в гидростатической атмосфере при $U = 10$ м/с, $N = 10^{-2}$ с⁻¹, - для волн с длиной волны по вертикали $> 6,3$ км).

В силу такого положения, преобладающей (а до недавнего времени и единственной) систематической методикой формулировки верхнего краевого условия является методика условий поглощения на основе введения фиктивной вязкости в приграничной "буферной" зоне. Большинство авторов (Хаутон и Джонс, 1969; Элиассен и Рекустад, 1971; Фритц, 1979; Триполи и Коттон, 1982; Дюрен и Клемп, 1982в, 1983; Шерман и Уортл, 1983) принимают рэлеевскую форму фиктивной вязкости: в уравнении для эволюции переменной ϕ приписывается «справа» слагаемое $-v(z)\phi$:

$$\partial\phi/\partial t + \dots = \dots - v(z)\phi,$$

где $v(z)$ – заданная неотрицательная функция, тождественно равная нулю ниже определенного уровня и растущая до величины порядка единицы к верхней границе области³⁰. Клемп и Лилли (1978) принимают «молекулярную» форму искусственной вязкости:

$$\partial\phi/\partial t + \dots = \dots - v(z)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right).$$

Аналогичную схему используют авторы прогностической схемы Британской метеорологической службы, задавая на верхней границе нулевое значение возмущений вертикальной скорости (Карпентер, 1979). В негидростатических неупругих уравнениях искусственную вязкость (и рэлеевскую и молекулярную) многократно апробировал Кларк с соавторами (например, Кларк, 1977, 1979; Кларк и Пелтайр, 1977; Пелтайр и Кларк, 1979, 1983). В рамках полных уравнений слой поглощения на основе ньютоновской

²⁹ Критика конкретных образцов таких условий содержится, например, в работе Клемпа и Лилли (1978).

³⁰ В модели Триполи и Коттона (1982), основанной на интегрировании полных уравнений, наряду с рэлеевской вязкостью для поглощения гравитационных волн, на верхней границе принимается условие излучения для акустических волн (что возможно, поскольку на этих волнах групповая и фазовая скорости имеют одинаковые знаки также и по вертикали).

диссипации (толщиной 5 км при общей толщине расчетного слоя 20 км) принимают авторы модели тропического циклона (Виллоуби и др., 1983, 1984; Лорд и др., 1984).

Наиболее детальный анализ условий поглощения на верхней границе дали Клемп и Лилли (1978), найдя их механизм достаточно противоречивым. При малых значениях параметра ν заметная доля энергии достигает верхней границы, порождая отраженные волны. Большие значения ν связаны (при зафиксированной толщине буферной зоны) с большими значениями $d\nu/dz$, что, в свою очередь, ведет к отражению энергии еще в пределах буферной зоны. Это приводит к необходимости увеличению толщины этой зоны для, чтобы при плавном увеличении параметра ν он успел достичь значительной величины. Поэтому у большинства авторов буферная зона занимает от 1/3 до 1/2 толщины всего расчетного слоя, что неэффективно в вычислительном отношении.

Альтернативный подход на основе принципа излучения был предложен Буго (1982, 1983) и Клемпом и Дюрэном (1983). Авторы, используют свойство, которым, строго говоря, обладает лишь линейная гидростатическая система уравнений в приближении Буссинеска и без учета силы Кориолиса. Это свойство заключается в следующем. Пусть при заданных значениях t и z разложения полей функции Экснера Π и вертикальной скорости ω в интеграл Фурье по горизонтальным координатам имеют вид:

$$\Pi(t, x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}(t, k_x, k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (3.3.1)$$

$$\omega(t, x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\omega}(t, k_x, k_y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (3.3.2)$$

Тогда коэффициенты Фурье $\hat{\Pi}$ и $\hat{\omega}$ этих полей на волнах, переносящих энергию вверх, и только на них, связаны локальным соотношением

$$\hat{\Pi}(t, k_x, k_y, z) = N \hat{\omega}(t, k_x, k_y, z) / \left[(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \right]. \quad (3.3.3)$$

Поэтому, обеспечивая, чтобы коэффициенты Фурье $\hat{\Pi}$ и $\hat{\omega}$ полей Π и ω на каждой границе в каждый момент времени и для каждой пары (k_x, k_y) были связаны соотношением (3.3.3), мы обеспечиваем, чтобы здесь имелись только «уходящие» волны (переносящие энергию вверх).

Для систем уравнений более общего вида соотношение (3.3.3) предполагается выполненным приближенно. Окончательно алгоритм излучения на верхней границе для неупругой системы уравнений в контексте всей численной схемы выглядит следующим образом.

- 1) Восстанавливаем в «будущий» момент времени ($n\Delta t$) все искомые поля, кроме Π и ω , всюду, включая верхнюю границу, в силу соответствующих эволюционных уравнений.
- 2) Восстанавливаем всюду поле $\omega^{(n\Delta t)}$, интегрируя уравнение неразрывности снизу вверх, с использованием нижнего краевого условия.

- 3) Раскладываем поле $\omega^{(n\Delta t)}$ на верхней границе в ряд Фурье, соответствующий интегралу (3.3.2) (для этого предполагаем ω на верхней границе периодически продолженной по горизонтали за пределы расчетной области), отыскивая набор значений $\hat{\omega}(t, k_x, k_y, z)$.
- 4) Из (3.3.3) восстанавливаем набор значений $\hat{\Pi}(t, k_x, k_y, z)$ и с помощью дискретного аналога (3.3.1) «собираем» поле Π на верхней границе.
- 5) Восстанавливаем поле Π с использованием найденного значения на верхней границе.

Объем дополнительных вычислений и требования к памяти ЭВМ, связанные с учетом краевого условия, в данном алгоритме значительно скромней, чем в методе фиктивного поглощения.

Клемп и Дюрэн апробировали приведенный алгоритм в расчетах стационарных горных волн в рамках неупругой негидростатической системы уравнений. Результаты оказались той же точности, что и при введении фиктивного вязкого слоя (Клемп и Дюрэн, 1983; Дюрэн и Клемп, 1983), в отличие от ситуации на боковых границах, где алгоритмы излучения показывают себя намного чувствительными, чем алгоритмы поглощения (Миякода и Розатти, 1977). Еще более радикальный результат получен в работе Бэйдера и МакКи (1985), которые на основе моделирования горно-долинной циркуляции с верхней границей расчетной области на высоте 2 км по модели Университета штата Колорадо (Триполи и Коттон, 1982) нашли, что использование на верхней границе условия излучения не приводит к заметным изменениям решения по сравнению с условием жесткой горизонтальной стенки³¹. С другой стороны, Кадо (1986), апробируя условие Буго-Клемпа-Дюрэна, модифицированное применительно к гидростатической модели в σ -координатах, получил результаты, свидетельствующие об эффективности данного условия как условия открытой границы.

Таким образом, условия излучения на верхней границе еще ожидают дальнейшего изучения и апробации. То же относится, по-видимому, и в целом к проблеме краевых условий на верхней границе: существующие здесь методы более пестры и эвристичны, меньше анализировались и апробировались, чем методы для боковых границ. В этой связи актуальна такая организация прогностической модели, которая обеспечивала бы возможно более полный учет внутренних слоев отражения (слоев повышенной устойчивости), обычно имеющих в тропосфере. При наличии таких слоев в пределах расчетного слоя проблема верхнего краевого условия в значительной степени оказалась бы решенной сама собой.

³¹ Авторы, впрочем, не уточняют, какой именно методикой излучения они пользовались.

3.4. Условия на нижней границе и границе раздела воздух-почва, перенос тепла и влаги в почве

В отношении условий на разделе воздух-почва атмосферные характеристики естественно распадаются на два класса: с одной стороны, скорости, не имеющие аналогичных себе характеристик в почве, и с другой стороны, температурные и влажностные характеристики, непосредственно переходящие в аналогичные характеристики почвы и поэтому связанные с ними на разделе определенными соотношениями.

Рассмотрим условия для скоростей.

Одно из таких условий является универсальным: нормальный к поверхности компонент скорости равен нулю, т.е. в случае плоской поверхности

$$W = 0 \quad \text{при } z = z_0 \quad (3.4.1)$$

Из (3.4.1) следует, что адвективные слагаемые прогностической системы уравнений вида $w \frac{\partial \phi}{\partial z}$ (ϕ -любая из искомых функций) не требуют задания условий для ϕ на границе раздела, и при выборе этих условий следует ориентироваться на специфику турбулентных слагаемых.

Физически точные условия для u и v выглядят аналогично (3.4.1)

$$u = v = 0 \quad \text{при } z = z_0, \quad (3.4.2)$$

однако в численных моделях их не принято формулировать в таком виде, т.к. это ведет к необходимости дискретных аппроксимаций $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$ в пределах приземного слоя (ПС), а это, в свою очередь, ведет к большим вычислительным погрешностям, т.к. производные от составляющих u и v по вертикали могут быть очень велики в пределах ПС. В этой связи (3.4.2) чаще используют в диагностических моделях, реализуемых аналитически (Као, 1981; Вэльмслей и др., 1982; Ли и Кау, 1984), а в численных прогностических моделях условия для u и v формулируются непосредственно в терминах турбулентных напряжений для этих величин (Дирдорф, 1973в)

$$\overline{u'w'} \Big|_{z=z_0} = \tau_{13}, \quad \overline{v'w'} \Big|_{z=z_0} = \tau_{23}, \quad (3.4.3)$$

где τ_{13} и τ_{23} восстанавливаются в данный момент времени в данной точке уровня шероховатости согласно теории подобия для ПС. Условия (3.4.3) вычислительно корректны, т.к. напряжения - гладкие функции и производные от них аппроксимируются на дискретной сетке с хорошей точностью³².

Если прогностическая система уравнений пополняется уравнением (2.2.23) для кинетической энергии турбулентности E , то в качестве краевого условия для E используют явную параметризацию этой величины в ПС, основанную на теории подобия, дополнительных предположениях и экспериментальных данных (Вингаар и Котэ, 1974;

³² Мы не останавливаемся здесь на так называемых условиях свободного скольжения ($\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = 0$), так же, как и на их усовершенствованиях (Шлезингер, 1984а), поскольку эти условия оправданы лишь в моделях с грубым вертикальным разрешением ($\Delta z = 0,5 \div 1,0$ км) и не могут дать физически адекватной параметризации ПС в схеме локального прогноза.

Редельспергер и Соммерия, 1981; Ямада, 1981; Алоян и Лазриев, 1980; Алоян и Абраменко, 1982; Пененко и Алоян, 1985).

В связи с возможной негладкостью искомым полей в ПС прогностическую систему уравнений нередко рассматривают лишь вне ПС при $z > h_s$, где h_s - высота приземного слоя. В этом случае краевые условия для всех величин, кроме w (иногда и для w , см. Алоян и Абраменко, 1982), формулируют при $z = h_s$, получая значения искомым функций (или линейную связь между функцией и её производной по z) при $z = h_s$ на основе теории подобия и данных наблюдений. Такой подход, однако, требует знания величины h_s . Обычно её принимают равной некоторой средней величине ~ 50 м. С другой стороны, величину h_s можно определять в каждой точке и на каждом шаге по времени наряду с другими величинами на основе теории подобия (Алоян и др., 1981; Пененко и Алоян, 1985). Представляется, однако, что оба варианта не вполне отвечают специфике задачи локального прогноза. Первый вариант - физически грубый, т.к. высота ПС от ситуации к ситуации может отличаться на порядок, будучи в каждой конкретной ситуации существенной физической характеристикой ПС (Андрэ, 1983). Второй вариант связан с дополнительным расходом машинного времени (учет переменного значения h_s производится с помощью замены координат аналогично учету гор, см. § 1.6). Для оперативной схемы локального прогноза разумным компромиссом между физической точностью и вычислительной экономичностью представляется в данном случае использование условий (3.4.3), но в контексте сетки с переменным шагом Δz , позволяющим автоматически, хотя и сглажено, учитывать колебания высоты ПС. Мы вернемся к этому вопросу в связи с рассмотрением численных алгоритмов.

Переходя к условиям на разделе для θ и q_v , надо предварительно заметить следующее. При достаточно аккуратной параметризации турбулентных потоков уравнения (1.1.3), (1.1.4) можно было бы использовать повсюду при $z > z_0$, а соотношения на разделе воздух-почва (см. ниже), вместе с соотношениями (2.2.1) или (2.2.2), рассматривать как систему краевых условий для уравнений (1.1.3), (1.1.4). Принципиально это было бы аналогично расчету скоростей с использованием (3.4.2), т.е. заданию, например,

$$\theta_0 = \theta(t, x, y, z_0), \quad (q_v)_0 = q_v(t, x, y, z_0). \quad (3.4.4)$$

Однако, так же, как вместо (3.4.2) в качестве краевых условий для u и v принимают полученные с использованием (3.4.2) соотношения (3.4.3), так и вместо (3.4.4) в целях вычислительной точности для θ и q_v используют условия, получаемые из теории подобия с привлечением всех граничных соотношений

$$\overline{\theta' w'} \Big|_{z=z_0} = \tau_3^\theta, \quad \overline{q_v' w'} \Big|_{z=z_0} = \tau_3^{q_v}. \quad (3.4.5)$$

Граничных условий для осадков Q_r на нижней границе не требуется, так как в этом случае турбулентность по вертикали не учитывается, порядок уравнения (1.1.4) становится первым и для решения задачи достаточно одного условия на верхней границе.

Граничные условия для температуры и влажности на поверхности следует выбирать, исходя из типа подстилающей поверхности. В случае водной поверхности в задаче краткосрочного прогноза обычно принимаются условия

$$Q_v = Q = Q_{SAT}, \quad (3.4.6)$$

$$\Theta = \Theta_0 = \Theta_{\text{surface}}(x, y), \quad (3.4.7)$$

поскольку изменения температуры водной поверхности в течение суток бывают незначительными.

Над сушей, где имеется значительный суточный ход температуры и влажности на разделе воздух-почва, ставятся обычно условия баланса тепла и влаги. Для определения температуры на поверхности земли ($z = 0$) задаются два условия: непрерывность температурного профиля

$$\Theta_0 = \Theta_s(x, y) \quad (3.4.8)$$

и условие баланса тепла, которое имеет следующий общий вид

$$H_s - \tilde{E}_s = H_a - \tilde{E}_a - F, \quad (3.4.9)$$

где H_s и H_a - потоки доступного тепла в почве и в воздухе, \tilde{E}_s и \tilde{E}_a - потоки скрытого тепла в почве и в воздухе, F - радиационный поток тепла, считающийся положительным в направлении к поверхности земли.

Аналогично, два условия должны быть заданы для обмена влагой между атмосферой и почвой.

Условие баланса потоков влаги при отсутствии стока можно записать в следующем общем виде

$$\tilde{Q}_s = \tilde{Q}_a + P, \quad (3.4.10)$$

где \tilde{Q}_s - поток влаги в жидкой и парообразной фазах в почве, \tilde{Q}_a - поток общего влагосодержания ($Q = Q_v + Q_c$) в атмосфере, P - поток осадков на поверхности земли. Условие (3.4.10) выполняется до тех пор, пока $Q_s \leq Q_{s \max}$, т.е. почва обладает некоторой предельной влагоемкостью, при достижении которой избыток поступающей из атмосферы влаги выводится из системы в сток.

Та или иная спецификация второго условия для нахождения влажности на поверхности почвы зависит от конкретной формы расчетов тепла и влаги в почве. Мы вернемся к этому вопросу несколько ниже после того, как будут обсуждены подходы к расчету левых частей в уравнениях (3.4.9) и (3.4.10).

Методы расчета тепла и влаги в почве можно разделить грубо на две категории:

- 1) прямой расчет температуры и содержания влаги в некотором слое почвы с использованием соответствующих уравнений переноса;
- 2) использование параметризационных формул, при котором детальный профиль температуры и влажности в почве не рассчитывается, а используются некоторые дополнительные гипотезы о распространении тепла и влаги в почве.

Первый подход в настоящее время используется в основном в работах по микрометеорологии и требует, безусловно, больших затрат времени на проведение расчетов и дополнительной начальной информации, которая часто может отсутствовать. Второй подход менее требователен к вычислительным ресурсам и информационному обеспечению, но зато обладает меньшей точностью.

Рассмотрим сначала подход с включением деятельного слоя почвы в область расчета. В этом случае на некоторой глубине $x_3 = -h_l$ задаются значения

$$\begin{aligned}\Theta_s &= \Theta_s(x, y, -h_f), \\ Q_s &= Q_s(x, y, -h_f).\end{aligned}\quad (3.4.11)$$

В случае краткосрочных прогнозов глубина h_f принимается равной 1 м и является вполне достаточной, так как короткопериодные колебания температуры и влажности на этой глубине практически затухают.

При такой постановке задачи система уравнений (1.1.1)-(1.1.4) должна быть дополнена соответствующими уравнениями переноса тепла и влаги в слое $-h_f \leq x_3 \leq 0$. Обычно считается, что при решении метеорологических задач можно не учитывать процессы миграции влаги в горизонтальной плоскости и ограничиться лишь рассмотрением вертикального обмена.

При более детальном моделировании переноса тепла следует учитывать зависимость теплопроводности почвы от свойств почвенного скелета, пористости почв, степени заполненности их влагой, а также притоки тепла за счет фазовых переходов влаги в почве. Аналогично при моделировании переноса влаги следует учитывать существование её в двух (трех) фазах, а также зависимость процессов переноса влаги от перечисленных выше физических свойств и теплового состояния почвы. При этом уравнения переноса тепла и влаги становятся весьма громоздкими и связанными друг с другом. Описание довольно полных моделей такого рода можно найти, например, в работах Де Вриса (1958), Сиверса и др. (1983).

Представляется, что в прогностически ориентированных мезомасштабных моделях, где неизбежно смогут использоваться лишь обобщенные характеристики почв и растительного покрова, часто отсутствуют детальные начальные данные о температуре и влажности почвы, поэтому можно ограничиться более простыми моделями переноса тепла с введением ряда упрощающих гипотез и эмпирических соотношений.

При расчете температуры можно в первом приближении исключить из рассмотрения потоки скрытого тепла, связанные с фазовыми переходами влаги в почве, и воспользоваться уравнением диффузии

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_s^0 \frac{\partial \Theta_s}{\partial x_3} \right), \quad (3.4.12)$$

коэффициент температуропроводности K_s^0 в котором можно считать функцией влажности почвы. С этой целью можно воспользоваться, например, соотношением, предложенным в работе МакКамбера и Пилке (1981), и аппроксимирующим экспериментальные данные Накшабанди и Конке (1965)

$$\begin{aligned}K_s^0 &= \exp\left\{-\left(P_f + 2.7\right)\right\}, \quad P_f \leq 5.1 \\ K_s^0 &= 0.00041, \quad P_f > 5.1\end{aligned}\quad (3.4.13)$$

Здесь P_f - десятичный логарифм потенциала влаги ψ , выраженного в см. Способ определения ψ будет обсуждаться ниже. Коэффициент теплопроводности $\rho_s c_p K_s^0$ дается в $\text{кал} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$

При расчете переноса влаги в почве можно в первом приближении исключить из рассмотрения парообразную фазу, учет которой существенен лишь в случае сухих легких почв (Де Врис (1958)), и считать процесс изотермическим. С использованием этих упрощающих гипотез уравнение переноса влаги в почве может быть записано в виде

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_s^q \frac{\partial Q_s}{\partial x_3} + \tilde{K}^q \right), \quad (3.4.14)$$

где Q_s характеризует только жидкую фазу влаги, а \tilde{K}^q - коэффициент гидравлической проводимости, K_s^q - диффузионная проводимость.

Для вычисления гидравлической проводимости и диффузивности влаги был предложен ряд эмпирических формул, которые учитывают зависимость этих коэффициентов от влажности и физических свойств почвы. Для расчета коэффициента гидравлической проводимости можно, например, воспользоваться формулой, предложенной Кэмпбелом (1974)

$$\tilde{K}^q = \tilde{K}_{SAT}^q \left(\frac{Q_s}{Q_{S \max}} \right)^{2b+3}, \quad (3.4.15)$$

где \tilde{K}_{SAT}^q - гидравлическая проводимость при $Q_s = Q_{S \max}$ - объемной влажности насыщения. Значения констант $Q_{S \max}$, \tilde{K}_{SAT}^q и b для различных почв можно найти, например в работах Клаппа и Хонбергера (1978) и МакКамбера и Пилке (1981).

Для расчета диффузионной проводимости можно воспользоваться, в частности, формулой, приведенной в работе МакКамбера и Пилке (1981)

$$K_s^q = \frac{b \tilde{K}_{SAT}^q \psi_s}{Q_s} \left(\frac{Q_s}{Q_{S \max}} \right)^{b+3}, \quad (3.4.16)$$

где ψ_s - потенциал насыщения, а все остальные коэффициенты имеют тот же смысл, что и в формуле (3.4.15). Значения ψ_s для различных типов почв также можно найти в этой работе.

Для вычисления потенциала ψ , используемого при расчете K_s^0 в (3.4.13), можно воспользоваться формулой (Клапп и Хонбергер, 1978)

$$\psi = \psi_s \left(\frac{Q_s}{Q_{S \max}} \right)^{-b}, \quad (3.4.17)$$

где коэффициент b имеет тот же смысл, что и в формулах (3.4.15) и (3.4.16).

Система (3.4.14) - (3.4.16), хотя и грубо, описывает реальные процессы миграции влаги в сложном комплексе почва-растительность и обеспечивает в первом приближении аккумуляцию в почве выпадающей из атмосферы влаги и постепенное выведение её из почвы в атмосферу в результате испарения. Это является важным для расчета энергетического бюджета в атмосфере и более точного расчета температуры и влажности в приземном слое атмосферы.

Гипотеза о том, что почвенная влага присутствует только в жидкой фазе, позволяет конкретизировать уравнения баланса (3.4.9) и (3.4.10) и подобрать второе условие

для расчета влажности на поверхности почвы. Предположение об отсутствии парообразной влаги в почве и мгновенном переходе атмосферного конденсата на поверхности в почвенную влагу обозначают, что имеют место два предельных режима:

$$1) \text{ над сухой почвой } (Q_s = Q_{s \min}) \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (3.4.18)$$

$$2) \text{ над максимально увлажненной почвой } (Q_s = Q_{s \max}) \quad Q = Q_{\text{SAT}}. \quad (3.4.19)$$

Получение на основе (3.4.18) и (3.4.19) одного дополнительного краевого условия действительного для всех случаев, производится непосредственно в конечных разностях. Забегая несколько вперед, мы приведем его здесь с тем, чтобы была более понятной форма записи уравнений баланса в дифференциальной форме. Соотношение, обобщающее (3.4.18) и (3.4.19), может быть представлено в виде

$$Q_1 - Q_g = M \left(Q_1 - (Q_{\text{SAT}})_g \right), \quad (3.4.20)$$

где индексом «g» обозначена поверхность, индексом «1» - некоторый уровень в атмосфере, а M представляет собой коэффициент, зависящий от влажности почвы ($M \rightarrow 1$ при $Q_s \rightarrow Q_{s \max}$ и $M \rightarrow 0$ при $Q_s \rightarrow Q_{s \min}$). Конкретная форма представления M в членах, описывающих влажность почвы, будет рассмотрена при описании численных алгоритмов.

С учетом принятых выше дополнительных предположений уравнения баланса тепла и влаги приобретают следующий вид³³

$$K_s^0 \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \rho_s c_s = \left(\overline{w' \theta'} + \frac{L}{c_p \bar{\pi}} \overline{w' q'_v} \right) \pi c_p \bar{\rho} - F = k \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{L}{c_p \bar{\pi}} \frac{\partial Q_v}{\partial z} \right) \pi c_p \bar{\rho} - F, \quad (3.4.21)$$

$$K_s^q \frac{\partial Q_s}{\partial z} + \tilde{K}^q = \left(k \frac{\partial Q}{\partial z} - q_r V_T \right) \frac{\bar{\rho}}{\rho_w}, \quad (3.4.22)$$

где c_s - теплоемкость почвы, а производные $\partial Q_v / \partial z$ и $\partial Q / \partial z$ аппроксимируются с использованием соотношения (3.4.20). Выражение потока влаги в атмосфере долей потенциального испарения полностью соответствует гипотезе о существовании почвенной влаги только в жидкой фазе и обеспечивает выделение скрытой теплоты парообразования лишь при наличии фазовых переходов влаги на поверхности почвы. Такого рода подход к записи потока влаги в приземном слое восходит к работе Хальстеда и др. (1957) и использовался затем в работах Дирдорфа (1978), Монтейта (1981) и ряда других авторов.

Существует и другой подход к представлению потоков влаги в приземном слое атмосферы, когда дополнительное условие на границе записывают в виде

$$Q_1 - Q_g = Q_1 - h (Q_{\text{SAT}})_g, \quad (3.4.23)$$

³³ При записи уравнений баланса потоки в атмосфере представляют, используя выводы теории подобия Монино-Обухова (см. § 2.2)

где h - относительная влажность у поверхности земли, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в (3.4.20). Такого рода подход использовался, например, в работах Эстока (1963), Мирапа (1969) и Сасамори (1970).

Представляется, что вне связи с определением почвенной влаги формула (3.4.23) может давать неправильные результаты. Например, при малой относительной влажности ($h(Q_{SAT})_g < Q_1$) использование (3.4.23) для потока скрытого тепла приведет к выделению скрытой теплоты конденсации и нагреванию поверхности даже при отсутствии фазовых переходов атмосферной влаги.

Таким образом, при условии пренебрежения переносом водяного пара в почве дополнительное граничное условие (3.4.20) представляется предпочтительным по сравнению с (3.4.23).

При включении в область расчета деятельного слоя почвы не возникает никаких принципиальных трудностей с представлением левых частей в уравнениях (3.4.21) и (3.4.22), а также коэффициента M в (3.4.20), так как необходимая информация получается в результате решения (3.4.12) и (3.4.14).

В тех случаях, когда послойный расчет потоков тепла и влаги в почве не производится, применяется ряд дополнительных упрощающих гипотез. В самом простом варианте потоки тепла в почву принимаются нулевыми или задается их пропорциональность потокам тепла в приземном слое атмосферы. Последний подход использовался, например, в работах Касахары и Вашингтона (1971), Никерсона и Смайли (1975). Расчеты температуры с использованием такого рода гипотез не дали хороших результатов (Бумралкар (1975), Дирдорф (1978)), поэтому в позднее стали развиваться подходы с использованием соответствующих прогностических уравнений. Подробный обзор работ по этому вопросу можно найти в статьях Дирдорфа (1978), Якобсена и Хейзе (1982). Сущность данного метода состоит в том, что температура (или влажность) определяется исходя из условия притока тепла (влаги) к конечному тонкому поверхностному слою почвы. Для температуры исходное уравнение представляется в виде

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = \frac{G(z,t) - G(0,t)}{z}, \quad (3.4.24)$$

где Θ_s средняя температура слоя глубиной z , $G(0,t)$ - поток тепла в атмосфере, а $G(z,t)$ - поток тепла на глубине z . За счет малости z предполагается, что Θ_s аппроксимирует температуру поверхности ($\Theta_s = \Theta_g$). В более простом случае (см., например, Корби и др. (1972)) принимается, что $G(z,t) = 0$, т.е. на температуру поверхности почвы оказывает влияние только поток тепла из атмосферы. В более реалистичном приближении (Бумралкар (1975), Блэкэдар (1976)) производится расчет $G(z,t)$, исходя из аналитического решения уравнения теплопроводности при заданной форме теплового возмущения на поверхности. В случае простой периодичности потоков тепла из атмосферы на земную поверхность (суточный цикл с периодом τ_1) уравнение (3.4.24) можно представить в виде

$$\frac{\partial \Theta_g}{\partial t} = \frac{c_1 H_a}{\rho_s c_s d_1} - c_2 \frac{(\Theta_g - \Theta_s)}{\tau_1}. \quad (3.4.25)$$

Здесь $c_1 = 2\pi^{1/2}$, $c_2 = 2\pi$, $d_1 = (K_s^0 \tau_1)^{1/2}$ - величина, пропорциональная глубине суточной тепловой волны в почве, τ_1 - сутки, H_a - поток тепла на поверхность из атмосферы, Θ_s - температура почвы на некоторой глубине. В более простом случае (Бумралкар (1975)) под Θ_s подразумевается среднесуточная температура почвы, постоянная во всем почвенном слое, задаваемая заранее. Тогда для определения температуры почвы на поверхности земли Θ_g достаточно решить численно уравнение (3.4.25). В работах Дирдорфа (1978), Якобсена и Хейзе (1982) производится дальнейшее расширение этой методики введением второго прогностического уравнения для Θ_s . В более простом случае (Дирдорф (1978)) это прогностическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = -\frac{H_a}{\rho_s c_s d_2}, \quad (3.4.26)$$

где $d_2 = (365 K_s^0 \tau_1)^{1/2}$ - величина, пропорциональная глубине годовой температурной волны. В более общем виде, рассмотренном Якобсеном и Хейзе, (3.4.25) и (3.4.26) являются взаимосвязанными, а второй период берется равным нескольким суткам.

Сравнение расчетов температуры поверхности по методикам этого направления с результатами расчетов путем прямого численного решения уравнения теплопроводности на многих уровнях показало, что приближенные расчеты с использованием уравнений типа (3.4.25) - (3.4.26) дают достаточно хорошие результаты в том случае, когда реальная периодичность атмосферных потоков незначительно отличается от наперед заданной суточной или иной цикличности (суперпозиции суточной и более длительной тепловой волны). Результаты расчетов естественно ухудшаются в тех случаях, когда имеют место значительные отклонения от наперед заданных частот, используемых в этой методике. Оценки, сделанные в работе Якобсена и Хейзе (1982), показывают, что даже в наиболее обобщенном виде использование этого приближенного подхода требует вдвое меньших затрат времени на ЭВМ, чем расчеты по четырехслойной модели.

Для расчета влажности на поверхности земли Дирдорфом (1978) выписываются уравнения для Q_g и Q_s , сходные с (3.4.25) и (3.4.26):

$$\frac{\partial Q_g}{\partial t} = -c_1 \left(\frac{\tilde{Q}_a + P}{\rho_w d_1} \right) - c_2 \left(\frac{Q_g - Q_s}{\tau_1} \right), \quad (3.4.27)$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t} = \frac{\tilde{Q}_a + P}{\rho_w d_2}, \quad (3.4.28)$$

где ρ_w - плотность воды, а остальные обозначения сохранены такими же, как в (3.4.10) и в (3.4.25). В качестве второго условия при расчете \tilde{Q}_a используется по-прежнему (3.4.20).

Приближенные методы определения температуры и влажности на поверхности земли, основанные на решении прогностических уравнений для тонкого поверхностного слоя почвы, являются гораздо более экономичными с точки зрения затрат времени на проведение расчетов и менее требовательными к информационному обеспечению. Однако они могут давать определенные ошибки при отклонении временного хода ме-

теоретических величин от правильного суточного или иного хода, заданного априорно соответствующим выбором периодов (частот) при образовании уравнений типа (3.4.25) - (3.4.28). Вопрос о целесообразности прямого расчета переноса тепла и влаги в почве или использовании описанных выше приближений следует, по-видимому, решать, исходя из конкретных вычислительных возможностей и обеспечения начальными данными о состоянии почвы.

В заключение надо заметить следующее. Приведенные балансные соотношения оперируют со значениями температуры атмосферы и атмосферной влажности при $z = z_g$. Эти соотношения должны быть использованы одновременно с соотношениями теории подобия для приземного слоя, где, однако, фигурируют температура и влажность на уровне шероховатости, т.е. при $z = z_0$ (соотношения (2.2.7)). Чтобы получить замкнутую систему уравнений привлекают соотношения (2.2.2), связывающие значения Θ и Q_v на указанных уровнях. Если же, следуя Блэкэдару, ввести уровень «приземной» температуры $z = z_a$ и использовать $\Theta(z_a)$ в соотношениях теории подобия, для замыкания системы уравнений потребуется также уравнение, описывающее эволюцию $\Theta(z_a)$. В результате возникает достаточно сложная трансцендентальная система граничных уравнений, конкретный вид которой зависит от выбранных уравнений и их дискретных аппроксимаций и которая должна решаться во все моменты времени в каждой точке (x, y) расчетной сетки. К опыту решения систем этого вида мы еще вернемся в главе 4.

Глава 4. Конечно-разностные методы в гидродинамическом моделировании и прогнозе локальных явлений погоды

4.1. Общие положения

В предыдущих главах рассматривались вопросы, в которых специфика локального прогноза была выражена сравнительно слабо. Во многих случаях речь шла о методах, одинаково используемых при описании крупно- и мелкомасштабных явлений. Материал настоящей главы теснее связан со спецификой локального прогноза, а именно - с особенностями интегрирования негидростатических уравнений. Тем не менее, и здесь имеется круг вопросов и методов, общий для всей динамической метеорологии. Эти вопросы мы будем освещать лишь кратко, ссылаясь на литературу (в частности, на известную монографию "Численные методы, используемые в атмосферных моделях", т.1, 1976; т.2, 1979) и затрагивая подробнее вопросы, специфически актуальные для техники интегрирования негидростатических уравнений и/или менее систематически рассматриваемые в литературе.

В силу ориентации на негидростатические модели мы ограничиваемся рассмотрением лишь конечно-разностных методов приближенного интегрирования уравнений. Практически все известные негидростатические модели основаны на методах этого класса. Имеется, по-видимому, лишь одно исключение - модель пограничного слоя для несжимаемой сухой атмосферы Лаборатории Ливерморского университета шт. Калифорния, в которой используется метод конечных элементов (Грешо и др., 1982 а,б; Ли и др., 1982). Расчеты, выполненные в указанных публикациях, носят, однако, предварительный характер (для двухмерного модели и не для целей прогноза, а динамической инициализации). Очевидно, в ближайшие одно-два десятилетия конечно-разностные методы сохраняют свое ведущее положение, во всяком случае, в отношении практического прогноза. Обзор других методов (спектрального, псевдоспектрального и метода конечных элементов) содержится, например, во втором томе указанной выше монографии.³⁴

4.2. Погрешность временных и пространственных аппроксимаций

Погрешность конечно-разностного интегрирования прогностических уравнений не исчерпывается погрешностями дискретных аппроксимаций отдельных членов уравнений, но поскольку эти погрешности представляют собой наиболее очевидный и непосредственный источник окончательных ошибок, оценка их вклада в эти последние существенна.

В настоящее время признано, что основными в метеорологических задачах являются ошибки пространственных аппроксимаций. Обычная ситуация такова, что возмущения с пространственными масштабами в 2-4 шага расчетной сетки, описываемые данной сеткой с большими погрешностями, энергетически довольно значительны в изучаемых явлениях, в то время как масштаб их временной изменчивости (час и более)

³⁴ Среди этих методов в последнее десятилетие особенно бурно развивается метод конечных элементов, обладающий значительными преимуществами в учете орографии. Укажем в этой связи ряд работ последнего времени по данной методике, не вошедших в библиографию второго тома "Численных методов, используемых в атмосферных моделях": Стэнфорд и Митчелл, 1978; Стэнфорд и Дейли, 1979; Каллен и Хэлл, 1979; Ли и Као, 1979; Мело и Бену, 1982; Вернер и Бену, 1984; Марчук и Агошков, 1985; Храймек и др., 1986, а также указанные выше работы лаборатории Ливерморского университета шт. Калифорния.

намного превышает величину расчетного шага Δt , диктуемого критерием устойчивости схемы. Следовательно, их временная аппроксимация весьма точна. По оценке Робера и др. (1974) в типичной атмосферной модели погрешности пространственных аппроксимаций дают 40% общей ошибки (причем, это главным образом ошибки аппроксимации адвективных слагаемых (Робер и др., 1972)), а временных аппроксимаций - 1%. В другой работе (Робер, 1981) на основе баротропных уравнений найдено, что в крупномасштабных моделях, использующих аппроксимации 2-го порядка точности по времени и пространству, погрешности временных в 700 раз меньше погрешностей пространственных аппроксимаций. По оценкам Гротьяна и О'Брайена (1976) и Гротьяна (1977) в распространенных сегодня численных схемах скорость перемещения хорошо описывается лишь для тех атмосферных возмущений, у которых на длину волны приходится 8-10 и более шагов сетки, а для волн длины $< 4\Delta x$ погрешность аппроксимации может приводить к неверному знаку групповой скорости.

Значительная роль ошибок пространственных аппроксимаций подтверждается результатами работ, в которых в рамках одной и той же модели сопоставлялись прогнозы на сетках с разным пространственным разрешением, и прогнозы, полученные при пространственных аппроксимациях 2-го и 4-го порядка точности (теоретический анализ уточнений за счет перехода к аппроксимациям 4-го порядка дан Мезингером и Аракавой, 1976). Миякода и др. (1971) сравнивали прогнозы на две недели по модели общей циркуляции на сетках с горизонтальным разрешением в средних широтах 540, 270 и 135 км. Первый прогноз оказался неприемлем, а из двух других третий был заметно точнее второго, причем в течение первых 5-6 дней - в деталях, а затем и в целом. Гельфанд и др. (1986) получили резкое улучшение прогноза по модели общей циркуляции за счет дробления горизонтального шага сетки вдвое. Кэлней-Рива и др. (1976) нашли, что переход к аппроксимации 4-го порядка в схеме краткосрочного прогноза заметно уточняет локализацию и интенсивность барических образований, хотя и не настолько, как дробление шага сетки вдвое. Другие авторы оспаривают даже этот последний вывод. Компана (1979) в экспериментальных прогнозах на 48 часов по 6-слойной полусферной модели Шумана-Говермэйла (1968) нашел, что вариант с шагом сетки 381 км и аппроксимациями 4-го порядка близок по точности к варианту с шагом сетки 190.5 км и аппроксимациями 2-го порядка, заметно ступая лишь в прогнозе количества осадков. Аналогично Лесли и др. (1981) на материале суточных прогнозов по оперативной модели австралийской метеослужбы нашли, что переход от аппроксимаций 2-го порядка к аппроксимациям 4-го порядка при шаге сетки 250 км дает почти такой же эффект в прогнозе градиента давления, как дробление шага сетки вдвое, причем в первом варианте объем вычислений возрастает незначительно, а во втором - в 8 раз. Результаты этого рода стимулировали появление моделей с использованием пространственных аппроксимаций 6-го порядка точности (Каплан и др., 1982).³⁵ В области мезомасштабного моделирования опыт, накопленный по данному вопросу, значительно скромнее, но общие указания имеются и здесь. Например, в публикациях Кларка с соавторами систематически отмечается существенная зависимость результатов моделирования от горизонтального разрешения сетки (Кларк, 1979; Кларк и Гэлл, 1982; Кларк и Фэрли, 1984).

Незначительная роль ошибок временных аппроксимаций также подтверждается целым рядом численных экспериментов. Квизак и Робер (1971) получили очень близкие

³⁵ Упомянем, однако, об отчасти противоположных выводах Вильямсона (1978), полученных на материале 5-суточных прогнозов по модели общей циркуляции: переход к аппроксимациям 4-го порядка не меняет суммарную кинетическую энергию прогнозируемых возмущений, а локализацию уточняет только для коротких волн с номерами гармоник ≥ 10 .

прогнозы на 5 суток по баротропной модели при шагах $\Delta t = 10$ мин и 60 мин. Робер и др. (1972) нашли, что при прогнозе по примитивным уравнениям на сетке с шагом 200 км и шагом по времени 30 мин, через 5 суток ошибка в определении высоты 500-миллибаровой поверхности за счет погрешностей временной аппроксимаций составляют менее 4 м, 300-миллибаровой - менее 5 м, 100-миллибаровой - не более 7 м, и при увеличении шага до 60 мин прогноз менялся мало. Симэн и Антс (1981) сравнивали результаты расчетов над орографически неоднородной местностью по 4-слойной схеме для примитивных уравнений с шагом по пространству 60 км и шагами по времени 90 и 540 сек и нашли результаты весьма близкими. Робер (1982) на материале уравнений мелкой воды нашел, что погрешности временных аппроксимаций остаются малыми при нарушении критерия Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ) (Курант и др., 1928) в 25 раз. Здесь же приведены результаты двух прогнозов для Северной Америки на 48 часов на сетке 190.5 км. Оба прогноза выполнялись дважды с шагами $\Delta t = 1$ час и 2 часа. В обоих случаях различия в прогнозируемых полях малы. Робер и др. (1985) в экспериментах с многоуровневой примитивной моделью нашли, что погрешности временных аппроксимаций остаются малыми, когда величина шага по времени составляет 90 мин, т.е. в 3-6 раз нарушается критерий КФЛ. Аналогичный эксперимент в мезомасштабном моделировании выполняли Марер и Пилке (1978): расчет по 33-го дня наблюдений эксперимента в Вангаре был проведен по явной схеме и повторен по неявной схеме с величиной Δt , в 17 раз превышающей критерий КФЛ. Результаты оказались совпадающими во всех существенных моментах.

Таким образом, повышение точности пространственных аппроксимаций и вычислительной устойчивости - два актуальных аспекта конечно-разностной методики в атмосферных моделях. Правда, известно (Курихара, 1965; Мезингер и Аракава, 1976; Гротьян и О'Брайен, 1976), что неявные аппроксимации, с которыми связана повышенная устойчивость схем, искажают (завышают) фазовую и групповую скорости волн. В этой связи высказывались предположения, что при описании мезомасштабных явлений требования к точности временных аппроксимаций (пределы допустимых нарушений критерия КЛ) могут оказаться жестче, чем для макромасштабных явлений (Мезингер и Аракава, 1976; Янич и Вин-Нильсен, 1977; Коллинз, 1980). Тем не менее, и в этих случаях, очевидно, достаточно ориентироваться на характерный временной масштаб описываемых явлений (Коллинз, 1980). Поэтому, как мы убедимся ниже, оба указанных аспекта остаются актуальными и в вычислительной методике для негидростатических моделей.

4.3. Структура расчетной сетки

Однородность расчетной сетки может нарушаться в двух отношениях: в отношении распределения зависимых и независимых переменных в дискретных времени и пространстве и в отношении размеров расчетных ячеек. В первом случае говорят о "расшатанной" сетке, а во втором - о "неравномерной" сетке.

Расшатанные сетки, введенные Лаксом (1954), используются с расшатыванием как по отдельным координатам, так и одновременно по всем координатам. В метеорологии такую сетку впервые использовал Элиассен (1956) для примитивных уравнений (предложенная им сетка, расшатанная по всем координатам, называется "сеткой Элиассена"). Численные схемы на расшатанных сетках для метеорологических моделей изучались и апробировались в 60-е годы (Филлипс, 1959, 1962; Лилли, 1961, 1964, 1965; Фромм и Харлоу, 1963; Платцман, 1963³⁶; Фишер, 1965; Касахара, 1965; Харлоу и Уэльч, 1965; Оргаз, 1969; Уильямс, 1969; Дирдорф, 1970). В настоящее время расшатанные сетки считаются предпочтительнее нерасшатанных, несмотря на то, что их применение связано с определенными логическими усложнениями. Основные преимущества схем на расшатанных сетках суммируются следующим образом.

1). При данных шагах расчетной сетки такие схемы - точнее, т.к. позволяют избежать процедур осреднения, в частности, по тому направлению, в котором выполняется дифференцирование (что приводит к аппроксимациям с вдвое большим шагом). Это преимущество подтвердил численными экспериментами Оргаз (1971), а Гротьян (1977) теоретически получил уточнение в отношении скорости распространения возмущений³⁷. Антс (1972), используя расшатанную сетку в модели тропического циклона, получил более репрезентативную картину явления в сравнении с предыдущей версией модели на нерасшатанной сетке (Антс и др., 1971).

2). Благодаря отсутствию осреднений схемы на расшатанных сетках в ряде случаев оказываются предпочтительнее в отношении линейной устойчивости. Например, известная схема в разностях "вперед-назад" (см. ниже §§ 4.7 и 4.9) в применении к примитивным уравнениям оказывается условно устойчивой на расшатанной сетке и неустойчивой на нерасшатанной, т.к. в последнем случае в результате осреднений в решении присутствуют растущие волны с длиной, равной двум шагам сетки (Сан, 1980).

3) Расшатанная структура сетки облегчает построение дискретных аппроксимаций, обладающих свойствами интегрального сохранения основных физических характеристик (импульса, массы, общего влагосодержания, вихря, энергии, квадрата вихря, потенциальной энтропии), что является эффективным средством предотвращения нелинейной неустойчивости (Лилли, 1964, 1965; Аракава, 1966, 1972). Схемы с теми или иными свойствами этого рода строились многократно и в настоящее время общепотребительны.

В негидростатических моделях (возможно и в метеорологии в целом) чаще используются пространственно-расшатанные сетки. Принятая сегодня классификация таких сеток на пять основных видов (от "А" до "Е") и их анализ даны в работах Мезингера и Аракавы (1976), Аракавы и Лэмба (1977). Из этих видов наиболее распространена сетка

³⁶ Платцман ввел "сетку Ричардсона", в которой на каждом временном уровне определена лишь часть искомым величин; сетка Элиассена получается суперпозицией сеток Ричардсона.

³⁷ Например, чтобы описать скорость с точностью $\geq 90\%$ на нерасшатанной сетке, шаг сетки должен быть $< 1/10$ длины волны возмущения, а в случае расшатанной сетки та же точность достигается, если шаг сетки $\leq 1/7$ длины волны.

С, введенная в метеорологические исследования Лилли (1965), Харлоу и Уэльчем (1965) и Уильямсом (1969)³⁸.

Структура сетки С в основе своей (поскольку данная сетка, в свою очередь, допускает частные модификации) заключается в том, что скалярные переменные ищутся в центре расчетной ячейки, а компоненты скорости - в центрах соответствующих граней ячейки.

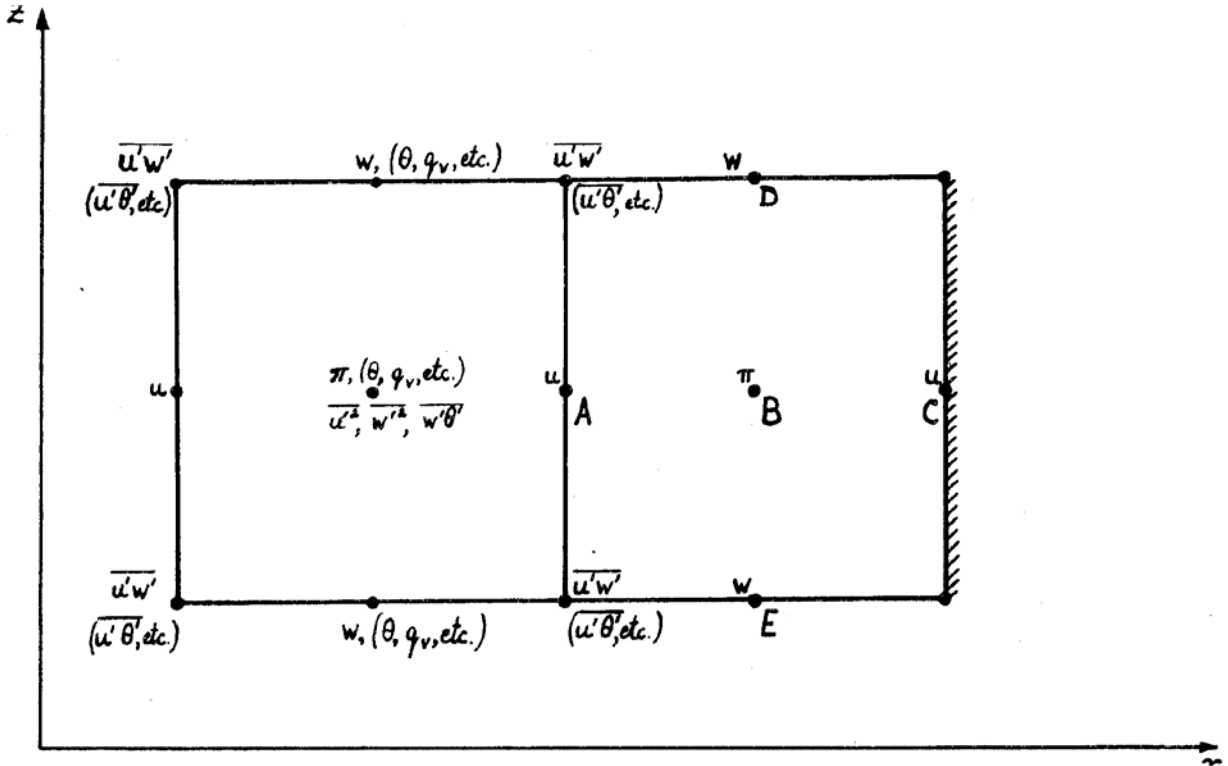


Рис. 4.1. Образец расштанной сетки

Аналогично турбулентные напряжения и потоки ищутся в таких точках, чтобы при дискретизации соответствующих уравнений, дивергенции этих величин могли аппроксимироваться без осреднений. Для двумерного случая такая сетка показана на рис. 4.1 (Дирдорф, 1973б). Комментируя данную сетку, Дирдорф говорит, что температуру и влажностные характеристики лучше задавать там же, где w , иначе (т.е. при задании их в центре ячейки) в условиях устойчивой стратификации ухудшается аппроксимация внутренних гравитационных волн (расштанную сетку, в которой θ и q_v совмещены с w , а не с Π , использовали еще Огура и Чарни, 1962). Добавим, что указанная модификация удобна и с вычислительной точки зрения, т.к. позволяет неявно аппроксимировать недифференцируемые члены в уравнениях для w и θ , исключая тем самым скорость гравитационных волн из критерия устойчивости схемы (см. ниже 4.7).

Из моделей, приведенных в таблице 2, тот или иной вариант сетки С имеется всюду, кроме моделей Пастушкова и Алояна-Пененко, в которых используется нерасштанная сетка, и в английской модели в p -координатах, где расштанная сетка близка к сетке "В" Аракавы. В модели Гидрометцентра СССР (Вельтищев и др., 1982) в связи

³⁸ Последние две работы до настоящего времени остаются, своего рода, эталонами, по образцу которых организуются основные моменты вычислительных алгоритмов для интегрирования неупругих уравнений.

со спецификой пространственно-временной аппроксимации (схема Лакса-Вендоффа) сетка организована несколько иначе, но исходя из того же принципа - минимизировать осреднения при дискретизации градиента давления и дивергенции импульса.

Неравномерные сетки используются для повышения точности аппроксимации в определенных частях расчетной области. Наиболее распространен прием сгущения сетки по вертикали в связи со значительными вертикальными градиентами метеорологических полей в ППС. Обычный диапазон растяжения сетки в мезометеорологических моделях - от $\Delta z = 10 \div 50$ м в нижнем расчетном слое до $\Delta z = 0.5 \div 1$ км в районе тропопаузы. Технически растяжение сетки выполняют переходом к новой вертикальной координате, для которой эта сетка - равномерная. Преобразование координат может быть выполнено аналитически в рамках дифференциальной системы уравнений (Никерсон, 1979; Вильгельмсон и Чен, 1982), или непосредственно в конечных разностях - в форме дискретного преобразования, переводящего заданный набор дискретных уровней в набор равномерно распределенных уровней.

В моделях циклона используют также сетки, неравномерные по горизонтали, с повышенным разрешением в районе оси вихря. И здесь возможны либо непосредственная аппроксимация на неравномерной сетке (Курихара и Тулайя, 1974; Китаде, 1979, 1980), либо предварительная замена переменных (Косс, 1971; Шарма и др., 1986), либо применение сплайн-интерполяций (Прайс и Макферсон, 1973). В негидростатических моделях сетки с постоянно меняющимся горизонтальным шагом не использовались.

Анализ аппроксимации на неравномерных сетках дала Келней де Рива (1972). Ее результат состоит в следующем. Пусть на отрезке $x \in [0, 1]$ используется неравномерная сетка, сгущающаяся к левому концу отрезка, и пусть $x = x(\xi)$ - такое преобразование независимой переменной x , что в пространстве ξ сетка равномерна. Тогда использование дискретизаций 2-го порядка точности по ξ обеспечит 2-й порядок точности также и по x , если:

- 1) $\frac{dx}{d\xi}$ равномерно ограничена на всем отрезке и 2) $\frac{dx}{d\xi} = 0$ при $x=0$.

Смысл первого условия состоит в том, что при дроблении шагов сетки отношение соседних шагов $\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}}$ должно стремиться к единице. Второе условие обеспечивает повышенную разрешимость сетки по x вблизи $x=0$ и не является необходимым: величине $\frac{dx}{d\xi}$ достаточно быть малой при $x=0$.

Влияние неравномерности сетки на устойчивость вычислительной схемы большинством авторов не рассматривается. Однако Брамин и Пандольфо (1979), применив эвристическую методику ("локальной устойчивости" по Рихтмайеру и Мормону, 1967 или "замороженных коэффициентов" по Годунову и Рябенскому, 1977), нашли на примере уравнения переноса и подтвердили численными экспериментами, что неравномерность сетки сама по себе способна стать источником вычислительной неустойчивости даже при неявной аппроксимации (неустойчивость развивается в том случае, если благодаря переменности шага сетки пространственная разность, направленная по потоку, получает больший вес, чем разность, направленная против потока).

4.4. Аппроксимация временных производных

В настоящем и следующих параграфах мы рассмотрим методы дискретизации производных, входящих в неупругую и полную прогностические системы уравнений. Следует иметь в виду, что распределение материала между параграфами является до некоторой степени условным. Наряду с методами, относящимися к дискретизации только временных или только пространственных производных, имеются методы, смысл которых состоит во взаимосогласованной дискретизации тех и других производных (и шире - всех членов уравнений). Такова схема Лакса-Вендоффа, таковы квазилагранжевы методы аппроксимации и т.д. В этих случаях мы располагаем материалом, исходя из удобства изложения.

Наиболее употребительна для дискретизации уравнений по времени схема центральных разностей (Мезингер и Аракава, 1976), называемая также схемой "через шаг" (Ричардсон, 1910, 1922) или схемой "чехарды" (Рихтмайер, 1963). Для уравнения

$$\partial \varphi / \partial t = \psi, \quad (4.4.1)$$

где в Ψ включены также все члены с φ , не содержащие дифференцирования по времени, схема чехарды имеет вид

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n-1)} + 2\Delta t \psi^{(n)} \quad (4.4.2)$$

Здесь "n" - номер шага по времени. Такая схема может быть реализована как на нерасштанной, так и на расштанной сетке. Достоинство схемы (кроме 2-го порядка точности и простоты реализации) заключается в том, что для типичных гиперболических уравнений и при выполнении критерия устойчивости она нейтрально устойчива на всех волнах и потому не дает избыточной диссипации кинетической энергии (этот последний эффект для схем, не использующих центрально-симметричную аппроксимацию по времени, исследовал Курихара, 1965).

Недостаток схемы состоит в ее трехслойности, вследствие чего уравнение (4.4.2) имеет более высокий порядок по времени, чем уравнение (4.4.1) и, следовательно, наряду с физической, содержит вычислительную моду, причем эта последняя, как и физическая мода, нейтральна, т.е. не затухает со временем. При интегрировании на расштанной сетке увеличение порядка уравнений по времени порождает тенденцию к "расщеплению" решения, т.е. слабой взаимозависимости полей, рассчитываемых на четных и нечетных временных шагах (Хейнрици, 1962; Лилли, 1964; Мезингер и Аракава, 1976).

В этой связи применение схемы чехарды требует параллельного применения временных фильтров (см. ниже 4.11) во избежание развития нелинейной неустойчивости. Дирдорф (1973б) отмечает далее, что если система уравнений содержит эволюционные уравнения не только для осредненных полей, но и для вторых моментов, последние целесообразно интегрировать не по схеме чехарды, а по схеме Адамса-Бэшфорта

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} + \Delta t \left(\frac{3}{2} \psi^{(n)} - \frac{1}{2} \psi^{(n-1)} \right),$$

в которой вычислительная мода затухает со временем. С другой стороны, эксперименты, выполненные Орзагом (1971), указали, что для обеспечения равной точности схема Адамса-Бэшфорта требует вдвое меньшего шага по времени, чем схема чехарды.

Применительно к неупругой системе уравнений (1.2.3) - (1.2.6) схема чехарды реализуется следующим образом. Выполнение очередного шага по времени складывается из двух этапов. Сначала - восстановление поля функции Экснера $\Pi^{(n)}$, входящего в правую часть (4.4.2), а затем - восстановление полей скорости, температуры и влажности в $(n+1)$ -й момент времени по явным выражениям вида (4.4.2). Этот второй этап очевиден. Остановимся на первом. Аппроксимация уравнений движения вида (4.4.2) дает выражения компонентов скорости в $(n+1)$ -й момент через $\Pi^{(n)}$. Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности (1.2.3), отнесенное к $(n+1)$ -у моменту, получаем дискретный аналог уравнения (1.2.7), из которого и находим поле $\Pi^{(n)}$.

Вычислительная схема Гидрометцентра СССР (Вельтищев и др., 1982) строится аналогично, но вместо схемы чехарды в ней используется схема Лакса-Вендоффа (LW) (Лакс и Вендофф, 1960) в ее двухшаговой интерпретации (Рихтмайер, 1963). Эта схема не повышает порядок уравнений по времени (но повышает по пространству, достигая за счет 2-го порядка точности по всем координатам), поэтому вычислительная мода в ней отсутствует. На нерасштанной сетке данная схема сильно демпфирует короткие волны (в этой связи Рихтмайер, 1963, предложил схему LW как средство борьбы с нелинейной неустойчивостью). Применение расштанной сетки сильно снижает счетную вязкость в этой схеме (Фишер, 1965; Касахара, 1965; Лилли, 1965).

В плане сравнения схемы чехарды со схемой LW отметим, что первая почти вдвое экономичнее (поскольку схема LW складывается из "вспомогательного" и "основного" шагов с почти полным объемом вычислений на каждом из них). С другой стороны, схема LW, будучи одноуровневой, не содержит вычислительной моды, и сама контролирует развитие вычислительной неустойчивости. Это освобождает от необходимости пользоваться фильтрами (см. 4.11), вносящими в численный алгоритм элементы неопределенности и произвола.

Аппроксимация по двум соседним временным уровням, не содержащая в силу этого вычислительной моды, использована также в модели Шлезингера, 1975. Она заключается в такой модификации схемы направленных разностей, при которой в ней аннулируется заданная доля вычислительной вязкости (Хирт, 1966; Моленкамп, 1968). В первоначальном варианте модели (1975) эта доля составляла 80%. В следующем варианте (1978, 1980) в связи с введением турбулентных слагаемых она была доведена до 100% - в этом случае схема совпадает со схемой Кроули (1968) 2-го порядка точности (которая, в свою очередь, для одномерного уравнения переноса совпадает со схемой LW). В дальнейшем (Шлезингер, 1984а) была модифицирована и эта схема - добавлением слагаемых, аннулирующих основные остаточные слагаемые схемы Кроули, что дало увеличение устойчивости схемы и повысило точность описания фазовой скорости волн

Свою специфику имеет аппроксимация турбулентных слагаемых. В контексте схемы чехарды слагаемые D_φ системы (1.1.1) или (1.2.4)-(1.2.7) должны записываться не в n -й момент времени, как в (4.4.2), а в $(n-1)$ й момент. В противном случае вычислительная мода становится неустойчивой (Лилли, 1964; Рихтмайер и Мортон, 1967; Мезингер и Аракава, 1976). Порядок аппроксимации уравнений при этом не понижается, поскольку эти слагаемые имеют 2-й порядок малости (см. формулировку данных слагаемых в 2.2). В схеме LW турбулентные слагаемые учитываются только на основном,

но не на вспомогательном шаге. И в этом случае порядок аппроксимации схемы по той же причине остается 2-м³⁹.

До сих пор речь шла о явных производных. Среди методов, содержащих элементы неявной аппроксимации и в то же время не использующих технику дробных шагов (о схемах в дробных шагах речь пойдет ниже), наибольшее распространение получила "полунеявная" схема Квизака и Робера, 1971 (см. также Мезингер и Аракава, 1976; Робер, 1979), отличие которой от схемы чехарды связано с временной аппроксимацией градиента давления. В негидростатических системах о применении полунеявной методики приходится говорить лишь применительно к полным уравнениям. Она заключается в том, что при аппроксимации уравнений движения градиент давления $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) аппроксимируется не по значениям $\Pi^{(n)}$ (как предполагается в записи (4.4.2)), а полусуммой значений в $(n-1)$ -й и $(n+1)$ -й моменты. Далее поступаем так же, как и в вышеописанной схеме для неупругой системы: используем представление $U_i^{(n+1)}$ через

$\frac{\partial \Pi^{(n+1)}}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) для исключения $U_i^{(n+1)}$ из уравнения неразрывности и приходим к эллиптическому уравнению относительно $\Pi^{(n+1)}$. Восстановив $\Pi^{(n+1)}$, восстанавливаем остальные величины. Таким образом, полунеявная методика "уравнивает" полную систему с неупругой в вычислительном отношении. Эта методика использована в модели Метеорологической службы Великобритании (МСВ). Ниже мы к ней вернемся.

Другой аспект неявных аппроксимаций указан в работе Пэгля и др. (1976). Он связан с неактуальностью избыточно точных аппроксимаций по времени (см. 4.2). Авторы замечают, что при явных двухслойных аппроксимациях уравнения диффузии обычно используют схему Кранка-Николсона (1947)

$$\left(\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)} \right) / \Delta t = K \left[\alpha \varphi_{xx}^{(n+1)} + (1 - \alpha) \varphi_{xx}^{(n)} \right], \quad \alpha = 1/2 \quad (4.4.3)$$

как обеспечивающую 2-й порядок точности, несмотря на то, что при больших значениях коэффициента диффузии K и/или для больших значений волнового числа данная схема неадекватно описывает (занижает) скорость затухания решения. Авторы предлагают пожертвовать 2-м порядком точности схемы и, выбирая в (4.4.3) большие значения α ($0.75 \leq \alpha \leq 1$), стремиться к более адекватному демпфированию коротковолновых компонентов решения. Расчеты, выполненные с одномерной нелинейной моделью суточного хода температуры в ППС, показали, что физически репрезентативные и близкие друг к другу результаты дают: расчет с $\alpha = 0.5$ (схема Кранка-Николсона) при $\Delta t = 10$ с и расчет с $\alpha = 0.75$ при $\Delta t = 300$ с. В то же время расчет по схеме Кранка-Николсона с $\Delta t = 60$ с дал физически бессмысленный результат. Мак-Найдер и Пилке (1981, 1984) апробировал данную методику в рамках гидростатической модели и нашли ее высокоэффективной в условиях резкой переменчивости коэффициента турбулентности. Из негидростатических моделей аналогичная аппроксимация турбулентных слагаемых осуществляется в модели Гидрометцентра СССР в рамках методики дробных шагов.

³⁹ В последние годы получили развитие варианты схемы LW повышенного порядка точности с соответственно повышенным порядком разностных уравнений по пространственным координатам (Гедд, 1978, 1980; Карпентер, 1981; Коллинз, 1983). В негидростатических моделях эти схемы не применялись

4.5. Аппроксимация пространственных производных

Как правило, аппроксимация пространственных производных естественно определяется структурой расштанной сетки (поскольку эта структура и конструируется в интересах данных аппроксимаций). Обычно используются центрированные аппроксимации 2-го порядка точности, обеспечивающие выполнение дискретных аналогов тех или иных интегральных законов сохранения (импульса, кинетической энергии и т.д.). Образцы таких аппроксимаций даны в работах Лилли (1964, 1965), Харлоу и Уэльча (1965), Уильямса (1969), Пьяцца и Уильямса (1970). Аракава (1966) и Брайан (1966) рассматривали схемы, обеспечивающие законы сохранения на криволинейных и неравномерных сетках. В работе Уильямса (1969) содержатся рекомендации по аппроксимации диффузионных слагаемых, обеспечивающей их функционирование в дискретной системе, адекватное таковому в дифференциальной системе.

Как отмечалось, порядок точности обычно применяемых аппроксимаций - второй. В модели Клемпа и Вильгельмсона (1978а) с учетом значительных погрешностей, вносимых аппроксимацией адвективных слагаемых (см. 4.2), для описания горизонтальной адвекции приняты выражения 4-го порядка точности, которые, однако, не обеспечивают интегрального сохранения квадратичных характеристик. Чтобы частично компенсировать это обстоятельство, при дальнейшей модификации модели (Вильгельмсон и Чен, 1982) адвективные слагаемые были переписаны и аппроксимированы в консервативной форме (неконсервативная форма была сохранена только в уравнении для температуры, чтобы сохранить алгоритмы последовательного расчета полей температуры и давления). Сходным образом пространственные аппроксимации 4-го порядка точности (по Граммельтведту, 1969) использовались в модели Триполи и Коттона (1980), в этом случае для всех адвективных слагаемых, в том числе и при расчете осадков. В качестве недостающих краевых условий использовались аппроксимация уравнений со 2-м порядком точности в точках, смежных с границей.

В связи с дискретизацией адвективных слагаемых следует упомянуть о группе методов, заключающих элемент лагранжева подхода и представляющих собой то или иное уточнение схемы направленных разностей. Такие методы давно применялись в метеорологии (Вин-Нильсен, 1959), но в последние годы они развиваются и апробируются особенно активно, в том числе и в моделях регионального прогноза (Китадзе, 1979, 1980; Робер, 1981, 1982, 1986; Бейтс и Макдональд, 1982, 1986; Мэтур, 1983, 1986; Бейтс, 1984, 1985; Робер и др., 1985; Риши, 1985, 1986; МакГрегор, 1986). Это связано, в частности, с распространением полуявного метода, в контексте которого использование лагранжева подхода для описания адвекции приводит в некоторых типах уравнений к абсолютной устойчивости вычислительной схем (Робер, 1982). Методика этого рода использовалась и в мезометеорологическом моделировании (Марер и Пилке, 1978; Мак-Найдер и Пилке, 1984).

При несомненных достоинствах лагранжева подхода (особенно в его новейших реализациях типа Риши, 1986) представляется, что поведение этих алгоритмов в областях резкого изменения скорости адвекции еще ожидает своего изучения. В негидростатических моделях схемы с элементами лагранжева подхода до сих пор применялись лишь для расчета адвекции влажностных характеристик, чтобы обеспечить их неотрицательность. В следующем параграфе мы рассмотрим этот вопрос подробнее.

4.6. Расчет массовых долей влаги

Расчет массовых долей влаги до данного момента времени складывается, с одной стороны, из интегрирования соответствующих эволюционных уравнений на данном временном интервале и, с другой стороны, из выполнения процедуры конденсационного приспособления. Используемые здесь подходы рассмотрены в § 1.5, и мы видели, что число конкретных способов весьма значительно. Имеется, однако, трудность, сохраняющаяся при любом подходе. Она заключается в том, что в силу приближенного характера как уравнений (1.1.1) - (1.1.4) или (1.2.4) - (1.2.7), так и погрешностей их численного интегрирования, массовые доли водяного пара могут (и будут) в отдельных пространственно-временных точках принимать отрицательные значения вопреки их физическому смыслу.

Существуют разные точки зрения на это явление. С одной стороны, можно признать, что данный вид погрешностей принципиально не отличается от других видов погрешностей, порождаемых приближенным характером численной модели и что "искусственное" их устранение лишь нарушает внутреннюю логику функционирования принятой физической модели и принятой численной схемы. При такой точке зрения расчет естественно вести с сохранением всех полей неприкосновенными (как это делается, например, в модели Соммерия, 1976), и вопрос решается интерпретацией окончательных рассчитанных полей (значения массовых долей можно считать нулевыми в тех точках, где они отрицательны, или получать их интерполяцией из окружающих точек и т.д.).

Другие авторы корректируют отрицательные значения массовых долей в ходе расчета. Какие именно из массовых долей могут стать отрицательными, зависит от особенностей и прогностической системы, и численного алгоритма, прежде всего от того, в каких термодинамических переменных записана система и как выполняются конденсационное приспособление.

Разнообразны и алгоритмы коррекции массовых долей. Простейший способ заключается в том, чтобы отрицательные массовые доли заменяются нулевыми (Липс, 1977)⁴⁰ Другие авторы с прибавлением влаги в одних точках пропорционально вычитают ее в других точках, чтобы сохранить влагосодержание в расчетной области прежним (прием "заполнения дыр", см. Кларк, 1973; Мэلمان и Синклер, 1977; Яу, 1980). Наиболее тщательная и громоздкая процедура "приспособления", обеспечивающая неотрицательность массовых долей, применена в модели Триполи и Коттона, (1982).

В плане тематики настоящей главы основной интерес представляет, однако, другой класс приемов, исключающих появление отрицательных массовых долей за счет погрешностей временных и пространственных аппроксимаций. Речь идет о дискретизации уравнений адвекции влаги при помощи "монотонных" численных схем, обеспечивающих неотрицательность искомого поля в будущий момент времени, если оно было неотрицательным в предшествующий момент (см. Хартен, 1978). Такие схемы используются для расчета массовых долей облачной и/или осаждающейся влаги. Принципиально говоря, задача заключается в построении монотонной разностной схемы для адвективно-диффузионного уравнения

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \right) = 0. \quad (4.6.1)$$

⁴⁰ И в этом простейшем случае можно поступать двояко: заменять полученную отрицательную величину нулем сразу после ее расчета в данной точке или по завершении всех расчетов для данного момента времени.

Укажем полученные здесь результаты.

Все монотонные схемы представляют собой то или иное уточнение схемы направленных разностей для уравнения переноса, пополненной учетом диффузии. В этом смысле они все содержат элемент лагранжева подхода и примыкают к классу квази-лагранжевых схем, упомянутых в предыдущем параграфе.

Одна из таких схем - "модифицированная схема направленных разностей" - была предложена Сунгом и Огурой (1973). Она представляет собой ближайшее обобщение схемы направленных разностей на случай распатанной сетки и переменных скоростей адвекции. В модели Шлезингера (1975, 1978, 1980) данная схема использовалась для расчета не только облачной и осаждающейся влаги, но и температуры.

Друга, более точная схема, была предложена Кларком и Холлом (1979) и Кларком (1979) и апробировалась как в последующих экспериментах с той же моделью (Кларк, 1981; Хо и Кларк, 1981 и т.д.) так и в расчетах Липса и Хемлера (1982). Эта схема получается следующим образом. Адвективная часть уравнения (4.6.1) дискретизируется согласно схеме Кроули (1968) (2-го порядка точности), диффузионный член аппроксимируется по обычной центрированной формуле (для простоты ограничимся слагаемым по координате x)

$$\left(K_{i+\frac{1}{2}}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - K_{i-\frac{1}{2}}(\varphi_i - \varphi_{-i}) \right) / \Delta x^2,$$

но одновременно, значение коэффициента диффузии корректируется на величину, зависящую от числа Куранта $|u| \Delta t / \Delta x$ и от распределения φ таким образом, чтобы в областях больших градиентов решения схема приближалась к схеме направленных разностей, не допуская значительных нарушений монотонности. Хотя в точном смысле такая схема не монотонна, эксперименты указали, что при ее применении могут возникать лишь ничтожные отрицательные значения массовых долей облачной воды и дождя.

Более систематический подход к получению монотонных схем для уравнения переноса был развит Смоларкевичем (1984). Исходным моментом и здесь принимается схема направленных разностей, к которой затем делается ряд последовательных корректирующих "итераций". Каждая "итерация" заключается в том, что в схеме, полученной в результате предыдущей итерации, погашается ее остаточная вязкость. Но так как итерация, в свою очередь, также выполняется в технике направленных разностей, то она, с одной стороны, вновь вносит вязкость (но уже меньшую), устраняемую последующей итерацией, и т.д. Получается набор монотонных схем, каждая - точнее предыдущей и соответственно использует большее число точек сетки. Эксперименты показали, что фактическая точность схемы перестает заметно повышаться за пределами трех коррекций к исходной схеме направленных разностей. На основании экспериментов автор заключает также, что для фактической точности расчетной схемы она должна быть по крайней мере n -го порядка точности по всем переменным, где n - число пространственных переменных интегрируемого уравнения переноса.

Две из семейства схем Смоларкевича - второго и четвертого порядка точности - апробировались Клаассеном и Кларком (1985) наряду с вышеописанной схемой Кларка при моделировании мелкой кучевой облачности в рамках двумерной версии модели без осадков. Все три схемы были применены для дискретизации уравнений для темпера-

туры и массовых долей пара и влаги. Результаты всех расчетов оказались весьма близкими. Таким образом, вопрос о целесообразности применения усложненных монотонных схем остается пока открытым.

4.7. Аппроксимация членов, не содержащих дифференцирования

В настоящем параграфе рассмотрим вопросы, связанные с аппроксимацией членов, описывающих действие силы Кориолиса и силы плавучести в уравнениях (1.1.10) и (1.2.4), и членов, описывающих стратификацию температурного и влажностного фона (т.е. членов вида $\sigma_\varphi w$ ($\varphi = \Theta, q_v, \text{etc.}$)) в уравнениях (1.1.12) и (1.2.5)-(1.2.6).

Основная проблематика аппроксимации этих членов обнаруживается уже в рамках уравнений для сухой атмосферы, с которой мы и начнем. В этом случае образуются две пары аналогично сцепленных уравнений: уравнения для горизонтальных компонентов импульса, сцепленные членами fu и fv , и, с другой стороны, уравнения для вертикального компонента импульса и уравнение для температуры, сцепленные членами $\lambda\Theta$ и $\sigma_\varphi w$ (см. уравнения (1.1.10)-(1.1.12) и (1.2.4)-(1.2.5)). Проблемы аппроксимации этих членов различаются в случаях (трехуровневой)0 схемы чехарды и двухуровневых схем (схема LW, различные варианты схемы Кроули, полулагранжевы двухуровневые схемы и т.д.).

При аппроксимации указанных членов, например кориолисовых, в рамках *схемы чехарды*

$$u^{(n+1)} - u^{(n-1)} + 2\Delta t (cu_x^{(n)} - fv^{(n)}) = 0, \quad (4.7.1)$$

$$v^{(n+1)} - v^{(n-1)} + 2\Delta t (cv_x^{(n)} + fu^{(n)}) = 0 \quad (4.7.2)$$

свойства устойчивости схемы сохраняются: при выполнении критерия устойчивости схема нейтрально устойчива на всех волновых числах. В этом случае, следовательно, принципиальные проблемы устойчивости отсутствуют (хотя ограничения на величину Δt за счет наличия кориолисова члена ужесточается), а задача аппроксимации сводится к взаимосогласованной записи всех членов, чтобы наличие их не нарушало дискретных аналогов интегральных законов сохранения (Лилли, 1964; Уильямсон, 1969).

Напротив, явная аппроксимация кориолисовых членов в рамках *двухуровневой схемы*

$$u^{(n+1)} - u^{(n)} + \Delta t (cu_x^{(n)} - fv^{(n)}) = 0,$$

$$v^{(n+1)} - v^{(n)} + \Delta t (cv_x^{(n)} + fu^{(n)}) = 0$$

приводит к росту амплитуды решения. Правда, в этом случае собственные числа матрицы перехода равны по абсолютной величине $1 + O(\Delta t^2)$, т.е. рост амплитуды является медленным и схема устойчива (Рихтмайер и Мортон, 1967). Тем не менее, в условиях интегрирования общей нелинейной системы уравнений это может приводить к развитию неустойчивости, хотя и не обязательно: если аппроксимация других членов и учет подсеточной турбулентности вносят заметную счетную вязкость, действие этой последней может преодолевать слабый рост амплитуды, связанной с явным описанием корио-

лисовых членов. Вообще надо заметить, что в мезомасштабных моделях, где роль кориолисовых членов мала, их явное описание, очевидно, никогда не приводит к фактическому развитию неустойчивости, и все сказанное следует с большим основанием отнести на счет другой пары сцепленных уравнений, которая в схематической записи имеет вид:

$$w_t + c w_x - \lambda \theta = 0, \quad (4.7.3)$$

$$\theta_t + c \theta_x + \sigma w = 0. \quad (4.7.4)$$

Развитие неустойчивости в связи с явным описанием членов $\lambda\theta$ и σw в рамках двухуровневой схемы наблюдал в своей модели Шлезингер (1978). В этой же работе со ссылкой на устное сообщение Вильгельмсона указан путь к преодолению данной трудности, ранее уже использованный Розенталем (1970) применительно к гидростатическим уравнениям. Он заключается в обращении к известному методу "разностей вперед-назад", состоящему в том, что сначала одно или несколько эволюционных уравнений системы интегрируются по явным схемам (т.е. с использованием временных разностей, направленных "вперед"), а затем найденные "будущие" значения искомым величин используются при построении дискретных аналогов оставшихся уравнений. Общеупотребительная реализация данного метода заключается в аппроксимации пространственных производных по ранее найденным "будущим" значениям неизвестных (Фишер, 1959; Рихтмаейр и Мортон, 1967; Ямасаки, 1968; Гэдд, 1974; Сан, 1980 и т.д.). Применительно к уравнениям (4.7.3)-(4.7.4) этот метод реализуется в том, что $w^{(n+1)}$, найденное из дискретного аналога (4.7.3), используется для аппроксимации локального слагаемого σw при построении дискретного аналога (4.7.4). В такой схеме амплитуды волн при выполнении критерия устойчивости не растут, и эта модификация действительно устраняет развитие неустойчивости (Шлезингер, 1978)⁴¹.

Другой аспект проблемы заключается в том, нельзя ли обратиться к неявной аппроксимации обеих пар членов (fu, fv) и $(\lambda\theta, \sigma w)$ с тем, чтобы за их счет повысить устойчивость расчетного алгоритма, сохранив природу схемы явной (т.е. сохранив треугольную структуру матрицы перехода). Тем самым была бы достигнута возможность увеличения шага Δt (см. в этой связи 4.2) без заметного вычислительного удорожания схемы. В этом отношении ситуация с членами (fu, fv) и, с другой стороны $(\lambda\theta, \sigma w)$, оказывается существенно разной.

Неявная аппроксимация кориолисовых членов затруднена сразу в двух отношениях. Во-первых, чтобы уравнения (4.7.1) и (4.7.2) представляли собой замкнутую систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных $u^{(n+1)}$ и $v^{(n+1)}$, которую можно было бы разрешить аналитически, скорости u и v должны быть определены в одних и тех же пространственных точках. Это исключает использование сетки типа "С", являющейся во многих отношениях оптимальной. Во-вторых, решая систему уравнений (4.7.1)-(4.7.2) относительно $u^{(n+1)}$ и $v^{(n+1)}$, мы получаем для каждой из этих величин представление, в котором фигурируют и $\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial x}$, и $\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial y}$ (тогда как при явной

⁴¹ В следующем параграфе мы увидим, что аналогичная трактовка кориолисовых членов затруднена. Поэтому малый удельный вес этих членов в локальных процессах и возможность сохранить их явное описание (4.7.1) - (4.7.2) надо признать "удачным" обстоятельством.

аппроксимации fu и fv , $u^{(n+1)}$ выражается только через $\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial x}$, а $v^{(n+1)}$ - только через $\frac{\partial \Pi^{(n)}}{\partial y}$. Это может повлечь за собой трудности в решении уравнения для давления (см. следующий параграф). Таким образом, от неявной аппроксимации кориолисовых членов следует отказаться, тем более что их стабилизирующее воздействие в мезомасштабных процессах в любом случае не могло бы быть значительным (даже при максимально допустимых в локальном прогнозе величинах Δt величина $f \Delta t \leq 0.1$, а стабилизирующее воздействие кориолисовых членов пропорционально $1 + (f \Delta t)^2$).

Напротив, при неявной аппроксимации двух других членов, $\lambda\theta$ и σw , обе указанные трудности не возникают. Первая трудность аннулируется вариантом сетки "С", при котором w , θ и влажностные характеристики ищутся в одних и тех же точках (см. 4.3). Вторая трудность отсутствует благодаря тому, что в уравнении для θ отсутствует Π .

Таким образом, препятствий для неявного описания членов $\lambda\theta$ и σw нет. Такое описание возможно как в рамках схемы чехарды, так и в рамках схемы LW, в обоих случаях с сохранением 2-го порядка точности схем. В схеме LW, в силу ее двухэтапной структуры, неявная аппроксимация может быть введена в двух вариантах: только на первом этапе или на обоих этапах. В первом варианте из критерия устойчивости схемы исключается скорость гравитационных волн, и критерий оказывается чисто адвективным:

$$\left[\frac{(u_i \Delta t)}{\Delta x_i} \right]^2 \leq 1. \quad (4.7.5)$$

Во втором варианте линейная устойчивость еще выше и растет с ростом частоты Брента-Вяйсяля, N . Однако для нелинейной модели фактическим критерием устойчивости остается (4.7.5), и реальное отличие второго варианта от первого заключается не в возможности дальнейшего увеличения шага по времени, а в демпфировании коротких волн, тем более сильном, чем больше N (Кисельникова и др., 1982).

Итак, неявная аппроксимация членов, описывающих силу плавучести и фоновую стратификацию атмосферы, в вычислительном смысле эквивалентна неявной аппроксимации гравитационных волн и исключает скорость последних из критерия устойчивости схемы при минимальном объеме дополнительных вычислительных затрат.

При учете атмосферной влаги алгоритм неявного описания указанных членов видоизменяется в связи с тем, что:

1) член, описывающий силу плавучести, содержит массовые доли влаги (в составе обобщенной виртуальной потенциальной температуры Θ_{v1});

2) вместо одного уравнения для температуры фигурируют два уравнения для квазиконсервативных термодинамических переменных.

Пусть для примера в качестве таковых выбраны эквивалентная потенциальная температура Θ_1 и влагосодержание q (см. выражения (1.5.6) и (1.5.8)). Тогда поступаем следующим образом. В уравнении для вертикальной скорости (1.2.4) член

$$\lambda\theta + g(0.61q_v - q_c - q_r)$$

тождественно преобразуем, выделяя в явном виде $\lambda\theta_1$ и gq . При аппроксимации этого уравнения выделенные члены записываем неявно (или "полуявно"), а оставшиеся -

явно. В уравнениях для $\lambda\theta_1$ и q неявно (или "полуявно") аппроксимируем слагаемые $\sigma_\varphi w$ ($\varphi = \theta_1, q$). В результате в каждой внутренней точке расчетной области получаем систему алгебраических уравнений относительно значений $w^{(n+1)}, \theta_1^{(n+1)}, q^{(n+1)}$ в этой точке с определителем, равным

$$\Delta = 1 + O(\Delta t^2) \cdot g \left(\frac{\sigma_{\theta_1}}{\bar{\theta}_{v1}} - \sigma_q \right).$$

Так как $\frac{d\bar{\theta}_1}{dz} \geq 0$, а $\frac{d\bar{q}}{dz} \leq 0$, то определитель $\Delta \geq 1$. Аналитически разрешая эту систему, получаем соотношения, выражающие указанные величины через известные величины и $\frac{d\pi^{(n)}}{dz}$, что позволяет обратиться к построению уравнения для давления (см. следующий параграф). Данная методика реализована в прогностической модели Гидрометцентра СССР. Расчеты подтверждают, что и в общем случае влажной атмосферы критерием устойчивости такой схемы остается (4.7.5).

4.8. Построение и методы решения дискретного уравнения для давления

Интегрирование диагностического уравнения для давления (функции Экснера) представляет собой необходимый этап численного алгоритма в моделях, основанных на неупругой системе уравнений. Применительно к полной системе уравнений также возможны численные схемы одним из этапов, которых оказывается решение краевой задачи для восстановления давления в данный момент времени. Такова полуявная методика, использованная в модели британской метеослужбы (см. 4.4). Тем не менее, характерные моменты в формировании дискретного уравнения для давления прежде всего связаны со спецификой именно неупругой системы уравнений вида (1.2.4)-(1.2.7).

Дискретное уравнение для восстановления давления в численной схеме для неупругой системы уравнений представляет собой аппроксимацию уравнения (1.2.7). Принципиально говоря, при этом могла бы быть выбрана любая аппроксимация интересующего нас порядка точности, независимая от аппроксимаций других уравнений системы, лишь бы вся численная схема в целом была устойчивой. В этом случае уравнение неразрывности (1.2.3) удовлетворялось бы с известным приближением, как и остальные уравнения системы. Однако на практике (очевидно в общем идеологическом русле построения схем, обладающих свойствами сохранения) в численном интегрировании неупругой системы уравнений господствует традиция такого построения дискретного уравнения для давления, которое обеспечивало бы точное выполнение центрально-симметричного дискретного аналога уравнения неразрывности в каждой внутренней точке расчетной области.

Метод построения искомого уравнения достаточно очевиден. Пусть для аппроксимации уравнений движения (1.2.4) в рамках схемы чехарды выбраны конкретные соотношения

$$\bar{\rho} u_i^{(n+1)} = \bar{\rho} u_i^{(n-1)} - c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_{v1} \frac{\Delta}{\Delta x_i} \pi^{(n)} + \varphi_i, \quad (4.8.1)$$

где i - номер компонента импульса ($i = 1, 2, 3$), $\frac{\Delta}{\Delta x_i}$ - дискретный аналог $\frac{\partial}{\partial x_i}$ при аппроксимации $\frac{\partial \pi}{\partial x_i}$, а φ_i дискретные аналоги остальных членов в (1.2.4), вычисляемые по известным значениям искоемых полей в $(n-1)$ -й и в n -й моменты времени. Пусть также дискретный аналог уравнения (1.2.3), к точному выполнению которого мы стремимся, имеет вид

$$\frac{\Delta}{\Delta x_i} (\bar{\rho} u_i^{(n+1)}) = 0, \quad (4.8.2)$$

Тогда, заменяя все $\bar{\rho} u_i^{(n+1)}$ в (4.8.2) в силу соответствующих выражений (4.8.1.), получим искомое дискретное уравнение для

$$\frac{\Delta}{\Delta x_i} \left(c_p \bar{\rho} \bar{\theta}_{v1} \frac{\Delta}{\Delta x_i} \pi^{(n)} \right) = \frac{\Delta}{\Delta x_i} (\bar{\rho} u_i^{(n-1)}) + \frac{\Delta}{\Delta x_i} (\varphi_i)^{42} \quad (4.8.3)$$

Если теперь решить уравнение (4.8.3) точно, а затем восстановить поля компонентов импульса из (4.8.1), то соотношение (4.8.2) будет выполнено точно в каждой внутренней точке сетки.

Предложение сохранять первое слагаемое в правой части (4.8.3) (даже если уравнение решается на каждом шаге прямым методом, т.е. "точно", и, следовательно, это слагаемое "точно" равно нулю) принадлежит Харлоу и Уэльчу (1965). С тех пор такая форма записи (4.8.3) стала общепринятой. Сохранение данного слагаемого компенсирует машинную погрешность в реализации прямого метода на $(n-1)$ -м шаге, и, таким образом, эти погрешности не накапливаются. Сами Харлоу и Уэльч, использовавшие для интегрирования уравнений Навье-Стокса двухуровневую схему (не содержащую, тем самым, вычислительных мод), вели расчеты и с сохранением данного слагаемого, и без него и нашли результаты очень близкими. Однако Уильямс (1969), применявший схему чехарды, отметил, что в случае наличия вычислительной моды удержание этого слагаемого может быть принципиально. Очевидно также, что сохранение данного слагаемого необходимо также и в двухуровневой схеме, если решение (4.8.3) ищется итерационным методом, т.к. погрешность решения в этом случае сравнительно велика.

Вышеописанная процедура построения дискретного уравнения (4.8.3) накладывает определенные ограничения на выбор аппроксимаций (4.8.1) и (4.8.2) для уравнений движения и неразрывности. А именно, при "неосмотрительном" выборе этих аппроксимаций в уравнении (4.8.3) могут возникнуть члены, соответствующие появлению в левой части уравнения (1.2.7) дополнительных членов второго порядка точности и затрудняющие решение уравнения (4.8.3) (в частности, исключающие возможность применения прямых алгоритмов решения). Это произойдет, если, например, применить к коррио-

⁴² Дискретные операторы $\frac{\Delta}{\Delta x_i}$ в уравнениях (4.8.1) и (4.8.2) и, соответственно, внешний и внутренний операторы в левой части (4.8.3) могут быть различными (один используется для аппроксимации $\frac{\partial \pi}{\partial x_i}$ в уравнениях движения, другой - для аппроксимации $\frac{\partial (\bar{\rho} u_i)}{\partial x_i}$ в уравнении неразрывности), но чтобы не загромождать запись, мы изображаем их одинаково.

лисовым членам технику разностей "вперед-назад", аналогично тому, как это было описано в предыдущем параграфе применительно к членам, описывающим действие плаучести и фоновой стратификации.

Обратимся к методам решения уравнения (4.8.3). Они классифицируются на прямые и итеративные. Преимущество первых - их точность и в связи с этим отсутствие дестабилизирующих воздействий на устойчивость вычислительного алгоритма. Недостатки их связаны с относительной логической громоздкостью и чувствительностью к модификациям в постановке прогностической задачи и в расчетных параметрах (см.1.3). Преимущества итеративных методов связаны с их общностью и простотой организации алгоритмов, а недостатки - с погрешностями результатов, могущих приводить как к вычислительной неустойчивости, так и к физической нерепрезентативности (Фэрнелл, 1980). Вообще итеративные методы, очевидно, оправдывают себя при расчете достаточно гладких полей. В условиях больших значений градиента и кривизны полей (например, над сильно пересеченным рельефом) сходимость итераций замедляется и даже становится проблематичной.

Из прямых методов в моделях таблицы 2 (за редким исключением и в метеорологии в целом) используются два: быстрое преобразование Фурье (БПФ) (Кули и Тукай, 1965; Хокни, 1965, 1969; Уильямс, 1969; Бригэм, 1974; Темпертон, 1977а,б; Виноград, 1978; Каин и др., 1984) и матричное разложение (Хокни, 1969; Бушби и др., 1970), представляющее собой дискретную аналогию БПФ. Тот и другой методы используются, как правило, в сочетании с прогонкой. Среди итеративных методов наиболее эффективны релаксационный метод (Федоренко, 1961, 1964; Николаидес, 1975; Брандт, 1977; Годунов и Рябенский, 1977) и метод переменных направлений (Вэкспресс, 1966), из которых в метеорологических задачах использовался второй.

Сравнивая два прямых метода - БПФ и матричное разложение, можно отметить следующее. Матричное разложение - более общий метод, он применим при более общей структуре как коэффициентов уравнения Пуассона, так и краевых условий. Именно, для применимости матричного разложения принципиально достаточно, чтобы дифференциальная краевая задача для уравнения Пуассона допускала решение методом Фурье (метод "разделения переменных"), т.е. посредством суперпозиции элементарных решений вида

$$\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z) \quad (4.8.4)$$

В этом случае при "разумной" дискретизации система алгебраических уравнений может быть решена методом матричного разложения. В частности, коэффициенты дифференциального уравнения для π сами могут иметь вид (4.8.4), т.е. зависеть от всех пространственных переменных, тогда как БПФ применимо, если коэффициенты уравнения зависят не более чем от одного переменного (для метеорологических моделей в координатах X, Y, Z это всегда переменная Z). С другой стороны, БПФ имеет некоторое преимущество перед матричным разложением в экономичности. Однако это преимущество не качественное, а лишь количественное% при экономной алгоритмической реализации решение уравнения (4.8.3) и тем и другим способом занимает $\sim 1/4$ машинного времени, расходуемого на выполнение всего временного шага (Уильямс, 1969; Фэрнелл, 1980). Таким образом, в перспективном плане для применения в моделях локального прогноза предпочтение следует отдать, видимо, методу матричного разложения. Поскольку, однако, в большинстве существующих сегодня неупругих гидростатических моделей ко-

эффицентны уравнения для π зависят лишь от координаты Z , наибольшее распространение получил метод БПФ. Ниже (см. 4.13) мы укажем пример ситуации, в которой применимо только матричное разложение.

Использование итеративных методов естественней в моделях, основанных на интегрировании полных уравнений, нежели в "неупругих" моделях, поскольку в полных уравнениях и так налицо вычислительный "шум", связанный с нерепрезентативным описанием звуковых волн. Погрешность итеративного решения уравнения для давления может рассматриваться как еще один компонент этого шума, вообще говоря не усугубляющий его. Итеративный метод (переменных направлений) используется по горизонтальным координатам в модели БМС наряду с прямым методом (матричным разложением) по вертикальной координате (Тэпп и Уайт, 1976; Карпентер, 1979). Кроме того, роль итеративного подхода принципиально возрастает при учете рельефа (см. 4.13).

4.9. Численные схемы для интегрирования полной системы уравнений

Общее требование к схемам интегрирования полной системы заключается в неявной аппроксимации акустических волн, исключающей скорость последних из критерия устойчивости схемы. В противном случае ограничение на шаг по времени делает невозможным реализацию схемы на современных ЭВМ ($\Delta t \leq 0.2$ с при $\Delta z = 50 \div 100$ м в нижних слоях атмосферы). В параграфе 4.4 мы уже описали один из алгоритмов, удовлетворяющий этому требованию - полунеявный алгоритм, использованный в модели Метеорологической Службы Великобритании (Тэпп и Уайт, 1976). В этом алгоритме градиент давления аппроксимируется полусуммой его значений в $(n+1)$ -й и $(n-1)$ -й моменты времени в рамках схемы чехарды. Такой подход сближает алгоритм по общей структуре с алгоритмами интегрирования неупругих систем. При этом из критерия устойчивости схемы полностью исключается скорость акустических волн, скорость же гравитационных волн сохраняется лишь, поскольку явно аппроксимируются члены $\lambda \Theta$ и σw , рассмотренные в § 4.7, что дает условие устойчивости для этих волн, независимое от величины пространственных шагов сетки

$$0 \leq (N \Delta t)^2 \leq 1$$

(данное условие получается из системы (4.7.3) - (4.7.4) при $c=0$).

Другой подход к неявному описанию акустических волн принадлежит Клемпу и впервые реализован в модели Клемпа и Вильгельмсона (1978а). Одновременно этот подход реализовали в своей модели Коттон и Триполи (1978)⁴³, а впоследствии он же был реализован в осесимметричной модели циклона (Уиллоуби и др., 1983, 1984; Лорд и др., 1984). Несмотря на достаточно широкую апробацию, данная методика, насколько нам известно, нигде не изложена в точности и не проанализирована в отношении свойств аппроксимации и устойчивости. Разные авторы излагают ее не вполне одинаково. Это делает ее освещение затруднительным, тем более, что по своему характеру она чисто эвристична. Приведем краткое описание данной методики.

Переписываем уравнения движения и неразрывности (1.1.10) - (1.11.11) в виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_p \bar{\theta}_{v1} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} = \phi_i, \quad i=1,2,3 \quad (4.9.1)$$

⁴³ В таблице 2 указана часть дальнейших публикаций по этим моделям

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + (\kappa - 1) \bar{\Pi} \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = \varphi_{\pi} \quad (4.9.2)$$

и "услаиваемся", что только левые части только этих уравнений ответственны за распространение акустических волн и должны аппроксимироваться с малым временным шагом, соответствующим скорости распространения этих волн. Правые же части этих уравнений и остальные уравнения прогностической системы за акустические волны "не ответственны" и могут аппроксимироваться с большим временным шагом, характерным для интегрирования неупругих систем. Исходя из этих предположений, вводим две временные сетки - с малым шагом Δt_s , отвечающим скорости акустических волн, и большим шагом Δt_l , отвечающим скорости остальных волн и кратным Δt_s . Интегрирование ведем параллельно на двух сетках. Именно: все уравнения системы, кроме (4.9.1) и (4.9.2), интегрируем на крупной сетке, а эти последние интегрируем на мелкой сетке, но правые части φ_i ($i=1,2,3$) и φ_{π} на всем интервале $[(n-1)\Delta t_l, (n+1)\Delta t_l]$ сохраняем неизменными, вычисленными по значениям неизвестных при $t = n\Delta t_l$ для адвективных слагаемых и по значениям $t = (n-1)\Delta t_l$ - для диффузионных слагаемых. Расчет на крупной сетке ведется по схеме чехарды, а на мелкой сетке - также по схеме чехарды, но дополненной методикой разностей вперед-назад ("будущие" скорости, восстановленные по явной схеме в силу уравнений движения, используются для аппроксимации дивергенции скорости в уравнении неразрывности). По вертикальной координате в связи с малой величиной шага Δz , Клемп и Вильгельмсон (1978a) в расчетах с Δt_s используют полуневяную аппроксимацию. Это приводит к необходимости выполнения одномерных прогонок, но исключает скорость вертикального распространения акустических волн из критерия устойчивости для "акустического модуля" схемы. Другие авторы ведут расчет по явным схемам, однако Триполи и Коттон в последней публикации (1986) вновь обращаются к полуневяной аппроксимации. Отношение $\Delta t_l / \Delta t_s$ в разных вариантах составляет $5 \div 15$.

Оценивая в целом подходы к решению упругих уравнений, надо сказать, что оба существующих алгоритма (Тэппа-Уайта и Клемпа-Вильгельмсона), будучи пионерскими, в то же время представляют собой начальный этап в построении численной методики интегрирования полной системы уравнений в целях локального моделирования и прогнозирования. Так, Тэпп и Уайт ради неясного описания акустических волн "восстанавливают в правах" решение диагностического уравнения для давления, т.е. как раз наиболее дорогой и громоздкий этап, отсутствие которого должно составлять главное вычислительное преимущество полной системы уравнений перед неупругой. Методика Клемпа-Вильгельмсона свободна от этого принципиального методического недочета (что позволяет, в частности, учитывать топографию в рамках этой методики посредством преобразования (1.6.2)). Однако и она оказывается дорогостоящей: время выполнения одного шага здесь того же порядка, как и при интегрировании неупругих систем (Коттон и Триполи, 1978), т.е. в плане фактических вычислительных затрат и здесь преимущество отсутствия диагностического уравнения для давления оказывается утраченной. Мы вернемся к данному кругу вопросов в более широком контексте в § 4.15.

4.10. Методы дробных шагов в интегрировании негидростатических уравнений

Методы дробных шагов в настоящее время представляют собой едва ли не единственный систематически разработанный класс алгоритмов, позволяющих использовать неявные аппроксимации без значительного удорожания алгоритмов. В негидростатических моделях применение дробных шагов стимулируется прежде всего наличием акустических волн. Вышеописанный метод Клемпа-Вильгельмсона, собственно говоря, и является первой в метеорологической литературе попыткой эффективного "обезвреживания" акустических волн на основе принципа дробных шагов. Во вторую очередь использование дробных шагов поддается жесткими ограничениями на величину шага по времени, накладываемыми явным описанием турбулентности. Из представления коэффициента обмена K в схеме нелинейной турбулентной вязкости, модифицированной применительно к условиям неоднородной сетки $\Delta z \ll \Delta x$ (см. 2.2), нетрудно найти, что при явной аппроксимации турбулентных слагаемых и Δz у Земли ~ 20 м шаг Δt оказывается ограничен величиной порядка 10 с и менее, что для прогностической схемы неприемлемо мало⁴⁴. В этой связи в модели МСВ используется расщепление по членам, описывающим вертикальную турбулентную диффузию (горизонтальная диффузия в этой модели имеет лишь вычислительный смысл и подбирается такой, чтобы не нарушать устойчивость схемы): последовательно выполняются расчет на шаг Δt для невязкой атмосферы и восемь шагов с шагом $\Delta t/8$ для чисто диффузионных уравнений по явной конечно-разностной схеме (Карпентер, 1979). В модели Гидрометцентра СССР метод дробных шагов используется для неявного описания турбулентных слагаемых по всем трем координатным направлениям. Численная схема предусматривает два варианта реализации дробных шагов: по принципу переменных направлений (схема Дугласа, 1962) или по принципу расщепления.

Моделью, полностью реализованной на основе схемы расщепления, является неупругая модель Пастушкова (1970а). Из публикаций по данной модели неясно, однако, в какой мере автору удалось использовать сильные стороны методики дробных шагов, поскольку параметры расчетной сетки примерно укладываются здесь в пределы критерия КФЛ (см. таблицу 2).

Имеется еще одна пространственная негидростатическая модель, последовательно использующая принцип дробных шагов и в целом совершенно своеобразная в вычислительном отношении - модель Пененко и Алояна (1985). Численная схема следует здесь вариационно-разностной методике, развитой в более широком плане одним из авторов (Пененко, 1977, 1981).

В двух словах, данная методика заключается в следующем. Исходной системе уравнений ставится в соответствие интегральное тождество. Подинтегральное выражение в этом тождестве сконструировано по тому же образцу, что и энергетическое тождество для исходной системы, а условия стационарности функционала приводят к исходной системе. Этот функционал дискретизируется, и полученный дискретный аналог варьируется. Условия стационарности дискретного функционала и дают систему алгебраических уравнений, подлежащую решению.

⁴⁴ В условиях однородной расчетной сетки явное описание адвекции накладывает более жесткое ограничение на величину Δt , чем явное описание турбулентности (Дирдорф, 1973б), но при сильно неоднородной сетке более жесткое ограничение связано с явным описанием турбулентности.

Если операторы исходной системы записаны в определенной ("антисимметричной") форме и определенным образом выбраны аппроксимационные и квадратурные формулы при дискретизации функционала, окончательные алгебраические уравнения:

1) обеспечивают энергетическую сбалансированность численной схемы (и следовательно, ее устойчивость, если выражение для плотности энергии положительно-определенно);

2) представляют собой тип двуциклической схемы многокомпонентного расщепления (Марчук, 1977), реализуемой в одномерных прогонках и обеспечивающей 2-й порядок точности на гладких решениях.

Таким образом, данная методика разработана и проанализирована весьма систематично. На ее основе реализованы алгоритмы интегрирования как неупругой, так и полной системы уравнений⁴⁵. К сожалению, авторы придали своей модели не прогностическую ориентацию (отсутствие условий открытых границ на боковых и верхней границах области, ограничение расчетной области пограничным слоем, отсутствие прогностического типа расчетов по реальным данным и сопоставление с реальными данными). Отсутствуют также сведения о некоторых моментах алгоритма и о его вычислительной эффективности.

Представляется, таким образом, что систематическое проникновение метода мелких шагов в задачи негидростатического моделирования прогнозирования атмосферных явлений только начинается. В особенности задача негидростатического прогноза, требующая вычислительной эффективности алгоритма и в физическом плане допускающая использование сравнительно больших шагов по времени, является той областью, в которой методике мелких шагов еще предстоит сказать свое слово.

4.11. Применение временных и пространственных фильтров

Среди моделей таблицы 2 временной фильтр применяется во всех тех и только тех моделях, в которых используется схема чехарды. Таким образом, необходимость временной фильтрации целиком связана со спецификой схемы чехарды - наличием вычислительной моды и тенденцией к расщеплению решения на две ветви (по четным и нечетным временным шагам).

Большинство авторов выполняет фильтрацию согласно методике Робера-Асселена (Робер, 1966; Асселен, 1972б), дающей фильтрованное значение переменной φ на n -ом временном слое по фильтрованному значению φ на $(n-1)$ -м слое и нефильтрованным - на n -ом и $(n+1)$ -м слоях ("основной временной фильтр" по Асселену). Фильтрация выполняется после завершения очередного шага, включая процедуру конденсационного приближения. Хотя применение фильтра нарушает баланс влаги, достигнутый благодаря приспособлению, но этот эффект незначителен и им пренебрегают.

Параметр фильтра, определяющий силу сглаживания, большей частью составляет 0.1, однако в целом колеблется в значительных пределах (от 0.2 - у Кларка (1979) и Липса и Хемлера (1982) до 0.02 - у Карпентера (1979)). Режим сглаживания также различен у разных авторов: Клемп и Вильгельмсон (1978а), Коттон и Триполи (1978), Кларк (1979), Липс и Хемлер (1982), Триполи и Коттон (1982) применяют фильтр после каждого шага, Соммерия (1976) и Яу (1980) - "периодически", Липс (1977) - один раз

⁴⁵ Относительно "полной" модели надо заметить, что и здесь налицо тот же методически слабый и вычислительно неэкономный этап, что и в модели Тэппа-Уайта - решение трехмерного диагностического уравнения для давления.

на тридцать шагов, Шерман и Уортл - один раз на 33 шага. Несколько отличную от общепринятой процедуру возобновления счета после сглаживания применяет Яу (1980).

Более дискуссионен вопрос о применении пространственных фильтров. Мезингер и Аракава (1976) выражают сомнение в наличии принципиальных мотивировок, физических или вычислительных, для применения таких фильтров. Действительно, большинство авторов негидростатических моделей об этих фильтрах не упоминают. Из моделей, приведенных в таблице 2, такие фильтры использованы, по-видимому, лишь в трех (Клемп и Вильгельмсон (1978а), Кларк (1979), Липс и Хемлер (1982)⁴⁶). Оператор сглаживания в работе Клемпа и Вильгельмсона (и аналогично у Липса и Хемлера) пропорционален сумме четвертых разностей по горизонтальным координатам. Кларк первоначально (1979) использовал фильтр Шапиро (1970), но впоследствии отказался от него в пользу фильтра, который пропорционален сумме шестых разностей по горизонтальным координатам (Кларк и Фэрли, 1984). Здесь же подчеркивается, что пространственная фильтрация должна применяться к тенденциям скорости и температуры до построения уравнения для давления и выполнения конденсационного приспособления - в противном случае балансы массы и влаги оказываются заметно нарушены.

Упомянем еще неявный пространственный фильтр Лонга, применявшийся в гидростатическом мезомасштабном моделировании (Марер и Пилке, 1978; МакНайдер и Пилке, 1984):

$$(1 - \delta)\varphi_{i+1} + 2(1 + \delta)\varphi_i + (1 - \delta)\varphi_{i-1} = \varphi_{i+1}^* + 2\varphi_i^* + \varphi_{i-1}^* , \quad (4.11.1)$$

где $\{\varphi_i\}$ - фильтрованные, а $\{\varphi_i^*\}$ - нефитрованные значения переменной φ вдоль данной пространственной координаты. Параметр δ определяет воздействие фильтра на волны разной длины (волны длиной $2\Delta x$, как видно из (4.11.1), аннулируются данным фильтром всегда). Например, значение $\delta=0.08$ (МакНайдер и Пилке, 1984) сохраняет всем волнам длины $\geq 4\Delta x$ более 0.9 их первоначальной амплитуды.

⁴⁶ Возможно также в модели Миллера-Пирса (1974).

4.12. Численная реализация краевых условий

Здесь естественно различаются два круга вопросов: о реализации краевых условий на боковых границах и на нижней границе. Реализация условий на верхней границе (рассмотренных в 3.3), по-видимому, не содержит устоявшейся вычислительной традиции.

Численная реализация условий на боковых границах.

Мы ограничимся рассмотрением условий, базирующихся на принципе излучения, поскольку эти условия, из прогностически ориентированных типов условий именно они преобладают в моделях таблицы 2 и, вместе с тем, представляются наиболее перспективными. Детали численной реализации условий поглощения можно найти в литературе, указанной в § 3.1 и 3.2.

Как уже отмечалось в § 3.2, реализация условия излучения (3.2.1) должна начинаться с алгоритма определения величины \hat{C}_{ph} для данной переменной φ в данной пространственно-временной точке границы. Однако независимо от этого алгоритма имеется априорная оценка, ограничивая $|\hat{C}_{ph}|$ сверху. Именно, после определения \hat{C}_{ph} условие (3.2.1) должно быть реализовано в конечных разностях на некотором шаблоне. Пусть, как показано схематически на рис. 4.2, речь идет о правой границе расчетной области $X = X_N$ и о восстановлении значения φ в $(n+1)$ -й момент времени в точке C .

Дискретизация соотношения (3.2.1) может быть выполнена на разных шаблонах (CBC_1 , CBC_2 , CAC_1 и т.д.), но для каждого шаблона имеется свое предельное значение фазовой скорости C_{max} , такое что при $\hat{C}_{ph} > C_{max}$ дискретизация (3.2.1) на данном шаблоне приведет к нарушению критерия КФЛ и развитию неустойчивости. Например, для дискретизации (3.2.1) на шаблоне CBC_1 (по схеме направленных разностей) необходимо выполнение неравенства $0 \leq (\hat{C}_{ph} \Delta t) / \Delta x \leq 1$.

Одна из ранних рекомендаций по выбору \hat{C}_{ph} (Крайс, 1968) как раз и заключалась в том, чтобы полагать

$$\hat{C}_{ph} = \Delta x / \Delta t. \quad (4.12.1)$$

При этом подразумевается, что шаблон, на котором дискретизируется условие (3.2.1), расположен ниже прямой ABC и (4.12.1) означает, что для \hat{C}_{ph} принимается максимально возможное в этих условиях значение. Целесообразность данной рекомендации связана с тем, что завышение величины \hat{C}_{ph} ведет к меньшему отражению волны, чем такое же её занижение (Клемп и Вильгельмсон, 1978).

Еще один из ранних алгоритмов восстановления \hat{C}_{ph} принадлежит Пирсону (1974) (см. 3.2). Этот алгоритм успешно апробировал Физик (1976), отметивший, что прогнозируемые поля оказываются малочувствительны к величине \hat{C}_{ph} , которая может быть взята постоянной. Этот эффект, очевидно, объясняется предпочтительностью завышения \hat{C}_{ph} , нежели занижения, поскольку фактически велись с постоянным значением \hat{C}_{ph} мажорированным значения этой величины, генерированной моделью.

Третий алгоритм восстановления \hat{C}_{ph} принадлежит Клемпу и Вильгельмсону (1978) и он описан в § 3.2.

Четвертый и наиболее популярный алгоритм принадлежит Орлански (1976). Он представляет собой уточнение оценки (4.12.1) и заключается в получении величины \bar{C}_{ph} из равенства (3.2.1), дискретизированного на шаблоне с уже известными значениями φ . Для конкретности воспроизведем численную реализацию условия (3.2.1) так, как она изложена в первоначальном виде у Орлански.

Дискретизация соотношения (3.2.1), служащая для восстановления $\varphi(C)$, принимается в виде:

$$\frac{\varphi(C) - \varphi(C_2)}{2\Delta t} + \bar{C}_{ph} \frac{0.5(\varphi(C) + \varphi(C_2)) - \varphi(B)}{\Delta x} = 0, \quad (4.12.2)$$

откуда

$$\varphi(C) = \varphi(C_2) - \bar{C}_{ph} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\varphi(C) + \varphi(C_2) - 2\varphi(B)). \quad (4.12.3)$$

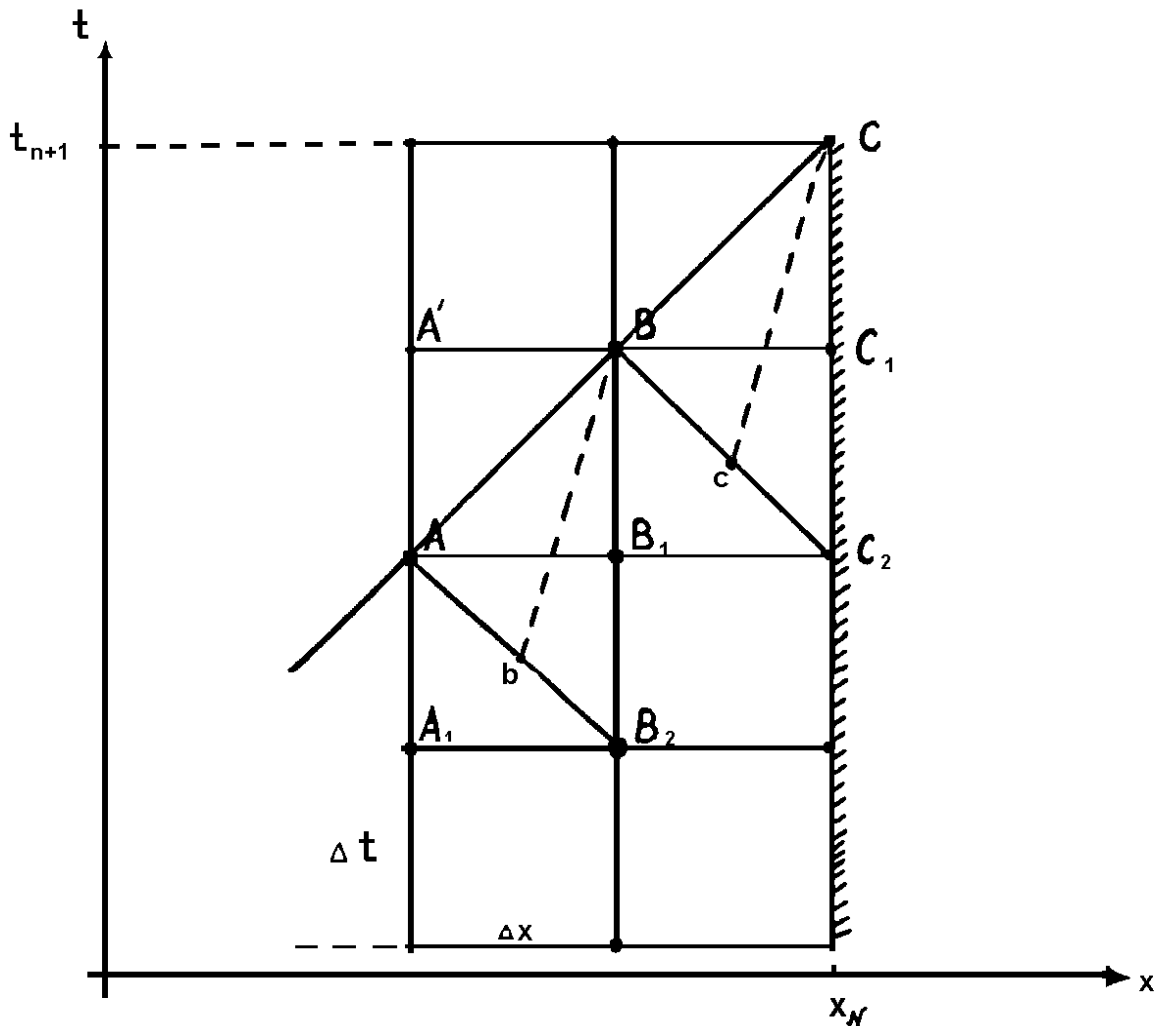


Рис.4.2 Схема численной реализации условия излучения

Рассмотрим шаблон $ВАВ_2$, получающийся смещением шаблона $СВС_2$, использованного в (4.12.2) на Δt «назад» и на Δx внутрь области. Поскольку значения φ в узлах $В$, $А$, $В_2$ известны, то дискретизируя (3.2.1) на этом шаблоне аналогично (4.12.2), найдем \hat{C}_{ph} . Но так как согласно сказанному выше, \hat{C}_{ph} на таком шаблоне должна быть ограничена пределами $0 \leq \hat{C}_{ph} \leq \Delta x / \Delta t$, то принимаем окончательно:

$$\hat{C}_{ph} \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < 0; \\ \alpha(\Delta x / \Delta t), & \text{если } 0 \leq \alpha \leq 1; \\ \Delta x / \Delta t, & \text{если } \alpha > 1, \end{cases} \quad (4.12.4)$$

где

$$\alpha = \frac{\varphi(B) - \varphi(B_2)}{2\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(B_2)}.$$

Используя \hat{C}_{ph} из (4.12.4), находим $\varphi(C)$ согласно (4.12.3). Поскольку для восстановления \hat{C}_{ph} и $\varphi(C)$ использованы одинаковые дискретизации условия (3.2.1), на отдельной гармонической волне $\varphi = \exp[i(\omega t - kx)]$ данная процедура будет точна. Если подставить (4.12.4) в (4.12.3), получим явную (нелинейную) экстраполяционную формулу для восстановления φ в точке $С$ по известным значениям за предшествующие моменты времени. Существо процедуры, однако, в экстраполяции не самого поля φ , а фазовой скорости, которая переносится без изменений вдоль «диагонали» расчетной ячейки (тогда как согласно (4.12.1) таким образом переносится сама величина φ).

Отметим также, что фактическое значение имеет лишь выбор (трехточечного) шаблона для выполнения условия излучения, но не конкретная аппроксимация условия (3.2.1) на этом шаблоне - окончательный ответ от аппроксимации не зависит. Процедура (4.12.2) - (4.12.4) фактически означает следующее. Считая, что поле φ на отрезке $АВ_2$ - линейно, ищем такую точку b (см. рис.1) на этом отрезке, что $\varphi(B) = \varphi(b)$. На отрезке $ВС_2$ находим точку c , которая делит отрезок $ВС_2$ в том же отношении, в каком b делит отрезок $АВ_2$. Полагая, что поле φ на отрезке $ВС_2$ - линейно, находим $\varphi(c)$ и приравниваем $\varphi(C) = \varphi(c)$. Поэтому, более компактно процедура (4.12.2) - (4.12.4) формулируется следующим образом (Пекелис и Прессман, 1982; Кисельникова и др., 1984):

$$\varphi(C) = \begin{cases} \varphi(C) = \left\{ \varphi(C_2) - \alpha(\varphi(C_2) - \varphi(B)), & \text{если } 0 \leq \alpha \leq 1; \\ \varphi(C_2), & \text{если } \alpha \leq 0; \\ \varphi(B), & \text{если } \alpha \geq 1, \end{cases} \quad (4.12.5)$$

где α определяется согласно (4.12.4).

Раймонд и Куо (1984) предложили использовать условие излучения, основанное на «истинной» фазовой скорости C_{ph} (об этом уже говорилось в § 3.2). В той же работе предложена и модификация вычислительного характера. При восстановлении \hat{C}_{ph} из второго равенства (3.2.1) временную производную $\partial\varphi/\partial t$ предлагается заменить с использованием эволюционного уравнения для величины φ в прогностической системе.

Например, если речь идет об излучении составляющей скорости u_1 , запишем в силу первого из уравнений движения, пренебрегая диффузионными членами:

$$\hat{C}_{ph} = \frac{u_i (\partial u_1 / \partial x_i) - \ell u_2 + c_p \bar{\theta}_{vi} (\partial \Pi / \partial x_i)}{\partial u_1 / \partial x_i}. \quad (4.12.6)$$

В этом случае значение \hat{C}_{ph} можно восстановить дискретизацией (4.12.6) по значениям зависимых переменных лишь в точке В и C_1 , и с найденной \hat{C}_{ph} выполнить излучение согласно (4.12.2)-(4.12.3). В рассмотренных авторами модельных примерах этот прием дал значительный положительный эффект. Однако тут же замечено, что в более общих ситуациях целесообразность данного подхода требует дальнейшего изучения, не говоря о его вычислительной дороговизне по сравнению с использованием непосредственно (4.12.5).

Вопросы оптимального выбора шаблона для реализации излучения были предметом рассмотрения в работах Миллера и Торпа (1981), Раймонда и Куо (1984). Триполи и Коттон (1982) нашли, что аппроксимация условий излучения по схемам более высокого порядка точности (согласно Миллеру и Торпу, 1981) не дает улучшения результатов. Аналогично Вильгельсон и Чен (1982), Пекелис и Прессман (1982) нашли, что шаблон «чехарды» SVC_2 , использованный Орлански, не дает заметных преимуществ по сравнению с вычислительно более удобным и дешевым шаблоном «направленных разностей» SVC_1 . Принципиально в методическом отношении представляется, однако, что вопрос об оптимальной численной реализации условий излучения не может быть решен изолированно: успех численной методики зависит от согласованности её с численной методикой для внутренних точек области (сходное соображение высказывают Раймонд и Куо, 1984). Надо заметить также, что вычислительные аспекты в реализации условий излучения изучены далеко не полностью, и, собственно говоря, недостаточно развит аппарат для их изучения.

Что касается сравнения различных методик определения \hat{C}_{ph} , известные эксперименты выполнил Кларк (1979), сопоставляя расчеты, идентичные во всех отношениях, кроме определения \hat{C}_{ph} , выполняющегося, с одной стороны, по методик Орлански (расчет с «плавающие» фазовой скоростью), с другой стороны, по методике Клемпа-Вильгельмсона (расчет с «фиксированной» фазовой скоростью). Результаты обнаружили явное преимущество плавающей фазовой скорости: при фиксированной фазовой скорости происходил значительный рост вычислительной моды, приводившей к трехкратному завышению среднего значения вертикальной скорости. Косвенным свидетельством в пользу методики плавающей фазовой скорости может служить и обращение к ней авторов, работающих с моделью Клемпа-Вильгельмсона (Вильгельмсон и Чен, 1982). Вместе с тем, эксперименты Триполи и Коттона (1982) указали некоторую предпочтительность методики фиксированной скорости в условиях, когда система уравнений содержит различные типы волн (акустические, гравитационные, адвективные). Надо сказать, однако, что полный краевой алгоритм в модели Триполи и Коттона своеобразен (см. ниже), и это может вносить свои коррективы.

Упомянем о других вариантах алгоритмов излучения, отличных от (3.2.1). В § 3.3 говорилось, что условие излучения может быть непосредственно использовано лишь в задаче с локализованными начальными данными. Если же, как это бывает фактически, начальные возмущения наложены на крупномасштабный фон, имеющийся во всем про-

странстве, то излучать следует не полные величины метеорологических величин, а отклонения от фона. В модели Метеорологической Службы Великобритании применялась следующая эвристическая методика учета крупномасштабного фона (Карпенгер, 1979). Экстраполяционная формула для излучения величины φ имеет здесь вид (в обозначения рис. 4.2):

$$\varphi(C) = \varphi(B) + \varphi(C_1) - \varphi(B_1) . \quad (4.12.7)$$

Чтобы оценить содержание данной экстраполяции, перепишем её в другой форме:

$$\varphi(C) - \varphi(B) = \varphi(C_1) - \varphi(B_1) . \quad (4.12.8)$$

Как видим, здесь, с одной стороны, использован подход Крайса (4.12.1) (перенос с максимально большой скоростью $\Delta x/\Delta t$ по диагонали расчетной ячейки), а с другой стороны, условие (4.12.7) означает, что условие переноса пополнено произвольным вынуждающим воздействием. Действительно, дифференциальный аналог (4.12.8) очевидно имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{C}_{ph} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \quad \bar{C}_{ph} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.12.9)$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{C}_{ph} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const.} \quad (4.12.10)$$

Постоянная в правой части (4.12.10) трактуется локально, в процессе прогноза её меняют, адаптируя граничную экстраполяцию к информации о макромасштабных процессах.

Другая модификация условия излучения предложена Триполи и Коттоном (1982). Расчетная область окружается по горизонтальным координатам наружной областью, которую авторы называют «областью мезомасштабной компенсации» (ОМК). Параллельно с расчетом во внутренней области расчет ведется и в ОМК, но на крупной сетке (к каждой приграничной ячейке внутренней области прилегает одна ячейка ОМК). На внешних границах ОМК скорость не меняется со временем (считается, что эти границы достаточно далеко, и возмущения, генерируемые во внутренней области, до них не доходят), а на границах внутренней области принимается следующее обобщение (3.2.1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{C}_{ph} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_p \bar{\theta}_{vl} (\langle \Pi \rangle - \Pi_0) / (L/2) = 0. \quad (4.12.11)$$

Здесь: $\langle \Pi \rangle$ - давление во внутренней области, осредненное по X или по Y (в зависимости от того, какую границу мы рассматриваем); Π_0 - диагностически восстанавливаемое давление в ОМК; L - поперечные размеры всей области в целом (вместе с ОМК). Необходимость последнего слагаемого в (4.12.11) авторы мотивируют тем, что, с одной стороны, полная система уравнений (в отличие от неупругой) допускает изменения суммарной массы в объеме, а с другой стороны, условия излучения отражательны по отношению к акустическим волнам (присутствующим в модели). В этих условиях масса в объеме может неограниченно расти или падать. Последнее слагаемое в (4.12.11) и должно обеспечить определенный контроль над интегральным сохранением массы,

имитируя реакцию наружного фона на колебания осредненного давления в расчетной области. Возможно, однако, что необходимость контроля связана не с указанными принципиальными моментами, а со спецификой численной схемы, поскольку в других «полных» моделях (Тэпп и Уайт, 1976; Клемп и Вильгельмсон, 1978) такой потребности не возникает.

Другой круг вопросов связан с тем, какие именно метеорологические величины и на каких границах подчинять условию излучения и каким образом пополнять эти условия другими условиями. Общие положения уже отмечались в § 3.2. Здесь приведем некоторые дополнительные сведения.

Имеется группа моделей, в которых краевые условия реализуются по-разному на границах втока и вытока (Клемп и Вильгельмсон, 1978; Кларк, 1979; Триполи и Коттон, 1980). Другие авторы реализуют краевые условия единообразно (Карпентер, 1979; Кисельникова и др., 1984). В первой группе моделей нормальный компонент скорости излучается на всех границах. Для остальных величин на границе втока:

- * задаются значения этих величин (Кларк, 1979); или
- * производная по нормали к границе задается равной нулю (Клемп и Вильгельмсон, 1978; Кларк, 1979; Триполи и Коттон, 1980).

На границе вытока для остальных величин:

- * соответствующие уравнения аппроксимируются на границе с использованием направленных разностей для адвекции по нормали к границе; или
- * как и для нормального компонента скорости используются условия (Кларк и Гэлл, 1982).

Во второй группе работ:

1. В модели Гидрометцентра СССР (Кисельникова и др., 1984) излучаются все величины, кроме давления;
2. В модели Метеослужбы Великобритании (Карпентер, 1979) излучаются касательные компоненты скорости и температура, а нормальный компонент скорости задается интерполяцией данных регионального прогноза.

В большинстве моделей указанные условия не распространяются на вычисление нормальных к границе компонентов турбулентных напряжений и потоков. Обычно эти последние (либо производные от них по нормали к границе) принимаются равными нулю. Эксперименты, выполненные Россом и Орлански (1982) с гидростатической моделью холодного фронта, указали, что излучение дивергенции и вертикального компонента вихря с последующим восстановлением по ним горизонтальных компонентов скорости уменьшает эффект отражения от границ сравнительно с излучением непосредственно компонентов скорости. Как видим, используемые подходы многочисленны, эвристичны и пестры, что свидетельствует о необходимости дальнейших исследований в этой области.

Несколько слов о краевых условиях для давления. Во всех моделях таблицы 2, кроме модели Университета штата Колорадо (Триполи и Коттон, 1980, 1982), независимых условий для давления не требуется. В качестве краевых условий для уравнения вида (1.2.7) принимаются значения нормальных производных давления, выраженные из уравнений для импульса (1.2.4). Это приводит к краевой задаче с неоднородными условиями типа Неймана (Флетчер, 1991). Дискретизация данных условий выполняется аналогично тому, как выполняется дискретизация самого уравнения (1.2.7) - в виде требования нулевого значения дивергенции в приграничной расчетной ячейке, но с учетом уже известных граничных значений компонентов скорости. Пусть, например, правая из

двух расчетных ячеек, изображенных на рис. 4.2, представляет собой приграничную ячейку сетки. Тогда краевое условие для этой ячейки имеет вид:

$$(u(C) - u(A))/\Delta x + (w(D) - w(E))/\Delta z = 0. \quad (4.12.12)$$

В этом условии значения всех величин, кроме $u(A)$, известны из краевых алгоритмов излучения для u и w . Записываем в точке A дискретный аналог первого из уравнений (1.2.4), принятый для внутренних точек, и подставляем полученное алгебраическое выражение для $u(A)$ (содержащее дискретный аналог $\partial \Pi / \partial x$) в (4.12.12). Это и будет дискретным краевым условием для π в точке B . При такой дискретизации краевых условий, согласованной с дискретизацией уравнений во внутренних точках области, алгебраическая система уравнений будет обладать свойством задачи Неймана, т.е. ее решение будет определяться с точностью до произвольной постоянной.

Упомянем в заключение о достаточно распространенной в региональных и мезомасштабных моделях (но не в моделях таблицы 2) методике решения проблемы краевых условий посредством растяжения (увеличения горизонтального шага) сетки с приближением к границам области (Антс, 1970; Пилке, 1974а,б; Марер и Пилке, 1977б; МакНайдер и Пилке, 1981). Насколько нам известно, прием этот нигде не был обоснован. Клемп и Лилли (1978) в своих расчетах нашли его неэффективным, объяснив это тем, что при небольших растяжениях проблема граничных условий не снимается, а при значительных растяжениях возмущение испытывает отражение, еще не дойдя до границы, - там, где сетка перестала адекватно его описывать.

Условия на нижней границе

Реализацию данных условий рассмотрим лишь кратко. С одной стороны, конкретный алгоритм существенно зависит от специфики расчетной схемы для внутренних точек области (от наличия тех или иных неявных аппроксимаций, от последовательности реализации алгоритма в случае техники дробных шагов, от использования тех или иных квазиконсервативных термодинамических переменных) и от принятой модели взаимодействия атмосферы с почвой (см. 3.4). С другой стороны, накопленный здесь опыт сравнительно невелик, и общие рекомендации, как правило, были бы преждевременными. Мы отметим принципиальные моменты, ориентируясь на достаточно полную физическую модель, когда расчет ведется параллельно в атмосфере и почве, и на границе раздела имеется по два балансных соотношения для тепла и влаги. Предположим, кроме того, что для расчета в атмосфере выбрана явная конечно-разностная схема (в случае, если схема содержит элементы неявности, краевой алгоритм усложняется). Напротив, уравнения для температуры и влаги почвы (3.4.12) и (3.4.14) в силу их чисто диффузионной, одномерной структуры и малых значений коэффициента диффузии, естественно интегрировать по неявной (или "полуявной") схеме.

При указанных свойствах схемы поля метеорологических величин, известные в момент $n\Delta t$, позволяют для момента $(n+1)\Delta t$:

- 1) рассчитать поля метеорологических величин на внутренних уровнях в атмосфере
- 2) выполнить прямую прогонку для дискретного аналога уравнения для температуры почвы, отправляясь от нижнего краевого условия в почве (3.4.11).

Таким образом, к моменту обращения к уравнениям баланса мы располагаем в каждой точке (x, y) значениями $\Theta^{(n+1)}$ и $Q_v^{(n+1)}$ на первом расчетном уровне в атмосфере

и линейной связью между значениями $\Theta_s^{(n+1)}$ на уровне земли и на первом подпочвенном уровне. Рассмотрим в этих условиях использование балансных соотношений.

Дискретизация уравнения баланса тепла (3.4.21) с учетом (3.4.8) и указанных только что данных приводит к трансцендентному уравнению относительно наземного значения температуры, $T_g^{(n+1)}$:

$$F(T_g^{(n+1)}) = \Phi, \quad (4.12.13)$$

где Φ - члены, не содержащие T_g . Если в модели учитывается наличие ламинарного подслоя, при получении (4.12.13) значения Θ и Q_v при $z = z_0$ (входящие в соотношения теории подобия для пограничного слоя) должны быть выражены через значения этих величин при $z = z_g$ в силу (2.2.2). Если учитывается наличие поверхностного переходного слоя по температуре ($z_0 < z < z_a$, см. рис. 2.1), значение Θ_a (также входящее в соотношение теории подобия) должно быть выражено через Θ_g в силу дискретного аналога эволюционного уравнения для Θ_a . Учет ламинарного подслоя выполняли, например, Марер и Пилке (1977а,б), учет переходного слоя (z_0, z_a) - Блэкэдар (1979). Модели с учетом обоих факторов одновременно, по-видимому, отсутствуют.

После того как формирование уравнения (4.12.13) завершено, возникает вопрос о методах его решения. Опыт расчетов показывает, что простейший способ приближенного решения - заменой $T_g^{(n+1)}$ на $T_g^{(n)}$ во всех нелинейных слагаемых - приводит к значительным вычислительным шумам. Поэтому принято либо линеаризовать часть нелинейных слагаемых относительно $T_g^{(n)}$ (Дирдорф, 1978), либо сохранить уравнение нелинейным и решать его итерациями. В последнем случае обычно применяют метод касательных ("метод Ньютона-Рафсона"), но т.к. зависимость $F(T_g)$ весьма громоздка, весь итерационный процесс расслаивается на "внешний" и "внутренний". Внутренний итерационный цикл производится по схеме Ньютона-Рафсона при фиксированных значениях части членов в (4.12.13), зависящих от T_g . По завершении внутреннего цикла эти члены пересчитываются по вновь найденным значениям T_g . Это образует очередную итерацию внешнего цикла. Затем повторяется внутренний цикл и т.д. Итеративную реализацию уравнения теплового баланса осуществляли, например, Якобс и Браун (1973), Физик (1976), Марер и Пилке (1977а,б), Блэкэдар (1979). В модели Гидрометцентра СССР "будущие" значения T_g сохраняются лишь в части членов, так что левая часть уравнения (4.12.13) оказывается полиномом третьей степени относительно $T_g^{(n+1)}$ и уравнение решается аналитически.

Что касается реализации балансового уравнения для влаги, дополним прежде всего материал § 3.4, получив из двух соотношений (3.4.18) и (3.4.19) для двух предельных случаев - сухой ($q_s = (q_s)_{\min}$) и максимально увлажненной ($q_s = (q_s)_{\max}$) почвы - одно соотношение вида (3.4.20) для общего случая. Это выполняется следующим образом (Дирдорф, 1978). Перепишем соотношение (3.4.18) в виде:

$$\left((Q_w)_1 - (Q_w)_g \right) / \Delta z = 0, \quad (4.12.14)$$

а соотношение (3.4.19) в виде:

$$\left((Q_w)_1 - (Q_w)_g \right) / \Delta z = \left((Q_w)_1 - (Q_{sat})_g \right) / \Delta z, \quad (4.12.15)$$

где $(Q_w)_1$ - значение Q_w на первом расчетном уровне в атмосфере. Далее рассуждаем так. Пусть увлажненность данного участка почвы в данный момент времени - промежуточная между максимально высокой и максимально низкой, а именно, пусть она образуется из максимальной влажности, взятой с весом M , и максимальной сухости, взятой с весом $(1-M)$, где

$$M = \frac{(q_s)_g - (q_s)_{\min}}{(q_s)_{\max} - (q_s)_{\min}}. \quad (4.12.16)$$

Составляя линейную комбинацию соотношений (4.12.14) и (4.12.15), взятых с весами M и $(1-M)$ соответственно, приходим к условию (3.4.20).

Реализация балансных соотношений для влаги осуществляется, например, следующим образом. Определяем значение параметра M в силу (4.12.16) по значению q_s^n . Поскольку $(Q_w)_1^{(n+1)}$ известно, соотношение (3.4.20) позволяет восстановить $(Q_w)_g^{(n+1)}$, после чего дискретизация (3.4.22) приводит к линейному соотношению между значениями $q_s^{(n+1)}$, на земле и на первом подпочвенном уровне. Это соотношение вместе с условием (3.4.11) на нижней границе области прогноза позволяет восстановить $q_s^{(n+1)}$, интегрируя уравнение (3.4.14).

Подчеркнем еще раз, что фактический опыт учета балансных соотношений в пространственных мезомасштабных моделях сравнительно невелик. В особенности это относится к негидростатическим моделям. Даже в наиболее полных из них алгоритм учета тепловых и (особенно) влажностных процессов в почве и на границе "атмосфера-почва" обычно строятся с привлечением упрощающих гипотез и принадлежит к числу наименее апробированных.

4.13. Особенности численного интегрирования в условиях орографической неоднородности

Специфически вычислительные особенности расчета движений над горами, обусловлены, с одной стороны, изменениями в структуре уравнений, записанных в орографической системе координат, и с другой стороны, особенностями в структуре самих рассчитываемых полей метеорологических величин. Отметим при этом ряд следующих моментов.

Известная вычислительная трудность возникает при аппроксимации горизонтального градиента давления в координатах (ξ, η, ζ) (см. § 1.6) в связи с тем, что слагаемое $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ оказывается теперь суммой двух слагаемых

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \left(\frac{G_1}{G_0} \right) \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \right). \quad (4.13.1)$$

В случае наклонного рельефа каждое слагаемое в правой части (4.13.1) описывает изменения давления также и по вертикали, в то время как левая часть описывает изменения только по горизонтали. Следовательно, эти изменения по вертикали (которые для давления намного больше, чем по горизонтали) должны взаимно аннулироваться в двух слагаемых правой части и, таким образом, левая часть (4.13.1) оказывается разностью близких больших величин. Например, при наклоне рельефа ~ 0.005 каждое слагаемое в правой части (4.13.1) в 40÷50 раз больше левой части. При наличии погрешностей в слагаемых правой части за счет погрешностей наблюдений и дискретных аппроксимаций ошибка в определении $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ может превысить 100%. Эта проблема многократно обсуждалась в литературе (Смагоринский и др., 1965, 1967; Курихара, 1968; Корби др., 1972; Гэри, 1973; Филлипс, 1973; Касахара, 1974; Янич, 1977; Марер и Пилке, 1977а; Сандквист, 1979), но большей частью в контексте гидростатической системы уравнений и σ -системы координат (в частности, в связи с техникой пересчета данных с σ -поверхностей на Р-поверхности и обратно и т.п.). Оценки и эксперименты Накамуры (1978) показали, что в лучших численных схемах для гидростатических крупномасштабных моделей данное обстоятельство успешно преодолевается и не является источником существенных ошибок⁴⁷. В публикациях по негидростатическому моделированию эта проблема затрагивалась мало, а практическое её решение связано здесь главным образом с записью уравнений в терминах отклонений от гидростатического фона. Сандквист (1979) отмечает, что основная ошибка в определении $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ согласно (4.13.1) обусловлена более высокими модами по вертикали. Поэтому переход от полных величин к возмущениям будет эффективен лишь в том случае, если фоновое состояние (взаимно-аннулируемое в слагаемых правой части (4.13.1) точно) учитывает зависимость $\bar{\theta}$ от z . В вычислительном плане это и является основным стимулом к обращению от адиабатического фона к неадиабатическому, восстанавливаемому по данным зондирования (Кларк, 1977, 1979).

⁴⁷ Вообще основной вывод работы Накамуры заключается в том, что погрешности, связанные с учетом горного рельефа, пристраиваются главным образом из неадекватности физического описания процессов, а не из погрешностей численных алгоритмов. Применительно к моделированию мезомасштабных явлений аналогичных исследований не предпринималось и суждений не высказывалось.

Другая проблема, также связанная с давлением, заключается в необходимости численного интегрирования уравнения типа (1.6.11), коэффициенты которого зависят (достаточно произвольным образом) от пространственных координат. Равным образом и краевые условия для этого уравнения, которые, как и в случае отсутствия гор, представляют собой уравнения движения (1.6.6), (1.6.7) и (1.6.10), рассмотренные в точках границы с учетом краевых условий для остальных функций, содержат теперь зависимость от пространственных координат⁴⁸.

Техника получения дискретных аналогов уравнения для давления и краевых условий для него остается такой же, что и в 4.8 и 4.12, соответственно. Однако решение этой краевой задачи теперь требует привлечения итераций. В уравнении и краевых условиях обособляются члены, допускающие интегрирование прямым методом. Однократное решение задачи прямым методом и составляет одну итерацию. При этом "неучтенные" члены в уравнении и краевых условиях оцениваются в качестве "правых частей" по значениям давления на предыдущей итерации и обновляются после очередной итерации (Кларк, 1977). Такой итерационный процесс, очевидно, может быть построен самым различным образом. Опыт, накопленный в данной области, незначителен, и вопросы сравнения разных вариантов итерационных процедур, их сходимости при тех или иных параметрах рельефа и вычислительного алгоритма, их эффективности в литературе не обсуждался.

Неитеративный метод восстановления давления предложен в работе Пекелиса и Прессмана (1986). Будучи развит для использования в модели Гидрометцентра СССР, он реализован в рамках схемы LW, но непосредственно распространяется и на схему чехарды. Метод основан на максимальном использовании возможностей матричного разложения, которое применимо, если уравнение допускает разделение переменных (см. 4.8). Чтобы использовать это обстоятельство, строим коэффициенты со структурой разделенных переменных - $p^\varphi(\xi)q^\varphi(\eta)r^\varphi(\zeta)$, где $\varphi = u, v, \omega$ - представляющие собой мажоранты коэффициентов уравнения (1.6.11):

$$\begin{aligned} p^u(\xi)q^u(\eta)r^u(\zeta) &\geq \bar{\rho} c_p \bar{\theta}_{v1} G_0 \\ p^v(\xi)q^v(\eta)r^v(\zeta) &\geq \bar{\rho} c_p \bar{\theta}_{v1} G_0 \\ p^\omega(\xi)q^\omega(\eta)r^\omega(\zeta) &\geq \bar{\rho} c_p \bar{\theta}_{v1} (1 + G_1^2 + G_2^2) / G_0. \end{aligned} \quad (4.13.2)$$

Выбор девяти функций $p^\varphi(\xi)$, $q^\varphi(\eta)$, $r^\varphi(\zeta)$ выполняется по данным о характеристиках фона и рельефа, исходя из возможно более точной аппроксимации правых частей (4.13.2) левыми. Функции p и q могут быть выбраны по-разному, а вид функций r определяется требованием, чтобы вне рельефа неравенства (4.13.2) превращались в равенства

$$r^u = r^v = r^\omega = \bar{\rho}(z) c_p \bar{\theta}_{v1}(z)$$

Далее члены с давлением в уравнении (1.6.6) переписываем в виде:

⁴⁸ Более точно: краевые условия на боковых границах остаются такими же, как и в отсутствии орографии, поскольку обычно считается, что рельеф $\Gamma(x, y) = 0$ вблизи боковых границ расчетной области, но условия на верхней и нижней границах, как видно из (1.6.10), содержат зависимость от ξ и η .

$$p^u(\xi)q^u(\eta)r^u(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} + \alpha^u, \quad (4.13.3)$$

где во второе слагаемое включено все, неучтенное в первом слагаемом. Аналогичным образом переписываем члены с давлением в уравнениях (1.6.7) и (1.6.10). Соответствующая форма записи уравнения для давления (1.6.11) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p^u(\xi)q^u(\eta)r^u(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(p^v(\xi)q^v(\eta)r^v(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(p^\omega(\xi)q^\omega(\eta)r^\omega(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta}\right) = \Phi + \Phi_1 \quad (4.13.4)$$

где через Φ обозначена совокупность членов, не содержащих π , а через Φ_1 - совокупность членов, содержащих π .

Алгоритм в целом выглядит следующим образом. На вспомогательном этапе схемы LW (этап "предиктора") в уравнениях движения опускаются члены α^φ ($\varphi = u, v, \omega$), а в уравнении (4.13.4) - член Φ_1 . Соответствующие члены опускаются в краевых условиях для π . В результате краевая задача для уравнения (4.13.4) интегрируется прямым методом (матричным разложением). На основном этапе схемы (этап "корректора") все члены в уравнениях и краевых условиях сохраняются полностью, но на промежуточном временном уровне $(n+1/2)\Delta t$, где подлежит определению π , вновь записываются только члены вида $p^u(\xi)q^u(\eta)r^u(\zeta)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}$ и т.п., а остальные члены в (1.6.6), (1.6.7), (1.6.10), слагаемое Φ_1 в (4.13.4) и соответствующие слагаемые в краевых условиях аппроксимируются на уровне $n\Delta t$, где поле π уже известно. В результате и на основном этапе схемы уравнение для давления вновь интегрируется прямым методом. Описанная схема имеет 1-й порядок точности по времени, но при не слишком крутых горах (с наклоном ≤ 0.1), величина главного остаточного члена фактически не превосходит остаточные члены в схемах 2-го порядка точности. В той же работе данная методика апробирована в расчетах по двумерной модели.

В отношении аппроксимации адвективных слагаемых упомянем прием, принципиально не связанный с учетом гор, но развитый в связи с изучением орографических воздействий (Марер и Пилке, 1977а,б). На нижнем расчетном уровне, расположенном в пограничном слое, в точках, где $w > 0$, выражения вида $\omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)$ рассчитывались не дискретной аппроксимацией $\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}$, а в силу теории подобия, через универсальные функции и масштабы скорости и температуры. Это позволило уменьшить погрешности аппроксимации, связанные с нелинейностью профилей метеорологических величин в пограничном слое. В негидростатических моделях данный прием пока не использовался.

Что касается описания турбулентности, отметим примененную Гал-Ченом и Сомервилем (1975) модификацию числа Ричардсона. В рамках схемы нелинейной турбулентной вязкости они принимают вместо Ri параметр Ri' :

$$Ri' = \begin{cases} Ri, & \text{если } |\theta_{v1}| \leq 10^{-3} \bar{\theta}_{v1} \\ Ri - (c_p \bar{\theta}_{v1}) \left(\sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \theta_{v1}}{\partial x_k} \right) \right) / |\theta_{v1} Def^2| & \text{в противном случае} \end{cases}$$

чтобы аннулировать фиктивные осцилляции метеорологических полей, связанных с разрывами в поле θ (и, как следствие, - в других полях). Этот прием апробировали в своей модели также Пененко и Алоян (1985).

4.14. Эксперименты с вложенными сетками

Техника вложенных сеток как средство учета крупномасштабных процессов является сегодня почти обязательным элементом региональных прогностических моделей. В свою очередь, двусторонний вариант данной техники, позволяющий учитывать взаимодействие процессов разных масштабов, представляется методически более перспективным, чем односторонний. В этой связи укажем кратко результаты Кларка и Фэрли (1984), впервые систематически изучивших двусторонний вариант вложенных сеток в рамках негидростатической модели.

Общая структура алгоритма аналогична той, которую обычно принимают в моделях с двусторонним взаимодействием вложенных сеток (см. литературу в 3.1):

- 1) временной шаг выполняется на крупной сетке;
- 2) интерполяцией найденных полей определяются граничные значения для внутренней области с мелкой сеткой;
- 3) с этими граничными значениями выполняется ряд временных шагов во внутренней области с мелкой сеткой, выводящий решение в этой области на временной уровень, достигнутый на крупной сетке;
- 4) значения полей в узлах крупной сетки, расположенных во внутренней области пересчитываются осреднением полей, найденных на мелкой сетке.

Идея, высказанная в работе Курихары и др. (1979) и положенная в основу расчетов Кларка и Фэрли, заключается в том, что для правильного описания взаимодействия процессов на крупной и мелкой сетках указанные выше алгоритмы интерполяции и осреднения должны быть согласованы, а именно, они должны быть взаимно обратны. Выполнение этого условия Кларк и Фэрли обеспечивают в рамках квадратичной интерполяции и линейного осреднения. При формулировке последнего обеспечивается также, чтобы дискретный аналог уравнения неразрывности на крупной сетке после пересчета по-прежнему выполнялся точно.

Сравнение двух методик, односторонней и двусторонней, на материале одной и той же тестовой задачи (о разрушении нейтрально стратифицированного пузыря, внесенного в устойчиво стратифицированную среду) дало весьма обнадеживающие результаты - решение на мелкой сетке оказалось в двустороннем варианте значительно более репрезентативным, чем в одностороннем, причем также и у верхней границы области. Улучшение результата выражено существенно сильнее, чем в аналогичных сравнениях, проводившихся Филлипсом и Шуклой (1973) с баротропной моделью. В последующей работе Клаасена и Кларка (1985) были проведены расчеты с той же моделью, но с возросшим отношением шага крупной сетки к шагу мелкой, составившим 5 (в упо-

минавшейся выше работе Кларка и Фэрли это отношение равно 2). Авторы не упоминают о вычислительных шумах в окрестности внутренней границы, типичных для моделей с вложенными сетками.

Прогресс вычислительной методики двустороннего взаимодействия процессов разных масштабов, в частности, в негидростатических моделях представляется существенным моментом для становления схем гидродинамического локального прогноза.

Глава 5. *Вопросы подготовки начальных полей*

Конструирование исходных полей в мезомасштабных моделях представляет значительные трудности, поскольку сеть радиозондирований, как правило, не обеспечивает идентификации мезомасштабных движений. В этой же связи при подготовке мезомасштабных анализов существенно возрастает роль спутниковых, радиолокационных и наземных измерений, позволяющих восстановить элементы мезомасштабных структур в атмосфере, которые не выявляются сетью радиозондирований.

В настоящей главе будут рассмотрены общие вопросы чувствительности мезомасштабных моделей к начальным данным, а также подходы к анализу полей и процедурам инициализации.

5.1. Чувствительность мезомасштабных моделей к начальным условиям

Вопрос чувствительности мезомасштабных моделей к начальным условиям важен не только для выяснения предсказуемости различных мезомасштабных возмущений, но и для понимания того, насколько успешным может быть краткосрочный мезомасштабный прогноз при той или иной неполноте исходных данных.

Рядом авторов (Уайт, 1978; Антс и Уорнер, 1978; Форбс и Пилке, 1985) отмечалось, что по мере уменьшения горизонтального размера возмущений решения в большей степени определяются локальным возбуждением, чем начальными условиями, в связи, с чем атмосфера «забывает» свое начальное состояние и мезомасштабе более быстро, чем в макромасштабе.

По степени чувствительности мезомасштабных возмущений к начальным данным можно выделить два основных класса:

- 1) системы течений, образующиеся в результате возбуждающего воздействия подстилающей поверхности и атмосферных движений более крупного масштаба;
- 2) системы течений, генерируемые внутренне в результате потери устойчивости в более крупных системах течений.

К первому типу движений относятся бризовая циркуляция и другие формы орографических мезомасштабных движений, возбуждаемых термической или орографической неоднородностью подстилающей поверхности, а также атмосферные фронты, зоны конвергенции воздушных потоков. Ко второму типу относятся конвективные течения или системы вторичных течений в зоне атмосферных фронтов, появляющиеся в результате реализации механизмов конвективной или бароклинной неустойчивости.

Мезомасштабные системы, связанные с неоднородностью орографии, являются наименее чувствительными к начальным данным, поскольку возбуждающее воздействие является локализованным, и может определяться довольно точно и вскоре начинает оказывать доминирующее воздействие на получаемое решение.

При возбуждении мезомасштабных течений системами движений большего масштаба чувствительность к начальным данным возрастает, так как ошибки в локализации возбуждающей силы неизбежно транслируются в мезомасштабные решения.

Второй тип возмущений является наиболее чувствительным к заданию исходных данных, поскольку требует непосредственной информации о местоположении мезомасштабных систем. И получающееся в результате интегрирования решение, особенно в части его пространственно-временной локализации, будет в значительной мере определяться тем, насколько точно оно было локализовано в начальный момент.

Например, при известных и точно определенных значениях функций на границах мы сможем предсказать в случае конвективной неустойчивости поле кучево-дождевой облачности, но их правильная пространственно-временная локализация не будет обеспечена при отсутствии адекватной мелкомасштабной исходной информации внутри области расчетов. Представляется, что этот тип мезомасштабных возмущений является наиболее сложным для прогнозирования.

Число экспериментов по исследованию чувствительности мезомасштабных моделей к начальным данным является в настоящее время весьма ограниченным. В рамках трехмерных гидростатических моделей на мелкой сетке такого рода эксперименты обсуждаются в работах Антса и др. (1982), Орлански и Полински (1984), а в рамках двумерных задач атмосферного фронта, бриза и глубокой конвекции соответственно в работах Антса и др. (1982), Уайта (1978), Брегмана и др. (1984). Во всех этих работах делается вывод, что мезомасштабные модели не обнаруживают большой чувствительности к начальным данным. Зависимость решений от деталей задания исходных данных будет обсуждаться ниже при рассмотрении подходов к инициализации.

Завершая этот параграф, отметим, что решения, полученные в задаче мезомасштабного численного прогноза на сравнительно небольшой территории по прошествии небольшого промежутка времени (порядка 12 ч), начинают практически полностью определяться граничными условиями. Поэтому успешность прогнозов с помощью таких моделей на сроки более 12 ч будет зависеть гораздо больше от успешности прогнозирования граничных условий крупномасштабными моделями, чем от качества исходных данных.

Естественно, что при прогнозировании на более короткие сроки (до 12 ч) эффект начальных данных возрастает. Эксперименты с прогностической мезомасштабной моделью Метеорологической службы Великобритании (Голдинг, 1986) показали, что прогноз на ближайшие 10-12 часов оказывается весьма чувствительным к включению в состав начальных данных сведений об облачности и неоднородности полей температуры подстилающей поверхности.

5.2. Подходы к объективному анализу данных на мелкой сетке

Принципиально объективный анализ на мелкой сетке не отличается от анализа на более грубой сетке, и для получения информации в регулярных узлах используются методы формальной интерполяции или метод оптимальной интерполяции. Особенность объективного анализа на сетке с горизонтальным шагом менее 50 км состоит в том, что обычные данные с таким пространственным разрешением в свободной атмосфере отсутствуют, поэтому начальные данные в узлах мелкой сетки получаются интерполяцией результатов анализа или прогноза на грубой сетке. Введение в исходное поле мезомасштабной структуры может быть осуществлено с помощью тех или иных процедур усвоения данных измерений со спутников, радиолокаторов и сети наземных станций, которые имеют значительно большее пространственное разрешение, чем измерения методом радиозондирования.

Мы остановимся здесь лишь на кратком описании методов анализа на мелких сетках (с шагом 35 км и менее), которые используются в прогностических системах отдельных метеорологических служб.

В мезомасштабной модели Метеорологической службы Великобритании с горизонтальным шагом сетки 15 км для инициализации каждого прогноза используется три вида данных (Голдинг, 1986):

- 1) проинтерполированные в узлы сетки значения переменных, полученные из шестичасового прогноза по региональной модели;
- 2) трехчасовой мезомасштабный прогноз и
- 3) приземные метеорологические наблюдения.

Проинтерполированные из региональной модели значения используются в качестве крупномасштабного компонента мезомасштабного прогноза выше пограничного слоя. Распределение влажности, все переменные в пограничном слое и мелко масштабные детали полей сохраняются из мезомасштабного прогноза.

В мезомасштабной модели Метеорологической службы Франции, именуемой ПЕРИДОТ, используется метод трехмерной оптимальной интерполяции (Дюран и Жуванон дю Ваша, 1983, 1985; Дюран, 1985). В качестве первого приближения используются шестичасовой прогноз по крупномасштабной модели, который интерполируется в узлы модели ПЕРИДОТ с горизонтальным шагом 35 км. Отличительная особенность многокомпонентного анализа состоит в том, что в нем используются первичные данные TOVS с полным разрешением ($\cong 30$ км). Данные об облачности с AVHRR применяются для генерации псевдонаблюдений со 100% относительной влажностью.

Схема анализа для ограниченной территории с горизонтальным шагом 33,5-40 км, разработанная в Королевском Нидерландском метеорологическом институте (КНМИ) (Кац, 1984а, б), является по существу объединением схемы ЕЦСПП, основанной на многоэлементной трехмерной оптимальной интерполяции, и схемы, используемой Метеорологической службой Швеции. Для анализа приземных полей и параметров пограничного слоя разработана горизонтальная интерполяционная схема (Кац, 1985), основанная на методе последовательных коррекций.

В Гидрометцентре Российской Федерации для мезомасштабной модели с горизонтальным шагом сетки 10 км построение начальных полей температуры, дефицита точки росы и горизонтальных составляющих скорости ветра проводится по данным радиозондирования на основе полиномиальной интерполяции и по синоптическим данным - на основе варианта метода наименьших квадратов (Кисельникова, 1984). Для введения в начальные данные мезомасштабных неоднородностей вводят в схему анализа данные измерений со спутников и радиолокаторов.

5.3. Методы инициализации

В связи с неполнотой исходной информации, ошибками в начальных данных и возможным присутствием в них высоких частот, неразрешаемых данной моделью, необходима процедура согласования начальных данных или *процедура инициализации*, которая минимизирует возможность появления больших временных тенденций, появляющихся в результате дисбалансов в исходных данных. В вопросе начальных дисбалансов можно выделить два аспекта:

- ⇒ несогласованность начальных полей давления и массы (адиабатический дисбаланс)
- ⇒ влияние неадиабатических факторов на баланс между динамическими и термодинамическими полями

Наиболее разработанным с теоретической точки зрения является вопрос согласования полей ветра и давления в адиабатических моделях. Суть проблемы состоит в том, что из-за дисбаланса между полями ветра и давления в решениях возникают инерционно-гравитационные волны, которые в гидростатических моделях сохраняются в течение нескольких часов и вызывают ощутимые осцилляции в приземном давлении и

вертикальной скорости. Наиболее подробный анализ процесса согласования полей ветра и давления применительно к мезомасштабным моделям был сделан в работе Уорнера (1984), в которой на уравнениях мелкой воды был показан механизм переноса ошибки для уравнения геострофического ветра и линейного уравнения баланса. Основные выводы, полученные в работах Уорнера, а также Уайта (1978), состоят в том, что поле скорости доминирует в процессе согласования на мелком масштабе, а поле массы - на крупном масштабе. На промежуточных масштабах приспособление является взаимным.

Если поле скорости выводится из поля массы через геострофическое соотношение или из уравнения баланса, то по мере уменьшения масштаба происходит быстрое увеличение ошибки скорости при фиксированной ошибке геопотенциала. Так, при шаге сетки 37.5 км ошибка геопотенциала 12 м дает ошибку в скорости 40 м/с. Напротив, если поле массы рассчитывается из поля скорости, то ошибки в поле массы, возникающая при фиксированной ошибке в поле скорости, уменьшается по мере уменьшения пространственного масштаба. Так, при ошибке в измерении скорости ветра в 3 м/с ошибка геопотенциала составляет всего 0.5 м при пространственном шаге сетки 37.5 км. Кроме того, небольшие ошибки в поле массы будут диспергировать в виде относительно "безвредных" гравитационно-инерционных волн.

Выводы о доминирующей роли поля скорости в процессе согласования на мелком масштабе подтверждаются экспериментами по восстановлению начальных полей давления для мезомасштабной модели Гидрометцентра СССР. Ошибки в поле давления, рассчитанного по фактическому полю ветра согласно уравнения вида (1.2.7) не превышают 1-2 гПа у Земли и 0.1-0.2 гПа на высотах 8500-100500 м (Кисельникова, 1984).

Таким образом, при инициализации в мезомасштабе целесообразно осуществлять приспособление поля давления к полю ветра, используя для этого обращенное уравнение баланса. Среди предложенных процедур инициализации можно выделить три основные группы. В первой из них используются различные комбинации уравнения неразрывности и "омега"-уравнения для получения ветра по данным о давлении или наоборот. В некоторых моделях условие равенства нулю дивергенции используется для получения бездивергентного компонента ветра по полю давления, в то время как ω -уравнение используется для оценки дивергентного компонента ветра. Для того, чтобы минимизировать амплитуду внешней гравитационной волны (Бенвелл и Бретертон, 1968), часто исключается проинтегрированная по вертикали дивергенция массы (Вашингтон и Баумхейфнер, 1975).

Во второй группе методов начальный анализ проектируется на собственные функции модели или нормальные моды. Этот подход известен под названием *инициализации в нормальных модах*. Он является наиболее естественным при периодических условиях и, поэтому нашел особое распространение в глобальных и полусферных моделях. Несмотря на то, что инициализация в нормальных модах не является столь естественной для моделей на ограниченной территории, этот подход используется и для представления начальных полей в моделях на ограниченной территории (Бриер, 1982; Бурке и МакГрегор, 1983; Биилсма и Хавкеншейд, 1985). В этом методе, обзор по которому можно найти у Дейли (1981), начальные данные приспособляются друг к другу таким образом, что временные вариации высокочастотных гравитационных волн являются первоначально нулевыми.

Третий подход, представляющийся перспективным для моделей на ограниченной территории, основан на *методе ограниченных производных* (Браунинг и др., 1980; Ка-

сахара, 1982). В этом методе анализируемые данные приспособляются таким образом, чтобы довести производные по времени до метеорологически реалистичных значений.

В четвертом подходе используется *метод динамического согласования*. При динамической инициализации для получения сбалансированных полей используются сами прогностические уравнения. Примером может быть схема Нитты и Ховермейла (1969), где производится интегрирование вперед и назад, центрированное относительно начального состояния. Возможно также и применение интегрирования только вперед с использованием тех или иных гипотез относительно возбуждающих членов в прогностических уравнениях. В качестве первого приближения в этом методе можно использовать предварительно согласованные поля ветра и давления.

Трудность в использовании первых двух подходов состоит в том, что в начальный баланс не включаются неадиабатические эффекты. Между тем в мезомасштабе особенно неадиабатические факторы могут играть существенную роль в балансе между полем ветра и термодинамическими полями. Приспособление к ошибкам в полях температуры и влажности может вызвать не меньшие трудности, чем приспособление к ошибкам в дивергентном компоненте ветра. В работе Тарбелла и др. (1981) было показано, как использование информации о притоке скрытого тепла в начальных данных существенно улучшило прогноз интенсивности осадков в первые 6 часов прогноза.

Эксперименты с мезомасштабной моделью Метеорологической службы Великобритании (Голдинг и др., 1985) показали, что включение в процедуру инициализации информации об облаках, дающих высвобождение скрытого тепла, приводит к быстрому созданию устойчивых мезомасштабных систем, таких как линии шквалов.

Следует также иметь в виду, что для мезомасштабных моделей на ограниченной территории, по крайней мере, в обозримом будущем будет типичной ситуация, когда часть исходных полей (ветер, давление, температура) будет получаться с низким пространственным разрешением, а часть полей (облачность, осадки по спутниковым и радиолокационным данным) - с высоким. В этой ситуации инициализация с использованием прогностических уравнений модели представляется наиболее перспективной, поскольку в результате её применения в процессе согласования полей элементы мезомасштабной структуры в одних полях (влажности, облачности, осадки) могут быть транслированы в другие (температура, давление, ветер).

Существование такого рода переноса элементов мезоструктуры из одних полей в другие подтверждается численными экспериментами по чувствительности решений к начальным данным (см., например, Брегман и др., 1985).

Завершая эту главу, сделаем краткий обзор процедур инициализации, используемых в некоторых прогностических и мезомасштабных моделях.

В мезомасштабной модели Метеорологической службы Великобритании с шагом сетки 15 км (Голдинг, 1986) в качестве исходных данных в процедуре инициализации используются проинтегрированные в узлы сетки прогностические данные из региональной модели в свободной атмосфере, а также данные о влажности в свободной атмосфере, все переменные в пограничном слое - из мезомасштабного прогноза. Полученные "гибридные" данные корректируются затем с использованием наземных измерений. Наземные данные используются для коррекции температуры, влажности и ветра на нижнем расчетном уровне в атмосфере (10 м), а также для анализа количества облаков на каждом уровне модели и интенсивности осадков. В последнем случае мезомасштабный прогноз используется в качестве первого приближения. После этого для опре-

деления водности облаков включается схема осадков, применяемая в модели. По восстановленной таким образом водности облаков и анализу их мощности строится анализ интенсивности осадков у поверхности земли. Для восстановления водности на уровне 10 м используются наблюдения за туманом.

В мезомасштабной модели Метеорологической службы Франции "ПЕРИДОТ" с шагом сетки 35 км инициализация проводится методом нормальных мод (Бриер, 1982).

В мезомасштабной модели Гидрометцентра СССР (ныне Российской Федерации) основу методики инициализации составляют процедуры, которые в том или ином смысле "адаптируют" начальные поля метеорологических величин к решениям прогностической схемы. В работе Кисельниковой (1984) "адаптация" заключается в построении бездивергентного поля скорости, т.е. в точном выполнении диагностического уравнения для давления прогностической схемы. В последние годы в Гидрометцентре РФ ведутся работы над созданием более совершенной методики инициализации, существо которой заключается в применении самой прогностической схемы при закрепленных краевых условиях, отвечающих начальному моменту прогноза. Полученные после начального этапа быстрой перестройки поля используются в качестве начальных для последующего прогноза.

Список литературы

- Алоян А.Е., 1984: Негидростатические численные модели локальных атмосферных процессов. - Препринт № 451, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 41 с.
- Алоян А.Е., Абраменко В.В., 1982: Численная модель турбулентного пограничного слоя. - Препринт № 362, , Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 19 с.
- Алоян А.Е., Иорданов Д.Л., Пененко В.В., 1981: Параметризация приземного слоя с переменной высотой. - Метеорология и гидрология, № 1, с.37-46.
- Алоян А.Е., Лазриев Г.Л., 1980: О параметризации энергии турбулентности в приземном слое атмосферы. - Математическое моделирование динамики атмосферы и океана, Г.И. Марчук, ред, ч. II. Математические модели атмосферных движений, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, с. 85-94.
- Амиров А.Д., 1968: О влиянии искусственного источника тепла на эволюцию кучевого облака. Численный эксперимент. - Изв. АН СССР, ФАО. Т.4, с. 152-159.
- Амиров А.Д., 1971: Метод расчета полей влажности и температуры в задаче о кучевом облаке. - Изв. АН СССР, ФАО, т.7, с. 723-730.
- Антес Р.А. и др., 1988: Предсказуемость мезомасштабных атмосферных движений. В кн.: Динамика погоды. - Л., Гидрометеиздат, с. 165-204.
- Братсерт У.Х., 1985: Испарение в атмосферу. Пер. с англ. – Л., Гидрометеиздат, 351 с.
- Брегман А.А., 1984: Результаты численного моделирования процессов влажной глубокой конвекции. - Труды Гидрометцентра СССР, вып. 239, с. 156-170.
- Брегман А.А., Вельтищев Н.Ф., Желнин А.А., 1984: Чувствительность модели мезомасштабной конвекции к начальным данным. - Метеорология и гидрология, № 7, с.5-11.
- Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н., 1991: Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. – Л., Гидрометеиздат, 278 с.
- Вельтищев Н.Ф., Желнин А.А., Кисельникова В.З., Пекелис Е.М., Прессман Д.Я., 1982: Мезомасштабный прогноз погоды. - Метеорология и гидрология, № 4, с. 5-15.
- Вульфсон А.Н., 1982: Уравнения глубокой влажной конвекции, включающие фазовые переходы влаги. - Изв. АН СССР, ФАО, т.18, с. 1018-1025.
- Гаврилов А.С., 1988: Математическое моделирование мезометеорологических процессов. Уч. пособие. – Л., Изд-во ЛПИ, 95 с.
- Гинзбург А.С., Фейгельсон Е.М., 1980: Параметризация лучистого теплообмена в моделях общей циркуляции атмосферы. - В кн.: Физика атмосферы и проблема климата. М., «Наука», с. 42-66.
- Годунов С.К., Рябенский В.С., 1977: Разностные схемы. М., «Наука», 439 с.
- Гордин В.А., 1978а: О смешанной краевой задаче для баротропной модели атмосферы. Труды Гидрометцентра СССР, вып. 196, с. 48-61.
- Гордин В.А., 1978б: О смешанной краевой задаче, имитирующей задачу Коши. - Успехи матем. наук, т.33, вып. 5 (203), с. 181-182.

- Гордин В.А., Далматов Б.К., 1979: О верхнем краевом условии в задаче численного прогноза метеорологических элементов. - Метеорология и гидрология, № 9, с. 25-33.
- Градус Л.М., Нийлиск Х.Ю., Фейгельсон Е.М., 1972: Интегральные функции пропускания теплового излучения. - В сб.: «Теплообмен в атмосфере», М., «Наука», с. 7-10.
- Гутман Л.Н., 1969: Введение в нелинейную теорию мезомасштабных процессов. – Л. Гидрометеиздат, 295 с.
- Дегтярев А.И., 1980: Использование метода вложенных сеток в трехмерной модели атмосферы. - Метеорология и гидрология, № 11, с. 27-33.
- Дымников В.П., Ишимова А.В., 1975: Расчет приземной температуры из уравнения баланса. - Труды ЗапСибНИИ, вып. 14, с. 47-551.
- Захариев В., Кадышников В.М., Лосев В.М., Проданова М., 1985: Эксперименты с телескопизированной прогностической схемой. - Метеорология и гидрология, № 9, с. 8-16.
- Зейтунян Х.Н., 1963: Об учете коротких волн в нелинейной задаче обтекания гор воздушным потоком. - Труды ВМЦ, вып. 1, с. 72-83.
- Кадышников В.М., 1981: Телескопизированная схема гидродинамического краткосрочного прогноза погоды. - Метеорология и гидрология, № 2, с. 18-27.
- Кадышников В.М., 1984: Фильтрующая роль уравнений глубокой конвекции в модели политропной атмосферы. - Метеорология и гидрология, № 1, с. 11-19.
- Казаков А.Л., Лазриев Г.Л., 1978: О параметризации приземного слоя атмосферы и деятельного слоя почвы. - Изв. АН СССР, ФАО, т.14, с. 257-265.
- Казаков А.Л., Лысоков В.Н., 1982: О параметризации взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью при численном моделировании атмосферных процессов. Труды ЗСРНИИ, вып. 55, с.3-20.
- Каленкович Е.Е., Каминская Л.Г., Голах И.В., 1984: О результатах оперативных испытаний телескопизированной модели краткосрочного прогноза. - Труды ЗСРНИИ, вып.63, с.42-46.
- Каленкович Е.Е., Новикова Н.В., Голах И.В., 1978: Задача прогноза для Северного полушария и региона. - Труды ЗСРНИИ, вып.41, с. 3-20.
- Кисельникова В.З., 1984: О начальных данных в задаче численного локального прогноза погоды. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.239, с.102-113.
- Кисельникова В.З., Пекелис Е.М., 1974: К расчету нестационарных гравитационных волн от изолированного препятствия. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.151, с. 65-87.
- Кисельникова В.З., Пекелис Е.М., Прессман Д.Я., 1982: Схемы повышенной устойчивости для численного интегрирования уравнений конвекции. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.249, с.96-113.
- Краснокутская Л.Д., Фейгельсон Е.М., 1973: Расчет потоков инфракрасного солнечного излучения в облачной атмосфере. - Изв. АН СССР, ФАО, т.9, с.10003-1013.

- Кричак С.О., 1981: Неадиабатическая модель атмосферы по полным уравнениям для прогноза метеорологических элементов над Европой. - Метеорология и гидрология, №7, с. 18-26.
- Магазенков Л.Н., Шейнин Д.А., 1982: Об интегрировании уравнений динамики атмосферы на длительные сроки с использованием вложенных сеток. - Труды ГГО, вып.459, с. 92-111.
- Мазин И.П., Шметер С.М., 1983: Строение и физика образования облаков и осадков. - Л., Гидрометеиздат, 279 с.
- Марчук Г.И., 1977: Методы вычислительной математики. - М. «Наука», 455 с.
- Матвеев Л.Т., 1959: Некоторые вопросы теории образования и эволюции слоистообразной облачности. - Труды ААНИИ, т.228, вып.1, с.14-37.
- Монин А.С., Обухов А.М., 1954: Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. - Труды Геофиз. Ин-та АН СССР, №24 (151), с. 163-187.
- Орлански И. и др., 1988: Успехи в теории атмосферных фронтов. В кн.: Динамика погоды. - Л., Гидрометеиздат, с. 225-255.
- Пастушков Р.С., 1970а: Численная модель трехмерной конвекции в атмосфере с вертикальным сдвигом ветра. - Труды ЦАО, вып.97, с. 3-19.
- Пастушков Р.С., 1970б: Зависимость динамики кучевого облака от масштаба турбулентности в его зоне. - Труды ЦАО, вып.97, с. 20-29.
- Пастушков Р.С., 1973: О влиянии вертикального сдвига ветра на развитие конвективной облачности. - Изв. АН СССР, ФАО, т.9, с. 12-26.
- Пекелис Е.М., 1974: К вопросу о решении задачи Коши в конечных разностях. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.151, с. 43-64.
- Пекелис Е.М., Прессман Д.Я., 1982: Численная реализация условий излучения и их применение в качестве условий «открытых границ» при численном интегрировании уравнений конвекции. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.249, с.74-95.
- Пекелис Е.М., Прессман Д.Я., 1986: К учету подсеточной турбулентности и орографии в схеме гидродинамического локального прогноза. - Труды Гидрометцентра СССР, вып. 274, с 3-32.
- Пененко В.В., 1977: Энергетически-сбалансированные дискретные модели динамики атмосферных процессов. - Метеорология и гидрология, №10, с. 3-20.
- Пененко В.В., 1981: Методы численного моделирования атмосферных процессов. - Л., Гидрометеиздат, 352 с.
- Пененко В.В., Алоян А.Е., 1985: Модели и методы для задач охраны окружающей среды. - Новосибирск, «Наука», 256 с.
- Пилке Р.А., 1988: Термические и орографические мезомасштабные системы в атмосфере. В кн.: Динамика погоды. - Л., Гидрометеиздат, с. 205-224.
- Прессман Д.Я., 1969: К постановке краевых условий по горизонтальным координатам в задаче краткосрочного прогноза погоды по «полным» уравнениям для области, через границу которой имеется поток. - Изв. АН СССР, ФАО, т.5, с. 951-953.

- Прессман Д.Я., 1978: Расчеты обтекания хребта квазистатическим двухслойным потоком. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.189, с.3-12.
- Прессман Д.Я., 1984: К численному интегрированию уравнений глубокой конвекции. - Труды Гидрометцентра СССР, вып.239, с.57-75.
- Сергеев Б.Н., 1983: Численное моделирование атмосферного фронта с облачной системой и осадками. - Метеорология и гидрология, №4, с. 21-29.
- Шакина Н.П., 1985: Динамика атмосферных фронтов и циклонов. - Л., Гидрометеиздат, 263 с.
- Шакина Н.П., 1990: Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере. - Л., Гидрометеиздат, 309 с.
- Фалькович А.И., 1986: Схема с вложенными сетками для прогноза перемещения изолированного вихря в баротропной атмосфере. - Метеорология и гидрология, №9, с. 35-41.
- Федоренко Р.П., 1961: Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. - ЖВММФ, т.1, с. 922-927.
- Федоренко Р.П., 1964: О скорости сходимости одного итерационного процесса. - ЖВММФ, т.4, с 559-564.
- Фейгельсон Е.М., 1970: Лучистый теплообмен и облака. - Л., Гидрометеиздат, 230 с.
- Фейгельсон Е.М., Дмитриева Л.Р., 1983: Радиационные алгоритмы в моделях общей циркуляции (под ред.). - ВНИИГМИ-МЦЦ, Гидрометеорология, обзорная информация, вып.1, 77 с.
- Alpert P. and J. Neumann, 1984: On the enhanced smoothing over topography in some mesometeorological models. - Bound. Layer Meteor., vol.30, pp. 293-312.
- André J.-C., 1983: Planetary boundary layer parameterization and turbulence closure. - Mesoscale Meteorology - Theories, Observations and Models, D.K. Lilly and T.Gal-Chen, Eds., D. Reidel, pp. 651-669.
- André J.-C., G. DeMoor, P.Lacarrère, G.Therry and R.Juvanon du Vachat, 1978: Modelling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer. - J. Atmos. Sci., vol.35, pp.1861-1883.
- Anthes R.A., 1970: Numerical experiments with a two-dimensional horizontal variable grid. - Mon. Wea. Rev., vol.98, pp. 810-822.
- Anthes R.A., 1972: The development of asymmetrys in a three-dimensional model of the tropical cyclone. - Mon. Wea. Rev., vol.100, pp. 461-476.
- Anthes R.A., 1974: Data assimilation and initialization of hurricane prediction models. - J.Atmos. Sci., vol.31, pp.702-719.
- Anthes R.A., 1983: Regional models of the atmosphere in middle latitudes. - Mon. Wea. Rev., vol.111, pp.1306-1335.
- Anthes R.A., E.-Y. Hsie, D. Keyser and Y.-H. Kuo, 1981: Impact of data and initialization procedures on variations of vertical motion and precipitation in mesoscale models. Nowcasting: mesoscale observations and short-range prediction. - Proc. Int. IAMAP Symp. 25-28 August 1981, Hamburg, pp. 245-257.

- Anthes R.A. and D. Keyser, 1979: Tests of a fine-mesh model over Europe and the United States. - *Mon. Wea. Rev.*, vol.107, pp.963-984.
- Anthes R.A., Y.-H. Kuo, D.P. Baumhefner, R.M. Errico and T.W. Bettge, 1985: Predictability of mesoscale atmospheric motions. - *Advances in Geophysics*, vol.28, Part B, pp. 159-202.
- Anthes R.A., S.L. Rosenthal and J.W. Traut, 1971: Preliminary results from an asymmetric model of the tropical cyclone. - *Mon. Wea. Rev.*, vol.99, pp. 744-758.
- Anthes R.A. and T.T. Warner, 1978: Development of hydrodynamic models suitable for air pollution and other mesometeorological studies. *Mon. Wea. Rev.*, vol.106, pp.1045-1078.
- Arakawa A., 1966: Computational design for long term numerical integration of the equations of fluid motions: Two-dimensional incompressible flow, Part I. - *J. Comput. Phys.*, vol.1, pp. 119-143.
- Arakawa A., 1972: Design of the UCLA general circulation model. - *Numerical Simulation of Weather and Climate*. Dept. of Meteor. of California, Los Angeles, Tech. Rep. № 7, 116 pp.
- Arakawa A. and V.R. Lamb, 1977: Computational design of the basic dynamic process of the UCLA general circulation model. - *Methods in Comput. Physics*, vol.17, J. Chang Ed., Academic Press, pp. 173-265.
- Asai T., 1965: A numerical study of the air-mass transformation over Japan sea in winter. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol.43, pp.1-15.
- Asselin R., 1972a: Integration of a semi-implicit model with time-dependent boundary conditions. - *Atmosphere*, vol.10, pp.44-55.
- Asselin R., 1972b: Frequency filter for time integrations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol.100, pp.487-490.
- Atkinson R.W., 1981: *Meso-scale atmospheric circulations*. Academic Press, 495 pp.
- Bader D.C. and T.B. McKee, 1985: Effects of shear, stability and valley characteristics on the destruction of temperature inversions. *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol.24, pp.822-832.
- Baer F., D.B. Rao and D. Boudra, 1972: Studies on numerical modelling and modification of cyclone scale precipitation. - Final Report, Univ. Of Michigan. Grant DAHC 04-73-00001, Environ. Sci., US Army Research Office.
- Bailey M.J., K.M. Carpenter, L.R. Lowther and C.W. Passnt, 1981: A mesoscale forecast for 14 August 1975 - the Hampstead storm. - *Meteor. Mag.*, vol.110, pp. 147-160.
- Ballentine R.J., 1980: A numerical investigation of New England coastal frontogenesis. - *Mon. Wea. Rev.*, vol.108, pp.1479-1497.
- Banta R. and W.R. Cotton, 1980: On computing average cloud-water quantities in a partially cloudy region. - *J. Rech. Atmos.*, vol.14, pp.487-492.
- Batchelor G.K., 1953: The condition for dynamical similarity of motions of a friction less perfect-gas atmosphere. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol.79, pp. 224-235.
- Bates J.R., 1984: An efficient semi-Lagrangian an alternating direction implicit method for integrating the shallow water equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol.112, pp. 2033-2047.

- Bates J.R., 1985: Semi-Lagrangian advective schemes and their use in meteorological modeling. - *Lectures in Appl. Math.*, vol.22, pp. 1-29.
- Bates J.R. and A. McDonald, 1982: Multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes: analysis and application to a multilevel primitive equation model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol.110, pp. 1831-1842.
- Bates J.R. and A. McDonald, 1986: A semi-Lagrangian and alternating direction implicit method for the integrating a multi-level primitive equation model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 191-194.
- Baumhefner D.P. and D.J. Perkey, 1982: Evaluation of lateral boundary errors in a limited-domain model. - *Tellus*, vol.34, pp.409-428.
- Bayliss A. and E. Turkel, 1980: Radiation boundary conditions for wave-like equations. - *Commun. Pure Appl. Math.*, vol.33, pp.707-726.
- Bayliss A. and E. Turkel, 1982a: Far field boundary conditions for compressible flows. - *J. Comput. Phys.*, vol.48, pp.182-199.
- Bayliss A. and E. Turkel, 1982b: Outflow boundary conditions for fluid dynamics. - *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, vol.3, pp.250-259.
- Beiland M. and T. Warn, 1975: The radiation conditions for transient Rossby waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol.32, pp. 1873-1880.
- Bejaars A.C.M., 1982: The deviation of fluxes from profiles in perturbed areas. - *Bound. Layer Meteor.*, vol.24, pp. 35-55.
- Bejaars A.C.M., P. Schotanus and F.T.M. Nieuwstadt, 1983: Surface layer similarity under non-uniform fetch conditions. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol.22, pp.1800-1810.
- Bender M.A., R.E. Tuleya and Y. Kurihara, 1986: Effects of mountainous island on the behavior of tropical cyclones. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 455-460.
- Bengtsson L. and L. Moen, 1971: An operational system for numerical weather prediction. - *Satellite and Computer Applications to Meteorology*, WMO - No. 283.
- Bennet A.F., 1976: Open boundary conditions for dispersive waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol.33, pp. 176-182.
- Bennetts D.A., 1978: A numerical study of the initiation and early development of convection in temperate atmospheres. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol.104, pp. 693-706.
- Bennetts D.A. and M.J. Bader, 1982: Precipitation in convective storms: an observational and numerical study. - *Cloud Dynamics*, E.M. Agee and T. Assai Eds., Reidel, pp. 363-377.
- Bennetts D.A. and F. Rawlins, 1981: Parameterization of the ice-phase in a model of mid-latitude cumulonimbus convection and its influence on the simulation of cloud development. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol.107, pp. 477-502.
- Benwell G.R.R. and F.P. Bretherton, 1968: A pressure oscillation in a 10-level atmospheric model. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol.94, pp. 123-131.

- Benwell G.R.R., A.J. Gadd, J.F. Keers, M.S. Timpson and P.W. White, 1971: The Bushby-Timpson 10-level model on a fine mesh. - Meteor. Office Sci. Pap. No. 32, London: Her Majesty's Stationary Office, 35 pp.
- Betts A.K., 1973: Non-precipitating cumulus convection and its parameterization. - Quart. J. Roy. Meteor. Soc., vol.99, pp. 178-196.
- Brumralkar C.H., 1975: Numerical experiments on the computation of ground surface temperature in an atmospheric general circulation model. - J. Appl. Meteor., vol.14, pp. 1246-1258.
- Bijlsma S.J. and L.M. Hafkenscheid, 1985: Initialization of a limited area model: A comparison between the nonlinear normal mode and bounded derivative methods. - Preprint Submitted to HWR, 28 pp.
- Birchfield G.E., 1960: Numerical prediction of hurricane movement with the use of fine grid. - J. Meteor., vol. 17, pp.406-414.
- Blackadar A.K., 1962: The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. - J. Geophys. Res., vol., 67, pp. 3095-3102.
- Blackadar A.K., 1976: Modelling the nocturnal boundary layer. - Proc. of the 3rd Symp. on atmospheric turbulence, diffusion and air quality. - Amer. Meteor. Soc., 1976, pp. 46-49.
- Blackadar A.K., 1979: High-resolution models of the planetary boundary layer. - Advances in Environmental Science and Engineering, vol. 1, Gordon and Breach, pp. 50-85.
- Blackadar A.K. and H. Tennekes, 1968: Asimptotic similarity in neutral barotropic boundary layer. - J. Atmos. Sci., vol. 25, pp. 1015-1020.
- Blechman J.B., 1981: Vortex generation in a numerical thunderstorm model. - Mon. Wea. Rev., vol. 109, pp. 1061-1071.
- Bornstein R.D., 1975: The two-dimensional URBMET urban boundary layer model. - J. Appl. Meteor., vol 14, pp. 1459-1477.
- Bourda D.B., 1981: A study of the early winter effects of the Great Lakes. I: Comparison of very fine scale numerical simulations with observed data. - Mon. Wea. Rev., vol. 109, pp. 2507-2526.
- Bougealt P., 1982: A non-reflective upper boundary condition for limited-height hydrostatic models. - Direction de la Météorologie, EERM/GMD, 92100, Boulogne, France, 16 pp.
- Bougealt P., 1983: A non-reflective upper boundary condition for limited-height hydrostatic models. - Mon. Wea. Rev., vol. 111, pp. 420-429.
- Bourke W.P. and J.C. McGregor, 1983: A non-linear vertical mode initialization scheme for a limited area prediction model. - Mon. Wea. Rev., vol. 111, pp. 2285-2297.
- Boussinesq J.K, 1903: Théorie analytique de la chaleur. - Paris, Gauthier-Vellars, vol. 2, p. 172.
- Brandt A., 1977: Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. - Math. Comput., vol. 31, pp. 333-390.
- Briere S., 1982: Nonlinear normal mode initialization of a limited-area model. - Mon. Wea. Rev., vol. 110, pp. 1166-1186.

- Brigham E.O., 1974: The fast Fourier transform. - Prentice-Hall, 252 pp.
- Brown P.S. (jr) and J.P. Pandolfo, 1979: Numerical stability of the combined advective-diffusion equation with nonuniform spatial grid. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 107, pp. 959-962.
- Browning K.A. and B.W. Golding, 1984: Mesoscale forecasting in the Meteorological Office: the way ahead? - *Meteor. Mag.*, vol. 113, pp. 302-313.
- Browning K.A., A. Kasahara and H.-O. Kreise, 1980: Initialization of the primitive equations by the bounded derivative method. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 1424-1436.
- Browning K.A., H.-O. Kreise and J. Olinger, 1973: Mesh refinement. - *Math. Comput.*, vol. 27, pp. 29-39.
- Bryan K., 1966: A scheme for numerical integration of the equations of motion on an irregular grid free from nonlinear instability. *Mon. Wea. Rev.*, vol. 9, pp. 39-40.
- Burridge D.M., 1975: A split semi-implicit reformulation of the Bushby-Timpson 10-level model. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 101, pp. 777-792.
- Bush N.E., S. Chang and R.A. Anthes: 1976: A multi-level model of the planetary boundary layer suitable for use with mesoscale dynamic models. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 15, pp. 909-919.
- Bushby F.H. and M.S. Timpson, 1967: A 10-level atmospheric model and frontal rain. - *Quart. J. Meteor. Soc.*, vol. 93, pp. 1-17.
- Businger J.A., 1973: Turbulent transfer in the atmosphere surface layer. - *Workshop on Micrometeorology*, Duane A. Haugen, Ed., Amer. Meteor. Soc., pp. 67-100.
- Businger J.A., 1982: Equations and concepts. - *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling*, F.T.M. Nieuwstadt and H. Van Dop, Eds, Reidel, pp. 1-36. (Имеется русский перевод: Дж.А. Бусингер, 1985: Основные понятия и уравнения. В кн.: Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей. - Л., Гидрометеиздат, с. 18- 50).
- Businger J.A., J.C. Wyngaard, Y. Isumi and E.F. Bradley, 1971 Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 28, pp. 181-189.
- Busbee B.L., G.H. Golub and C.W. Nielsen, 1970: On direct methods for solving Poisson's equations. - *SiAm J. Numer. Analysis*, vol. 7, pp. 627-655.
- Byers H.R., 1965: *Elements of cloud physics*. - The University of Chicago Press, 191 pp.
- Cain A.B., J.H. Tersiger, W.C. Reynolds, 1984: Discrete orthogonal function expansions for non-uniform grids using the fast Fourier transform. - *J. Comput. Phys.*, vol. 56, pp. 272-286.
- Campana K.A., 1979: Higher order finite-differencing experiments with a semi-implicit model at the National Meteorological Center. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 107, pp. 363-376.
- Campbel G.S., 1974: A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data. - *Soil Sci.*, vol. 117, pp. 311-314.
- Carpenter K.M., 1979: An experimental forecast using a non-hydrostatic mesoscale model. - *Quart. J. Meteor. Soc.*, vol. 105, pp. 629-656.
- Carpenter K.M., 1981: The accuracy of Gadd's modified Lax-Wendroff algorithm for advection. - *Quart. J. Meteor. Soc.*, vol. 107, pp. 467-470.

- Carpenter K.M., 1982: Note on the paper «Radiation conditions for lateral boundaries of limited area numerical models» - *Quart. J. Meteor. Soc.*, vol. 108, pp. 717-719.
- Cats G.J., 1984: A scheme for mass and wind analysis on a limited area using multivariate three-dimensional optimum interpolation: scientific documentation and first evaluation. - KNMI Techn. Rep TR-46, 53 pp.
- Cats G.J., 1984: A simple horizontal interpolation scheme for irregularly distributed data. - Memorandum FM-84-28, KNMI, De Bilt, 13 pp.
- Cerjan C., D Kosloff, R. Kosloff and M. Reshet, 1985: A non-reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. - *Geophysics*, vol. 50, pp. 705-708.
- Chan S.T. and P.M. Gresho, 1982: Solution of the multi-dimensional incompressible Navier-Stokes equations using low-order finite elements and one-point quadrature. - *Annal. Proc. 4th Int. Conf. on Finite Elements Meth. Flow Problems*, Tokyo, July 26-29, 1982.
- Chang S.W.-J., 1979: An efficient parameterization of convective and nonconvective planetary boundary layer for use in numerical models. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 18, pp. 1205-1215.
- Chang S.W.-J., 1982: The orographic effects induced by an island mountain range on propagating tropical cyclones. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 110, pp. 1255-1270.
- Chang C.B., D.J. Perkey and C.W. Kreitzberg, 1981: A numerical case study of the squall line of 6 May 1975. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, pp. 1601-1615.
- Chang C.B., D.J. Perkey and C.W. Kreitzberg, 1982: A numerical case study of the effects of latent heating on a developing wave cyclone. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 1555-1570.
- Charney J.G., 1955: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. - *Tellus*, vol. 7, pp. 22-26.
- Charney J.G., 1962: Integration of the primitive and balance equations. - *Proc. Intern. Symp. Numerical Weather Prediction*, Tokyo, Meteor. Soc. Japan, pp. 131-152.
- Charney J.G., R.J. Fjortoft, J. von Neumann, 1960: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. - *Tellus*, vol. 2, pp. 237-254.
- Charnock H., 1955: Wind stress on a water surface. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 81, pp. 639-640.
- Charnock H., 1967: Flux-gradient relations near the ground in unstable conditions. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 93, pp. 97-100.
- Chen J.H., 1973: Numerical boundary conditions and computational models. - *J. Comput. Phys.*, vol. 13, pp. 522-535.
- Chen J.H. and K. Mijakoda, 1974: A nested grid computation for the barotropic free surface atmosphere. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 102, pp. 181-190.
- Chen C.-H. and H.D. Orville, 1980: Effects of mesoscale convergence on cloud convection. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 19, pp. 256-274.
- Cho H.-R. and T.L. Clark, 1981: A numerical investigation of the structure of vorticity fields associated with a deep convective cloud. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 109, pp. 1654-1670.

- Chuang S., F.H. Proctor, J.W. Zack and M.L. Kaplan, 1984: A numerical weather prediction system designed to simulate atmospheric downburst phenomena. - AIAA Pap., № 352, 15 pp.
- Clapp R. and G. Hornberger, 1978: Empirical equations for some soil hydraulic properties. - *Wat. Resour. Res.*, vol. 14, pp. 601-604.
- Clark T.L., 1973: Numerical modelling of the dynamics and microphysics of warm cumulus convection. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 30, pp. 857-878.
- Clark T.L., 1977: A small-scale dynamic model using a terrain-following coordinate transformation. - *J. Comput. Phys.*, vol. 34., pp. 186-215.
- Clark T.L., 1979: Numerical simulations with a three-dimensional cloud model: lateral boundary condition experiments and multicellular severe storm simulations. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 36, pp. 2191-2215.
- Clark T.L., 1981: Cloud modelling in three spatial dimensions. - *Hailstorms of the High Plains of North America*, Univ. Of Colorado Press, chap. 10.
- Clark T.L. and H.D. Farley, 1984: Severe downslope windstorm calculations in two and three spatial dimensions using anelastic interactive grid nesting: A possible mechanism for gustiness. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 329-350.
- Clark T.L. and R. Gall, 1982: Three-dimensional numerical model simulations of airflow over mountainous terrain: a comparison with observations. - *Mon. Wea. Rev.*, v. 110, pp. 766-791.
- Clark T.L. and W.D. Hall, 1979: A numerical experiment on stochastic condensation theory. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 36, pp. 470-483.
- Clark T.L. and W.R. Peltier, 1977: On the evolution and stability of finite amplitude mountain waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 1715-1730.
- Clarke R.H., 1970: Recommended methods for the treatment of the boundary layer in numerical models. - *Austral. Meteor. Mag.*, vol. 18, pp. 51-73.
- Clarke R.H., A.J. Dyer, R.R. Brooks, D.G. Reid and A.J. Troup, 1971: The Wangara experiment: Boundary layer data. - *Tech. Pap. No. 19*, Div. Meteor. Phys., CSIRO, Melbourne, Australia.
- Clayton R. and B. Engquist, 1977: Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. - *Bull. Seism. Soc. Amer.*, vol. 67, pp. 1529-1540.
- Collins W.C., 1980: A comparison of explicit and semi-explicit model calculations of geostrophic adjustment. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 108, pp. 1390-1401.
- Collins W.C., 1983: An accurate variation of the two-step Lax-Wendroff integration of horizontal advection. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 109, pp. 255-261.
- Cooley D.S., 1973: Fundamental changes in the grid structure and boundary conditions in the limited-area fine-mesh (LFM) model. - *NOAA Tech. Procedures Bull. No. 82*, NWS/Weather Analysis and Prediction Div., Silver Spring, Md.
- Cooley J.W. and T.W. Tukey, 1965: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. - *Math. Comput.*, vol. 19, pp. 297-301.

- Corby G.A., A. Gilchrist, R.L. Newson, 1972: A general circulation model of the atmosphere, suitable for long integrations. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 98, pp. 809-832.
- Cotton W.R., 1975: Modelling of convective storms. - *OPEN SEASAME: Proc. of the opening meeting at Boulder, Colo., Sept. 4-6, 1974, NOAA-ERL*, pp. 319-340.
- Cotton W.R., R.A. Pielke and P.T. Gannon, 1976: Numerical experiments on the influence of the mesoscale circulation on the cumulus scale. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 33, pp. 252-261.
- Cotton W.R., M.S. Stephens, T. Nehr Korn and G.J. Tripoli, 1982: The Colorado State University three-dimensional cloud/mesoscale model-192. Part II: An ice phase parameterization. - *J. Rech. Atmos.*, vol. 16, pp. 295-320.
- Cotton W.R. and G.J. Tripoli, 1978: Cumulus convection in shear flow - three-dimensional numerical experiments. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 1503-1521.
- Courant R., K. Friedrichs and H. Lewy, 1928: Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. - *Math. Ann.*, Jg. 100, Ss. 32-74.
- Crank J. and P. Nicolson, 1947: A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. - *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 43, pp. 50-67.
- Crowley W.P., 1968: Numerical advection experiments. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 96, pp. 1-11.
- Cullen M.J.P. and C.D. Hall, 1979: Forecasting and general circulation results from finite elements models. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 105, pp. 571-592.
- Daley R., 1981: Normal mode initialization. - *Rev. Geophys. Space Phys.*, vol. 19, pp. 450-468.
- Davies C., 1973: On the initial-boundary value problem of some geophysical fluid flows. - *J. Comput. Phys.*, vol. 13, pp. 398-422.
- Davies H.C., 1976: A lateral boundary formulation for multi-level prediction models. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 102, pp. 405-418.
- Davies H.C., 1983: Limitations of some common lateral boundary schemes used in regional NWP models. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 111, pp. 1002-1012.
- Deacon E.L. and E.K. Webb, 1962: Small-scale interactions. - *The Sea*, vol. I, M.N. Hill (ed.), pp. 43-87, Interscience.
- Deardorff J.W., 1970: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. - *J. Fluid Mech.*, vol. 41, pp. 453-480.
- Deardorff J.W., 1971: On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient. - *J. Comput. Phys.*, vol. 1, pp. 120-133.
- Deardorff J.W., 1972a: Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 29, pp. 91-115.
- Deardorff J.W., 1972b: Parameterization of the planetary boundary layer for use in general circulation models. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 100, pp. 93-106.
- Deardorff J.W., 1972c: Rate of growth the nocturnal boundary layer. - *Proc. Sump. Air Poll., Turb. and Diff.*, Dec. 7-10, 1971, - New Mexico State University, H.W. Church and R.E. Luna, Eds., pp. 183-190.

- Deardorff J.W., 1973a: The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. - *J. Fluids Eng.*, vol. 95, pp. 429-438.
- Deardorff J.W., 1973b: Three-dimensional numerical modelling of the planetary boundary layer. - Workshop on Micrometeorology, Duane A. Haugen, Ed., - *Amer. Meteor. Soc.*, pp. 271-311.
- Deardorff J.W., 1974a: Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 7, pp. 8-106.
- Deardorff J.W., 1974b: Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 7, pp. 199-226.
- Deardorff J.W., 1975: The development of boundary layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. - OPEN SEASAME: Proc. of the opening meeting at Boulder, Colo., Sept. 4-6< 1974, NOAA-ERL, pp. 251-264.
- Deardorff J.W., 1976: Usefulness of liquid water potential temperature in a shallow-cloud model. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 15, pp. 98-102.
- Deardorff J.W., 1978: Efficient prediction of ground surface temperature and moisture with inclusion of a layer vegetation. - *J. Geophys. Res.*, vol. 83, pp. 1889-1903.
- Deardorff J.W., 1980a: Cloud top entrainment instability. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 131-147.
- Deardorff J.W., 1980b: Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model. - *Bound.-Laye Meteor.*, vol. 18, pp. 495-527.
- Deardorff J.W. and L. Mahrt, 1982: On the dichotomy in theoretical treatment of the atmospheric boundary layer. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 2096-2098.
- Deaven D.G., 1976: A solution for boundary problems in isentropic coordinate models. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 33, pp. 1702-1713.
- De Bruin H.A.R. and C.J. Moore, 1985: Zero-plane displacement and roughness length for tall vegetation, derived from a simple mass conservation hypothesis. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 31, pp. 39-50.
- Delage Y., 1974: A numerical study of the nocturnal atmospheric boundary layer. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol 100, pp. 351-364.
- De Vries D.A., 1958: Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. - *Transaction Amer. Geophys. Union*, vol. 39, pp. 909-916.
- Doren J.C. and T.W. Horst, 1981: Comparison of models and observations of nocturnal slope winds. - Preprints 2nd Conf. Mountain Meteor., Steamboat Springs, Amer. Meteor. Soc., pp. 240-244.
- Douglas J., jr., 1962: Alternating direction method for three space variables. - *Numer. Math.*, № 4, pp. 41-63.
- Drake R.L., P.D. Coyle and D.P. Anderson, 1974: The effects of nonlinear eddy coefficients of rising line thermals. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 2046-2057.
- Drasin P.G. and C.H. Su, 1975: A note on long-wave theory of airflow over a mountain. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 32, pp. 437-439.

- Driedonks A.G.M., 1982: Models and observations of the growth of the atmospheric boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 23, pp. 283-306.
- Droegemeier K.K. and R.B. Wilhelmson, 1985a: Three-dimensional numerical modelling of convection produced by interacting thunderstorm outflow. Part I: Control simulation and low-level moisture variations. - *J. Atmos. Sci.*, vol 42, pp. 2381-2403.
- Droegemeier K.K. and R.B. Wilhelmson, 1985b: Three-dimensional numerical modelling of convection produced by interacting thunderstorm outflow. Part II: Variations in vertical wind shear. - *J. Atmos. Sci.*, vol 42, pp. 2404-2414.
- Durand Y., 1985: The use of satellite data in French high resolution analysis. - *Atelier Reprint, Direction de la Météorologie, Paris, France.*
- Durand Y. and R. Juvanon du Vachat, 1983: Mesoscale analysis using satellite information. - *Techn. Proc. First Intern. TOVS Study Conf.*, pp. 80-93.
- Durand Y. and R. Juvanon du Vachat, 1985: Development of a mesoscale analysis using raw satellite data. *Techn. Proc. Second Intern. TOVS Study Conf.*, pp. 39-57.
- Durran D.R. and J.B. Klemp, 1982a: On the effects of moisture on the Brunt-Vaisälä frequency. - *J. Atmos. Sci.*, vol 39, pp 2151-2158.
- Durran D.R. and J.B. Klemp, 1982b: The effects of moisture on trapped mountain lee waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol 39, pp 2490-2506.
- Durran D.R. and J.B. Klemp, 1983: A compressible model for the simulation of moist mountain waves. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 111, pp. 2341-2361.
- Dutton J.A., 1976: *The ceaseless wind, an introduction to the theory of atmospheric motion.* McGraw-Hill, 579 pp.
- Dutton J.A. and G.H. Friehlt, 1969: Approximate equations of motion for gases and liquids. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 26, pp. 241-254.
- Dyer A.J., 1967: The turbulent transport of heat and water vapor in an unstable atmosphere. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 93, pp. 501-508.
- Dyer A.J., 1974: A review of flux-profile relationships. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 7, pp. 363-372.
- Dyer A.J. and E.F. Bradley, 1982: An alternative analysis of flux-gradient relationships at the 1976 ITCE. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 22, pp. 3-19.
- Dyer A.J. and B.B. Hicks, 1970: Flux-gradient relationships in the constant flux layer. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 96, pp. 715-721.
- Eliassen A., 1949: The quasi-state equations of motion with pressure as independent variable. - *Geophys. Publ.*, vol.17, No 3, 44 pp.
- Eliassen A., 1956: A procedure for numerical integration of the primitive equations of the two-parameter model of the atmosphere. - *Sci. Rep. No. 4 on Contract AF 19 (604)-12086, Depr. of Meteor., Univ. Of California at Los Angeles*, 53 pp.
- Eliassen A. and E. Palm, 1960: On the transfer of energy in stationary mountain waves. - *Geophys. Publ.*, vol. 22, pp. 1-23.
- Eliassen A. and J. Rekustad, 1971: A numerical study of mesoscale mountain waves. - *Geophys. Publ.*, vol. 28, pp. 1-13.

- Elsberry R.L. and G.W. Ley, 1976: On the strategy of initializing nested grid meshes in numerical weather prediction. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 104, pp. 797-799.
- Elvius T., 1977: Experiments with a primitive equations model for limited area forecasts. - *Controb. Atmos. Phys.*, vol. 50, pp. 367-392.
- Elvius T. and A. Sundström, 1973: Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine mesh barotropic model based on the shallow water equations. - *Tellus*, vol. 25, pp. 132-156.
- Engquist B. and A. Majda, 1977: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. - *Math. Comput.*, vol. 31, pp. 629-651.
- Engquist B. and A. Majda, 1979: Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. - *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 32, pp. 313-357.
- Estoque M.A., 1963: A numerical model of the atmospheric boundary layer. - *J. Geophys. Res.*, vol. 68, pp. 1103-1113.
- Farnell L., 1980: Solution of Poisson equations on a nonuniform grid. - *J. Comput. Phys.*, vol. 35, pp. 408-425.
- Findikakis A.N. and R.L. Street, 1979: An algebraic model for subgrid-scale turbulence in stratified flows. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 36, pp. 1934-1949.
- Fischer G., 1959: Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Winstau und Gezeiten in Randmeeren. - *Tellus*, vol. 11, pp. 60-76.
- Fischer G., 1965: A survey of finite-difference approximations to the primitive equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 93, pp. 1-10.
- Fletcher N.H., 1962: *The physics of rain clouds*. - Cambridge University Press, 386 pp.
- Forbes G.S. and R.A. Pielke, 1985: Use of observational and model-derived fields and regime model output statistics in mesoscale forecasting. - *ESA Journ.*, vol. 9, pp. 207-226.
- Fritsch J.M. and C.F. Chappel, 1980a: Numerical prediction of convectively driven pressure systems. Part 1: Convective parameterization. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 1722-1733.
- Fritsch J.M. and C.F. Chappel, 1980b: Numerical prediction of convectively driven pressure systems. Part 2: Mesoscale model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 1734-1762.
- Fritts D.C., 1979: The excitation of radiating waves and Kelvin-Helmholtz instabilities by the gravity wave-critical level interaction. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 36, pp. 12-23.
- Fromm J.E. and F.H. Harlow, 1963: Numerical solution of the problem of vortex street development. - *Phys. Fluids*, vol. 6, pp. 975-982.
- Gadd A.J., 1974: An economical explicit integration scheme. - *Meteor. Office Tech. Note № 44*, 7 pp.
- Gadd A.J., 1978: A numerical advection scheme with small phase speed errors. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 104, pp. 583-594.
- Gadd A.J., 1980: Two refinements of the split explicit integration scheme. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 106, pp. 215-220.
- Gadd A.J., 1984: Extratropical limited area fine mesh modelling. - *GARP Special Rep. № 43*, WMO/TD No. 33, pp. I-13 to I-32.

- Gal-Chen T. and R.S. Somerville, 1975: On the use of a coordinate transformation for the solution of the Navier-Stokes equations. - *J. Comput. Phys.*, vol. 17, pp. 209-228.
- Garratt J.R. and B.B. Hicks, 1973: Momentum, heat and water vapor transfer to and from natural and artificial surfaces. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 99, pp. 680-687.
- Garret A.J., 1983: Drainage flow prediction with a one-dimensional model including canopy, soil and radiation parameterizations. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 22, pp. 79-91.
- Garret A.J. and F.G. Smith III, 1984: Two-dimensional simulations of drainage winds and diffusion compared to observations. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 23, pp. 597-610.
- Gary J.M., 1973: Estimate of truncation error in transformed coordinate, primitive equation atmospheric models. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 30, pp. 223-233.
- Gauntlett D.J., L.M. Leslie, J.L. McGregor and D.R. Hincksman, 1978: A limited area nested numerical weather prediction model's formulation and preliminary results. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 104, pp. 103-117.
- Gelen J.F., L. Girard, 1982: A simple parameterization of moist convection for large scale atmospheric models. - *Beitr. Phys. Atmos.*, Bd. 55, s. 325-334.
- Gerrity J.P.jr., 1977: The LPM Model-1976 NOAA Technical Memorandum NWS NMC 60.
- Golding B.W., 1984: The Meteorological Office mesoscale model: its current status. - *Meteor. Mag.*, vol. 113, pp. 288-302.
- Golding B.W., 1986: The Meteorological Office mesoscale model: an overview. Version 1 February 1986. Met 011 Mesoscale Documentation Paper № 12, Bracknell.
- Golding B.W., L.M. Leslie and G.A. Miles, 1985: Mesoscale dynamical models and practical weather prediction. - *ESA Journal*, vol. 9, pp. 181-193.
- Golding B.W., N.A. Machin, 1984: The United Kingdom Meteorological Office Mesoscale Forecasting System. - *Proc. Second Int. Symp. on Nowcasting, Norrköping, Sweden, 1984*, pp. 309-314.
- Gough D.O., 1969: The anelastic approximation for thermal convection. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 26, pp. 448-456.
- Grammeltvedt A., 1969: A survey of finite difference schemes for the primitive equation for a barotropic fluid. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 97, pp. 383-404.
- Gresho P.M., C.D. Upson, S.T. Chan, 1982a: Current progress in the solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in 3-dimensions by (almost) the FEM. - *Proc. 4th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources, Hanover, June 21-25, 1982*.
- Gresho P.M., S.T. Chan, C.D. Upson and R.L. Lee, 1982b: Recent progress in the solution of the three-dimensional time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. - *Annal. Proc. 4th Int. Conf. on Finite Elements Meth. on Flow Problems, Tokyo, July 26-29, 1982*.
- Grotjahn R., 1977: Some consequences of finite differencing revealed by group velocity errors. - *Contrib. Atmos. Sci.*, vol. 50, pp. 231-238.
- Grotjahn R. and J.J. O'Brien, 1976: Some inaccuracies in finite differencing hyperbolic equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 104, pp. 180-194.

- Gustafsson B. and A. Sundström, 1976: Incompletely parabolic systems in fluid dynamics. - Report, Uppsala University.
- Gustafsson B. and A. Sundström, 1978: Incompletely parabolic systems in fluid dynamics. - SIAM J. Appl. Math., vol. 35, pp. 343-357.
- Gutman D.P. and K.E. Torrance, 1975: Response of the urban boundary layer to heat addition and surface roughness. - Bound.-Layer Meteor., vol. 9, pp. 217-233.
- Hack J.J. W.H. Schubert, 1981: Lateral boundary conditions for tropical cyclone models. - Mon. Wea. Rev., vol., 109, pp. 1404-1420.
- Halstead M.H. e.a., 1957: A preliminary report on the design of a computer for micrometeorology. - J. Meteor., vol. 14, pp. 308-325.
- Han T.Y., J.C.S. Meng and C.E. Innis, 1983: An open boundary condition for incompressible stratified flows. - J. Comput. Phys., vol. 49, pp. 276-297.
- Hanson M.E. and A.G. Petschek, 1976: A boundary condition for sufficiently reducing - boundary reflection with a Lagrangian mesh. - J. Comput. Phys., vol. 21, pp. 333-339.
- Harlow F.H. and J.E. Welch, 1965: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. - Phys. Fluids, vol. 8, pp. 2182-2189.
- Harrison E.J. jr., 1973: Three-dimensional numerical simulations of tropical systems utilizing nested finite grids. - J. Atmos. Sci., vol. 30, pp. 1528-1543.
- Harrison E.J. and R. Elsberry, 1972: A method for incorporating nested finite grids in the solution of systems of geophysical equations. - J. Atmos. Sci., vol. 29, pp. 1235-1245.
- Harten A., 1978: The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities. III: Self-adjusting hybrid schemes. - Math. Comput., vol. 32, pp. 363-389.
- Hassid S. and B. Galperin, 1983: A turbulent energy model for geophysical flows. - Bound.-Layer Meteor., vol. 26, pp. 397-412.
- Hayes F.R., 1977: A new parameterization of deep convection for use in the 10-level model. - Quart J. Roy. Meteor. Soc, vol. 103, pp. 359-367.
- Heaps N.S., 1973: Three-dimensional numerical model of the Irish Sea. - Geophys. J Roy. Astron. Soc., vol. 35, pp. 99-120.
- Hedstrom G.W., 1979: Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems. - J. Comput. Phys., vol. 30, pp. 222-237.
- Heilman W. and R. Dobosy, 1985: A nocturnal atmospheric drainage flow simulation investigating the application of one-dimensional modelling and current turbulence schemes. - J. Clim. Appl. Meteor., vol. 24, pp. 924-936.
- Helfand H.M., J. Pfaendtner, R. Atlas and E. Kalnay, 1986: The effect of increased horizontal resolution on GLA fourth order model forecasts: two case studies. - Extended Abstracts WMO/ IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 229-232.
- Henrici P., 1962: Discrete variable methods in ordinary difference equations. - Wiley, 407 pp.
- Hicks B.B., 1976: Wind profile relations from the «Wangara» experiment. - Quart. J Roy. Meteor. Soc., vol. 102, pp. 535-552.

- Hicks B.B., G.D. Hess and M.L. Wesley, 1979: Analysis of fluxe-profile relationships above tall vegetation - an alternative view. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 105, pp. 1074-1077.
- Hicks B.B., M.L. Wesley and C.M. Sheih, 1977: A study of heat transfer processes above a cooling pond. - *Wat. Resour. Res.*, vol. 13, pp. 901-908.
- Hill G.E., 1968: Grid telescoping in numerical weather prediction. - *J. Atmos. Sci.*, 7, pp. 29-38.
- Hill G.E., 1974: Factors controlling the size and spacing of cumulus clouds as revealed by numerical experiments. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 646-673.
- Hirt G.W., 1966: Heuristic stability theory for finite-difference equations. - *J. Comput. Phys.*, vol. 2, pp. 339-355.
- Hjelmfelt M.R., 1982: Numerical simulation of the effects of St. Louis on mesoscale boundary-layer airflow and vertical air motion: simulation of urban vs non-urban effects. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 21, pp. 1239-1257.
- Hockney R.W., 1965: A fast direct solutions of Poisson's equation using Fourier analysis. - *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 12, pp. 95-113.
- Hockney R.W., 1969: The potential calculation and some applications. - *Methods in Comput. Physics*, vol. 9, Academic Press, pp. 136-211.
- Hoke J.E. and N.A. Phillips, 1981: Resent improvements to the nested grid model of the NWP. - *Preprints, First AMS Conf. Numerical Weather Prediction*, 2-6 Nov. 1981, Monterey, California, Amer. Meteor. Soc., pp. 188-190.
- Hoke J.E. and N.A. Phillips, 1986: An examination of the effectiveness of nesting in an operational nested grid model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int/ Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August, 1986, pp. 321-324.
- Holton J.R., 1972: *An introduction to dynamic meteorology*. - Academic Press, 319 pp.
- Houghton D.D. and W. Jones, 1969: A numerical model for linearized gravity and acoustics waves. - *J. Comput. Phys.*, vol. 3, pp. 339-357.
- Hrymak A.N., G.J. McRae and A.W. Westerberg, 1986: An implementation of a moving finite element method. - *J. Comput. Phys.*, vol. 63, pp. 168-190.
- Imbard M., A. Joly, J.F. Geleyn, J.M. Pairin, 1986: Experiments and results with PERIDOT in French limited area model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int/ Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August, 1986, pp. 121-125.
- Iványi Zs. and I. Mersich, 1982: Simulation of the urban air pollution based on a numerical UBL model. - *Atmos. Environ.*, vol.16, pp. 1835-1849.
- Jacobs C.A. and P.S. Brown, jr, 1973: An investigation of the numerical properties of the surface heat-balance equation. - *J. Appl. Meteor.*, vol 12, pp. 1069-1072.
- Jacobsen I and E. Heise, 1982: A new economic method for the computation of the surface temperature in numerical models. - *Reitr. Phys. Atmos.*, Bd. 56, pp. 128-141.
- Janjić Z., 1977: Pressure gradient force and advection scheme used for forecasting with steep and small scale topography. - *Contrib. Atmos. Phys.*, vol. 50, pp. 186-199.

- Janjić Z. and A. Wiin-Nielsen, 1977: On geostrophic adjustment and numerical procedures in a rotating fluids. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 297-310.
- Jones D.E., 1974: The British Meteorological Office fine mesh, 10-level primitive equation model. - *Notes from a Colloquium: Summary 1974 Subsynoptic Extratropical Weather Systems: Observation, Analysis, Modelling and Prediction*; vol. II, Seminar and Workshop at the NCAR, Boulder, Colo., pp. 394- 408.
- Jones R.W., 1977a: A nested grid for a three-dimensional model of a tropical cyclone. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 1528-1553.
- Jones R.W., 1977b: Noise control for a nested grid tropical cyclone model. - *Contrib. Atmos. Phys.*, vol. 50, pp. 393-402.
- Jones R.W., 1980: A three-dimensional tropical cyclone model with release of latent heat by the resolvable scales. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 930-938.
- Juvanon du Vachat R., A. Craplet, Y. Durand, A. Joly, H.L. Pham and D. Rousseau, 1983: Fine mesh numerical weather prediction over France. - *Sixth Conf. Numerical Weather Prediction, June 6-9, 1983, Omaha, Nebr. Preprint volume of extended abstracts, Amer. Meteor. Soc.*, pp. 57-61.
- Juvanon du Vachat R., M. Imbard, A. Joly, J.M. Audoin, M. Marie, 1986: The PERIDOT fine-mesh numerical weather prediction system. Description and evaluation. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 4-8 August, 1986.*
- Kalb M.W., 1985: Results from limited area mesoscale numerical simulation for 10 April 1979. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 113, pp. 1644-1662.
- Kálney de Rivas E., 1972: On the use of nonuniform grids in finite difference equations. - *J. Comput. Phys.*, vol. 10, pp. 202-210.
- Kálney de Rivas E., A. Bayliss and J. Storch, 1976: Experiments with the 4th order GISS general circulation model. - *Ann. Meteor. (N.F.)*, vol. 11, pp. 25-27.
- Kao S.K., 1981: An analytical solution for three-dimensional stationary flows in the atmosphere boundary layer over terrain. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 20, pp. 3860390.
- Kaplan M.L., J.W. Zack, V.C. Wong and J.J. Tuccillo, 1982: Initial results from a mesoscale atmospheric simulation system and comparisons with the AVE-SEASAME I data set. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 110, pp. 1564-1590.
- Kasahara A., 1965: On certain finite-difference methods for fluid dynamics. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 93, pp. 27-31.
- Kasahara A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 102, pp. 509-522.
- Kasahara A., 1982: Nonlinear normal mode initialization and the bounded derivative method. - *Rev. Geoph. Space Phys.*, vol. 20, pp. 385-397.
- Kasahara A. and W.H. Washington, 1971: General circulation experiments with the six-layer NCAR model, including orography, cloudiness and surface temperature calculations. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 28, pp. 657-701.

- Kesel P.G. and F.J. Winninghaff, 1972: The Fleet numerical weather central operational primitive equation model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 100, pp. 360-373.
- Kessler E., 1969: On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations. - *Meteorological Monographs*, vol. 10, № 32, Amer. Meteor. Soc., Boston, Mas., 84 pp.
- Kiselnikova V.Z., E.M. Pekelis, D.Ya. Pressman, N.F. Veltishchev, A.A. Zhelnin, 1984: Application of mesoscale numerical model to local weather prediction. - *Proc. Nowcasting II Symp.*, Norrköping, Sweden, 3-7 Sept. 1984, ESA, pp. 301-307.
- Kitade T., 1979: A method of numerical time integration using a moving variable grid. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 57, pp. 576-586.
- Kitade T., 1980: Numerical experiments of tropical cyclone on a plane with variable Coriolis parameters. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 58, pp. 471-488.
- Klaassen G.P. and T.L. Clark, 1985: Dynamics of the cloud-environment interface and entrainment in small cumuli: Two-dimensional simulations in the absence of ambient shear. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 42, pp. 2621-2642.
- Klemp J.B. and D.R. Durran, 1983: An upper boundary condition permitting internal gravity waves radiation in numerical mesoscale models. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 111, pp. 430-444.
- Klemp J.B. and D.K. Lilly, 1975: The dynamics of wave-induced downslope winds. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 32, pp. 320-339.
- Klemp J.B. and D.K. Lilly, 1978: Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 78-107.
- Klemp J.B. and M.L. Weisman, 1983: The dependence of convective precipitation patterns on vertical wind shear. - *Preprints, 21st Conf. Radar Meteor.*, Edmonton, Alberta, Sept. 19-23, 1983, Boston, Mass., pp. 44-49.
- Klemp J.B. and R.B. Wilhelmson, 1978a: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 1070-1096.
- Klemp J.B. and R.B. Wilhelmson, 1978b: Simulations of right- and left-moving storms produced through storm splitting. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 1097-1110.
- Klemp J.B., R.B. Wilhelmson and P.S. Ray, 1981: Observed and numerically simulated structure of a mature supercell thunderstorm. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, pp. 1558-1580.
- Kopp P.J., H.D. Orville, R.D. Farley and J.H. Hirsch, 1983: Numerical simulation of dry ice cloud seeding experiments. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 22, pp. 1542-1556.
- Kosloff R. and D. Kosloff, 1986: Absorbing boundaries for wave propagation problems. - *J. Comput. Phys.*, vol. 63, pp. 363-376.
- Koss W., 1971: Numerical integration experiments with variable resolution two-dimensional Cartesian grids using the box method. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 99, pp. 725-738.
- Kreiss H.-O., 1968: Difference approximations for the initial-boundary value problem for hyperbolic differential equations. - *Proc. Symp. Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations*, D. Greenspan, Ed., Wiley, 102 pp.

- Kreiss H.-O., 1970: Initial boundary value problems for hyperbolic systems. - *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 23, pp. 277-298.
- Kreiss H.-O., 1974: Initial boundary value problems for hyperbolic equations. - *Conf. Numerical Solution Diff. Equations*, A. Dold and B. Eckman, Eds., *Lecture Notes in Mathematics*, No. 363, Springer-Verlag, Berlin.
- Kreiss H.-O. and J. Olinger, 1973: Methods for the approximate solution of time dependent problems. - *GARP Publication Series*, No. 10, WMO-ICSU Joint Organization Committee, 107 pp.
- Kreitzberg C.W., 1978: Progress and problems in regional numerical weather prediction. - *SIAM-AMS Proceedings*, vol. 11, *Computational fluid dynamics*, pp. 32-58.
- Kreitzberg C.W., D.J. Perkey and J.E. Pinkerton, 1974: Mesoscale modelling, forecasting and remote sensing research. - *Project THEMIS Final Report*, AFCRL-TR-74-0253, Dept. of Physical and Atmos. Sci., Drexel University, 318 pp.
- Kreitzberg C.W. and D.J. Perkey, 1976: Release of potential instability. Part I: A sequential model within a hyperstatic primitive equation model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 33, pp. 456-475.
- Kudon T., 1986: Test of a radiative boundary condition for gravity waves in three-dimensional sigma-coordinate models. - *Preprint for WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986.
- Kurihara Y., 1965: On the use of implicit and iterative methods for the time integration of the wave equation. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 93, pp. 33-46.
- Kurihara Y., 1968: Note on finite difference expressions for the hydrostatic relative and pressure gradient force. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 96, pp. 654-656.
- Kurihara Y. and M.A. Bender, 1980: Use of a movable nested-mesh model for tracking a small vortex. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 108, pp. 1792-1809.
- Kurihara Y. and M.A. Bender, 1982: Structure and analysis of the eye of numerically simulated tropical cyclone. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 60, pp. 381-395.
- Kurihara Y. and M.A. Bender, 1983: A numerical scheme to treat the open lateral boundary of a limited area model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 111, pp. 445-454.
- Kurihara Y., G.J. Tripoli and M.A. Bender, 1979: Design of a movable nested-mesh primitive equation model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 107, pp. 239-249.
- Kurihara Y. and R.E. Tuleya, 1974: Structure of tropical cyclone development in a three-dimensional numerical simulation model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 893-919.
- Kurihara Y., M. Ueno and N. Miura, 1985: Prediction experiment of extremely intense rainstorm in Baiu season by high resolution primitive equation model. - *Proc. Int. Conf. on Monsoon in the Far East*, Tokyo, 5-8 November 1985.
- Kwizak M. and A.J. Robert, 1971: A semi-implicit scheme for grid point atmospheric models of the primitive equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 99, pp. 32-36.
- Lax P.D., 1954: Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation. - *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 7, pp. 159-193.

- Lax P.D. and B. Wendroff, 1960: Systems of conservation laws. - *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 13, pp. 217-237.
- Lee H.N. and S.K. Kao, 1979: Finite element numerical modelling of atmospheric turbulent boundary layer. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 18, pp. 1287-1295.
- Lee H.N. and W.S. Kau, 1984: Simulation of three-dimensional wind flow over complex terrain in the atmospheric boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 29, pp. 381-396.
- Lee R.L., J.M. Leene, jr., P.M. Gresho and S.T. Chan, 1982: A finite element model for environmental problems involving complex terrain. - *Annal. Proc. 4th Int. Symp. on Finite Elements Meth. in Flow Proml.*, Tokyo, July 26-29, 1982, pp. 247-254.
- Lee R.L. and D.B. Olfe, 1974: Numerical calculations of temperature profiles over an urban heat island. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 7, pp. 39-52.
- Leith C.E., 1968: Two-dimensional eddy viscosity coefficients. - *Proc. WMO/IUGG Symp. Numerical Weather Prediction*, Tokyo, Nov. 1968, vol. I, pp. 41-44.
- Leslie L.M., 1980: Numerical modelling of the summer heat low over Australia. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 19, pp. 381-387.
- Leslie L.M, G.A. Mills and D.J. Gauntlett, 1981: The impact of FGGE data coverage and improved numerical techniques in numerical weather prediction in the Australian region. - *Quart. J Roy Meteor. Soc.*, vol. 107, pp. 629-642.
- Lettau H.H., 1969: Note on aerodynamic roughness-parameter estimation on the basis of roughness element description. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 8, p. 822-832.
- Lettau H.H. and B. Davidson, 1953: Exploring the atmosphere's first mile. Vol. II. Site description and data tabulation. - Pergamon Press, 577 pp.
- Ley G.W. and R.L. Elsberry, 1976: Forecasts of typhoon Irma using a nested-grid model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol 104, pp. 1154-1161.
- Li Rong-feng and Zeng Qing-eun, 1986: The mechanism of computational chaos in non-uniform grids. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 233-236.
- Lighthill J., 1978: *Waves in Fluids*. - Cambridge University Press, 504 pp.
- Lilly D.K., 1961: A proposed staggered-grid system for numerical integration of dynamic equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 89, pp. 59-65.
- Lilly D.K., 1962: On the numerical simulation of buoyant convection. - *Tellus*, vol. 14, pp. 148-172.
- Lilly D.K., 1964: Numerical solutions for the shape-preserving two-dimensional thermal convection element. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 21, pp. 83-98.
- Lilly D.K., 1965: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 93, pp. 11-26.
- Lilly D.K., 1967: The representation of small scale turbulence in numerical simulation experiments. - *Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Environm. Sci.*, Yorktown Heights, N.Y., White Plains, pp. 91-115.
- Lilly D.K., 1986: The structure, energetic and propagation of rotating convective storms. Part II: Felicity and storm stabilization. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 43, pp. 126-140.

- Lin Y.L. e.a., 1983: Bulk parameterization of the snow field in a cloud model. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 22, pp. 1065-1092.
- Lind R.J., K.B. Katsaros, 1982: A Model of Longwave Irradiance for Use with Surface Observations. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 21, pp. 1015-1024.
- Lindman E.L., 1975: Free space boundary conditions for the time dependent wave equation. - *J. Comput. Phys.*, vol. 18, pp. 66-78.
- Lipps F.B., 1977: A study of turbulence parameterization in a cloud model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 1751-1772.
- Lipps F.B. and R.S. Hemler, 1980: Another look at the thermodynamic equation for deep convection. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 108, pp. 78-84.
- Lipps F.B. and R.S. Hemler, 1982: A scale analysis of deep moist convection and some related numerical calculations. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 2192-2210.
- Lipps F.B. and R.S. Hemler, 1985: Another look at the scale analysis for deep moist convection. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 42, pp. 1960-1964.
- Lo A.K., 1977: Boundary layer flow over gentle curvilinear topography with a sudden change in surface roughness. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 103, pp. 199-209.
- Lord S.J., H.E. Willoughby and J.M. Piotrowicz, 1984: Role of a parameterized ice-phase microphysics in an axisymmetric, non-hydrostatic tropical cyclone model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 2836-2848.
- Louis J.P., 1979: A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 17, pp. 187-202.
- Lysmer J. and R.L. Kuhlemeyer, 1969: Finite dynamic model for infinite media. - *J. Eng. Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, vol. 95, pp. 859-877.
- McBean G.A., K. Bernhardt, S. Bodin, Z. Litynska, A.P. van Ulden and J.C. Wyngaard; with contributions from B.R. Kerman, J.D. Reid, Z. Serbjan and J.L. Wolmsley; ed. By G.A. McBean, 1979: The planetary boundary layer. - WMO, Tech. Note, No. 165.
- McCumber M.C., R.A. Pielke, 1981: The effects of surface fluxes of heat and moisture in a mesoscale numerical model. P.1, Soil Layer. - *J. Geophys. Res.*, vol. 86, pp. 9929-9938.
- McGregor J.L., 1986: Initialization and accuracy of a semi-Lagrangian model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 4-8 August 1986*, p. 195.
- McNider R.T., 1982: A note on velocity fluctuations in drainage flows. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 1658-1660.
- McNider R.T. and R.A. Pielke, 1981: Diurnal boundary-layer development over sloping terrain. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, pp. 2198-2212.
- McNider R.T. and R.A. Pielke, 1984: Numerical simulation of slope and mountain flows. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 23, pp. 1441-1453.
- Madala R.V. and S.A. Piacsek, 1975: Numerical simulation of asymmetric hurricanes on a β -plane with vertical shear. - *Tellus*, vol. 27, pp. 453-468.

- Mahlman J.D. and R.W. Sinclair, 1977: Tests of various numerical algorithms applied to a simple trace constituent air transport problem. Fate of pollutants in the air and water environments. Part I. - *Advances in Environm. Sci. and Techn.*, vol. 8, I.H. Suffet, Ed., Wiley, pp. 223-252.
- Mahren Y., 1982: A theoretical study of the effect of soil surface shape upon the soil temperature profile. - *Soil Science*, vol. 134, pp. 381-387.
- Mahren Y. and R.A. Pielke, 1975: A numerical study of the air flow over mountains using the two-dimensional version of the University of Virginia mesoscale model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 32, pp. 2144-2155.
- Mahren Y. and R.A. Pielke, 1976: Numerical simulation of the airflow over Barbados. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 104, pp. 1392- 1402.
- Mahren Y. and R.A. Pielke, 1977a: A numerical study of the airflow over irregular terrain. - *Contrib. Atmos. Sci.*, vol. 50, pp. 98-113.
- Mahren Y. and R.A. Pielke, 1977b: The effects of topography in sea and land breeze in two-dimensional numerical model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 105, pp. 1151-1162.
- Mahren Y. and R.A. Pielke, 1978: A test of an upstream spline interpolation scheme for the advective terms in a numerical mesoscale model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 106, pp. 818-830.
- Mahrt L., 1981: Modelling the depth of the stable boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 21, pp. 3-19.
- Mahrt L., 1986: On the shallow motion approximations. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 43, pp. 1036-1044.
- Mailhot J. and R. Benoit, 1982: A finite-element model of the atmospheric boundary layer suitable for use with numerical weather prediction models. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 2249-2266.
- Malkus W.V.R., 1964: Boussinesq equations. - *Geophysical Fluid Dynamics*, vol. 1. Woods Hole Oceanographic Institution, vol.1, pp. 1-12.
- Manton M.J. and W.R. Cotton, 1977a: Parameterization of the atmospheric surface layer. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 331-334.
- Manton M.J. and W.R. Cotton, 1977b: Formulation of approximate equations for modelling moist deep convection on the mesoscale. - *Atmos Sci. Pap.*, No. 266, Colorado State University, 62 pp.
- Marchouk G. and V. Agochkov, 1985: Introduction aux méthodes des éléments finis. - Mir, 432 pp.
- Mathur M.B., 1974: A multiple-grid primitive equation model to simulate the development of an asymmetric hurricane (Isbell, 1964). - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 371-393.
- Mathur M.B., 1983: A quasi-Lagrangian regional model designed for operational weather prediction. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 111, pp. 2087-2098.
- Mathur M.B., 1986: Application of quasi-Lagrangian model to hurricane prediction. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 461-464.

- Matsuno T., 1966a: Numerical integrating of the primitive equations by a simulated backward difference method. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 44, pp. 76-84.
- Matsuno T., 1966b: False reflection of waves at the boundary due to the use of finite differences. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 44, pp. 145-157.
- Mellor G.L., 1977: The gaussian cloud model relations. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 34, pp. 356-358.
- Mellor G.L. and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 1791-1806.
- Mellor G.L. and T. Yamada, 1982: Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. - *Rev. Geophys. Space Phys.*, vol. 20, pp. 851-875.
- Meginger F. and A. Arakawa, 1976: Numerical methods used in atmospheric models. - GARP Publ. Ser., No. 17, WMO, 64 pp. (Имеется русск. перевод: Ф. Мезингер, А. Аракава, 1979: Численные методы, используемые в атмосферных моделях. – Л.: Гидрометеоиздат, 136 с.)
- Mihaljan J.M., 1962: A rigorous exposition of the Boussinesque approximations applicable to a thin layer of fluid. - *Astrophys. J.*, vol. 136, pp. 1126-1133.
- Miller M.J., 1974: On the use of pressure as vertical coordinate in modelling convection. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 100, pp. 155-162.
- Miller M.J., 1978: The Hampstead storm: a numerical simulation of a quasi-stationary cumulonimbus system. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 104, pp. 413-427.
- Miller M.J. and R.P. Pearce, 1974: A three-dimensional primitive equation model of cumulonimbus convection. - *Quart. J. Meteor. Soc.*, vol. 100, pp. 133-154.
- Miller M.J. and A.J. Thorpe, 1981: Radiation conditions for the lateral boundaries of limited-area numerical models. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 107, pp. 615-628.
- Miller M.J. and A.A. White, 1984: On the non-hydrostatic equations in pressure and sigma coordinates. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 110, pp. 515-534.
- Miyakoda K., 1973: Cumulative results of testing a meteorological-mathematical model. The description of model. - *Proc. Roy. Irish Acad.*, vol. 73, pp. 99-130.
- Miyakoda K. and A. Rosati, 1977: One-way nested grid models: The interface condition and the numerical accuracy. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 105, pp. 1092-1107.
- Miyakoda K. and J. Sirutis, 1977: Comparative integrations of global models with various parameterized processes of subgrid-scale vertical transports: description of the parameterizations. - *Contrib. Atmos. Phys.*, vol. 50, pp. 445-487.
- Miyakoda K., R.F. Strickler, C.J. Nappo, P.L. Baker and G.D. Hembree, 1971: The effect of horizontal grid resolution in an atmospheric circulation model., - *J. Atmos. Sci.*, vol. 28, pp. 481-499.
- Molenkamp C.R., 1968: Accuracy of finite-difference methods applied to the advection equation. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 7, pp. 160-167.
- Moncrieff M.W. and M.J. Miller, 1976: The dynamics and simulation of tropical cumulonimbus and squall lines. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 102, pp. 373-394.
- Monin A.S. and A.M. Obukhov, 1953: Dimensionless characteristics of turbulence in the atmospheric surface layer. - *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 93, pp. 223-226.

- Monteith J.L., 1981: Evaporation and surface temperature. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 107, pp. 1-27.
- Montgomery R.B., 1937: A suggested method for representing gradient flow in isentropic surfaces. - *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, vol. 18, p. 210.
- Murray F.W., 1970: Numerical models of a tropical cumulus cloud with bilateral and axial symmetry. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 98, pp. 14-28.
- Müller E., I. Jacobsen, A. Link, D. Majewski and J.-U. Schwirner, 1986: Results and prospects of mesoscale modelling at the Deutscher Wetterdienst. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 387-390.
- Myrup L.O., 1969: A numerical model of the urban heat island. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 8, pp. 908-919.
- Nakamura H., 1978: Dynamical effects of mountains in the general circulation of the atmosphere. P.I: Development of finite-difference schemes suitable for incorporating mountains. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 56, pp. 317-339.
- Nakshabandi G.A.I. and H. Kohnke, 1965: Thermal conductivity and diffusivity of soils as related to moisture tension and other physical properties. - *Agricultural Meteor.*, vol. 2, pp. 271-279.
- Nicholls S., M.A. Le Mone and G. Sommeria, 1982: The simulation of a fair marine boundary layer in GATE using a three-dimensional model. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 108, pp. 167-190.
- Nickerson E.C., 1979: On the numerical simulation of airflow and clouds over mountainous terrain. - *Contrib. Atmos. Phys.*, vol. 52, pp. 161-175.
- Nickerson E.C. and V.E. Smiley, 1975: Surface layer and energy budget parameterizations for mesoscale models. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 14, pp. 297-300.
- Nicolaides R.A., 1975: On multiple grid and related techniques for solving discrete elliptic systems. - *J. Comput. Phys.*, vol. 19, pp. 418-431.
- Nieuwstadt F.T.M., 1978: The computation of the friction velocity V_* and the temperature scale T_* from temperature and wind velocity profiles by least-square methods. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 19, pp. 235-246.
- Nieuwstadt F.T.M., 1984a: The turbulent structure of the stable nocturnal boundary layer. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 2202-2216.
- Nieuwstadt F.T.M., 1984b: Some aspects of the turbulent stable boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 30, pp. 31-55.
- Nieuwstadt F.T.M. and H. Tennekes, 1981: A rate equation for the nocturnal boundary layer height. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, pp. 1418-1428.
- Ninomiya K., 1985: Predictability of mesoscale phenomena. *ESA Journal*, № 2, pp. 195-206.
- Ninomiya K. and Y. Tatsumi, 1980: Front with heavy rainfalls in the Asian subtropical Humid region in a 6-level 77 km mesh primitive equation model. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 58, pp. 172-186.
- Nitta T., 1964: On the reflective computational wave caused by the outflow boundary condition. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 42, pp. 274-276.

- Nitta T. and J.B. Hovermale, 1969: A technique of objective analysis and initialization for the primitive forecast equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 97, pp. 652-658.
- Numerical methods used in atmospheric models. - GARP Publ. Ser. No. 17, WMO. Vol I, 1976, 66pp.; Vol. II, 1979, 499 pp. (Имеется русский перевод: Ф. Мезингер, А. Аракава, 1979: Численные методы, используемые в атмосферных моделях. – Л., Гидрометеиздат, 136 с.; Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Часть II. Пер. с англ. 1982: – Л.: Гидрометеиздат, 360 с.)
- Oberbeck A., 1879: Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperatur Differenzen. -*Ann. Physik*, Bd. 7 (N.F.), S. 271-292.
- O'Brien J.J., 1970: A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 27, pp. 1213-1215.
- Ogura Y., 1963: The evolution of a moist convective element in a shallow, conditionally unstable atmosphere: a numerical calculation. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, pp. 407-424.
- Ogura Y. and J.G. Charney, 1962: A numerical model of thermal convection in the atmosphere. - *Proc. Int. Symp. Numerical Weather Prediction*, Tokyo, November 7-13, 1960, Meteor. Soc. Japan, pp. 431-451.
- Ogura Y. and N.A. Phillips, 1962: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 19, pp. 173-179.
- Okamura Y., 1975: Computational design of a limited-area prediction model. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 53, pp. 175-188.
- Oke T.R., 1978: *Boundary Layer Climates*. - Methenand COLTD, 372 pp.
- Oliger J. and S.A. Sundström, 1978: Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. - *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 35, pp. 419-446.
- Ookochi Y., 1972: A computational scheme for the nesting of a fine mesh in the primitive equation model. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 50, pp. 37-48.
- Ookochi Y., 1974: Numerical prediction of typhoon movement with use of the multiple grid nesting. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 52, pp. 387-390.
- Ookochi Y., 1978: Preliminary test of typhoon forecast with a moving multi-nested grid (MNG). - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 56, pp. 571-583.
- Ookochi Y., 1979: Preliminary test of typhoon forecast with a moving multi-nested grid (MNG). - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 30, pp. 173-198.
- Orlanski I., 1975: A regional subdivision of scale for atmospheric processes. - *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, vol. 56, pp. 527-530.
- Orlanski I., 1976: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. - *J. Comput. Phys.*, vol. 21, pp. 251-269.
- Orlanski I. and L. Polinsky, 1984: Predictability of mesoscale phenomena. - *Proc. Second Int. Symp. on Nowcasting*, Norrköping, Sweden, 3-7 September 1984, pp. 271-280.
- Orssag S.A., 1969: Numerical methods for the simulation of turbulence. - *Phys. Fluids (suppl. 2)*, vol. 12, pp. 250-257.

- Orssag S.A., 1971: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. - *J. Fluid Mech.*, vol. 49, pp. 76-112.
- Orville H.D., 1965: A numerical study of the initiation of cumulus clouds over mountains. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 22, pp. 684-699.
- Orville H.D., 1968: Ambient wind effects on the initiation of cumulus clouds over mountains. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 25, pp. 385-403.
- Orville H.D. and L.J. Sloan, 1970: A numerical simulation of the life history of a rainstorm. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 27, pp. 1148-1159.
- Owen P.R. and W.R. Thomson, 1963: Heat transfer across rough surface. - *J. Fluid Mech.*, vol. 15, pp. 321-334.
- Paegle J., W.G. Zdunkowski and R.M. Welch, 1976: Implicit differencing of predictive equations of the boundary layer. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 104, pp. 1321-1324.
- Panofsky H.A., D. Larko, R. Lipschutz, G. Stone, E.F. Bradley, A.J. Bowen and J. Hjstrup, 1982: Spectra of velocity components over complex terrain. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 108, pp. 215-230.
- Panofsky H.A., A.K. Blackadar and G.E. McVehil, 1960: The adiabatic wind profile. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 86, pp.390-398.
- Parrett C.A. and M.J.P. Cullen, 1984: Simulation of hydraulic jumps in the presence of rotation and mountains. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 110, pp. 147-165.
- Pastushkov R.S., 1975: The effect of vertical wind shear on the evaluation of convective clouds. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol 101, pp. 281-291.
- Paulson C.A., 1970: The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 9, pp. 857-861.
- Pearson R.A., 1974: Consistent boundary conditions for numerical models of systems that admit dispersive waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 1481-1489.
- Peltier W.R. and T.L. Clark, 1979: The evolution and stability of finite amplitude mountain waves. Part II: Surface wave drag and severe downslope windstorms. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 36, pp. 1498-1529.
- Peltier W.R. and T.L. Clark, 1983: Nonlinear mountain waves in two and three spatial dimensions. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 109, pp. 527-548.
- Perkey D.J., 1976: A description and preliminary results from a fine-mesh model for forecasting quantitative precipitation. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 104, pp. 1513-1526.
- Perkey D.J. and C.W. Kreitzberg, 1976: A time-dependent lateral boundary scheme for limited-area primitive equation models. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 104, pp. 744-755.
- Peterson E.W., 1969: Modification of mean flow and turbulent energy by a change in surface roughness under conditions of neutral stability. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 95, pp. 561-575.
- Phillips N.A., 1959: An example of non-linear computational instability. - *The Atmosphere and Sea in Motion*. - Rockefeller Inst. Press in association with Oxford Univ. Press, pp. 501-504.

- Phillips N.A., 1962: Numerical integration of the hydrostatic system of equations with a modified version of the Eliassen finite-difference grid. - Proc. Int. Symp. Numerical Weather Prediction, Tokyo, November 7-13 1960, Meteor. Soc. Japan, pp. 109-120.
- Phillips N.A., 1967: The Boussinesque approximation. - NCAR Tech. Notes, № 24, pp. 23-36.
- Phillips N.A., 1973: Principles of large scale numerical weather prediction. - Dynamic meteorology, P. Morel, Ed., Reidel, pp. 1-96.
- Phillips N.A. and J. Shukla, 1973: On the strategy of combining coarse and fine grid meshes in numerical weather prediction. - J. Appl. Meteor., vol. 12, pp. 763-770.
- Physick W.L., 1976: A numerical model of the sea breeze phenomenon over a lake or gulf. - J. Atmos. Sci., vol. 33, pp. 2107-2135.
- Piacsek S.A. and G.P. Williams, 1970: Conservative properties of convection difference schemes. - J. Comput. Phys., vol. 6, pp. 392-405.
- Pielke R.A., 1974a: A three-dimensional numerical model of the sea breezes over South Florida. - Mon. Wea. Rev., vol. 102, pp. 115-139.
- Pielke R.A., 1974b: A comparison of three-dimensional and two-dimensional numerical predictions of sea-breezes. - J. Atmos. Sci., vol. 31, pp. 1577-1585.
- Pielke R.A., 1981: Mesoscale numerical modelling. - Advances in Geophysics, vol. 23, pp. 185-344.
- Pielke R.A. and Y. Mahrer, 1975: Technique to represent the heated-planetary boundary layer in mesoscale models with coarse vertical resolution. - J. Atmos. Sci., vol. 32, pp. 2288-2308.
- Pielke R.A. and C.L. Martin, 1981: The derivation of a terrain-following coordinate system for use in a hydrostatic model. - J. Atmos. Sci., vol. 38, pp. 1707-1713.
- Pielke R.A. and C.L. Martin, 1983: Replay. - J. Atmos. Sci., vol. 40, pp. 2879-2880.
- Pielke R.A., M. Segal, R.T. McNider and Y. Mahrer, 1985: Derivation of slope flow equations using two different coordinate representation. - J. Atmos. Sci., vol. 42, pp. 1102-1106.
- Platzman G.W., 1963: The dynamical prediction of wind tides on Lake Erie. - Meteor. Monogr., vol. 4, No. 26, 44 pp.
- Pointin Y., 1984: Wet equivalent potential temperature and enthalpy as prognostic variables in cloud modelling. - J. Atmos. Sci., vol. 41, pp. 651-660.
- Price G.V. and A.K. MacPherson, 1973: A numerical weather forecasting method using cubic splines on a variable mesh. - J. Appl. Meteor., vol. 7, pp. 1102-1113.
- Queney P., 1973: Transfer and dissipation of energy by mountain waves. - Dynamic meteorology, P. Morel, Ed., D. Reidel, pp. 513-617.
- Ray P.S., J.B. Klemp and Wilhelmson, 1982: Observed and numerically simulated structure of a mature supercell thunderstorm. - Cloud Dynamics, E.M. Agee and T. Assai, Eds., D. Reidel, pp. 379-393.
- Raymond W.H. and H.L. Kuo, 1984: A radiation boundary condition for multi-dimensional flows. - Quart. J. Roy. Meteor. Soc., vol. 110, pp. 535-552.

- Redelsperger J.L. et G. Sommeria, 1981: Méthode de representation de la turbulence d'échelle inférieure á la maille pour un modèle tri-dimensionnel de convection nuageuse. - Bound.-Layer Meteor., vol. 21, pp. 509-530.
- Redelsperger J.L. et G. Sommeria, 1982a: Méthode de representation de la turbulence associée aux précipitations dans un modèle tri-dimensionnel de convection nuageuse. - Bound.-Layer Meteor., vol. 24, pp. 231-252.
- Redelsperger J.L. et G. Sommeria, 1982b: Turbulence parameterization in a deep convection model. - Cloud Dynamics, E.M. Agee and T. Assai, Eds., D. Reidel, pp. 395-405.
- Reynolds A.C., 1978: Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems. - Geophysics, vol. 43, pp. 1099-1110.
- Richardson L.F., 1910: The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. - Phil. Trans., vol. A210, pp. 307-357.
- Richardson L.F., 1922: Weather prediction by numerical process. - Cambridge Univ. Press, 236 pp. (reprinted by Dover).
- Richtmyer R.D., 1963: A survey of difference methods for non-steady fluid dynamics. - NCAR Tech. Notes 63-2, 25 pp.
- Richtmyer R.D. and K.W. Morton, 1967: Difference methods for initial value problems, 2nd ed. - Wiley - Interscience, 405 pp.
- Ritchie H., 1985: Application of a semi-Lagrangian integration scheme to the moisture equation in a regional forecast model. - Mon. Wea. Rev., vol. 113, pp. 424-435.
- Ritchie H., 1986: Eliminating the interpolation associated with the semi-Lagrangian scheme. - Mon. Wea. Rev., vol. 114, pp. 135-146.
- Robert A. J., 1966: The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. - J. Meteor. Soc. Japan, vol. 44, pp. 237-245.
- Robert A. J., 1979: The semi-implicit method. - Numerical methods used in atmospheric models, GARP Publ. Se. No. 17, WMO, vol II, pp. 419-439. (Имеется русский перевод: А. Робер, 1982: Полуявный метод. - Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Часть II. Пер. с англ. - Л.: Гидрометиздат, с. 302- 315).
- Robert A. J., 1981: A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. - Atmos.-Ocean, vol. 19, pp. 35-46.
- Robert A. J., 1982: A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. - J. Meteor. Soc. Japan, vol. 60, pp. 319-325.
- Robert A. J., 1986: Efficient time integration schemes for NWP models. - Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 408 August 1986, pp. 179-184.
- Robert A. J., J. Henderson and C. Turnbull, 1972: An implicit time integration scheme for baroclinic model of the atmosphere. - Mon. Wea. Rev., vol. 100, pp. 329-335.

- Robert A. J., J. Henderson and C. Turnbull, 1974: Computational resolution requirements for accurate medium-range numerical predictions. - *Difference and Spectral Methods for Atmosphere and Ocean Dynamics Problems*, Proc. Symp., Novosibirsk, 1974, Part I, pp. 82-102.
- Robert A. J., T.L. Yee and H. Ritchie, 1985: A semi-Lagrangian and semi-implicit numerical integration scheme for multilevel atmospheric models. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 113, pp. 388-394.
- Rosenberg N.J., 1974: *Microclimate: The Biological Environment*. - Willey, 315 pp.
- Rosenthal S.L., 1970: Experiments with a numerical model of tropical cyclone development. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 98, pp. 106-121.
- Roos B.B. and I. Orlanski, 1978: The circulation associated with a cold front. Part II: Moist case. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 445-465.
- Roos B.B. and I. Orlanski, 1982: The evolution of an observed cold front. Part I: Numerical simulation. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 296-327.
- Rotunno R. and J.B. Klemp, 1982: The influence of the shear-induced pressure gradient on thunderstorm motion. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 110, pp. 131-151.
- Rotunno R. and J.B. Klemp, 1985: On the rotation and propagation of simulated supercell thunderstorms. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 42, pp. 271-292.
- Rudy D.H. and J.C. Strikwerda, 1980: A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculation. - *J. Comput. Phys.*, vol. 36, pp. 55-70.
- Rudy D.H. and J.C. Strikwerda, 1981: Boundary conditions for subsonic compressible Navier-Stokes calculations. - *Comput. Fluids*, vol. 9, pp. 327-338.
- Rutledge S.A. and P.V. Hobbs, 1983: Mesoscale and microscale structure and organization of clouds and precipitation in midlatitude cyclones. VIII: A model for the seeder-feeder process in warm-frontal rainbands. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 40, pp. 1185-1206.
- Ryan B.F. and P. Lalouis, 1979: A one-dimensional time-dependent model for small cumulus. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 105, pp. 615-628.
- Sasamori T., 1970: A numerical study of atmospheric and soil boundary layers. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 27, pp. 1122-1137.
- Scharman R.D. and M.G. Wurtele, 1983: Ship Waves and Lee Waves. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 40, pp. 396-427.
- Schatzman M. and A.J. Policastro, 1980: Effects of the Boussinesq Approximation on the results of strong-buoyant plume calculations. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 23, pp. 117-123.
- Schemm C.E. and F.B. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 33, pp. 1021-1041.
- Schlesinger R.E., 1975: A three-dimensional numerical model of an isolated deep convective cloud: preliminary results. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 32, pp. 934-957.
- Schlesinger R.E., 1978: A three-dimensional numerical model of an isolated thunderstorm. Part I: comparative experiments for variable ambient wind shear. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 690-713.

- Schlesinger R.E., 1980: A three-dimensional numerical model of an isolated thunderstorm. Part II: Dynamics of updraft splitting and mesovortex couplet evolution. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 395-420.
- Schlesinger R.E., 1982: Effects of mesoscale lifting, precipitation and boundary layer shear on severe storm dynamics in a three-dimensional numerical modelling study. - *Preprints 12th Conf. on Severe Local Storms, Amer. Meteor. Soc.*, pp. 536-541.
- Schlesinger R.E., 1984a: Nature thunderstorm cloud-top structure and dynamics: a three-dimensional numerical simulation study. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 1551-1570.
- Schlesinger R.E., 1984b: Effects of the pressure perturbation field in numerical models of unidirectionally sheared thunderstorm convection: two versus three dimension. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 1571-1587.
- Seaman N.L. and R.A. Anthes, 1981: A mesoscale semi-implicit model. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 107, pp. 167-190.
- Segal M.Y., Y. Mahrer and R.A. Pielke, 1982: Numerical study of wind energy characteristics over heterogeneous terrain-central Israel case study. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 22, pp. 373-392.
- Segami A., 1986: Application of the second order turbulence closure scheme in JMA's regional model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 4-8 August 1986*, pp. 175-178.
- Shapiro R., 1970: Smoothing, filtering and boundary effects. - *Rev. Geophys. Space Phys.*, vol. 8, pp. 359-387.
- Shapiro M.A., 1980: Turbulent mixing within tropopause folds as a mechanism for the exchange of chemical constituents between the stratosphere and troposphere. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 37, pp. 994-1004.
- Shapiro M.A. and J.J. O'Brien, 1970: Boundary conditions for fine-mesh limited-area forecasts. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 9, pp. 345-349.
- Sharma O.P., Th. Braine-Bonnaire, H. Upadhyaya, R. Sadourny, 1986: Experiments on regional forecasting using a stretched-coordinate general circulation model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 4-8 August 1986*, pp. 205-207.
- Sheppard P.A., 1958: Transfer across the earth's surface and through the air above. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 84, pp. 205-224.
- Shir C.C. and R.D. Bornstein, 1977: Eddy exchange coefficients in numerical models of the planetary boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 11, pp. 171-185.
- Shir C.C. and L.J. Shieh, 1974: A generalized urban air pollution model and its application to the study of SO₂ distributions in the St. Louis metropolitan area. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 13, pp. 185-204.
- Shuman F.G., 1957: Numerical methods in weather prediction: II. Smoothing and filtering. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 85, pp. 357-371.
- Shuman F.G. and J.B. Hovermale, 1968: An operational six-layer primitive equation model. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 7, pp. 525-547.

- Sievers U. E.a, 1983: Transport equations for heat moisture in the soil and their application to boundary layer problems. - Beitr. Phys. Atmos., vol. 56, pp. 58-83.
- Slingo A., H.M. Schrecker, 1982: On the Short-Wave Radiative Properties of Stratiform Water Clouds. - Quart. J. Roy. Meteor. Soc., vol. 108, pp. 407-426.
- Smagorinsky J., 1956: On the inclusion of moist adiabatic processes in numerical prediction models. - Berchte Deutsch. Wetterdienstes, Bd. 5, s. 82-90.
- Smagorinsky J., 1960: On the dynamical prediction on large-scale condensation by numerical methods. - Geophys. Monograph., No.5, Amer. Geophys. Union, Physics of Precipitation.
- Smagorinsky J., 1963: General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. - Mon. Wea. Rev., vol. 91, pp. 99-164.
- Smagorinsky J., S Manabe and J.L. Holloway, 1965: Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. - Mon. Wea. Rev., vol. 93, pp. 727-768.
- Smagorinsky J., R.F. Strickler, W.E. Sangster, S Manabe, J. L. Holloway and G.D. Hembree, 1967: Prediction experiments with a general circulation model. - Proc. Int. Symp. Dynamics of Large Scale Atmospheric Processes, Moscow, pp. 70-134.
- Smeda M.S., 1979: Incorporation of planetary boundary layer processes into numerical forecasting models. - Bound.-Layer Meteor., vol. 16, pp. 115-129.
- Smith W.D., 1974: A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems. - J. Comput. Phys., vol. 15, pp. 492-503.
- Smith F.B. and D.J. Carson, 1977: Some thoughts on the specification of the boundary-layer relevant to numerical modelling. - Bound.-Layer Meteor., vol. 12, pp. 307-330.
- Smolarkiewicz P.K., 1984: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. - J. Comput. Phys., vol. 54, pp. 325-362.
- Sommerfeld A., 1958: Vorlesungen über theoretische Physick. Bd. 6. Partielle Differentialgleichungen der Physick. Geest und Portig, 300 Ss.
- Sommeria G., 1976: Three-dimensional simulation of turbulent processes in an undisturbed trade wind boundary layer. - J. Atmos. Sci., vol. 33, pp. 216-241.
- Sommeria G. and J.W. Deardorff, 1977: Subgrid scale condensation in models of non-precipitating clouds. - J. Atmos. Sci., vol. 34, pp. 344-355.
- Sommeria G. and M.A. Le Mone, 1978: Direct testing of a three-dimensional model of the planetary boundary layer against experimental data. - J. Atmos. Sci., vol. 35, pp. 25-39.
- Soong S.-T., 1974: Numerical simulation of warm rain development in an axisymmetric cloud model. - Atmos. Sci., vol. 31, pp. 1262-1285.
- Soong S.-T. and Y. Ogura, 1973: A comparison between axisymmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. - J. Atmos. Sci., vol. 30, pp. 879-893.
- Soong S.-T. and Y. Ogura, 1980: Response of trade-wind cumuli to large-scale processes. - J. Atmos. Sci., vol. 37, pp. 2035-2050.
- Soong S.-T. and W.-K. Tao, 1980: Response of deep tropical clouds to mesoscale processes. - J. Atmos. Sci., vol. 37, pp. 2016-2034.

- Soong S.-T. and W.-K. Tao, 1984: A numerical study of the vertical transport of momentum in tropical rainband. - *J. Atmos. Sci.*, vol 41, pp. 1049-1061.
- Sorbjan Z. and M. Uliasz, 1982: Some numerical urban boundary-layer studies. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 22, pp. 481-502.
- Spiegel E.A. and G.A. Veronis, 1960: On the Boussinesq approximation for compressible fluid. - *Astrophys. J.*, vol. 131, pp. 442-447.
- Staniforth A.N. and H.L. Mitchell, 1978: A variable-resolution finite-element technique for regional forecasting with the primitive equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 106, pp. 439-447.
- Starr V.P., 1946: A quasi-lagrangian system of hydrodynamical equations - *J. Meteor.*, vol. 2, pp. 227.
- Steiner J.T., 1973: A three-dimensional model of cumulus cloud development. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 30, pp. 414-435.
- Stull R.B., 1976: Mixed-layer depth model based on turbulent energetics. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 33, pp. 1268-1278.
- Sun W.-Y., 1980: A forward-backward time integration scheme to treat internal gravity waves. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 108, pp. 402-407.
- Sun W.-Y. and I. Orlanski, 1981: Large mesoscale convection and sea breeze circulation. Part II: Nonlinear numerical model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, pp. 1694-1706.
- Sundqvist H., 1978: A parameterization scheme for non-convective condensation including prediction of cloud water content. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 104, pp. 677-690.
- Sundqvist H., 1979: Vertical coordinate and related discretization. - *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, GARP Publ. Ser. No. 17, WMO, vol. II, pp. 3-52. (Имеется русский перевод: Сандквист Х., 1982: Вертикальные координаты и способы дискретизации по этим координатам. - *Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Часть II. Пер. с англ.* – Л.: Гидрометеиздат, с.5 –38).
- Sundqvist H., E. Berge and J.E. Kristiansson, 1989: Condensation and cloud parameterization studies with a mesoscale numerical weather prediction model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 117.
- Sundström A., 1973: Theoretical and practical problems in formulating boundary conditions for a limited-area model. - *Rep. DM-9, Inst. of Meteor., Univ. Of Stockholm*.
- Sundström A., 1977: Boundary conditions for limited-area integration of the viscous forecast equations - *Contrib. Atmos. Phys.*, vol. 50, pp. 218-224.
- Sundström A. and T. Elvius, 1979: Computational problems related to limited area modelling. - *Numerical Methods Used in Atmospheric Models*, GARP Publ. Ser. No. 17, WMO, vol. II, pp. 381-418. (Имеется русский перевод: Сандстрём А., Т. Эльвиус, 1982: Вычислительные проблемы моделирования в ограниченной области. - *Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Часть II. Пер. с англ.* – Л.: Гидрометеиздат, с. 274 – 301).
- Sutcliffe R.C., 1947: A contribution to the problem of development. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 73, pp. 370-383.

- Sverdrup H.U., 1951: Evaporation from the oceans. - *Compendium of Meteorology*, T.F., Ed., Amer. Meteor. Soc., pp. 1071-1081.
- Swibank W.C. and A.J. Dyer, 1967: An experimental study in micrometeorology. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 93, pp. 494-500.
- Tanako I. and A. Segami, 1986: Impact of high resolution satellite winds on the regional forecasts. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int/ Symp. Short- and Medium-Range NWP*, Tokyo, 4-8 August 1986.
- Tao W.-K. and J. Simpson, 1984: Cloud interactions and merging: numerical simulations. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 2901-2917.
- Tapp M.C. and P.W. White, 1976: A non-hydrostatic mesoscale model. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 102, pp. 277-296.
- Tarbell T.C., T.T. Warner and R.A. Anthes, 1981: An example on the initialization of the divergent wind component in a mesoscale numerical weather prediction model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 101, pp. 77-95.
- Tarbell T.C., T.T. Warner and S.W. Wolcott, 1981: The initialization of a mesoscale weather prediction model using satellite and precipitation data. - *Proc. 1st Int. Symp. on Nowcasting*, 25-28 August 1981, Hamburg, pp. 259-264.
- Temperton C., 1977a: Direct methods for the solution of the discrete Poisson equation: some comparisons. - *ECMWF Research Dept. Internal Rep. № 3*.
- Temperton C., 1977b: On the FACR(1) algorithm for the discrete Poisson equation. - *ECMWF Research Dept. Internal Rep. № 14*.
- Tennekes H. and A.G.M. Driedonks, 1981: Basic entrainment equations for the atmospheric boundary layer. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 20, pp. 515-531.
- Tetens O., 1930: Über einige meteorologische Begriffe. - *Zeitschrift für Geophysik*, Jg. 6, S. 297-309.
- Therry G. and P. Lacarrère, 1983: Improving the eddy kinetic energy model for planetary boundary layer description. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 25, pp. 63-88.
- Thorpe A.J. and M.J. Miller, 1978: Numerical simulations showing the role of the downdraught in cumulonimbus motion and splitting. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 104, pp. 873-893.
- Thorpe A.J., M.J. Miller and M.W. Moncrieff, 1982: Two-dimensional convection in non-constant shear: a model of mid-latitude squall lines. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 108, pp. 739-762.
- Tripoli G.J. and W.R. Cooton, 1980: A numerical investigation of several factors contributing to the observed variable intensity of deep convection over South Florida. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 19, pp. 1037-1063.
- Tripoli G.J. and W.R. Cooton, 1983: The use of ice-liquid water potential temperature as a thermodynamic variable in deep atmospheric models. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 109, pp. 1094-1102.

- Tripoli G.J. and W.R. Cooton, 1982: The Colorado State University three-dimensional cloud/mesoscale model-1982. Part I: General theoretical framework and sensitivity experiments. - *J. Rech. Atmos.*, vol. 16, pp. 185-219.
- Tripoli G.J. and W.R. Cooton, 1986: An intense, quasi-steady thunderstorm over mountain terrain. Part IV: Three-dimensional numerical simulation. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 43, pp. 894-912.
- Tung S.-L., I. Halberstam and C. Johnson, 1986: Towards the development of a improved modular limited-area model. - *Extended Abstracts WMO/IUGG Int. Symp. Short- and Medium-Range NWP* Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 357-358.
- Turpeinen O., 1982: Cloud interactions and merging on Day 261 of GATE. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 110, pp. 1238-1254.
- Turpeinen O. and M.K. Yau, 1981: Comparisons of results from a three-dimensional cloud model with statistics of radar echos on Day 261 of GATE. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 109, pp. 1495-1511.
- Van Ulden A.P. and A.A.M. Holtslag, 1985: Estimation of atmospheric-boundary layer parameters for diffusion applications. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 24, pp. 1196-1207.
- Veltishchev N.F., A.A. Polezhaev, 1985: Experiments with two-dimensional deep convection model. - *Notes for the International Cloud Modelling Workshop/Conference. Irsee, FRG, 15-19 July 1985, WMO/TD - No. 57.*
- Verner G. and R. Benoit, 1984: Normal mode initialization of the RPN finite element model. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 112, pp. 1535-1543.
- Vichnevetsky R., 1986: Invariance theorems concerning reflection at numerical boundaries. - *J. Comput. Phys.*, vol. 63, pp. 268-282.
- Volkert H. and U. Schumann, 1986: Development of an atmospheric mesoscale model - setting up the version in terrain following coordinates. - *Notes Numer. Fluid Mech.*, vol. 13, pp. 375-382.
- Vukovich F.M., J.W. Dunn and B.W. Crissman, 1976: A theoretical study of the St. Louis heat island. The wind and temperature distribution. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 15, pp. 417-440.
- Wachspress E.L., 1966: Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics. - Prentice-Hall, 299 pp.
- Walmsley J.L., J.R. Salmon and P.A. Taylor, 1982: On the application of a model of boundary-layer flow over low hills to real terrain. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 23, pp. 17-46.
- Wang I.T., 1981: The determination of surface-layer stability and eddy fluxes using wind speed and vertical temperature gradient measurements. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 20, pp. 1241-1248.
- Wang H.H. and P. Halpern, 1970: Experiments with a regional fine-mesh prediction model. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 9, pp. 545-553.
- Warner T.T., 1984: The initialization of mesoscale models. *Proc. 2nd Int. Symp. on Nowcasting, Norrköping, Sweden, 3-7 September 1984*, pp. 281-288.

- Washington W.M. and D.P. Baumhefner, 1975: A method of removing Lamb waves from initial data for primitive equation model. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 14, pp. 114-119.
- Webb E.K., 1970: Profile relationships the «log + linerian» range and extension to strong stability. - *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, vol. 96, pp. 67-90.
- Webb E.K., 1982: Profile relationships in the superadiabatic surface layer. - *Quart. J. Roy Meteor. Soc.*, vol. 108< pp. 661-688.
- Wetzel D.J., 1982: Toward parameterization of the stable boundary layer. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 21, pp. 7-13.
- White P.W., 1978: Mesoscale modelling. - *ECMWF Seminars 1978. The interpretation and use of large-scale numerical forecast products*, pp. 17-55.
- Wieringa J., 1980a: A revaluation of the Kansas mast influence on measurements of stress and cup-anemometer overspeeding. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 18, pp. Pp. 411-430.
- Wieringa J., 1980b: Representativeness of wind observations at airports. - *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, vol. 51, pp. 962-971.
- Wiin-Nielsen A., 1959: On the application of trajectory methods in numerical forecasting. - *Tellus*, vol. 11, pp. 180-196.
- Wilhelmson R.B., 1974: The life cycle of a thunderstorm in three dimensions. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 31, pp. 1629-1661.
- Wilhelmson R.B., 1977: On the thermodynamic equation for deep convection. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 105, pp. 545-547.
- Wilhelmson R.B. and C.-S. Chen, 1982: A simulation of the development of successive cells along a cold outflow boundary. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pp. 1466-1483.
- Wilhelmson R.B. and J.B. Klemp, 1978: A numerical study of storm splitting that leads to long-lived storms. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 35, pp. 1974-1986.
- Wilhelmson R.B. and J.B. Klemp, 1981: A three-dimensional simulation of splitting severe storms on 3 April 1964. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 38, pp. 1581-1600.
- Wilhelmson R.B. and J.B. Klemp, 1983: Comparison of Doppler and numerical model data of an Oklahoma squall line. - *Preprints 21st Conference on Radar Meteorology*, Edmonton, Alberta, Sept. 19-23, 1983, Boston, Mass., pp. 91-96.
- Wilhelmson R.B. and Y. Ogura, 1972: The pressure perturbation and the numerical modelling modelling of a cloud. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 29, pp. 1295-1307.
- Williams G.P., 1969: Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow. - *J. Fluid Mech.*, vol. 37, pp. 727-750.
- Williamson D.L. and G.L. Browning, 1974: Formulation of the lateral boundary conditions for the NCAR limited-area model. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 13, pp. 8-16.
- Willoughby H.E., H.-L. Lin, S.J. Lord and J.M. Piotrowicz, 1983: A nonhydrostatic, axisymmetric model of hurricane dynamics with explicit convection and ice microphysics. - *Preprints 6th Conf. on Numerical Weather Prediction*, June 6-9 1983, Omaha, Nebr., *Amer. Meteor. Soc.*, pp. 275-281.

- Willoughby H.E., H.-L. Lin, S.J. Lord and J.M. Piotrowicz, 1984: Hurricane structure and evolution as simulated by a axisymmetric nonhydrostatic numerical model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 41, pp. 1169-1186.
- Winograd S., 1978: On computing the discrete Fourier transform. - *Math. Comput.*, vol 32, pp. 175-199.
- WMO/TD No. 79. Report of the steering group meeting on limited-area weather prediction modelling (Belgrade, 22-24 August 1985). PSMP Report Series № 17, Appendix H, pp. 75-97.
- Wobus H.B. e.a., 1971: Calculation of the terminal velocity of water drops. - *J. Appl. Meteor.*, vol. 10, pp. 751-754.
- Wong R.K.W. and K.D. Hage, 1983: Comment on «Terrain-Following coordinates and the hydrostatic approximation». - *J. Atmos. Sci.*, vol. 40, pp. 2875-2878.
- Wong V.C., J.W. Zack, M.L. Kaplan and G.D. Coats, 1983: A nested-grid limited-area model for short term weather forecasting. - *Preprints 6th Conf. on Numerical Weather Prediction*, June 6-9 1983, Omaha, Nebr., Amer. Meteor. Soc., pp. 9-15.
- Wu J., 1969: Wind stress and surface roughness at air-water interface. - *J. Geophys. Res.*, vol. 74, pp. 444-455.
- Wu J., 1982: Wind stress coefficients over sea surface from breeze to hurricane. - *J. Geophys. Res.*, vol. 87, pp. 9704-9706.
- Wurtele M.G., J. Paegle and A. Sielecki, 1971: The use of open boundary conditions with the storm-surge equations. - *Mon. Wea. Rev.*, vol. 99, pp. 537-544.
- Wyngaard J.C., 1985: Structure of the planetary boundary layer and implications for its modelling. - *J. Clim. Appl. Meteor.*, vol. 24, pp. 1131-1142.
- Wyngaard J.C. and O.R. Coté, 1974: The evolution of a convective planetary boundary layer - a high-order-closure model study. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 7, pp. 289-308.
- Yaglom A.M., 1977: Comments on wind and temperature flux-profile relationships. - *Bound.-Layer Meteor.*, vol. 11, pp. 80-102.
- Yamada T., 1977: A numerical simulation of pollutant dispersion in a horizontally homogeneous atmospheric boundary layer. - *Atmos. Environ.*, vol. 11, pp. 1015-1024.
- Yamada T., 1978: A three-dimensional numerical study of complex atmospheric circulations produced by terrain. - *Proc. Conf. Sierra Nevada meteor.*, Amer. Meteor. Soc., pp. 61-67.
- Yamada T., 1979: An application of a three-dimensional, simplified second-moment closure numerical model to study atmosphere effects of a large cooling-pond. - *Atmos. Environ.*, vol. 13, pp. 693-704.
- Yamada T., 1981: A numerical simulation of the nocturnal drainage. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 59, pp. 108-122.
- Yamada T., 1982: A numerical model study of turbulent airflow in and above a forest canopy. - *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 60, pp. 439-454.
- Yamada T., 1983: Simulation of nocturnal drainage flows by a q^2-l turbulence closure model. - *J. Atmos. Sci.*, vol. 40, pp. 91-106.

- Yamada T. and S. Bunker, 1986: Development of a mesoscale, nested grid model and applications to pollutant transport over complex terrain. - Extended Abstracts WMO/IUGG Inter. Symp. Short- and Medium-Range NWP, Tokyo, 4-8 August 1986, pp. 325-328.
- Yamada T. and G.L. Mellor, 1975: A simulation of the Wangara atmospheric boundary layer data. - J. Atmos. Sci., vol. 32, pp. 2309-2329.
- Yamada T. and G.L. Mellor, 1979: A numerical simulation of BOMEX data using a turbulence closure model coupled with ensemble cloud relations. - Quart. J. Roy. Meteor. Soc., vol. 105, pp. 915-944.
- Yamasaki M., 1968: A tropical cyclone model with parameterized vertical partition of released latent heat. - J. Meteor. Soc. Japan, vol. 46, pp. 202-214.
- Yanenko N.N., 1971: The Method of Fractional Steps. - Springer-Verlag, 160 pp. (Russian ed., 1967).
- Yau M.K., 1980: The effects of evaporation, water load and wind shear on cloud development in a three-dimensional numerical model. - J. Atmos. Sci., vol. 37, pp. 488- 494.
- Yau M.K. and R. Michaud, 1982: Numerical simulation of a cumulus ensemble in three dimensions. - J. Atmos. Sci., vol. 39, pp. 1062-1079.
- Zhel'nin A.A., 1984: Parameterization of Radiation Transfer and Diurnal Cycle. - WMO Short- and Medium-Range Prediction Research Publication Series No. 11, Lectures Presented at the Workshop on Limited-Area Numerical Weather Prediction Models for Computers of Limited Power, Erice, Italy, 1984, Part II, pp. 339-360.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном Приложении приводится перевод¹ нескольких лекций, которые были прочитаны на рабочем семинаре Всемирной метеорологической организацией (ВМО) по различным аспектам создания численных моделей локального прогноза погоды в региональных метеорологических центрах, ведущими учеными различных стран.

Несмотря на то, что данный семинар был проведен ВМО более 15 лет назад, однако многие из этих лекций не потеряли до сих пор ни своей научной, ни педагогической (в особенности) ценности. В русском переводе данные лекции, к сожалению, отсутствуют – более того, в странах СНГ они в свое время не были введены ни в научный, ни в педагогический обиход.

С учетом того, что для Украины проблемы создания и/или адаптации существующих численных моделей локального прогноза погоды являются чрезвычайно актуальными, считаю необходимым представить хотя бы некоторые из этих лекций для более полного и глубокого понимания тех проблем, которые уже были освещены в монографии. Надеюсь, что в ближайшее время удастся издать русский перевод всех лекций – это более 400 страниц машинописного текста.

LECTURES PRESENTED AT WORKSHOP ON LIMITED-AREA NUMERICAL WEATHER PREDICTION MODELS FOR COMPUTERS OF LIMITED POWER

(Erice, Italy, 1-14 October 1984)

Short-and Medium-range Weather Prediction Research Publication Series.

Parts I-III (№ 8-13)

¹ За непрофессиональное качество которого заранее приносим извинения.

З. ДЖАНЖИЧ (Zaviša I. Janjić)

Общие замечания по проблеме моделирования атмосферных процессов над ограниченной территорией

Boundary Conditions in Limited-Area Models

Part I (№ 8) pp. 10-12

Предсказание погоды из-за самой природы атмосферных процессов требует интенсивного и постоянного международного сотрудничества. Это сотрудничество организуется Всемирной метеорологической организацией (ВМО), специализированным агентством ООН, и в частности, в ежедневной оперативной практике, через Всемирную службу погоды ВМО (ВСП). Для того, чтобы избежать дублирования усилий внутри ВСП установлена иерархия метеорологических центров с различной ответственностью. Имеются Мировые метеорологические центры (ММЦ), Региональные метеорологические центры (РМЦ) и Национальные метеорологические центры (НМЦ). В области прогнозирования погоды ММЦ и РМЦ в первую очередь ответственны за прогнозы планетарного и макро масштабов на периоды нескольких дней вперед. Обязанностью же НМЦ является обеспечение потребителей дополнительной информацией на основе прогнозов, поступающих из ММЦ и РМЦ. Соответствующим инструментом, который может обеспечить эту дополнительную информацию в условиях скромных по мощности компьютеров, является та или иная модель прогноза погоды по ограниченной территории. Такие модели занимают диапазон атмосферных процессов масштаба от мезо- α до синоптического и используются для выработки очень краткосрочного и краткосрочного диапазона численных прогнозов (от 12 до 48 часов).

В настоящих лекциях мы коснемся главным образом тех прогностических моделей, которые могут быть использованы автономно относительно глобальных или полусферных прогностических моделей. Логическая структура таких систем очень сходна с логической структурой крупномасштабных моделей и включает шаг ассимиляции независимых данных. При интегрировании модели по ограниченной территории (МОТ) управляются граничными условиями, которые в свою очередь выводятся из прогностической продукции крупномасштабной модели, полученные при интегрировании, начиная с более раннего срока наблюдений. Автономные прогностические системы по ограниченной территории дают возможность значительно сократить вычислительные усилия и время. А именно, по сравнению с крупномасштабными системами, во-первых, область интегрирования значительно уменьшена. Во-вторых, обычно предполагается, что нет необходимости в очень усложненных схемах параметризации подсеточных физических процессов, так как несогласованности, присущие простым схемам, за сравнительно небольшой период интегрирования не имеют возможностей для «засорения» более крупных масштабов. Наконец, за счет значительного уменьшения требований к объему исходных данных, можно значительно сократить «время отсечки» данных.

В качестве иллюстрации попытаемся сделать грубую оценку этих преимуществ. Допустим, что область интегрирования МОТ имеет 90^0 в направлении с запада на восток и 60^0 в меридианальном направлении. В этом случае область интегрирования в 12 раз меньше, чем область интегрирования в глобальной прогностической системе. Если далее мы предположим, что используются достаточно простые схемы параметризации, так что на них расходуется только 15% объема вычислений на одном шаге по времени вместо обычных 50 % в крупномасштабных моделях, то при равном пространственно-временном разрешении мы получим коэффициент 18,5 в пользу МОТ. Кроме того, в крупномасштабных системах обычно теряется несколько часов в ожидании получения данных наблюдений с наиболее удаленных частей Земного шара. Для МОТ, однако, даже при использовании систем получения данных, основанных на низкоскоростных линиях связи (50-100 бод), по крайней мере, часть этого времени может быть использована для продуктивных прогностических вычислений. Таким образом, мы приходим к заключению, что даже со скромными по мощности компьютерами прогностическая система по ограниченной территории может использоваться оперативно с большим разрешением, и, в то же время, прогностическая продукция такой системы будет доступной для дальнейшего использования через более короткий срок. Кроме того, появляется возможность более тщательно моделировать те конкретные физические процессы, которые являются важными для данного географического региона (например, эффекты орографии), и которые могут не входить в число приоритетов в крупных метеорологических центрах. Несмотря на очень высокий уровень усложнения существующих глобальных и полусферных прогностических систем, вследствие возможностей более высокого разрешения и более тщательного конструирования схем моделирования важных локальных процессов, с помощью МОТ можно получить более детальные краткосрочные прогнозы атмосферных явлений меньших пространственных масштабов и связанных с ними процессов, таких как фронтальные системы, мезомасштабное распределение осадков и воздействие орографии. Даже если мощности ЭВМ недостаточно для увеличения разрешения модели, автономность и более ранняя доступность прогностической продукции часто рассматривается как существенное оправдание для использования систем по ограниченной территории. В дополнение ко всему ранее сказанному, такая система может быть использована несколько раз в сутки для уточнения прогноза.

Здесь заслуживает упоминания еще один аспект этой проблемы – большинство потребителей требует представления прогностической метеорологической информации в цифровом виде. Однако пропускная способность коммуникаций может быть недостаточной для получения всей необходимой прогностической продукции из ММЦ и РМЦ. В этой ситуации такая информация может быть получена от МОТ. Отметим, что автономная система по ограниченной территории является удобной системой обратной связи в случае разрывов связи, делающих невозможным или затруднительным получение прогностической продукции из крупных метеорологических центров.

Таким образом, мы обсудили прямые выгоды от усилий по моделированию атмосферных процессов на ограниченной территории в малых прогностических центрах. В дополнение к ним, имеются также некоторые опосредованные преимущества. А именно, центральным ядром локальной про-

гностической системы является численная модель атмосферы. С определенными модификациями эта модель может быть использована также для моделирования/изучения атмосферных процессов, включая полусферные и глобальные масштабы. Наконец, разработка и использование сложных прогностических систем стимулирует научные усилия на национальном уровне.

Региональные прогностические системы вследствие их преимуществ, особенно автономности и скромных требований к мощности ЭВМ, являются очень привлекательными для малых метеорологических центров. Например, такие системы используются в оперативном режиме или разрабатываются в дюжине европейских стран. Большинство из них рассчитывает в получении данных, необходимых для постановки граничных условий, на Европейский Центр среднесрочных прогнозов погоды, который выполняет функции ММЦ. Однако, и в других регионах прогностическая продукция ММЦ и РМЦ, необходимая для таких целей, становится все более доступной посредством Глобальной телекоммуникационной системы ВМО.

З. ДЖАНЖИЧ (Zaviša I. Janjić)

Использование выходной продукции моделей и технические требования при моделировании по ограниченной территории

Application of LAM products and technical requirements for limited area modeling

Part I (№ 8) pp. 257-262

1. Использование продукции моделей по ограниченной территории

В большинстве случаев численные результаты, получаемые с помощью автоматизированной системы прогноза по ограниченной территории, не могут быть непосредственно использованы окончательными пользователями. А именно, прогностические метеорологические поля, выдаваемые моделью, должны быть превращены в прогнозы отдельных метеорологических элементов для данной местности или еще меньшего географического района. В тоже время, обычно гораздо более предпочтительными являются количественные, а не качественные прогнозы. Для достижения очерченных здесь целей применяются несколько различных подходов.

Вероятно, наиболее простым из них является субъективная оценка выходной информации модели опытным прогнозистом совместно с возможностью простых ручных процедур, основанных на полуэмпирических гипотезах. Этот традиционный подход все еще широко, или почти исключительно, используется в некоторых метеорологических центрах. Однако, для прогноза многих важных метеорологических параметров этот метод может дать лишь качественную информацию, а точность количественных данных, полученных таким способом, достаточно часто является дискуссионной.

Более привлекательный метод состоит в установлении простых статистических взаимосвязей между полученными с помощью численной модели полями и метеорологическими явлениями локальной погоды (см., например, *Glahn*, 1982). Эти взаимосвязи могут быть выражены следующим образом

$$\hat{Y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

Здесь: \hat{Y} - оценка предиктанта Y ; x_1, \dots, x_n - предикторы; функция f обычно представляет собой множественную линейную регрессию.

Этот метод быстро завоевывает популярность и используется в ряде метеорологических служб (например, *WMO*: 1982; 1983).

Существует два основных подхода к разработке соотношений типа (1). Они называются:

- методика совершенного прогноза (*perfect prog technique*) или прогноз для прогнозиста (*Klein et al.*, 1959);

- статистики выходной продукции модели (*model output statistics*) – **MOS** – (Glahn and Lowry, 1972).

В методике совершенного прогноза в качестве предикторов используются наблюдаемые параметры (или параметры, которые выводятся из наблюдений), которые могут быть предвычислены прогностической моделью. Параметры, которые рассчитаны в модели, затем используются в соотношениях типа (1) для того, чтобы получить фактический прогноз². Следует отметить, что данный подход подразумевает допущение о том, что соотношение (1), полученное по наблюдаемым данным, справедливо также и для модельных данных. Очевидно, что это допущение будет полностью справедливо, если выходная информация модели является совершенной (т.е. не содержащей вычислительных ошибок). По этой причине данная методика называется методикой совершенного прогноза.

В противоположность этой методике, в методике MOS при выводе соотношений типа (1) вместо наблюдаемых данных используются данные выходной продукции модели. Т.о. в данной методике учитываются и ошибки модельных предвычислений. Возможным недостатком этого метода является его зависимость от конкретной модели, т.е. при изменении модели изменяются её характеристики ошибок, поэтому прогностические качества статистики MOS вероятно ухудшаются, кроме случаев радикального улучшения качества выходной продукции модели.

В дополнение к статистическому методу прогноза имеется еще одна возможность получения количественных прогнозов элементов погоды – использование моделей с очень высоким пространственным разрешением и упрощенной физикой. Такая модель инициализируется (*is driven by*) граничными условиями, которые берутся из выходной продукции MOT. Такая модель с высоким разрешением позволяет смоделировать воздушный поток, который является динамически приспособлен, например, к местной топографии. В качестве использования такого подхода сошлемся на модель прогноза местного ветра, приведенную в работе *Danard (1977)*.

Наконец, в некоторых приложениях могут быть использованы величины, непосредственно выведенные из выходной продукции модели. Примером такого подхода является метеорологическая информация, необходимая для планирования авиационных полетов с целью экономии топлива. Этот пример хорошо иллюстрирует также и легко выводимую экономическую эффективность использования метеорологических данных.

² То есть статистические соотношения строятся по фактическим данным, а затем при прогнозе в качестве предикторов используются модельные значения предвычисленных величин.

2. Технические требования к моделированию по ограниченной территории³

Относительно технических вопросов имеется две критические точки применения автономных систем прогноза по ограниченной территории – коммуникации и вычислительное оборудование. Сначала рассмотрим проблемы, связанные с коммуникациями. Коммуникационными функциями, необходимыми для работы автономной прогностической системы и использования её продукции, являются:

- (a) получение данных наблюдений;
- (b) прием прогностической продукции крупномасштабных моделей, необходимой для задания граничных условий;
- (c) перемещение данных в и из главного компьютера;
- (d) распространение выходной прогностической продукции.

Относительно оборудования, необходимого для выполнения этих функций, разработано ряд технических решений, включающих низкоскоростные (50-100 бодов) системы с возможным ручным вмешательством, полностью компьютеризированные системы, действующие на средних скоростях (обычно 1200-1500 б/с). На низкоскоростных линиях уменьшается объем получаемых данных, увеличиваются скорости переходных ошибок (*transmission error rates*) и теряется время, которое в ином случае расходуется на продуктивные вычисления. Возможное вмешательство человека, кроме того, уменьшает надежность такой системы. Таким образом, наиболее желательной является полностью автоматизированная среднескоростная коммуникационная система, хотя есть примеры прогностических систем для ограниченной территории, состыкованных с низкоскоростными линиями. Примером такой системы является прогностическая система, используемая в Федеральном гидрометеорологическом институте Югославии.

Второй основной технической проблемой является необходимая вычислительная мощность. Решающим пунктом здесь является скорость центрального процессора. В качестве меры скорости процессора мы будем использовать единицы, называемые *MIPS* (миллионов операций в секунду). Эта мера является несколько неточной для оценки фактического времени выполнения конкретной вычислительной задачи, т.к. время выполнения будет зависеть от ряда параметров, таких как используемая операционная система, язык программирования и соответствующий компилятор, методика программирования, тип задания, наличие других заданий, выполняемых одновременно на ЭВМ, и т.д. Таким образом, даже в случае, если данное задание не конкурирует с другими за время центрального процессора, то время выполнения конкретного задания на компьютере со скоростью, допустим, 3 MIPS не будет втрое меньшим, чем время выполнения этого задания на компьютере со скоростью 1 MIPS. Однако при оценке только порядка требуемой скорости процессора, данная характеристика вполне подходит.

³ Здесь следует учесть, что описываются технические возможности, доступные на середину 80-х годов, когда еще не было миникомпьютеров, Интернета и других современных технических возможностей (от пер.).

Как уже указывалось во вводной лекции, количество вычислений, необходимых для 24-часового прогноза для систем по ограниченной территории, уменьшается на порядок в сравнении с глобальной или полусферной моделью. Если мы также учтем, что можно значительно сократить время на фазе получения данных для МОТ, то приходим к заключению, что для систем по ограниченной территории можно использовать процессор в 10-100 раз более медленный, чем те, что используются в крупных прогностических центрах. Так как в этих центрах используются процессоры со скоростью процессора порядка 100 MIPS⁴, то процессоры со скоростями 1-10 MIPS могут обеспечить необходимую для прогноза по ограниченной территории вычислительную мощность. Следует отметить, что нижнюю часть этого диапазона уже покрывают большие миниЭВМ. Экстремальным примером снова является система югославского Федерального гидрометеорологического института, которая выполняется на ЭВМ с мощностью 0.1-0.15 MIPS. Конечно, при такой мощности невозможно выполнить все условия, поставленные во вводной лекции. Однако, несмотря на эти трудности, прогнозисты все же рассматривают выходную продукцию этой системы как очень существенную помощь при краткосрочном прогнозировании.

Говоря о других вычислительных требованиях, следует отметить желательность объема памяти 1 Мбайт. Требования для хранения на периферийных устройствах прямого доступа являются довольно скромными. В случае, если имеется национальный банк наблюдений и прогнозов для разработки методик статистического прогноза, то необходимый объем данных прямого доступа оценивается в величину порядка нескольких сотен Мбайт.

Литература

- Danard, M.*, 1977: A simple model for mesoscale effects of topography on surface winds. – *Mon. Wea. Rev.*, 105, 572-581.
- Glahn, H.*, 1982: Statistical weather forecasting. Seminar/Workshop 1982: Interpretation of numerical weather prediction forecasts. – European Center for Medium Range Weather Forecast., 263-310. (Available from ECMRWF, Shinfield Park, Reading, Bers. RG2 9AX, UK).
- Glahn, H., and D.A. Lowry*, 1972: The use of model output statistics (MOS) in objective weather forecasting. – *J. Applied Meteorol.*, 11, 1203-1211.
- Klein, W.H., B.H. Lewis and I. Enger*, 1959: Objective prediction of fine-day mean temperature during winter. – *J. Meteorol.*, 16, 672-682.
- WMO*, 1982: Numerical weather prediction progress report for 1981. Programme on Short-, Medium and Long-range Weather Prediction Research, 205 pp. (Available from WMO, CP No. 5, CH-1211, Geneva 20).
- WMO*, 1983: Numerical weather prediction progress report for 1982. Programme on Short-, Medium and Long-range Weather Prediction Research, 203 pp. (Available from WMO, CP No. 5, CH-1211, Geneva 20).

⁴ Цифра отражает состояние вычислительной техники на середину 80-х годов.

Акио АРАКАВА (Akio Arakawa)

Граничные условия в моделях по ограниченной территории

Boundary Conditions in Limited-Area Models

Part III (№ 13) pp. 403-433

1. Введение

В этой лекции рассмотрим проблему, присущую только моделям по ограниченной территории (МОТ), а именно проблему боковых граничных условий.

Модели по ограниченной территории естественно более экономичные, нежели глобальные (полусферные) модели при заданном горизонтальном разрешении. Если же использовать более мелкое разрешение в локальном районе, представляющем наибольший интерес, то можно получить более точные региональные прогнозы без существенного увеличения времени счета на ЭВМ (машинного времени). Своеобразной платой за эти преимущества МОТ является необходимость тщательной формулировки боковых граничных условий. Если же эти условия не сформулированы надлежащим образом, то на границах области расчетов могут генерироваться ложные волны (решения) с большой амплитудой, которые затем распространяются в центральную часть области прогноза и существенно искажают прогноз. В идеальном случае граничные условия должны определяться внутренним решением, которое получается при отсутствии этих границ. С математической точки зрения моделирование на ограниченной территории представляет собой краевую задачу с начальными условиями для системы уравнений в частных производных, описывающих поведение атмосферы. При этом даже для исходных дифференциальных уравнений не совсем ясно необходимое число и сам тип граничных условий. В этих лекциях мы будем руководствоваться теорией хорошей обусловленности (например, *Kreiss, 1970*; для гиперболических уравнений), с помощью которой оценивается единственность и устойчивость решения по отношению к небольшим возмущениям в начальных и граничных данных. Для дискретных уравнений имеется дополнительная проблема формулировки вычислительных граничных условий. Здесь не будут рассмотрены ни строгие теории по общим краевым задачам с начальными условиями, ни детали практических методов формулировки граничных условий в МОТ. Вместо этого будут обсуждаться граничные условия для упрощенных уравнений с акцентом на использовании характеристических переменных.

2. Одномерное уравнение адвекции для однородного поля

а) Непрерывный случай

В этом разделе рассмотрим одномерное уравнение адвекции, заданное в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

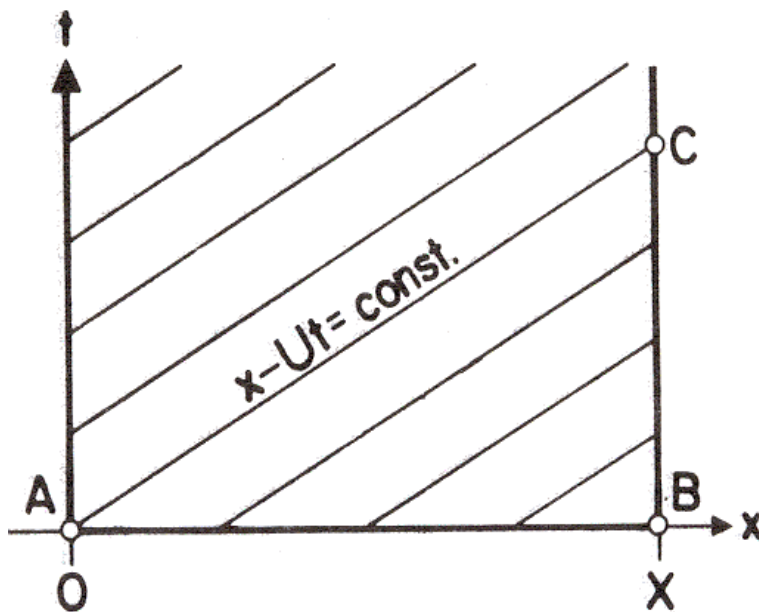
где q – произвольная зависимая переменная, U – заданная константа, описывающая однородный поток.

Направим ось X в направлении потока, так что U – положительная величина. Легко показать, что

$$q(x, t) = F(x - Ut) \quad (2)$$

есть решение уравнения (1), где F – функция, вид которой можно определить по начальным и граничным условиям. Из (2) видно, что вдоль линий $x - Ut = \text{const}$ решение для q принимает постоянные значения. Эти линии называют *характеристиками* уравнения (1).

Предположим, что мы имеем в пространстве ограниченную область, заданную на $0 \leq x \leq X$, как это показано на рис. 1. Начальное условие между точками A и B определяет решение в треугольном районе ABC .



Для определения решения над линией AC мы должны задать граничное условие для $t > 0$ в точке втекания ($x = 0$). В точке втекания $x = X$ мы, однако, несвободны в задании граничного условия, так как решение определяется ли начальными условиями, или граничным условием в точке втекания.

Рис. 1. Характеристики уравнения адвекции (1). Детальнее смотри текст

Для удобства дальнейших преобразований перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t} q = \frac{\partial}{\partial x} (Uq). \quad (3)$$

Кроме того, из уравнения (1) можно вывести дополнительные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} q^2 = \frac{\partial}{\partial x} (U q^2), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q_x^2 = \frac{\partial}{\partial x} (U q_x^2). \quad (5)$$

Здесь $q_x = \partial q / \partial x$. Правые части уравнений (3), (4) и (5) представляют собой конвекции потоков величин q , q^2 и q_x^2 . Интегрируя эти уравнения по x от 0 до X , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^X q dx = (Uq)_{x=0} - (Uq)_{x=X}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^X q^2 dx = (Uq^2)_{x=0} - (Uq^2)_{x=X}, \quad (7)$$

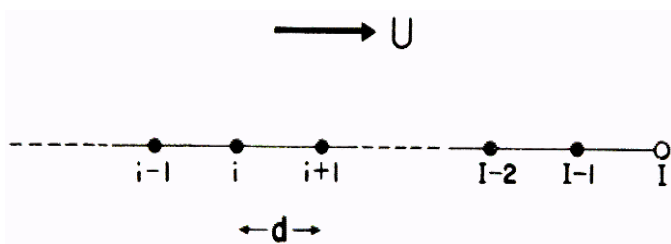
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^X q_x^2 dx = (Uq_x^2)_{x=0} - (Uq_x^2)_{x=X}. \quad (8)$$

Очевидно, что в (7) и (8) вклад потока в точке вытекания неполюжителен (обычно отрицателен).

b. Вычислительные граничные условия в точке вытекания: полудискретный случай

Теперь введем одномерную сетку в пространстве, как показано на рис.2. Для простоты допустим, что расстояние между узлами сетки d является константой. Целое число i используется для обозначения узла сетки так, что $i = I$ обозначает точку вытекания.

Если использовать центрированную конечную разность второго порядка для дискретизации величины $\partial q / \partial x$ во внутренних узлах сетки, то полу-



чим полудискретное уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2d} = 0 \quad (9)$$

для $i = \dots, I-2, I-1$.

Рис. 2. Одномерная сетка. Точка истока показана открытым кружком

Так как уравнение (9) при $i = I-1$ включает в себе q_I , то для расчета $\frac{\partial q_{I-1}}{\partial t}$ необходимо условие для q_I . Такое условие не требуется в непрерыв-

ном случае и, поэтому, его можно назвать *вычислительным граничным условием*.

Рассмотрим решение *нормальной моды* для уравнения (9) в виде

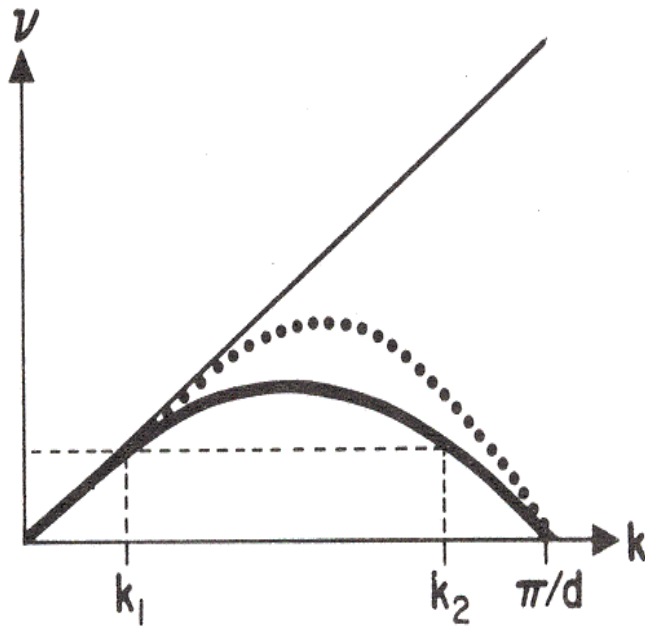
$$q_i = \operatorname{Re}(\tilde{q} e^{\bar{i}(k_i d - vt)}), \quad (10)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Подставляя (10) в уравнение (9), находим

$$v = \frac{U}{d} \sin(kd). \quad (11)$$

В пределе, при $kd \rightarrow 0$, соотношение (11) дает истинное решение

$$v = kU. \quad (12)$$



На рис. 3 тонкая линия представляет решение (12) для зафиксированного U , а толстая линия представляет решение (11) для того же значения U и зафиксированного значения межсетевого расстояния d (о пунктирной линии речь будет идти в разделе d). Из рис. 3 можно видеть, что решение (11) дает одно и то же значение v при двух значениях волновых чисел k_1 и k_2 , для которых выполняются условия:

Рис. 3. Частоты для непрерывного и полудискретного случаев

$$k_1 \leq k_2 \quad \text{и} \quad k_1 + k_2 = \pi/d. \quad (13)$$

Так как при $v \rightarrow 0$ необходимо, в силу (12), $k_1 \rightarrow 0$, то из (13) следует, что $k_2 \rightarrow \pi/d$. Следуя *Matsuno* (1966), будем называть моду решения с волновым числом k_2 *вычислительной модой*. Подчеркнем, что существование этой вычислительной является следствием использования многоточечной, пространственно-разностной схемы. В этом смысле эту моду следует отличать от вычислительной моды, возникающей за счет использования многоуровневой разностной схемы по времени, например, схемы чехарды, которая также дает более чем одно решение для v при зафиксированном значении k .

Из анализа рис. 3 ясно, что мода с волновым числом k_1 имеет положительную групповую скорость, как и должно быть для истинного решения, тогда мода с k_2 имеет отрицательную групповую скорость. Поэтому, опять же

следуя *Matsuno* (1966), будем рассматривать первую моду в качестве собственного волнового приближения (случайная волна, достигающая точки истока), а вторую моду – как ложную, отраженную волну в этой точке истока. Сумму этих двух волн можно записать как

$$q_i = \text{Re} \left[\left(e^{\tilde{i} k_1 d} + r (-1)^i e^{\tilde{i} k_2 d} \right) e^{-\tilde{i} v t} \right]. \quad (14)$$

Здесь амплитуда случайной волны принята равной единице и использовано соотношение (13). Множитель r представляет собой (комплексную) амплитуду отраженной волны и тогда $|r|$ – скорость отражения. Отметим, что когда $k_1 d$ мало, то вычислительная мода изменяет свой знак от одной точки сетки к другой.

Сейчас мы рассмотрим следующие четыре вычислительные граничные условия:

$$\text{I.} \quad q_I = 0, \quad (\text{i}) \quad (15)$$

$$\text{II.} \quad q_I = q_{I-1}, \quad (\text{ii}) \quad (16)$$

$$\text{III.} \quad q_I = 2q_{I-1} - q_{I-2}, \quad (\text{iii}) \quad (17)$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\partial q_I}{\partial t} = -U \frac{q_I - q_{I-1}}{d}. \quad (\text{iv}) \quad (18)$$

Условие (15) представляет собой однородную часть переопределенного условия $q_I = g(t)$, где $g(t)$ – заданная функция от t . Условия (16) и (17) экстраполяции решения первого и второго порядка. Если подставить (17) в (9) при $i = I-1$, то получим

$$\frac{\partial q_{I-1}}{\partial t} = -U \frac{q_{I-1} - q_{I-2}}{d}. \quad (19)$$

Таким образом, условия (17) и (18) эквивалентны в случае, если рассматривать U как константу. Единственным различием между ними является то, что в этих случаях используются разные узлы, в которых применяется нецентрированная направленная вперед конечная разность для $\frac{\partial q}{\partial x}$.

Подставляя решение (14) в граничные условия (15) – (18), получим

$$|r| = \begin{cases} 1 & \text{при условии (I),} \\ \text{tg} \left(k_1 d / 2 \right) & \text{при условии (II),} \\ \text{tg}^2 \left(k_1 d / 2 \right) & \text{при условиях (III) и (IV)} \end{cases} \quad (20)$$

На рис. 4 представлены значения $|r|$, заданные решением (20) для каждого условия¹. Из анализа решений видно, что условие (15) дает полное отражение.

¹ Отметим, что из определения k_1 следует, что $k_1 d \leq \pi/2$

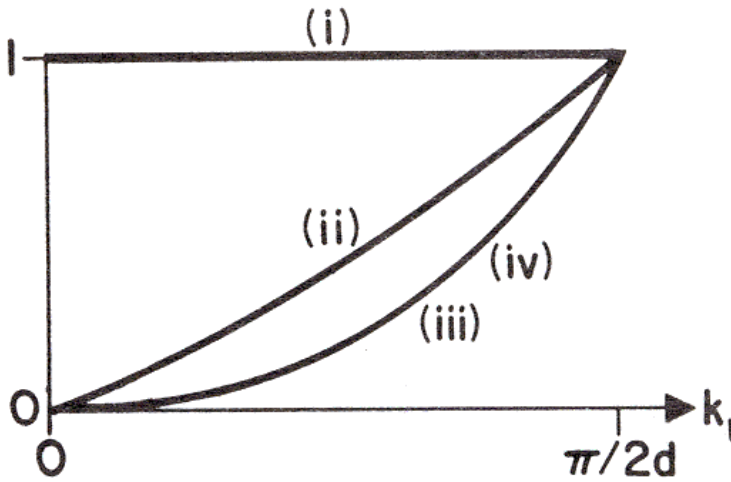
С другой стороны, условия (17) и (18) приводят к сравнительно малым скоростям отражения при малых значениях $k_1 d$. Когда же $k_1 d$ близко к $\pi/2$ (т.е. когда длина волны близка к $4d$), то $|r|$ близко к единице даже при таких граничных условиях. Но, вероятно, в практических приложениях это не столь существенно, т.к. групповая скорость мала.

Для дальнейшего удобства перепишем соотношение (9) в следующем виде

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\frac{1}{d} [U(q_i + q_{i+1})/2 - U(q_{i-1} + q_i)/2]. \quad (21)$$

Умножая (9) на $2q_i$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} q_i^2 = -\frac{1}{d} [U q_i q_{i+1} - U q_{i-1} q_i]. \quad (22)$$



Это конечно-разностный аналог соотношения (4). Первый и второй члены в круглых скобках можно трактовать как поток q^2 в точках $i+1/2$ и $i-1/2$, соответственно.

Рис. 4. Скорость отражения как функция k_1

Если q_i и q_{i+1} имеют один знак то поток $U q_i q_{i+1}$ является положительным, как и должно быть. Однако, если q_i и q_{i+1} имеют разные знаки, то поток будет отрицательным. Это соответствует полученному выше результату, что групповая скорость коротких волн направлена против потока. Кроме того, из соотношения (9), примененного к точкам i и $i-1$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta q)_{i-1/2}^2 = -\frac{1}{d} [U(\delta q)_{i-1/2} (\delta q)_{i+1/2} - U(\delta q)_{i-3/2} (\delta q)_{i-1/2}], \quad (23)$$

где $(\delta q)_{i-1/2} \equiv (q_i - q_{i-1})/d \quad (24)$

Уравнение (23) является конечно-разностным аналогом соотношения (5). Первый и второй члены в круглых скобках можно трактовать как поток $(\delta q)^2$ в точках i и $i-1$, соответственно. Опять поток включает произведение

(δq) в соседних (полуцелых) точках сетки и, следовательно, этот поток может быть отрицательным.

Сравним теперь условия (15) - (17) с точки зрения соотношений (7) и (8). Умножая (22) и (23) на d суммируя по всем точкам $i \leq I-1$, мы получаем конечно-разностные аналоги (7) и (8). Для $(Uq^2)_{x=x}$ и $(Uq_x^2)_{x=x}$ мы имеем, соответственно, $Uq_{I-1}q_I$ и $U(\delta q)_{I-3/2}(\delta q)_{I-1/2}$. Рассмотрим теперь средние по времени по периоду $\frac{2\pi}{v}$ (обозначение $\langle \quad \rangle$) для этих потоков. Когда решение нормальной моды в форме (14) устанавливается вблизи точек истока, мы имеем соотношения

$$\langle q_{I-2}q_{I-1} \rangle < \langle q_{I-2}^2 \rangle = \langle q_{I-1}^2 \rangle. \quad (25)$$

Используя соотношение (25) там, где это необходимо, мы получаем для условий (15) - (17)

	$\langle q_{I-2}q_{I-1} \rangle$	$\langle (\delta q)_{I-3/2}(\delta q)_{I-1/2} \rangle$
Условие (15)	0	<0
Условие (16)	>0	0
Условие (17)	>0	>0

С граничным условием (15) поток q^2 блокирован на границе и существует ложный поток величины q^2 внутрь области расчетов. С граничным условием (16) поток q^2 из области расчетов, однако заблокирован поток $(\delta q)^2$. При условии (17) потоки обеих величин q^2 и $(\delta q)^2$ направлены из области расчетов.

Можно ожидать, что полученные свойства условия (17) будут справедливы и для условия (18). Прежде чем показать это отметим, что условие (18) эквивалентно

$$\frac{\partial q_I}{\partial t} = -\frac{1}{d/2} [Uq_I - U(q_I + q_{I-1})/2]. \quad (26)$$

Второй член в круглых скобках можно рассматривать как поток q^2 в точке $I-1/2$. Тогда первый член представляет собой поток q^2 в точке I , причем этот поток неотрицателен (обычно положителен). Кроме того, из (18) и (9) для точки $i = I-1$ мы можем получить

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta q)_{I-1/2}^2 = -\frac{1}{d} [U(\delta q)_{I-1/2}(\delta q)_{I+1/2} - U(\delta q)_{I-3/2}(\delta q)_{I-1/2}]. \quad (27)$$

Второй член в круглых скобках уже трактовался нами как поток $(\delta q)^2$ теперь уже в точке $I-1$. Тогда первый член в круглых скобках представляет

собой поток $(\delta q)^2$ в точке I, причем он не центрирован² и неотрицателен (обычно положителен).

с. Вычислительное граничное условие в точке истока: полностью дискретный случай

Теперь рассмотрим проблемы с разностным аналогом временной производной. Будем использовать схему чехарды для уравнения (9) во внутренних точках области расчета ($i=2, \dots, I-2, I-1$). Тогда получим

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\Delta t} = -U \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2d}. \quad (29)$$

Здесь Δt - шаг по времени; n - целое число, указывающее временной уровень. Непосредственное использование условий (15) - (17) дает

$$\text{I.} \quad q_1^n = 0, \quad (30)$$

$$\text{II.} \quad q_i^n = q_{i-1}^n, \quad (31)$$

$$\text{III.} \quad q_1^n = 2q_{i-1}^n - q_{i-2}^n, \quad (32)$$

Nitta (1962) с помощью численных экспериментов влияние различных вычислительных граничных условий в точке истока, включая те, что приведены в (30) - (32). Его результаты согласуются с аргументами, представленными выше в разделе (b), - большие амплитуды вычислительной моды при использовании условия (30) и малые амплитуды при использовании условия (32).

При выборе граничного условия в точке истока следует также рассмотреть проблему устойчивости. *Platzman* (1954) рассмотрел устойчивость решений нормальной моды для уравнения (29) с граничным условием на выходе из области расчета в виде $q = 0$ и для каждого из граничных условий в точке истока в виде (30)-(32). Он показал, что из этих трех условий только условие (30) является устойчивым. Следует отметить, что на практике, однако, никаких преимуществ в "стабилизации" дискретной схемы вследствие использования переопределенного условия (30) не получается. Так как само решение может быть сильно загрязнено вычислительной модой.

Для того, чтобы разобраться в том, что обнаружил *Platzman* при изучении неустойчивости решения с условиями (31) и (32), давайте вспомним, что в соотношении (7) вклад потока в точке истока обычно отрицателен. Это приводит к тому, что пространственный интеграл от q^2 по рассматриваемой области дает подавляющий эффект. В полудискретном уравнении (9) этот эффект исчезает при использовании условия (15) и, в то же время, остается с условиями (16) и (17).

Хорошо известно, что схема чехарды является неустойчивой для физически подавляющей системы или если существует подавляющая собственная мода. Вероятно, в нашей задаче при использовании схемы чехарды более хо-

² Заметим, что d - расстояние между точками $I-1$ и I .

рошее условие в точке истока будет для полудискретной системы, нежели для полностью дискретной системы, когда это условие более неустойчиво. Если данная интерполяция является корректной, то нетрудно исключить эту неустойчивость. Например, с условием (17) полудискретное уравнение в точке $i = I-1$ задано соотношением (19). Член $-(U/d)q_{I-1}$ в правой части данного соотношения представляет собой подавляющий эффект. В дальнейших выкладках мы формально заменяем (32) на

$$q_i^n = 2q_{i-1}^{(n)} - q_{i-2}^n, \quad (33)$$

где $q_{i-1}^{(n)}$ - оценка q_{i-1} на временном уровне n , которую еще необходимо определить. Подставляя соотношение (33) у (29) для точки $i = I-1$, мы получаем

$$\frac{q_{I-1}^{n+1} - q_{I-1}^{n-1}}{2\Delta t} = -U \frac{q_{I-1}^{(n)} - q_{I-2}^n}{d}. \quad (34)$$

Когда мы используем соотношение (32) $q_{i-1}^{(n)} = q_{i-1}^n$. Это означает, в (19) для подавляющего члена $-(U/d)q_{i-1}$ используется неустойчивая схема чехарды.

Имеется несколько вариантов выбора $q_{i-1}^{(n)}$, некоторые из них приведены ниже.

$$q_{i-1}^{(n)} = \frac{1}{2}(q_{i-1}^{n+1} + q_{i-1}^{n-1}), \quad (35)$$

$$q_{i-1}^{(n)} = q_{i-1}^{n-1} + \frac{1}{2}(q_{i-2}^n - q_{i-2}^{n-2}), \quad (36)$$

$$q_{i-1}^{(n)} = \frac{1}{2}(q_{i-1}^n + q_{i-1}^{n-1}) + \frac{1}{2}(q_{i-2}^n + q_{i-2}^{n-1}). \quad (37)$$

В соответствии с соотношениями (35)-(37) уравнение (33) принимает вид

$$q_i^n = q_{i-1}^{n+1} + q_{i-1}^{n-1} - q_{i-2}^n, \quad (35a)$$

$$q_i^n = 2q_{i-1}^{n-1} - q_{i-2}^{n-2}, \quad (36a)$$

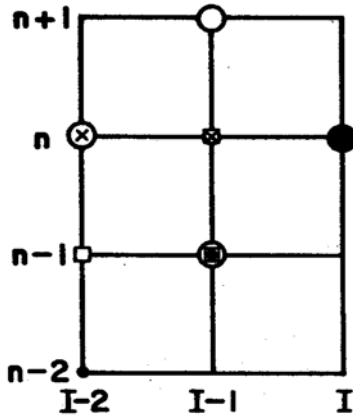
$$q_i^n = q_{i-1}^n + q_{i-1}^{n-1} - q_{i-2}^{n-1}. \quad (37a)$$

Рис. 5 представляет те точки в плоскости $X-t$, которые используются для экстраполяции (32), (35a) - (37a).

Соотношения (35a) и (36a) являются «ромбическими» (*Sundstrom and Elvius, 1979*) и «внутри-назад направленными» (*Gustafsson et al., 1972; Elvius and Sundstrom, 1973; Sundstrom and Elvius, 1979*) экстраполяциями, соответственно. *Sundstrom and Elvius (1979)* представили результаты численного интегрирования с использованием схемы чехарды при различных условиях в точке истока, включая представленные экстраполяции.

Можно показать, что использование схемы (37) в (34) согласуется с использованием

$$\frac{q_{i-1}^{n+1} - q_{i-1}^n}{\Delta t} = -U \frac{q_{i-1}^n - q_{i-2}^n}{d}, \quad (38)$$



что соответствует использованию односторонней направленной вперед схемы первого порядка в точке $i = I-1$.

Дискретные по времени варианты условия (18) можно получить, увеличивая на единицу индексы в (34) - (38). Например, такая схема, соответствующая (38), задается соотношением

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta t} = -U \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{d}. \quad (39)$$

Рис. 5. Узлы, используемые для экстраполяции (32) (узлы с крестами), (35а) (открытые узлы), (36а) (малые темные круги) и (37а) (открытые квадраты) для получения q_i^n в большом темном узле

d. Дальнейшие комментарии

В предыдущих параграфах (b) и (c) мы использовали центрированную конечно-разностную схему второго порядка точности для представления пространственной производной $\frac{\partial q}{\partial x}$. Хотя данная схема используется наиболее часто, имеется масса других возможностей аппроксимации этой производной. Среди них, часто используется центрированная конечно-разностная схема четвертого порядка точности. Если ее применить, то (9) заменяется следующим соотношением

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \left(\frac{4}{3} \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2d} - \frac{1}{3} \frac{q_{i+2} - q_{i-2}}{4d} \right) = 0. \quad (40)$$

Схема более высокого порядка точности, аналогичная (40), использует большее число узлов сетки, чем схема второго порядка точности. Если область расчетов ограничена, то использование большего числа узлов сетки в той стороне области расчетов, в которой наблюдается “вытекание” потока, обычно усложняет формулировку вычислительного граничного условия в точке источника. Более того, вычислительная мода, отраженная на этой границе, при использовании схемы более высокого порядка может распространяться против потока более быстро. Для того, чтобы показать этот эффект для схемы 4^{го} порядка, давайте рассмотрим решение нормальной моды для соотношения (40). Подставляя (10) в (40), мы находим, что соотношение (11) теперь необходимо заменить на

$$v = \frac{U}{d} \sin(kd) \left(\frac{4 - \cos(kd)}{3} \right). \quad (41)$$

Это решение представлено на рис. 3 прерывистой линией. Из рисунка видно, что, как и ожидалось, схема 4^{го} порядка точности дает значительно более точные частоты для малых значений kd , однако для больших значений kd этого эффекта не наблюдается. В частности, частота для $k = \pi/d$ остается равной нулю. Следовательно, для данной частоты все же есть два волновых числа, большее из которых представляет вычислительную моду. Из наклонов прерывистой и жирной непрерывной линий на рис. 3 видно, что вблизи точки $k = \pi/d$ отрицательная групповая скорость больше для схемы 4^{го} порядка, чем для схемы 2^{го} порядка точности.

Распространение вверх по потоку вычислительной моды может наблюдаться в любых пространственно-центрированных конечно-разностных схемах, в которых $\frac{\partial q}{\partial t}$ в каком-либо узле сетки зависит от значения q в узлах сетки, расположенных вниз по потоку. Очевидной возможностью исключить эту проблему в самом зародыше является использование направленной вперед конечно-разностной схемы или полулагажевой схемы во всех узлах сетки. Однако хорошо известно, что направленная вперед схема первого порядка точности является исключительно диссипативной для большинства метеорологических проблем. В этом разделе мы увидели, что используя даже центрированную схему второго порядка точности, можно сделать амплитуду вычислительной моды достаточно малой за счет применения определенного соответствующим образом граничного условия в точке истока.

3. Двумерное уравнение адвекции для бездивергентного потока

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla q, \quad (42)$$

где \vec{V} - двумерная бездивергентная скорость потока и ∇ - двумерный оператор дельта. По определению

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (43)$$

В декартовых координатах (x, y) соотношение (43) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (44)$$

Если движение однородно по оси Y , то и $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Потому, имеем $u = U$ (= const. по оси X). Если, кроме этого, $v = 0$ или q однородно по оси Y , то получаем, что соотношение (42) сводится (1). Таким образом, соотношение (42) является обобщением варианта, рассмотренного в предыдущем разделе.

Подставляя (43) в уравнение (42) и в $2q \times (42)$, мы получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{V} q), \quad (45)$$

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{V} q^2). \quad (46)$$

Эти уравнения являются обобщениями соотношений (3) и (4).

Уравнение (43) однозначно удовлетворяется при

$$\bar{V} = \bar{k} \times \nabla \psi, \quad (47)$$

где \bar{k} - единичный вектор, направленный по нормали к плоскости, в которой происходят рассматриваемые движения воздуха, и ψ - функция тока. Используя функцию ψ и декартовы координаты, мы можем переписать уравнение (42) как

$$\frac{\partial q}{\partial t} = J(q, \psi), \quad (48)$$

где J - оператор якобиан, задаваемый как

$$J(q, \psi) = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (49)$$

Используя якобиан Аракавы второго порядка (Arakawa, 1966) для квадратной сетки с шагом d , полудискретную форму уравнения (48) можно записать как

$$d^2 \frac{\partial}{\partial t} q_{i,j} = -\frac{2}{3} \left(F_{i+1/2,j} \frac{q_{i+1,j} + q_{i,j}}{2} - F_{i-1/2,j} \frac{q_{i,j} + q_{i-1,j}}{2} + G_{i,j+1/2} \frac{q_{i,j+1} + q_{i,j}}{2} - G_{i,j-1/2} \frac{q_{i,j} + q_{i,j-1}}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(F'_{i+1/2,j+1/2} \frac{q_{i+1,j+1} + q_{i,j}}{2} - F'_{i-1/2,j-1/2} \frac{q_{i,j} + q_{i-1,j-1}}{2} + G'_{i-1/2,j+1/2} \frac{q_{i-1,j+1} + q_{i,j}}{2} - G'_{i+1/2,j-1/2} \frac{q_{i,j} + q_{i+1,j-1}}{2} \right) \quad (50)$$

где

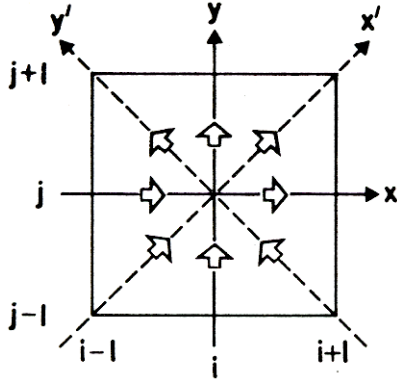
$$F_{i+1/2,j} \equiv \frac{1}{4} (\psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j+1}), \quad (51)$$

$$G_{i,j+1/2} \equiv \frac{1}{4} (\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i-1,j+1}), \quad (52)$$

$$F'_{i+1/2,j+1/2} \equiv \frac{1}{2} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}), \quad (53)$$

$$G'_{i+1/2,j+1/2} \equiv \frac{1}{2} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}). \quad (54)$$

Уравнение (50) соответствует форме (45) и является обобщением соотношения (21) для двумерного случая. Члены данного уравнения, включающие F , G , F' и G' , представляют собой потоки субстанции q в направлениях x , y , x' и y' , представленных на рис. 6, соответственно.



Из определений F , G , F' и G' , приведенных выше, мы видим, что

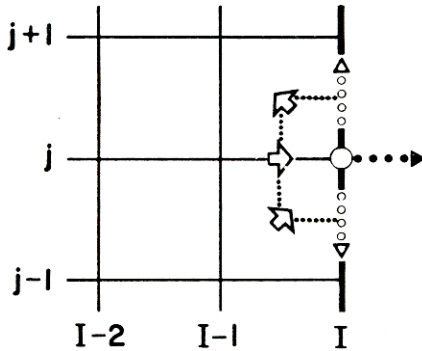
$$F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + G_{i,j+1/2} - G_{i,j-1/2} = 0, \quad (55)$$

$$F'_{i+1/2,j+1/2} - F'_{i-1/2,j-1/2} + G'_{i-1/2,j+1/2} - G'_{i+1/2,j-1/2} = 0. \quad (56)$$

Умножая (50) на $2q_{i,j}$ и используя (55) и (56), мы получим уравнение (57), которое является обобщением (22).

Рис. 6. Потоки, появляющиеся в конечно-разностном уравнении адвекции (50)

$$\begin{aligned} d^2 \frac{\partial}{\partial t} q_{i,j}^2 = & -\frac{2}{3} (F_{i+1/2,j} q_{i+1,j} q_{i,j} - F_{i-1/2,j} q_{i-1,j} q_{i,j} + G_{i,j+1/2} q_{i,j+1} q_{i,j} - G_{i,j-1/2} q_{i,j-1} q_{i,j}) - \\ & -\frac{1}{3} (F'_{i+1/2,j+1/2} q_{i+1,j+1} q_{i,j} - F'_{i-1/2,j-1/2} q_{i-1,j-1} q_{i,j} + G'_{i-1/2,j+1/2} q_{i-1,j+1} q_{i,j} - G'_{i+1/2,j-1/2} q_{i+1,j-1} q_{i,j}) \end{aligned} \quad (57)$$



Пусть на рис. 7 толстая линия $i=I$ является границей области расчетов. Допустим, что узел сетки (I, j) , представленная на рисунке открытым кружком, является точкой истока, для которой $\psi_{I,j-1} - \psi_{I,j+1} > 0$. Здесь мы следуем подходу, при котором $q_{I,j}$ прогностически определена согласно условия (iv) в § 2b. Сначала мы рассмотрим баланс величины q для области, представленной точкой (I, j) . Эта область есть площадь, ограниченная с одной

Рис. 7. Смотри текст для пояснений.

стороны границей, а с другой стороны линией, обозначенной маленькими точками на рис. 7. Используя соотношение (50) для для точки $i=I-1$, получим уравнение баланса

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} q_{I,j} = & -\frac{2}{3} F_{I-1/2,j} \frac{q_{I,j} + q_{I-1,j}}{2} + \frac{1}{3} \left(F'_{I-1/2,j-1/2} \frac{q_{I,j} + q_{I-1,j-1}}{2} - G'_{i-1/2,j+1/2} \frac{q_{I-1,j+1} + q_{I,j}}{2} \right) - \\ & - \tilde{G}_{j+1/2} \frac{q_{I,j} + q_{I,j+1}}{2} + \tilde{G}_{j-1/2} \frac{q_{I,j} + q_{I,j-1}}{2} - \tilde{F}_j q_{I,j}, \end{aligned} \quad (58)$$

которое является обобщением соотношения (26). В левой части появился множитель $d^2/2$, поэтому разумно будет предположить, что граничные точки представляют только одну половину области, представленную внутренними

точками. Члены уравнения, включающие F , F' и G' , являются потоками субстанции q из или к узлам сетки $(I-1, j)$, $(I-1, j-1)$ и $(I-1, j+1)$, соответственно, как это показано двойными стрелками. Члены, включающие \tilde{G} , вид которой еще предстоит определить, представляют собой потоки q вдоль границы, как это показано стрелками с пустыми кружками. Член, содержащий величину \tilde{F} , чей вид также еще не определен, является потоком субстанции q через границу, как это показано стрелкой с заштрихованными кружками.

Вид величин F , F' и G' представлен в соотношениях (51), (52) и (54). Для величины \tilde{G} мы выберем следующую нецентрированную форму

$$\tilde{G}_{j+1/2} = \alpha(\psi_{1,j} + \psi_{1,j+1} - \psi_{1-1,j} - \psi_{1-1,j+1}), \quad (59)$$

где α – неопределенная положительная константа.

Для величины \tilde{F} выбираем такую форму

$$\tilde{F}_j = \beta(\psi_{1,j-1} - \psi_{1,j+1}) \quad (60)$$

где β – другая неопределенная положительная константа. Отметим, что $\tilde{F}_j > 0$ для границы, через которую происходит вытекание.

Так как правая часть соотношения (58) должна быть равной нулю при $q = const.$, то мы должны потребовать, чтобы

$$\frac{2}{3}F_{1-1/2,j} + \frac{1}{3}(F'_{1-1/2,j-1/2} - G'_{1-1/2,j+1/2}) - \tilde{G}_{j+1/2} + \tilde{G}_{j-1/2} - \tilde{F}_j = 0. \quad (61)$$

Подставляя (51), (53), (54), (59) и (60), мы находим, что (61) однозначно удовлетворяется если и только если

$$\alpha = 1/6 \quad \text{и} \quad \beta = 1/2. \quad (62)$$

Теперь рассмотрим уравнение баланса для q^2 . Умножая уравнение (58) на $2q_{1,j}$ и используя (61), мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} q^2_{1,j} = & -\frac{2}{3}F_{1-1/2,j} q_{1,j} q_{1-1,j} + \frac{1}{3}(F'_{1-1/2,j-1/2} q_{1,j} q_{1-1,j-1} - G'_{1-1/2,j+1/2} q_{1,j} q_{1-1,j+1}) - \\ & - \tilde{G}_{j+1/2} q_{1,j} q_{1,j+1} + \tilde{G}_{j-1/2} q_{1,j} q_{1,j-1} - \tilde{F}_j q^2_{1,j} \end{aligned} \quad (63)$$

Первые три члена в правой части соотношения (63) аннулируются, если берется сумма (63) и (57) для внутренних точек сетки. Два члена, включающие \tilde{G} взаимно уничтожаются, когда берется сумма (63) по j вдоль границы. Суммарный эффект по всей области, поэтому, определяется членом, включающими \tilde{F} , который является положительным (обычно отрицательным) для границы, через которую происходит исток.

Если схема чехарды используется для внутренних узлов, удобно использовать эту же схему и для узлов на границе. Однако, из аргументов, приведенных в параграфе 2с, отметим тот, что последний член в (58) на времен-

ном уровне n не должен основываться на $q_{i,j}^n$, а на $q_{i,j}^{(n)}$, которые получены из (35), (36) или (37) с индексом $I-1$, замещенным на I, j и $I-2$ или $I-1, j$.

4. Уравнения мелкой воды

В этом разделе мы рассмотрим проблему граничных условий для уравнений мелкой воды. Для простоты изложения будем игнорировать силу Кориолиса в большинстве приложений, концентрируя свое внимание на горизонтальных масштабах, значительно меньших чем радиус деформации.

а. Линеаризованные одномерные уравнения мелкой воды в состоянии покоя: непрерывный вариант

Сначала рассмотрим наиболее простой вариант, в котором одномерные уравнения мелкой воды линеаризованы с помощью метода малых возмущений по отношению к основному состоянию покоя. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (64)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (65)$$

где H – высота свободной поверхности для основного состояния, и h – отклонение высоты поверхности от значения H в возмущенном состоянии.

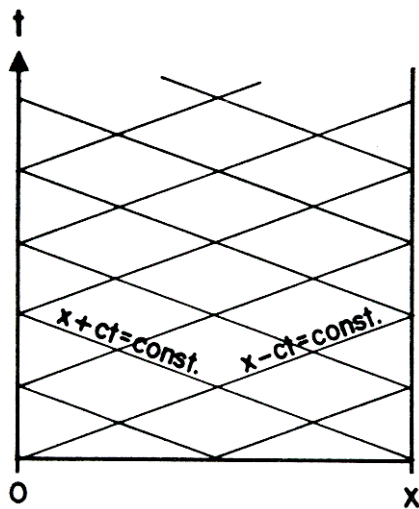
Уравнения (64) и (65) описывают поверхностные гравитационные волны с фазовой скоростью $\pm c$, где

$$c \equiv \sqrt{gH}. \quad (66)$$

Из уравнений (64) и (65) можно вывести характеристические уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (u + \sqrt{g/H} h) + c \frac{\partial}{\partial x} (u + \sqrt{g/H} h) = 0, \quad (67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u - \sqrt{g/H} h) + c \frac{\partial}{\partial x} (u - \sqrt{g/H} h) = 0, \quad (68)$$



которые являются аналогами уравнения адвекции (1). Из них видно, что решение остается постоянной величиной, равной $u + \sqrt{g/H} h$ вдоль линий $x - ct$ и равной $u - \sqrt{g/H} h$ вдоль линий $x + ct$.

Рис.8. Характеристики уравнений (64) и (65)

Два семейства линий (характеристик) для ограниченной области $0 \leq x \leq X$ представлены на рис. 8. Исходя из аргументов, приведенных ранее для уравнения адвекции (1), мы видим, что

- (i) $u + \sqrt{g/H} h$ не должно быть задано при $x = X$;
- (ii) $u - \sqrt{g/H} h$ не должно быть задано при $x = 0$.

Для волны с фазовой скоростью c имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (69)$$

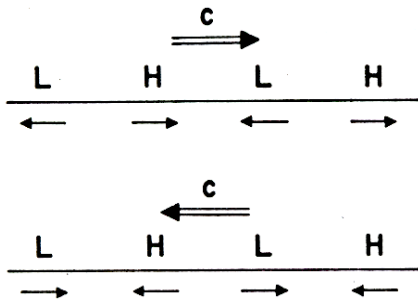
$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (70)$$

Уравнения (69) и (70) совместимы с соотношением (68) если и только если $u - \sqrt{g/H} h$ является константой. Таким образом, для волны с фазовой скоростью c получим

$$u - \sqrt{g/H} h = 0. \quad (71)$$

Аналогично, для волны с фазовой скоростью $-c$ имеем

$$u + \sqrt{g/H} h = 0. \quad (72)$$



На рис. 9. представлена фазовая взаимосвязь между h и u для двух этих волн. Здесь Н и L показывают максимальное и минимальное значения h , маленькие стрелки указывают направление скорости u . Из соотношений (71) и (72) ясно, что гравитационные волны, распространяющиеся внутрь области на границах могут быть исключены граничными условиями

Рис. 9. См. текст для пояснений

$$u - \sqrt{g/H} h = 0 \quad \text{при } x = X, \quad (73)$$

$$u + \sqrt{g/H} h = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (74)$$

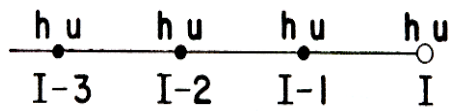
Теперь исследуем приведенные выше граничные условия, используя энергетическое уравнение. Умножая уравнение (64) на величину Hu и уравнение (65) на gh и суммируя полученные результаты, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (Hu^2 + gh^2) + gH \frac{\partial}{\partial x} u h = 0. \quad (75)$$

Если полученное уравнение умножить на плотность ρ , то члены $H \frac{u^2}{2}$ и $g \frac{h^2}{2}$ представляют собой кинетическую и доступную потенциальную энергии на единицу горизонтальной площади, соответственно; $gH \times uh$ представляет собой поток энергии в направлении оси X , помноженный на работу, выполняемую за счет пульсаций давления. (Здесь мы пренебрегаем тройными произведениями пульсационных величин). Если используются граничные условия (73) и (74), то $uh \geq 0$ при $x = X$ и $uh \leq 0$ при $x = 0$, и таким образом нет источника энергии внутрь области на обеих границах.

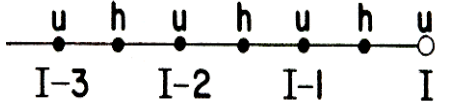
б. Линеаризованные одномерные уравнения мелкой воды в состоянии покоя: полудискретный случай

Теперь используем одномерную сетку в пространстве. В соответствии с введенными в первой лекции сетками А, В и С, рассмотрим два способа распределения переменных в узлах сетки, как это показано на рис. 10.



Для внутренних точек сетки А использование центрированной пространственной разности второго порядка в (64) и (65) дает

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + g \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2d} = 0, \quad (76)$$



$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + H \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2d} = 0. \quad (77)$$

Рис. 10. Одномерные сетки, соответствующие сеткам А, В и С. Открытый кружок указывает на границу.

Рассмотрим решение нормальной моды соотношений (76) и (77) в виде

$$u_i = \text{Re}(\tilde{u} e^{\tilde{i}(k i d - v t)}), \quad (78)$$

$$h_i = \text{Re}(\tilde{h} e^{\tilde{i}(k i d - v t)}). \quad (79)$$

Подставляя соотношения (78) и (79) в уравнения (76) и (77), получаем

$$-v \tilde{u} + \frac{g}{d} \sin(kd) \tilde{h} = 0, \quad (80)$$

$$\frac{H}{d} \sin(kd) \tilde{u} - v \tilde{h} = 0. \quad (81)$$

Для нетривиальных решений уравнений (80) и (81) имеем

$$v = \pm \frac{c}{d} \sin(kd). \quad (82)$$

В пределе при $kd \rightarrow 0$ соотношение (82) дает истинное решение $v = \pm kc$. Уравнение (82) является аналогом соотношения (11), единственным различием является то, что величина U в (11) замещена в (82) на $\pm c$.

При заданном значении v , которое может быть только положительным, соотношение (82) может быть удовлетворено при четырех значениях волнового числа:

$k_1, -k_1, k_2$ и $-k_2$, для которых выполняются условия $0 < k_1 \leq k_2$ и, как в (13)

$$k_1 + k_2 = \pi/d. \quad (83)$$

Рис. 11 представляет эти четыре волновых числа. Моды с волновыми числами k_1 и k_2 имеют положительную фазовую скорость, а моды с волновыми числами $-k_1$ и $-k_2$ имеют отрицательную фазовую скорость. Моды с волновыми числами k_1 и $-k_2$ имеют положительную групповую скорость, а моды с волновыми числами k_2 и $-k_1$ имеют отрицательную групповую скорость. Моды с волновыми числами k_2 и $-k_2$ можно рассматривать как вычислительные моды, так как их фазовая и групповая скорости направлены в противоположные стороны.

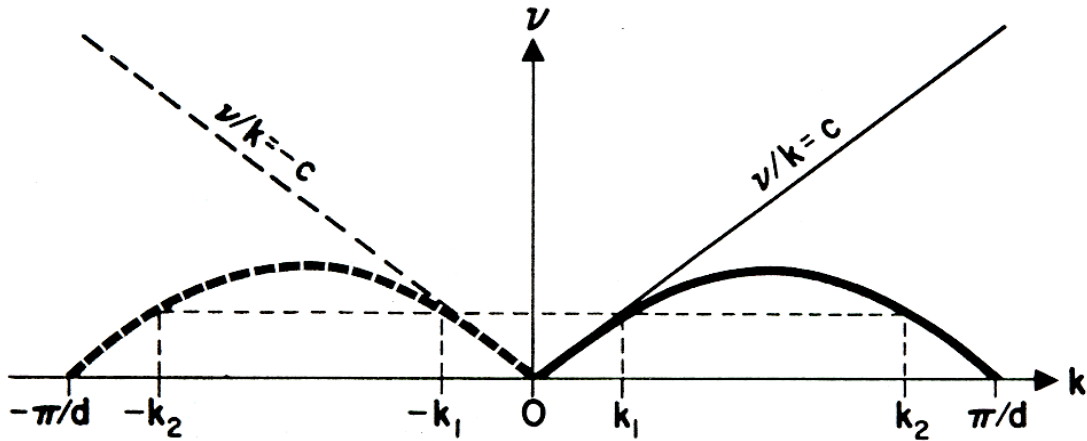


Рис. 11. Четыре возможных значения волновых чисел для сетки А для заданной положительной частоты v .

Рассмотрим границу при $x = X$ ($i = I$ на рис. 10) и пусть k – волновое число волны, которая попадает на эту границу (*incident wave*), равное либо k_1 , либо $-k_2$. Эта волна может быть отражена частично как волна с волновым числом $-k$ и частично, как волна с волновым числом $-k + \pi/d$. Сумму этих волн можно записать в виде

$$u_i = \text{Re} \left[\left(e^{iikd} + \text{Re}^{-iikd} + r(-1)^i e^{-iikd} \right) e^{-ivt} \right], \quad (84)$$

$$\sqrt{g/H} h_i = \pm \text{Re} \left[\left(e^{iikd} + \text{Re}^{-iikd} + r(-1)^i e^{-iikd} \right) e^{-ivt} \right]. \quad (85)$$

Здесь принято, что \tilde{h} падающей волны равно единице, и использованы соотношения (80) или (81), (82) и (66). Знак “плюс” в (85) относится к волне с $k = k_1$ и знак “минус” относится к волне с $k = -k_2$.

Уравнения (76) и (77) требуют два граничных условия для каждой границы. Предположим, что мы использовали соотношение (73) в качестве одного из граничных условий при $i = I$. Тогда

$$u_1 = \sqrt{g/H} h_1. \quad (86)$$

Применяя соотношения (84) и (85) к точке границы $i = I$ и используя (86), мы находим

$$R = 0 \quad \text{для } k = k_1; \quad (87)$$

$$|r| = 1 \quad \text{для } k = -k_2. \quad (88)$$

Результат (87) ожидался, исходя из аргументов, приведенных для непрерывного случая. Результат (88) также неудивителен, т.к. условие представляет собой структуру волны с положительной фазовой скоростью, в то время как падающая волна с волновым числом $k = -k_2$ имеет отрицательную фазовую скорость.

Мы можем сформулировать второе граничное условие, используя аналогию между уравнениями (67) и (1). Если придерживаться подхода условия (iv) в параграфе 2b, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_1 + \sqrt{g/H} h_1) = -c \frac{(u_1 + \sqrt{g/H} h_1) - (u_{1-1} + \sqrt{g/H} h_{1-1})}{d}. \quad (89)$$

Используя в (89) соотношение (86), мы имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{g}{d} \left(h_1 - \frac{\sqrt{H/g} u_{1-1} + h_{1-1}}{2} \right). \quad (90)$$

Из (84), (85), (90) и (82) находим, что

$$|r| = \text{tg}^2(k d/2) \quad \text{для } k = k_1, \quad (91)$$

$$R = 0 \quad \text{для } k = -k_2. \quad (92)$$

Результат (91) был ожидаем, если вспомнить аналогию с уравнением адвекции. Из (88) и (92) видно, что когда $k = -k_2$ волна полностью отражается от границы с волновым числом $-k_1$. Отметим, что $k_1 < k_2$, поэтому отраженная волна имеет большую длину волны, чем падающая волна.

Рассмотренные выше результаты показывают, что с сеткой А условие (86) удовлетворяется только для длинных падающих волн с волновым числом $|k| < \pi/2d$, но не выполняется для коротких волн с волновыми числами $|k| \geq \pi/2d$. Ситуация решительно меняется при использовании сеток В и С, как это видно из нижеприведенных результатов.

Для внутренних точек сеток В и С использование центрированных пространственных разностей второго порядка точности в соотношениях (64) и (65) дает

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + g \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{d} = 0, \quad (93)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + H \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{d} = 0. \quad (94)$$

В соответствии с (80), (81) и (82) мы вновь получаем

$$-v \tilde{u} + \frac{g}{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \tilde{h} = 0, \quad (95)$$

$$\frac{H}{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \tilde{u} - v \tilde{h} = 0 \quad (96)$$

и
$$v = \pm \frac{c}{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2}\right). \quad (97)$$

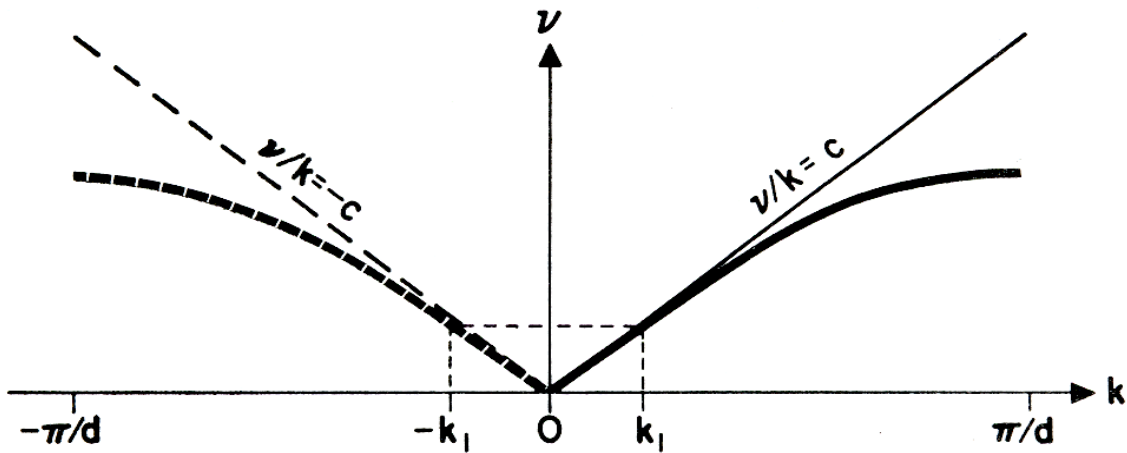


Рис. 12. Две возможных волновых числа при использовании сеток В и С для заданной положительной частоты v .

На рис. 12. представлено соотношение (97) для положительных частот. Сравнивая рисунки 12 и 11, мы видим, что сетки В и С являются более точными в сопоставлении с сеткой А. И что более важно, в данном случае нет вычислительных мод и поэтому имеются только два волновых числа k_1 и $-k_1$ для заданной частоты. В соответствии с (84) и (85) теперь имеем

$$u_i = \text{Re} \left[\left(e^{i k d} + \text{Re}^{-i k d} \right) e^{-i v t} \right], \quad (98)$$

$$\sqrt{g/H} h_{i+1/2} = \text{Re} \left[\left(e^{i \left(i + \frac{1}{2} \right) k d} + \text{Re}^{-i \left(i + \frac{1}{2} \right) k d} \right) e^{-i v t} \right]. \quad (99)$$

Уравнения (93) и (94) требуют только одного граничного условия для каждой границы, как и для непрерывного случая. Допустим, что мы используем соотношение (73) в качестве граничного условия в точке $i = I$. Рассмотрим случай, в котором граница является одной из точек U , как это показано на рис. 10. Для применения (73) в данной шахматной сетке сначала определим $h_{i+1/2}$ с помощью

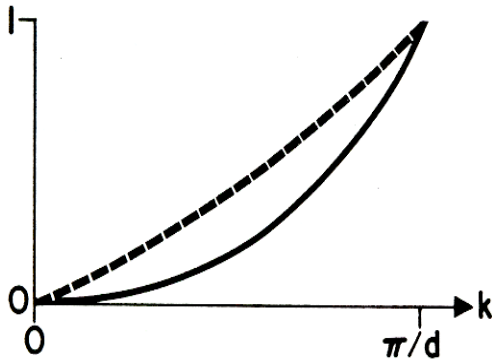
$$u_i = \sqrt{g/H} (h_{i-1/2} + h_{i+1/2})/2. \quad (100)$$

Формально используя соотношение (93) для точки $i = I$ используя выражение для $h_{i+1/2}$, полученное выше, мы имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{g}{d/2} (\sqrt{H/g} u_i + h_{i-1/2}). \quad (101)$$

Из (98), (99), (101) и (97) мы находим, что

$$|R| = \operatorname{tg} \left(\frac{k d}{4} \right). \quad (102)$$



На рис. 13 сплошная линия представляет изменения значений $|R|$. (Отметим, что здесь $0 < k \leq \pi/d$). Когда $k d$ близко к значению π (т.е. когда длина волны близка к $2d$), то $|R|$ близок к единице. Однако, вероятно на практике это не так серьезно, т.к. их совместная (*associated*) групповая скорость мала.

Рис. 13. Скорости отражения для сеток В и С. Сплошная линия относится к (102), а пунктирная - к (113).

Условие (74) для другой границы ($i = 0$ на рис. 14) может быть включено аналогичным образом. Для этого сначала определим $h_{-1/2}$ с помощью соотношения

В,С $\begin{array}{ccccccc} u & h & u & h & u & h & u \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 \end{array}$ $u_0 = \sqrt{g/H} (h_{-1/2} + h_{1/2})/2. \quad (103)$

Рис. 14. Одномерная сетка, граничная точка показана открытым кружком

В соответствии с (101) мы получаем

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -\frac{g}{d/2} (\sqrt{H/g} u_0 + h_{1/2}). \quad (104)$$

Мы можем исследовать граничные условия (100) и (103), используя полудискретный вариант энергетического уравнения (75). Умножая (93) на $H u_i$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} H u_i^2 + \frac{gH}{d} (u_i h_{i+1/2} - u_i h_{i-1/2}) = 0. \quad (105)$$

Увеличивая в (105) индекс i на единицу, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} H u_{i+1}^2 + \frac{gH}{d} (u_{i+1} h_{i+3/2} - u_{i+1} h_{i+1/2}) = 0. \quad (106)$$

Умножая теперь (94) на $g h_{i+1/2}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} g h_{i+1/2}^2 + \frac{gH}{d} (u_{i+1} h_{i+1/2} - u_i h_{i+1/2}) = 0. \quad (107)$$

Сложение среднего (105) и (106) с (107) дает в результате

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H}{4} (u_i^2 + u_{i+1}^2) + \frac{1}{2} g h_{i+1/2}^2 \right] = - \frac{gH}{d} \left[u_{i+1} \frac{h_{i+1/2} + h_{i+3/2}}{2} - u_i \frac{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}}{2} \right]. \quad (108)$$

Величина, стоящая под знаком производной по времени, является конечно-разностным аналогом энергии $(H u^2 + g h^2)/2$ в точке $i + 1/2$. Рассмотрим, например, границу $i = I$. Суммируя уравнение (108) по $i \leq I - 1$, мы можем идентифицировать величину $g H u_I \frac{(h_{I-1/2} + h_{I+1/2})}{2}$ как поток энергии на границе $i = I$. Если использовать граничное условие (100), то данная величина является неотрицательной (обычно положительной), так что на этой границе нет потока энергии внутрь области расчета.

До сих пор мы рассматривали граничные условия, которые следовали соотношениям (73) и (74). Эти условия базируются на характеристических уравнениях (67) и (68). Часто применяется и другой подход, состоящий в аппроксимации радиационного условия Зоммерфельда. Для рассматриваемой системы уравнений этот подход означает непосредственное применение соотношения (69) и/или (70) для граничной точки.

Опять рассмотрим границу $i = I$ для сетки А. Условия излучения (радиационные условия) для функций u и h , основанные на односторонней пространственной разности, задаются с помощью

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} = - \frac{c}{d} (u_I - u_{I-1}), \quad (109)$$

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} = - \frac{c}{d} (u_I - u_{I-1}). \quad (110)$$

Подставляя (84) в (109) и (85) в (110) и используя (82), получаем

$$R = 0, \quad (111)$$

$$|r| = \operatorname{tg}^2\left(\frac{k d}{2}\right) \quad \text{для } k = k_1. \quad (112)$$

Здесь, как и прежде, k – волновое число падающей волны. Эти скорости отражения идентичны соотношениям (87) и (91). Однако, условия (109) и (11) не совпадают для $k = -k_2$, для которого фазовая скорость отрицательна (хотя групповая скорость положительна). Находим для этого случая, что $|r| > 1$. Это указывает на неустойчивость.

Как прежде указывалось, при использовании сеток В и С необходимо только одно граничное условие для каждой границы. Рассмотрим (109) как условие на границе $i = I$. Подстановка (89) и использование (97) дает после некоторых преобразований

$$|R| = \operatorname{tg}^2\left(\frac{k d}{4}\right) \quad (113)$$

Прерывистая линия на рис. 13 представляет изменения величины $|R|$, заданные соотношением (113).

До сих пор мы обсуждали полудискретные уравнения, в которых не проводилась дискретизация по временной координате. Как и для уравнения адвекции, не следует использовать здесь схему чехарды, по крайней мере для члена, ответственного за подавление, например такого, как u_1 в (101) и u_0 в (104).

с. Линеаризованные одномерные уравнения мелкой воды с однородным основным потоком.

Теперь добавим влияние такого физического фактора как адвекции, которая появляется в однородном основном потоке. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (114)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (115)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (117)$$

Здесь u и v – составляющие пульсаций скорости по осям X и Y , соответственно. Уравнение (115) полностью не связано с (114) и (116), что означает простой перенос составляющей пульсаций v по потоку со скоростью U . В соответствии с (67) и (68) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (u + \sqrt{g/H} h) + (c + U) \frac{\partial}{\partial x} (u + \sqrt{g/H} h) = 0, \quad (117)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \sqrt{g/H} h) + (c + U) \frac{\partial}{\partial x}(u - \sqrt{g/H} h) = 0, \quad (118)$$

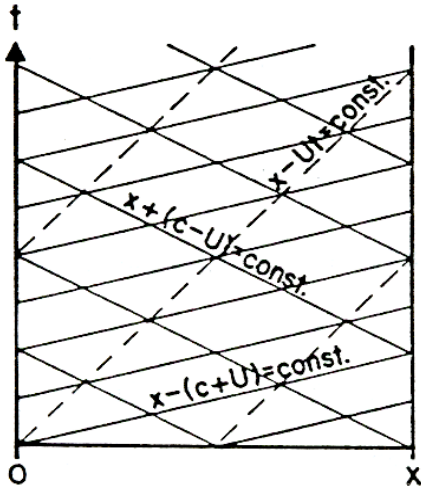


Рис. 15. Характеристики системы уравнений (114), (115) и (116).

Уравнения (115), (117) и (118) показывают, что имеются три группы характеристик для рассматриваемой системы уравнений, как это проиллюстрировано на рис. 15 для $c > U$. Два семейства сплошных линий соответствуют $x - (c + U)t = \text{const.}$ и $x + (c + U)t = \text{const.}$ и пунктирные линии соответствуют $x - Ut = \text{const.}$

Теперь ясно, что уравнения (114)-(116) с $U > 0$ должны удовлетворять следующим требованиям для того, чтобы избежать переопределенных граничных условий:

- при $c > U$
- (i) $u + \sqrt{g/H} h$, v и любая комбинация этих величин не должны задаваться в точке $x = X$;
 - (ii) $u - \sqrt{g/H} h$ не должно задаваться в точке $x = 0$.
- при $c < U$
- (i) $u + \sqrt{g/H} h$, $u - \sqrt{g/H} h$, v и любая комбинация этих величин, включая u и h , не должны задаваться в точке $x = X$.

Эти требования, которые включают знак величины $c - U$, представляют одну из главных трудностей при моделировании атмосферных процессов на ограниченной территории, и эту трудность мы рассмотрим позднее.

Сейчас же допустим, что $c > U$. Следуя рассуждениям, приведенным в § 4b, используя теперь соотношения (117) и (118), мы приходим к выводу, что можно вновь исключить распространение гравитационных волн внутрь области, используя граничные условия (73) и (74). Соответственно, можно показать, что поток энергии $[(Hu^2 + gh^2)/2 + gHuh]$ является неотрицательным при использовании (73) и положительным с (74), так что нет потока энергии внутрь области расчетов на обеих границах.

Для внутренних точек сеток В и С использование центрированных пространственных разностей второго порядка в соотношениях (114) и (116) дает

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2d} + g \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{d} = 0, \quad (119)$$

$$\frac{\partial h_{i+1/2}}{\partial t} + U \frac{h_{i+3/2} - h_{i-1/2}}{2d} + H \frac{u_{i+1} - u_i}{d} = 0. \quad (120)$$

Мы можем показать, что соотношение (97) теперь заменяется на

$$v = \frac{U}{d} \sin(kd) \pm \frac{c}{d/2} \sin\left(\frac{kd}{2}\right). \quad (121)$$

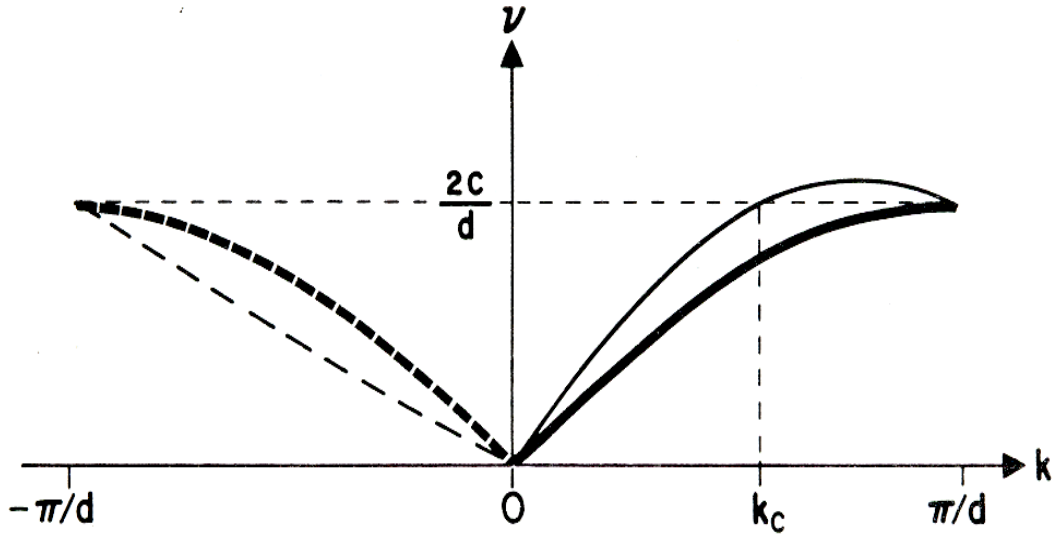


Рис. 16. Соотношение (121) для $U = 0$ (толстые линии) и для $U = c/2$ (тонкие линии)

Рис. 16 представляет графически соотношение (121) для $U = 0$ (толстые сплошная и пунктирная линии) и для $U = c/2$ (тонкие сплошная и пунктирная линии). Из рисунка мы видим, что при $U > 0$ имеются вычислительные моды с волновыми числами, близкими к π/d . (Как и прежде, мы называем вычислительными модами те из них, которые имеют противоположные по знаку фазовую и групповую скорости). Если волновое число падающей на границу волны меньше, чем k_c (см. рис. 16), то отраженная волна в точке $i = I$ это невычислительная (*non-computational*) с отрицательным волновым числом. Но когда волновое число превосходит значение k_c , то отраженная волна – это вычислительная мода с положительным волновым числом. Анализ скоростей отражения с $U \neq 0$ достаточно сложен и поэтому здесь не приводится.

В рассматриваемом случае полудискретное энергетическое уравнение (108) заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H}{4} (u_i^2 + u_{i+1}^2) + \frac{1}{2} g h_{i+1/2}^2 \right] = -\frac{gH}{d} \left[u_{i+1} \frac{h_{i+1/2} + h_{i+3/2}}{2} - u_i \frac{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}}{2} \right] - \frac{U}{d} \left(h \frac{u_i u_{i+1} + u_{i+1} u_{i+2}}{4} - H \frac{u_{i-1} u_i + u_i u_{i+1}}{4} + g \frac{h_{i+1/2} h_{i+3/2}}{2} - g \frac{h_{i-1/2} h_{i+1/2}}{2} \right). \quad (122)$$

Следуя (18) и (101), мы можем использовать

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{U}{d} (u_i - u_{i-1}) - \frac{g}{d/2} \left(\sqrt{H/g} u_i + h_{i-1/2} \right), \quad (123)$$

$$\frac{\partial h_{i-1/2}}{\partial t} = -\frac{U}{d} (h_{i-1/2} - h_{i-3/2}) - \frac{H}{d} (u_i - u_{i-1}). \quad (124)$$

Из соотношения (119) в точке $i = I-1$, уравнений (1223) и (124) мы можем вывести

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H}{4} (u_i^2 + u_{i+1}^2) + \frac{1}{2} g h_{i+1/2}^2 \right] = -\frac{gH}{d} \left[\sqrt{H/g} u_i^2 - u_{i-1} \frac{h_{i-3/2} + h_{i-1/2}}{2} \right] - \\ - \frac{U}{d} \left(H \frac{u_i^2}{2} - H \frac{u_{i-2} u_{i-1} + u_{i-1} u_i}{4} + g h_{i-1/2} (h_{i-1/2} - h_{i-3/2}) - g \frac{h_{i-3/2} h_{i-1/2}}{2} \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Суммируя (122) для всех точек $i \leq I-2$ и (125), мы можем идентифицировать

$$\frac{UH u_i^2}{2} + g h_{i-1/2} (h_{i-1/2} - h_{i-3/2}) + H \sqrt{gH} u_i^2 \quad (126)$$

как поток энергии на границе $i = I$. В соотношении (126) отрицательным может быть только второй член, но из (25) видно, что он положителен при осреднении по времени.

d. Двумерные уравнения мелкой воды

Двумерные уравнения мелкой воды в общем виде имеют следующую форму

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + f \vec{k} \times \vec{V} + g \nabla h = 0, \quad (127)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \vec{V}) + H \nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (128)$$

Здесь f – параметр Кориолиса и, как уже определено выше, h – пульсации высоты свободной поверхности по отношению к её среднему значению H .

В работе *Oliger and Sundstrom* (1978) (смотри также *Sundstrom and Elvius*, 1979) рассмотрено семейство хорошо обусловленных граничных условий для уравнений мелкой воды. Допустим, что u_n и u_\perp являются нормальной (положительное направление - из объема) и тангенциальной составляющей вектора \vec{V} , соответственно на границе. Если скорость гравитационных волн превышает скорость потока, то хорошо обусловленные условия предполагают задание u_\perp и $u_n - 2\sqrt{g(H+h)}$ на наветренной (*inflow*) границе ($u_n < 0$) и задание $u_n - 2\sqrt{g(H+h)}$ на подветренной (*outflow*) границе ($u_n > 0$). Отметим, что

$$u_n - 2\sqrt{g(H+h)} \approx u_n - \sqrt{g/H} h - 2\sqrt{gH}, \quad (129)$$

когда $h \ll H$. Если границы находятся в точках $x=0$ и $x=X$, то при $x=0$ $u_{\perp} = v$, $u_n = -u$ и в точке $x=X$ имеем $u_n = u$. Условия (73) и (74), поэтому, являются особыми случаями задания правой части (129).

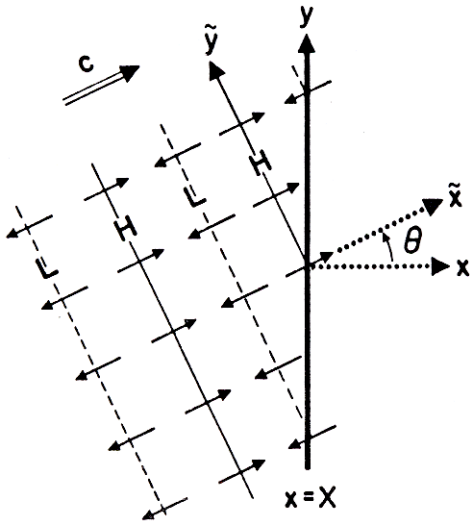


Рис. 17. Структура волны, достигающей границы $x = X$

В двумерном случае одной из сложностей является выбор “наилучшего” среди хорошо обусловленных граничных условий. Для иллюстрации этой проблемы рассмотрим наиболее простой случай линеаризованных уравнений, когда предполагается, что основное состояние – это неподвижная среда. На рис. 17 представлена структура волны, распространяющейся по направлению к границе $x = X$, если $f = 0$. Координата \tilde{x} направлена вдоль направления распространения волны.

Из обсуждения, приведенного в § 4а, видно, что отражение на границе может быть исключено с помощью условия

$$\hat{u} - \sqrt{g/H} h = 0 \quad \text{при } x = X. \quad (130)$$

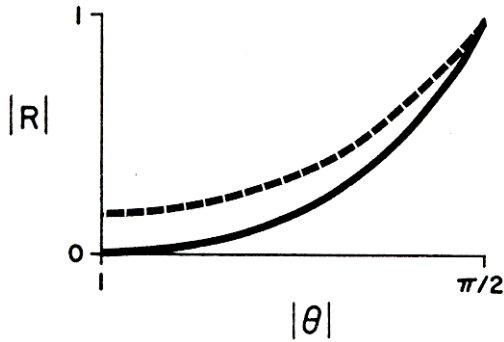
Здесь \hat{u} – составляющая вектора скорости в направлении оси \tilde{x} . Условие (130), т.к. $u = \hat{u} \cdot \cos \theta$, включает угол падения волны θ , который обычно неизвестен.

Если вместо (130) используется условие $u - \sqrt{g/H} h = 0$ при $x = X$, (131) то волна с $\theta \neq 0$ частично отражается.

Если ввести силу Кориолиса, то даже волна с $\theta = 0$ частично отражается при использовании условия (131). Можно показать, что скорость отражения задается как

$$|R| = \frac{(1 + \alpha^2)^{1/2} - \cos \theta}{(1 + \alpha^2)^{1/2} + \cos \theta}, \quad (132)$$

где $\alpha = f/c_k$ и k – двумерное волновое число. Если горизонтальный масштаб, задаваемый через $1/k$, меньше радиуса деформации c_f , тогда $0 < \alpha < 1$. На рис. 18 представлена зависимость скорости отражения от θ для $\alpha = 0$ (сплошная линия) и при $\alpha = 1$ (пунктирная линия). Хотя волна со значениями θ , близкими к $\pi/2$ отражается почти полностью, условие (131) обеспечивает малые скорости отражения при $\theta \sim 0$, для которых нормальная составляющая групповой скорости максимальна.



Для того, чтобы получить меньшие скорости отражения при $\theta \neq 0$, можно попытаться диагностировать значение θ с помощью соотношения $u/v = \operatorname{tg} \theta$. Еще один подход заключается в использовании условия излучения, предложенного *Orlanski* (1976).

Рис 18. Скорость отражения как функция угла падения.

В этом случае используется приближительная фазовая скорость, нормальная к границе, и рассчитанная с помощью дискретных аналогов таких величин, как например, $-(\partial u / \partial t) / (\partial u / \partial x)$.

В любом случае, граничное условие вынуждено становится нелинейным, даже в том случае, когда исходные уравнения являются линейными или приблизительно линейными. Это означает, что данные методы работают только в том случае, если решение определяется одной волной. Используется также и другой подход, состоящий в использовании “псевдохарактеристического метода”, рассмотренного в работе *Chen and Mijakoda* (1974).

Вопрос состоит в том, является ли тангенциальный компонент скорости “наилучшей” величиной, задаваемой на наветренной границе (и экстраполируемой на подветренную границу). В противоположность одномерному варианту, заданному соотношением (115), тангенциальная составляющая не просто переносится на двумерный случай. Для использования другой возможности сначала перепишем (127) в следующем виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (f + \zeta) \vec{k} \times \vec{V} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 + g h \right) = 0, \quad (133)$$

где ζ – завихренность, равная $\vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V}$. Соответствующее уравнение завихренности имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot [(f + \zeta) \vec{V}] = 0. \quad (134)$$

Определим потенциальную завихренность с помощью

$$q = \frac{(f + \zeta)}{(H + h)}. \quad (135)$$

Тогда уравнение (133) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} [(H + h)q] + \nabla \cdot [q(H + h)\vec{V}] = 0. \quad (136)$$

Используя (128) в соотношении (136), получаем $\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q = 0$, (137)

Это означает, что величина q просто переносится по потоку со скоростью V .

Если $\zeta \ll f$ и $h \ll H$, то величину q можно аппроксимировать соотношением

$$q \approx \left(f + \zeta - f \frac{h}{H} \right) / H. \quad (138)$$

Рассмотрим основное состояние потока, при котором q однородно. Если соотношение (137) линеаризовать с помощью метода малых возмущений, то величина

$$q' = \left(\zeta' - f \frac{h'}{H} \right) / H \quad (139)$$

переносится основным потоком. Здесь штрих обозначает отклонения. Так как гравитационные волны не распространяются со скоростью основного потока, то линеаризованное уравнение адвекции требует $q' = 0$ гравитационных волн. Поэтому, отличие от нуля величины q' означает «метеорологические» движения (т.е. медленно движущиеся квазигеострофические движения).

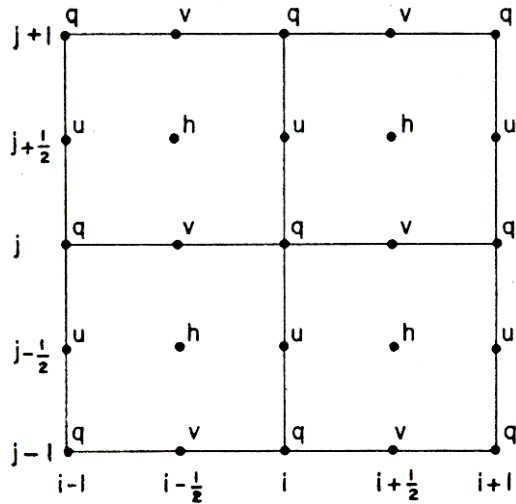


Рис. 19. Двумерная сетка, используемая в схемах, сохраняющих потенциальную завихренность

С точки зрения приведенных выше выкладок предложения Чарни (*Charney*, 1962) о задании потенциальной завихренности на подветренной границе остаются привлекательными, несмотря на критическое отношение, высказанное в работах *Elvius and Sundstrom* (1973) и *Oliger and Sundstrom* (1978). Включение граничных условий по q особенно просто, если конечно-разностный вид уравнения движения основывается на форме (133), как это сделано в схемах, сохраняющих потен-

циальную энтрофию, и предложенных в работах *Sadourny* (1975) и *Arakawa and Lamb* (1981). На рис. 19 представлена шахматная сетка, на которой основываются данные схемы. На наветренной границе, скажем в $i = 0$, мы можем использовать (103) и задать q ; а на подветренной границе, в точке $i = I$, используем (100) и экстраполируем q по (17).

5. Трехмерные исходные уравнения

В уравнениях мелкой воды, рассмотренных в предыдущем разделе, средняя глубина H задавалась константой. Соответственно, имела единственная фазовая скорость (малоамплитудных) гравитационных волн, равная $c = \sqrt{gH}$. Однако, в трехмерных исходных уравнениях. Имеется бесконечный ряд вертикальных мод. Каждая из них имеет свою вертикальную структуру, характеризуемую эквивалентной глубиной, D , и своей собственной фазовой скоростью внутренних гравитационных волн, \sqrt{gD} .

Так как решение исходных трехмерных уравнений представляет собой суперпозицию различных вертикальных мод, то в общем случае мы не можем допустить наличие одной фазовой скорости на всех уровнях потока. Соответственно, любые ограниченные по вертикали граничные условия являются плохо обусловленными для исходных уравнений, как это указано в работе *Oliger and Sundstrom* (1978). Эта неприятная ситуация возникает из-за использования уравнения статики, которое делает эти уравнения негиперболическими.

Однако, довод, приведенный в предыдущем разделе, все же полезен для контроля волны Лэмба (и возможно самых медленных внутренних гравитационных волн). Можно показать, что для волны Лэмба, являющейся горизонтальной звуковой волной, уравнение движения можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{\mathbf{V}} \rangle + \frac{\gamma R T_0}{P_0} \nabla P'_s = 0? \quad (140)$$

а уравнение неразрывности дает

$$\frac{\partial}{\partial t} P'_s + P_0 \nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{V}} \rangle = 0. \quad (141)$$

Здесь символ $\langle \rangle$ обозначает среднее по вертикали относительно массы (*mean with respect to mass*), $\gamma \equiv c_p/c_v$, T_0 – температура основного изотермического состояния, P_0 – среднее значение приземного давления, P'_s – отклонение приземного давления. Все остальные символы стандартные. Если мы определяем h и H как $h \equiv (\gamma R T_0/P_0)P'_s$ и $H \equiv \gamma R T_0$, тогда уравнения (140) и (141) становятся формально идентичными линеаризованным уравнениям мелкой воды. Фазовая скорость волны для таких уравнений задается как $\sqrt{\gamma R T_0}$, что больше, чем скорость потока $\left| \langle \bar{\mathbf{V}} \rangle \right|$ при любых реальных условиях.

Возможное отражение внутренних гравитационных волн на границах представляет главную трудность при моделировании на ограниченной территории. Нет надежды разработки хорошо обусловленных граничных условий без выполнения сложной процедуры разложения по вертикали (*vertical decomposition*). В практических приложениях используется множество прагматических процедур, некоторые из которых описаны в разделе 7.

6. Вложенные сетки

До сих пор мы рассматривали граничные условия на открытой границе одной области расчетов. Если задаются некоторые граничные значения, то такие граничные условия неизбежно становятся нереальными, даже в том случае, когда они хорошо обусловлены; и ошибки, распространяющиеся от таких границ, рано или поздно загрязняют всю область расчетов. Если область расчетов не слишком велика, то этот эффект устанавливает грубо верхний предел времени успешных прогнозов. Для того, чтобы увеличить этот срок сравнительно экономичным путем широко при моделировании по ограниченной территории используется методика вложенных сеток. В этой методике для района, представляющего наибольший интерес, используется мелкая сетка и грубая крупная сетка для остальной области расчетов. На рис. 20 представлен простой пример вложенных сеток, когда один мелкаячейистый район вставлен в одну крупнаячейистую область.

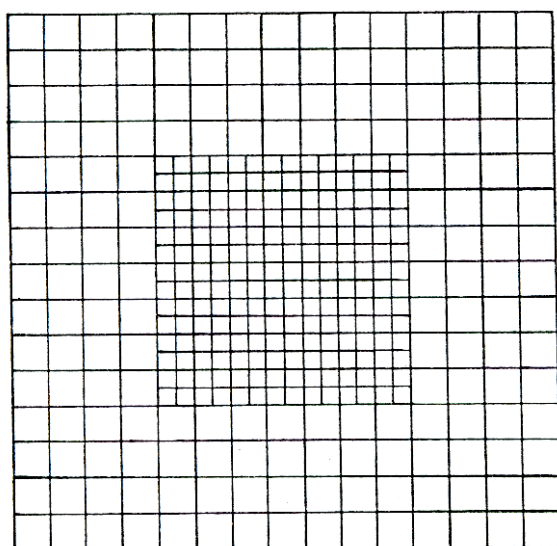


Рис. 20. Пример вложенных сеток

Для вложенных сеток необходимо соответствующим образом сформулировать условия на поверхностях пересечения. Имеются два основных подхода (*Phillips and Shukla, 1973*): одностороннее взаимодействие, в котором решение на грубой сетке влияет на решение на мелкой сетке посредством условий на поверхности взаимодействия, но нет обратного влияния решений мелкой сетки на грубую; двустороннее взаимодействие, в котором решения на грубой и мелкой сетке связаны между собой посредством условий на поверхности взаимодействия.

В моделях с односторонним взаимодействием решение на грубой сетке может быть получено заранее. Затем оно используется для обеспечения некими граничными значениями решения на мелкаячейистой сетке. Выводы, представленные в предыдущих разделах, остаются справедливыми для условий соприкосновения (*interface conditions*) сеток в моделях с односторонним взаимодействием.

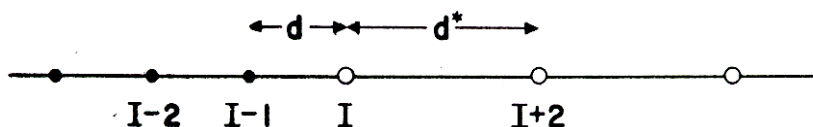


Рис. 21. Пример склейки (состыковки) узлов мелкаячейистой и грубой сети.

Проиллюстрируем процедуру двустороннего взаимодействия, используя полудискретное одномерное уравнение адвекции с однородным потоком, заданное соотношением (9). На рис. 21 узлы мелкаясетчатой сетки представлены черными кружками, а узлы грубой сетки – открытыми кружками.

Решение для грубой сетки в узле I дает граничное условие для решения на мелкой сетке в точке I-1; а решение на мелкой сетке в узле I-2 дает граничное условие для решения на грубой сетке в узле I. На практике, т.к. шаги по времени при интегрировании на мелкой сетке должны быть меньше временных интервалов интегрирования на грубой сетке, то необходима интерполяция результатов, полученных на одной сетке, на другую вблизи поверхности их соприкосновения (например, см. *Ookochi, 1972; Phillips and Shukla, 1973*).

Модели двустороннего взаимодействия имеют более высокий уровень по отношению к моделям одностороннего взаимодействия, по крайней мере концептуально. Они используются для схем регионального прогноза (например, *Phillips, 1978, 1979*) и более интенсивно – для исследования тропических циклонов (например, *Harrison, 1973; Marther, 1974; Hovermale, 1976; Ley and Elsberry, 1976; Jones, 1977; Kurihara et al., 1979; Kurihara and Bender, 1980*). Однако, использование методики двустороннего взаимодействия связано с трудностями для тех волн, которые не могут быть хорошо описаны на грубой сетке. Использование переменного разрешения вводят вычислительную разнородность в систему конечно-разностных уравнений. Соответственно, фазовая скорость волны, которая зависит от разрешения, не постоянна даже в том случае, когда это обусловлено исходным дифференциальным уравнением. В этом случае на поверхности раздела может наблюдаться вычислительное отражение и/или интерференция.

Для того, чтобы проиллюстрировать эту проблему, вновь рассмотрим соотношение (9). Пусть d – расстояние между узлами мелкаясетчатой сетки и d^* – расстояние между узлами грубой сетки (см. рис. 21). Из соотношения (11) получаем, что волновое число k для мелкаясетчатой сетки и k^* для крупнаясетчатой области связаны с частотой соотношениями

$$v = \frac{U}{d} \sin(k d). \quad (142)$$

$$v = \frac{U}{d^*} \sin(k^* d^*). \quad (143)$$

На рис. 22 представлены эти зависимости для положительных значений v и при $d^* = 2d$.

Рассмотрим поверхность раздела между мелкой сеткой, расположенной вверх по потоку и грубой сеткой, расположенной вниз по потоку. Если k меньше, чем $\pi/6d$ (т.е. длина волны превышает $12d$), то волна, распространяющаяся внутрь области мелкой сетки и приближающаяся к поверхности раздела, частично проникает в область грубой сетки с волновым числом k^* и частично отражается как вычислительная мода с волновым числом $\pi/d - k$.

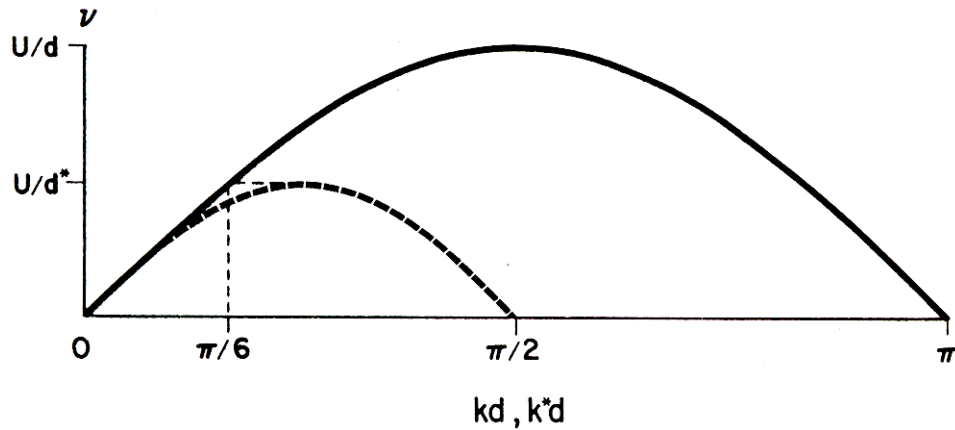


Рис. 22 Соотношения (142) (сплошная линия) и (143) (пунктирная линия) при $d^* = 2d$.

Из (142) и (143), k^* определяется как

$$k^* d = \frac{d}{d^*} \sin^{-1} \left[\frac{d}{d^*} \sin(k d) \right]. \quad (144)$$

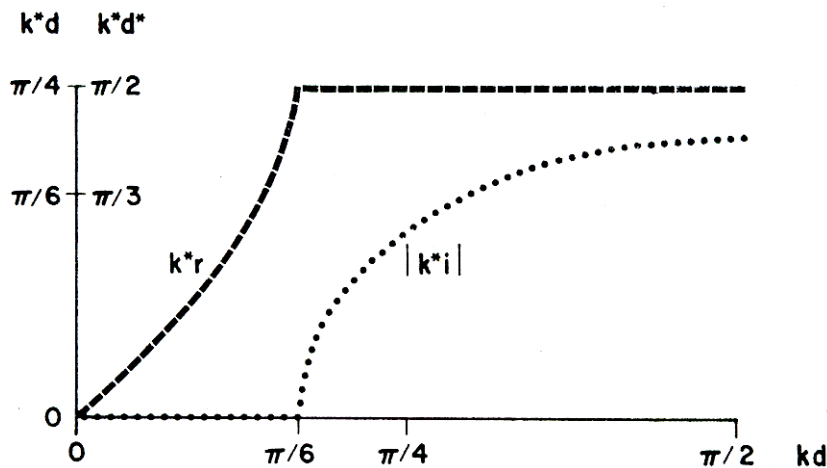


Рис. 23. Действительная (пунктирная линия) и мнимая (точечная линия) части k^* в зависимости от kd .

Из рис. 22 ясно, что $k^* > k$. С другой стороны, если k больше, чем $\frac{\pi}{6d}$, то k^* , задаваемое соотношением (144), является комплексным. Рис. 23 представляет величины k_r^* и $|k_i^*|$ как функции kd , при этом опять $d^* = 2d$. Отметим, что $k_r^* d^* = \pi/2$ (т.е. длина волны равна $4d^*$) для всех kd , превышающих $\frac{\pi}{d}$. Так как $|k_i^*| \neq 0$, то амплитуда проникающей волны экспоненциально уменьшается по оси X . После этого устанавливается структура решения нормальной моды и уже нет перехода энергии, т.е. групповая скорость при $k_r^* d^* = \pi/2$ равна нулю. Тогда на поверхности раздела наблюдается полное отражение в виде вычислительной моды. Такая ситуация аналогична случаю переопределенного условия (15) для открытой границы.

В работе *Browning et al.* (1973) (или смотри работу *Kreiss and Olinger*, 1973) было указано на потенциально более серьезную трудность при использовании методики двустороннего взаимодействия в двумерном случае. Проблема обусловлена интерференцией волн, которые прошли через область мелкой сетки, с теми, что не прошли.

Принципиально имеются два пути преодоления рассмотренных выше трудностей. В одном необходимо использовать очень точные численные методы для решения уравнений так, чтобы можно было уменьшить влияние вычислительной дисперсии (например, *Ooyama*, 1984). Во втором направлении необходимо сформулировать условия на поверхности раздела так, чтобы эффективным образом сделать короткие волны не взаимодействующими.

7. Прагматические граничные условия, используемые в моделях по ограниченной территории

В этом разделе мы вкратце охарактеризуем некоторые прагматические открытые граничные условия или условия на поверхности раздела с односторонним взаимодействием, используемые в реальных моделях по ограниченной территории. (Обзор моделей с вложенными сетками, включая модели с двусторонним взаимодействием, смотри в работе *Elsberry*, 1978). Исходные уравнения этих моделей усложнены за счет многомерности и нелинейности, и очень трудно, если невозможно, сформулировать общие неотражающие граничные условия. В настоящее время предложен целый ряд прагматических методик, которые используют переопределенные условия. К сожалению, нет стандартного метода, который бы продемонстрировал свою применимость для широкого спектра атмосферных объектов.

Предложено два типа таких методов. Первый тип использует условия излучения в его приближенном виде. Принципиальная сложность при введении условия излучения в реальную модель состоит в том, что скорость, нормальная по отношению к границе, обычно неизвестна. Подход, предложенный *Orlanski* (1976) (см. также *Miller and Thrope*, 1981) определяет локальную нормальную к границе скорость по методике, описанной в § 4b. Другой подход предложен в работе *Klemp and Lilly* (1978) и основывается на специфицированной, характерной фазовой скорости внутренних гравитационных волн.

Во втором типе граничных условий переменные на границе определяются на основе значений, полученных при интегрировании на грубой сетке в случае вложенных сеток, однако с определенной регулировкой; или же используют эффект «губки» в зоне, предшествующей границе. Метод, предложенный в работе *Perky and Kreizberg* (1976), (см. также *Kesel and Wnninghoff*, 1972; *Baumhefner and Perkey*, 1982) использует взвешенные средние заданной и спрогнозированной тенденций в зоне шириной нескольких точек сетки, непосредственно примыкающей к границе. Предложены также подгонка рассчитанных и заданных значений с помощью «ньютоновского подавления» (*Anthes*, 1974; *Davies*, 1976); использование больших коэффициентов диффузии (например, *Williamson and Browning*, 1974). Более локальные подгонки (регулировки) включают «граничное осреднение» (*Chen and Miyakoda*, 1974) и детальную схему изменения граничных значений (*Okamura*, 1975).

Miyakoda and Rosati (1977) провели тщательное взаимное сопоставление некоторых из этих методов или же их комбинаций, используя для этих целей трехмерную модель. В дальнейшем следует провести дополнительные исследования подобного типа. Вероятно, что окончательным решением этой проблемы является гибридный метод, в котором схема, являющаяся неотражающей для идеализированных случаев, комбинируется с некоторыми регуляторами вблизи границы.

ЛИТЕРАТУРА

- Anthes, R.A.*, 1974: Data assimilation and initialization of hurricane prediction models. – *J. Atmos. Sci.*, 31, 702-719.
- Arakawa, A.*, 1966: Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion. Part 1. – *J. Comput. Phys.*, 1, 119-143.
- Arakawa, A. and V.R. Lamb*, 1981: A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations. – *Mon. Wea. Rev.*, 109, 18-36.
- Baumhefner, D.P. and D.J. Perkey*, 1982: Evaluation of lateral boundary errors in a limited-domain model. – *Tellus*, 34, 409-428.
- Browning, G., H.-O. Kreiss and J. Olinger*, 1973: Mesh refinement. – *Math. Comp.*, 27, 29-39.
- Charney, J.G.*, 1962: Integration of the primitive and balance equation. Proc. International Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, Meteor. Soc. Japan, 131-152.
- Chen, J.N. and K. Miyakoda*, 1974: A nested grid computation for the barotropic free surface atmosphere. – *Mon. Wea. Rev.*, 102, 181-190.
- Davies, H.C.*, 1976: A lateral boundary condition for multi-level prediction models. – *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 102, 405-418.
- Elsberry, R.L.*, 1978: Prediction of atmospheric flows on nested grids. - *Computational Techniques for Interface Problems*, AMD-Vol.30, Ed. K.C. Park and D.K. Gartling, The American Society of Mechanical Engineers, New York.
- Elvius, T. and A. Sundstrom*, 1973: Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine-mesh model based on the shallow-water equations. – *Tellus*, 25, 132-156.
- Gustafsson, B., H.-O. Kreiss and A. Sunderstrom*, 1972: Difference approximations to mixed initial boundary value problems, II, *Math. Comp.*, 26, 649-686.
- Harrison, E.J., jr.*, 1973: Three-dimensional numerical simulations of tropical systems utilizing nested finite grids. – *J. Atmos. Sci.*, 30, 1528-1543.
- Hovermale, J.B.*, 1976: The movable fine mesh (MFM) – a new operational forecast model. – *Tech. Proc. Bull. № 160*, National Weather Service.
- Jones, R.W.*, 1977: A nested grid for a three-dimensional model of a tropical cyclone. – *J. Atmos. Sci.*, 34, 1528-1553.
- Kesel, P.G. and F.J. Winninghoff*, 1972: The Fleet Numerical Central operational primitive-equation model. – *Mon. Wea. Rev.*, 100, 360-373.
- Klemp, J.B. and D.K. Lilly*, 1978: Numerical simulation of hydrostatic mountain waves. – *J. Atmos. Sci.*, 35, 78-107.
- Kreiss, H.-O.*, 1970: Initial boundary value problems for hyperbolic systems. – *Comm. Pure Appl. Math.*, 23, 277-298.

- Kreiss, H.-O. and J. Olinger*, 1973: Methods for the approximate solution of time-dependent problems. - GARP Publications Series № 10, WMO-ICSU JOC, 107 pp.
- Kurihara, Y., G.J. Tripoli and M.A. Bender*, 1979: Design of a movable nested-mesh primitive equation model. – Mon. Wea. Rev., 107, 239-249.
- Ley, G.W. and R.L. Elsberry*, 1976: Forecasts of Typhoon Irma using a nested-grid model. – Mon. Wea. Rev., 104, 1154-1161.
- Mathur, M.B.*, 1974: A multiplegrid primitive equation model to simulate the development of an asymmetric hurricane. – J. Atmos. Sci., 31, 371-393.
- Matsuno, T.*, 1966: False reflection of waves at the boundary due to the use of finite differences. – J. Meteor. Soc. Japan, II, 145-157.
- Miller, M.J. and A.J. Trorpe*, 1981: Radiation condition for the lateral boundaries of limited-area numerical models. – Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 107, 615-628.
- Miyakoda, K. and A. Rosati*, 1977: One-way nested grid models: The interface condition and the numerical accuracy. - Mon. Wea. Rev., 105, 1092-1107.
- Nitta, T.*, 1962: The outflow boundary condition in numerical time integration of advective equations. – J. Meteor. Soc. Japan, 40, 13-24.
- Okumura, Y.*, 1975: Computational design of a limited area prediction model. - – J. Meteor. Soc. Japan, 53, 173-188.
- Olinger, J. and A. Sundstrom*, 1978: Theoretical and practical aspects of some initial-boundary value problems in fluid dynamics. – SIAM J. Appl. Math., 35, № 3, 419-447
- Ookochi, Y.*, 1972: A computational scheme for the nesting fine mesh in the primitive equation model. - – J. Meteor. Soc. Japan, 50, 37-48.
- Ooyama, K.*, 1984: A model for hurricane prediction. – 15th Conference on Hurricanes and Tropical Meteorology, American Meteorological Society.
- Orlanski, I.*, 1976: A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. – J. Comp. Phys., 21, 251-269.
- Perkey, D.J. and C.W. Kritzberg*, 1976: A time-dependent lateral boundary scheme for limited-area primitive equation models. – Mon. Wea. Rev., 105, 744-755.
- Phillips, N.A. and J. Shukla*, 1973: On the strategy of combining coarse and fine grid meshes in numerical weather prediction. – J. Appl. Meteor., 12, 763-770.
- Phillips, N.A.*, 1978: A Test of Finer Resolution. National meteorological Center Office Note 171. Washington, D.C.
- Phillips, N.A.*, 1979: The nested grid model. NOAA Technical Report NWS22, NOAA, US Department of Commerce.
- Platzman, G.W.*, 1954: The computational stability of boundary conditions in numerical integrations of the vorticity equation. – Arch. Met. Geophys. Biokl., Serie A, 7, 29-40.
- Sadourny, R.*, 1975: The dynamics of finite difference models of the shallow water equations. – J. Atmos. Sci., 32, 680-689.
- Sundstrom, A. and T. Elvius*, 1979: Computational problems related to limited-area modeling. – Numerical methods used in atmospheric models, Vol. II, Chap. 7, GARP Series № 17 (Имеется русский перевод – Численные методы, используемые в атмосферных моделях. – Гидрометеиздат, 1982).
- Williamson, D.L. and G.L. Browning*, 1974: Formulation of the lateral boundary conditions for the NCAR limited-area model. – J. Appl. Meteor., 13, 8-16.

Параметризация планетарного пограничного слоя**Parameterization of Planetary Boundary Layer**

Part III. (№ 13). pp. 435-452

1. Введение

В этой лекции будет представлен краткий обзор подходов, используемых в настоящее время для параметризации процессов в планетарном пограничном слое атмосферы (ППС). Планетарный пограничный слой атмосферы представляет собой слой воздуха, примыкающий к подстилающей поверхности Земли, в котором в поддержании баланса импульса, тепла и влаги преобладающую роль играет турбулентный перенос этих субстанций по вертикали. В этом слое, в первую очередь, кинетическая энергия атмосферных движений диссипирует в тепло и за счет этого слоя атмосфера «ощущает» условия на подстилающей поверхности, такие как шероховатость поверхности, приземные значения температуры и влажности.

Нет сомнений в том, что долгосрочное поведение атмосферы в большой степени определяется этими приземными условиями. Для моделей по ограниченной территории, рассматриваемые в этом курсе лекций, более важно сравнительно короткопериодное поведение атмосферы, и мы точно не знаем насколько сложной должна быть параметризация ППС. Однако имеется множество свидетельств того, что процессы в ППС важны для развития процессов с периодом порядка 1 дня (см., например, Anthes, 1983).

Одной из наиболее важных целей параметризации процессов в ППС является необходимость расчета приземных потоков, составляющих важную часть в балансе для всей атмосферы. Однако, если в задаче атмосферу нельзя рассматривать как один однородный по вертикали слой, то необходимо определить вертикальные профили турбулентных потоков в ППС, так чтобы на каждой высоте можно было получить их конвергенцию по вертикали. Данная лекция рассматривает два эти аспекта параметризации ППС.

2. Уравнения для средних и пульсаций

Если пренебречь молекулярными процессами, то уравнения Навье-Стокса и неразрывности в неупругой аппроксимации можно записать как

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \bar{k} \frac{\delta \theta}{\theta_0} g \quad (1)$$

и
$$\nabla \cdot (\rho_0 \vec{V}) = 0. \quad (2)$$

Здесь \vec{V} - трехмерный вектор скорости потока, $\vec{\Omega}$ - вектор угловой скорости вращения Земли, ρ - плотность воздуха, p - его давление, θ - потенциальная

температура; индекс «0» обозначает переменные, относящиеся к стандартному гидростатическому, горизонтально однородному состоянию, δ - обозначает отклонения (пульсации) от этого стандартного состояния; \vec{k} - вертикальный единичный вектор. Последний член в правой части уравнения (1) представляет собой силу плавучести в неупругой системе уравнений.

Пусть $i=1, 2, 3$ обозначают направления x, y, z , а \vec{e}_i и V_i будут обозначать единичный вектор и составляющую скорости потока, соответственно. Используя общепринятые тензорные обозначения, запишем

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = V_j \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{e}_i V_i, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_j) \quad (4)$$

Используя соотношения (2) и (4) для записи соотношения $\rho_0 \times (3)$ и подставляя полученный результат в (1), получим

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 V_i V_j) - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \vec{k} \frac{\delta \theta}{\theta_0} g. \quad (5)$$

Теперь разделим все переменные на средние (в пространстве и/или во времени), которые будем обозначать с чертой сверху, и отклонения от средних, обозначаемые с помощью штриха. Допустим, что средние значения отклонений равны нулю. Тогда

$$\overline{V_i V_j} = \overline{V}_i \overline{V}_j + \overline{v'_i v'_j}. \quad (6)$$

Используя соотношение (6) при осреднении уравнения (5) и соответственно используя (3) и (4) применительно к среднему потоку, получим

$$\frac{\partial \overline{\Lambda}}{\partial t} = -(\overline{\Lambda} \cdot \nabla) \overline{\Lambda} - 2\vec{\Omega} \times \overline{\Lambda} - \nabla \frac{\delta p}{\rho_0} + \vec{k} \frac{\delta \theta}{\theta_0} g - \frac{1}{\rho_0} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 \overline{v'_i v'_j}). \quad (7)$$

Здесь введено обозначение $\Lambda = \vec{V}$. Величина $\rho_0 \overline{v'_i v'_j}$ в последнем члене в правой части уравнения (7) представляет собой вихревой перенос i -того компонента импульса за счет j -того компонента скорости. Появляющееся напряжение, задаваемое тензором $\rho_0 \overline{v'_i v'_j}$ называется напряжением Рейнольдса.

Первый закон термодинамики применительно к атмосферным движениям можно записать как

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \theta + \frac{1}{c_p} \frac{\theta_0}{T_0} Q, \quad (8)$$

где c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении; Q – неадиабатический приток тепла. Отношение θ/T заменено на его стандартное значение θ_0/T_0 .

Следуя процедуре, аналогичной при выводе уравнения (7), получим

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\bar{\Lambda} \cdot \nabla \bar{\theta} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \overline{\Lambda' \theta'}) + \frac{1}{c_p} \frac{\theta_0}{T_0} \bar{Q}. \quad (9)$$

Здесь величина $c_p \rho_0 \overline{\Lambda' T'} \cong (T_0/\theta_0) c_p \rho_0 \overline{\Lambda' \theta'}$ (10)

представляет собой турбулентный (вихревой) перенос энтальпии, который обычно называют турбулентным потоком скрытого (*sensible*) тепла. Вычитая из уравнения (1) соотношение (7) и умножая результат на v' , получим уравнение баланса кинетической энергии турбулентности. После некоторых преобразований, включающих использование уравнения неразрывности, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\Lambda'^2} = -\bar{\Lambda} \cdot \nabla \frac{1}{2} \overline{\Lambda'^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \left(\rho_0 \overline{\Lambda' \frac{1}{2} \Lambda'^2} + \overline{\Lambda' p'} \right) - \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{g}{\theta_0} \overline{w' \theta'} - \varepsilon \quad (11)$$

где w – вертикальная составляющая вектора \bar{V} . Уравнение (11) включает дополнительный член $-\varepsilon$. Причина его включения будет кратко объяснена ниже. Первый член в правой части (11) – это просто адвекция турбулентной кинетической энергии за счет среднего движения. За этим членом следует конвергенция двух членов переноса, первый из которых является переносом турбулентной кинетической энергии вследствие переноса турбулентными вихрями, а второй член – это работа, производимая за счет пульсационной составляющей давления. Член $-\overline{v'_i v'_j} \partial \bar{V}_i / \partial x_j$ представляет собой генерацию турбулентной кинетической энергии за счет сдвига скорости потока, а член $g \overline{w' \theta'} / \theta_0$ – это генерация турбулентной кинетической энергии за счет работы силы плавучести.

Теперь вспомним, что в уравнении (1) мы пренебрегли молекулярной вязкостью. Если в понятие “турбулентная кинетическая энергия” включаются очень малые масштабы вихрей, то молекулярной вязкостью пренебрегать нельзя, и поэтому следует добавить в уравнение баланса кинетической энергии турбулентности эффект молекулярной диссипации. Если же мы рассматриваем относительно крупномасштабные вихри, то необходимо добавить каскадный эффект энергетических переходов в вихри меньших масштабов, которые в свою очередь диссипируют. Таким образом, в уравнении (11) величина ε представляет собой этот механизм и будет называться диссипацией.

Следуя процедуре, аналогичной той, что использовалась при выводе уравнения (11), можно получить уравнение для пульсаций потенциальной температуры. Запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \overline{\theta'^2} = -\bar{\Lambda} \cdot \nabla \frac{1}{2} \overline{\theta'^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \left(\rho_0 \overline{\Lambda' \frac{1}{2} \theta'^2} \right) - \overline{\Lambda' \theta'} \cdot \nabla \bar{\theta} + \frac{1}{c_p} \frac{\theta_0}{T_0} \overline{\theta' Q'} \quad (12)$$

Хотя уравнение, которое мы вывели выше, справедливо для любых вихрей, далее мы будем рассматривать только турбулентные вихри. Также допустим, что существенным является только вертикальный турбулентный перенос – часто используемое для ППС предположение. Кроме того, предположим, что средним состоянием потока является состояние гидростатического баланса и поэтому рассматриваются только горизонтальные составляющие уравнения (7). Пусть Λ – горизонтальная скорость потока. Тогда уравнения (7), (9), (11) и (12) принимают вид

$$\frac{D}{Dt} \bar{\Lambda} = -f \cdot \bar{k} \times \bar{\Lambda} - \nabla \cdot \frac{\bar{\delta p}}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \overline{w' \Lambda'}), \quad (13)$$

$$\frac{D}{Dt} \bar{\theta} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \overline{w' \theta'}) + \frac{1}{c_p} \frac{\theta_0}{T_0} \bar{Q}, \quad (14)$$

$$\frac{D}{Dt} \frac{1}{2} \overline{\Lambda'^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \left(\rho_0 \overline{w' \frac{1}{2} \Lambda'^2} + \overline{w' p'} \right) - \overline{w' \Lambda'} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \overline{w' \theta'} - \varepsilon, \quad (15)$$

$$\frac{D}{Dt} \frac{1}{2} \overline{\theta'^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \left(\rho_0 \overline{w' \frac{1}{2} \theta'^2} \right) - \overline{w' \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{c_p} \frac{\theta_0}{T_0} \overline{\theta' Q'}, \quad (16)$$

где
$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Lambda} \cdot \nabla. \quad (17)$$

3. Теория пути смешения

Уравнения для средних величин (13) и (14) включают в себя конвергенцию вертикального турбулентного переноса соответствующих субстанций. Запишем для произвольной переменной A

$$\overline{w' A'} = -k \frac{\partial \bar{A}}{\partial z}, \quad (18)$$

где k – коэффициент турбулентной диффузии или коэффициент обмена. На этой стадии соотношение (18) не представляет ничего, кроме соотношения, которое определяет параметр k . Так как величина k является свойством турбулентного потока, но не самой жидкости или газа, то нет причин полагать, что эта величина есть константа.

Классическая теория пути смешения предполагает, что $|A'| \cong \ell \frac{\partial \bar{A}}{\partial z}$ и $|w'| \cong \ell \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial z}$, так что

$$k = \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial z} \right|. \quad (19)$$

Здесь ℓ - длина пути смешения. Мы можем интерпретировать соотношение (19) следующим образом. Допустим, что генерация кинетической энергии турбулентности за счет сдвига и диссипация в уравнении (15) примерно уравновешивают друг друга. Тогда

$$\overline{w' \Lambda'} \cdot \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial z} = \varepsilon. \quad (20)$$

Используя соотношение (18) для $A = \Lambda$ в соотношении (20) получаем

$$k \left| \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial z} \right|^2 = \varepsilon. \quad (21)$$

Допустим, что k , ε и ℓ взаимно и исключительно между собой связаны. Так как единственной комбинацией k и ε , которая имеет размерность длины, является $k^{3/4} \cdot \varepsilon^{-1/4}$, то мы можем определить ℓ с помощью соотношения

$$\ell \equiv k^{3/4} \cdot \varepsilon^{-1/4}. \quad (22)$$

Исключая ε из (22) с помощью (21), мы приходим к соотношению (19).

Из приведенной интерпретации ясно, что применимость соотношения (19) довольно ограничена. В частности, не здесь не принимается во внимание перенос и генерация кинетической энергии турбулентности за счет работы силы плавучести. Даже в том случае, когда этими эффектами можно пренебречь, имеется неопределенность (*ambiguity*) при выборе ℓ .

Дополнительно имеем $\partial \bar{\Lambda} / \partial z \approx \bar{\Lambda} / z$. Используя это соотношение в (19) и (18) с $A = \Lambda$, получаем

$$\left(\rho_0 \overline{w' \Lambda'} \right)_s = -\rho_0 c_D |\bar{\Lambda}| \bar{\Lambda}, \quad (23)$$

где индекс «s» относится к уровню подстилающей поверхности и c_D - коэффициент сопротивления. Уравнение (23) представляет собой известный обобщенный аэродинамический метод или метод суммарного аэродинамического сопротивления (*bulk aerodynamic method*) для расчета приземного напряжения трения. Для произвольной переменной A этот метод дает

$$\left(\rho_0 \overline{w' A'} \right)_s = \rho_0 c_A |\bar{\Lambda}| (\bar{A}_s - \bar{A}). \quad (24)$$

В соотношениях (23) и (24) величины коэффициент и $\bar{\Lambda}$ - значения соответствующих переменных на высоте z . Коэффициент c_A - интегральный коэффициент переноса для субстанции A вблизи подстилающей поверхности. На этой стадии коэффициент c_A является только эмпирическим.

4. Теория подобия приземного слоя

Исходное уравнение баланса для переменной \bar{A} формально можно записать следующим образом

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\text{другие члены}) \right] = - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \overline{w' A'}). \quad (25)$$

Интегрируя уравнение (25) по Z от z до $z + \delta z$, где δz - малая величина, получим

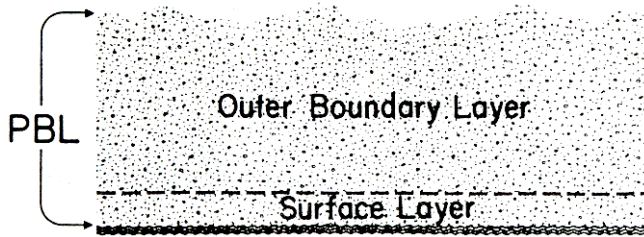
$$\rho_0 \delta z \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\text{другие члены}) \right] \approx - (\rho_0 \overline{w' A'})_z - (\rho_0 \overline{w' A'})_{z+\delta z}. \quad (26)$$

Если δz достаточно мало, тогда левой частью соотношения (26) можно пренебречь. Тогда

$$(\rho_0 \overline{w' A'})_z \approx (\rho_0 \overline{w' A'})_{z+\delta z}, \quad (27)$$

так что турбулентный поток внутри тонкого слоя можно считать примерно постоянным по высоте (очевидно, что это не означает, что правая часть (25) мала по сравнению с левой частью этого соотношения).

Тонкий, самый нижний подслой ППС, в котором выполняется соотношение (27), называется приземным слоем (см. рис.1).



С учетом соотношения (27) этот слой можно также называть слоем «постоянных» (турбулентных) потоков. Подслоем ППС, расположенный над приземным слоем называется внешним пограничным слоем.

Рис. 1. Подслои в ППС.

а) Приземный слой при нейтральной стратификации

Сначала рассмотрим случай, когда отсутствует генерация кинетической энергии турбулентности за счет работы силы плавучести. Если выбрать направление оси X вдоль вектора напряжения Рейнольдса $(-\rho_0 \overline{w' \Lambda'})$, тогда это напряжение будет равно $-\rho_0 \overline{w' u'}$ (> 0). Определим динамическую скорость u_* как

$$u_*^2 \equiv -(\overline{w' u'})_s, \quad u_* > 0. \quad (28)$$

Допустим, что u_* является единственным физическим параметром, который характеризует нейтральный приземный слой и, следовательно, вертикальный сдвиг среднего потока в этом слое определяется только величинами u_* и z . Тогда (так как единственной комбинацией u_* и z , которая имеет размерность $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, является $\frac{u_*}{z}$) можно записать

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{1}{\kappa} \frac{u_*}{z}, \quad (29)$$

где κ – универсальная константа, называемая константой Кармана. Интегрируя соотношение (29) по z , получаем

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (30)$$

Здесь z_0 – высота, на которой выражение (30) дает $\bar{u} = 0$. Когда подстилающая поверхность очень гладкая, то $\bar{u} = 0$ наблюдается на высотах, очень близких к $z = 0$; поэтому ненулевое значение z_0 является мерой шероховатости подстилающей поверхности. Высота, определяемая соотношением (30), называется высотой шероховатости.

б) Стратифицированный приземный слой

В этом случае необходимо рассматривать учитывать в уравнении притока тепла перенос тепла турбулентными вихрями аналогично тому, как рассматривался перенос импульса за счет турбулентности в уравнении движения для средних величин. Кроме того, теперь турбулентные вихри получают дополнительную (случай неустойчивой стратификации) или затрачивают свою (устойчивая стратификация) кинетическую энергию вследствие действия в этом слое силы плавучести.

В этом случае вертикальный сдвиг среднего потока будет зависеть не только от u_* и z , но также и от генерации кинетической энергии за счет работы силы плавучести, $g \overline{w'\theta'}/\theta_0$. Тогда величина $(\kappa z/u_*) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$ не обязательно равна 1, как это было при нейтральной стратификации, а в общем случае, должна быть безразмерной комбинацией величин u_* , z и $g \overline{w'\theta'}/\theta_0$. Существует только единственная комбинация этих величин, являющаяся безразмерной, это z/L . Здесь L – масштаб длины Монина-Обухова (*Monin and Obukov, 1954*), определяемый соотношением

$$L = - \frac{u_*^3}{\kappa \frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'}}. \quad (31)$$

Когда $\overline{w'\theta'} < 0$ (устойчивая стратификация) $L > 0$; при $\overline{w'\theta'} = 0$ (нейтральная стратификация) $L \rightarrow \pm \infty$; при неустойчивой стратификации ($\overline{w'\theta'} > 0$) $L < 0$. Для стратифицированного приземного слоя вместо соотношения (29) теперь имеем

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \phi_m(\zeta), \quad (32)$$

где $\phi_m(\zeta)$ - универсальная функция и $\zeta \equiv z/L$.

Для того, чтобы соотношение (32) согласовывалось с (29) необходимо, чтобы

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \phi_m(\zeta) = 1 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow 0. \quad (33)$$

Это означает, что соотношение (30) является хорошей аппроксимацией для $\zeta \equiv z/L \ll 1$ даже в том случае, когда приземный слой является стратифицированным. Следовательно, высота L является мерой высоты, ниже которой эффектом стратификации можно пренебречь.

Определим величину θ_* через соотношение

$$\overline{w'\theta'} \equiv u_* \theta_* \quad (34)$$

и, следуя процедуре, аналогичной выводу соотношения (32), получим

$$\frac{\kappa z}{\theta_*} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \phi_h(\zeta), \quad (35)$$

где ϕ_h - другая универсальная функция.

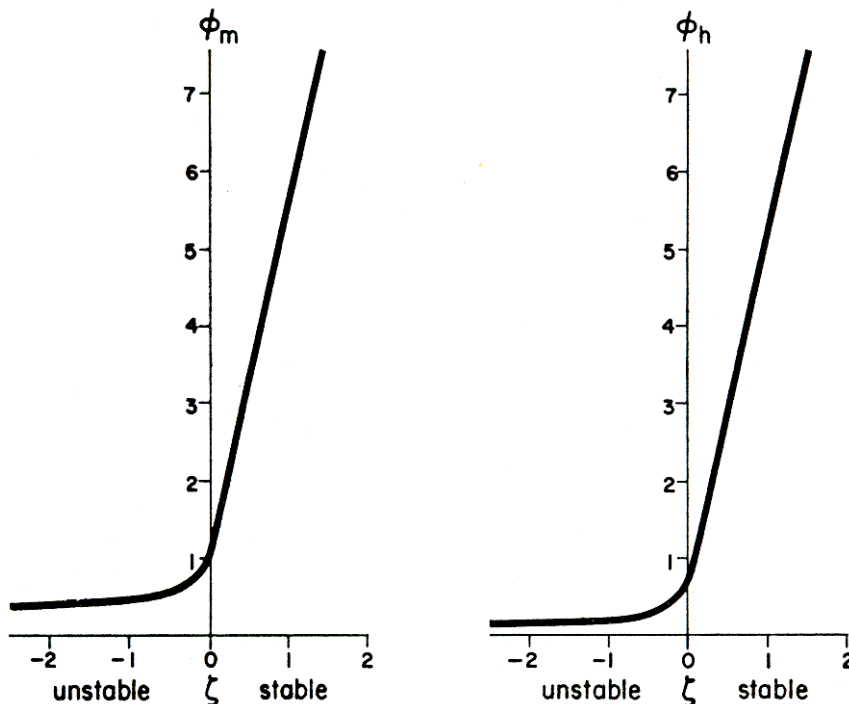


Рис. 2. Функции $\phi_m(\zeta)$ и $\phi_h(\zeta)$. (Из работы *Businger et al.*, 1974)

Универсальные функции ϕ_m и ϕ_h можно определить через экспериментальные измерения турбулентных потоков и средних профилей в приземном слое. На рис. 2 представлены результаты, полученные *Businger et al.* (1974). В соответствии с этими результатами значение постоянной Кармана, которое бы

удовлетворяло соотношению (33), примерно равно 0,35, в то время как предшествующие исследователи показывали, что $\kappa = 0.4$.

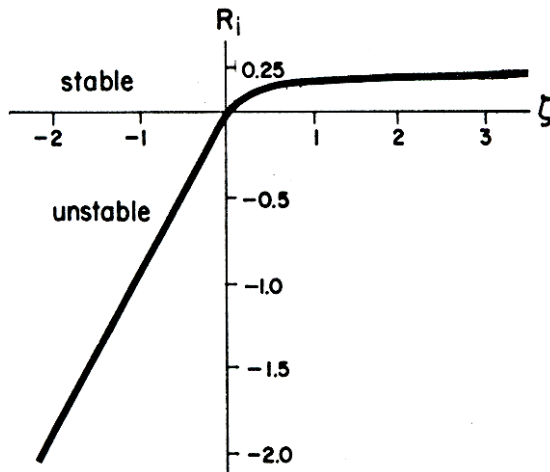


Рис. 3. Число Ричардсона как функция ζ .
(Из работы *Businger et al.*, 1974).

Из определения θ_* и L , приведенного в соотношениях (34) и (32), получим

$$\theta_* = \frac{\theta_0 u_*^2}{\kappa g L}. \quad (36)$$

Оценивая u_* и θ_* в соотношениях (32), (35) и (36) и используя определение $\zeta \equiv z/L$, получим выражение для числа Ричардсона

$$Ri \equiv \frac{g \frac{d}{dz} \ln \bar{\theta}}{(d\bar{u}/dz)^2} = \zeta \frac{\phi_h}{\phi_m}. \quad (37)$$

Так как ϕ_m и ϕ_h являются функциями ζ , то число Ri также является функцией ζ . На рис. 3 представлено соотношение между Ri и ζ , полученное по соотношениям для ϕ_m и ϕ_h , взятым с рис. 2. Интересно видеть, что Ri не превышает значения 0,21 для любых значений ζ .

с). Коэффициенты приземного обмена

Из соотношений (32) и (35) с определениями для u_* и θ_* , а также с соотношениями (28), (34) и (18) для коэффициента обмена κ , находим

$$\kappa_m = \left(\frac{\kappa z}{\phi_m} \right)^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|, \quad (38)$$

$$\kappa_h = \left(\frac{\kappa z}{\phi_m \phi_h} \right)^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|. \quad (39)$$

Здесь индексы « m » и « h » относятся к потокам импульса и тепла, как и ϕ_m , ϕ_h . Сопоставляя соотношения (38) и (19), получаем выражение для длины пути смешения ℓ . Так как ϕ_m и ϕ_h являются универсальными функциями ζ , которая в свою очередь зависит от числа Ri , то мы можем формально записать

$$\kappa_m = I_0^2 f_m(Ri), \quad (40)$$

$$k_h = I_0^2 f_h(\text{Ri}), \quad (41)$$

где $I_0 \equiv \kappa z,$ (42)

$$f_m(\text{Ri}) \equiv 1/\phi_m^2, \quad f_h(\text{Ri}) \equiv 1/\phi_m \phi_h. \quad (43)$$

d). Коэффициенты приземного переноса

Теперь проинтегрируем соотношения (32) и (35) от z_0 до некоторой высоты z , находящейся в пределах приземного слоя. Тогда

$$\bar{u} - \bar{u}_0 = \frac{u_*}{\kappa} \Phi_m, \quad (44)$$

$$\bar{\theta} - \bar{\theta}_0 = \frac{\theta_*}{\kappa} \Phi_h, \quad (45)$$

где индекс «0» обозначает уровень $z = z_0$, Φ_m и Φ_h являются функциями ζ и ζ_0 или же функциями ζ и $\zeta/\zeta_0 = z/z_0$ и задаются следующим образом

$$\Phi_m = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{\zeta} \phi_m(\zeta) d\zeta, \quad (46)$$

$$\Phi_h = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{\zeta} \phi_h(\zeta) d\zeta. \quad (47)$$

При нейтральной стратификации $\phi_m(\zeta) = 1$ и, в соответствии с результатами *Businger et al. (1971)*, $\phi_h(\zeta) \approx 0.74$. Соответственно, при нейтральной стратификации $\Phi_m = \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$ и $\Phi_h = 0.74 \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$.

Отметим, что $\bar{u}_0 = 0$ по определению величины z_0 . Тогда, из соотношений (44) и (45), привлекая определения для u_* и θ_* , заданные соотношениями (28) и (34), получаем

$$\overline{w'u'} = -C_D \bar{u}^2, \quad (48)$$

$$\overline{w'\theta'} = -C_H \bar{u}(\bar{\theta} - \bar{\theta}_0), \quad (49)$$

где $C_D \equiv \left(\frac{\kappa}{\Phi_m}\right)^2, \quad C_H \equiv \kappa^2/(\Phi_m \Phi_h).$ (50)

Вспоминая, что ось нами направлена вдоль вектора ветра \vec{V} и принимая, что $\bar{\theta}_0 = \theta_s$, можно идентифицировать C_D и C_H с интегральным коэффициентом переноса C_A в соотношении (24) для $A = \vec{V}$ и $A = \theta$, соответственно.

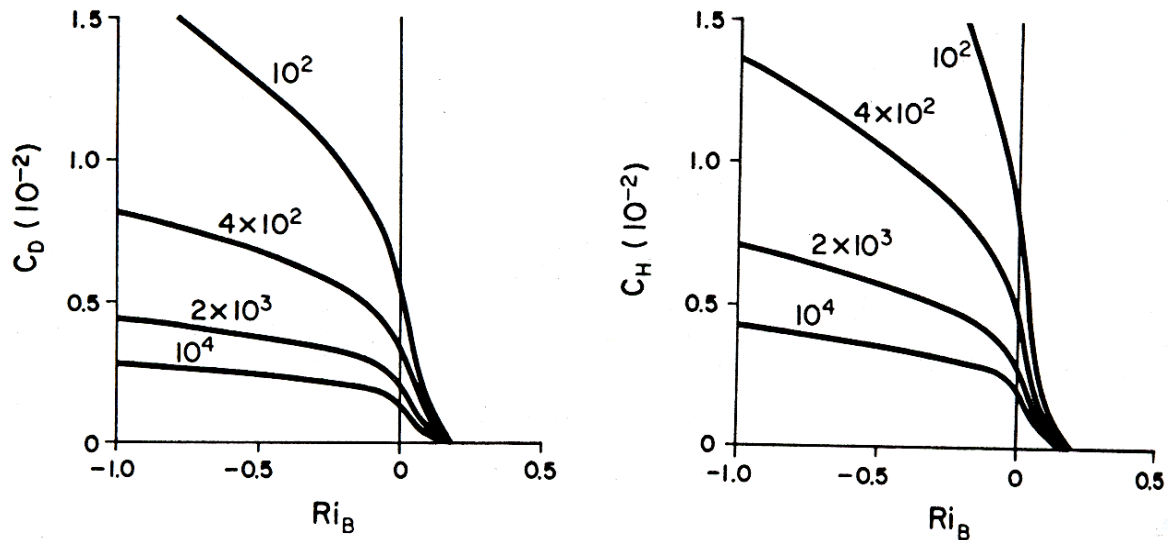


Рис. 4. Величины C_D и C_H как функции Ri_B для избранных значений z/z_0 . (из работы *Louis, 1979*)

Определим интегральное (*bulk*) число Ричардсона следующим образом

$$Ri_B \equiv g \frac{\bar{\theta} - \theta_s}{\theta_0} \frac{z}{\bar{u}^2}. \quad (51)$$

Из соотношений (48), (49)-(51) и определений u_* , L и ζ , находим

$$Ri_B = \frac{1}{\zeta} \frac{\Phi_m^2}{\Phi_H}, \quad (52)$$

что аналогично (37). Для заданных значений Ri_B и z/z_0 соотношение (52) детерминирует значение ζ , и следовательно C_D и C_H через (50). На рис 4 приведены интегральные коэффициенты переноса как функции Ri_B для заданных значений z/z_0 .

5. Проблемы при моделировании приземных потоков

В численных моделях атмосферы для расчета приземных потоков обычно используется интегральный аэродинамический метод, задаваемый формулой (24). Теория подобия приземного слоя дает основу для этого метода и показывает, что коэффициенты C_D и C_H являются функциями ζ и z/z_0 , как показано формулой (50). Значение ζ может быть определено по интегральному числу Ричардсона из соотношения (52). На практике, однако, при моделировании приземных потоков имеется ряд проблем, которые кратко описаны в данном разделе.

а) Выбор высоты шероховатости

Высота шероховатости z_0 была введена в соотношении (30) как математическая константа, но неясно как эта высота связана (или не связана) с геометрическими свойствами подстилающей поверхности (см. *Andre, 1982*). Здесь мы полностью должны опираться на эмпирику.

Большинство наблюдений в нейтральном или близком к этому состоянию приземном слое над океанами показывает, что коэффициент C_D находится в диапазоне значений от 1.0 до 1.5×10^{-3} при отсутствии или слабой зависимости от скорости ветра (см., например, *Augstein, 1979*). Связь между величинами z_0 и скоростью ветра все еще является предметом дискуссий (см., например, *Smith and Carson, 1977*).

Если стратификация является полностью нейтральной, то соотношение (50) дает

$$(C_D)_N = \left[\frac{\kappa}{\ln(z/z_0)} \right]^2. \quad (53)$$

Используя в соотношении (53) $z = 10$ м, находим, что, например, значение $(C_D)_N = 1.1 \times 10^{-3}$ соответствует значению $z_0 = 0.026$ см при $\kappa=0.35$ и $z_0 = 0.03215$ при $\kappa=0.40$.

Над сушей определение z_0 представляет гораздо более сложную проблему. Даже когда подстилающая поверхность является гладкой, значение z_0 зависит от типа растительности и может достигать значений нескольких метров (см., *Sellers, 1965*). Еще более трудно определить эффективную высоту шероховатости для численных моделей, в которых обычно пространственное разрешение не позволяет учесть неоднородности подстилающей поверхности.

Во многих моделях задается постоянное значение z_0 или, что эквивалентно, $(C_D)_N$ для заданной высоты z , различающиеся только для суши и водной поверхности. Например, современная модель общей циркуляции UCLA (*Suarez et al., 1983*) использует для океана $z_0 = 0.02$ см и для суши $z_0 = 45$ см, а 11-уровневая модель Метеорологической службы Великобритании (см., *Carson, 1981*) использует значение $z_0 = 0.01$ см для моря и $z_0 = 10$ см для суши.

б) Использование интегрального числа Ричардсона

Над тропическими океанами приземный слой обычно близок к нейтральному состоянию. Однако над сушей он может быть очень неустойчивым в дневное время. Кроме того, над внетропическими океанами вблизи холодных континентов приземный слой может быть очень устойчивым в ночное время. Поэтому следует рассмотреть зависимость интегральных коэффициентов переноса от Ri_B для общих условий реальных моделей.

Можно выразить функции ϕ_m и ϕ_h через аппроксимационные аналитические функции, такие как приведены в работе *Businger et al. (1971)*, и использовать соответствующие выражения для Φ_m и Φ_h . Тогда уравнение (50) может быть решено для ζ при заданном значении Ri_B методом последовательных приближений. Или же можно затабулировать зависимость значений C_D и C_H от Ri_B , такую как приведена на рис. 4, и затем использовать при расчетах метод табличного поиска. Более экономный путь состоит в прямом выражении C_D и C_H через Ri_B с помощью простых аппроксимационных аналитических выражений. Первой попыткой в этом подходе было выражение, предложенное А. *Katayama* (см. *Arakawa, 1972*), которое имеет следующий вид

$$C_D = \begin{cases} (C_D)_N (1 + a Ri_B)^{-1} & \text{при устойчивости} \\ (C_D)_N (1 + b \sqrt{Ri_B}) & \text{при неустойчивости} \end{cases}. \quad (54)$$

Здесь a и b – константы. Сходные, но более сложные выражения для значений C_D и C_H предложены в работах *Louis (1979)* и *Louis et al. (1981)*.

в) Проблемы с приземными потоками тепла и влаги

Теория подобия, описанная в разделе 4, предполагает, что влиянием виртуальной температуры можно пренебречь. Для очень влажной атмосферы логично заменить потенциальную температуру θ во всех уравнениях в разделе 5 на виртуальную потенциальную температуру θ_v

$$\theta_v = (1 + 0.61q)\theta. \quad (55)$$

Здесь q – массовая доля водяного пара. Тогда соотношение (49) преобразуется в

$$\overline{w'\theta'_v} = -C_H \bar{u} (\bar{\theta}_v - \bar{\theta}_{vs}), \quad (56)$$

Левая часть этого соотношения является квазилинейной комбинацией $\overline{w'\theta'}$ и $\overline{w'q'}$. Поэтому, без дополнительных предположений соотношение (56) не дает по отдельности величин $\overline{w'\theta'}$ и $\overline{w'q'}$. *Holland (1972)* получил, что над тропическим океаном $\overline{w'\theta'}$ лучше коррелирует с величиной $\bar{u}(\bar{q} - \bar{q}_s)$, чем с выражением $\bar{u}(\bar{\theta} - \bar{\theta}_s)$. Несмотря на это, обычно принимается

$$\overline{w'\theta'} = -C_H \bar{u} (\bar{\theta} - \bar{\theta}_s), \quad (57)$$

$$\overline{w'q'} = -C_E \bar{u} (\bar{q} - q_s^*) \quad (58)$$

над водной поверхностью, где C_E – интегральный коэффициент переноса для влаги и q_s^* – массовая доля водяного пара при насыщении при температуре подстилающей поверхности T_s . Далее, во всех моделях принимается

$$C_D = C_H = C_E. \quad (59)$$

Хотя соотношению (59) не хватает явных доказательств, против него нет также и четких возражений.

Влагоперенос от подстилающей поверхности является сложным процессом вследствие его зависимости от влажности почвы, её типа и типа растительного покрова. В большинстве моделей используется предположение

$$E = \beta (W/W^*) E_P, \quad (60)$$

где E – скорость влагопереноса, W – доступная влага почвы, W^* – максимальная доступная влага почвы, которая обычно является заданной константой, E_P – потенциальный влагоперенос, задаваемый с помощью выражения $\rho_0 \times (58)$, β – коэффициент влагопереноса, равный 1 при $W = W^*$, и равный 0 при $W = 0$. Для целей краткосрочного прогнозирования достаточно будет и грубо заданного рассчитанного климатического распределения величины β .

При расчете потока тепла и потенциального влагопереноса над сушей необходимо определить температуру подстилающей поверхности через тепловой баланс подстилающей поверхности Земли. Это можно сделать диагностически в моделях с отсутствием дневного цикла и прогностически в моделях с этим циклом.

Более детальный обзор тем, рассмотренных в разделах, приведенных выше, можно найти в работе *Carson (1981)*.

d) Проблемы, связанные с грубым вертикальным разрешением модели

Даже, если интегральный аэродинамический метод дает точные значения турбулентных потоков на подстилающей поверхности, то его включение в прогностическую модель превращается в серьезную проблему. В данном методе требуются значения скорости ветра, температуры и влажности на каком-либо уровне внутри приземного слоя. В этом случае существо проблемы состоит в том, как получить эти значения с достаточной степенью точности в прогностической модели. Так как толщина приземного слоя очень мала, обычно менее 100 м, то грубое вертикальное разрешение, обычно используемое в прогностических моделях, не может дать непосредственно искомые значения в пределах приземного слоя, которые затем используются в интегральном аэродинамическом методе.

Для того, чтобы получить приблизительные значения в приземном слое (на рис. 5 они представлены звездочками), можно использовать экстраполяцию, используя прогностические значения на уровнях, находящихся выше этого

слоя (на рис. 5 они представлены открытыми кружками). Однако, экстраполяция, проводящаяся по значениям на уровнях, которые расположены частично в свободной атмосфере и частично в ППС, вряд ли является правильной. Единственная ситуация, при которой эта процедура справедлива, это случай, когда весь ППС сжат до очень тонкого слоя и практически нет внешнего (свободного) пограничного слоя, как это представлено на рис. 5с.

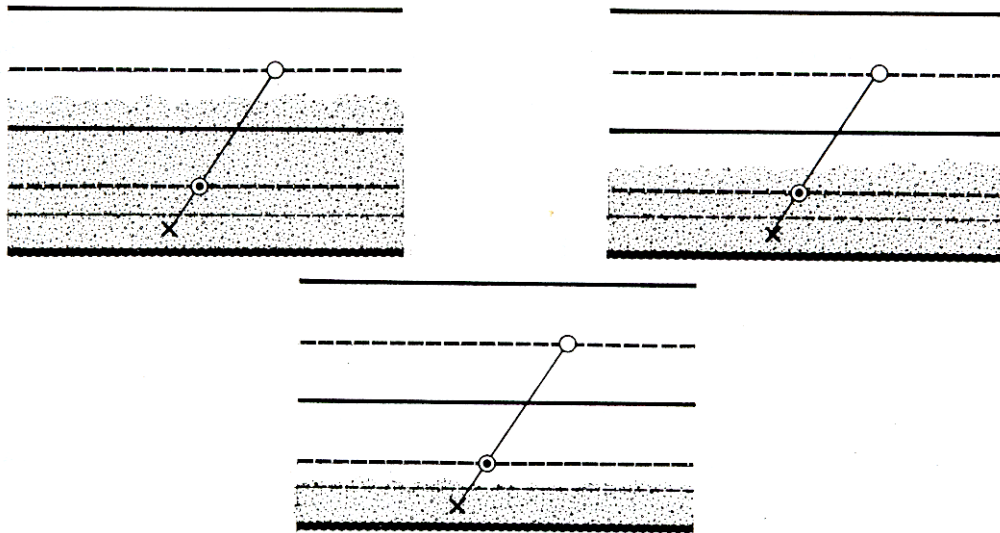


Рис. 5. Типичная вертикальная структура прогностических моделей. Затемненная область представляет собой ППС, а тонкая штриховая линия показывает верхнюю границу приземного слоя. Толстая штриховая линия показывает уровни, на которых вычисляются прогностические переменные. Смотри текст о других деталях рисунка.

Другой способ, который достаточно часто используется во многоуровневных моделях, заключается в использовании в аэродинамическом методе значения прогнозируемой величины на самом нижнем уровне модели, (на рис. 5 она показана кружком с точкой). Этому подходу также не хватает доказательств верности, т.к. этот уровень в большинстве моделей находится над приземным слоем. Некоторые читатели могут подумать, что требуемые значения может дать непосредственное прогнозирование данных величин с явным вертикальным разрешением приземного слоя. Однако, при таком разрешении модели необходимо иметь методику расчета вертикальной конвергенции турбулентных потоков в тонком приповерхностном (*bottom layer*) слое модели. В этом случае потребуется большая точность в прогностических расчетах вертикального профиля потоков вблизи подстилающей поверхности Земли, которую невозможно достичь при использовании ни одной из существующих моделей турбулентности. Это связано с тем, что приземный слой может не совпадать со слоем постоянных потоков. Поэтому для прогностических моделей следует искать диагностический путь определения значений в приземном слое или же, непосредственно, определять турбулентные потоки при моделировании всего ППС. Такого рода подход был предложен в работе *Deardorff (1972)*.

Теория Дирдорфа является примером того, что сегодня называется теорией подобия «экмановского слоя». В дополнение к существующей теории подобия приземного слоя автор предложил соотношения подобия для внешнего

пограничного слоя. Склеивая (by matching) соотношения этих двух теорий подобия, он получил связи между приземными потоками и интегральными свойствами всего ППС. Эти соотношения сходны с выражениями (48) и (49) за исключением того, что здесь \bar{u} и $\bar{\theta}$ заменяются на средние значения по всему ППС - \bar{u}_m и $\bar{\theta}_m$. Кроме того, здесь C_D и C_H являются функциями z/z_0 и Ri_B , которое теперь определяется соотношением

$$Ri_B \equiv g \frac{\bar{\theta}_m - \theta_s}{\theta_{0m}} \frac{h}{\bar{u}_m^2} \quad (61)$$

Здесь h – высота всего ППС. *Deardorff (1972)* представил графики и простые аналитические выражения, представляющие указанные выше функции зависимости аэродинамических коэффициентов от указанных величин. Нынешняя модель общей циркуляции атмосферы UCLA использует данную формулировку расчета приземных потоков.

6. Слой перемешивания

Если пограничный слой является неустойчиво стратифицированным, то обычно наблюдаются конвективные элементы, распространяющиеся в устойчиво стратифицированный слой, располагающийся над ним. Поднимающиеся конвективные элементы на определенном уровне, который показан темной точкой на рис. 6, теряют положительную плавучесть, по инерции затем проскакивают на более высокий уровень, показанный на рис. 6 открытым кружком. Здесь конвективный элемент распадается и воздух, который вынесен вверх этим конвективным элементом, распространяется по горизонтали.

За счет турбулентности, генерируемой такими конвективными элементами, слой воздуха, расположенный ниже уровня B (но выше приземного слоя) на рис. 7, стремится к состоянию хорошей перемешанности, приводя к квазиоднородному вертикальному распределению $\bar{\theta}_v$ и \bar{q} (и поэтому $\bar{\theta}$). В результате здесь формируется слой перемешивания.

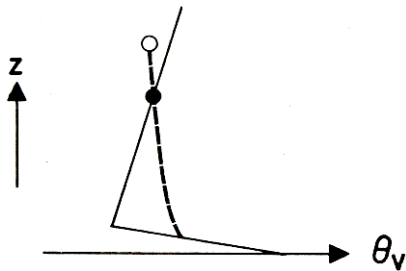
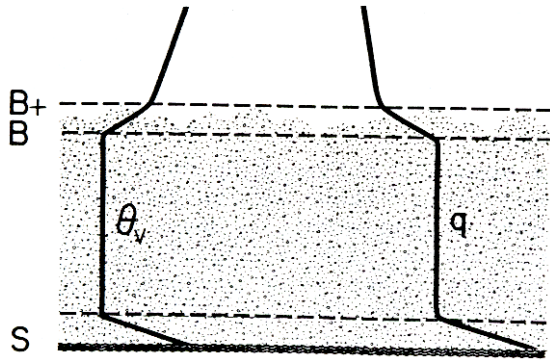


Рис. 6. Схематические профили $\bar{\theta}_v$ для окружающей среды (сплошная линия) и поднимающейся конвективной ячейки (прерывистая линия)

Этот слой характеризуется быстрыми положительными изменениями $\bar{\theta}_v$ и $\bar{\theta}$ (инверсия) и быстрым отрицательным изменением $\bar{\theta}$. Этот слой обычно сверху накрыт (*sapped by*) сравнительно тонким переходным слоем – слоем, расположенным между уровнями B и B^+ на рис. 7. \bar{q} .

Вертикальное распределение значений членов в уравнении баланса кинетической энергии турбулентности (15) по данным самолетных измерений турбулентности представлено на рис. 8. Здесь $e' \equiv \frac{1}{2} \Lambda'^2$ и $\bar{u}'/\rho \equiv -\overline{w'\Lambda'}$. Отметим, что генерация кинетической энергии за счет сдвига ветра в значительной степени

сконцентрирована вблизи подстилающей поверхности, а генерация за счет работы силы плавучести максимальна вблизи подстилающей поверхности и практически линейно убывает с высотой. Диссипация кинетической энергии турбулентности более или менее однородно распределена по вертикали, конвергенция переноса кинетической энергии отрицательна (эффект дивергенции) в нижней части и положительна (эффект конвергенции) в верхней части ППС.



Диссипация кинетической энергии турбулентности более или менее однородно распределена по вертикали, конвергенция переноса кинетической энергии отрицательна (эффект дивергенции) в нижней части и положительна (эффект конвергенции) в верхней части ППС.

Рис. 7. Структура идеализированного слоя смешения.

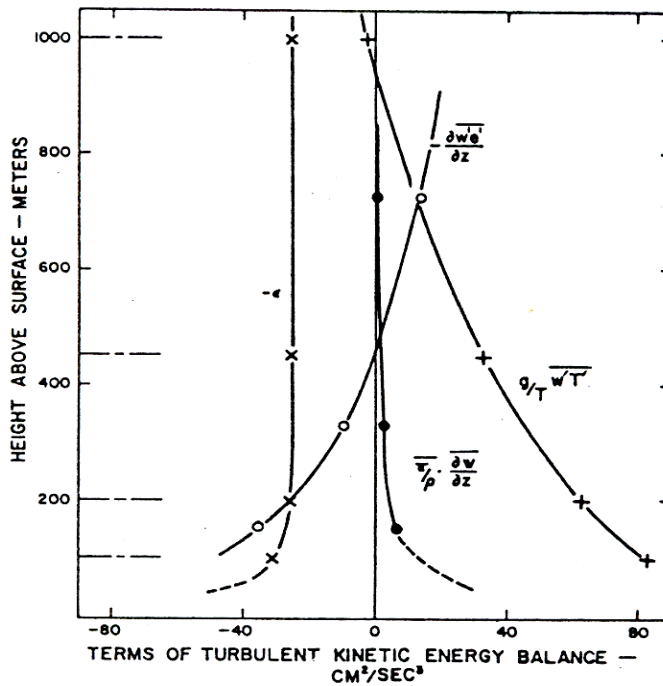
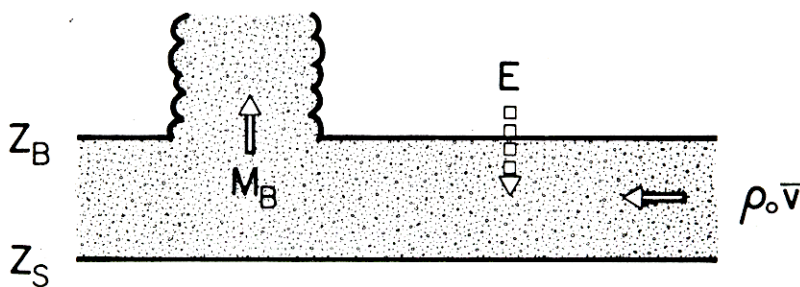


Рис. 8. Измеренные значения членов в уравнении баланса кинетической энергии турбулентности для неустойчивого ППС (По *Lenshow*, 1970).



Высота верхней границы слоя перемешивания, Z_B , может быть спрогнозирована через баланс массы для слоя перемешивания. Сначала имеем

Рис. 9. Члены в уравнении баланса массы (62).

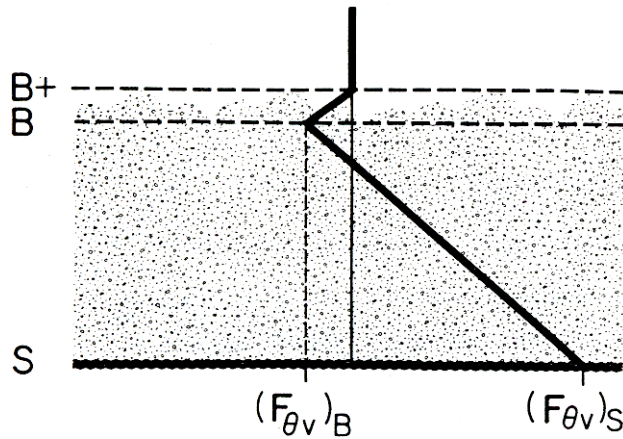
$$\rho_m \frac{\partial Z_B}{\partial t} = -\nabla \cdot \int_{z_s}^{z_B} \rho_0 \bar{\Lambda} dz + E - M_B. \quad (62)$$

Здесь ρ_m - среднее значение ρ_0 в слое перемешивания, z_s - высота уровня подстилающей поверхности, E - член, характеризующий эффект вовлечения воздуха из свободной атмосферы в слой перемешивания через уровень B , M_B - поток массы из слоя перемешивания к кучевообразным облакам, если они существуют (см. рис. 9).

Используя уравнение неразрывности (2), нижнее граничное условие $\bar{w}_s = \bar{\Lambda} \nabla Z_s$ и $\rho_m \approx \rho_B \equiv (\rho_0)_B$, получим

$$\frac{\partial Z_B}{\partial t} + \bar{\Lambda} \nabla Z_B = \bar{w}_B + \frac{1}{\rho_B} (E - M_B). \quad (63)$$

Когда консервативная переменная A является хорошо перемешанной по вертикали и продолжает в течение некоторого времени оставаться хорошо перемешанной, в этом случае турбулентный поток этой величины,



должен быть квазилинейной функцией высоты ниже уровня B . На рис. 10 схематически представлен типичный профиль F_{θ_v} , представляющий собой генерацию кинетической энергии турбулентности за счет работы силы плавучести.

Рис. 10. Схематический вертикальный профиль F_{θ_v} .

Отрицательная величина потока $(F_{\theta_v})_B$ обусловлена проскакиванием конвективного элемента через этот уровень. Если пренебречь генерацией кинетической энергии за счет сдвига ветра, то при отсутствии диссипации следует ожидать $(F_{\theta_v})_B = -(F_{\theta_v})_S$, так что отсутствует суммарная генерация кинетической энергии за счет работы силы плавучести. С другой стороны, можно ожидать, что в случае очень сильной диссипации $(F_{\theta_v})_B = 0$ (т.е. нет проскакивания).

Обычно

$$(F_{\theta_v})_B = -k(F_{\theta_v})_S, \quad (64)$$

где k находится в диапазоне $0.1 \sim 0.3$ (см. для обзора *Stull*, 1976).

Допустим, что переходной слой между уровнями B и B^+ очень тонкий. В этом случае можно пренебречь накоплением θ_v в этом слое и, поэтому, суммарный поток величины θ_v через уровень B , а также через уровень B^+ должны быть непрерывными. Таким образом получаем

$$(F_{\theta_v})_B - (\bar{\theta}_v)_B E = 0 - E(\bar{\theta}_v)_{B^-}, \quad (65)$$

или
$$(F_{\theta_v})_B = -E \Delta \bar{\theta}_v, \quad (66)$$

где
$$\Delta \bar{\theta}_v = (\bar{\theta}_v)_{B^+} - (\bar{\theta}_v)_B. \quad (67)$$

Уравнения (64) и (67) дают возможность определить скорость вовлечения E для заданных значений $(F_{\theta_v})_S$ и $\Delta \bar{\theta}_v$.

До сих пор мы допускали, что воздух в ППС является ненасыщенным. Если же верхняя граница ППС располагается выше уровня конденсации C (см. рис.11), то вверху наблюдается слой слоисто-кучевой облаков, как показано на рис.11 и следовательно, ППС накрыт сверху облачностью. Детальное обсуждение этого типа ППС лежит вне пределов данной лекции; однако важно указать, что у верхней границы облачности располагается область сильного радиационного охлаждения, там же происходят фазовые превращения воды и все это сильно изменяет профиль F_{θ_v} , как это схематично представлено на рис.11. Для того, чтобы ППС, накрытый сверху облаками, был «неустойчивым» (т.е. суммарная генерация энергии за счет работы силы плавучести положительная) необходимо, чтобы F_{θ_v} было положительным, т.к. конвекция может возникнуть за счет радиационного охлаждения в верхней части облаков.

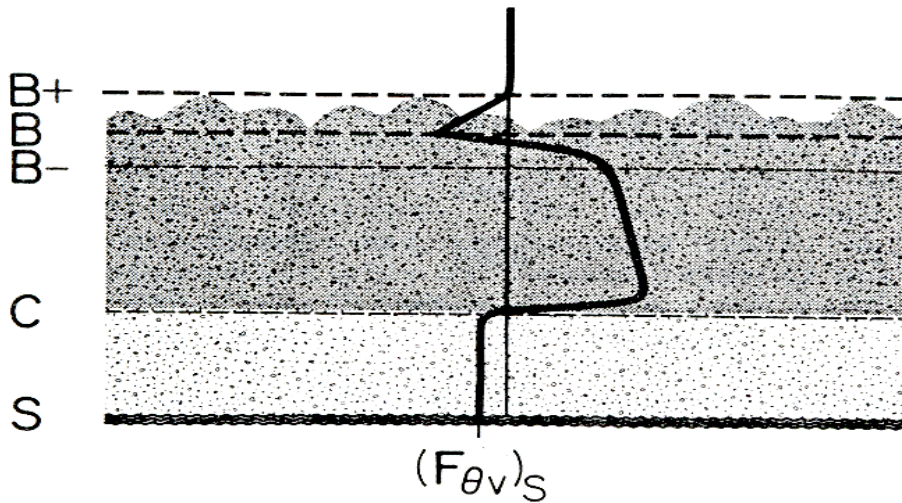


Рис. 11. Схематический профиль F_{θ_v} для ППС, накрытого сверху облаками

7. К-теория и модели более высокого уровня замыкания

а) К-теория

Эта теория, базирующаяся на соотношении (18) с выбранным соответствующим образом коэффициентом K , является самой простой формулировкой турбулентных потоков. В некоторых моделях величина K рассматривается как «эмпирическая» константа, однако более разумным будет предположить, что K является функцией высоты и числа Ричардсона. По аналогии с соотношениями (40) и (41) для приземного слоя, можно допустить, что

$$K_m = I^2 f_m(Ri), \quad (68)$$

$$K_h = I^2 f_h(Ri), \quad (69)$$

Следуя *Blackadar* (1962), обобщением соотношения (42) является часто используемое выражение

$$\ell = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / \ell_\infty}. \quad (70)$$

Здесь ℓ_∞ - заданная длина, обычно принимаемая равной 100 м.

Для внешнего пограничного слоя имеется мало теоретических или экспериментальных указаний для определения функций $f_m(Ri)$ и $f_h(Ri)$. В качестве примера формулировки этих функций смотри работы *Louis* (1979) *Louis et al.* (1982).

б) Модели турбулентного замыкания

В К-теории предполагается существование характерного масштаба длины для членов, описывающих турбулентный перенос в уравнениях для средних величин, таких как (13) и (14). Так как эти уравнения являются уравнениями для первых моментов, то К-теорию можно назвать моделью замыкания первого порядка. Независимо от формы $f_m(Ri)$ и $f_h(Ri)$, недостатком К-теории является то, что турбулентные потоки в данной точке связаны с полем средних величин только в этой точке. В частности, эта теория не учитывает влияние переноса (или диффузии) на турбулентные поля, например $\overline{w'e'}$ на рис.8.

В моделях замыкания более высокого порядка, с другой стороны, предполагается наличие характерного масштаба длины в уравнениях для более высоких моментов. Например, в моделях замыкания второго порядка замыкающие допущения вводятся в уравнения для $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'_i v'_j})$, $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\theta'^2})$ и $\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'_i \theta'})$.

Mellor and Yamada (1974) предложили наиболее информативную иерархию разработанных к настоящему времени моделей турбулентного замыкания. Они показали, что в зависимости от степени анизотропии упрощения должны вводиться систематически, что приводит к различным «уровням» моделей замыкания. Таблица 1 представляет те вторые моменты, которые рассчитываются прогностически (т.е. не упрощаются с помощью замыкающих допущений) на

каждом уровне. Отметим, что $\overline{v'_i v'_i} = \overline{V'^2}$ и $\overline{v'_i v'_j}$ включает и $\overline{v'_i v'_i}$. Более детально смотри работы *Mellor and Yamada* (1974, 1982).

Таблица 1.

Прогностические переменные в моделях замыкания второго порядка по *Mellor and Yamada* (1974)

уровень 1	ни одной
уровень 2	ни одной
уровень $2\frac{1}{2}$	$\overline{v'_i v'_i}$
уровень 3	$\overline{v'_i v'_j}, \overline{\theta'^2}$
уровень 4	$\overline{v'_i v'_j}, \overline{\theta'^2}, \overline{v'_i \theta'}$

8. Параметризация внешнего пограничного слоя: примеры, достоинства и недостатки различных подходов

Обычно турбулентность, генерируемая за счет прогрева подстилающей поверхности (или испарения) и вертикальным сдвигом среднего потока распространяется намного выше тонкого приземного слоя, формируя тем самым внешний пограничный слой. В этом слое проявляются наиболее сложные проблемы параметризации ППС. Переход от ППС к свободной атмосфере, расположенной над ним, может быть постепенным с медленно “умирающей” с высотой турбулентностью; или же этот переход может быть очень резким, что типично для неустойчивой ситуации, при которой хорошо перемешанный слой накрыт сверху тонкой инверсией. Более того, наличие слоя слоисто-кучевых облаков в верхней части ППС обуславливает резкие изменения характеристик ППС. Радиационное охлаждение вблизи верхней границы облачности становится доминирующим или управляющим механизмом развития турбулентности, и переходной слой становится еще более резким, чем это было при неустойчивой стратификации при отсутствии накрывающей облачности. В этом переходном слое схема параметризации должна учитывать взаимосвязанные турбулентные, влажностные и радиационные процессы, а также устойчивость слоя слоисто-кучевой облачности.

Имеется три основных подхода к параметризации внешнего пограничного слоя:

- подход, основанный на использовании К-теории,
- подход, основанный на использовании моделей замыкания,
- подход, основанный на понятии слоя смешения.

Одной из наиболее успешных параметризаций в рамках К-теории является параметризация, используемая в оперативной модели ECMWF и описанная в работе *Louis et al.* (1982). По сравнению с двумя другими подходами, использование К-теории является сравнительно простым подходом и, вероятно,

наиболее подходящим для моделей, реализуемым на ЭВМ с ограниченной мощностью. Однако необходимо понимать слабости этого подхода, на которые указывалось в параграфе 7b. Эта сложность особенно характерна в слое перемешивания и заключается в том, что в этом слое поток F_{0v} может достигать очень больших значений даже там, где локальное значение Ri мало. Кроме того, как поступать в случае ППС, накрытого сверху облачностью. Поэтому в данном подходе необходима хорошая настройка модели.

Примером параметризации в рамках подхода с использованием модели замыкания является параметризация, используемая в версии E2 модели GFDL и основанной на модели замыкания уровня $2\frac{1}{2}$ по классификации *Мэллора и Ямады*. Эта параметризация описана в работе *Miyakoda and Sitrus (1977)*. Модели замыкания второго порядка приобретают популярность и являются перспективными в будущем. Однако такие модели все еще находятся в стадии разработки. Трудности в их использовании опять проявляется в случае слоя перемешивания. Здесь мелкое вертикальное разрешение, необходимое для модели замыкания, не нужно в слое перемешивания. С другой стороны, переходная зона вблизи верхней границы ППС имеет структуру на таких масштабах, которые не могут быть разрешены в любой вертикальной сетке, используемой на практике в прогностической модели, хотя характеристики этой зоны (например, мощность инверсии) играет существенную роль в любых формулировках турбулентности.

Примером параметризации в рамках подхода слоя смещения является параметризация, используемая в современной модели общей циркуляции атмосферы UCLA и описанная *Suares et al. (1983)*. Одним из преимуществ этого подхода является то, что кроме его простоты по сравнению с использованием моделей замыкания в его рамках, можно точно сформулировать процессы динамического и массового обмена, которые ответственны за взаимодействие со свободной атмосферой, без слишком высокого разрешения. (Процессы массового обмена, упомянутые выше, включают в себя и турбулентное вовлечение и поток массы в кучевом облаке). В этом подходе очевидной трудностью является предположение о хорошо перемешанном слое вероятно неверно в том случае, когда пограничный слой точно не определен, как для устойчивого ППС, в котором турбулентность генерируется только сдвигом среднего ветра.

Проблема параметризации планетарного пограничного слоя еще далека от разрешения, и это, вероятно, является одним из наиболее слабых аспектов существующих прогностических моделей. Поэтому дальнейшим исследованиям в этой области следует отдать высокий приоритет.

ЛИТЕРАТУРА

- Andre, J.-C.*, 1982: Parameterization schemes for the planetary boundary layer, a brief review and some general remarks. Workshop on planetary boundary layer parameterization, 25-27 November 1981, European Centre for Medium Forecasts, 15-34.
- Anthes, R.A.*, 1983: Regional models of the atmosphere in middle latitudes. *Mon. Wea. Rev.*, 111, 1306-1335.

- Arakawa, A.*, 1972: Design of the UCLA general circulation model. Numerical Simulation of Weather and Climate, Technical Report No. 7, Dept. Meteorology, University of California, Los Angeles, 116 pp.
- Augstein, E.*, 1978: The atmospheric boundary layer over the tropical oceans. Meteorology over the Tropical Oceans, 73-103, Roy. Meteor. Soc., Bracknell, England
- Blackadar, A.K.*, 1962: The vertical distribution of wind and turbulent exchange in neutral atmosphere. J Geophys. Res., 67, 3095-3102.
- Businger, J.A., J.C. Wyngaard, Y. Izumi and E.F. Bradley*, 1972: Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. J. Atmos. Sci., 28, 181-189.
- Carson, D.J.*, 1981: Current parameterizations of land-surface processes in atmospheric general circulation models. Study Conf. Land-surface Processes in Atmospheric GCM's, Greenbelt, Maryland, Jan, 81.
- Deardorff, J.M.*, 1972: Parameterization of the planetary boundary layer for use in general circulation models. Mon. Wea. Rev., 100, 93-106.
- Holland, J.Z.*, 1972: Comparative evaluation of some BOMEX measurements of sea surface evaporation, energy flux, and stress. J. Phys. Ocean., 2, 456-476.
- Lenshow, D.H.*, 1970: Airplane measurements of planetary boundary structure. J Appl. Met., 9, 874-884.
- Louis, J.-F.*, 1979: A parameteric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. Boundary-layer Meteorol., 17, 187-202.
- Louis, J.-F., M. Tiedtke and J. Geleyn*, 1982: A short history of the PBL parameterization at ECMWF. Workshop on planetary boundary layer parameterization, 25-27 November 1981, European Centre for Medium Forecasts, 59-79.
- Mellor, G.L. and T. Yamada*, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layer. J. Atmos. Sci., 31, 1791-1806.
- Mellor, G.L. and T. Yamada*, 1982: Development of a of turbulence closure model for geophysical fluid problems, Rev. Geophys. Space Phys., 20, 851-875.
- Miyakoda, K. and J. Sitrus*, 1977: Comparative integrations of global models with various parameterized processes of sub-grid scale vertical transports: Description of parameterizations. Beitr. Phys. Atmos., 50, 445-487.
- Monin, A.S. and A.M. Obukhov*, 1954: Basic laws of turbulent mixing in the ground layer of the atmosphere. Akad. Nauk SSR Geofiz. Inst. Tr., 151, 163-187.
- Ogura, Y. and N.A. Phillips*, 1962: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. J. Atmos. Sci., 19, 173-179.
- Sellers, W.D.*, 1965: Physical Climatology. Univ. Of Chicago Press, 272 pp.
- Stull, D.K.*, 1976: The energetics of entrainment across a density surface. J. Atmos. Sci., 33, 1260-1267.

Х. Д. ХЕРЗОГ (H.-J. Herzog)

ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ

Initialization

Part I (№ 11) pp. 235-256

1. Введение

Под инициализацией обычно понимают процесс соответствующего приспособления начальных полей массы и скорости с целью предотвращения «загрязнения» области прогноза значительными ложными инерционно-гравитационными волнами в ходе интегрирования прогностической модели. Эта процедура и является общим предметом данной лекции. Однако целью нашего обсуждения не является повторение фактов, связанных с инициализацией, или обзор огромного числа методов инициализации, которые применялись до настоящего времени, т.к. есть большое число публикаций, отражающих в общих чертах состояние данной проблемы к настоящему времени (например, *Bengtsson, 1975; Daley, 1980; Williams, 1980; Browning et al., 1980; Morel, 1981; Bube and Ghill, 1981; Kasahara, 1982; Wergen, 1982; Cullen, 1983*).

Мы рассмотрим проблему инициализации для конкретного случая моделирования по ограниченной территории в средних широтах. Нет сомнений, что эта задача достаточно хорошо изучена в рамках общих успехов в инициализации исходных данных для моделей по полным уравнениям. Однако существуют дополнительные проблемы, непосредственно связанные со специфической задачей моделирования по ограниченной территории. С одной стороны, есть надежда получить лучшие результаты прогноза за счет хорошо подогнанных данных в начале процедуры прогноза, и с другой стороны, важно также уберечь процесс интегрирования чистым от ложных гравитационных волн. Последний аспект представляет особый интерес даже на первых шагах интегрирования по ограниченной территории, т.к. предел предсказуемости региональной модели сравнительно ограничен. Это связано как с более коротким временем жизни атмосферных явлений, которые здесь можно моделировать в пределах разрешения сетки, так и с тем, что ошибки, связанные с граничными условиями, быстрее доходят до середины области расчетов. Таким образом, *spin-up time* модели должно быть по возможности наиболее коротким. Это и является целью инициализации в узком смысле слова, и мы будем заниматься именно этим аспектом. Другой аспект инициализации включает корректировку анализа с помощью процедуры инициализации, так чтобы производимые изменения согласовались с ошибками анализа. Эта процедура находится на границе между собственно анализом и инициализацией и, поэтому, здесь не будет определяться и рассматриваться.

Нас будет интересовать применимость к рассматриваемым моделям методики инициализации нормальной модой, которая показала себя как мощный метод для глобальных и полусферных моделей. Однако, перед рассмотрением нелинейной инициализации нормальной модой (NMI) для моделей по ограниченной территории (MOT) в разделе 2 в качестве исходной базы будут проанализированы важные аспекты NMI для периодической области. В разделе 3

кратко обсуждаются основы другого эффективного метода инициализации – метод ограниченной производной (*bounded derivative method*). В разделе 4 приводится вывод динамических уравнений в пространстве моды, где выполняется разделение узлов сетки для линейных членов по схеме сетки А (параграф 4.3) и сетке С (параграф 4.4), и на основе полученных уравнений моды демонстрируется методика фильтрации гравитационной моды (см. параграф 4.5). И в завершение, в разделе 5 приводятся результаты численных экспериментов на основе этого нового подхода.

2. Введение в метод инициализации нормальной модой для периодической области

Данное исходное обсуждение основывается на использовании пространственно одномерных линеаризованных уравнениях мелкой воды, записанных в декартовых координатах в плоскости, касательной к поверхности Земли на средней широте φ_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \equiv A, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} \equiv B, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} + f_0 \bar{u} v \equiv C. \quad (1.3)$$

Здесь u, v – составляющие вектора скорости по осям X и Y (координатные оси направлены как обычно); f_0 – параметр Кориолиса на широте φ_0 ; ϕ – отклонение от равновесного значения $\bar{\phi} \equiv C_0^2$; \bar{u} – постоянная средняя зональная скорость потока. Все переменные не зависят от координаты Y . Член $f_0 \bar{u} v$ представляет собой β -эффект в этом простом случае.

Метеорологическая проблема инициализации на примере этой простой линеаризованной системы уравнений была тщательно рассмотрена в работе *Hinkelmann* (1965). Он показал, что настройка на нуль начальных амплитуд гравитационных мод приводит к начальному сбалансированному состоянию, при интегрировании которого отсутствуют «шумы». Это отфильтрованное начальное условие описывается как

$$u(x, 0) = \frac{\bar{u} - c_1}{f_0^2/k^2 - (\bar{u} - c_1)^2} \phi(x, 0), \quad (2.1)$$

$$v(x, 0) = \frac{if_0/k}{f_0^2/k^2 - (\bar{u} - c_1)^2} \phi(x, 0) \quad (2.2)$$

где
$$c_1 \approx \bar{u} - \frac{f_0^2 \bar{u}}{k^2 C_0^2 + f_0^2}; \quad (2.3)$$

k – волновое число Фурье-компонента решения данной системы уравнений. Можно также отметить, что аппроксимационную форму (2.1) и (2.2) с помощью (2.3) при характерных значениях $k \sim 2\pi/(1000 \text{ км})$, $f_0 \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $C_0 \sim 300 \text{ мс}^{-1}$, $\bar{u} \sim 10 \text{ мс}^{-1}$ можно записать как

$$u(x,0) \approx \frac{\bar{u}k^2 / (k^2 C_0^2 + f_0^2)}{1 - f_0^2 k^2 \bar{u}^2 / (k^2 C_0^2 + f_0^2)^2} \phi(x,0) \approx \frac{\bar{u}k^2}{k^2 C_0^2 + f_0^2} \left(1 + \frac{f_0^2 k^2 \bar{u}^2}{(k^2 C_0^2 + f_0^2)^2} \right) \phi(x,0), \quad (2.4)$$

$$v(x,0) \approx \frac{ik/f_0}{1 - f_0^2 k^2 \bar{u}^2 / (k^2 C_0^2 + f_0^2)^2} \phi(x,0) \approx \frac{ik}{f_0} \left(1 + \frac{f_0^2 k^2 \bar{u}^2}{(k^2 C_0^2 + f_0^2)^2} \right) \phi(x,0). \quad (2.5)$$

Процедура, приводящая к этому начальному состоянию, точно совпадает с известной линейной инициализацией нормальной модой, которая для данной линейной системы естественно является необходимой и достаточной мерой. *Hinkelmann* (1965) продемонстрировал, что свободное от шумов начальное условие (2) может быть получено с помощью начальных ограничений

$$\frac{d^n D}{dt^n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^{n+1} D}{dt^{n+1}} = 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $D = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ - дивергенция. Этот метод включает в себя решение системы уравнений и можно показать, что этот метод в некоторой мере связан с другой методикой, в которой сохраняются ограниченными производные по времени с тем, чтобы таким образом отфильтровать гравитационные моды с самого начала интегрирования. Однако инициализация, основанная на ограничениях (3) недостаточная общая в нелинейном случае, который представляет для нас главный интерес.

Было обнаружено, что применение нелинейной инициализации нормальной модой (NMI), разработанной независимо *Machenhauer* (1977) и *Baer* (1977) (см. также работу *Baer and Tribbia*, 1977). Мы попытаемся описать эту методику с помощью линейной системы уравнений, в которой нелинейные эффекты представлены функциями A , B и C (см. уравнения (1.1-1.3)). Используя разложение в ряд Фурье

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \\ \phi(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{pmatrix} e^{ikx}, \quad (4)$$

получаем спектральную систему
$$\frac{d\vec{X}}{dt} + iA\vec{X} = \vec{M}, \quad (5.1)$$

где
$$\vec{X} = (\tilde{u} \ \tilde{v} \ \tilde{\phi})^T, \quad \vec{M} = (\tilde{A} \ \tilde{B} \ \tilde{C})^T \quad \text{и} \quad (5.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & if_0 & k \\ -if_0 & 0 & 0 \\ kc_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Для того, чтобы выполнить разделение мод, выполним преобразование подобия

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad (6)$$

где собственные частоты, которые являются собственными значениями A , имеют вид

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_{2,3} = \pm\sigma, \quad \sigma = \sqrt{k^2 c_0^2 + f_0^2}. \quad (7)$$

Эти собственные частоты связаны с частотными нормальными модами, которые представляют собой колонные вектора (*column vectors*) матрицы T . Линейная трансформация

$$\bar{X} = T\bar{Y}, \quad \bar{Y} = T^{-1}\bar{X} \quad (8)$$

и соответствующая проекция
$$\bar{N} = (N_1, N_2, N_3)^T = T^{-1}M^{-1} \quad (9)$$

дает уравнение динамической моды
$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + i\Lambda\bar{Y} = \bar{N}, \quad (10)$$

где компоненты вектора
$$\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T \quad (11)$$

являются коэффициентами моды (амплитудами моды) в соответствии с собственными частотами (7): Y_1 - коэффициент моды Россби, $Y_{2,3}$ - коэффициенты инерционно-гравитационной моды. Для дальнейших иллюстраций будем использовать компонентную форму линейных соотношений (8):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -c_0(Y_2 - Y_3); & Y_1 &= -\frac{ikf_0}{\sigma^2}\tilde{v} + \frac{f_0^2}{\sigma^2 c_0^2}\tilde{\phi}; \\ \tilde{v} &= \frac{ikc_0^2}{f_0}Y_1 + \frac{ic_0 f_0}{\sigma}(Y_2 + Y_3); & Y_2 &= -\frac{1}{2c_0}\tilde{u} - \frac{if_0}{2c_0\sigma}\tilde{v} - \frac{k}{2c_0\sigma}\tilde{\phi}; \\ \tilde{\phi} &= c_0^2 Y_1 - \frac{kc_0^3}{\sigma}(Y_2 + Y_3); & Y_3 &= \frac{1}{2c_0}\tilde{u} - \frac{if_0}{2c_0\sigma}\tilde{v} - \frac{k}{2c_0\sigma}\tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (12)$$

где легко можно видеть форму T и T^{-1} . На основе этой простой алгебры легко получить компоненты (10)

$$\frac{dY_1}{dt} = N_1(Y_1, Y_2, Y_3) \quad (\text{динамика моды Россби}) \quad (13.1)$$

$$\frac{dY_{2,3}}{dt} \pm i\sigma Y_{2,3} = N_{2,3}(Y_1, Y_2, Y_3) \quad (\text{динамика гравитационной моды}) \quad (13.2)$$

Формально, если выделить идентичный оператор линейной модели, эти динамические уравнения в модовой форме являются аналогичными исходным

нелинейным уравнениям. В общем случае нелинейные проекции N_1 и $N_{2,3}$ зависят от всех коэффициентов мод Y_1 и $Y_{2,3}$ довольно сложным образом, который нет необходимости приводить в точном виде. Однако, т.к. здесь мы встречаемся с общей линейной системой, то «нелинейные» проекции можно легко оценить. Они имеют вид

$$N_1 = -ik\tilde{u}\left(1 - \frac{f_0^2}{\sigma^3 c_0}\right)Y_1 + \frac{if_0^4 \bar{u}}{\sigma^3 c_0}(Y_2 + Y_3), \quad (14.1)$$

$$N_{2,3} = -\frac{ik^2 \bar{u} c_0}{2\sigma}Y_1 - ik\bar{u}\left(1 + \frac{f_0^2}{2\sigma^2}\right)Y_{2,3} - \frac{if_0^2 k \bar{u}}{2\sigma^2}Y_{3,2}. \quad (14.2)$$

Идея NMI опирается на допущение, что после проектирования начальных данных из физического пространства в пространство моды коэффициенты гравитационной моды модифицируются таким образом, чтобы на основе (13) быстрые волны в процессе интегрирования были удовлетворительно исключены. Это можно эффективно выполнить при помощи итерационной процедуры, предложенной в работе *Baer and Tribbia (1977)*, (BT-инициализация), которую мы будем обсуждать для случая моделирования по ограниченной территории. Схема BT имеет вид

оценка нулевого порядка

$$Y_{2,3}^{(0)} = 0, \quad Y_1^{(0)} = Y_1, \quad (15.1)$$

оценка первого порядка

$$Y_{2,3}^{(1)} = \pm \frac{1}{i\sigma} N_{2,3}(Y_1 Y_2^{(0)} Y_3^{(0)}), \quad (15.2)$$

оценка второго порядка

$$Y_{2,3}^{(2)} = \pm \frac{1}{i\sigma} \left[N_{2,3}(Y_1 Y_2^{(1)} Y_3^{(1)}) - \frac{dY_{2,3}^{(1)}}{dt} \right] \quad (15.4)$$

и так далее.

где используется допущение $R_0 \sim 0,1$.

Оценка нулевого порядка (15.1) точно соответствует тому, что называется линейной инициализацией модой, впервые примененной в работе *Dickinson and Williamson (1972)*. Вследствие использования нелинейных проекций $N_{2,3}$ исключение амплитуд гравитационных мод не в состоянии предотвратить регенерацию амплитуд гравитационных волн. Поэтому более качественная оценка пытается исключить из начальных данных также и временные изменения гравитационных амплитуд, или, более точно, ограничить эти временные производные. Это является основой последующих оценок (15.2) и (15.3), которые тесно связаны с методом ограниченных производных (BDM) Крейса (*Kreiss, 1979*), если его применить в пространстве мод (*Kasahara, 1982*), в котором мы встречаемся с спектральными уравнениями подобными (13).

Продемонстрируем эффективность BT-схемы на примере уравнений линейной модели.

Оценка нулевого порядка: Вследствие (15.1) величины $Y_{2,3}$ равны нулю, а коэффициенты моды Россби полной схемы остаются незатронутыми. Последнее характеризует неограниченный подход. Из (12) с учетом (15.1) следует

$$\tilde{u}^{(0)} = 0, \quad \tilde{v}^{(0)} = \frac{ik}{f_0} c_0^2 Y_1, \quad \tilde{\phi}^{(0)} = c_0^2 Y_1,$$

и после исключения Y_1 , получаем

$$\tilde{u}^{(0)} = 0, \quad \tilde{v}^{(0)} = \frac{ik}{f_0} \tilde{\phi}^{(0)}. \quad (16)$$

Эти соотношения представляют собой геострофический баланс, который, как сказано выше, является недостаточным начальным состоянием $D = 0$, ($dD/dt = 0$). Фактически, для того, чтобы лучше определить начальные условия, необходимо задать дивергентную составляющую ветра, отличную от нуля.

Оценка первого порядка: Здесь нам необходимы значения $N_{2,3}(Y_1, 0, 0)$, которые определяются как

$$N_{2,3}(Y_1, 0, 0) = -\frac{ik^2 \bar{u} c_0}{2\sigma} Y_1 \quad (17)$$

(сравни с уравнением (14.2)). Поэтому мы имеем

$$Y_{2,3}^{(0)} = \pm \frac{k^2 \bar{u} c_0}{2\sigma^2} Y_1, \quad (18)$$

Подставляя (18) в (12), получаем

$$\tilde{u}^{(1)} = \frac{k^2 \bar{u} c_0}{2\sigma^2} Y_1, \quad \tilde{v}^{(1)} = \frac{ik}{f_0} c_0^2 Y_1, \quad \tilde{\phi}^{(1)} = c_0^2 Y_1$$

и после исключения Y_1 ,

$$\tilde{u}^{(1)} = \frac{k^2 \bar{u}}{\sigma^2} \tilde{\phi}^{(1)}, \quad \tilde{v}^{(1)} = \frac{ik}{f_0} \tilde{\phi}^{(1)}. \quad (19)$$

Как можно видеть, первое нелинейное приближение (15.2) приводит к желаемой небольшой составляющей дивергентного ветра и полученное начальное состояние (19) становится ближе к искомому свободному от шума состоянию (2), чем (16). Результат (19) соответствует ограничению $dD/dt = 0$ и $d^2 D/dt^2 = 0$.

Оценка второго порядка: Аналогично (18), сначала рассчитываем $N_{2,3}(Y_1, Y_2^{(1)}, Y_3^{(1)})$:

$$N_{2,3}(Y_1, Y_2^{(1)}, Y_3^{(1)}) = -\frac{ik^2 \bar{u} c_0}{2\sigma} \left(1 \mp \frac{k\bar{u}}{\sigma}\right) Y_1. \quad (20)$$

Далее необходимо определить тенденцию $\frac{dY_{2,3}^{(1)}}{dt}$, которую здесь можно определить уже точно. Используя (18) и (13.1), получаем

$$\frac{dY_{2,3}^{(1)}}{dt} = \mp \frac{k^2 \bar{u} c_0}{2\sigma^2} \frac{dY_1}{dt} = \pm \frac{ik^3 \bar{u}^2 c_0}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{f_0^2}{\sigma^2}\right) Y_1. \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в ограничение (15.3), приходим к выражению

$$Y_{2,3}^{(2)} = \left(\mp \frac{k^2 \bar{u} c_0}{2\sigma^2} + \frac{k^3 \bar{u} c_0 f_0^2}{2\sigma^2} \right) Y_1.$$

Из (12), используя полученное выражение, имеем

$$\tilde{u}^{(2)} = \frac{k^2 \bar{u} c_0}{\sigma^2} Y_1, \quad \tilde{v}^{(2)} = \frac{ik}{f_0} \left(1 + \frac{k^2 \bar{u}^2 f_0^4}{\sigma^6}\right) c_0^2 Y_1, \quad \tilde{\phi}^{(2)} = \left(1 - \frac{c_0^2 \bar{u}^2 k^4 f_0^2}{\sigma^6}\right) c_0^2 Y_1$$

и после исключения Y_1 ,

$$\tilde{u}^{(2)} \approx \frac{k^2 \bar{u}}{\sigma^2} \left(1 + \frac{(kc_0)^2 (k\bar{u})^2 f_0^2}{\sigma^6}\right) \tilde{\phi}^{(2)} \approx \frac{k^2 \bar{u}}{\sigma^2} \left(1 + \frac{(k\bar{u})^2 f_0^2}{\sigma^4}\right) \tilde{\phi}^{(2)}, \quad (22.1)$$

$$\tilde{v}^{(2)} \approx \frac{ik}{f_0} \left(1 + \frac{(k\bar{u})^2 f_0^4}{\sigma^6}\right) \left(1 + \frac{(kc_0)^2 (k\bar{u})^2 f_0^2}{\sigma^6}\right) \tilde{\phi}^{(2)} \approx \frac{ik}{f_0} \left(1 + \frac{(k\bar{u})^2 f_0^2}{\sigma^4}\right) \tilde{\phi}^{(2)}. \quad (22.2)$$

Сравнение полученного результата с (2.4) и (2.5) показывает, что ВТ-схема способна достичь очень близкого к точно сбалансированному состоянию уже при оценке второго порядка. Этого уже достаточно для демонстрации эффективности NMI-методики, чьи действительные преимущества можно видеть только в случае нелинейной модели. Более того, применение NMI-методики даже в оперативных целях является многообещающим (*Temperton and Williamson, 1979; Daley, 1979*), и поэтому данная методика уже широко используется в глобальных и полусферных моделях в некоторых странах (*WMO, 1982*).

3. Метод ограниченных производных

Другой методикой инициализации достаточной эффективности является метод ограниченных производных (BDM) Крейса (*Kreiss, 1980*), детально описанный в работе *Browning et al. (1980)*. Этот метод опирается на следующий принцип: ряд производных зависимых переменных по времени сохраняется ограниченными в начальный момент времени так, что генерируемые решения изменяются только медленном временном масштабе в нескольких конечных интервалах времени. Связанные с этим принципом начальные ограничения на практике могут быть выведены в физическое пространство. Поэтому нет необходимости конструировать модель мод. Следовательно, методика BDM применима для МОТ. В принципе BDM может быть использована и для глобальных и полусферных моделей, пока нет публикаций о таком опыте.

4. Концепция инициализации нормальной модой для моделей по ограниченной территории (MOT)

4.1. Вводные замечания

Естественно, что при моделировании по ограниченной территории очень желательно использовать методику инициализации нормальной модой (NMI). Мы занимались этой проблемой в связи с работой по моделированию на ограниченной территории. Сложности здесь заключаются в определении правдоподобного метода разложения горизонтальной структуры атмосферного потока так, чтобы окончательно можно было разделить моды MOT на моды Россби и инерционно-гравитационные моды. Для того, чтобы избежать этой проблемы родилась идея инициализации по глобальной территории и интерпретации полученных полей в мелкочаистую MOT (Anthes, 1983). Хотя эта стратегия может быть успешной и полезной, мы понимаем, что она не согласуется с идеями данного семинара. Если отказаться от принципа односторонней вложенной сетки, являющегося традиционным методом мелкочаистого моделирования с сеточными моделями, то осуществимо спектральное фокусирование, предложенное Schmidt (1976, 1982) и способное включить спектральную методику и NMI для региональных моделей, как это уже производилось для спектральной модели (Machenhauer, 1977). В этом вопросе еще много неисследованного и здесь необходимы дальнейшие исследования. Мы сейчас интересуемся исключительно проблемой одностороннего вложения. В этом контексте должен быть также упомянут новый подход к проблеме инициализации при моделировании по ограниченной территории, предложенный в работе Bratseth (1982). Этот метод, вероятно, является эффективным динамическим подходом (интегрирование вперед-назад с временной схемой избирательного подавления), в котором для сохранения метеорологических мод совершенствуются свойства избирательного подавления за счет использования информации о нормальных модах. Однако, их вклад не представляет явной необходимости. С точки зрения того, что схема NMI для периодической области (см. § 2) не подходит для MOT, метод Брайера (Briere, 1982) является достаточно оптимистичным. Подход Брайера рассматривает применение схемы NMI к MOT при зафиксированных во времени граничных условиях. Используемая схема способна разрешать меньшие масштабы с ясным реальным представлением топографии (расстояние между узлами сетки около 35 км, в центре области интегрирования расположены Периней и Альпы). Первые успешные эксперименты по инициализации были продемонстрированы на примере варианта модели, использующей уравнения мелкой воды, а также с бароклинной моделью. При этом использовалась схема NMI по Machenhauer (которая отличается от рассмотренной выше схемы BT (15) игнорированием члена тенденций в (15.3) и в последующих оценках). Идея Брайера, упомянутая также в работе Wergen (1981), состоит в вычитании из мелкомасштабного начального поля искусственного поля, удовлетворяющего зафиксированным во времени граничным условиям, для того, чтобы получить такое модифицированное начальное поле, содержащее нулевые граничные значения. Горизонтальная структура такого разностного поля может быть

затем разложена на синусоидальные базисные функции и таким образом открыта для применения NMI. За дальнейшими деталями мы отсылаем к статье Брайера.

Здесь мы будем следовать другому подходу, разработанному в работах *Herzog and Meyer* (1982, 1983a,b), в котором используется вложенная модель с зависящими от времени граничными условиями. В качестве первого шага здесь используется только адиабатическая схема, хотя именно для MOT в дальнейшем необходимо включить эффекты пограничного слоя, топографии (например, *Wergen*, 1981; *Sundqvist*, 1982), неадиабатических источников и стоков тепла. В дальнейшем мы специально игнорируем вклад вертикальных мод, т.к. это прямо не касается специальных проблем обнаружения модельных мод MOT. Таким образом, мы особенно заинтересованы в изучении горизонтальной структуры. Конструирование вертикальных мод может быть выполнено с помощью методики, изложенной в работе *Temperton and Williamson* (1979), или же по недавно предложенной схеме *Kasahara and Shigesbisa* (1983).

4.2. Основные уравнения

Для того, чтобы продемонстрировать принцип конструирования мод, сознательно используем горизонтально одномерные баротропные уравнения вместо общей двумерной системы. Единственной причиной такого подхода является стремление свести до минимума математические выкладки в дальнейшем. Для рассмотрения двумерного варианта мы отсылаем читателей к нашим статьям, в которых было показано, что область должна быть прямоугольной и метод сеточного разложения вдоль узлов сетки, представленный ниже, должен быть заменен последовательно выполненном сеточным разделением вдоль рядов и колонок узлов сетки.

Для данной задачи используется линейная часть уравнений (1.1)-(1.3), а члены A, B и C в правых частях этих уравнений принимаются как нелинейные функции. Принимается, что f_0 – постоянная часть параметра Кориолиса, а его переменная часть, а также члены, включающие переменный множитель масштаба карты, отличный от единицы, включены в правую часть уравнений. Для бароклинической модели переменные u , v и ϕ являются коэффициентами вертикальной моды, c_0^2 аналогичным образом соответствует одному из вертикальных собственных значений.

4.3. Вывод уравнений динамической моды

Для демонстрации принципов вывода уравнений динамической моды сначала выберем полудискретные (по схеме пространственной сетки A) аналоги используемой системы уравнений:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - f_0 v_j + \frac{1}{2d} (\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) = A_j, \quad (23.1)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + f_0 u_j = B_j, \quad (23.2)$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \frac{c_0^2}{2d} (u_{j+1} - u_{j-1}) = C_j. \quad (23.3)$$

Граничные узлы сетки обозначаются индексами $j = 0, N+1$.

Существуют различные подходы для выполнения соответствующего по-узлового разделения (*grid-pointwise separation*). Один из них начинается с сеточных уравнений (23), записанных в векторной форме следующим образом

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + f_0 \vec{v} + \frac{1}{2d} \mathbf{B} \vec{\phi} = \frac{1}{2d} \mathbf{B} \vec{\phi}^B + \vec{A}, \quad (24.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + f_0 \vec{u} = \vec{B}, \quad (24.2)$$

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{2d} \mathbf{B} \vec{u} = \frac{c_0^2}{2d} \vec{u}^B + \vec{C}. \quad (24.3)$$

Здесь были использованы обозначения

$$\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N)^T, \quad \vec{u}^B = (u_0 \ 0 \ \dots \ 0 - u_{N+1})^T. \quad (25)$$

Аналогичным образом определяются \vec{v} , \vec{v}^B , $\vec{\phi}$, $\vec{\phi}^B$, \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} . Все эти вектора имеют размерность N . Матрица \mathbf{B} имеет размерность $N \times N$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

С помощью преобразования подобия

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{H} = \text{diag}(\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N), \quad (27)$$

где
$$\mu_j = 2i \cos \frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N \quad (28)$$

представляют собой собственные значения матрицы \mathbf{B} . Все вектора системы (24) затем преобразовываются следующим образом

$$\vec{(\cdot)} = \mathbf{H} \vec{(\tilde{\cdot})}, \quad \vec{(\tilde{\cdot})} = \mathbf{H}^{-1} \vec{(\cdot)}, \quad (29)$$

мы приходим к соответствующим векторным уравнениям в компонентной форме

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} - f_0 \tilde{v}_j + i \alpha_j \tilde{\phi}_j = \frac{1}{2d} \tilde{\phi}_j^B + \tilde{A}_j, \quad (30.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t} + f_0 \tilde{u}_j = \tilde{B}_j, \quad (30.2)$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial t} + i \alpha_j c_0^2 \tilde{u}_j = \frac{c_0^2}{2d} \tilde{u}_j^B + \tilde{C}_j, \quad (30.3)$$

где
$$\alpha_j = -i \mu_j / 2d = d^{-1} \cos\left(\frac{j\pi}{N+1}\right) \quad (31)$$

Элементы матриц $H = (h_{kj})$ и $H^{-1} = (h_{kj}^{-1})$ определяются с помощью соотношений

$$h_{kj} = \frac{2}{N+1} i^k \sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right), \quad h_{kj}^{-1} = (-i)^j \sin\left(\frac{j\pi}{N+1}\right), \quad k, j = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Компонентная форма (30) может быть уплотнена в другую векторную форму (которая, как можно видеть, имеет некоторую аналогию с (5.1)):

$$\frac{d \bar{X}_j}{dt} + i A_j \bar{X}_j = G \bar{X}_j^B + \bar{M}_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (33)$$

где
$$\bar{X}_j = (\tilde{u}_j \tilde{v}_j \tilde{\phi}_j)^T, \quad \bar{X}_j^B = (\tilde{u}_j^B \tilde{v}_j^B \tilde{\phi}_j^B)^T, \quad \bar{M}_j = (\tilde{A}_j \tilde{B}_j \tilde{C}_j)^T,$$

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & i f_0 & \alpha_j \\ -i f_0 & 0 & 0 \\ \alpha_j c_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Теперь мы подошли к возможности выполнения разделения линейной части уравнения на моды Россби и моды инерционно-гравитационные. Это будет осуществлено в полной аналогии с соответствующими операциями для периодического варианта, описанного в разделе 2. Используются те же самые формулы. Нам необходимо только заменить волновое число k на α_j . Используя преобразование подобия

$$T_j^{-1} A_j T_j = \Lambda_j = \text{diag}(\varepsilon_{1j}, \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{3j}), \quad (35)$$

с собственными частотами

$$\varepsilon_{1j} = 0, \quad (\varepsilon_{2,3})_j = \pm \sigma_j, \quad \sigma_j = \sqrt{\alpha_j^2 c_0^2 + f_0^2}, \quad (36)$$

с преобразованиями (проекциями)

$$\bar{Y}_j = T_j^{-1} \bar{X}_j, \quad \bar{X}_j = T_j \bar{Y}_j, \quad (37)$$

с проекциями граничных условий

$$\bar{Y}_j^B = T_j^{-1} \bar{X}_j^B, \quad \bar{X}_j^B = T_j \bar{Y}_j^B, \quad (38)$$

и с нелинейными проекциями

$$\vec{N}_j = T_j^{-1} \vec{M}_j, \quad \vec{M}_j = T_j \vec{N}_j, \quad (39)$$

получаем следующие динамические уравнения в модовой форме

$$\frac{d\vec{Y}_j}{dt} + i\Lambda_j \vec{Y}_j = (T_j^{-1} G T_j) \vec{Y}_j^B + \vec{N}_j; \quad j=1, \dots, N \quad (40.1)$$

с определениями

$$\vec{Y}_j = (Y_{1j} \ Y_{2j} \ Y_{3j})^T, \quad \vec{Y}_j^B = (Y_{1j}^B \ Y_{2j}^B \ Y_{3j}^B)^T, \quad \vec{N}_j = (N_{1j} \ N_{2j} \ N_{3j})^T. \quad (40.2)$$

Далее индекс j опускается. В общем числе $3 \times N$ коэффициентов мод (баротропный вариант) содержится N коэффициентов Y_1 моды Россби и $2 \times N$ коэффициентов $Y_{2,3}$ гравитационной моды. В соответствии с этим вновь полученные коэффициенты граничных данных разделяются соответственно на коэффициенты Y_1^B моды Россби и коэффициенты граничных данных $Y_{2,3}^B$ гравитационной моды. Динамическое уравнение (40) затем записываем в компонентном виде

Литература

- Anthes, R.A.*, 1983: Regional models of the atmosphere in middle latitudes. – Mon. Wea. Rev., 111, 1306-1335.
- Baer, F.*, 1977: Adjustment of initial conditions required to suppress gravity oscillations in nonlinear flows. – Beitr. Phys. Atm., 50, 350-366.
- Baer, F., and Tribbia, J.*, 1977: On complete filtering of gravity modes through nonlinear initialization. – Mon. Wea. Rev., 105, 1536-1539.
- Bengtsson, L.*, 1975: 4-dimensional assimilation of meteorological observation. – GARP Publ. Ser., № 15, 76 pp.
- Bratseth, A.M.*, 1982: A simple and efficient approach to the initialization of weather prediction models. – Tellus, 34, 352-357.
- Briere, S.*, 1982: Nonlinear normal mode initialization of a limited area models. – Mon. Wea. Rev., 110, 1166-1186.
- Browning, G., A. Kasahara and H.-O. Kreiss, 1980: Initialization of the primitive equations by the bounded derivation method. - J.Atmos.Sci., 37, 1424-1436.
- Burrige, D.M.*, 1979: Some aspects of large scale numerical modelling of the atmosphere. – ECMWF Seminar, 78 pp.
- Gullen, M.J.F.*, 1983: Current progress and prospects in numerical techniques for weather prediction models. – J.Comp.Phys., 50, 1-37.
- Dalley, R.*, 1979: The application of non-linear normal mode initialization to an operational forecast model. - Atmosphere-Ocean, 17, 97-124.
- Dalley, R.*, 1980: Normal mode initialization. – ECMWF Seminar, 107-158.

- Dickinson, R.E., and D.L. Williamson*, 1972: Free oscillations of a discrete stratified fluid with application to numerical weather prediction. – *J.Atmos.Sci.*, 29, 623-640.
- Haltiner, G.J.*, 1971: Numerical weather prediction. – Willey, New York, 317 pp.
- Haltiner, G.J., and Williamson R.T.*, 1980: Numerical prediction and dynamic meteorology, 2nd edition. – Willey, New York, 477 pp.
- Herzog, H.-J., and A. Meyer*: A concept of a normal mode expansion procedure to a limited-area model.
- 1982: Part I: The derivation of dynamic equations in normal mode form. – *Z. Meteorol.*, 32, 287-294.
- 1983a: Part II: Linear aspects. – *Z. Meteorol.*, 33, 2-5.
- 1983b: Part III: Derivation and theoretical discussion of a nonlinear approach. – *Z. Meteorol.*, 33, 6-11.
- Herzog, H.-J., and A. Meyer*, 1984a: On the mechanism of a non-linear mode initialization procedure for limited-area models demonstrated with the linear shallow-water equations. – *Gerlands. Beitr. Geophys.*, 93, 23-36.
- Herzog, H.-J., and A. Meyer*, 1984b: A limited-area normal mode initialization Study. – To be published in *Arch. Met. Geoph. Biocl., Ser. A*.
- Hinkelmann, K.H.*, 1965: Primitive equations. Lectures on numerical short-range prediction. – WMO Seminar. Hydrometeoizdat. Leningrad, 1969, 306-375. (Имеется русский перевод: *К.Г. Хинкельман*. Полные уравнения. В сб. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. Региональный учебный семинар ВМО, Москва, 17.11-14.12.1965г. – Л., Гидрометеоиздат, 1969, стр. 317-390).
- Kasahara, A., and Y. Shige-hisa*, 1983: Orthogonal vertical normal modes of a vertically staggered discretized atmospheric model. – *Mon.Wea.Rev.*, 111, 1724-1735.
- Kreiss, H.-O.*, 1979: Problems with different time scales for ordinary differential equations. – *SIAM J. Numer. Anal.*, 16, 980-998.
- Kreiss, H.-O.*, 1980: Problems with different time scales for ordinary differential equations. – *Comm.Pure Appl. Math.*, 33, 399-439.
- Mashenhauer, B.*, 1977: On the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model, with applications to non-linear normal mode initialization. – *Beitr. Phys.Atmos.*, 50, 253-271.
- Morel, P.*, 1981: An overview of meteorological data assimilation. Dynamic meteorology: Data assimilation methods. – Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 5-16.
- Обухов А.*, 1949: К вопросу о геострофическом ветре. – *Изв. АН СССР, Сер. Геогр. и Геофиз.*, 13, 1360-1373.
- Rube, K.P., and M. Gill*, 1981: Assimilation of synoptic data and the initialization problem. Dynamic Meteorology: Data assimilation methods. – Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 111-138.
- Schmidt, F.*, 1976: Variably fine mesh in spectral global models. – WMO Seminar on the interpretation of broad scale NWP products for local forecasting purposes. Warsaw, 11-16 October 1976. – WMO, № 40, 15-19.
- Schmidt, F.*, 1982: Cyclone tracing. – *Beitr. Phys.Atmos.*, 55, 335-357.
- Sunquist, H.*, 1982: Initialization in presence of mountains. – *Riv. Meteor. Aeron.*, XLII, 177-184.

- Temperton, C., and D.L. Williamson, 1979: Normal mode initialization for a multi-level grid point model. – ECMWF, Technical Report № 11, 90 pp.
- Wergen, W., 1981: Nonlinear normal mode initialization of a multi-level fine mesh model with steep orography. – Beitr. Phys.Atmos., 54, 389-402.
- Wergen, W., 1982: Initialization. – ECMWF Seminar/Workshop – Interpretation of numerical weather prediction products, 31-59.
- WMO: Numerical weather prediction progress report for 1982.

Ф. Мезингер, З. Джанжич
(Fedor Mesinger, Zavisla I. Janjic)

Сила барического градиента и уравнение гидростатики

Pressure gradient force and Hydrostatic equation
Part I (№ 11) pp. 175-233

1. Введение

При численном моделировании стратифицированного атмосферного потока возникает ряд проблем, связанных с наличием горного рельефа. Эти проблемы принимают различные формы в зависимости от выбранной в модели вертикальной координаты. При наиболее используемой вертикальной координате главная проблема состоит в том, что возможны очень большие ошибки в расчетах силы барического градиента над крутыми склонами гор. Эти проблемы в той или иной форме имеют большую историю неясного представления. Более того, некоторый анализ ошибок с использованием традиционных методов может даже увеличить конфуз.

Следуя статье *Mesinger and Janjic* (1984), в этой лекции мы

- опишем проблему расчета силы барического градиента в конечно-разностных моделях атмосферы и приведем обзор различных подходов, предложенных для того, чтобы удачно обойти главные трудности;
- приведем анализ механизма, ответственного за возникновение проблемы этой ошибки; и
- обсудим ряд методик, используемых для уменьшения ошибки.

Упомянутая выше основная проблема связана с использованием гидростатической аппроксимации, которую можно записать как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}. \quad (1)$$

Здесь Φ – геопотенциал, p – давление, R – газовая постоянная, T – абсолютная температура. Проблема, сама по себе, состоит в расчете силы барического градиента, которая присутствует в горизонтальных уравнениях движения. Если в качестве вертикальной координаты используется, как в (1.1), давление, то горизонтальные составляющие силы барического градиента принимают очень простую форму, $-\nabla_p \Phi$, индекс в операторе дельта обозначает переменную, остающуюся постоянной в процессе дифференцирования. Так как сила барического градиента включает в себя горизонтальные дифференциалы геопотенциала, то дискретизация силы барического градиента будет связана с дискретизацией уравнения гидростатики (1.1).

Другим членом в основных уравнениях, сильно связанным с силой барического градиента, является т.н. «омега-альфа» член уравнения притока тепла, $\kappa T \omega / p$. Здесь $\kappa = R/C_p$, где C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, и $\omega = dp/dt$ – «вертикальная скорость» в изобарической системе координат. Обычно, как очень существенное, принимается, что этот член определяется таким образом, чтобы гарантировать отсутствие ложной генерации энергии при превращениях кинетической и общей потенциальной энергии. Таким образом, в соответствии с (1.1), мы в этой лекции главным образом будем связаны с членами/уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dots - \nabla_p \Phi + \dots, \quad (1.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa T \omega}{p} + \dots \quad (1.3)$$

Здесь V – горизонтальная составляющая скорости и члены в (1.3), обозначенные через многоточие, описывают радиационного и другого неадиабатического прогрева.

Для избежания трудностей с нижним граничным условием почти во всех полных атмосферных моделях используются координаты, повторяющие рельеф подстилающей поверхности. Однако это приводит к появлению двух членов в выражении для силы барического градиента. Например, в исходной «сигма»-системе координат (*Phillips, 1957*)

$$\sigma \equiv p/P_s, \quad (1.4)$$

где индекс S относится к приземным значениям, получаем

$$-\nabla_p \Phi = -\nabla_\sigma \Phi - RT \nabla \ln P_s. \quad (1.5)$$

Над наклонной поверхностью два члена в правой части (1.5) обычно имеют большие значения, но противоположных знаков. Если, скажем, они по отдельности в 10 раз больше, чем их сумма, то 1% -ная ошибка в температуре (2-3⁰C) будет приводить к 10%-ной ошибке в определении силы барического градиента (*Sundqvist, 1975*).

Еще не доказана возможность конструирования схемы, свободной от этой ошибки. Однако разработаны методики, позволяющие удерживать эту

ошибку в разумных и приемлемых пределах. Кроме того, разработаны схемы, поддерживающие интегральные свойства силы барического градиента (Arakawa, 1972). Эта особенность была вероятно в большей степени также направлена на контроль эффектов, представляющих вклад ошибки, проинтегрированной по вертикали завихренности, не обусловленной ложными источниками или стоками (Arakawa and Suarez, 1983). В оставшейся части этого параграфа мы вкратце рассмотрим эти различные подходы.

Первым откликом на данную проблему была методика вертикальной интерполяции геопотенциала с «сигма»-поверхностей на поверхности постоянного давления (Smagorinsky et al., 1967; Kurihara, 1968; Tomine and Abe, 1982). Однако при этом остаются проблемы вблизи подстилающей поверхности, где необходима экстраполяция для получения значений геопотенциала у земли. Кроме того, не очевиден критерий этого подхода к конструированию схемы для «альфа-омега» члена.

Схема Аракавы (Arakawa, 1972; Arakawa and Lamb, 1977) поддерживает свойство силы барического градиента не генерировать циркуляции проинтегрированного по вертикали количества движения вдоль контура земной топографии. А именно, имеем, обозначая через g – ускорение свободного падения и через индекс T значения на самой верхней изобарической поверхности модели,

$$-\frac{1}{g} \int_{P_T}^{P_S} \nabla_p \Phi dp = -\frac{1}{g} \left[\nabla \int_{P_T}^{P_S} (\Phi - \Phi_s) dp + (P_s - P_T) \nabla \Phi_s \right]. \quad (1.6)$$

Таким образом, интеграл от левой части (1.6) вдоль любой замкнутой кривой, очерчивающей земной рельеф, будет равен нулю, и за счет силы барического градиента не генерируется циркуляция вдоль такой кривой проинтегрированного по вертикали момента. Схема Аракавы (1972) в дальнейшем была усовершенствована в целях удовлетворения дополнительных требований (Phillips, 1974; Tokioka, 1978), и интенсивно используется в моделях общей циркуляции и прогноза погоды (например, Stackpole et al., 1980).

Simmons and Burridge (1981) разработали схему, поддерживающую одномерный аналог (1.6), необходимый для сохранения углового момента. Однако эта схема сконструирована с использованием очень обобщенных «гибридных» вертикальных координат и для «локального» уравнения гидростатики; поэтому схема избежала физически нереалистичной зависимости геопотенциала на самом нижнем уровне от температуры на всех уровнях модели, что присуще схеме Аракавы (1972). Наиболее сжатая формулировка требования дифференцирования по вертикали в «сигма»-системе координат, возникающего в схемах, удовлетворяющих аналогу (1.6), была предложена в работе Arakawa and Suarez (1983). Эта формулировка допускает произвольный выбор уравнения гидростатики.

Для атмосферы, находящейся в состоянии гидростатического равновесия, в работе Corby et al. (1972) предложен разностный аналог (второго) члена градиента давления в силе барического градиента так, что он точно уравновешивает (первый) член градиента геопотенциала. Предполагалось, что отсутствие ошибки для такого избранного типа состояния атмосферы поможет избежать значительных ошибок в более общих случаях. Впоследствии эта методика

была использована и/или обобщена рядом авторов: *Wakamura* (1978), *Sadowrny et al.* (1981), *Simmons and Burridge* (1981), *Arakawa and Suarez* (1983).

В работе *Janjic* (1977) исследована генерация ошибки в общем случае. Основная идея такого исследования представлена также в более ранней работе *Rousseau and Pham* (1971). Отметим, что с учетом исходным определением сигма-координаты, имеем

$$-\nabla_p \Phi = -\nabla_\sigma \Phi - RT \nabla \ln P_s = -\nabla_\sigma \Phi + (\nabla_\sigma \Phi - \nabla_p \Phi) = -\nabla_\sigma \Phi + \nabla(\Phi_\sigma - \Phi_p).$$

Таким образом, член градиента давления в силе барического градиента можно рассматривать для представления гидростатической коррекции члена градиента геопотенциала. В разностной схеме это соответствует вертикальной экстраполяции/интерполяции геопотенциала с сигма-поверхности, или поверхностей, на поверхность постоянного давления, на которой находится рассматриваемый узел по скорости, скажем поверхность P^* на рис. 1. В работе *Rousseau and Pham* (1971) указано, что для линеаризации ошибки формулировка второго члена должна быть согласованной (*coherent*) с формулировкой первого члена и с формулировкой уравнения гидростатики. В статье *Janjic* (1977) выдвинуто примерно такое же требование «гидростатической согласованности» схемы. Наличие члена градиента геопотенциала подразумевает определенную разностную схему, которая связывает вертикальные приращения геопотенциала при переходе от изобарической к сигма-поверхности (приращения при переходе от точек «0» к точкам «x» на рис. 1) со значениями температуры в некоторых узлах сетки. Если для расчета одних и тех же приращений за счет члена градиента давления используются другая разностная схема или/и значения в других узлах сетки, то может возникнуть ошибочный остаток, большой в сравнении с изменением геопотенциала вдоль изобарической поверхности.

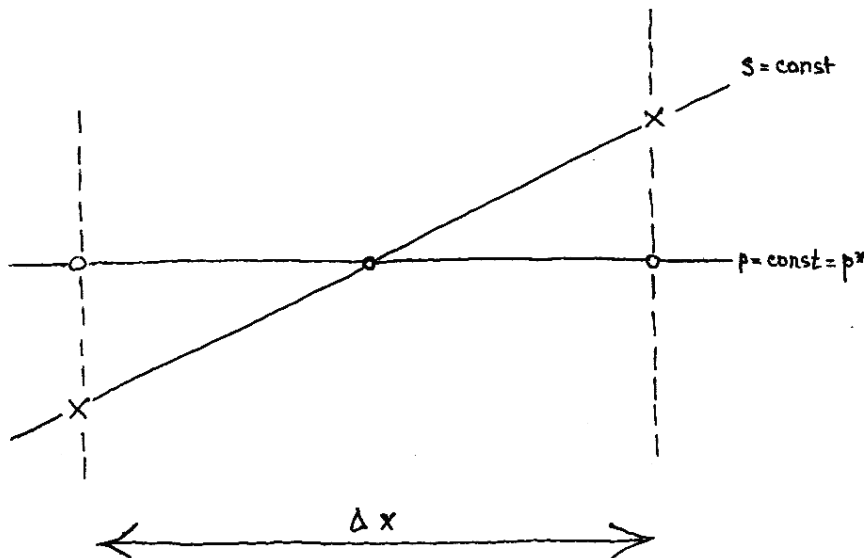


Рис. 1. Иллюстрация проблемы гидростатического соответствия схем с «сигма»-координатой.

Janjic (1977), а также *Arakawa and Suarez* (1983) предложили иную методику, направленную на повышение точности вертикального дифференцирования в уравнении гидростатики. Отметим, что геопотенциал изобарической поверхности равен

$$\Phi = \Phi_s - \int_{P_s}^P R T \ln p. \quad (1.7)$$

Таким образом, геопотенциал изобарической поверхности зависит от температуры на и ниже рассматриваемой поверхности. Если это свойство дифференциальных уравнений должно сохраняться в конечно-разностной схеме, то нет возможности использовать для численного интегрирования уравнения гидростатики центрированные в пространстве разности высокого порядка точности. Действительно, на практике почти без исключений используются простые нецентрированные разности. В этой ситуации *Janjic* указал, что фактическая точность вертикального дифференцирования и результирующей силы градиента давления может быть повышена, если переменные. Используемые при вертикальном дифференцировании, выбраны так, чтобы минимизировать расчетную ошибку. Другими словами, можно заменить (1.2) на

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = - \frac{R T}{p \frac{d\xi}{dp}}, \quad (1.8)$$

где $\xi = \xi(p)$ (1.9)

является монотонной функцией давления, не обязательно совпадающей с вертикальной координатой модели. Наоборот, она выбрана таким образом, чтобы оптимизировать ошибки, присущие данной схеме. Это можно сделать, используя еще раз идею полного исключения ошибки для специфического состояния атмосферы. Тем не менее, эта методика может быть нацелена на минимизацию, в некотором осредненном смысле, ошибки разностной аппроксимации $d\Phi/d\xi$ для различных ожидаемых профилей.

Ранее *Phillips* (1973) и *Gary* (1973) предложили формулировать силу барического градиента через отклонения от выбранного подходящим образом основного состояния. Фактически, эффект этой методики состоит в том, что и в рассмотренном выше методе *Janjic, Arakawa-Suarez*. Наконец отметим, что оба эти метода в недавних экспериментах *Johnson and Uccellini* (1983) дали очень схожие результаты.

Далее в данной лекции мы более детально рассмотрим эти вопросы.

2. Общая форма силы барического градиента

Нам необходимо вывести такое выражение для силы барического градиента, которое позволяет использовать альтернативную координату (1.9) уравнения гидростатики в дополнение к общей вертикальной координате

$$\eta = \eta(p, P_s, z). \quad (2.1)$$

Принимается, что координата η (*эта*) также является монотонной функцией давления (и/или геометрической высоты z); она может быть повторяющей рельеф подстилающей поверхности (сигма-координата), а также другой координатой, более общего типа. Выбор переменных, представленных здесь, мотивируется фактическим определением переменной η , выбранной ниже с заданной целью. Отметим, что фактически, более широкий выбор переменных не изменяет хода последующих рассуждений.

Для вывода общей формулы для силы барического градиента в такой η -системе координат, рассмотрим ситуацию, схематически представленную на рис. 2. А именно, используя обозначения, введенные на рисунке, мы можем записать

$$-\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta S} = -\frac{\Phi_3 - \Phi_1}{\Delta S} - \frac{\Phi_2 - \Phi_3}{\Delta \xi} \frac{\Delta \xi}{\Delta S}.$$

Если ΔS ориентировано в направлении максимального изменения геопотенциала вдоль поверхности $p = \text{const.}$, то в пределе при ΔS , стремящемся к нулю, это выражение сводится к

$$-\nabla_p \Phi = -\nabla_\eta \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \nabla_\eta \xi. \quad (2.2)$$

Здесь
$$\frac{\partial}{\partial \xi} \equiv \frac{1}{\partial \xi / \partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (2.3)$$

т.е. η – фактически используемая координата.

Формула (2.2) представляет собой общую форму выражения для силы барического градиента в η (или, например, сигма) – системе координат в том смысле, что любое из широко используемых выражений можно вывести из этой формулы, используя той или иной выбор одной или обеих функций ξ и η . Например, если выбрать

$$\xi = \ln p, \quad (2.4)$$

формула (2.2) принимает вид
$$-\nabla_p \Phi = -\nabla_\eta \Phi + R T \nabla_\eta \ln p \quad (2.5)$$

(например, *Simmons and Burridge*, 1981).

В качестве примера, где определяются обе функции, рассмотрим такой выбор

$$\xi = p, \quad \eta = \sigma = \frac{p - P_T}{\pi}, \quad \pi \equiv P_s - P_T. \quad (2.6)$$

Подстановка в (2.2) приводит к формуле

$$-\nabla_p \Phi = -\nabla_\sigma \Phi + \frac{\sigma}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \nabla_\sigma \pi, \quad (2.7)$$

которая является еще одним часто используемым выражением для силы барического градиента (например, *Arakawa and Lamb*, 1977).

Формой силы барического градиента, не выводимой непосредственно из соотношения (2.2), является «потокое» выражение (Johnson, 1980; Johnson and Uccellini, 1983):

$$\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial \sigma} (\rho \nabla_{\sigma} \Phi) + \nabla_{\sigma} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Однако эта форма может быть получена путем манипуляций с правой частью (2.7).

Непосредственная дискретизация первого члена в скобках (2.8) снова приводит к члену градиента геопотенциала, точно такого же, какой получается при дискретизации соотношения (2.7).

3. Дискретизация силы барического градиента и расчет геопотенциала из уравнения гидростатики

Следуя работе Janjic (1979), будет удобно рассматривать конструирование схемы представления силы барического градиента в три этапа. На первом шаге геопотенциал рассчитывается на поверхностях постоянных значений η с помощью интегрирования уравнения гидростатики. На втором шаге геопотенциал экстраполируется или интерполируется, начиная от известных значений на соседних η -поверхностях, на изобарическую поверхность, опять с использованием уравнения гидростатики. Наконец, на третьем шаге полученные на предыдущем шаге значения геопотенциала используются для расчетов конечно-разностной аппроксимации силы барического градиента.

При использовании этой процедуры необходимо специфическое распределение переменных по узлам сетки в вертикальной плоскости. Почти во всех моделях температура (или потенциальная температура) относится на уровни горизонтальных составляющих скорости, а вертикальные скорости относятся на промежуточные уровни («распределение Лоренца» согласно Аракаве). В этих моделях существуют различия в схемах, используемых для расчета геопотенциала. В этой связи можно классифицировать все эти схемы на такие, в которых геопотенциал рассчитывают на тех же уровнях, что и горизонтальные скорости, и на такие, в которых геопотенциал вычисляется на промежуточных уровнях (по отношению к уровням для горизонтальных скоростей). Мы будем называть первые из них «шахматные» («слойные»), а вторые – «нешахматные» (или «уровенные»). На рис.3 представлены оба варианта. На рисунке символ «k» представляет собой вертикальный индекс, $\delta_{\xi} \Phi$ - конечно-разностная аппроксимация члена $\partial \Phi / \partial \xi$. Она определяется тем или иным видом уравнения гидростатики.

Следует однако отметить, что конечно-разностный аналог уравнения гидростатики для расчета, например, геопотенциала на «целых уровнях», в том случае, если он связан с определением геопотенциала на «половинных уровнях», может быть переписан таким образом, чтобы получить уравнение гидростатики для половинных значений геопотенциала и с помощью их определение

геопотенциала на целых уровнях. Такая переформулировка может быть выполнена для уравнения гидростатики, используемого для геопотенциала половинных уровней, на определение геопотенциала на целых уровнях. Таким образом. Для данной схемы не совсем очевидна необходимость определения уровней, на которых рассчитывается геопотенциал с помощью конечно-разностного аналога уравнения гидростатики.

Делая выбор схемы, мы будем полагать, что дискретные значения $\Phi(p)$ фактически определены в узлах так, что в случае произвольного расстояния между вертикальными уровнями толщина слоя, полученная с помощью конкретного конечно-разностного аналога уравнения гидростатики, не зависит от температуры вне этих слоев, или зависит в минимально возможной степени. В качестве примера нешахматных схем можно привести схемы *Arakawa* (1972) и *Corby et al.* (1982); примером шахматных схем служат схемы, использованные в работах *Janjic* (1977), *Burridge and Haseler* (1977); в качестве примера схемы “локального уравнения гидростатики” - схема *Arakawa and Suarez* (1983).

Сначала, мы рассмотрим наиболее часто используемую нешахматную схему. Для простоты ограничимся, скажем, X-составляющей силы барического градиента. Пусть эта составляющая рассчитывается на изобарическом уровне P^* . Пусть также значения ξ и геопотенциала на данном уровне обозначаются через ξ^* и Φ^* , соответственно. Далее будем полагать, что первый шаг уже выполнен (т.е. геопотенциал рассчитан на поверхностях постоянных значений η) и сконцентрируемся только на втором и третьем шагах. Используя обозначения, введенные на рис. 4, можно записать

$$\begin{aligned}\Phi_1^* &= \Phi_1^k + \delta_\xi \Phi_1^k (\xi^* - \xi_1^k), \\ \Phi_2^* &= \Phi_2^k + \delta_\xi \Phi_2^k (\xi^* - \xi_2^k),\end{aligned}\quad (3.1)$$

где нижние индексы обозначают узлы сетки по горизонтали, а верхний индекс «k» указывает на тот η -уровень, на котором рассчитаны переменные. Таким образом, второй шаг процедуры определения силы барического градиента выполнен, и мы приступаем к третьему, который включает

$$-\frac{\Phi_2^* - \Phi_1^*}{\Delta x} = -\frac{\Phi_2^k - \Phi_1^k}{\Delta x} + \frac{1}{2}(\delta_\xi \Phi_1^k + \delta_\xi \Phi_{21}^k) \frac{\xi_2^k - \xi_1^k}{\Delta x} - \left[\xi^* - \frac{1}{2}(\xi_2^k + \xi_1^k) \right] - \frac{\delta_\xi \Phi_2^k - \delta_\xi \Phi_1^k}{\Delta x},$$

или в более компактной форме

$$-\delta_x \Phi^* = -\delta_x \Phi^k + \overline{\delta_\xi \Phi}^x \delta_x \xi^k - (\xi^* - \overline{\xi^k}^x) \delta_x (\delta_\xi \Phi^k). \quad (3.2)$$

Если определить $\xi^* = \overline{\xi^k}^x$, (3.3)

то мы получаем вид аппроксимации силы барического градиента на нешахматной сетке

$$-\delta_x \Phi^* = -\delta_x \Phi^k + \overline{\delta_\xi \Phi}^x \delta_x \xi^k. \quad (3.4)$$

Как можно видеть из формулы (3.3), если ξ не является линейной функцией переменной η , то аппроксимация (3.4) не определена на уровне η_k , как это обычно полагают.

Теперь обратимся к шахматной схеме. На втором шаге процедуры расчета силы барического градиента для расчета геопотенциала на уровне P^* , соответствующего значению $\xi^* = \xi(P^*)$, мы будем использовать линейную интерполяцию. С обозначениями, введенными на рис.5, можно записать

$$\begin{aligned}\Phi_1^* &= \Phi_1^{k-1/2} + \frac{\Phi_1^{k+1/2} - \Phi_1^{k-1/2}}{\xi_1^{k+1/2} - \xi_1^{k-1/2}} \left(\xi^* - \xi_1^{k-1/2} \right), \\ \Phi_2^* &= \Phi_2^{k-1/2} + \frac{\Phi_2^{k+1/2} - \Phi_2^{k-1/2}}{\xi_2^{k+1/2} - \xi_2^{k-1/2}} \left(\xi^* - \xi_2^{k-1/2} \right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Вводя обозначения $\bar{A}^n \equiv \frac{1}{2} \left(A^{k-1/2} + A^{k+1/2} \right)$, $\delta_\xi A \equiv \frac{A^{k+1/2} - A^{k-1/2}}{\xi^{k+1/2} - \xi^{k-1/2}}$,

соотношения (3.5) после перестановок можно записать как

$$\begin{aligned}\Phi_1^* &= \bar{\Phi}_1^n + \delta_\xi \Phi_1 \left(\xi^* - \xi_1^n \right), \\ \Phi_2^* &= \bar{\Phi}_2^n + \delta_\xi \Phi_2 \left(\xi^* - \xi_2^n \right).\end{aligned}$$

Выполняя третий шаг, мы получаем

$$-\delta_x \Phi^* = -\delta_x \bar{\Phi}^n + \overline{\delta_\xi \Phi^x} \delta_x \bar{\xi}^n - \left(\xi^* - \bar{\xi}^{n^x} \right) \delta_x \left(\delta_\xi \Phi \right).\quad (3.6)$$

Если уровень, на котором рассчитывается сила барического градиента, определить как

$$\xi^* = \bar{\xi}^{n^x},\quad (3.7)$$

то мы окончательно получаем

$$-\delta_x \Phi^* = -\delta_x \bar{\Phi}^n + \overline{\delta_\xi \Phi^x} \delta_x \bar{\xi}^n.\quad (3.8)$$

Опять мы видим, что к решению (3.8) мы пришли, приняв соотношение (3.7), которое аналогично (3.3).

Конечно, при конструировании схем расчета силы барического градиента авторы обычно не следуют трехшаговой процедуре, описанной выше. Обычно, выбирается разностный аналог уравнения гидростатики и затем выполняется разностная аппроксимация одного из дифференциальных выражений для силы барического градиента. Однако можно продемонстрировать, что, несмотря на различие в используемых подходах, каждая из широко используемых схем фактически включает описанную здесь трехшаговую процедуру.

Далее, в последующих параграфах, мы рассмотрим некоторые специфические схемы с этой точки зрения.

4. Гидростатическое согласование

Как мы уже видели, первый и второй шаги процедуры расчета силы барического градиента включают интегрирование уравнения гидростатики для получения значений геопотенциала на поверхностях $\eta = \text{const}$ и $p = \text{const}$, соответственно. На первом шаге с помощью интегрирования конечно-разностного уравнения гидростатики будем определять в каждой точке горизонтальной сетки определенный вертикальный профиль геопотенциала как функцию переменной интегрирования ξ . Обычно, как это приведено во введении, данное интегрирование выполняется путем аппроксимации $\partial\Phi/\partial\xi$ между дискретными уровнями η_k с помощью константы, так что полученный вертикальный профиль геопотенциала будет кусочно-линейной функцией ξ , как это схематически представлено на рис. 6.

Как предложено в работе *Janjic*, теперь можно определить схему как гидростатически согласованную, если процедура, используемая на втором шаге, включает значение геопотенциала, которое лежит на профиле геопотенциала, определенного из конечно-разностного уравнения гидростатики на первом шаге. Например, это может быть значение, представленное знаком «+» на рис. 6. Для гидростатической согласованности на втором шаге должно быть использовано, явно или неявно, то же самое конечно-разностное уравнение гидростатики и те же самые, что и на первом шаге, значения в узлах сетки.

Теперь рассмотрим, с точки зрения предыдущих рассуждений, некоторые специфические схемы для уравнения гидростатики и силы барического градиента. Сначала мы рассмотрим наиболее простую схему с нешахматным расчетом геопотенциала по уравнению гидростатики, а именно схему *Corby et al.* (1972; *Gilchrist*, 1975; а также *Corby et al.*, 1977). В ней используется исходное определение сигма-координаты (1.4), нешахматное размещение горизонтальных скоростей, температур и геопотенциала как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях.

Геопотенциал на самом нижнем уровне ($k=K$) в данной схеме определяется с помощью соотношения

$$\Phi_k = \Phi_s + R T_k \ln(1/\sigma_k), \quad (4.1)$$

а разностный аналог уравнения гидростатики выше этого уровня определяется как

$$\Delta_\sigma \Phi = -R \bar{T}^\sigma \Delta_\sigma \ln \sigma. \quad (4.2)$$

Таким образом

$$\Phi_k = \Phi_s + \sum_{n=k}^{K-1} \frac{1}{2} R (T_n + T_{n+1}) \ln \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} + R T_k \ln \frac{1}{\sigma_k}, \quad (4.3)$$

определяет вертикальный профиль геопотенциала, заданный конечно-разностным уравнением гидростатики; т.е. первым шагом нашей процедуры.

В работе *Corby et al.* в качестве аналога силы барического градиента принимается

$$\delta_x \overline{\Phi}_k^x \quad (4.4)$$

в качестве разностной аппроксимации члена $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_\sigma$ и пытаются найти согласованную аппроксимацию члена градиента давления таким образом, чтобы эти два члена в сумме давали нулевой градиент давления для покоящейся атмосферы, определяемой как

$$T(p) = A \ln p + B. \quad (4.5)$$

В этой схеме профиль (4.5) рассматривается в качестве разумного среднего профиля в тропосфере. Наконец, авторы подставляя (4.5) в уравнение гидростатики, получают

$$d\Phi = -R T d \ln p \quad (4.6)$$

и, интегрируя, получают

$$\Phi(p) = \Phi_0 + \frac{1}{2} R A (\ln^2 p_0 - \ln^2 p) + R B (\ln p_0 - \ln p). \quad (4.7)$$

Таким образом, видно, что Φ_s и Φ_0 связаны между собой соотношением

$$\Phi_s = \Phi_0 + \frac{1}{2} R A (\ln^2 p_0 - \ln^2 P_s) + R B (\ln p_0 - \ln P_s). \quad (4.8)$$

Далее путем интегрирования геопотенциалов, приведенных в (4.3) и (4.8), рассчитывается аналог (4.4). Кроме того, из (4.5) получают температуру на сигма-поверхности

$$T_n = A \ln(\sigma_n P_s) + B. \quad (4.9)$$

После некоторых алгебраических преобразований приходим к

$$\delta_x \overline{\Phi}_k^x = -R \overline{T^x} \delta_x \ln P_s \quad (4.10)$$

Соответственно для полного исключения ошибки в рассматриваемом типе атмосферы *Corby et al.* выбирают

$$-R \overline{T^x} \delta_x \ln P_s \quad (4.11)$$

в качестве разностного аналога x -составляющей члена градиента давления.

Для дальнейшего упрощения задачи рассмотрим вариант схемы *Corby et al.*, который получен с использованием горизонтальной шахматной сетки, где скорости, температуры и геопотенциал определяются в чередующихся узлах сетки (см. рис. 8). Тогда, следуя той же процедуре, приходим к аналогу

$$-\delta_x \Phi_k - R \overline{T^x} \delta_x \ln P_s. \quad (4.12)$$

Для заданного значения Δx соотношение (4.12) имеет меньшую трункационную ошибку, чем исходная схема.

Теперь, для получения схемы (4.12) с использованием трехшаговой процедуры, нам необходима в качестве второго шага схема интерполяции

$$\begin{aligned}\Phi_1^* &= \Phi_{1,k} - R T_{1,k} (\ln p^* - \ln p_{1,k}), \\ \Phi_2^* &= \Phi_{1,k} - R T_{2,k} (\ln p^* - \ln p_{2,k}).\end{aligned}\quad (4.13)$$

Как и можно быть ожидать, за счет второго члена в (4.12) в соотношениях (4.13) появляются только два сеточных значения температур.

Третьим шагом данной процедуры является расчет выражения

$$-\frac{\Phi_2^* - \Phi_1^*}{\Delta x}.\quad (4.14)$$

Подставляя в (4.13) и допуская, что $\ln p^* \equiv \frac{1}{2}(\ln p_{1,k} + \ln p_{2,k})$ (4.15)

и, наконец, принимая во внимание, что $\delta_x \ln p = \delta_x \ln P_s$, мы приходим к соотношению (4.12).

Однако, использованные в (4.13) значения Φ^* не располагаются на профиле геопотенциала (4.3), рассчитанного через конечно-разностный аналог (4.2) гидростатического уравнения. Таким образом, данная схема является гидростатически несогласованной. Конечно-разностное уравнение гидростатики, использованное в соотношении (4.13) и включающее температуру только на одном сигма-уровне, отличается от разностного аналога уравнения гидростатики (4.2), использующего среднюю по двум точкам по вертикали температуру. Кроме того, в случае наклонных сигма-поверхностей и/или тонких сигма-слоев изобарическая поверхность $p^* = \text{const}$ может пресекать дополнительные сигма-уровни между узлами сетки 1 и 2, которые используются для формирования разностного аналога (4.14).

Таким образом, метод, согласующийся с профилем геопотенциала, определяемого соотношением (4.3), должен скорее использовать значения геопотенциала, находящиеся на этом профиле, а не значения из соотношения (4.13). Обозначая значения на этом профиле через Φ^c и принимая, что давление p^* представляет собой давление в точках 1 и 2, расположенных между уровнями $k-r \dots k-r-1$ и $k+r \dots k+r+1$, соответственно, мы имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1^c &= \Phi_{1,k-r} - \frac{1}{2}R(T_{1,k-r} - T_{1,k-r-1})(\ln p^* - \ln p_{1,k-r}), \\ \Phi_2^c &= \Phi_{2,k-r} - \frac{1}{2}R(T_{2,k-r} - T_{2,k-r-1})(\ln p^* - \ln p_{2,k-r})\end{aligned}\quad (4.16)$$

со значениями $\Phi_{1,k-r}$ и $\Phi_{2,k-r}$, рассчитанными здесь с помощью (4.3). Таким образом, при использовании экстраполяции, предписанной соотношениями (4.16) и допускаемой вдоль кусочно-линейного профиля геопотенциала, заданного аналогом гидростатического уравнения, расчет величины

$$-\frac{\Phi_2^c - \Phi_1^c}{\Delta x} \quad (4.17)$$

дает значение силы барического градиента при вертикальной дискретизации с точностью, которую можно достичь в пределах точности разностной схемы гидростатического уравнения.

В простом случае, при $r = 0$, т.е. наклон сигма-поверхности не слишком велик и/или рассматриваемые сигма-слои не слишком тонкие, так что поверхность p^* не пересекает дополнительные сигма-уровни между узлами сетки 1 и 2, то соотношение (4.17) дает

$$-\delta_x \Phi_k - \frac{1}{4} R (T_{j-1,k-1} + T_{j-1,k} + T_{j+1,k} + T_{j+1,k+1}) \delta_x P_s. \quad (4.18)$$

Здесь: j – индекс узла сетки в направлении оси X и, конечно, вновь необходимо использовать допущение (4.15).

Литература

- Arakawa, A.*, 1972: Design of the UCLA general circulation model. - Dept. Of Meteorology, Univ. of California, Los Angeles, Numerical Simulation of Weather and Climate, Tech. Rept., No. 7, 116 p.
- Arakawa, A., and V.R. Lamb*, 1977: Computational Design of the Basic Dynamical Processes of the UCLA General Circulation Model. – Methods in Comput. Phys., vol. 17, Academic Press, New York, 173-265.
- Arakawa, A., and Suarez*, 1983: Vertical differencing of the primitive equations in sigma coordinates. – Mon. Wea. Rev., 111, 34-45.
- Burridge, D.M., and J. Hasler*, 1977: A model for medium weather forecasting – adiabatic formulation. – European Centre for Medium Range Weather Forecasts, Tech. Rept., No. 4, 46 pp. (Available from the ECMRF, Shinfield Park, Reading, Berks, RG2, 9AX, UK).
- Corby, G.A., A. Gilchrist and R.L. Newson*, 1972: A general circulation model suitable for long period integrations. – Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 98, 809-832.
- Corby, G.A., A. Gilchrist and P.R. Rowntree*, 1977: United Kingdom Meteorological Office Five-level General Circulation Model. – Methods in Comput. Phys., vol. 17, Academic Press, New York, 67-110.
- Egger, J.*, 1972: Incorporation of steep mountains into numerical forecasting models. – Tellus, 24, 324-385.
- Garry, J.M.*, 1973: Estimate of truncation error in transformed coordinate, primitive equation atmospheric models. - J. Atmos. Sci., 30, 223-233.
- Gilchrist, A.*, 1975: The Meteorological Office general circulation model. - Seminars on Scientific Foundations of Medium Range Weather Forecasts, ECMRF, 594-661. (Available from the ECMRF, Shinfield Park, Reading, Berks, RG2, 9AX, UK).

- Janjic, Z.I.*, 1977: Pressure gradient force and advection scheme used forecasting with steep and small scale topography. - *Beitr.Phys. Atmosph.*, 50, 186-199.
- Janjic, Z.I.*, 1979: Numerical problems related to steep mountains in sigma coordinates. - Workshop on Mountains and Numerical Weather Prediction, ECMRF, 48-88. (Available from the ECMRF, Shinfield Park, Reading, Berks, RG2, 9AX, UK).
- Johnson, D.R.*, 1980: A generalized transport equation for use with meteorological coordinate systems. - *Mon. Wea. Rev.*, 108, 733-745.
- Johnson, D.R., and L.W. Uccellini*, 1983: A comparison of methods for computing the sigma-coordinate pressure gradient force for flow over sloped terrain in a hybrid theta-sigma model. - *Mon.Wea.Rev.*, 111, 870-886.
- Kasahara, A.*, 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. - *Mon.Wea.Rev.*, 102, 509-522.
- Kurihara, Y.*, 1968: Note on finite difference expressions for the hydrostatic relation and pressure gradient force. - *Mon.Wea.Rev.*, 96, 654-656.
- Mesinger, F.*, 1982: On the convergence and error problems of the calculation of the pressure gradient force in sigma coordinate models. - *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 19, 105-117.
- Mesinger, F.*, 1983: A blocking technique for representation of mountains in atmospheric models. - *Rivista Meteorol. Aeronautica*, 43, in print.
- Mesinger, F., and Z.I. Janjic*, 1984: Problems and numerical methods of the incorporation of mountains in atmospheric models. - ASM-SIAM 1983 Seminar: Large-Scale Computations in Fluid Mechanics. Scripts Institute of Oceanography, La Jolla, Calif., American Mathematical Soc., To be appear in Lectures in Applied Mathematics, 22.
- Mihailovic, D.T.*, 1981: Calculation of initial temperature from interpolated pressure gradient force in sigma coordinate models. - *Arc. Meteorol. Geophys. Bioclimat*, Ser. A30, 239-251.
- Nakamura, H.*, 1981: Dynamical effects of mountains on the general circulation of the atmosphere: I. Development of finite-difference schemes suitable for incorporating mountains. - *J. Meteorol. Soc. Japan*, (2) 56, 317-340.
- Phillips, N.A.*, 1957: A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. - *J. Meteorol.*, 14, 184-185.
- Phillips, N.A.*, 1973: Principles of Large Scale Numerical Weather Prediction. - *Dynamic Meteorology*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1-96.
- Phillips, N.A.*, 1974: Application of Arakawa's energy conserving layer model to operational numerical weather prediction. - Office Note, No. 104, Nat. Meteorol. Centre, NOAA/NWS, US Dept. Of Commerce.
- Rousseau D., and H.L. Pham*, 1971: Premiers resultats d'un modele de prevision numerique a courte echeance sur l'Europa. - *La Meteorologie*, 20, 1-12.
- Sadourny, R., O.P. Sharma, K. Laval and J. Canneti*, 1981: Modeling of the vertical structure in sigma coordinate, a comparative test with FGGE data. - Proc. International Conference on Preliminary FGGE Data Analysis and Results, Bergen, 1980, World Meteorological Organization, Geneva, 294-302. (Available from the WMO, CP No 5, CH-1211, Geneva 20).

- Simmons, A.J., and D.M. Burridge*, 1981: An energy and angular-momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinates. - *Mon. Wea. Rev.*, 109, 758-766.
- Simmons, A.J., and R. Strufling*, 1981: An energy and angular momentum conserving finite-difference scheme, hybrid coordinates and medium-range weather prediction. - ECMRWF, Tech. Rept. No 28 (Available from the ECMRWF, Shinfield Park, Reading, Berks, RG2, 9AX, UK).
- Smagorinsky, J., R.F. Strickler, W.E. Saugster, S. Manabe, J.L. Holloway, Jr. and G.D. Hembree*, 1967: Prediction Experiments with a General Circulation Model. – Proc. International Symposium on Dynamics of Large Scale Atmospheric Processes, Moscow, 1965, Izdatelstvo Nauk, Moscow, 70-134.
- Stackpole, J.D., L.W. Vanderman and J.G. Sela*, 1980: USA National Meteorological Center (NMC) numerical prediction models. – Catalogue of Numerical Atmospheric Models for the First GARP Global Experiment, World Meteorological Organization, Geneva, 216-274. (Available from the WMO, CP No 5, CH-1211, Geneva 20).
- Sunqvist, H.*, 1975: On truncation errors in sigma-system models. - *Atmosphere*, 13, 81-95.
- Sunqvist, H.*, 1976: On vertical interpolation and truncation in connection with use of sigma system models. - *Atmosphere*, 14, 37-52.
- Tokioka, T.*, 1978: Some considerations on vertical differencing. - *J. Meteorol. Soc. Japan*, 98-111.
- Tomine, K., and S. Abe*, 1982: A trial to reduce truncation errors of the pressure gradient force in the sigma coordinate systems. - *J. Meteorol. Soc. Japan*, (2) 60, 709-716.

Наукове видання

СТЕПАНЕНКО Сергій Миколайович

**Математичне моделювання
мезомасштабних процесів
і явищ у атмосфері**

Степаненко С.М.
С 79 Математичне моделювання мезомасштабних процесів і явищ у атмосфері і/ Одеськ. гідрометеорологіч. ін-т. – Одеса: АО БАХВА, 2001.
- 292 с.: 39 арк. іл. +2 табл.
Бібліогр.: 761 назв.
ISBN 996-7079-60-0

С $\frac{1805040400}{7079-2001}$ Без об'яв. ББК 26.234.1

Підписано до друку 20.11.2000 р. Формат 60x84/16
Папір писальний. Друк трафаретний. Ум. Друк. Арк. 16,9. Тираж 300 пр.

Видано і віддруковано з готового оригінал-макету

ВИДАВНИК І ВИГОТОВЛЮВАЧ АО БАХВА
65009, м. Одеса, вул. Піонерська, 7, (0482) 3492-40 *e-mail: bachva@te.net.ua*
(Свідоцтво серія ДК № 145 від 11.08.2000)