

**І.Д. Лоєва, Е.М. Сєрга, Є.П. Школьний**

**МЕТОДИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ  
ПРОЦЕСІВ**

**Навчальний посібник**

Л 68  
УДК 551.58

**Рецензенти:**

Осадчий В.І, доктор геогр.наук, член кореспондент НАН України, директор Українського гідрометеорологічного інституту ДНС України та НАН України.

Рубан І.Г., кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри океанології та морського природокористування, Одеський державний екологічний університет.

Лоєва І.Д., Серга Е.М., Школьний Є.П.

**Методи теорії випадкових процесів:** навчальний посібник.

---

2019. 132 с.

Розглядаються методи теорії випадкових процесів у гідрометеорології та екології. Для аспірантів, спеціалістів і наукових співробітників, які навчаються за напрямками «Науки про Землю», «Екологія», «Економіка».

© Одеський державний  
екологічний університет, 2019

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
1 ПОНЯТТЯ ПРО ВИПАДКОВУ ФУНКЦІЮ .....	7
1.1 Визначення випадкової функції.....	7
1.2 Закон розподілу випадкових функцій і їх імовірнісні характеристики .....	9
1.2.1. Закон розподілу випадкових функцій.....	9
1.2.2. Імовірнісні характеристики випадкових функцій.....	11
2 ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ .....	15
2.1 Перетворення випадкової функції лінійним оператором.....	15
2.2 Властивості випадкових функцій .....	16
2.3 Похідна випадкової функції .....	18
2.4 Інтеграл від випадкового функції .....	21
3 СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ .....	24
3.1 Поняття про стаціонарну випадкову функцію, її ймовірнісні характеристики .....	24
3.2 Ергодична властивість стаціонарних випадкових функцій ...	29
3.3 Спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції... 3.3.1 Лінійчатий спектр стаціонарної випадкової функції... 3.3.2 Спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу .....	31 31 35
3.3.3 Приклади застосування перетворення Фур'є до коваріаційних функцій .....	38
3.4 Лінійне перетворення у спектральній формі .....	46
3.4.1 Передавальна функція лінійного оператора.....	46
3.4.2 Формувальні фільтри стаціонарного випадкового процесу .....	51
3.4.3 Спектральна щільність лінійного перетворення стаціонарного випадкового процесу .....	55
4 ВИЗНАЧЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ.....	59
4.1 Оцінка спектральної щільності за допомогою згладжуючих функцій.....	59
4.2 Визначення достовірності оцінок спектральної щільності.....	63
5 ВЗАЄМНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.....	67
6 ОСОБЛИВОСТІ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ.....	74
6.1 Операції згладжування часових рядів.....	74
6.2 Виявлення періодичностей, які утримуються у випадкових часових рядах.....	78
7 ПРИКЛАДНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	84
7.1 Розкладання випадкового вектора .....	84

7.1.1	Розкладання випадкового вектора у трикутному базисі.....	84
7.1.2	Канонічний розклад В.С. Пугачова.....	90
7.1.3	Неканонічні розкладання.....	93
7.2	Розкладання випадкових функцій у ортонормованих базисах.....	98
7.2.1	Загальна теорія побудови ортонормованого базису....	98
7.2.2	Ортонормований базис на експоненціальних функціях.....	101
7.2.3	Ортогональні поліноми.....	105
7.2.4	Поліноми Лежандра.....	106
7.2.5	Поліноми Чебишева.....	107
7.2.6	Розкладання випадкових функцій по ортогональних поліномах.....	109
7.2.7	Апроксимація двовимірних метеорологічних полів за допомогою поліномів Чебишева .....	112
7.3	Розкладання випадкової функції у базисі власних векторів матриці коваріацій (кореляцій).....	114
7.4	Статистична інтерполяція метеорологічних полів .....	119
7.4.1	Поняття про інтерполяцію й екстраполяцію.....	119
7.4.2	Точність інтерполяції.....	121
7.4.3	Оптимальна інтерполяція.....	125
	ЛІТЕРАТУРА.....	129
	ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	130

## ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей, математична статистика й теорія випадкових процесів складають значні області математики й застосувань. Їх розвиток нерозривно пов'язаний з розвитком науки й техніки, в яких все більше виявляється необхідність надати належну ймовірнісну інтерпретацію різноманітним явищам й процесам, які відбуваються у природі, в тому числі в атмосфері й гідросфері. Теорія ймовірностей і випадкових процесів мають у собі різноманітні математичні моделі типових випадкових явищ і їх еволюційного розвитку. У рамках цих моделей вивчаються притаманні для них ймовірнісні закономірності, розробляються методи вирішення таких важливих задач, як задачі прогнозування, управління, а також інших задач, пов'язаних з розвитком природних явищ й суспільства.

У наш часи дослідження складних природних об'єктів все більшою мірою спираються на методи математичного моделювання. Специфіка застосування апарату теорії випадкових функцій (процесів) до задач географічного характеру полягає у необхідності виявлення у кожному конкретному випадку стійких математичних моделей явища, яке досліджується, адекватних фізичним проявам його просторових й часових властивостей. У математичному розумінні подібна задача пов'язана з пошуком стійких інваріантних параметрів випадкових функцій відносно спотворюючих факторів навколишнього середовища. У посібнику наводиться ряд саме таких методів.

Навчальний посібник побудований таким чином, щоб читачу спочатку було зрозуміло, що таке випадкова функція, якими параметрами (інваріантами) вона характеризується, що визначають закони розподілу випадкових функцій.

Значна частина посібника відводиться стаціонарним випадковим процесам. Це зумовлено тим, що стаціонарні процеси, або процеси, які зводяться до стаціонарних, часто реалізуються у природі. Математичні моделі розроблені для опису стаціонарних випадкових процесів, дають можливість отримати необхідні для аналізу інваріантні параметри.

Випадкові процеси, які реалізуються у метеорологічних, гідрологічних й екологічних явищах, у більшості випадків є нестаціонарними. Тому при їх дослідженнях виникає необхідність виділення з вихідного випадкового процесу його складових, а саме, трендову компоненту, систему періодичних коливань, а також стаціонарну частину. Велике значення у цій процедурі має операція згладжування вихідного часового ряду. У посібнику розглядаються деякі методи згладжування і відповідні математичні фільтри.

Методи дослідження випадкових процесів безперервно розвиваються й вдосконалюються. Виникають моделі, які ще не знайшли застосування у дослідженнях гідрометеорологічних і екологічних процесів. У останній

частині посібника автори розглядають деякі з цих методів, які можуть, з їх точки зору, допомогти у вирішенні різноманітних дослідницьких задач.

У навчальному посібнику автори не намагалися деталізувати математичні методи до детальних алгоритмів й розв'язку відповідних задач. Ми вважаємо, що це задача наукових керівників магістрів й аспірантів – обрати, виходячи із суті дослідницької задачі, відповідний метод дослідження й для нього розробити алгоритм й інші необхідні робочі матеріали.

# 1 ПОНЯТТЯ ПРО ВИПАДКОВУ ФУНКЦІЮ

## 1.1 Визначення випадкової функції

Гідрометеорологічні величини розглядаються як випадкові величини. Підстави для цього полягають у тому, що не відомо досконально, під дією яких атмосферних процесів відбувається їх змінення, крім того їм притаманні похибки попередньої обробки результатів вимірювання та самого вимірювання. Вони теж мають випадковий характер. Однак часто доводиться мати справу з експериментами, результати яких характеризуються не числами, а функціями деяких аргументів. Наприклад, швидкість вітру в деякій точці простору випадковим чином змінюється за часом. Результат вимірювання цієї метеорологічної величини протягом деякого проміжку часу є не число, а функція часу, причому ця функція змінюється випадковим чином. Такі функції називають випадковими функціями.

Випадковій функції можна дати таке визначення [7]: *випадковою функцією  $X(t)$  аргументу  $t$  називається така функція, ординати якої для будь-яких фіксованих значень аргументу  $t$  являють собою випадкові величини.*

Графічний приклад випадкової функції міститься на рис.1.1 [16, 20]. Криві, що відбивають результати окремих експериментів  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , називають реалізаціями випадкової функції. Лінії, паралельні осі ординат, є перерізом випадкової функції. Переріз випадкової функції  $X(t)$  при значенні аргументу  $t = t_i$  дає ряд точок, які відповідають випадковій величині  $x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)$ . Отже визначення випадкової функції можна сформулювати і таким чином: функція  $X(t)$  аргументу  $t$  є випадковою, коли її перерізи при будь-яких значеннях аргументу  $t_i$  дають випадкову величину, яка має вигляд сукупності значень реалізацій  $x_n(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$  – номер перерізу,  $n = 1, 2, \dots$  – номер реалізації).

З випадковими функціями доводиться зустрічатися при розв'язуванні задач із різноманітних гілок науки та практики [7, 12]. Взагалі кажучи, кожен параметр стану атмосфери або гідросфери є випадковою функцією координат простору та часу, шуми в радіотехнічних системах, системах автоматичного регулювання різних процесів також випадкові функції відповідних аргументів. Саме для розглядання зазначених вище випадкових функцій (або процесів) розроблена низка математичних методів – методів теорії випадкових функцій.

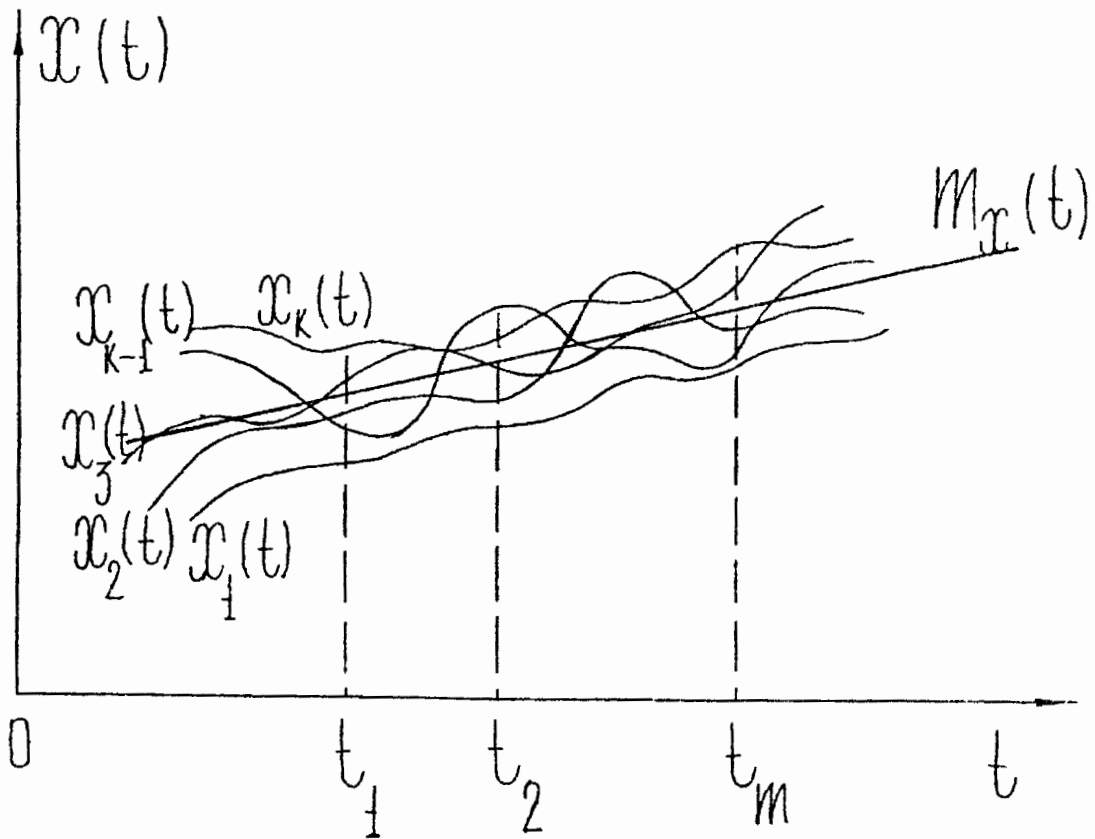


Рисунок 1.1 – Приклад випадкової функції

Випадкові функції можуть бути скалярними і векторними, у загальному випадку – тензорними. Прикладом скалярної функції може бути функція, яка описує змінення температури повітря за часом у деякій точці простору, а векторної – швидкість вітру. Очевидно, векторна випадкова функція може розглядатися як система скалярних випадкових функцій. Швидкість вітру, наприклад, може визначатись як система зональної, меридіональної та вертикальної швидкостей, кожна з яких є випадковою функцією часу.

Множина  $T$  аргументу часто є підмножиною дійсної прямої у зазначеному скінченному або нескінченному інтервалі, чи тільки визначеними дискретними значеннями. У першому випадку функцію  $X(t)$  називають випадковим процесом, у другому випадку – випадковою послідовністю. У якості аргументу  $t$  не обов'язково розглядають час. Можна, наприклад, розглядати атмосферний тиск як функцію висоти.

У випадку, коли множиною  $T$  є деяка область в  $n$ -вимірному векторному просторі, випадкова функція буде залежати вже не від скалярного, а від векторного аргументу  $T(t_1, t_2, \dots, t_k)$ , у якому  $t_1, t_2, \dots, t_k$  – координати вектора  $T$ . У такому випадку її можна розглядати як функцію від  $k$  скалярних аргументів  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Випадкову функцію декількох аргументів називають випадковим полем.



У метеорології, наприклад, розглядаються поля температури, атмосферного тиску, швидкості вітру, геопотенціалу тощо. Кожне з цих полів є випадковою функцією трьох координат  $(x, y, z)$  і часу  $t$ . При цьому, випадкове поле може бути скалярним, наприклад, поле тиску. Швидкість вітру є векторною функцією.

## 1.2 Закон розподілу випадкових функцій і їх імовірнісні характеристики

### 1.2.1 Закон розподілу випадкових функцій

Розглянемо, як можливо описати випадкову функцію з імовірнісної точки зору. Випадкова функція вважається повністю визначеною у момент часу  $t$ , якщо при цьому аргументу відомий її закон розподілу, який характеризується або функцією розподілу, або густиною імовірностей [7, 16, 17, 20].

Припустимо, що аргументом  $t = t_j$  і розглянемо переріз випадкової функції  $X(t_j)$ . Ми отримаємо випадкову величину  $X(t_j): x_1(t_j), x_2(t_j), \dots, x_n(t_j)$ . Вона вважається *повністю визначеною*, якщо є відомою її функція розподілу

$$F(x) = P(X < x) \quad (1.1)$$

Розглядаючи систему перерізів випадкової функції для аргументів  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , отримаємо функцію розподілу як систему випадкових величин.

Вона визначена, коли відома функція розподілу

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_k < x_k). \quad (1.2)$$

Ця функція розподілу буде приблизно характеризувати випадковий процес  $X(t)$ .

Виходячи з цього, випадковий процес  $X(t)$  вважається заданим, якщо для кожного значення  $t$  визначена функція розподілу випадкової величини  $X(t)$

$$F_1(x, t) = P[X(t) < x], \quad (1.3)$$

та для кожної пари значень  $t_1$  і  $t_2$  аргументу  $t$  визначена функція розподілу системи випадкових величин  $X_1 = X(t_1)$  і  $X_2 = X(t_2)$

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2) \quad (1.4)$$

Взагалі для будь-яких  $n$  значень  $t_1, t_2, \dots, t_n$  аргументу  $t$  визначена  $n$ -вимірна функція розподілу системи випадкових величин  $X_1 = X(t_1); X_2 = X(t_2); \dots; X_n = X(t_n)$ ;

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n). \quad (1.5)$$

Функція  $F_1(x, t)$  називається одновимірною функцією розподілу випадкового процесу. Вона характеризує закон розподілу кожного її перерізу, але не відповідає на питання про взаємну залежність між різними перерізами.

Функція  $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , яка має назву двовимірної функції розподілу випадкового процесу, також не є його вичерпною характеристикою. Для повної характеристики випадкового процесу треба задавати всі багатовимірні функції розподілу.

Для неперервних випадкових функцій, таких, кожен переріз яких є неперервною випадковою величиною, можна користуватися багатовимірними густинами імовірностей. Якщо  $F_1(x, t)$  має частинну похідну по  $x$ :

$$\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} = f_1(x, t), \quad (1.6)$$

то вона називається одновимірною густиною ймовірностей.

Аналогічно визначаються багатовимірні щільності розподілу випадкових функцій. Якщо існує мішана частинна похідна від  $n$ -вимірної функції розподілу

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (1.7)$$

то вона називається  $n$ -вимірною щільністю розподілу випадкового процесу.

Функції розподілу і щільності розподілу повинні задовольняти вимогам симетрії, тобто повинні бути незмінними при будь-якому вибиранні значень аргументу  $t = t_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Із функцій розподілу і щільності розподілу системи  $n$  випадкових величин можна отримати функції розподілу будь-якої її підсистеми. Тому, якщо відома  $n$ -вимірна функція розподілу або щільність розподілу, то заданими є і всі функції і щільності розподілу нижчого порядку.

### 1.2.2 Імовірнісні характеристики випадкових функцій

Одержання й використання багатовимірних функцій й щільностей розподілу для описування випадкових процесів викликає великі труднощі при розв'язаннях практичних задач і у більшості випадків поєднується з дуже громіздкими математичними перетвореннями. Тому на практиці частіше використовують ймовірнісні характеристики випадкових функцій, які аналогічні статистичним характеристикам розподілу випадкових величин: математичному сподіванню, дисперсії, коваріації, кореляції. На відміну від статистичних характеристик випадкових величин, які є простими числами, ймовірнісні характеристики випадкових функцій є функціями їх аргументу [3, 20].

Математичним сподіванням випадкової функції  $X(t)$  називається не випадкова функція  $m_x(t)$  аргументу  $t$ , яка дорівнює математичному сподіванню значень випадкової функції для кожного фіксованого значення аргументу  $t$ .

Згідно з цим означенням математичне сподівання випадкової функції записується таким чином:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx. \quad (1.8)$$

Математичне сподівання випадкової функції можна уявити як осереднену функцію, біля якої групуються реалізації випадкової функції. На рис.1.1 зображені реалізації випадкової функції та її математичне сподівання.

Дисперсією випадкової функції  $X(t)$  називається не випадкова функція  $D_x(t)$  аргументу  $t$ , яка дорівнює дисперсії значень випадкової функції для кожного фіксованого значення аргументу  $t$ . Це означення формульно записується так:

$$D_x(t) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x,t)dx. \quad (1.9)$$

Дисперсія випадкової функції характеризує розкид реалізацій випадкової функції відносно її математичного сподівання. З дисперсією пов'язана інша функція з таким же сенсом. Вона називається середнім квадратичним відхилом випадкової функції й дорівнює

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (1.10)$$

Математичне сподівання й дисперсія – дуже важливі характеристики випадкової функції, але вони не відповідають на питання про характер зв'язку між значеннями випадкової функції при різних значеннях аргументу  $t$ , оскільки вони визначаються одновимірними щільностями розподілу ймовірностей. З метою визначення характеру зв'язку між різними перерізами випадкової функції, тобто при різних фіксованих значеннях аргументу використовуються коваріаційні функції. Операція їх отримання визначається таким чином:

$$K_x(t_i, t_j) = M\{[X(t_i) - m_x(t_i)][X(t_j) - m_x(t_j)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - m_x(t_i)][x_j - m_x(t_j)] f(x_i, x_j; t_i, t_j) dx_i dx_j. \quad (1.11)$$

На рис.1.2 [20] показано вигляд коваріаційної функції деякої випадкової функції  $X(t)$ . Очевидно, графік цієї функції як функції двох змінних є поверхня. Пояснимо вигляд цієї поверхні. При значеннях аргументів  $t_i = t_j = t$  коваріаційна функція  $K_x(t_i, t_j)$  набуває максимального значення, оскільки у цьому випадку розглядається зв'язок значень випадкової функції з собою, а такий зв'язок є найбільш тісним. При збільшенні різниці  $t_i - t_j$  зав'язок між її значеннями  $X(t_i)$  та  $X(t_j)$  зменшується, у відповідності з чим зменшується й коваріаційна функція  $K_x(t_i, t_j)$ .

Розглядаючи вирази (1.9) і (1.11), можна побачити, що коли аргументи коваріаційної функції дорівнюють один одному, тобто  $t_i = t_j = t$ , то

$$K_x(t, t) = D_x(t). \quad (1.12)$$

На графіку коваріаційної функції (рис.1.2) ця умова характеризується площиною, яка утворюється при діагональному перерізі коваріаційної поверхні.

Коваріаційна функція не змінюється від переставлення аргументів, тобто вона є симетричною функцією своїх аргументів  $K_x(t_i, t_j) = K_x(t_j, t_i)$ .

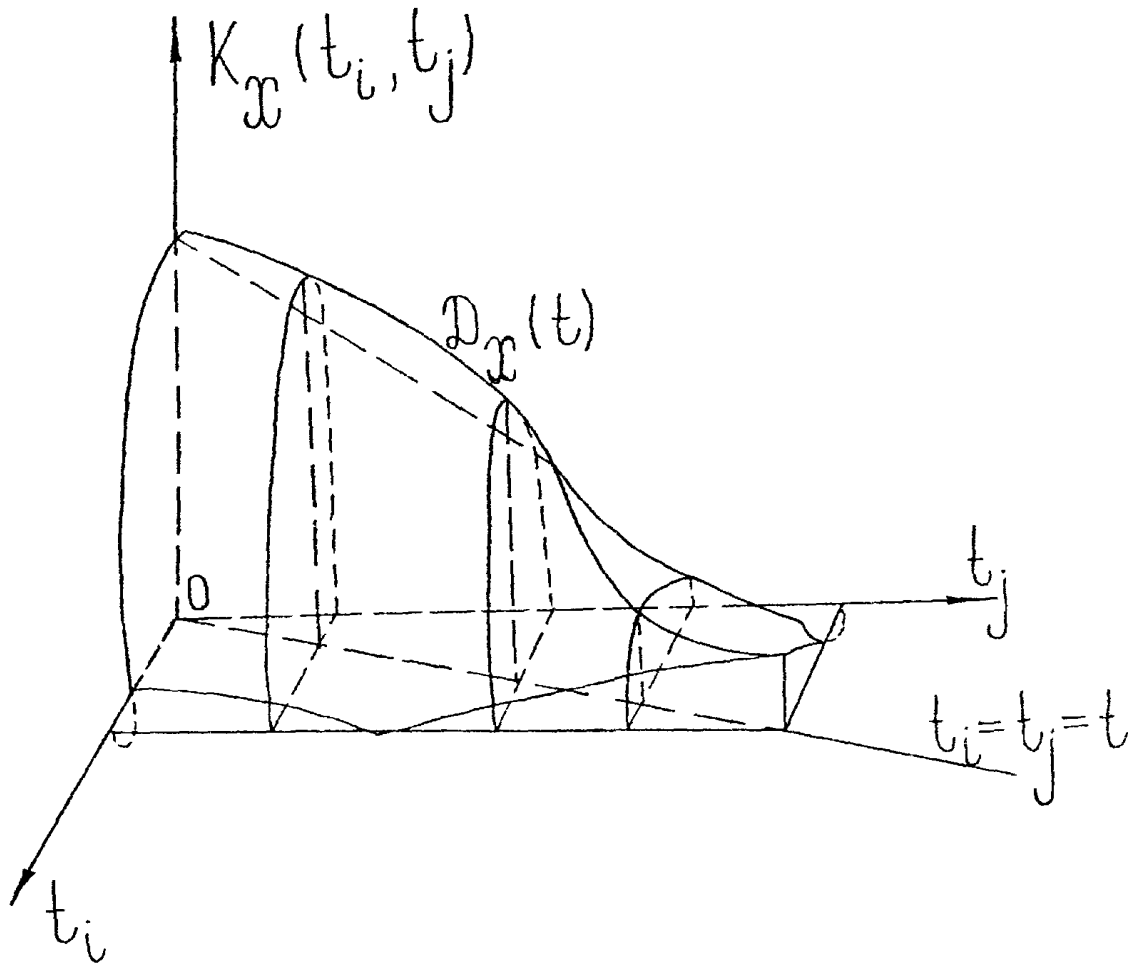


Рисунок 1.2 – Коваріаційна поверхня випадкової функції

При дослідженнях особливостей статистичної структури випадкових процесів часто використовується нормована коваріаційна функція, яку називають кореляційною функцією

$$r_x(t_i, t_j) = \frac{K_x(t_i, t_j)}{\sigma_x(t_i)\sigma_x(t_j)}. \quad (1.13)$$

Кореляційна функція по суті аналогічна коефіцієнту кореляції випадкових величин, який має числове значення, у той час, коли кореляційна функція залежить від двох аргументів  $t_i$  й  $t_j$ . Як і коефіцієнт кореляції, кореляційна функція може набувати значення у границях від -1 до +1. За умови  $t_i = t_j$ ,  $r_x(t, t) = 1$ . При збільшенні різниці  $t_i - t_j$  кореляційна функція, як правило, зменшується.

Розглянемо тепер дві випадкові функції  $X(t)$  і  $Y(t)$ . Кожна з них характеризується своїм математичним сподіванням, своєю дисперсією й своєю коваріаційною функцією. Але при одних і тих же значеннях

аргументів  $t_i$  і  $t_j$ , між цими випадковими функціями може виявлятися статистичний зв'язок. Він характеризується взаємною коваріаційною функцією

$$K_{XY}(t_i, t_j) = M\{[x(t_i) - m_X(t_i)][y(t_j) - m_Y(t_j)]\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_i) - m_X(t_i)][y(t_j) - m_Y(t_j)] f(x(t_i), y(t_j); t_i, t_j) dx_i dy_j. \quad (1.14)$$

Щоб підкреслити факт того, що розглядається зв'язок між двом перерізами однієї й тієї ж випадкової функції  $X(t)$ , коваріаційну  $K_x(t_i, t_j)$  (а також кореляційну функцію) часто називають автоковаріаційною (автокореляційною) функцією.

Поряд із взаємною коваріаційною функцією використовується взаємна кореляційна функція

$$r_{xy}(t_i, t_j) = \frac{K_{xy}(t_i, t_j)}{\sigma_x(t_i)\sigma_y(t_j)}. \quad (1.15)$$

На відміну від автокореляційної функції ця функція при  $t_i = t_j = t$  може не дорівнювати одиниці.

### *Запитання для самоперевірки*

1. Які функції мають назву випадкових?
2. Наведіть приклади випадкових функцій: скалярних та векторних? У чому різниця між ними?
3. Що розуміють під терміном випадкове поле?
4. Яка різниця між випадковим процесом та випадковою послідовністю?
5. У якому разі випадковий процес є заданим?
6. Яка функція має назву одновимірної функції розподілу випадкового процесу? Що вона характеризує?
7. Яка функція має назву двовимірної функції розподілу випадкового процесу? Що вона характеризує?
8. Які є ймовірнісні характеристики випадкових функцій? Яка відмінність їх від статистичних характеристик?
9. Що таке математичне сподівання випадкової функції?
10. Що таке дисперсія випадкової функції? Що вона характеризує?
11. Для чого використовується коваріаційна функція випадкової функції?

## 2 ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

### 2.1 Перетворення випадкової функції лінійним оператором

Нехай функція  $\varphi(t)$  є перетворенням функції  $f(t)$  шляхом здійснення деяких математичних дій, а  $L$ —означення цієї операції, тобто правило, за яким множина функцій  $f(t)$  переходить у множину функцій  $\varphi(t)$ . Це правило називається оператором [17] й позначається

$$\varphi(t) = L[f(t)]. \quad (2.1)$$

Оператор називають лінійним, коли

$$L[cf(t)] = cL[f(t)], \quad (2.2)$$

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]. \quad (2.3)$$

Оператор, який не відповідає цим властивостям, називають нелінійним.

Прикладом лінійного оператора є оператор диференціювання, оскільки

$$\frac{d}{dt}[cf(t)] = c \frac{df(t)}{dt}, \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) + f_2(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

Лінійним є також оператор інтегрування

$$\int cf(t)dt = c \int f(t)dt, \quad (2.6)$$

$$\int [f_1(t) + f_2(t)]dt = \int f_1(t)dt + \int f_2(t)dt. \quad (2.7)$$

Прикладом нелінійного оператора є оператор піднесення до степеня.

Повернемося тепер до випадкових функцій. Нехай випадкова функція  $y(t)$  є результатом застосування лінійного оператора  $L$  до випадкової функції  $X(t)$ , яка має математичне сподівання  $m_x(t)$  і коваріаційну функцію  $K_x(t_1, t_2)$ . Тоді маємо

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[LX(t)] = LM[X(t)] = Lm_x(t). \quad (2.8)$$

Це означає, що математичне сподівання випадкової функції  $Y(t)$  визначається шляхом лінійного перетворення математичного сподівання випадкової функції  $X(t)$ .

Розглянемо тепер коваріаційну функцію  $K_y(t_1, t_2)$ . Очевидно

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M \{ [Y(t_1) - m_y(t_1)] [Y(t_2) - m_y(t_2)] \} = M \{ L^{(t_1)} [X(t_1) - m_x(t_1)] \times \\ &\times L^{(t_2)} [X(t_2) - m_x(t_2)] \} = L^{(t_1)} L^{(t_2)} M \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [X(t_2) - m_x(t_2)] \} = \\ &= L^{(t_1)} L^{(t_2)} K_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для визначення дисперсії випадкової функції  $D_y(t)$  необхідно знайти спочатку  $K_y(t_1, t_2)$ , а потім знайти значення цієї коваріаційної функції при  $t_1 = t_2 = t$ .

У випадку застосування оператора  $L$  до  $X(t)$ , яка має нормальний закон розподілу ймовірностей, випадкова функція  $Y(t) = LX(t)$  також буде підлягати цьому закону розподілу. Дійсно, завдяки лінійності оператора  $L$  випадкова функція  $Y(t)$  може бути отримана тільки у результаті лінійної комбінації нескінченного числа ординат функції  $X(t)$ , але із теорії ймовірностей відомо, що лінійна комбінація нормально розподілених випадкових величин, як залежних, так і незалежних, підлягає також нормальному закону розподілу, параметрами якого є  $m_y(t)$  і  $K_y(t_1, t_2)$ , що повністю визначають цей закон. З іншого боку, якщо випадкова функція  $X(t)$  не підлягає нормальному закону розподілу, то  $Y(t) = LX(t)$  не буде мати той же, що і функція  $X(t)$  закон розподілу. Такий же висновок буде, якщо оператор  $L$  не є лінійним.

## 2.2 Властивості випадкових функцій

Оператор лінійного перетворення зумовлює ряд властивостей випадкових функцій [7, 16, 17]. Розглянемо їх.

1. Математичне сподівання суми випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань функцій



$$M \left\{ \sum_{i=1}^n X_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n M[X_i(t)] = \sum_{i=1}^n m_{x_i}(t) . \quad (2.10)$$

2. Якщо випадкова функція  $Z(t) = X(t) + Y(t)$  дорівнює сумі двох випадкових функцій, то

$$K_z(t_i, t_j) = K_x(t_i, t_j) + K_y(t_i, t_j) + K_{xy}(t_i, t_j) + K_{yx}(t_i, t_j). \quad (2.11)$$

Видно, що взаємні коваріаційні функції не мають властивості симетрії. Якщо випадкові функції  $X(t)$  і  $Y(t)$  – некорельовані між собою, тобто  $K_{xy}(t_i, t_j) = 0$ , то

$$K_z(t_i, t_j) = K_x(t_i, t_j) + K_y(t_i, t_j) . \quad (2.12)$$

3. Нехай випадкова функція  $Z(t)$  дорівнює сумі випадкової функції  $X(t)$  і не випадкової величини  $Y$ , то

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y, \quad (2.13)$$

а її коваріаційна функція дорівнює

$$K_z(t_i, t_j) = K_x(t_i, t_j) + \sigma_y^2, \quad (2.14)$$

де  $\sigma_y^2$  – дисперсія випадкової величини  $Y$ .

4. Якщо випадкова функція  $Z(t)$  є сумою випадкової функції  $X(t)$  й не випадкової функції  $f(t)$

$$Z(t) = X(t) + f(t) , \quad (2.15)$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + f(t), \quad (2.16)$$

а коваріаційна функція

$$K_z(t_i, t_j) = K_x(t_i, t_j) . \quad (2.17)$$

5. При множенні випадкової функції  $X(t)$  на не випадкову  $f(t)$ , тобто,

$$z(t) = f(t)X(t), \quad (2.18)$$

маємо

$$m_z(t) = f(t)m_x(t), \quad (2.19)$$

а

$$K_z(t_i, t_j) = f(t_i)f(t_j)K_x(t_i, t_j), \quad (2.20)$$

у частинному випадку, коли

$$Z(t) = aX(t), \quad (2.21)$$

де  $a$  – деякий коефіцієнт, маємо

$$m_z(t) = am_x(t), \quad (2.22)$$

$$K_z(t_i, t_j) = a^2 K_x(t_i, t_j). \quad (2.23)$$

### 2.3 Похідна випадкової функції

Звичайне уявлення похідної є

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}. \quad (2.24)$$

Але таке уявлення відносно похідної не може застосовуватись до випадкової функції, тому що є неможливість звичайного визначення границі до випадкових величин [7].

Дійсно, відношення приросту випадкової функції до приросту аргументу  $\Delta t$

$$Y(t) \rightarrow \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (2.25)$$

є випадковою величиною. Задаючи при фіксованому  $t$  послідовність  $\Delta t$ , яка прямує до нуля ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), ми отримуємо послідовність випадкових величин, і про границі послідовності можна мовити лише у ймовірнісному сенсі. Тому необхідно користуватися поняттям границі у середньому квадратичному. У відповідності з цим, кажуть, що випадкова функція  $X(t)$  скалярної змінної  $t$  диференціюється (тобто має похідну), якщо існує така випадкова функція  $Y_1(t)$ , що

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \left[ \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - Y_1(t) \right]^2 \right\} = 0. \quad (2.26)$$

Випадкова функція  $Y_1(t)$  називається похідною випадкової функції  $X(t)$  і для неї застосовується звичайне означення

$$Y_1(t) = \frac{dX(t)}{dt} = X'(t). \quad (2.27)$$

Із цього означення виходить, що похідна від випадкової функції є границя математичного сподівання квадрата випадкової функції, яка розташована у фігурних дужках, у середньому квадратичному, тобто

$$X'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}. \quad (2.28)$$

Якщо випадковий процес диференційований при всіх значеннях  $t$  на деякому інтервалі, то похідна

$$Y_1(t) = \frac{dX(t)}{dt} \quad (2.29)$$

також є випадковим процесом аргументу  $t$ . Таким чином, означення похідної випадкової функції аналогічне означенню похідної не випадкової функції, але за умовою, що границя застосовується у середньому квадратичному.

Нехай  $X(t)$  має  $m_x(t)$  і коваріаційну функцію  $K_x(t)$ . Визначимо ці функції:

$$\begin{aligned}
m_y(t) &= M[Y(t)] = M\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{M(X(t + \Delta t)) - M(X(t))}{\Delta t}\right] = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t}\right] = \frac{dm_x(t)}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Таким чином,

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}. \tag{2.31}$$

Знайдемо тепер коваріаційну функцію  $K_x(t_i, t_j)$ .

Позначимо операцію центрування так:

$$Y(t_i) - m_y(t_i) = \overset{\circ}{Y}(t_i). \tag{2.32}$$

Тоді маємо

$$K_y(t_i, t_j) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_i), \overset{\circ}{Y}(t_j)\right]. \tag{2.33}$$

Оскільки

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}, \tag{2.34}$$

то

$$\overset{\circ}{Y}(t_i)\overset{\circ}{Y}(t_j) = \frac{d\overset{\circ}{X}(t_i)}{dt_i} \frac{d\overset{\circ}{X}(t_j)}{dt_j} \tag{2.35}$$

або розглядаючи  $t_i$  й  $t_j$  як незалежні змінні, отримаємо

$$M\left[\overset{\circ}{Y}(t_i)\overset{\circ}{Y}(t_j)\right] = \frac{\partial^2}{\partial \sigma_{t_i} \partial \sigma_{t_j}} M\left[\overset{\circ}{X}(t_i)\overset{\circ}{X}(t_j)\right] = \frac{\partial^2 K_x(t_i, t_j)}{\partial \sigma_{t_i} \partial \sigma_{t_j}} = K_y(t_i, t_j).$$

Отже

$$K_y(t_i, t_j) = \frac{\partial^2 K_x(t_i, t_j)}{\partial \sigma_{t_i} \sigma_{t_j}}. \quad (2.36)$$

## 2.4 Інтеграл від випадкової функції

Нехай випадковий процес  $X(t)$  визначається на інтервалі  $[a, b]$ . Розіб'ємо цей інтервал на  $n$  часткових інтервалів з кроком  $\Delta t_k$  і складемо суму

$$\sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k, \quad (2.37)$$

де  $X(t_k)$  –переріз випадкової функції при  $t = t_k$ , а  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ .

За аналогією з означенням інтеграла від невід випадкової функції, визначений інтеграл на  $[a, b]$  випадкової функції  $X(t)$  будемо називати границею у середньому квадратичному цієї інтегральної суми при прямуванні до нуля ( $\lambda \rightarrow 0$ ) найбільшої із різниць  $\Delta t_k$

$$Y(t) = \int_a^b X(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k. \quad (2.38)$$

Інтеграл від випадкової функції як границя суми випадкових величин, є випадковою величиною [7]. Якщо ця границя існує і не залежить від способу розбиття  $[a, b]$  на частини, то  $X(t)$  називається інтегрованою на  $[a, b]$ .

Розглянемо

$$Y(t) = \int_0^t X(t) dt \quad (2.39)$$

і знайдемо  $m_y(t)$ . Очевидно,

$$m_y(t) = M \left[ \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k \right] = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m_k(t_k) \Delta t_k = \int_0^t m_x(\tau) d\tau.$$

Отже,

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Як було зазначено вище,

$$\overset{o}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t).$$

Тоді

$$\overset{o}{Y}(t) = \int_0^t [X(\tau) - m_x(\tau)] d\tau - m_y(t) = \int_0^t \overset{o}{X}(\tau) d\tau + m_y(t) - m_y(t) = \int_0^t \overset{o}{X}(\tau) d\tau. \quad (2.41)$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_y(t_i, t_j) &= M \left\{ \overset{o}{Y}(t_i), \overset{o}{Y}(t_j) \right\} = M \left[ \int_0^{t_i} \overset{o}{X}(\tau) d\tau \int_0^{t_j} \overset{o}{X}(\tau) d\tau \right] = M \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} \overset{o}{X}(\tau_i) d\tau_i \overset{o}{X}(\tau_j) d\tau_j = \\ &= M \int_0^{t_i} \int_0^{t_j} K_x(\tau_i, \tau_j) d\tau_i d\tau_j. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Отже, математичне сподівання інтеграла випадкової функції дорівнює інтегралу від її математичного сподівання; коваріаційна функція інтеграла випадкової функції дорівнює подвійному інтегралу від коваріаційної функції цієї випадкової функції.

#### *Запитання для самоперевірки*

1. Назвіть властивості лінійного оператора.
2. Наведіть приклад нелінійного оператора.
3. Чому дорівнює коваріація суми двох випадкових функцій?
4. Чому дорівнює коваріація суми випадкової функції та не випадкової величини?

5. Чому дорівнює коваріація суми випадкової та не випадкової функцій?
6. Що називається похідною випадкової функції?
7. Чому дорівнює математичне сподівання інтеграла випадкової функції?
8. Чому дорівнює коваріаційна функція інтеграла випадкової функції?

## 3 СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

### 3.1 Поняття про стаціонарну випадкову функцію, її ймовірнісні характеристики

Серед випадкових функцій важливу роль відіграє клас випадкових функцій, який називають стаціонарними випадковими функціями. Стаціонарність випадкової функції означає, що випадковий процес протікає однорідно зі змінюванням аргументу  $t$ , при цьому стаціонарна випадкова функція повинна, взагалі кажучи, існувати в області аргументу  $(-\infty, \infty)$ . Існує два поняття про стаціонарність випадкового процесу – стаціонарність у вузькому смислі й стаціонарність у широкому смислі [3, 16].

Випадкову функцію називають стаціонарною у вузькому смислі, якщо її  $n$ -вимірний закон розподілу залежить тільки від різниць аргументів  $t_1, t_2, \dots, t_n$  і не залежить від значень самих аргументів. Визначення на основі експериментальних даних  $n$ -вимірних випадкових законів розподілу ймовірностей – дуже складна задача. Тому для означення стаціонарності використовують ймовірнісні характеристики випадкового процесу. Таку стаціонарність характеризують як стаціонарність у широкому смислі.

Стаціонарною випадковою функцією називається така випадкова функція, математичне сподівання у якої постійне, а коваріаційна функція залежить тільки різниць аргументу  $t_i$  і  $t_j$  [21]. Це означає, що у такої функції

$$m_x = const, \quad (3.1)$$

$$K_x(t_i, t_j) = K(\tau), \quad (3.2)$$

де

$$\tau = t_i - t_j.$$

Визначення цих ймовірнісних характеристик на основі експериментальних даних не становить труднощів. Тому у більшості випадків користуються саме означенням стаціонарності у широкому смислі.

Як впливає з означення, коваріаційна функція стаціонарної випадкової функції є функцією тільки одного аргументу  $\tau$ , а не двох, як це було у загальному випадку. Це значно спрощує всі операції з



характеристиками стаціонарних випадкових функцій.

Дисперсію стаціонарної випадкової функції отримаємо, якщо у загальному виразі для коваріаційної функції випадкової функції припустимо, що  $t_i = t_j = t$ .

Тоді маємо,

$$D_x(t) = K_x(t, t) = K_x(t - t) = K_x(0) = const. \quad (3.4)$$

Отже, дисперсія стаціонарної випадкової функції є постійною величиною, яка дорівнює значенню коваріаційної функції при нульовому значенні аргументу. Оскільки у загальному випадку коваріаційна функція симетрична відносно її аргументів  $t_i$  і  $t_j$ , то коваріаційна функція стаціонарної випадкової функції є функцією парною, тобто

$$K_x(-\tau) = K_x(\tau). \quad (3.5)$$

На рис. 3.1 [20] відображається коваріаційна поверхня, що відповідає умові стаціонарності.

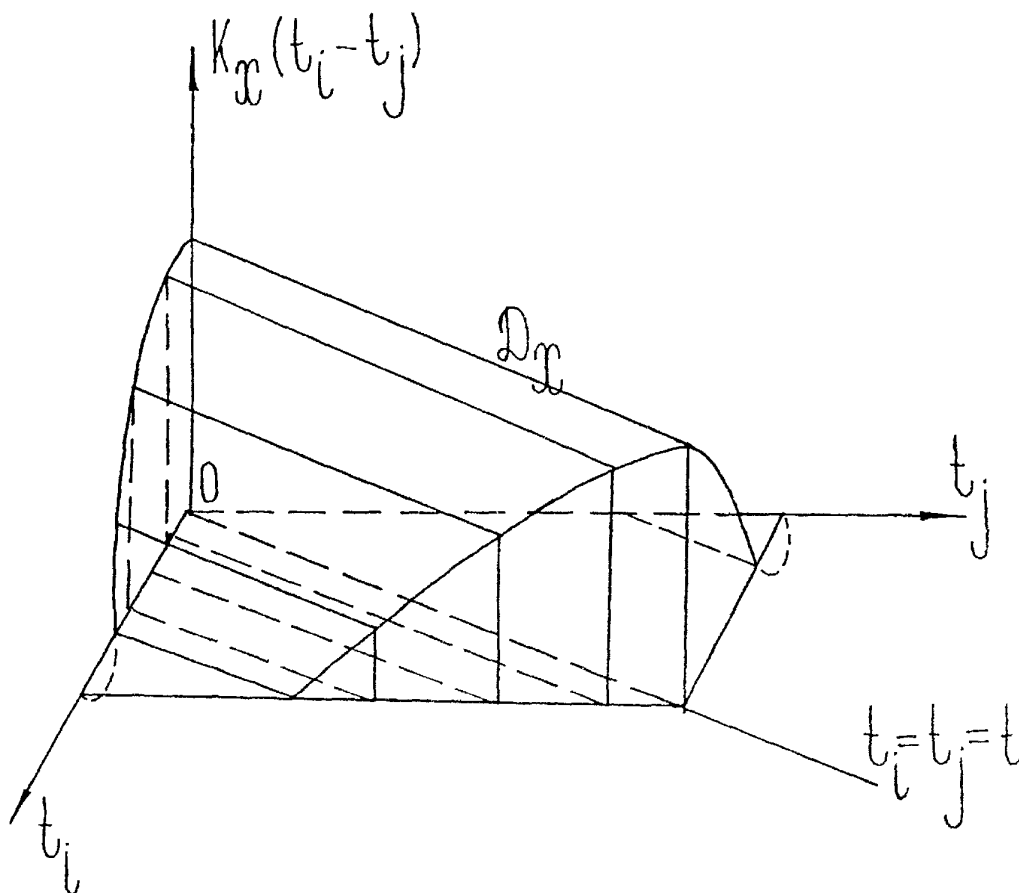


Рисунок 3.1 – Коваріаційна поверхня стаціонарної випадкової функції

Як видно, на відміну від коваріаційної функції нестационарної випадкової функції коваріаційна функція стаціонарного процесу постійна для всіх  $t_i - t_j = const$ .

Як і у загальному випадку стаціонарна випадкова функція характеризується й кореляційною функцією  $r_x(\tau)$ .

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x}. \quad (3.6)$$

Ця функція теж є парною  $r_x(-\tau) = r_x(\tau)$  й може набирати значення в інтервалі  $(-1, 1)$ .

Для характеристик особливостей статистичної структури стаціонарного випадкового процесу поряд з коваріаційною функцією використовують структурну функцію  $B_x(\tau)$ . За означенням ця функція визначається таким чином:

$$B_x(\tau) = M \left\{ \left[ \overset{\circ}{X}(t + \tau) - \overset{\circ}{X}(t) \right]^2 \right\}. \quad (3.7)$$

З рівності (3.7) видно, що  $B_x(\tau) \geq 0$ .

Структурну функцію можна виразити через кореляційну функцію. Дійсно

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= M \left\{ \left[ (X(t + \tau) - m_x) - (X(t) - m_x) \right]^2 \right\} = M \left\{ [X(t + \tau) - m_x]^2 \right\} + \\ &+ M \left\{ [X(t) - m_x]^2 \right\} - 2M \left\{ [X(t + \tau) - m_x][X(t) - m_x] \right\} = D_x + D_x - 2K_x(\tau) = \\ &= 2[D_x - K_x(\tau)] = 2[D_x(1 - r_x(\tau))]. \end{aligned}$$

Отже

$$B_x(\tau) = 2[D_x(1 - r_x(\tau))]. \quad (3.8)$$

Оскільки  $D_x > K_x(\tau)$ , то структурна функція є функцією парною  $B(-\tau) = B(\tau)$ .

Очевидно

$$B_x(0) = 2[D_x - D_x] = 0. \quad (3.9)$$

Якщо у випадковому процесі  $K_x(\tau) = 0$ , тобто він некорельований, то

$$B_x(\tau) = 2D_x. \quad (3.10)$$

Позначимо

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = B_x(\infty) = 2D_x,$$

то можна записати

$$B_x(\tau) = B_x(\infty) - 2K_x(\tau). \quad (3.11)$$

Звідси

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2}[B_x(\infty) - B_x(\tau)]. \quad (3.12)$$

Якщо відомо значення структурної функції на нескінченному інтервалі змінювань аргументу  $\tau$ , то можна визначити коваріаційну функцію, але характеристики процесу на нескінченному інтервалі невідомі [7]. Однак структурна функція швидко досягає насичення, яке при подальшому збільшенні  $\tau$  змінюється мало. Це значення іноді називають насиченим значенням структурної функції й позначають  $B_x(\infty)$ .

Оскільки

$$B_x(\tau) = 2[D_x - K_x(\tau)],$$

то, очевидно

$$K_x(\tau) = D_x - \frac{1}{2}B_x(\tau), \quad (3.13)$$

або

$$K_x(\tau) + \frac{1}{2}B_x(\tau) = D_x. \quad (3.14)$$

Якщо, наприклад,

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha\tau}, \quad (3.15)$$

то

$$B_x(\infty) = 2D_x \quad (3.16)$$

і

$$D_x = \frac{1}{2} B_x(\infty). \quad (3.17)$$

На рис.3.2 зображені графіки структурної й коваріаційної функції, що відповідають цьому випадку.

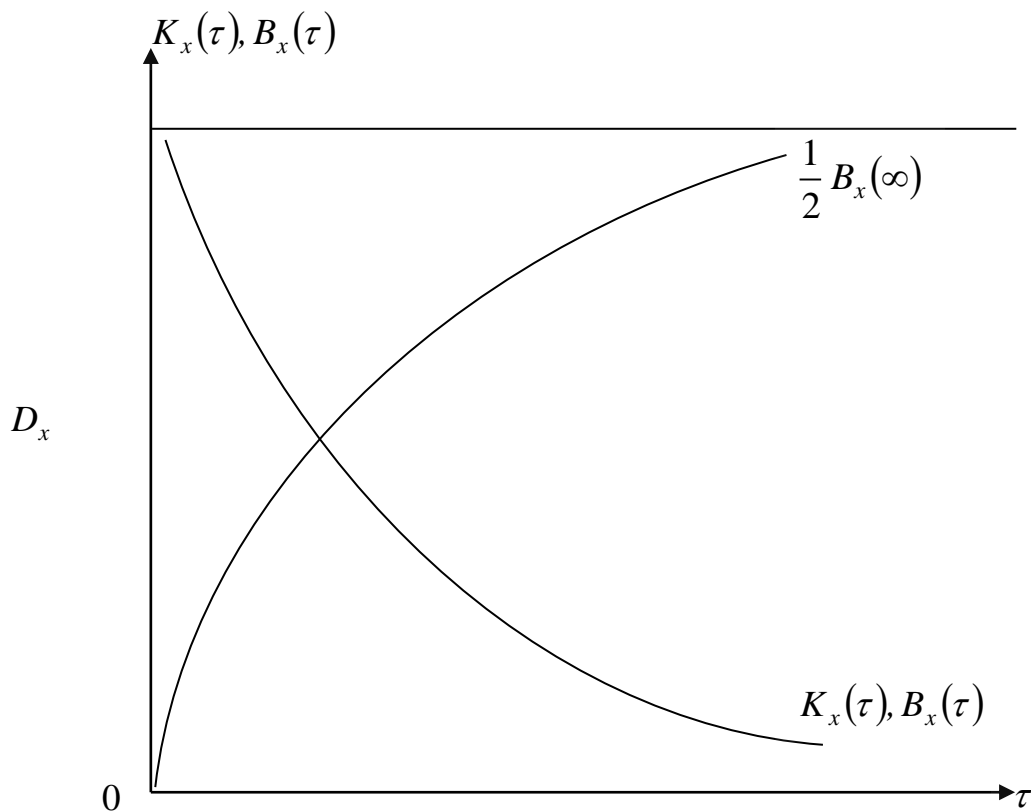


Рисунок 3.2 – Структурна та коваріаційна функції

Структурна функція має перевагу, коли на випадковий процес при малих значеннях  $\tau$  накладаються довгохвильові збурення. Такий повільно змінний процес чинить невеликий вплив на змінювання  $B_x(\tau)$ . Ці похибки виключаються операцією  $\overset{\circ}{X}(x + \tau) - \overset{\circ}{X}(x)$ . Використання структурної функції є корисним при розрахунках характеристик процесу на основі однієї реалізації, коли вносяться похибки в оцінку математичного сподівання, тому що ці похибки не вносять похибок у структурну функцію. Таким чином використання структурної функції дозволяє у ряду випадків

зменшити вплив неоднорідності випадкового процесу, систематичних похибок на точність розрахованих за експериментальними даними характеристик випадкового процесу.

Стаціонарні випадкові функції у чистому вигляді зустрічаються не завжди, оскільки для цього необхідно існування однорідності випадкового процесу при нескінченному інтервалі значень аргументу  $t$ . Але, як правило, викликає зацікавленість протікання випадкового процесу на обмеженому інтервалі  $t$ . Якщо умови стаціонарності виконуються на цьому інтервалі, то вважається, що така випадкова функція є стаціонарною.

Зустрічаються випадкові функції, у яких коваріаційна функція задовольняє умови стаціонарності, але математичне сподівання її не є постійним, тоді властивості мають, наприклад, випадкові гідрометеорологічні процеси, що формуються під дією збурюючих факторів не тільки випадкового характеру, але й факторів детермінованих.

Останні можуть мати різну періодичність, наприклад, добовий та річний хід. Такі випадкові функції можна розглядати також як стаціонарні після віднімання із вихідного процесу його математичного сподівання  $m_x(t)$ . Статистичний аналіз таких нестаціонарних процесів розглянемо пізніше.

### 3.2 Ергодична властивість стаціонарних випадкових функцій

Більшість стаціонарних випадкових функцій має дуже важливу для практичного їх використання властивість - ергодичність. Суть ергодичної властивості полягає у тому, що на основі однієї достатньо довгочасної реалізації можна отримати уявлення про всі властивості випадкових функцій, як і по будь-якій кількості її реалізації [7, 20].

Оскільки розподіл випадкової функції може охарактеризувати за допомогою достатньо великої кількості моментів розподілу, а аргументом випадкової функції в більшості випадків є час, то ергодичну властивість стаціонарної випадкової функції можна означити таким чином: осереднення за часом будь-якої достатньо довгої реалізації дорівнює осередненню за множеною реалізацій. Математично ергодична властивість для моментів першого та другого порядків означається у такому вигляді:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)dt = \overline{X(t)}, \quad (3.18)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x,t)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x]^2 f(t)dt = \overline{[x(t) - m_x]^2}, \quad (3.19)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_x)(x_j - m_x) f(x_i, x_j, t_i, t_j) dx_i dx_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T [x(t + \tau) - m_x] \times \\ \times [x(t) - m_x] dt = \overline{\{[x(t + \tau) - m_x][x(t) - m_x]\}}. \quad (3.20)$$

Вважається, що реалізація  $x(t)$  визначена на інтервалі  $t \in [-T, T]$ . Аналогічний вигляд має й відповідне рівняння для структурної функції

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{[x(t + \tau) - m_x][x(t) - m_x]\}^2 dt = \overline{\{[x(t + \tau) - m_x][x(t) - m_x]\}^2}. \quad (3.21)$$

Випадкові функції можуть мати ергодичну властивість по відношенню до моментів не всіх порядків. Наприклад, випадкова функція може бути ергодичною по відношенню до математичного сподівання, а властивість ергодичності відносно коваріаційної функції може бути відсутньою.

Стаціонарні випадкові функції можуть взагалі не бути ергодичними. На рис.3.3 наводиться приклад реалізацій стаціонарної випадкової функції  $X(t)$ . Ясно, що коли для оцінки математичного сподівання взяти для осереднення якусь одну з них, то отриманий результат не буде відповідати значенню математичного сподівання при осередненні по всіх реалізаціях. З іншого боку, можна показати, що випадкова функція має ергодичну властивість, якщо її коваріаційна функція  $K_x(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Ця умова є достатньою для того, щоб випадкова функція мала ергодичну властивість відносно моментів першого та другого порядків. Випадкова функція буде мати ергодичну властивість відносно математичного сподівання не тільки при означеній вище умові, але і у випадку, коли  $K_x(\tau)$  при великих значеннях  $\tau$  має коливальний характер відносно осі абсцис.

Для прикладу покажемо, що випадкова функція  $Z(t)$ , яка дорівнює сумі випадкової функції і незалежної від неї випадкової величини  $y$  вже не має ергодичної властивості. Дійсно, у цьому випадку маємо, якщо перейти до центрованих характеристик,

$$K_z(\tau) = M \left\{ \left[ \overset{\circ}{Z}(t + \tau) \bullet \overset{\circ}{Z}(t) \right] \right\} = M \left\{ \left[ \overset{\circ}{X}(t + \tau) + \overset{\circ}{y} \right] \left[ \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{y} \right] \right\} = K_x(\tau) + D_y. \quad (3.22)$$

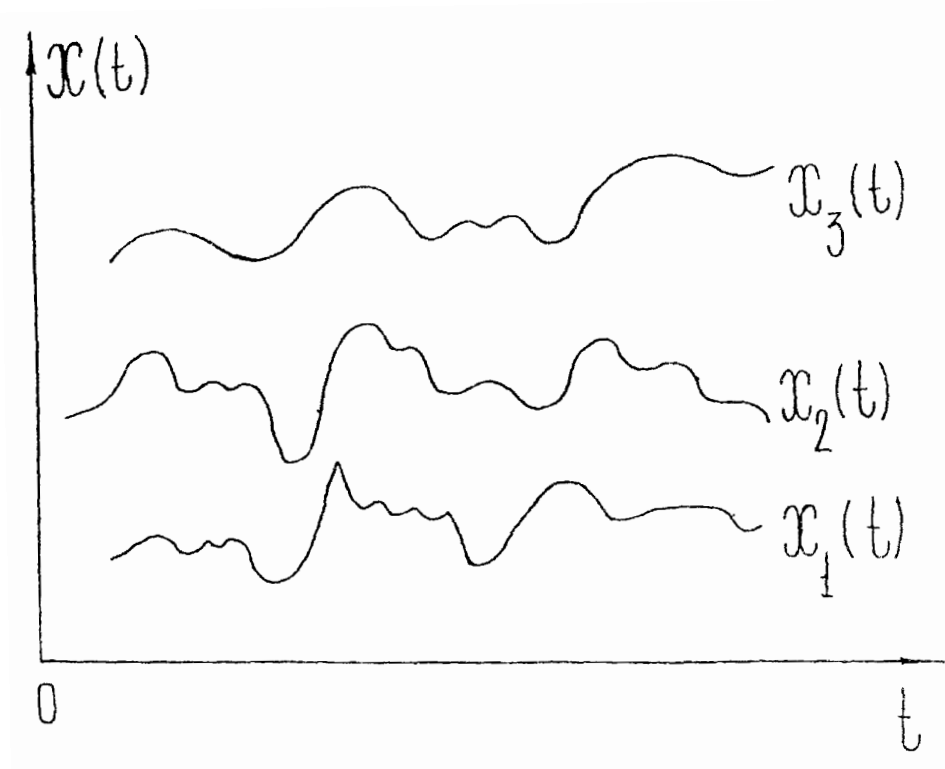


Рисунок 3.3 – Приклад стаціонарної випадкової функції, яка має властивості ергодичності

Коваріаційна функція  $K_x(\tau)$  при збільшенні  $\tau$  (якщо  $X(t)$  – ергодична функція) прямує не до нуля, а до дисперсії випадкової величини  $y$ . Отже, відповідно до зазначеної вище умови ергодичності, випадкова функція  $Z(t)$  вже не має ергодичної властивості.

### 3.3 Спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції

#### 3.3.1 Лінійчатий спектр стаціонарної випадкової функції

Спектральним розкладанням деякої функції називається зображення її у вигляді суми гармонічних коливань, які мають різні амплітуди гармонік. Залежність амплітуд від частоти називається спектром функції [7, 9, 20].

Розглянемо, яким чином можна отримати спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції.

На рис.3.4 умовно зображується випадкова функція  $X(t)$  на обмеженому інтервалі  $(-T; T)$ .

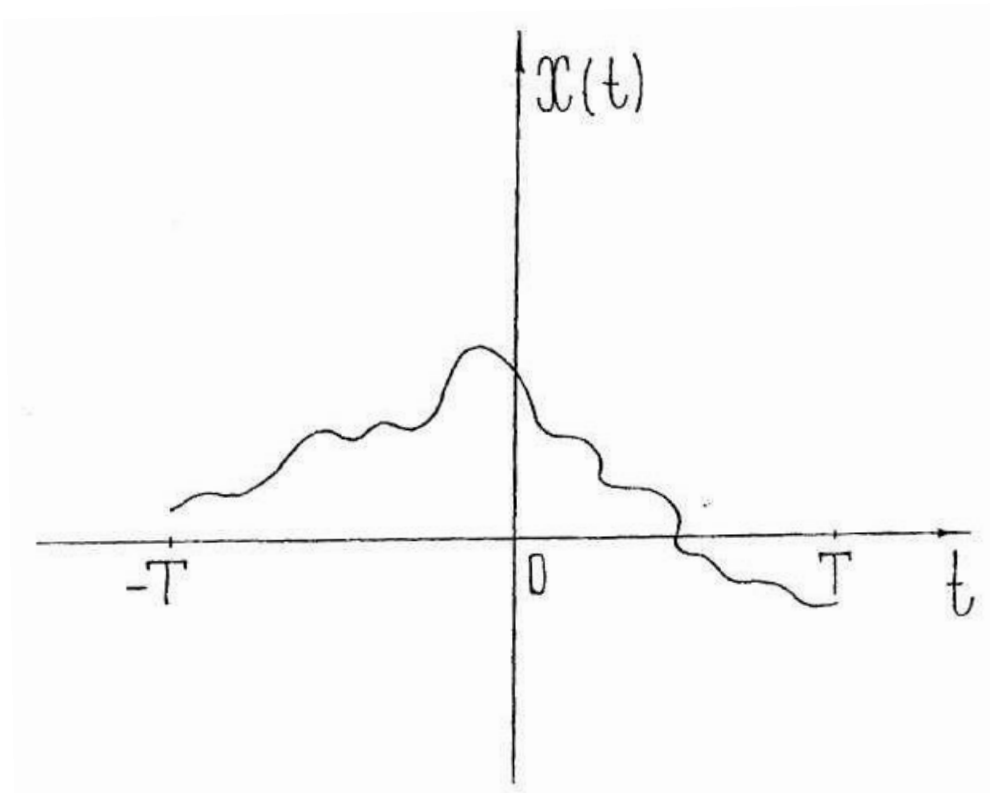


Рисунок 3.4 – Реалізація випадкової функції, визначеної на обмеженій області значень аргументу

Позначимо її  $X_T(t)$ . Розкладемо цю функцію у ряд Фур'є.

$$X_T(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (X_{1i} \cos \omega_i t + X_{2i} \sin \omega_i t), \quad (3.23)$$

де

$$\omega_i = i\Delta\omega; \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}, \quad (3.24)$$

$X_{1i}$  і  $X_{2i}$  - випадкові коефіцієнти ряду Фур'є.

Визначимо дисперсію випадкової функції  $X_T(t)$ :

$$D_{X_T} = M \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (X_{1i} \cos \omega_i t + X_{2i} \sin \omega_i t) (X_{1j} \cos \omega_j t + X_{2j} \sin \omega_j t) \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} [M\{X_{1i}^2\} \cos^2 \omega_i t + M\{X_{2i}^2\} \sin^2 \omega_i t] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [M\{X_{1i} X_{1j}\} \times$$



$$\begin{aligned} & \times \cos \omega_i t \cos \omega_j t + M\{X_{2i} X_{2j}\} \sin \omega_i t \sin \omega_j t] + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} [M\{X_{1i} X_{2j}\} \times \\ & \times \cos \omega_i t \sin \omega_j t + M\{X_{2i} X_{1j}\} \sin \omega_i t \cos \omega_j t], \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Оскільки функції  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$  - є ортогональними, останній член рівності (3.25) дорівнює нулю. Крім того, функція  $X(t)$  - стаціонарна. Тому дисперсія її повинна бути постійною величиною, тобто незалежною від аргументу  $t$ . Як видно, це можливо, коли виконуються умови:

$$M\{X_{1i}^2\} = M\{X_{2i}^2\} = D_i, \quad (3.26)$$

$$M\{X_{1i} X_{1j}\} = M\{X_{2i} X_{2j}\} = 0. \quad (3.27)$$

Якщо запровадити ці умови до рівності (3.25), то отримаємо

$$D_{X_T} = \sum_{i=0}^{\infty} D_i. \quad (3.28)$$

Умова (3.27) є не що інше, як умова незалежності коефіцієнтів розкладу (3.23).

Визначимо тепер коваріаційну функцію випадкової функції  $X_T(t)$ . Очевидно, з урахуванням умов (3.26) і (3.27) маємо:

$$\begin{aligned} K_{X_T}(t_\nu - t_\mu) &= \sum_{i=0}^{\infty} [M\{X_{1i}^2\} \cos \omega_i t_\nu \cos \omega_i t_\mu + M\{X_{2i}^2\} \sin \omega_i t_\nu \sin \omega_i t_\mu] = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} D_i (\cos \omega_i t_\nu \cos \omega_i t_\mu + \sin \omega_i t_\nu \sin \omega_i t_\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cos \omega_i (t_\nu - t_\mu). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Позначимо  $t_\nu - t_\mu = \tau$ . Тоді приходимо до рівняння:

$$K_{X_T}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cos \omega_i \tau. \quad (3.30)$$

Рівняння (3.30) є розкладом коваріаційної функції  $K_{X_T}(\tau)$  у ряд Фур'є на інтервалі  $[-T, T]$ . Як було відзначено раніше, коваріаційна функція стаціонарної випадкової функції – функція парна. Її розкладання, як і будь-якої парної функції у ряд Фур'є проводиться за косинусами. Коефіцієнти Фур'є парної функції визначаються формулами:

$$D_0 = \frac{1}{T} \int_0^T K_{X_T}(\tau) d\tau, \quad (3.31)$$

$$D_i = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} K_{X_T}(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad i=1,2,3,\dots \quad (3.32)$$

Таким чином, для опису стаціонарної випадкової функції можна використовувати залежність дисперсії коефіцієнтів розкладення випадкової функції в ряд Фур'є  $D_i$  від частоти  $\omega_i$  замість коваріаційної функції  $K_{X_T}(\tau)$ . Залежність коефіцієнтів  $D_i$  від частоти  $\omega_i$  називається спектром випадкової функції. Якщо випадкова функція розглядається на обмеженому інтервалі аргументів, то частота набуває дискретних значень з проміжком  $\Delta\omega$ . У цьому випадку спектр випадкової функції називається дискретним або лінійчатим. Приклад лінійчатого спектра наводиться на рис.3.5. Лінійчатий спектр буде і у випадку розкладання в ряд Фур'є і періодичної випадкової функції.

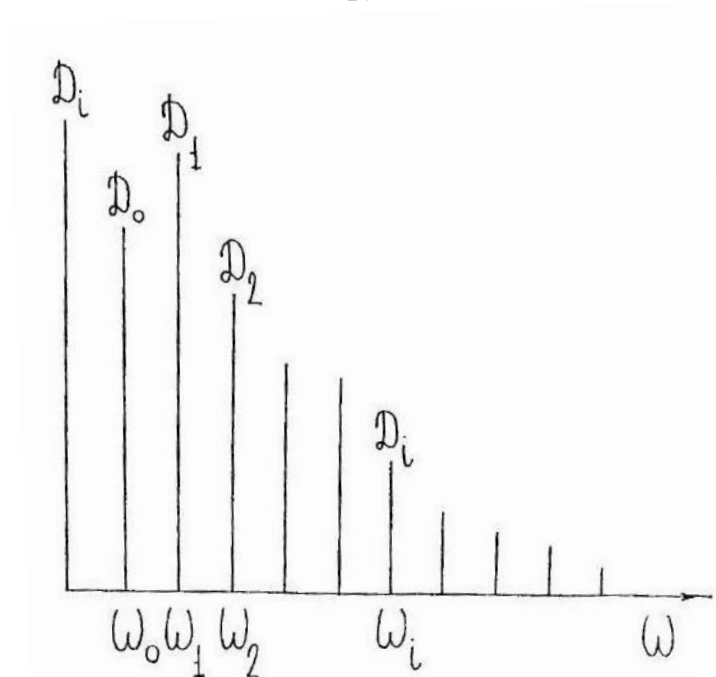


Рисунок 3.5 – Дискретний сектор випадкової функції

### 3.3.2 Спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу

Спектральний розклад виняткової стаціонарної функції, визначеної на обмеженому інтервалі  $[-T; T]$ , дає лише її наближений опис. Більш повне уявлення про випадкову функцію можна отримати при  $T \rightarrow \infty$ . У цьому випадку частота  $\omega_k$  із дискретної перетворюється на неперервну  $\omega$ , а замість значення дисперсій амплітуд для кожної частоти, тобто дискретного спектра, необхідно розглядати щільність дисперсій амплітуд для кожного значення частоти  $\omega$ . Таким чином дискретний спектр перетворюється на неперервний [7, 9, 21].

Знайдемо відношення  $\frac{D_i}{\Delta\omega}$ , яке має сенс значення дисперсій, що припадають на одиницю частоти. Позначимо її через  $S_{X_T}(\omega_i)$ . Отже,

$$S_{X_T}(\omega_i) = \frac{D_i}{\Delta\omega}, \quad (3.33)$$

Підставимо замість дисперсії  $D_i$  її значення із рівності (3.32) і застосуємо у знаменнику формулу (3.24). Отримаємо

$$S_{X_T}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} K_{X_T}(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau. \quad (3.34)$$

Звідси, при  $T \rightarrow \infty$  маємо:

$$S_X(\omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ (\omega \rightarrow 0)}} S_{X_T}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Функція

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (3.35)$$

визначає щільність розподілу дисперсії амплітуд гармонік, які складають рівняння (3.23), у залежності від частоти і називається спектральною щільністю випадкової функції.

Із рівності (3.35) випливає, що спектральна щільність стаціонарної випадкової функції однозначно визначається її коваріаційною функцією.

Неважко показати, що рівняння (3.35) є косинус-перетворення Фур'є. Для цього запишемо перетворення Фур'є для коваріаційної функції і застосуємо у ньому відому формулу Ейлера

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) [\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Оскільки, як відомо,  $K_X(\tau)$  і  $\cos \omega\tau$  – парні, а  $\sin \omega\tau$  – непарна функція, другий інтеграл, як інтеграл від непарної функції на симетричному інтервалі, дорівнює нулю.

Якщо порівняти перший інтеграл, що залишився у правій частині рівняння (3.36), з рівнянням (3.35), то побачимо, що

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.37)$$

тобто рівності (3.35) і (3.37) – еквівалентні.

Розглянемо тепер обернене перетворення Фур'є для спектральної щільності і застосуємо замість експонентної відповідну формулу Ейлера

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) [\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega + \\ &+ i \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Із (3.35) видно, що спектральна щільність є функцією парною, тобто  $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$ . Тому другий інтеграл рівняння (3.38) дорівнює нулю і

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (3.39)$$

Обернене перетворення Фур'є дорівнює коваріаційній функції  $K_X(\tau)$ .

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (3.40)$$

Розглянемо основні властивості спектральної щільності стаціонарної випадкової функції:

1. Інтеграл від спектральної щільності по всіх значеннях частоти дорівнює дисперсії випадкової функції. Дійсно, оскільки, як відомо,  $D_X = K_X(0)$ , а  $\cos \omega \tau = 1$  при  $\tau = 0$ , із (6.55) маємо:

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega, \quad (3.41)$$

або з урахуванням того, що  $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$

$$D_X = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (3.42)$$

З геометричної точки зору дисперсія стаціонарної випадкової функції дорівнює площі, яка для цієї функції обмежується графіком функції  $S_X(\omega)$  й віссю абсцис.

2. Спектральну щільність випадкової функції досить часто називають "енергетичним спектром" випадкового процесу. Підставою для цього є те, що вона має розмірність енергії. Прикладом можуть бути турбулентні пульсації швидкості вітру. Розмірність дисперсії пульсацій швидкості вітру є  $m^2 \cdot c^{-2}$ , тобто співпадає з розмірністю енергії одиничної маси повітря.

3. Подібно до нормованої коваріаційної функції (кореляційної функції) може використовуватись нормована спектральна щільність:

$$S(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{D_X}. \quad (3.43)$$

Нормована спектральна щільність зв'язана з кореляційною функцією такими ж співвідношеннями, як і спектральна щільність  $S_X(\omega)$  з коваріаційною функцією  $K_X(\tau)$ .

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Вона має всі властивості, як і спектральна щільність  $S_X(\omega)$ . Крім того

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_X(\omega)}{D_X} d\omega = \frac{1}{D_X} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \frac{D_X}{D_X} = 1.$$

4. При збільшенні масштабу аргументу коваріаційної функції масштаб аргументу спектральної щільності і значення самої спектральної щільності зменшується у таке ж саме число разів. Іншими словами, якщо коваріаційній функції  $K_X(\tau)$  відповідає спектральна щільність  $S_X(\omega)$ , то коваріаційній функції  $K_X(\alpha\tau)$  відповідає спектральна щільність  $\frac{1}{\alpha} S_X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ .

Дійсно, якщо позначити  $z = \alpha\tau$ , то будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha\tau) \cos \omega \tau d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) \cos \frac{\omega \tau}{\alpha} d \frac{z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(z) \cos \frac{\omega}{\alpha} z dz \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} S_X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ця властивість значить, що при стиску ( $\alpha < 1$ ) коваріаційної функції вздовж осі  $\tau$  спектр випадкової функції розширюється, а при  $\alpha > 1$  – навпаки. Така поведінка функцій  $K_X(\tau)$  і  $S_X(\omega)$  фізично пояснюється тим, що при переважанні у сигналі високих частот коваріаційна функція швидко зменшується, а спектральна щільність розтягується в сторону високих частот. Якщо у сигналі переважають низькі частоти, то маємо обернену картину.

### 3.3.3 Приклади застосування перетворення Фур'є до коваріаційних функцій

Використовуючи перетворення Фур'є у загальному вигляді (3.37), а також обернене перетворення Фур'є, можна отримати аналітичний вираз

для спектральної щільності, якщо відомий аналітичний вираз коваріаційної функції. Розглянемо приклади для найбільш вживаних апроксимацій коваріаційних функцій, отриманих на основі обробки експериментальних даних.

1. Нехай стаціонарний випадковий процес має коваріаційну функцію

$$K(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad (\alpha > 0). \quad (3.46)$$

Спектральні щільність, отримана за допомогою перетворення Фур'є дорівнює

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} \right] = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Як видно з (3.47), це парна функція, яка досягає найбільшого значення  $\frac{D_x}{\pi\alpha}$  при  $\omega = 0$ .

Приклади графіків кореляційних функцій і відповідних спектральних щільностей наведені на рис.3.6. Коваріаційна (кореляційна) функція у точці  $\tau = 0$  й відповідна спектральна щільність в точці  $\omega = 0$  не мають похідних. Коефіцієнт  $\alpha$  у рівності (3.46), має сенс масштабу аргументу, при якому коваріаційна функція зменшується в  $e$  разів. Тому її називають декрементом затухання коваріаційної функції.

Порівнювання кривих на рис.3.6 показує, що при малих  $\alpha$  кореляційна функція зменшується при збільшенні  $\tau$  повільно, а відповідна спектральна щільність при збільшенні частоти  $\omega$  – швидко. Це свідчить про те, що у спектрі випадкового процесу є у наявності малі частоти (або великі масштаби флуктуацій фізичної величини). Процеси такого типу мають назву вузькосмугових, оскільки енергія такого процесу зосереджується у вузькій смузі частот. Отже, вузькосмуговий процес характеризується великим часом кореляції, тобто наявністю кореляційного зв'язку між перетинами випадкової функції, який повільно зменшується зі збільшенням інтервалу між перетинами.

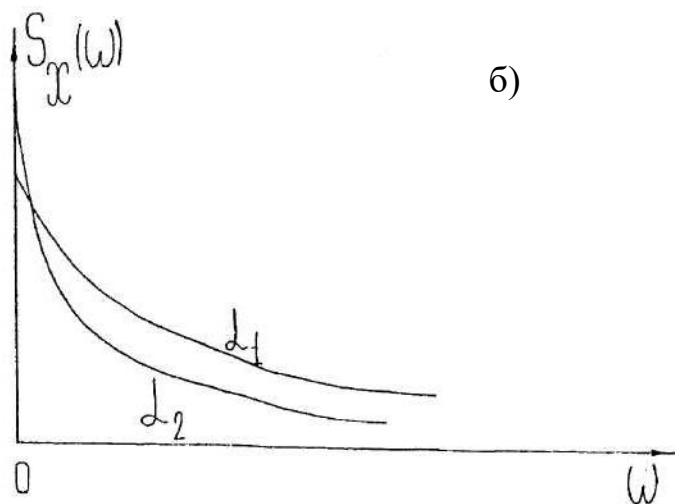
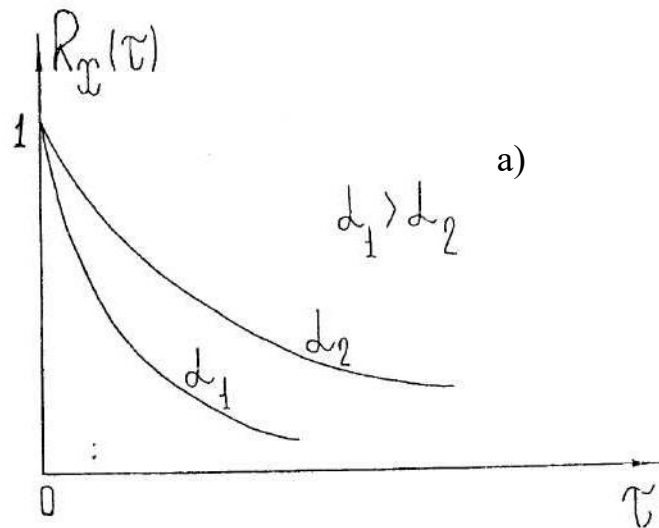


Рисунок 3.6 – Приклади кореляційних (а) та відповідних спектральних функцій (б) (не мають похідних)

При збільшенні  $\alpha$ , тобто із падінням часу кореляції швидкість зменшення енергетичного спектра більш плавна. Для великих  $\alpha$  значення спектральної швидкості зменшується дуже повільно. Процеси, для яких це притаманно, називають широкосмуговими.

Розглядається стаціонарний випадковий процес, спектральна щільність якого є величиною постійною:  $S_X(\omega) = S_X(0) = const$ . Його називають "білим шумом" за аналогією з білим світлом, яке утворюється при рівномірному змішуванні всіх кольорів видимого спектра. Такий випадковий процес відзначається рівномірним розподілом енергії по всіх



частотах. Реально такі процеси не існують, оскільки енергія такого процесу (інакше кажучи його дисперсія) повинна бути нескінченною, але вони є зручною абстракцією для тих випадків, коли спектральна щільність приблизно постійна на діапазоні частот, що нас цікавить.

Коваріаційна функція "білого шуму" дорівнює нулю всюди, крім точки  $\tau=0$ , де, як відомо, вона дорівнює дисперсії. Це означає, що для "білого шуму" кореляційний зв'язок між значеннями випадкової функції при будь-яких значеннях аргументу  $t$  цілком відсутній.

2. Відсутність похідної при  $\tau=0$  у коваріаційній функції (3.46) при розв'язуванні деяких задач це є суттєвою завадою. Тому кращою апроксимацією (якщо це можливо) емпіричної коваріаційної функції буде вираз

$$K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad (\alpha > 0). \quad (3.48)$$

Тоді

$$S_X(\omega) = \frac{D_X}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 \tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_X}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha^2 \tau^2 + i\omega\tau)} d\tau. \quad (3.49)$$

Доповнимо показник експоненти до повного квадрата

$$\alpha^2 \tau^2 + i\omega\tau = \left(\alpha\tau + i\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \quad (3.50)$$

і підставимо результат цієї операції до рівняння (3.49). Будемо мати:

$$S_X(\omega) = \frac{D_X}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha\tau + j\frac{\omega\tau}{2\sqrt{\alpha}})^2} d\tau \right) e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \quad (3.51)$$

Інтеграл у дужках формули (3.51) є інтегралом Пуассона. Його значення складає  $\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$ . Отже

$$S_X(\omega) = \frac{D_X}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \quad (3.52)$$

На рис.3.7 містяться коваріаційні (кореляційні) функції й відповідні

спектральні щільності випадкового процесу при різних  $\alpha$ , коваріаційні функції й спектральні щільності мають похідні при  $\tau = 0$ .

3. Розглянемо тепер випадкову функцію з лінійною на відріжку  $[0, \tau_0]$  коваріаційною функцією вигляду

$$K_X(\tau) = \begin{cases} D_X \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right), & \text{якщо } 0 < \tau < \tau_0; \\ 0, & \text{якщо } \tau \geq \tau_0. \end{cases} \quad (3.53)$$

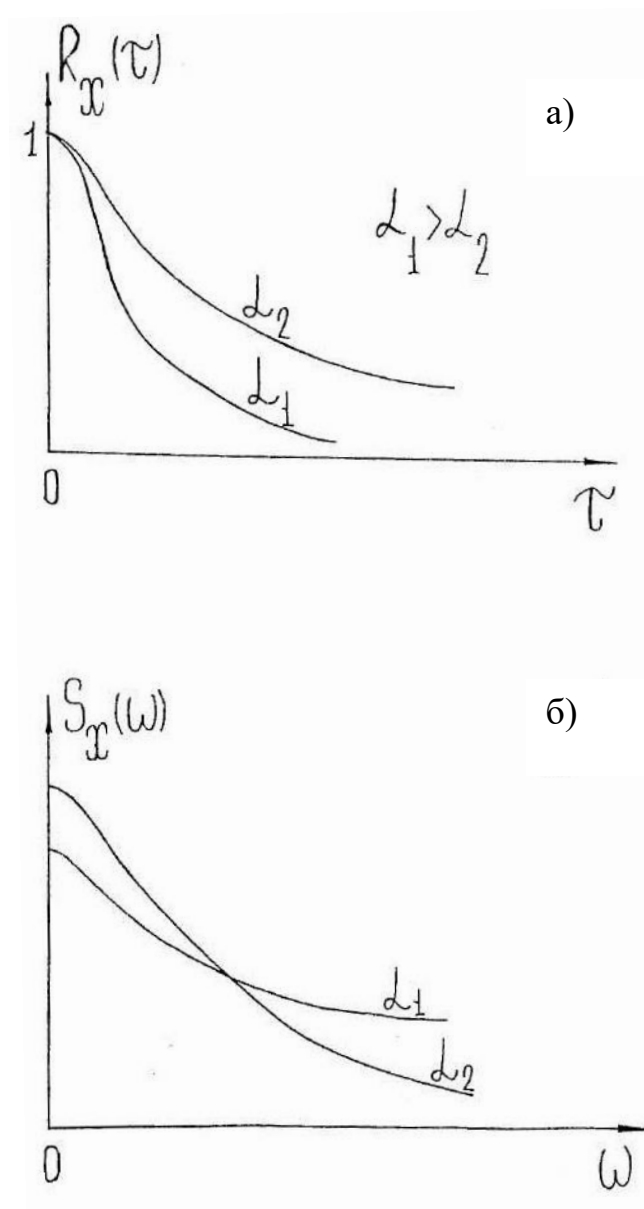


Рисунок 3.7 – Приклади кореляційних (а) та відповідних спектральних функцій (б) (мають похідні)

Графік таких функцій при різних значеннях  $\tau_0$  наводиться на рис.3.8. Такого вигляду коваріаційні функції можуть використовуватись для апроксимації швидко згасаючої монотонної функції.

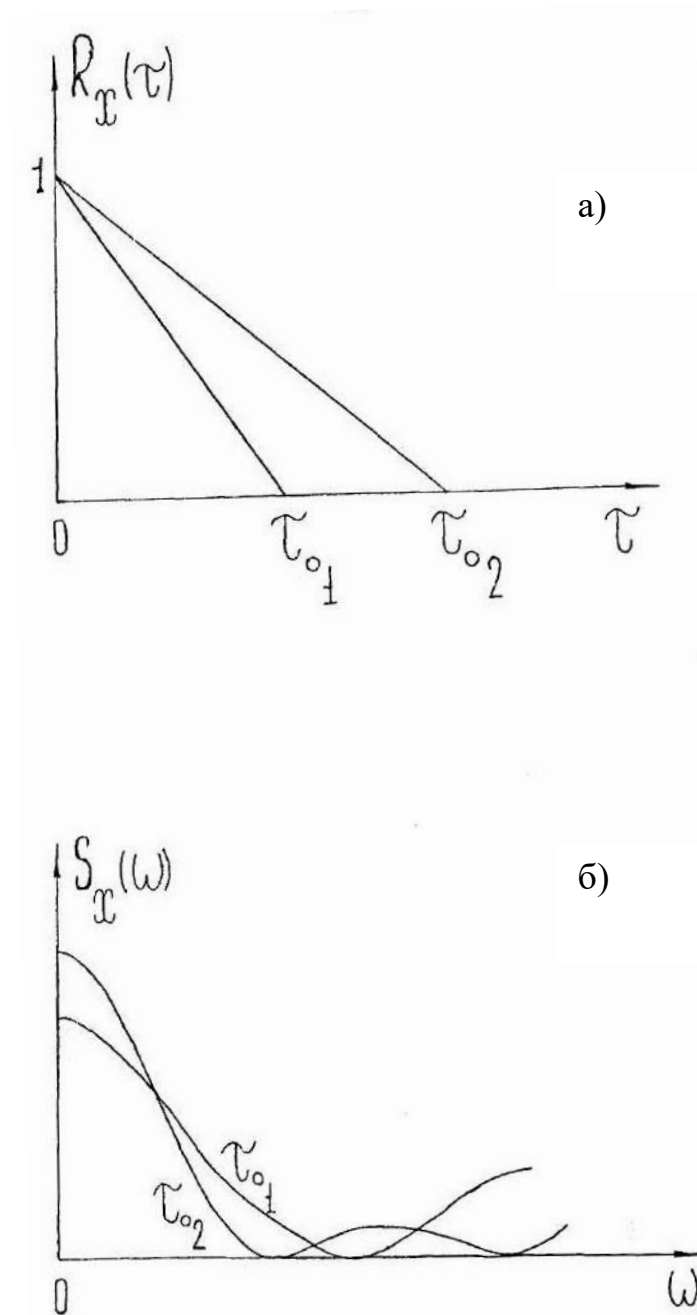


Рисунок 3.8 – Приклади кореляційних (а) та відповідних спектральних функцій (б) (при різних значеннях  $\tau_0$ )

Знайдемо спектральну щільність цієї випадкової функції:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_0} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{D_X}{\pi \omega} \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) d \sin \omega \tau = \frac{D_X}{\pi \omega} \left[ \int_0^{\tau_0} d \sin \omega \tau - \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \tau \cos \omega \tau d\tau \right] = \frac{D_X}{\pi \omega^2 \tau_0} (1 - \cos \omega \tau_0) . \quad (3.54)$$

Аналізуючи разом функції (3.53) і (3.54), можна побачити, що коли коваріаційна функція стискується ( $\tau_0$  зменшується), то спектральна щільність розтягується, і навпаки.

4. Дуже часто при дослідженні випадкових процесів (наприклад, гідрометеорологічних процесів) ми отримуємо коваріаційну функцію, яка коливаючись згасає за експоненціальною закономірністю. Прикладом такої функції може бути функція:

$$K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau . \quad (3.55)$$

Розрахуємо спектральну щільність такої випадкової функції:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_X e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau e^{-i\omega\tau} d\tau . \quad (3.56)$$

Очевидно, ми використали загальну форму перетворення Фур'є для коваріаційної функції. Неважко показати, що за формулами Ейлера:

$$\cos \omega_0 \tau = \frac{e^{i\omega_0 \tau} + e^{-i\omega_0 \tau}}{2} . \quad (3.57)$$

Тоді

$$S_X(\omega) = \frac{D_X}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau + i\omega_0\tau} + e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau - i\omega_0\tau} \right] d\tau = \frac{D_X}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ e^{\alpha\tau - i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{\alpha\tau - i(\omega_0 + \omega)\tau} \right] d\tau + \int_0^{\infty} \left[ e^{-\alpha\tau - i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{-\alpha\tau - i(\omega_0 + \omega)\tau} \right] d\tau \right\} =$$

$$= \frac{D_X}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right] = \frac{D_X \alpha}{2\pi} \times$$

$$\times \frac{\alpha^2 + \omega_0^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2 + \omega^2) - 4\omega_0^2 \omega^2}.$$

(3.58)

Вигляд цієї функції залежить від співвідношення між параметрами  $\alpha$  і  $\omega_0$ . Якщо коваріаційна (або кореляційна) функція має різко виражений коливальний характер, тобто частота  $\omega_0$  – велика, то у спектральній щільності  $S_X(\omega)$  буде спостерігатися максимум приблизно в точці  $\omega = \omega_0$  (рис.3.9).

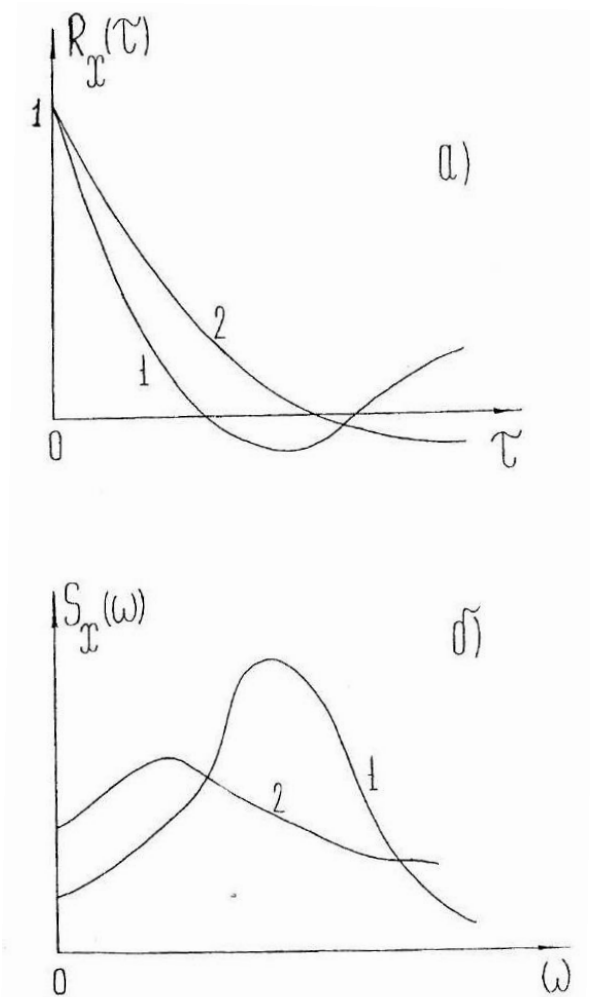


Рисунок 3.9 – Приклади кореляційних (а) та відповідних спектральних функцій (б) (кореляційна функція має коливальний характер)

Якщо основну роль у коваріаційній функції відіграє показникова функція, тобто коефіцієнт  $\alpha$  – великий, то функція  $S_X(\omega)$  буде мати максимальне значення в точці  $\omega = 0$  (рис.3.9).

На практиці, однак, зустрічаються випадкові функції, коваріаційні функції яких, не можуть бути з достатньою точністю апроксимованими аналітичними виразами. У такому випадку спектральні щільності визначаються за допомогою чисельних методів. Основні риси їх будуть розглянуті пізніше.

### 3.4 Лінійне перетворення у спектральній формі

#### 3.4.1 Передавальна функція лінійного оператора

Спочатку розглянемо поняття про дельта-функцію Дірака. Ця функція часто застосовується при розв'язанні ряду математичних задач [7, 12].

Дельта-функцією називається функція, яка має такі властивості:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (3.60)$$

тобто дельта-функція дорівнює нулю при всіх значеннях аргументу  $t$  відмінних від нуля, а в точці  $t = 0$  має нескінченність. Це символічна функція. Функції, яка має зазначені властивості, не існує. Проте вона розглядається у деяких задачах як звичайна функція.

Для прикладу розглянемо нормальний закон розподілу ймовірностей з центрованим аргументом  $t$  (рис.3.10)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (3.61)$$

Будемо зменшувати середній квадратичний відхил  $\sigma$ . Тоді область значень функції  $f(t)$  звужується. В границі  $t \rightarrow 0$  функція  $f(t)$  дорівнює

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (3.62)$$

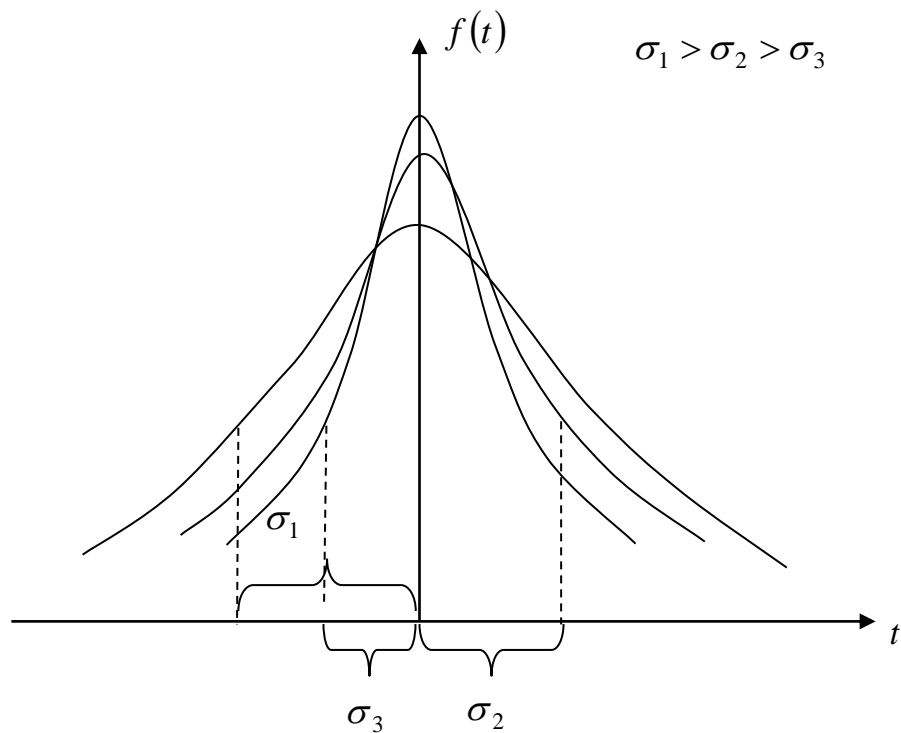


Рисунок 3.10 – Нормальний закон розподілу ймовірностей з центрованим аргументом

Якщо тепер вважати, що  $\sigma \rightarrow 0$ , то  $f(t) \rightarrow \infty$ . У граничному випадку ми отримали функцію, яка має властивість дельта-функції.

Використовуючи зазначене граничне співвідношення, запишемо дельта-функцію в інтегральній формі.

Відомо, що щільність розподілу ймовірностей для нормально розподіленої випадкової величини можна представити як перетворення Фур'є від її характеристичної функції

$$g(\omega) = e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}}, \quad (3.63)$$

де  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – частота, а  $T$  – період.

Оскільки функція (3.63) є парною, маємо

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} d\omega. \quad (3.64)$$

Перейдемо у рівності (3.64) до границі при  $\sigma \rightarrow 0$ . Отримаємо

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \lim_{\sigma \rightarrow 0} e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.65)$$

Як було показано, вираз лівої частини формули (3.65) має сенс  $\delta$ -функції. Отже

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.66)$$

Розглянемо дельта-функцію від аргументу  $t - \tau$ , де  $\tau$  – фіксоване число. Тоді

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq \tau, \\ \infty, & \text{при } t = \tau; \end{cases} \quad (3.67)$$

і

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (3.68)$$

Для будь-якої функції  $f(\tau)$  неперервної при  $t = \tau$  має місце співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t). \quad (3.69)$$

Позначимо через  $g(t, \tau)$  результат лінійного оператора  $L$  до  $\delta(t - \tau)$  з особливістю у точці  $t = \tau$

$$g(t, \tau) = L[\delta(t - \tau)] \quad (3.70)$$

й застосуємо лінійний оператор для функції  $f(t)$ , визначеної на інтервалі  $t \in [a, b]$ . Із (3.69) отримаємо

$$\varphi(t) = L[f(t)] = L\left\{ \int_a^b f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right\} = \int_a^b f(\tau) L[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_a^b g(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.71)$$



Функція  $g(t, \tau)$  являє собою результат оператора  $L$  на  $\delta(t - \tau)$  і називається ваговою функцією. Якщо функція  $f(t)$  визначена на  $t \in (-\infty, \infty)$ , то

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.72)$$

Якщо лінійний оператор стаціонарний, то вагова функція залежить тільки від різниці  $t - \tau$ .

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.73)$$

Інтеграл (3.73) називається згорткою функції  $f(t)$  і  $g(t)$ .

Позначимо через  $S_f(\omega)$  і  $S_\varphi(\omega)$  спектральні щільності і знайдемо від них обернене перетворення Фур'є

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.74)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.75)$$

Підставимо (3.74) до рівняння (3.73). Будемо мати

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.76)$$

і застосуємо позначення  $t - \tau = \tau_1$ , змінюючи порядок інтегрування.

Будемо мати

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_\varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{-i\omega \tau_1} d\tau_1 \right] d\omega,$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega t - i\omega \tau_1} d\tau_1 \right] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega t} \times$$

$$\times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{-i\omega \tau_1} d\tau_1 \right] d\omega. \quad (3.77)$$

Введемо позначення

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{-i\omega \tau_1} d\tau_1. \quad (3.78)$$

Тоді рівняння (3.77) буде мати вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{i\omega t} 2\pi G(\omega) d\omega. \quad (3.79)$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S_{\varphi}(\omega) - 2G(\omega)S_f(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = 0. \quad (3.80)$$

Рівність (3.80) має сенс, коли дорівнює нулю вираз, розташований у квадратних дужках. Звідси

$$S_{\varphi}(\omega) = 2G(\omega)S_f(\omega). \quad (3.81)$$

Функція

$$L(\omega) = 2\pi G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.82)$$

називається передавальною функцією лінійного оператора  $L$ . Тому можна записати

$$S_{\varphi}(\omega) = L(\omega)S_f(\omega). \quad (3.83)$$

Отже спектральна щільність  $S_{\varphi}(\omega)$  є результатом дії лінійного

оператора  $L(\omega)$  на функцію  $f(t)$ . Вона дорівнює добутку спектральної щільності  $S_f(\omega)$  випадкової функції  $f(t)$  на передавальну функцію оператора.

### 3.4.2 Формувальні фільтри стаціонарного випадкового процесу

Нехай  $\varphi(x)$  – центрована й нормована стаціонарна випадкова функція. Такий процес можна отримати за допомогою формувальних фільтрів. Формувальними називають фільтри, які дають змогу сформувати випадковий процес, кореляційна функція якого відома, із білого шуму [12]. Спектральна щільність  $S_\varphi(\omega)$  стаціонарної випадкової функції  $\varphi(t)$  може визначатись як дробово-раціональна функція частоти  $\omega$  у вигляді:

$$S_\varphi(\omega) = S_1(\omega)Q_1(\omega). \quad (3.84)$$

Співмножник  $S_1(\omega)$  утримує нулі і полюси функції  $S_\varphi(\omega)$ , розташовані у верхній півплощині й є обмеженою аналітичною функцією у нижній півплощині. Співмножник  $Q_1(\omega)$ , навпаки, має нулі й полюси функції  $S_\varphi(\omega)$  у нижній півплощині й є обмеженою аналітичною функцією у верхній [11].

Нагадаємо сенс наведених вище характеристик функції комплексної змінної.

Однозначна функція  $f(z)$ , яка має похідну у кожній точці області  $D$ , є аналітичною функцією у цій області. Однозначна аналітична функція має особливі точки. Вони можуть бути ізольованими й неізольованими. Особлива точка називається ізольованою у деякому її околі, якщо аналітичність порушується у цій одній точці. Якщо  $z_0$  – ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції  $f(z)$  ( $z_0 \neq 0$ ), то для того, щоб  $z_0$  була полюсом функції  $f(z)$ , необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty. \quad (3.85)$$

Якщо  $f(z_0) = 0$ , то точка  $z_0$  називається нулем цієї функції. Розкладанням функції  $f(z)$  в околиці точки  $z_0$  у степеневий ряд

$$f(x) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_k(z - z_0)^k + \dots, \quad (c_0 = f(z_0) = 0),$$

$$\text{при } c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0, \quad \text{а } c_k \neq 0 \quad (3.86)$$

визначається точка  $z_0$  нулем  $k$ -го порядку.

Для дійсних значень  $\omega$

$$G_1(\omega) = \overline{S_1(\omega)}, \quad (3.87)$$

де риска позначає комплексно-спряжену величину. Таким чином

$$S_\varphi(\omega) = S_1(\omega)\overline{S_1(\omega)} = |S_1(\omega)|^2. \quad (3.88)$$

Отже, функція  $S_1(\omega)$  має всі властивості частотної передавальної функції стійкої лінійної фазової системи. Якщо через фільтр з частотною передавальною функцією  $\Phi(i\omega)$  пропустити білий шум, який, як відомо має постійну спектральну щільність й кореляційну функцію

$$R_m(t) = \delta(t) \quad (3.89)$$

у якій  $\delta(t)$  – дельта-функція, то спектральна щільність вихідного сигналу дорівнює

$$S_\varphi(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2. \quad (3.90)$$

Порівнюючи рівняння (3.88) – (3.90), можна бачити, що випадковий процес реалізується із білого шуму, якщо останній пропустити через формуючий фільтр, частотна передавальна функція якого визначається рівнянням [12]

$$\Phi(i\omega) = S_1(\omega). \quad (3.91)$$

Якщо білий шум має одиничну інтенсивність, то спектральна щільність білого шуму дорівнює  $\frac{1}{2\pi}$ . У цьому випадку спектральна щільність білого шуму відрізняється від рівняння (3.90) множителем  $\frac{1}{2\pi}$ , тобто

$$S_\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(i\omega)|^2, \quad (3.92)$$

або

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) \overline{S_1(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \frac{H(i\omega)H(-i\omega)}{F(i\omega)F(-i\omega)}, \quad (3.93)$$

де  $H(i\omega)$  і  $F(i\omega)$  поліноми відносно  $\omega$ , у яких всі нулі розташовуються у верхній півплощині симетрично стосовно уявної осі.

Крім того, нулі кожного з поліномів  $H(i\omega)$  й  $F(i\omega)$  попарно спряжені комплексні числа, розташовані у лівій півплощині змінної  $i\omega$ . Отже всі коефіцієнти поліномів  $H(i\omega)$  й  $F(i\omega)$  є додатними, а частотна передавальна функція формувального фільтра дорівнює

$$\Phi(i\omega) = \frac{H(i\omega)}{F(i\omega)}. \quad (3.94)$$

Стационарна випадкова функція  $\varphi(t)$  пов'язана з білим шумом лінійним диференціальним рівнянням

$$F(s)\varphi(t) = H(s)\tilde{w}. \quad (3.95)$$

У рівнянні (3.95)  $F(s)$  і  $H(s)$  – поліноми відносно оператора диференціювання  $S = \frac{d}{dt}$  з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \\ H(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0. \end{cases} \quad (3.96)$$

Як зазначено вище, формувальні фільтри можуть бути використані, коли відомі кореляційні функції вихідної випадкової величини  $\varphi(t)$ . Для гідрометеорологічних величин вони досить часто мають вигляд експоненціальної функції

$$R_{\varphi}(t) = e^{-kt} \quad (3.97)$$

або функції «затухаючого косинуса»

$$R_{\varphi}(t) = e^{-kt} \cos \omega_0 t. \quad (3.98)$$

В п.3.3.3 за допомогою перетворення Фур'є були отримані відповідні спектральні щільності випадкової величини  $\varphi(t)$ . Для кореляційної функції (3.98) відповідна спектральна щільність має вигляд:

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2}. \quad (3.99)$$

Як було показано, рівняння (3.99) ідентичне рівнянню

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sqrt{2k}}{k + i\omega} \right|^2. \quad (3.100)$$

Порівняння формули (3.100) з формулою (3.99), свідчить про те, що випадкову функцію  $\varphi(t)$  можна розглядати, як результат необмежено довгого пропускання білого шуму через формувальний фільтр з частотною передавальною функцією

$$\Phi(i\omega) = \frac{\sqrt{2k}}{k + i\omega}. \quad (3.101)$$

Зіставимо тепер частотні передавальні функції (3.101) і (3.94). Поліном  $H(i\omega)$  має нульовий степінь, а поліном  $F(i\omega)$  – перший [11]. Тому рівняння (3.95) набуває вигляд

$$a_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0 \varphi(t) = b_0 \tilde{u}, \quad (3.102)$$

де  $a_0 = k$ ;  $a_1 = 1$ ;  $b_0 = \sqrt{2\pi}$ .

У випадку, коли кореляційна функція випадкової функції  $\varphi(t)$  має вигляд (3.98), її спектральна щільність визначається рівнянням

$$S_x(\omega) = \frac{k}{\pi} \frac{(\rho^2 + \omega^2)}{\rho^4 + 2(k - \omega_0)^2 + \omega^4}, \quad (\beta = \omega^2 + k^2). \quad (3.103)$$

Чисельник рівняння (3.101) має два чисто уявних кореня  $\omega = \pm i\beta$ , а знаменник – чотири комплексних кореня  $\omega = \pm \omega_0 \pm i\beta$ , які розташовані симетрично відносно дійсної й уявної осей. Відбираючи корені, розташовані у верхній півплощині, тобто  $\omega = i\beta$  й  $\omega = \pm \omega_0 \pm i\beta$ , визначимо вираз (3.103) для дійсних значень  $\omega$ . Він має вигляд [11]:

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\sqrt{2k}(\beta + i\omega)}{\beta^2 + 2k\beta\omega + i\omega} \right|^2. \quad (3.104)$$

Формула (3.104) теж свідчить про те, що випадкову функцію  $\varphi(t)$  можна розглядати як результат проходження білого шуму через стаціонарну лінійну систему (формууючий фільтр), частотна передавальна функція якої визначається рівнянням:

$$\Phi(i\omega) = \alpha \frac{\beta + \omega}{(i\omega)^2 + 2k\omega + \omega^2}, \text{ при } \alpha = \sqrt{2k}. \quad (3.105)$$

Оскільки чисельник цього рівняння є поліном першого, а знаменник – поліном другого порядку, рівняння зв'язку випадкової функції  $\varphi(t)$  з білим шумом  $\tilde{y}$  має вигляд:

$$a_2 \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d\varphi(t)}{dt} + a_0\varphi(t) = b_1 \frac{d\tilde{y}}{dt} + b_0\tilde{y}. \quad (3.106)$$

Коефіцієнти диференціального рівняння (3.106) мають значення:

$$a_0 = \beta^2; \quad a_1 = 2k; \quad a_2 = 1; \quad b_0 = \beta\sqrt{2k}; \quad b_1 = \sqrt{2k}.$$

Диференціальні рівняння (3.102) і (3.106) є неоднорідними диференціальними рівняннями відповідно першого й другого порядку з постійними коефіцієнтами. Їх інтеграли можна легко отримати за знаними методами [15].

### 3.4.3 Спектральна щільність лінійного перетворення стаціонарного випадкового процесу

Розглянемо стаціонарний випадковий процес  $X(t)$  з математичним сподіванням  $m_x = 0$  і коваріаційною функцією  $K_x(\tau)$  [7]. Нехай інший випадковий процес  $Y(t)$  є результатом дії лінійного оператора  $L$  на  $X(t)$ :  $Y(t) = L[X(t)]$ . Тоді можна представити випадковий процес  $Y(t)$  у вигляді

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)X(\tau)d\tau. \quad (3.107)$$

Розрахуємо коваріаційну функцію  $K_y(t_1, t_2)$  випадкового процесу  $Y(t)$  за умови, що функція  $Y(t)$  – центрована

$$\begin{aligned}
 K_y(t_1, t_2) &= M[Y(t_1)Y(t_2)] = M \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) X(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) X(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \right] \right\} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) M[X(t_1 - \tau_1)X(t_2 - \tau_2)] d\tau_2 \right\} d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) \times \\
 &\times K_x(t_2 - t_1 - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2.
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Рівняння (3.108) свідчить про те, що коваріаційна функція  $K_y(t_1, t_2)$  залежить тільки від різниці аргументів  $t_2 - t_1 = \tau$ . Це означає, що випадковий процес  $y(t)$  є стаціонарним. Тому маємо

$$K_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2. \tag{3.109}$$

Знайдемо тепер спектральну щільність  $S_y(\omega)$  випадкової функції  $Y(t)$ . Для цього до коваріаційної функції (3.109) необхідно застосувати перетворення Фур'є. Отримаємо

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{3.110}$$

З врахуванням рівняння (3.109) будемо мати

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) K_x(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2. \tag{3.111}$$

Змінюючи порядок інтегрування у потрібному інтегралі і позначаючи  $\tau - \tau_2 + \tau_1 = t$ , отримаємо добуток трьох однократних інтегралів, тобто



$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.112)$$

При цьому інтеграл

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.113)$$

є спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу  $X(t)$ , а інтеграл

$$L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 \quad (3.114)$$

передавальною функцією оператора  $L$ . Оскільки вагова функція набуває тільки додатних значень, то

$$L^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1 \quad (3.115)$$

є комплексно-спряженою відносно оператора (3.114) передавальною функцією. Таким чином,

$$S_y(\omega) = L(\omega) L^*(\omega) S_x(\omega) \quad (3.116)$$

або

$$S_y(\omega) = |L(\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (3.117)$$

Отже спектральна щільність результату лінійного перетворення стаціонарного випадкового процесу  $X(t)$  стаціонарним оператором дорівнює добутку спектральної щільності цього процесу на квадрат модуля передавальної функції.

### *Запитання для самоперевірки*

1. Як розуміти стаціонарність випадкового процесу у вузькому сенсі?
2. Як розуміти стаціонарність випадкового процесу (функції) у широкому сенсі?

3. Чому дорівнює дисперсія стаціонарної випадкової функції?
4. Як виглядає структурна функція, яку використовують для характеристик особливостей статистичної структури стаціонарного випадкового процесу?
5. Для чого використовують структурну функцію?
6. У чому полягає сенс ергодичної властивості?
7. Яка умова є достатньою для того, щоб випадкова функція мала ергодичну властивість відносно моментів першого та другого порядків?
8. Що називається спектральним розкладанням функції?
9. Який вигляд має розкладання коваріаційної функції у ряд Фур'є?
10. Що називається спектром випадкової функції?
11. Який спектр називається лінійчатим?
12. Що називається спектральною щільністю випадкової функції?
13. Перелічіть основні властивості спектральної щільності стаціонарної випадкової функції.
14. Який випадковий процес називають «білим шумом»?
15. Який випадковий процес називають «красним шумом»?
16. Яка функція називається «дельта-функцією»?
17. Яка функція називається ваговою функцією?
18. Який вигляд має передавальна функція лінійного оператора?
19. Що називають формувальними фільтрами?

## 4 ВИЗНАЧЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ

### 4.1 Оцінка спектральної щільності за допомогою згладжуючих функцій

Спектральну щільність стаціонарного процесу, як вже було показано вище, можна визначити як перетворення Фур'є від коваріаційної функції. Але при цьому необхідно знайти коваріаційну функцію на нескінченному інтервалі аргументу. До того ж при визначенні ймовірнісних характеристик випадкової функції за експериментальними даними інтервал значень аргументу коваріаційної функції є обмеженим. Крім того, ми маємо лише оцінку коваріаційної функції, оскільки довжина реалізації, на основі якої отримують оцінки ймовірнісних характеристик, завжди обмежена. Отже, мова йде про те, щоб отримати оцінку спектральної щільності на основі оцінки коваріаційної функції, яка повинна задовольняти вимоги до статистичних оцінок, тобто бути незсуненою, ефективною та умотивованою [9, 14, 20].

При визначенні оцінки спектральної щільності здавалось б простіше все використовувати перетворення Фур'є, замінивши нескінченні границі в інтегралі кінцевими значеннями, які відповідають найбільшому значенню аргументу  $\tau = \tau_m$  оцінки коваріаційної функції. Це рівнозначно тому, що ми справжню коваріаційну функцію  $K(\tau)$  замінили її оцінкою  $\hat{K}(\tau)$  на інтервалі  $[-\tau_m, \tau_m]$ , а поза цього інтервалу взяли  $\hat{K}(\tau) = 0$ .

Але оцінка спектральної щільності

$$\hat{S}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} \hat{K}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.1)$$

не є ефективною і умотивованою, тому що дисперсія цієї оцінки не прямує до нуля при  $\tau \rightarrow \infty$ . Така оцінка не може задовольняти. Кращі оцінки спектральної щільності дають методи, що ґрунтуються на попередньому згладжуванні коваріаційної функції.

Нехай коваріаційна функція  $\hat{K}(\tau)$  дорівнює справжньому значенню коваріаційної функції  $K(\tau)$  при  $|\tau| \leq \tau_m$  і нулю при  $|\tau| > \tau_m$ . Цю функцію можна представити як добуток функції  $K(\tau)$  на функцію  $\lambda(\tau)$

$$\hat{K}(\tau) = \lambda(\tau)K(\tau), \quad (4.2)$$

де

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (4.3)$$

Тепер функція  $\hat{K}(\tau)$  визначена на всій дійсній осі  $(-\infty, \infty)$ . Знайдемо перетворення Фур'є від (4.2) і будемо вважати його за оцінку  $\hat{S}(\omega)$  спектральної щільності  $S(\omega)$

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\tau) K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.4)$$

Позначимо через  $Q(\omega)$  спектр функції  $\lambda(\tau)$ , тобто

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \lambda(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Тоді

$$\lambda(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} Q(\omega) d\omega, \quad (4.6)$$

і, таким чином,

$$\lambda(\tau) K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1\tau} S(\omega_1) d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2\tau} Q(\omega_2) d\omega_2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1+\omega_2)\tau} Q(\omega_2) d\omega_2 \right] d\omega_1. \quad (4.7)$$

Якщо в інтегралі, що міститься у дужках, провести зміну змінної  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ , то отримаємо

$$\lambda(\tau) K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} [S(\omega_1) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1] d\omega \quad (4.8)$$

або із (4.4) випливає, що

$$\lambda(\tau) K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \hat{S}(\omega) d\omega. \quad (4.9)$$

Порівняння формул (4.8) и (4.9) приводить до рівності:

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1. \quad (4.10)$$

Таким чином,  $\hat{S}(\omega)$  є значення спектральної щільності, осередненої з ваговою функцією по всьому інтервалу частот. Для функції (4.3) спектр  $Q(\omega)$  має вигляд:

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sin \omega \tau_m}{\pi\omega}. \quad (4.11)$$

Отже, користуючись при визначенні спектральної щільності добутком оцінки коваріаційної функції  $K(\tau)$  на кореляційне "вікно"  $\lambda(\tau)$ , отримуємо не справжню спектральну щільність  $S(\omega)$ , а її значення, згладжене за допомогою вагової функції, яка є спектром функції  $\lambda(\tau)$ , тобто такої, щоб згладжування (4.10) було найкращим у смислі близької функції  $\hat{S}(\omega)$  і  $S(\omega)$ . Такими функціями "вікнами", крім (4.3), яка називається функцією Бартлетта, є [20]:

1. Модифікована функція Бартлетта

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_m}, & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (4.12)$$

2. Функція Тьюккі

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m}, & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (4.13)$$

3. Функція Хенінга

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0.5 \left( 1 - \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} \right), & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (4.14)$$

#### 4. Функція Парзена

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0.5 \left( \frac{|\tau|}{\tau_m} \right)^q, & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \text{ (при } q = 2), \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (4.15)$$

Існують й інші види кореляційних "вікон"  $\lambda(\tau)$ .

Таким чином, задачу визначення спектральної щільності можна сформулювати так. Нехай маємо оцінку коваріаційної функції  $\hat{K}(\tau)$  при  $|\tau| < T$ , де  $T$  – права границя інтервалу визначення випадкової функції.

Будемо шукати оцінку спектральної щільності  $\hat{S}(\omega)$  за формулою

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} \lambda(\tau) \hat{K}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.16)$$

підбираючи функцію  $\lambda(\tau)$  і значення  $\tau_m$  так, щоб задовольнити деякий критерій оптимальності. При визначенні спектральної щільності за формулою (4.16) з вибраним згладжуючим кореляційним "вікном"  $\lambda(\tau)$  результат буде залежати від вибраної точки зрізу коваріаційної функції  $\tau_m$ . При малих  $\tau_m$  буде відбуватися зсунення оцінки спектральної щільності, при великих  $\tau_m$  – збільшення дисперсії оцінки. Прагнення вибрати  $\tau_m$  таким, щоб мінімізувати як зсунення оцінки спектральної щільності, так і її дисперсії, потребує необхідності задовольнити дві суперечливі вимоги.

Для отримання оцінки спектральної щільності можна використати і інший метод. Нехай маємо реалізацію  $x(t)$  ергодичного стаціонарного процесу  $X(t)$ , визначену на інтервалі  $[0, T]$ . Коваріаційну функцію, як відомо, отримуємо за рівнянням

$$K_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t + \tau) - m_x][x(t) - m_x] dt. \quad (4.17)$$

Якщо підставити (4.17) у рівняння (4.1), то після відокремлення змінних, будемо мати

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (4.18)$$

Величину (4.18) називають *вибірковим спектром*, або *періодогорамою*. Вона визначається за допомогою перетворення Фур'є від самої реалізації. Періодогорама не є умотивованою оцінкою спектральної щільності. Для того, щоб задовольнити вимогу умотивованості, необхідно провести згладжування періодогорами за формулою:

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega_1) Q(\omega - \omega_1) d\omega \quad (4.19)$$

вибираючи згладжуючу функцію такою, щоб оцінка була умотивованою.

Порівнюючи (4.10) та (4.19), приходимо до висновку, що коли у якості функції  $Q(\omega)$  виступає спектр вагової функції  $\lambda(\tau)$ , за допомогою якого виконувалось згладження коваріаційної функції при першому методі оцінювання спектральної щільності, то при другому з розглянутих методів отримуємо ту ж саму оцінку.

Отже обидва методи оцінювання спектральної щільності дають однаковий результат, але супроводжуються різними обчислювальними труднощами. Другий з цих методів при застосуванні так званого швидкого перетворення Фур'є є більш раціональним і користується широкою популярністю.

#### 4.2 Визначення достовірності оцінок спектральної щільності

У спектрах випадкових процесів завжди присутня шумова компонента у вигляді випадкових коливань по типу "білого шуму", які не мають статистичних зв'язків, а також таких, що характеризуються значними зв'язками ("червоний шум"). При проведенні спектрального аналізу ергодичних випадкових процесів треба враховувати співвідношення між частковим інтервалом  $\Delta t$  аргументу часового ряду випадкових величин, довжиною його  $N$ , максимальним зрізом коваріаційної функції  $\tau_m$  (йому відповідає деяка кількість інтервалів  $\Delta t$ ), числом ступенів вільності  $l$  та нормованою стандартною похибкою оцінок спектральної щільності  $\hat{S}_x(\omega)$ . З одного боку, число ступенів вільності повинно бути достатньо великим, а кількість кроків  $\Delta t$ , що обмежуються значенням  $\tau_m$ , відносно малим порівняно з довжиною вибірки (наприклад

$\tau_{\max} = 0,1N$ ). З іншого боку, число зсувів аргументу  $\tau_m$  повинно бути досить великим, щоб отримати велике розділення за смугою частот. Але при цьому надійність статистичних оцінок спектральної щільності біля границь частотної смуги зменшується. Часто вибір максимального зсуву аргументу  $\tau_{\max}$  коваріаційної функції базується на можливій точності розрахунків спектральної щільності [20].

Спектральні щільності, які розраховуються за вибірковими даними, будуть відрізнятися від спектрів генеральної сукупності. Тому для оцінок значущості спектра використовують метод перевірки статистичної гіпотези на заданому рівні значущості. Нульова гіпотеза  $H_0$  полягає у тому, що в спектрі часової послідовності відсутні гармонічні коливання на фоні спектра реалізації "білого шуму" (його спектр характеризується умовою  $S_x(\omega) = S_x(0) = const$ ), або "червоного шуму" (спектр його є експоненціально спадаюча крива). Вважається, що вихідний ряд має нормальний розподіл. Тоді за відомою теоремою значення спектральної щільності, які характеризують розподіл дисперсій за спектром частот, мають  $\chi^2$  розподіл з числом ступенів вільності  $l$ . Перевірка нульової гіпотези полягає у порівнянні  $\hat{S}_x(\omega)$  із значеннями  $S_{кр}(\omega)$  заданої ймовірності, які вважаються за границі довірчого інтервалу  $I_\alpha[S_x(0)]$  або  $I_\alpha[S_q(\omega)]$ . У цьому випадку:

$$S_{кр}(\omega) = \frac{\chi^2(\alpha, l)}{l}, \quad (4.20)$$

де

$$l = \frac{2N - 0,5m_m}{m_m}, \quad (4.21)$$

$N$  - обсяг вибірки. Тоді для побудови довірчого інтервалу використовується рівняння:

$$I_\alpha(S_\omega) = \bar{S}_x(\omega) \frac{\chi^2}{l}, \quad (4.22)$$

у якому  $\bar{S}_x(\omega)$  - середній рівень спектральної щільності (який відповідає "білому шуму"), що розраховується в інтервалі значень коваріаційної функції. Вихід сплесків спектральної щільності за межі довірчого інтервалу свідчить про вірогідність частот коливань, виявлених на спектрограмі.



При значному внеску у випадковий процес "червоного шуму" спектр випадкового процесу порівнюється з довірчим інтервалом

$$I_{\alpha}(S_q(\omega)) = S_q(\omega) \frac{\chi^2(\alpha, l)}{l}, \quad (4.23)$$

де

$$S_q(\omega) = \bar{S}_x(\omega) \frac{1 - r_x^2(\tau_1)}{1 + r_x^2(\tau_1) - 2r_x(\tau_1) \cos \frac{\pi k}{\tau_m}}, \quad (k = \overline{1, m}). \quad (4.24)$$

Рівняння (4.24) утримує коефіцієнт кореляції одиничного  $r_x(\tau_1)$  і максимального  $m$  - на спектрограмі ( $m = 2\tau_m$ ).

На рис.4.1 наводяться спектрограми для випадкових приростів меридіональної компоненти швидкості вітру на висотах 15 і 20 км. Для висоти 15 км є підстави побудувати довірчу границю для спектральної щільності, виходячи з припущення про "білий шум", а для висоти 20 км - з припущення про "червоний шум".

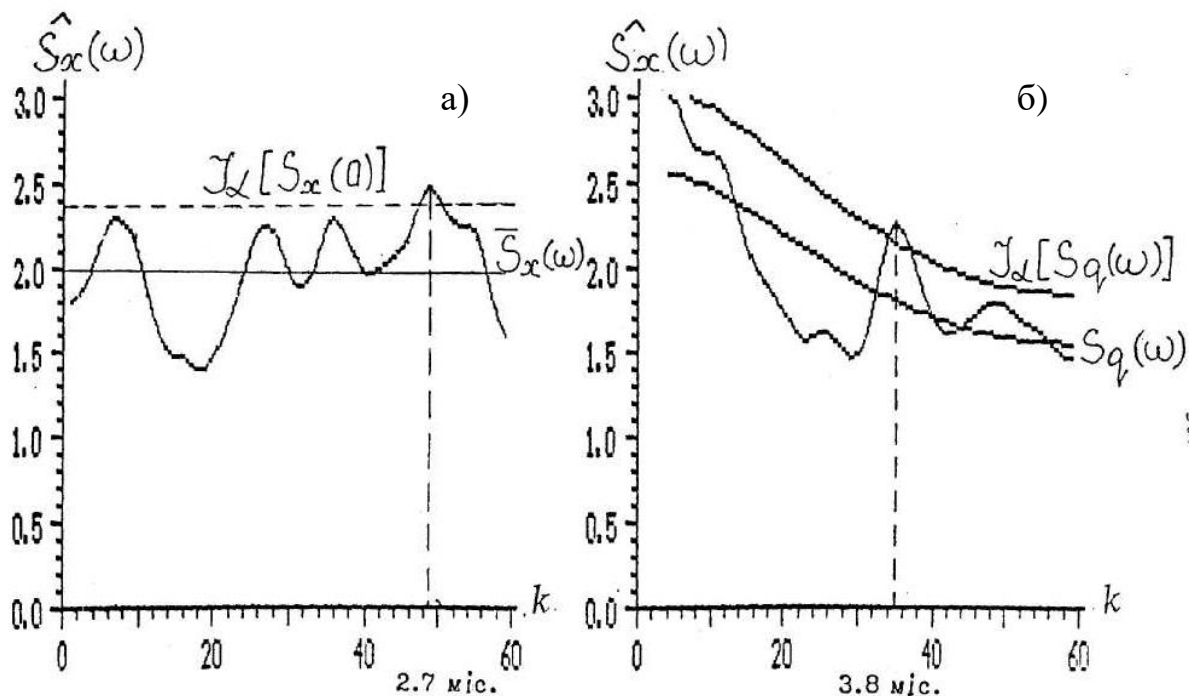


Рисунок 4.1 – Спектрограми випадкових приростів меридіональної компоненти швидкості вітру на висотах 15 і 20 км в пункті острова Уоллопс ((а) – «білий шум», (б) – «червоний шум»)

### *Запитання для самоперевірки*

1. Для чого використовується функція Барлетта?
2. Наведіть приклади функції Барлетта.
3. Що називають вибіркоvim спектром (періодограмою)?
4. Які співвідношення треба враховувати при проведенні спектрального аналізу ергодичних випадкових процесів?
5. Яким чином формулюється нульова гіпотеза для оцінок значущості спектра?
6. Яким чином визначається вірогідність частот коливань, що виявлені на спектрограмі?

## 5 ВЗАЄМНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Для системи стаціонарних випадкових процесів  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ , крім спектральних щільностей  $S_{x_i}(\omega)$   $i = \overline{1, m}$ , розглядаються й взаємні спектральні щільності  $S_{x_i x_j}(\omega)$ , які є перетвореннями Фур'є від відповідних взаємних коваріаційних функцій (1.14) [9, 20]

$$S_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (5.1)$$

Взаємна коваріаційна функція стаціонарних процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$  пов'язана із взаємною спектральною щільністю оберненим перетворенням Фур'є

$$K_{x_i x_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_i x_j}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2)$$

Взаємна коваріаційна функція не має властивостей парності, але її можна виразити через дві складові: парну  $K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau)$  і непарну  $K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau)$ , тобто

$$K_{x_i x_j}(\tau) = K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) + K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau). \quad (5.3)$$

Парна і непарна частини взаємної коваріаційної функції визначаються таким чином

$$K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) = \frac{1}{2} \left[ K_{x_i x_j}(\tau) + K_{x_i x_j}(-\tau) \right], \quad (5.4)$$

$$K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau) = \frac{1}{2} \left[ K_{x_i x_j}(\tau) - K_{x_i x_j}(-\tau) \right]. \quad (5.5)$$

Підставимо рівність (5.3) до правої частини (5.1). Крім того запровадимо замість експоненти рівняння Ейлера

$$\begin{aligned}
S_{x_i x_j}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) + K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau) \right] [\cos \omega \tau - i \sin \omega \tau] d\tau = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) \sin \omega \tau d\tau - \\
&- \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau) \sin \omega \tau d\tau .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Як відомо, добуток двох парних функцій є функцією парною, двох непарних функцій – теж парною функцією, а добуток парної і непарної функції дає функцію непарну. Крім того, нагадаємо, що інтеграл за симетричною областю інтегрування від непарної функції дорівнює нулю. Тому маємо

$$S_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \tag{5.7}$$

тобто

$$S_{x_i x_j}(\omega) = C_{x_i x_j}(\omega) - iQ_{x_i x_j}(\omega), \tag{5.8}$$

Функцію

$$C_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(+)}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \tag{5.9}$$

називають ко-спектром, а функцію

$$Q_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}^{(-)}(\tau) \sin \omega \tau d\tau \tag{5.10}$$

квадратурним спектром випадкових процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$ .

Як свідчать рівняння (5.7) і (5.8), взаємна спектральна щільність є функцією комплексною.

Знайдемо тепер зв'язок взаємної коваріаційної функції з елементами взаємної спектральної щільності

$$\begin{aligned}
 K_{x_i x_j}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ C_{x_i x_j}(\omega) - i Q_{x_i x_j}(\omega) \right] [\cos \omega \tau + i \sin \omega \tau] d\omega = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) \cos \omega \tau d\omega - i \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) \cos \omega \tau d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) \sin \omega \tau d\omega - \\
 &- i^2 \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) \sin \omega \tau d\omega.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

За сформульованими вище обставинами маємо

$$K_{x_i x_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) \cos \omega \tau d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \tag{5.12}$$

Щоб з'ясувати сенс ко-спектра знайдемо, використовуючи рівняння (5.12), значення взаємної коваріаційної функції при нульовому значенні аргументу ( $\tau = 0$ ). У цьому випадку, очевидно, підінтегральна функція дорівнює нулю і, як наслідок, дорівнює нулю і другий член рівності (5.12). Отже, маємо

$$K_{x_i x_j}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) d\omega \tag{5.13}$$

Формула (5.13) свідчить про те, що ко-спектр має сенс розкладання по різних частотах взаємної коваріаційної функції двох випадкових процесів при нульовому значенні аргументу, тобто дорівнює середньому добутку процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$  у вузькому інтервалі частот  $\omega + d\omega$ , поділеному на частотний інтервал.

На рис.5.1 наводиться ко-спектр зональних індексів швидкості вітру на рівні 500 гПа на широтах  $40^\circ$  і  $60^\circ$  північної півкулі. Можна бачити, що найбільший внесок у взаємну коваріацію між вітром на зазначених широтах дають періоди біля 25 днів. Як відомо коваріації між швидкістю вітру на цих широтах від'ємні, тому всі значення ко-спектра у цьому випадку від'ємні або близькі до нуля.

Квадратурний спектр  $Q_{x_i x_j}(\omega)$  дає внесок різних гармонік у сумарну коваріацію у випадку, коли всі гармоніки часової послідовності  $X_i(t)$  зсунуті за фазою на чверть періоду назад, а послідовність  $X_j(t)$  залишається незмінною. Дійсно, коли  $\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$ , то формула (5.12) дає:

$$K_{x_i x_j} \left( \frac{T}{4} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) d\omega . \quad (5.14)$$

Отже, квадратурний спектр характеризує внесок у загальну взаємну коваріацію гармонік двох випадкових процесів, що в них утримуються, при зсуві фаз цих гармонік на чверть періоду.

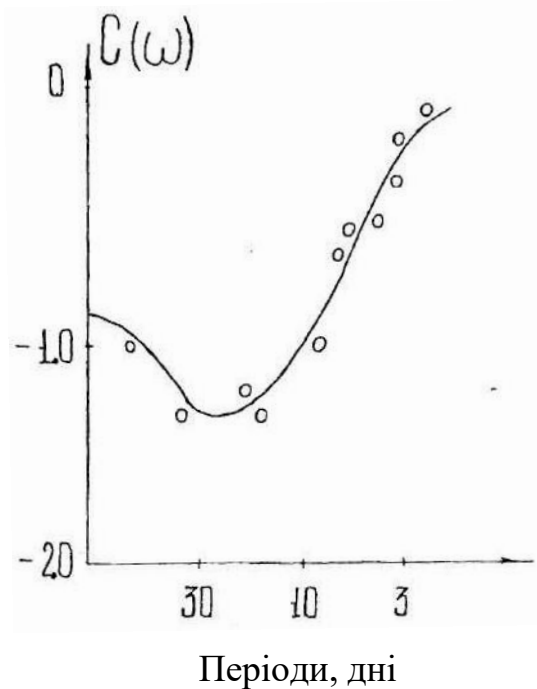


Рисунок 5.1 – Ко-спектр зональних індексів вітру на рівні 500 гПа на широтах  $40^\circ$  і  $60^\circ$  півн.ш.

Функція (5.10) є інтегралом Фур'є і її можна представити у вигляді

$$K_{x_i x_j}(\tau) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sin[\omega \tau - \psi(\omega)] d\omega , \quad (5.15)$$

де

$$A(\omega) = \sqrt{C_{x_i x_j}^2(\omega) + Q_{x_i x_j}^2(\omega)}, \quad (5.16)$$

$$\psi_{x_i x_j}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_{x_i x_j}(\omega)}{C_{x_i x_j}(\omega)}. \quad (5.17)$$

Із формули (5.15) випливає, що  $K_{x_i x_j}(\tau)$  представляється інтегралом Фур'є у формі суми гармонік с амплітудами  $A(\omega)$  і початковими фазами  $\psi_{x_i x_j}(\omega)$ , кругові частоти яких  $\omega$  змінюються в інтервалі  $[0, \infty[$ . Рівняння (5.16) називається амплітудним спектром, а рівняння (5.17) – фазовим спектром.

При частотному представленні процесів є можливість порівняти на фіксованій частоті енергії взаємодії процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$  з енергіями кожного з них. Для цього використовуються співвідношення:

$$\Gamma(\omega) = \frac{C_{x_i x_j}^2(\omega) + Q_{x_i x_j}^2(\omega)}{S_{x_i}(\omega) S_{x_j}(\omega)}, \quad (5.18)$$

де  $S_{x_i}(\omega)$  і  $S_{x_j}(\omega)$  – спектральні щільності випадкових процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$ .

Функція

$$\gamma(\omega) = \sqrt{\Gamma(\omega)} \quad (5.19)$$

має сенс спектрального коефіцієнта взаємної кореляції цих процесів, тобто визначає тісноту кореляційного зв'язку між ними на фіксованих частотах. Вона має назву когерентності й може набувати значення від 0 до 1.

При визначенні міри взаємозв'язку спектральних компонентів двох процесів важливо з'ясувати, яким є співвідношення між взаємною енергією синхронної і несинхронної взаємодії, оскільки саме від характеру цієї взаємодії залежить різниця фаз коливань на фіксованій частоті. Із рівняння (5.17) видно, що коли  $C_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$ , а  $Q_{x_i x_j}(\omega) = 0$ , то різниця фаз коливань дорівнює нулю, тобто взаємозв'язок процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$  буде існувати за рахунок синхронної їх взаємодії. При  $C_{x_i x_j}(\omega) = 0$  і  $Q_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$  різниця фаз спектральних компонент дорівнює  $\frac{\pi}{2}$  (чверть періоду). Це

означає, що взаємозв'язок коливань відбувається тільки в результаті асинхронної взаємодії процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$ . У всіх інших випадках, тобто коли  $C_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$  і  $Q_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$ , різниця фаз коливань, інакше кажучи, фазовий спектр, характеризує відставання за фазою процесу  $X_j(t)$  від процесу  $X_i(t)$  за умови, що  $0 < \psi_{x_i x_j}(\omega) < 180^\circ$  (значення  $\psi_{x_i x_j}(\omega)$  у цьому інтервалі вважають додатним) й відставання за фазою процесу  $X_i(t)$  при  $180^\circ < \psi_{x_i x_j}(\omega) < 360^\circ$  (значення  $\psi_{x_i x_j}(\omega)$  вважають від'ємним). Когерентність одночасно являє собою міру стійкості різниці фаз. При постійності різниці фаз процесів  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$   $\gamma(\omega) \rightarrow 1$ , при  $\gamma(\omega) \rightarrow 0$  різниця фаз коливань буде нестійкою.

Таким чином, особливості взаємодії між двома стаціонарними випадковими процесами визначаються: когерентністю, яка визначає тісноту її взаємодії, і фазовим спектром. Останній характеризує послідовність за часом проявлення цієї взаємодії.

Для когерентності, як і для всіляких статистичних оцінок параметрів, необхідно розглянути питання про достовірність цих оцінок.

Оцінка довірчої границі для когерентності визначається формулою:

$$I_\alpha[\gamma(\omega)] = \frac{2}{\sqrt{l}}, \quad (l > 4), \quad (5.20)$$

де,  $\alpha$  – рівень значущості, а

$$l = \frac{2N - \tau_m}{\tau_m} \quad (5.21)$$

число ступенів вільності,  $N$  - довжина реалізації,  $\tau_m$  – максимальний зріз коваріаційної функції, який обговорювався у минулому розділі.

У табл.5.1 наводиться довірчий інтервал для когерентності при різних ступенях вільності й різних рівнях значущості.

Таблиця 5.1 – Довірчі границі когерентності  $\gamma(\omega)$

Рівень значущості $\alpha$	Число ступенів вільності			
	4	10	20	40
0,01	0,89	0,63	0,46	0,33
0,05	0,80	0,53	0,38	0,27



Із табл.5.1 випливає що, наприклад, при числі ступенів вільності  $l = 20$  корегентність, що дорівнює 0,38 і більше буде з імовірністю  $p = 0.95$  вірогідною.

Розрахунки проказують, що когерентність має достовірні значення при багатьох значеннях частот. Але для ретельного аналізу взаємозв'язків між процесами  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$  необхідно з множини достовірних значень  $\gamma(\omega)$  вибрати ті, які є значущими з фізичної точки зору. Це можна зробити, якщо крім значень когерентності на визначених частотах розглядати енергію взаємодії між випадковими процесами, розподіл якої по частотах відбиває амплітудний спектр. Взаємодії між процесами є фізично обґрунтованими, коли великі на одних й тих же частотах значення когерентності  $\gamma(\omega)$  співпадають зі сплесками на кривій амплітудного спектра  $A(\omega)$ . Це означає, що енергія взаємодії між процесами  $X_i(t)$  і  $X_j(t)$  є значною.

#### *Запитання для самоперевірки*

1. Який вигляд мають рівняння Ейлера, що використовуються замість експоненти?
2. Що називають ко-спектром випадкових процесів?
3. Що називають квадратурним спектром випадкових процесів?
4. Яка функція має назву когерентності? Її фізичний сенс?
5. Що таке фазовий спектр?
6. Наведіть формулу оцінки довірчої границі для когерентності.

## 6 ОСОБЛИВОСТІ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

### 6.1 Операції згладжування часових рядів

Випадковий процес на практиці завжди виявляється як послідовна за часом сукупність значень фізичної величини, тобто має вигляд часового ряду. Тому у подальшому будемо розглядати саме часові ряди фізичних величин. Звичайно аргументом може бути не тільки час  $t$ , але й просторова координата із системи координат  $x, y, z$ .

Часові ряди фізичних величин  $u(t)$  не мають властивості стаціонарності. Але у будь-яких випадках їх можна привести до стаціонарних. Розглянемо центровану й нормовану на середнє квадратичне відхилення функцію

$$\varphi(t) = \frac{u(t) - m_u}{\sigma_u}. \quad (6.1)$$

Очевидно  $M[\varphi(t)] = 0$ , дисперсія її дорівнює  $D_{\varphi(t)} = 1$ , а квадратична функція  $K_{\varphi}(\tau) = r_{\varphi}(\tau)$ . Таким чином функція (6.1) має ознаки стаціонарної функції, і нестаціонарну функцію  $u(t)$  можна виразити через стаціонарну функцію  $\varphi(t)$  таким чином:

$$u(t) = m_u + \sigma_u \varphi(t). \quad (6.2)$$

Звичайно таке наближення є можливим, якщо нестаціонарна функція  $u(t)$  не має різко виражених екстремумів.

У загальному випадку, як правило, часові ряди фізичних величин  $u(t)$  є адитивною сумішшю детермінованої основи  $u_1(t)$ , корельованого коливання відносно детермінованої основи  $u_2(t)$  та випадкової складової  $u_3(t)$  [1, 8, 10]

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t). \quad (6.3)$$

Задача статистичного аналізу часового ряду  $u(t)$  полягає у необхідності виділення із нього трендових компонент (невипадкові складові), зазначених періодичних коливань та квазістаціонарних випадкових коливань  $u_3(t)$ . Остання процедура втілюється шляхом віднімання від вихідного процесу детермінованої складової.

Найбільш часто зазначені операції починаються з операції згладжування вихідного часового ряду. У загальному вигляді ця операція має вигляд [8]

$$u_1(t_k) = \alpha \sum_{p=0}^{t-1} \left\{ (1-\alpha)^p \left( u(t_k - p) + (1-\alpha)^{t_k} u(0) \right) \right\}, \quad (6.4)$$

де  $\alpha$  – постійна згладжування.

Оскільки  $0 \leq \alpha \leq 1$ , то для всіх випадків операція згладжування поточної оцінки згладжуючої функції у момент  $t_k$  дорівнює лінійної комбінації значень функції  $u(t)$  у всіх точках заданого ряду від 0 до  $t$  з експоненціально спадними вагами  $\alpha$  до крайніх точок ряду. Якщо експоненціальне згладжування дискретного ряду виконується за допомогою простого ковзного осереднення, то роль постійної згладжування  $\alpha$  виконує кількість точок  $n$ , по яких розраховується ковзна середня. Шляхом нескладних перетворень оператор згладжування часового ряду можна привести до вигляду

$$\tilde{u}(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-\frac{n}{2}}^{k+\frac{n}{2}} g_i u(t_i), \quad (6.5)$$

де  $g_i$  - ваговий множник,  $n$  - кількість точок, по яких проводиться згладжування;  $k = 1 + \frac{n}{2}; 2 + \frac{n}{2}; \dots; N' + \frac{n}{2}; N' = N - n + 1; N$  - загальна кількість членів ряду.

Якщо в рівності (6.5)  $g_i = 1 \quad \forall i = \overline{1, n}$ , то оператор згладжування визначає просте ковзне осереднення, у якому вага  $g_i$  всіх точок, що беруть участь при розрахунках ковзного середнього на інтервалі  $\left[ k - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2} \right]$ , дорівнює одиниці, і оператор ковзного середнього має вигляд

$$\tilde{u}_1(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-\frac{n}{2}}^{k+\frac{n}{2}} u(t_i). \quad (6.6)$$

Такий оператор згладжування є найбільш простим, але він має суттєвий недолік. Він полягає у тому, що згладжене значення фізичної величини  $\tilde{u}_1(t_k)$  завжди відноситься до точки  $t_k$ , тобто до середини

відрізка  $\left[ k - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2} \right]$ . Це означає, що значення функції  $u(t)$  в кожній точці зазначеного інтервалу входять в осереднене значення  $\tilde{u}_1(t_k)$  з однаковою вагою, що суперечить здоровому глузду. У дійсності, чим ближче розташовується точка до середини відрізка згладжування, тим з більшою вагою повинно значення функції у цій точці входити у згладжене у точці  $t_k$  значення  $\tilde{u}_1(t_k)$ . Тому кращими є оператори згладжування, у яких вагові функції зменшують вагу вихідної функції на відрізку згладжування від його центру  $t_k$  до границь.

Такі властивості мають тригонометричний

$$g_i = 1 + \cos \frac{2\pi(k-i)}{n} \quad (6.7)$$

або експоненціальний

$$g_i = \exp\left(-\frac{|k-i|}{n}\right) \quad (6.8)$$

множники (функції).

Їх значення по формулах (6.7) і (6.8) від середини інтервалу згладжування до його кінців наводяться на рисунках 6.1 і 6.2 [10].

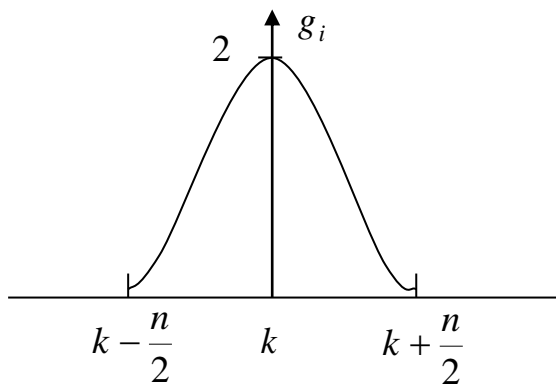


Рисунок 6.1

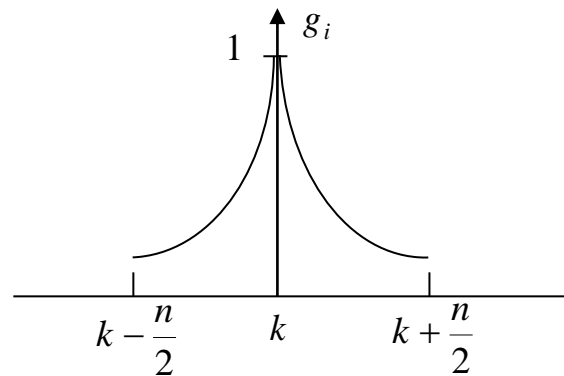


Рисунок 6.2

В результаті згладжування обсяг згладженого ряду порівняно з вихідним рядом зменшується на  $\frac{n}{2}$  на початку й наприкінці вихідного ряду.

Окрім вигляду вагового множника, результат фільтрації залежить й від кількості точок, по яких виконується згладжування. Вона, очевидно, визначається рівністю

$$n = \frac{\tau}{\Delta t}, \quad (6.9)$$

де  $\Delta t$  - інтервал дискретності ряду.

Чим більше  $n$ , тим швидше реакція фільтра, але тим гірше його фільтруючі якості, і навпаки. Отже, задача полягає у правильному виборі періоду згладжування. Означені вище особливості ковзного осереднення приводять до того, що при надто великому періоді згладжування з детермінованої основи  $y(t)$  процесу відфільтровується визначна частина періодичної компоненти  $u_2(t)$ , яка переходить до випадкової компоненти  $u_3(t)$ . Навпаки, коли період осереднення малий, частина випадкової складової процесу переходить до детермінованої частини процесу, а випадкова компонента  $u_3(t)$  набуває властивості "білого шуму".

Апріорі довжина періоду згладжування не є обгрунтованою. Але він повинен бути таким, щоб у результаті фільтрації була правильно виділена детермінована основа вихідного процесу [2]. Якщо позначити

$$y(t) = u(t) - u_3(t), \quad (6.10)$$

то зрозуміло, що при правильній організації процесу згладжування повинно бути

$$y(t) = u_1(t) + u_2(t). \quad (6.11)$$

Позначимо операцію згладжування оператором  $L$ . Тоді

$$L[u(t)] = L[u_1(t)] + L[u_2(t)] + L[u_3(t)] \quad (6.12)$$

оскільки оператор згладжування є лінійним оператором.

Будемо вважати, що оператор  $L$  точно виділяє трендову компоненту, тобто

$$L[u(t)] = u_1(t). \quad (6.13)$$

Виникає питання, якою мірою члени  $L[u_2(t)]$  й  $L[u_3(t)]$  можуть спотворювати структуру залишкового ряду й індукувати хибні коливання. Будемо вважати, що член  $u_2(t)$  має синусоїдальний характер, тобто його

можна представити як  $\sin(\varphi + \omega t)$ . Тоді ковзне осереднення  $n$  послідовних членів приведе до нового синусоїдального ряду з такими ж частотою й початковою фазою  $\varphi$ , що ї у первісного ряду. Амплітуда нового ряду [2, 8]

буде помноженою на  $\frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$ , оскільки

$$\sum_{t=1}^n \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\sin \frac{n\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \sin \left[ \varphi + \frac{1}{2}(n+1)\omega \right] \quad (6.14)$$

Із цього виходить, що член  $u_2(t)$  буде близьким до нуля, коли  $\frac{n\omega}{2} \approx m\pi$ , тобто якщо довжина інтервалу згладжування кратна періоду циклічної компоненти, яка утримується у процесі  $u(t)$ . Отже, до вибору періоду згладжування випадкової послідовності треба дотримуватися таких рекомендацій.

Значення періоду згладжування повинно відповідати періодичності, яку досліджувач хоче зберегти в детермінованій складовій випадкового процесу  $u(t)$  в залежності від задачі, яку він намагається розв'язати. Наприклад, якщо треба у складовій  $y(t)$  зберегти річний хід метеорологічної величини  $u(t)$ , а коливання з меншими періодами необхідно відфільтрувати з вихідного часового ряду, то ковзне осереднення проводять при такому числі значень випадкової величини  $n$ , яке відповідає річному інтервалу. Тоді на виході з фільтра ми отримаємо процес, який утримує, крім трендів, коливання з періодом один рік і більше, а коливання з меншими періодами перейдуть у випадкову складову. Остання має, як правило, властивості квазістаціонарного процесу. Тому для дослідження її статистичної структури використовують розглянуті вище, методи кореляційного і спектрального аналізу.

Отже, щоб коректно провести операцію згладжування часового ряду, необхідно спочатку провести операцію визначення періодичних компонент  $u_2(t)$ , які утримуються у часовому ряді.

## 6.2 Виявлення періодичностей, які утримуються у випадкових часових рядах

Часові ряди метеорологічних величин, як показали численні дослідження, утримують періодичні компоненти, зумовлені хвильовою

природою атмосферних процесів.

Існує ряд методів дослідження періодичностей, що містяться у часових рядах. Їх називають прихованими періодичностями [20]. Одним з найбільш зручних для реалізації на ЕОМ є метод, оснований на інтегральному перетворенні Фур'є. Він дає можливість без будь-яких додаткових досліджень отримати частоти, амплітуди та початкові фази періодичних компонент, прихованих у часовій послідовності.

Часовий ряд  $x(t)$ , заданий на інтервалі  $t \in [-\tau, \tau]$ , можна розглядати як кусково-гладку функцію часу. Таку функцію у відповідності до теореми Діріхле можна виразити суперпозицією простих гармонік

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) , \quad (6.15)$$

де  $A_k$  - амплітуда  $k$ -ї гармоніки,  $\omega_k$  - її частота,  $\varphi_k$  - початкова фаза.

Рівність (6.15) можна переписати таким чином:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t] , \quad (6.16)$$

якщо позначити

$$a_k = A_k \sin \varphi_k , \quad (6.17)$$

$$b_k = A_k \cos \varphi_k . \quad (6.18)$$

Як свідчать формули (6.17) і (6.18),

$$\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k} . \quad (6.19)$$

Для кусково-гладкої функції  $x(t)$ , заданої на нескінченному інтервалі, справедливим є перетворення Фур'є:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt , \quad (6.20)$$

де  $i = \sqrt{-1}$  - уявна одиниця.

Часові ряди метеорологічних величин визначені на скінченному інтервалі. Вони можуть бути апроксимовані таким чином:

$$x(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in [-\tau, \tau], \\ 0, & \text{якщо } |t| > \tau. \end{cases} \quad (6.21)$$

Для такої функції перетворення Фур'є має вигляд:

$$F_l(i\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad . \quad (6.22)$$

Якщо використати відому формулу Ейлера, то інтеграл (6.22) набуває таку форму:

$$F_l(i\omega) = u(\omega) - i\nu(\omega) \quad , \quad (6.23)$$

де

$$u(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) \cos \omega t dt \quad , \quad (6.24)$$

$$\nu(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) \sin \omega t dt \quad . \quad (6.25)$$

Рівності (6.24) і (6.25) є відповідно косинус - і синус – перетворення Фур'є функції  $x(t)$ , апроксимованої виразом (6.22). Коли частоти гармонічних компонент, що утримуються в  $x(t)$ , не є дуже близькими, то  $u(\omega)$  і  $\nu(\omega)$  мають вигляд кривих з різко означеними піками в точках  $\omega = \omega_k$ . Висота піків приблизно дорівнює амплітудам парної  $a_k$  і непарної  $b_k$  складових періодичного коливання з частотою  $\omega_k$ , прихованого в процесі  $x(t)$ . На тих самих частотах  $\omega_k$  будуть спостерігатися піки амплітуд  $A_k = A(\omega_k)$ , оскільки  $a_k \approx u(\omega_k)$  і  $b_k \approx \nu(\omega_k)$  і

$$A(\omega_k) = [u^2(\omega_k) + \nu^2(\omega_k)]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (6.26)$$

З метою покращення селективних якостей перетворення Фур'є (6.24) і (6.25) в них вводять множники ("вікна"), які зменшують вплив



значень  $x(t)$ , заданих поблизу границь інтервалу визначення функції. Одним з таких "вікон" є множник Гіббса:

$$g(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{2t} . \quad (6.27)$$

Очевидно,  $g(\tau) = g(-\tau) = 0$ . Максимум цієї функції спостерігається при  $\tau = 0$  і дорівнює

$$g(0) = \frac{\pi}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{\frac{\pi t}{\tau}} = \frac{\pi}{2} .$$

Таким чином, графік функції  $g(t)$  на інтервалі  $[-\tau, \tau]$  має вигляд, зображений на рис.6.3.

Отже, перетворення, за допомогою яких може проводитися селекція періодичностей, мають вигляд:

$$u(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{2t} x(t) \cos \omega t dt , \quad (6.28)$$

$$v(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin \frac{\pi t}{\tau}}{2t} x(t) \sin \omega t dt . \quad (6.29)$$

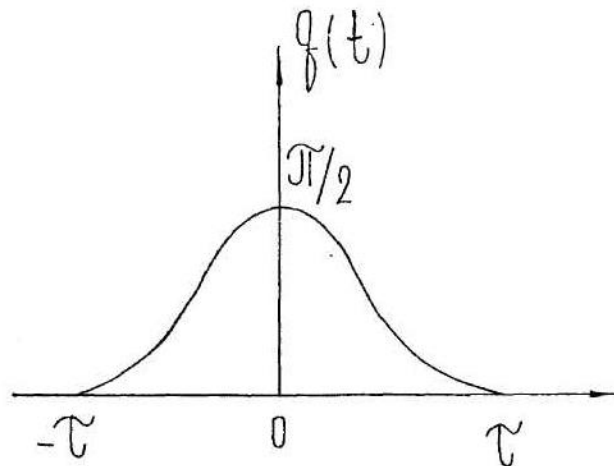


Рисунок 6.3 – Вікно Гіббса

Інтеграл (6.28) і (6.29) обчислюються одним із наближених методів.

Через обмеженості інтервалу й скінченної кількості точок, по яких задається функція, інформації про неї (функцію) недостатньо для визначення параметрів гармонік з періодом  $T > 2\tau$  і  $T < \frac{\tau}{m}$ . Отже, мінімально і максимально можливі гармоніки, що можуть бути виявлені, мають частоти, розташовані в інтервалі  $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ , де  $\omega_{\min} = \frac{\pi}{\tau}$  ;

$$\omega_{\max} = \frac{m\pi}{\tau}.$$

Інтервал дискретності  $\Delta\omega$  при чисельному інтегруванні вибирається з урахуванням властивостей множника Гіббса. При його впровадженні у перетворення Фур'є можна гарантувати, що вплив амплітуд сусідніх за частотою гармонік не перевищує 0,05 від амплітуди, якщо  $\Delta\omega\tau \geq 4,5$ . Звідси випливає, що крок при обчисленнях  $u(\omega)$  і  $v(\omega)$  визначається рівністю [20]:

$$\Delta\omega = \frac{4,5}{\tau}. \quad (6.30)$$

Періодичності, що отримуються у часових рядах  $x(t)$ , визначаються по піках амплітуд  $A(\omega)$  на періодограмі (амплітудно-частотній характеристиці). На періодограмах існує ряд малоабезпечених піків, які ускладнюють аналіз. Для їх ліквідації застосовують фільтр Тьюкі :

$$\tilde{A}(\omega_i) = 0,25A(\omega_{i-1}) + 0,5A(\omega_i) + 0,25A(\omega_{i+1}). \quad (6.31)$$

Визначення періодичностей, характерних для процесу  $x(t)$ , ґрунтується на побудові верхньої довірчої границі для амплітуд із заданою імовірністю за умови, що амплітуди підлягають нормальному розподілу. Періоди  $T_k$  гармонік  $\omega_k$ , які відповідають пікам амплітуд, що виходять за довірчу границю, ототожнюються з періодами гармонічних коливань, які утримуються у випадковому процесі  $x(t)$ . Для кожного з них знаходять початкову фазу

$$\varphi_k = \arctg \frac{u(\omega_k)}{v(\omega_k)}. \quad (6.32)$$

Початкова фаза дає можливість знайти точку  $h_k$  на осі часу, яка є початком коливання.

Треба мати на увазі, що у деяких випадках на амплітудно-частотних характеристиках спостерігаються сплески амплітуд, найбільш часто на низьких частотах, які значно відрізняються від загального рівня коливань амплітуд гармонік. Це означає, що ці гармоніки характеризуються найбільшою, порівняно з іншими, енергією. У таких випадках насамперед треба перевірити гіпотезу про те, що такі сплески амплітуд належать до тієї ж генеральної сукупності, що й амплітуди інших гармонік. У разі неприйняття цієї гіпотези такі сплески при розрахунках середнього значення амплітуди  $\bar{A}$  й середнього квадратичного відхилення амплітуд  $\sigma_A$  треба вилучити із сукупності амплітуд і після цього розрахувати довірчу границю амплітуд з тією чи іншою ймовірністю для визначення статистично значущих періодичностей.

### *Запитання для самоперевірки*

1. Які складові містяться у часових рядах фізичних величин?
2. Яким чином виглядає оператор згладжування часового ряду при простому ковзному осередненні?
3. Який суттєвий недолік має оператор згладжування при простому ковзному осередненні у разі коли вага всіх точок, що беруть участь при розрахунках, дорівнює одиниці?
4. Які множники (функції) використовуються в операторах згладжування?
5. Від чого, крім вагового множника, залежить результат фільтрації?
6. Що таке множник Гіббса? Для чого він призначений?
7. Яким чином визначаються періодичності, що містяться у часових рядах?

## 7 ПРИКЛАДНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

### 7.1 Розклади випадкового вектора

#### 7.1.1 Розкладання випадкового вектора у трикутному базису

При розв'язанні деяких практичних задач виникає необхідність мати справу з математичними моделями фізичних параметрів атмосфери (температури, атмосферного тиску, компонентів швидкості вітру тощо). Прикладом такої задачі є задача врахування впливів атмосферних збурень на динаміку літального апарата. В залежності від типу літального апарата, його призначення, конструктивних і аеродинамічних особливостей, використовується та чи інша система диференціальних рівнянь [12]. У загальному вигляді її можна записати так:

$$\dot{Y} = F(Y, U, X, t), \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (7.1)$$

де  $\dot{Y}$  -  $l$  - вимірний вектор похідних фазових координат літального апарата за часом,  $U$  -  $r$  - вимірний вектор керуючих сил і моментів;  $X$  -  $n$  - вимірний вектор атмосферних збурень,  $Y_0$  -  $l$  - вимірний вектор початкових умов для фазових координат;  $t$  - поточний час.

При визначених умовах, вектором атмосферних збурень може бути вектор, координатами якого є значення метеорологічної величини на деяких стандартних висотах, тобто її вертикальний профіль. Математичні моделі вертикальних профілів можуть мати різний вигляд: розкладання у базису власних векторів матриць коваріацій, ряди по ортогональних функціях (Чебишева, Ерміта, Лагера, експоненціальних функціях тощо). У деяких випадках більш корисним є застосування для моделювання вертикальних профілів або часових рядів метеорологічних величин трикутного базису. Розглянемо його структуру, властивості й алгоритм побудови.

Як вже неодноразово зазначалося, фізичні параметри атмосфери є нестационарними функціями координат тривимірного простору й часу. Розглянемо випадкову функцію  $x(h)$ , де  $h$  - висота над рівнем моря, що характеризує розподіл по висоті деякого параметра атмосфери у визначеному пункті. Якщо є відомим математичне сподівання  $m_X(h)$  і дисперсія  $\sigma_X^2(h)$  цієї функції, то можна побудувати центровану й нормовану функцію

$$\varphi(h) = \frac{x(h) - m_x(h)}{\sigma_x(h)}. \quad (7.2)$$

Очевидно, для такої функції  $m_\varphi = 0$ ;  $K_\varphi(h, h') = R_X(h, h')$  ( $K_\varphi$  і  $R_X$ , як і раніше, визначають коваріацію і кореляцію відповідно). Отже, можна випадкову функцію  $x(h)$  представити таким чином:

$$x(h) = m_x(h) + \sigma_x(h)\varphi(h) \quad (7.3)$$

і створювати модель не вихідних параметрів атмосфери  $x(h)$ , а функцій  $\varphi(h)$  на основі коваріаційної матриці

$$R_X = M(\varphi, \varphi'), \quad (7.4)$$

де  $\varphi$  - вертикальний профіль цієї модифікованої величини, тобто вектор, визначений своїми координатами на тій же множині стандартних висот.

Розглянемо модель вертикального розподілу параметра атмосфери у вигляді розкладу його у трикутному базису

$$\varphi = P\xi, \quad (7.5)$$

де

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n1} & P_{n3} & \dots & P_{nm} \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

а  $\xi$  - вектор, що визначає координати випадкового вектора  $\varphi$  у базису  $P$ . Будемо вважати, що вектор  $\xi$  має такі властивості:

$$\begin{cases} M[\xi] = 0, \\ M[\xi\xi'] = E, \end{cases} \quad (7.7)$$

де  $E$  - одинична матриця.

Тоді

$$R_X = M[\varphi\varphi'] = M[P\xi\xi'P'] = PEP' = PP'. \quad (7.8)$$

Отже задача полягає у тому, щоб знайти таку нижню трикутну матрицю  $P$ , добуток якої на відповідну верхню трикутну матрицю  $P'$  дає матрицю кореляцій.

Поставимо рівність (7.5) у праву частину рівняння (7.4). Виконавши операцію множення матриць і розгорнувши матрицю кореляцій (запишемо тільки верхню половину цих матриць, які є симетричними), будемо мати:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}^2 & P_{11}P_{21} & P_{11}P_{31} & \dots & P_{11}P_{n1} \\ & P_{21}^2 + P_{22}^2 & P_{21}P_{31} + P_{22}P_{32} & \dots & P_{21}P_{n1} + P_{22}P_{n2} \\ & & P_{11}^2 + P_{22}^2 + P_{33}^2 & \dots & P_{31}P_{n1} + P_{32}P_{n2} + P_{33}P_{n3} \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & P_{n1}^2 + P_{n2}^2 + P_{n3}^2 + \dots + P_{nn}^2 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Діагональні елементи матриці кореляцій, як відомо, дорівнюють  $r_{11} = r_{22} = \dots = r_{nn} = 1$ . Крім того, аналіз елементів матриці  $PP'$ , які розташовуються на перетині її  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпця, показує, що вони є сумою вигляду:

$$\sum_{j=1}^i P_{ij}P_{kj} \quad (i, k = \overline{1, n}).$$

Отже, з урахуванням рівності (7.9), для визначення елементів  $P_{ij}$  матриці (7.6) маємо  $\frac{n(n+1)}{2}$  рівнянь вигляду:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^i P_{ij}P_{kj}, \quad (i, k = \overline{1, n}). \quad (7.10)$$

Оскільки матриця кореляцій відома, система цих рекурентних рівнянь легко розв'язується. Маючи на увазі рівняння (7.3), модель вертикальних профілів фізичних параметрів атмосфери можна

представити у матричній формі таким чином:

$$X = m_X + \sigma_X P \xi, \quad (7.11)$$

де  $\sigma_X$  - діагональна матриця середніх квадратичних відхилів випадкової величини  $X$ . В таблиці 7.1 як приклад міститься матриця кореляцій температури повітря влітку в пункті Уайт Сендз, а в табл.7.2 – компоненти відповідної трикутної матриці  $P$ .

Таблиця 7.1 – Матриця кореляцій температури повітря. Уайт Сендз. Літо

$h_{км}$	0	5	10	15	20	25	30
0	1,00	0,24	0,13	0,16	0,11	0,01	0,14
5		1,00	0,74	-0,08	-0,25	-0,21	-0,12
10			1,00	-0,26	-0,20	-0,22	-0,10
15				1,00	0,31	0,20	0,17
20					1,00	0,39	0,20
25						1,00	0,56
30							1,00
35							
40							
45							
50							
55							

Продовження табл.7.1

$h_{км}$	35	40	45	50	55
0	0,12	0,09	0,12	0,28	0,42
5	-0,16	-0,06	-0,11	-0,04	0,05
10	-0,13	-0,24	-0,25	-0,20	-0,05
15	0,15	0,16	0,08	0,14	0,17
20	0,15	0,02	0,03	0,04	0,09
25	0,51	0,41	0,23	0,08	-0,02
30	0,67	0,56	0,39	0,27	0,04
35	1,00	0,54	0,58	0,27	0,13
40		1,00	0,50	0,22	0,03
45			1,00	0,30	0,06
50				1,00	0,54
55					1,00

Таблиця 7.2 – Трикутна матриця  $P$  для температури повітря УайтСендз.  
Літо

1	2	3	4	5	6	7	8
1,0000							
0,2400	0,9708						
0,1300	0,7301	0,6708					
0,1600	-0,1220	-0,2858	0,9369				
0,1100	-0,2847	-0,0096	0,2721	0,9125			
0,0100	-0,2188	-0,0917	0,1553	0,3106	0,9072		
0,1400	-0,1582	-0,0039	0,1357	0,1124	0,5154	0,8115	
0,1200	-0,1945	-0,0054	0,1126	0,0556	0,4751	0,4386	0,7168
0,0900	-0,0840	-0,2837	0,0579	-0,0354	0,4042	0,3952	0,1972
0,1200	-0,1327	-0,2515	-0,0291	-0,0169	0,2055	0,3094	0,4315
0,2800	-0,1104	-0,2322	0,0164	-0,0317	0,0430	0,2360	0,1250
0,4200	-0,0523	-0,0990	0,0727	0,0089	-0,0648	-0,0061	0,1306

Продовження табл.7.2

9	10	11	12
0,7357			
0,1594	0,7443		
-0,0242	0,0824	0,8796	
-0,0562	-0,0701	0,4377	0,7646

З урахуванням (7.7) можна вважати, що компоненти вектора  $\xi$  мають властивостями нормально розподілених випадкових величин. Це дає можливість формувати такий вектор за допомогою датчика випадкових чисел, якщо, наприклад, розглядається задача визначення розсіювання траєкторій динамічної системи (7.1).

Можна змінити гіпотезу про випадкові координати вектора  $\varphi$  у



трикутному базисі. Це приведе до зміни структури трикутної матриці. Будемо вважати, що координати  $\theta_i (i = \overline{1, n})$  вектора  $\varphi$  в деякому трикутному базисі мають такі властивості :

$$\begin{cases} M[\theta_i] = 0, \\ M[\theta_i \theta_j] = D_i \delta_{ij}; \end{cases} \quad (7.12)$$

де  $(\delta_{ij})$  - символ Кронекера).

Тоді

$$M[\theta\theta'] = D, \quad (7.13)$$

де  $D$  - діагональна матриця, елементами якої є  $D_i$  - дисперсії випадкових компонент вектора  $\theta$ .

Будемо вважати, що

$$\varphi = T\theta, \quad (7.14)$$

де  $T$  - нижня трикутна матриця.

У цьому разі

$$R_x = M[\varphi\varphi'] = M[T\theta\theta'T'] = TDT'. \quad (7.15)$$

Оскільки є справедливою матрична рівність

$$D = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}, \quad (7.16)$$

і  $D^{\frac{1}{2}} = (D^{\frac{1}{2}})'$ ,

тоді маємо

$$R_x = T D^{\frac{1}{2}} (D^{\frac{1}{2}})' T'. \quad (7.17)$$

і

Порівнюючи рівності (7.8) і (7.17), маємо

$$P = T D^{\frac{1}{2}}, \quad (7.18)$$

звідки

$$T = PD^{-\frac{1}{2}}, \quad (7.19)$$

Остання рівність дає можливість просто знайти компоненти матриці  $T$ - трикутного базису, в якому проводиться розкладання випадкового вектора  $\varphi$ .

### 7.1.2 Канонічний розклад В.С. Пугачова

Для того, щоб впровадити розклад вертикального профілю метеорологічної величини у трикутному базисі (7.14), треба знайти вектор  $\theta$  проєкцій вектора  $\varphi$  у цьому базисі. З цією метою розглянемо канонічний розклад випадкового вектора  $\varphi$  за В.С.Пугачевим [12, 16, 17]. Він має такий вигляд:

$$\varphi(h) = \sum_{v=1}^n \nu_v y_v(h). \quad (7.20)$$

Функції  $y_v(h)$  мають назву координатних функцій, а  $\nu_v$  - випадкових коефіцієнтів розкладу. Ці елементи канонічного розкладу розраховуються за рекурентними формулами

$$\begin{cases} \nu_v = \varphi(h_v) - \sum_{i=1}^{v-1} \nu_i y_i(h_v); \\ D_v^* = 1 - \sum_{i=1}^{v-1} D_i^* [y_i(h_v)]^2; \\ y_v(h) = \frac{1}{D_v^*} [r(h, h_v) - \sum_{i=1}^{v-1} D_i^* y_i(h) y_i(h_v)] \end{cases} \quad (7.21)$$

Із рівності (7.21) випливає, що

$$D_1^* = 1; y_1(h_1) = r(h_1, h_1) = 1; y_1(h_2) = r(h_1, h_2); \dots; y_1(h_n) = r(h_1, h_n) \quad (7.22)$$

і, крім того,

$$y_\mu(h_\nu) = 0, \text{ якщо } \mu > \nu. \quad (7.23)$$

Звідси виходить, що матриця координатних функцій є трикутною, а перший стовпець цієї матриці дорівнює першому стовпцю матриці кореляцій. Для другого стовпця маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(h_2) = 1, D_2^* = \frac{1}{1 - r^2(h_1, h_2)}; \\ y_2(h_3) = \frac{1}{1 - r^2(h_1, h_2)} [r(h_2, h_3) - r(h_1, h_2)r(h_1, h_3)]; \\ y_2(h_4) = \frac{1}{1 - r^2(h_1, h_2)} [r(h_2, h_4) - r(h_1, h_2)r(h_1, h_4)]; \\ \dots\dots\dots \\ y_2(h_n) = \frac{1}{1 - r^2(h_1, h_2)} [r(h_2, h_n) - r(h_1, h_2)r(h_1, h_n)]; \end{array} \right. \quad (7.24)$$

і так далі для решти стовпців матриці координатних функцій.

Звернемося тепер до трикутної матриці  $T$ , що визначається рівністю (7.19).

Оскільки всі елементи матриці  $P$  відомі і, як очевидно,  $D_1 = M[\theta_1^2] = 1$ , то елементи першого стовпця матриці  $T$  дорівнюють:

$$t_{11} = 1; t_{21} = r(h_2, h_1); t_{31} = r(h_3, h_1); \dots; \quad (7.25)$$

$$t_{n1} = r(h_n, h_1).$$

Як випливає з рівностей (7.10) і (7.13)

$$D_2 = M[\theta_2^2] = 1 - r_{12}^2$$

(кореляції  $r_{ij}$  і  $r(h_i, h_j)$  - рівнозначні). Тому елементи другого стовпця матриці  $T$  мають значення:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{22} = 1; \\ t_{23} = \frac{1}{1 - r_{12}^2} (r_{23} - r_{12} r_{13}); \\ t_{24} = \frac{1}{1 - r_{12}^2} (r_{24} - r_{12} r_{14}); \\ \dots\dots\dots \\ t_{2n} = \frac{1}{1 - r_{12}^2} (r_{2n} - r_{12} r_{1n}). \end{array} \right. \quad (7.26)$$

Таким же чином розраховуються елементи інших стовпців матриці  $T$ . Порівняння відповідних рівностей (7.24) і (7.26) показує, що елементи відповідних стовпців матриці координатних функцій і матриці  $T$  тотожні.

Координати  $\theta_i (i = \overline{1, n})$  випадкового вектора  $\varphi$  у трикутному базису  $T$  можна знайти із виразу (7.14), якщо визначити вектор  $\varphi$ . Оскільки матриця  $T$  - трикутна, матричне рівняння (7.14) утворює систему рекурентних формул

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \varphi_1; \\ \theta_2 = \varphi_2 - t_{12} \theta_1; \\ \theta_3 = \varphi_3 - t_{32} \theta_2 - t_{31} \theta_1; \\ \dots\dots\dots \\ \theta_n = \varphi_n - t_{n,n-1} \theta_{n-1} - t_{n,n-2} \theta_{n-2} - \dots - t_{n1} \theta_1, \end{array} \right. \quad (7.27)$$

або, якщо їх згорнути,

$$\theta_v = \varphi_v - \sum_{i=1}^{v-1} \theta_i t_{vi} \quad (v = \overline{1, n}), \quad (7.28)$$

що повністю співпадає з першим рівнянням системи (7.21). Отже, отримані

вище рішення показують, що розклад випадкового вектора  $\varphi$  в трикутному базисі  $T$ , що визначається матричним рівнянням (7.14), є тотожним до канонічного розкладу (7.20) В.С. Пугачова. Однак алгоритм (7.14) - (7.19) і (7.28) має перевагу перед розв'язками, що отримані В.С.Пугачовим для побудови координатних функцій і визначення коефіцієнтів  $\nu_v$ , оскільки вони дають змогу замінити дуже простими матричними рівняннями достатньо громіздкі математичні викладки, які приводять до того ж результату. Отже, у якості вектора випадкових атмосферних збурень у правій частині моделі динамічної системи (7.1) (а також вертикального профілю фізичного параметра атмосфери взагалі) можна використовувати поряд з моделлю (7.11) модель

$$X = m_x + \sigma T \theta. \quad (7.29)$$

Крім того, з рівнянь (7.5), (7.14) і (7.18) видно, що між векторами  $\theta$  і  $\xi$  справедливим є взаємозв'язок

$$\theta = D^{-\frac{1}{2}} \xi, \quad (7.30)$$

який має смисл перетворення стиску. Треба зауважити, що розглянуті трикутні базиси можна використовувати для моделювання не тільки вертикальних профілів метеорологічних величин, але і для побудови моделей реалізацій будь-яких випадкових функцій.

### 7.1.3 Неканонічні розкладання

Неканонічним розкладом випадкових функцій  $\varphi(h)$  називають розклад вигляду [19]

$$\theta(H) = m_\theta(H) + \lambda \cos \Omega H + \gamma \sin \Omega H, \quad (7.31)$$

у якому  $\lambda$  і  $\gamma$  незалежні нормально розподілені випадкові величини, а  $\Omega$  - випадкова частота, яка має деякий розподіл з густиною ймовірностей  $P[\Omega]$ . Таким чином,

$$M[\lambda] = M[\gamma] = 0, \quad (7.32)$$

$$M[\lambda^2] = M[\gamma^2] = D_\lambda = D_\gamma = D.$$

Нехай функція  $\varphi(H)$  є центрованою й нормованою на середній квадратичний відхил  $\sigma_\vartheta$

$$\varphi(H) = \frac{\Theta(H) - m_\vartheta(H)}{\sigma_\vartheta(H)}. \quad (7.33)$$

У такому випадку

$$\begin{cases} M[\varphi(H)] = 0; \\ K_\varphi(h) = M[\varphi(H)\varphi(H+h)] = r_\varphi(h); \\ D_\varphi = 1 \quad \forall h \in [a, b]. \end{cases} \quad (7.34)$$

Неканонічний розклад такої функції має вигляд

$$\varphi(H) = \lambda \cos \Omega H + \gamma \sin \Omega H. \quad (7.35)$$

Визначимо кореляційну функцію (7.33), враховуючи рівняння (7.35). Отримаємо

$$r_\varphi(h) = M \{ [\lambda \cos \Omega H + \gamma \sin \Omega H] [\lambda \cos \Omega(H+h) + \gamma \sin \Omega(H+h)] \}. \quad (7.36)$$

З урахуванням (7.32), а також властивості тригонометричних функцій, після здійснення операції математичного сподівання, маємо

$$r_\varphi(h) = DM[\cos \Omega h] \quad (7.37)$$

Оскільки  $D = 1$  (це видно, якщо прирівняти  $h = 0$ ), то

$$r_\varphi(h) = M[\cos \Omega h] \quad (7.38)$$

За означенням математичного сподівання маємо

$$r_\varphi(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \Omega h P(\Omega) d\Omega, \quad (7.39)$$

де  $P(\Omega)$  - густина ймовірностей випадкових частот  $\Omega$ . Обернене перетворення для рівняння (9) має вигляд:

$$P(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_{\varphi}(h) \cos \Omega h dh. \quad (7.40)$$

В розділі 3.3.3 було показано, що кореляційні функції фізичних параметрів атмосфери часто апроксимуються виразами

$$r_{\varphi}(h) = e^{-\alpha h}, \quad (7.41)$$

$$r_{\varphi}(h) = e^{-\alpha h} \cos \Omega_0 h. \quad (7.42)$$

Для таких кореляційних функцій рівняння (7.40) приводять до відповідних законів розподілу випадкових частот флуктуацій параметрів атмосфери

$$P(\Omega) = \frac{\alpha}{\pi [\alpha^2 + \Omega^2]}; \quad (7.43)$$

$$P(\Omega) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\Omega - \Omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\Omega + \Omega_0)^2} \right]. \quad (7.44)$$

Вигляд густини ймовірностей визначається параметрами  $\alpha$  - декрементом затухання кореляційних функцій і параметра  $\Omega_0$ , що визначає частоту, на якій кореляційна функція має найбільше від'ємне значення. У якості прикладу розглянемо конкретні кореляційні функції для густини атмосфери над середніми та високими широтами США в шарі атмосфери від 10 до 60 км. Ці дані отримані шляхом ракетного зондування атмосфери [12]

Середнім широтам відповідає кореляційна функція

$$r_{\varphi}(h) = e^{-0,04h} \cos 0,21h, \quad (7.45)$$

а високим - кореляційна функція

$$r_{\varphi}(h) = e^{-0,10h}. \quad (7.46)$$

Формула (7.45) описує характер кореляційного зв'язку між температурою повітря, а формула (7.46) – між швидкістю вітру у шарі атмосфери 10-60 км над пунктом ракетного зондування атмосфери м. Канаверал [12].

Рівняння (7.40) дає можливість знайти ймовірність того, що флуктуації фізичної величини з кореляційною функцією  $r_\varphi(h)$  знаходяться на інтервалі  $[\Omega_{i-1} < \Omega_i < \Omega_{i+1}]$ . Вона, очевидно, дорівнює

$$P[\Omega_{i-1} < \Omega_i < \Omega_{i+1}] = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_{i-1}}^{\Omega_{i+1}} r_\varphi(h) \cos \Omega h dh. \quad (7.47)$$

З табл.7.3 виходить, що у високих широтах найбільш ймовірними є високочастотні коливання густини повітря, у той час, коли над середніми широтами мають місце коливання з масштабом від 1200 до 400 м.

Таблиця 7.3 Ймовірності частот  $\Omega$  (км<sup>-1</sup>) флуктуацій густини повітря

$\Omega$	0-0,1	0,1-0,2	0,2-0,3	0,3-0,4	0,4-0,5	0,45-0,5
(15)	0,07	0,32	0,44	0,08	0,05	0,01
(16)	0,57	0,13	0,09	0,05	0,03	0,03

Розподіли (7.43) - (7.44) можна привести до нормального розподілу. Для цього розглянемо двопараметричний розподіл

$$P(\eta) = \frac{1}{2\pi} \left[ e^{-\frac{(\eta-\eta_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(\eta+\eta_0)^2}{2}} \right] \quad (7.48)$$

у якому позначимо

$$\eta - \eta_0 = \chi_1; \quad \eta + \eta_0 = \chi_2. \quad (7.49)$$

Тоді розподіл (7.44) зводиться до розподілу

$$P(\eta) = P(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{2\pi} \left[ e^{-\chi_1^2} + e^{-\chi_2^2} \right] = P(\Omega) \quad (7.50)$$

за умови, що



$$\chi_1 = \left\{ 2 \ln \frac{\alpha^2 + (\Omega - \Omega_0)^2}{\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}} \right\}^{\frac{1}{2}} ; \quad (7.51)$$

$$\chi_2 = \left\{ 2 \ln \frac{\alpha^2 + (\Omega + \Omega_0)^2}{\alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}}} \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (7.52)$$

Дійсно, якщо підставити рівності (7.51) і (7.52) до рівності (7.48), то отримаємо

$$\begin{aligned} P(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega - \Omega_0)^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega + \Omega_0)^2} \right\} = \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega - \Omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\Omega + \Omega_0)^2} \right\} = P(\Omega). \end{aligned} \quad (7.53)$$

У випадку, коли  $\eta_0 = 0$ , отримаємо розподіл

$$P(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} = P(\Omega), \quad (7.54)$$

до якого зводиться розподіл (7.44) при

$$\eta = \left( 2 \ln \frac{\sqrt{2\pi}(\alpha^2 + \Omega^2)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.55)$$

Розподіли (7.50) й (7.54) є більш зручними ніж розподіли (7.43) й (7.44).

## 7.2 Розклади випадкових функцій у ортонормованих базисах

### 7.2.1 Загальна теорія побудови ортонормованого базису

Система функцій

$$y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x), \quad (7.56)$$

інтегрованих на  $[a, b]$ , є ортонормованою, якщо скалярний добуток цих функцій відповідає умові

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x)y_j(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ > 0, & \text{якщо } i = j. \end{cases} \quad (7.57)$$

Цю систему функцій можна зіставити з системою ортонормованих функцій [12]

$$\psi_1(x); \psi_2(x); \dots; \psi_n(x), \quad (7.58)$$

$$\text{де } \psi_i(x) = \frac{y_i(x)}{\|y_i\|}, \quad (7.59)$$

$$\text{а } \|y_i\| = \left[ \int_a^b y_i^2(x) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.60)$$

є нормою функції  $y_i(x)$ .

Ця система має наступні властивості [12]:

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases} \quad (7.61)$$

Інтегровану на  $[a, b]$  функцію  $f(x)$  можна розкласти уряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x), \quad (7.62)$$

у якому  $a_k$  - постійні числа, а  $\psi_k(x)$  - базисні функції ортонормованої системи. Коефіцієнти  $a_k$  визначаються через  $f(x)$ . Це видно, якщо

помножити рівняння (7.62) на  $\psi_i(x)$  й проінтегрувати одержаний добуток у границях  $[a, b]$ . Одержимо

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \psi_k(x)\psi_i(x)dx. \quad (7.63)$$

Враховуючи рівність (7.61), маємо

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx = a_k \int_a^b \psi_k^2(x)dx = a_k. \quad (7.64)$$

Рівняння (7.64) дає можливість визначити коефіцієнти ряду Фур'є, коли відомою є система ортонормованих функцій.

Будемо вважати відомими два вектори

$$X : x_1, x_2, \dots, x_p;$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_p. \quad (7.65)$$

Позначимо найменший простір, що містить вектор  $X$ , через  $S$ . Вектори  $X$  і  $Y$  будуть еквівалентними, коли для всіх  $p$

$$S_{x_p} \equiv S_{y_p}. \quad (7.66)$$

Виконуємо операцію ортогоналізації векторів (7.65), тобто замінимо вектор  $Y$  деяким еквівалентним ортогональним вектором.

Якщо спроектувати ортогонально  $x_p$  на підпростір  $S_{p-1}$ , то отримаємо

$$x_p = x_{pS_{p-1}} + x_{pN}, \quad (7.67)$$

де

$$\begin{cases} x_{pS_{p-1}} \in S_{p-1}, \\ x_{pN} \perp S_{p-1}, (p = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}. \quad (7.68)$$

Нехай

$$y_p = \lambda_p x_{pN}, \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.69)$$

де  $\lambda_p$  - довільне число ( $\lambda > 0$ ).

Тоді вектор  $Y$  буде еквівалентним й ортогональним до вектора  $X$ .  
Відомо [6, 13, 15], що

$$x_m = \frac{\begin{vmatrix} & & & & x_1 \\ & & & & \cdot \\ & & G & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & x_{p-1} \\ (x_p x_q) & \dots & (x_p x_{p-1}) & & x_p \end{vmatrix}}{G_{p-1}}, \quad (p = 1, 2, \dots; G_0 = 1), \quad (7.70)$$

де  $G$  - визначник Грама.

Якщо у рівності (7.69) прирівняти  $\lambda_p = G_{p-1}$  то, маючи на увазі співвідношення (7.70), отримаємо для елементів ортогонального вектора такі формули:

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = \begin{vmatrix} (x_1 x_1) & x_1 \\ (x_2 x_1) & x_2 \end{vmatrix}; \dots \dots y_p = \begin{vmatrix} (x_1 x_1) & \dots & (x_1 x_{p-1}) & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_p x_1) & \dots & (x_p x_{p-1}) & x_p \end{vmatrix}, \quad (7.71)$$

де у круглих дужках, як і раніше, визначається скалярний добуток функцій.

Одержимо тепер елементи ортонормованого базису  $\psi_p(x)$ , що відповідають вектору  $Y$ . Щоб це зробити, визначимо скалярний добуток  $(y_p y_p)$ . З урахуванням рівняння (7.69) будемо мати

$$(y_p y_p) = G_{p-1}^2 (x_{pN} x_{pN}). \quad (7.72)$$

Як відомо [5, 6]

$$(x_{pN} x_{pN}) = \frac{G_p}{G_{p-1}}. \quad (7.73)$$

Звідси

$$(y_p, y_p) = G_p G_{p-1}. \quad (7.74)$$

Отже, елементи ортонормованого базису визначаються таким рівнянням:

$$\psi_p = \frac{y_p}{(G_p G_{p-1})^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.75)$$

Рівняння (7.75) однозначно визначає ортонормовану систему функцій, яка характеризується рівняннями (7.59) і (7.60).

### 7.2.2 Ортонормований базис на експоненціальних функціях

У деяких практичних задачах буває зручним подання функцій рядом Фур'є, у якому базисними функціями є експоненціальні ортонормовані функції, особливо, коли вони не мають у своїй структурі експоненціальних складових [12].

Прикладом таких обставин можуть бути задачі, при розв'язанні яких необхідно здійснити операції інтегрування або диференціювання, а відповідні первісні та похідні у такої функції не існують.

Для побудови ортонормованої системи експоненціальних функцій, будемо вважати, що вектор  $X$  має координати

$$X : e^{-ch}, e^{-2ch}, \dots, e^{-pch}; \quad (c > 0) \quad (7.76)$$

й знайдемо відповідну йому систему функцій  $\psi(x)$ .

Будемо вважати, що скалярний добуток функцій  $x_p$ , з вагою  $g(x)=1$ , визначений на  $[0, \infty]$ .

Тоді на основі рівнянь (7.71) маємо

$$y_p = \begin{vmatrix} \int_0^{\infty} e^{-2ch} dh & \int_0^{\infty} e^{-3ch} dh & \dots & \int_0^{\infty} e^{-pch} dh \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_0^{\infty} e^{-(p+1)ch} dh & \int_0^{\infty} e^{-(p+2)ch} dh & \dots & \int_0^{\infty} e^{-(2p-1)ch} e^{-pch} dh \end{vmatrix}. \quad (7.77)$$

Після розрахунку інтегралів отримаємо такий визначник:

$$y_p = \begin{vmatrix} \frac{1}{2c} & \frac{1}{3c} & \dots & \frac{1}{pc} e^{-ch} \\ \frac{1}{pc} & \frac{1}{(p+1)c} & \dots & \frac{1}{(2p-1)c} e^{-(p-1)ch} \\ \frac{1}{(p+1)c} & \frac{1}{(p+2)c} & \dots & \frac{1}{(2p-1)c} e^{-pch} \end{vmatrix}. \quad (7.78)$$

У такому випадку визначник Грама  $G_{p-1}$  є алгебраїчним доповненням елемента  $e^{-pch}$ . Для визначення  $G_p$  необхідно записати визначник  $y_{p+1}$  й знайти алгебраїчне доповнення елемента на перетині рядка й стовця з номером  $(p+1)$ .

Будемо мати

$$G_{p-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2c} & \frac{1}{3c} & \dots & \frac{1}{pc} \\ \dot{\imath} & \dot{\imath} & \cdot & \dot{\imath} \\ \frac{1}{pc} & \frac{1}{(p+1)c} & \dots & \frac{1}{(2p-1)c} \end{vmatrix}, \quad (7.79)$$

$$G_p = \begin{vmatrix} \frac{1}{2c} & \frac{1}{3c} & \dots & \frac{1}{pc} \\ \dot{\imath} & \dot{\imath} & \cdot & \dot{\imath} \\ \frac{1}{(p+1)c} & \frac{1}{(p+2)c} & \dots & \frac{1}{(2p-1)c} \end{vmatrix}. \quad (7.80)$$

Розрахувавши визначники (7.78), (7.79), і (7.80), за допомогою рівняння (7.75) можна отримати систему заданого числа ортонормованих функцій, що складаються із експоненціальних функцій.

Як приклад наведемо деякі з них. При  $p=1$ :

$$y(h) = e^{-ch}; \quad G_0 = 1; \quad G_1 \int_0^1 e^{-ch} dh = \frac{1}{2\pi}.$$

Отже,

$$\psi_1(h) = \sqrt{2} e^{-ch}. \quad (7.81)$$

При  $p = 2$

$$y_2(h) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2c} & e^{-ch} \\ \frac{1}{3c} & e^{-2ch} \end{vmatrix} = \frac{3e^{-2ch} - 2e^{-ch}}{6c}; \quad (7.82)$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2c} & \frac{1}{3c} \\ \frac{1}{3c} & \frac{1}{4c} \end{vmatrix} = \frac{1}{72c^2}; \quad \psi_2(h) = \sqrt{2}(6e^{-2ch} - 4e^{-ch}). \quad (7.83)$$

Таким же чином отримаємо

$$\psi_3(h) = \sqrt{6c}(10e^{-3ch} - 12e^{-2ch} + 3e^{-ch}); \quad (7.84)$$

$$\psi_4(h) = \sqrt{2c}(70e^{-4ch} - 120e^{-3ch} + 60e^{-2ch} - 8e^{-ch}); \quad (7.85)$$

$$\psi_5(h) = \sqrt{10c}(126e^{-5ch} - 280e^{-4ch} + 210e^{-3ch} - 60e^{-2ch} + 5e^{-ch}). \quad (7.86)$$

Розрахунки визначників більш високих порядків пов'язані зі значними труднощами. Тому для побудови системи ортонормованих функцій можна піти й іншим шляхом.

Складемо лінійну комбінацію

$$A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \dots + A_{n-1}\psi_{n-1} + A_n\psi_n \quad (7.87)$$

де

$$A_n = \int_0^{\infty} \psi_n e^{-nch} dh \quad (7.88)$$

й визначимо різницю

$$K_n = A_n\psi_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i\psi_i. \quad (7.89)$$

Очевидно,  $K_n$  є поліномом  $n$ -го степеня по відношенню до  $e^{-ch}$ . У свою чергу можна записати

$$\psi_n = \Omega e^{-nch} N_{n-1}, \quad (7.90)$$

де  $N_{n-1}$  – поліном степеня  $n-1$  відносно  $e^{-ch}$ . Отже, маємо

$$K_n = A_n e^{-nch} + A_n N_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \psi_i. \quad (7.91)$$

Оскільки

$$A_n \Omega_n = 1$$

рівність (7.91) набуває вигляд

$$L_n = e^{-nch} - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \psi_i, \quad (7.92)$$

де

$$L_n = K_n - A_n N_{n-1} \quad (7.93)$$

або, якщо мати на увазі рівність (7.88), отримаємо

$$L_n = e^{-nch} - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i(h) \int \psi_i(h) e^{-nch} dh. \quad (7.94)$$

Порівняння поліномів  $L_n(h)$  і  $y_n(h)$  свідчить про те, що вони розрізняються між собою на множник, який залежить від  $n$ . Із цього виходить, що

$$\psi_n(h) = \frac{L_n(h)}{\left[ \int_0^\infty L^2(h) dh \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.95)$$

Рівняння (7.94) і (7.95) являють собою сукупність рекурентних формул, які дають можливість розрахувати послідовність ортонормованих експоненціальних поліномів будь-якого порядку.



### 7.2.3 Ортогональні поліноми

Як було зазначено в п.7.1, система інтегрованих функцій  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  називається ортогональною на інтервалі  $[a, b]$ , якщо

$$[\varphi_m(x), \varphi_n(x)] = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \quad (7.96)$$

Число

$$\|\varphi_m(x)\| = \sqrt{[\varphi_m(x)\varphi_m(x)]} = \sqrt{\int_a^b \varphi_m^2(x)dx} \quad (7.97)$$

називається нормою функції  $\varphi_m(x)$  на  $[a, b]$  [18].

Якщо норми усіх функцій системи дорівнюють 1, то ця система функцій називається ортонормованою [18]. Для ортонормованої системи

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{mn}, \quad (7.98)$$

де  $\delta_{mn}$  – символ Кронекера.

Очевидно, будь-яку систему функцій, яка не містить функції з нульовою нормою, можна пронормувати

$$\psi_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\|\varphi_0(x)\|}; \quad \psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1(x)\|}; \quad \dots; \quad \psi_m(x) = \frac{\varphi_m(x)}{\|\varphi_m(x)\|}, \quad (7.99)$$

оскільки

$$\int_a^b \psi_i^2(x)dx = \int_a^b \frac{\varphi_i^2(x)dx}{\|\varphi_i(x)\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_i(x)\|^2} \int_a^b \varphi_i^2(x)dx = \frac{\|\varphi_i(x)\|^2}{\|\varphi_i(x)\|^2}. \quad (7.100)$$

Існує ряд ортогональних поліномів (поліноми Чебишева, Лежандра, Лагерра, Ерміта, експоненціальні ортогональні поліноми і т.н.). Окрім зазначених вище поліномів розглядається також система ортогональних поліномів з вагою. Нехай на  $[a, b]$  визначена послідовність неперервних функцій  $\rho(x)$ . Система функцій  $\{\varphi_i(x)\}$ ,  $i = \overline{0, m}$  називається ортогональною з вагою  $\rho(x)$  на  $[a, b]$ , якщо

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad (7.101)$$

при  $m \neq n$ .

З ортогональності функцій  $\{\varphi_i(x)\}$ ,  $i = \overline{0, m}$ , випливає ортогональність функцій

$$\Phi_m(x) = \sqrt{\rho(x)} \varphi_m(x). \quad (7.102)$$

Як прикладу розглянемо функції Лежандра й Чебишева, які найбільш часто використовуються при розв'язанні різних практичних занять.

#### 7.2.4 Поліноми Лежандра

Поліноми Лежандра визначаються формулою Родрига [18]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.103)$$

Якщо розгорнути цю формулу при послідовних знаннях  $n$ , тобто  $0, 1, 2, \dots$ , то отримаємо такі співвідношення для поліномів Лежандра:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 36x^2 + 3), \\ \quad \quad \quad i \text{ m. d} \end{array} \right. \quad (7.104)$$

Видно, що  $P_n(x)$  – є парними функціями при  $n = 2m$  і непарними при  $n = 2m + 1$ . Поліноми Лежандра утворюють ортогональну систему функцій в області  $[-1,1]$ , тобто

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad \text{при } n \neq m. \quad (7.105)$$

Норма полінома Лежандра визначається співвідношенням

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad (7.106)$$

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad (7.107)$$

а нормовані поліноми Лежандра мають вигляд

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} P_n(x), \quad n = 0,1,2,3,\dots \quad (7.108)$$

Вони утворюють на відрізку  $[-1,1]$  ортонормовану систему поліномів

$$\int_{-1}^1 \hat{P}_n(x)\hat{P}_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \neq m; \\ 1, & \text{якщо } n = m. \end{cases} \quad (7.109)$$

### 7.2.5 Поліноми Чебишева

Поліноми Чебишева визначаються формулою [18]:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2^n}, \quad n = 0,1,2,3,\dots \quad (7.110)$$

Функції (7.110) дійсно є поліномами, оскільки при піднесенні до степеня дужок радикали у всіх парних членах зберігаються, причому у першій дужці зі знаком «+», а у другій – зі знаком «-». Тому їх сума дорівнює нулю, і залишаються лише члени, які утримують змінну  $x$  у цілих ступенях, причому старшим степенем є степінь  $n$ .

У розгорнутому вигляді перші три ( $n:0,1,2$ ) поліноми Чебишева представлені так

$$T_0(x) = 1, \quad (7.111)$$

$$T_1(x) = \frac{1}{2} \left[ x + \sqrt{x^2 - 1} + x - \sqrt{x^2 - 1} \right] = x, \quad (7.112)$$

$$T_2(x) = \frac{1}{4} \left[ \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^2 + \left( x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^2 \right] = x^2 - \frac{1}{4}. \quad (7.113)$$

Для отримання поліномів Чебишева більш старших степенів візьмемо до уваги, що вони є ортогональними на відрізку  $[-1, 1]$ . Враховуючи це, запровадимо нову змінну  $t$  у вигляді

$$x = \cos t. \quad (7.114)$$

Тоді

$$t = \arccos x, \quad (0 \leq t \leq \pi), \quad (7.115)$$

а

$$\sin t = \sqrt{1 - x^2}. \quad (7.116)$$

Враховуючи формули (7.114-7.116), одержимо формулу для поліномів Чебишева (7.110) у такому вигляді

$$T_n(t) = \frac{(\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n}{2^n}. \quad (7.117)$$

Оскільки

$$(\cos t \pm i \sin t)^n = \cos nt \pm i \sin nt, \quad (7.118)$$

то будемо мати

$$T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7.119)$$

або

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n(\arccos x). \quad (7.120)$$

Ця формула приводиться до рекурентної формули

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \frac{1}{4}T_{n-1}(x). \quad (7.121)$$

Звідси виходить

$$T_3(x) = xT_2(x) - \frac{1}{4}T_1(x) = x^3 - \frac{3}{4}x \quad (7.122)$$

$$T_4(x) = xT_3(x) - \frac{1}{4}T_2(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{2} \quad (7.123)$$

і т.д. (з урахуванням формул (7.112) і (7.113)).

Поліноми Чебишева мають такі властивості:

а) Вони утворюють на відрізку  $[-1, 1]$  ортогональну систему з вагою

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (7.124)$$

тобто

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \text{ при } n \neq m. \quad (7.125)$$

б) Корені полінома Чебишева ненульового степеня дійсні, різні й лежать в інтервалі  $[-1, 1]$ .

в) Поліном Чебишева  $T_n(x)$  ( $n > 0$ ) на  $[-1, 1]$  має  $n + 1$  екстремальних значень (точок максимуму і точок мінімуму) рівних між собою за абсолютною величиною.

## 7.2.6 Розкладання випадкових функцій по ортогональних поліномах

Якщо система функцій  $\{\varphi_i(x)\}$ ,  $i = \overline{0, m}$ , ортогональна на  $[a, b]$ , то можна провести розкладання неперервних на цьому відрізку функцій  $f(x)$  по поліномах  $\{\varphi_i(x)\}$ . Отриманий при цьому розклад називається квадратичною апроксимацією цієї функції. Вона має вигляд

$$Q_m(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x). \quad (7.126)$$

Щоб побудувати розклад функції  $f(x)$  за системою ортогональних поліномів, необхідно знайти коефіцієнти  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ .

Вони розраховуються із умови мінімуму інтеграла

$$J_m = \int_a^b \left[ \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x) - f(x) \right]^2 dx. \quad (7.127)$$

Мінімум функціоналу (7.127) досягається, коли його частинні похідні дорівнюють нулю при всіх  $i = \overline{0, m}$ , тобто

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_m}{\partial c_j} = \int_a^b \left[ \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x) - f(x) \right] \varphi_j(x) dx = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (7.128)$$

Після очевидних перетворень маємо

$$\sum_{i=0}^m c_i \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx. \quad (7.129)$$

Оскільки поліноми системи  $\{\varphi_i(x)\}$  є ортогональними, то

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad \text{при } i \neq j, \text{ тобто}$$

$$c_i \int_a^b \varphi_i^2(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx. \quad (7.130)$$

Будемо вважати, що серед всіх поліномів  $\varphi_i(x)$  нема поліномів з нульовою нормою, тобто

$$\int_a^b \varphi_i^2(x) dx = \|\varphi_i(x)\|^2 \neq 0. \quad (7.131)$$

Тоді отримаємо

$$c_i = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx}{\|\varphi_i(x)\|^2}, \quad i = 0,1,2,\dots,m \quad (7.132)$$

У випадках, коли система поліномів ортонормована, коефіцієнти розкладу розраховуються за формулою

$$c_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx. \quad (7.133)$$

Коефіцієнти  $c_i$  розраховані за формулами (7.132) - (7.133), називаються коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x)$  відносно визначеної ортогональної системи поліномів  $\varphi_i(x)$ .

Узагальнений поліном (7.126) з коефіцієнтами Фур'є має найменші квадратичні відхилення від цієї функції порівняно з усіма іншими узагальненими поліномами того ж порядку  $m$ . Крім того, узагальнений поліном  $Q_m(x)$  має такі властивості :

а) При збільшенні кількості складових  $m$  молодші коефіцієнти  $c_i$  ( $i \leq m$ ) залишаються незмінними, тобто при додаванні нових членів виконана перед цим робота повністю залишається.

б) При збільшенні  $m$  квадратична похибка  $J_m$  монотонно зменшується

$$J_1 \geq J_2 \geq J_3 \geq \dots \geq J_m \geq J_{m+1} \dots$$

Таким чином, приєднання нових доданків збільшує точність апроксимації. Якщо система  $\{\varphi_i(x)\}$  ортогональних поліномів є такою, що для будь-якої неперервної функції  $f(x)$  справедливе співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = 0, \quad (7.134)$$

то така система називається повною. Якщо система є повною для ортонормованих функцій, то

$$\sum_{i=0}^m c_i^2 = \|f(x)\|^2. \quad (7.135)$$

Рівність (7.135) називається рівністю Парсеваля або умовою повноти.

### 7.2.7 Апроксимація двовимірних метеорологічних полів за допомогою поліномів Чебишева

Обмежимо поле, визначене значеннями метеорологічної величини на множині точок регулярної сітки точок, або на множині пунктів вимірювань [18]. Таке поле обмежено такими значеннями географічної широти і довготи:

$$a \leq \varphi \leq b, \quad (7.136)$$

$$c \leq \lambda \leq d. \quad (7.137)$$

Виконаємо перетворення географічних координату на прямокутні. Очевидно, це досягається шляхом використання таких формул:

$$x = \frac{2\varphi - (a + b)}{b - a}, \quad (7.138)$$

$$y = \frac{2\lambda - (c + d)}{d - c}. \quad (7.139)$$

Ці формули переводять область, зазначену нерівностями (7.136) і (7.137) у квадрат

$$-1 \leq x \leq 1, \quad (7.140)$$

$$-1 \leq y \leq 1. \quad (7.141)$$

У такому разі ми можемо проводити розкладання таких метеорологічних полів по поліномах Чебишева, оскільки, як показано вище, саме у цих границях існує система зазначених поліномів з вагою (7.124).

Розглянемо функцію  $\Theta(x, y)$ , визначену в квадраті  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Представимо цю функцію у вигляді розкладу по поліномах Чебишева

$$\Theta(x, y) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M A_{nm} T_n(x) T_m(y). \quad (7.142)$$

Як і у попередньому випадку, необхідно перш за все визначити коефіцієнти  $A_{nm}$ . Вони також можуть бути визначеними за методом



найменших квадратів, який у двовимірному випадку формується таким чином:

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\left[ \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M A_{nm} T_n(x) T_m(y) - \Theta_{xy} \right]^2}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} dx dy = \min ,$$

$$\text{тобто } \frac{\partial J}{\partial A_{pq}} = 0. \quad (7.143)$$

Диференціювання рівняння (49) приводить до такого виразу:

$$\frac{\partial J}{\partial A_{pq}} = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\left[ \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M A_{nm} T_n(x) T_m(y) T_p(x) T_q(y) - \Theta(x, y) T_p(x) T_q(y) \right]}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} dx dy. \quad (7.144)$$

Прирівнюючи похідні до нуля й використовуючи властивості ортогональності поліномів Чебишева, отримуємо:

$$A_{pq} = \alpha_p \alpha_q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\left[ \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^M \Theta(x, y) T_p(x) T_q(y) \right]}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} dx dy, \quad (7.145)$$

де

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{якщо } p = 0, \\ \frac{2}{\pi}, & \text{якщо } p \neq 0. \end{cases} \quad (7.146)$$

Визначені за формулами (7.145) – (7.146) коефіцієнти  $A_{pq}$  дають можливість розрахувати приблизні значення метеорологічної величини за рівністю (7.142) у будь-якій точці метеорологічного поля, яке обмежене географічними координатами (7.136) – (7.137).

Розклади (48) метеорологічних полів надають можливість сконцентрувати цю інформацію про поле, обмежене зазначеними географічними координатами, у порівняно невеликій кількості коефіцієнтів  $A_{pq}$ . Наприклад, поле атмосферного тиску на висоті 3 км

представлене значеннями в 180 точках регулярної сітки точок, із задовільною точністю визначається при використанні 25 коефіцієнтів  $A_{pq}$  ( $p, q = \overline{0,4}$ ).

### 7.3 Розклад випадкової функції у базисі власних векторів матриці коваріацій (кореляцій)

Використання статистичних методів дослідження при вирішенні метеорологічних задач пов'язане з рядом труднощів, таких як невідповідність у багатьох випадках метеорологічних величин нормальному закону розподілу, неоднорідність і неізотропність метеорологічних полів, нестаціонарність випадкових процесів і ін. У цьому випадку ефективним є інший шлях вирішення, який полягає в тім, що проводиться параметризація складу факторів. Тобто в моделі використовуються нові величини, які є лінійними комбінаціями початкових факторів. Нові фактори повинні задовольняти такі вимоги: а) бути взаємно некорельованими (ортогональними); б) щоб при можливо меншій їх кількості враховувалась значуща частина мінливості вихідних величин. Перерахованим вимогам відповідає компонентний аналіз, який часто в літературі називають методом «емпіричних ортогональних функцій» або «природних ортогональних функцій» (наприклад, [20]).

Компонентний аналіз застосовується при вирішенні різних задач. Однією з них є стискання гідрометеорологічної інформації (значне скорочення кількості інформації при збереженні основного її змісту).

Іншою важливою задачею є фільтрація інформації. Її суть полягає в такому. Поля досліджуваних фізичних величин в атмосфері формуються під дією атмосферних процесів різних масштабів: процесів макромасштабів, синоптичного масштабу, мезомасштабу і процесів дрібнішого масштабу [20]. В результаті ця інформація набуває шумового компонента, зумовленого дрібномасштабними флуктуаціями, похибками вимірів і первинної обробки результатів спостережень. Часто виникає необхідність, залежно від характеру задачі, зосередити увагу на процесах великих масштабів і не враховувати складові, зумовлені впливом процесів дрібного масштабу. Для цього також застосовується компонентний аналіз. Розглянемо коротко його ідеї [12, 20] на прикладі просторових полів деякої гідрометеорологічної величини.

Нехай маємо деяке поле центрованих значень фізичної величини  $\Delta X_j$ :

$$\Delta X_j = \begin{pmatrix} \Delta x_{1j} \\ \Delta x_{2j} \\ \dots \\ \Delta x_{nj} \end{pmatrix}. \quad (7.147)$$

Здійснимо параметризацію цього поля, тобто виразимо поле, визначене значеннями фізичної величини, на множині точок простору за допомогою декількох некорельованих параметрів, які лінійно пов'язані з компонентами вектора (7.147) і містять основну інформацію про поле. В основі вирішення цієї задачі лежить лінійне перетворення початкового поля (7.147) у базисі власних векторів матриці коваріації (або кореляції) полів цієї величини. Матричне рівняння повної проблеми власних значень має вигляд:

$$K_x u_i = \lambda_i u_i. \quad (7.148)$$

У цьому рівнянні  $K_x$  -  $n$ - вимірна матриця коваріації;  $u_i$  -  $i$ -й власний вектор;  $\lambda_i$  - відповідне власне значення матриці  $K_x$ .

Власні значення  $\lambda_i$  і відповідні їм власні вектори

$$u_i = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \dots \\ u_{ni} \end{pmatrix}, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (7.149)$$

розраховуються, наприклад, за методом Якобі [20].

Існує така теорема: власні значення додатно визначеної, симетричної й дійсної матриці є дійсними, додатними й простими числами. Оскільки матриця коваріації задовольняє умови цієї теореми, власні значення мають відзначені в теоремі властивості [12, 20].

Власні значення розташовуються в порядку їх зменшення

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n. \quad (7.150)$$

Першому власному значенню  $\lambda_1$  відповідає перший власний вектор

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \dots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \quad (7.151)$$

другому власному значенню  $\lambda_2$  - відповідає другий власний вектор і так далі.

Якщо матриця коваріації добре зумовлена, тоді перший власний вектор складається тільки з додатних компонентів, у другому спостерігається одна зміна знака компонент, у третьому - дві зміни й т.д. Власні вектори мають важливу особливість, яка визначається співвідношенням:

$$\langle u_i u_j \rangle = u_i' u_j = \delta_{ij} |u_i| |u_j|, \quad (7.152)$$

де  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Вона означає, що скалярний добуток різних власних векторів дорівнює нулю, тобто власні вектори ортогональні.

Найчастіше власні вектори нормуються: замість векторів  $u_i (i = \overline{1, n})$  використовуються власні вектори

$$W_i = \frac{u_i}{|u_i|}. \quad (7.153)$$

Тоді, очевидно,

$$\langle W_i W_j \rangle = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{|u_i| |u_j|} = \delta_{ij} \frac{|u_i| |u_j|}{|u_i| |u_j|} = \delta_{ij}. \quad (7.154)$$

Такі власні вектори називаються ортонормованими. Сукупність ортонормованих власних векторів становить ортогональну матрицю  $W$ , причому:

$$W'W = WW' = E. \quad (7.155)$$

Відзначені властивості власних векторів дозволяють розглядати їх як базис  $n$ - вимірного евклідового простору  $R^n$ . Виходячи з цього, проведемо розкладання вектора  $\Delta X_j$ , який представляє яке-небудь поле

фізичної величини, у цьому базисі. Відповідне перетворення має вигляд:

$$W' \Delta X_j = z_j . \quad (7.156)$$

Оскільки базис власних векторів є ортогональним, то компоненти  $z_{ij} (i = \overline{1, n})$  вектора  $z_j$

$$z_j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \dots \\ z_{ij} \\ \dots \\ z_{nj} \end{pmatrix} \quad (7.157)$$

є лінійно незалежними, а в статистичному сенсі некорельованими.

$$M[z'_i z_j] = \begin{cases} \sigma_{z_i}^2 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} . \quad (7.158)$$

Можна показати, що кожне власне значення має сенс дисперсії ортогонального компонента  $z_i$  фізичних полів, тобто

$$\sigma_{z_i}^2 = \lambda_i . \quad (7.159)$$

Однак з (7.150) випливає, що

$$\sigma_{z_1}^2 > \sigma_{z_2}^2 > \dots > \sigma_{z_n}^2 . \quad (7.160)$$

Власні значення мають ще одну важливу властивість:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = t_r K_x . \quad (7.161)$$

Індексом  $t_r$  - позначається слід матриці (сума елементів матриці, розташованих на головній діагоналі). Оскільки на головній діагоналі

матриці коваріації розташовані дисперсії, тоді

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 . \quad (7.162)$$

Це означає, що сума всіх власних значень дорівнює сумарній дисперсії фізичного поля. Зі співвідношення (7.160) випливає, що здійснюється розподіл дисперсій: дисперсія першого ортогонального компонента  $Z_1$  є найбільшою, дисперсії другого і наступних ортогональних компонентів, як правило, швидко зменшуються. Перші ортогональні компоненти  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ , дисперсії яких становлять основну частину сумарної дисперсії, концентрують інформацію про найбільш великомасштабні особливості фізичних об'єктів. Виходячи з того, яким чином визначаються головні компоненти (7.156), можна сказати, що відповідні їм власні вектори також вміщують інформацію про особливості найбільш великомасштабних процесів, формуючи статистичну структуру полів фізичних величин.

Як ми вже зазначали вище, за допомогою множини власних векторів матриць коваріації можна одержати замість випадкового вектора  $X$  вектор ортогональних компонентів  $Z$ , дисперсіями яких є власні значення. При цьому сумарна дисперсія поля розподіляється так, що найбільша її частина припадає на декілька перших ( $k$ ) ортогональних компонентів  $Z_i (i = \overline{1, k})$ , які є головними компонентами. Саме вони містять у собі найбільш важливу інформацію про структуру полів, які досліджуються. Для визначення числа  $k$  головних компонентів необхідно знайти частину  $\eta_k$  сумарної дисперсії поля, яка відповідає найбільш великомасштабним процесам, за допомогою такого виразу:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} . \quad (7.163)$$

Число  $k$ , при якому  $\eta \geq \eta_k$  визначається так, щоб зберегти найбільш важливу інформацію про статистичну структуру полів досліджуваної фізичної величини.

## 7.4 Статистична інтерполяція метеорологічних полів

### 7.4.1 Поняття про інтерполяцію й екстраполяцію

Інтерполяцією називається визначення функції  $f(x_0)$  в точці  $x_0$  за умови, що є відомими значення хоча б в одній з точок відрізка  $x \leq x_1$  і хоча б в одній з точок відрізка  $x \geq x_2$ . Точка  $x_0$  розташовується між точками  $x_1$  і  $x_2$ , тобто  $x_1 < x_0 < x_2$  [4, 20].

Екстраполяцією називається визначення функції в точці  $x_0$ , якщо є відомим хоча б одне із значень цієї функції в точці  $x \leq x_1$ , або в точці  $x \geq x_2$ . У першому випадку  $x_0 > x_1$ , у другому -  $x_0 < x_2$  [4, 20].

Визначення залишаються незмінними і у тому разі, коли йдеться про функцію  $f(\rho)$ , де  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

Інтерполяція і екстраполяція використовується в багатьох метеорологічних задачах. Охарактеризуємо деякі з них.

1. Прогноз метеорологічної величини є не що інше, як екстраполяція цієї величини на визначений момент часу.

2. Для того, щоб реалізувати чисельні методи прогнозу метеорологічного поля, треба знати значення метеорологічної величини у вузлах деякої регулярної сітки точок. Відомими ж є значення цієї величини на мережі метеорологічних станцій, які розташовуються на різних відстанях одна від одної. Отже, треба вирішити задачу інтерполяції метеорологічної величини із мережі метеорологічних станцій на вузли регулярної сітки точок.

3. На основі дослідження точності інтерполяції в горизонтальному напрямку вирішується задача оптимізації мережі метеорологічних станцій.

4. За допомогою інтерполяції за часом вирішується задача визначення оптимальних термінів метеорологічних спостережень.

5. Бувають випадки, коли при критичному контролі результатів метеорологічних спостережень на деякій метеорологічній станції виникають сумніви відносно значення того чи іншого параметра атмосфери. За допомогою інтерполяції цієї метеорологічної величини з інших метеорологічних станцій в точку розташування цієї станції проводиться контроль сумнівного значення метеорологічної величини.

За способом реалізації методи інтерполяції і екстраполяції поділяють на три види: динамічну, статистичну та формальну. Динамічна базується на рівняннях гідродинаміки атмосфери; статистична ґрунтується на закономірностях, визначених шляхом статистичного аналізу масового матеріалу; формальна - являє собою апроксимацію метеорологічного поля за допомогою тієї чи іншої системи функцій.

Прикладом формальної інтерполяції є апроксимація метеорологічного поля  $f(x, y)$  поліномом

$$f(x, y) = A_1 x^3 + A_2 y^3 + A_3 x^2 y + A_4 x y^2 + A_5 x y + A_6 x^2 + A_7 y^2 + A_8 x + A_9 y + A_{10} \quad (7.164)$$

Поліном (7.164) дає прийнятну точність апроксимації гладких полів, таких як, наприклад, поля осереднених за досить великий проміжок часу значень температури, атмосферного тиску, складових вектора вітру на визначеному рівні атмосфери. Досить часто для апроксимації метеорологічних полів використовується їх розклад по базисних поліномах

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^k a_{mn} P_m(x) P_n(y). \quad (7.165)$$

У якості поліномів  $P_m(x)$  і  $P_n(y)$  виступають ортогональні поліноми Чебишева, Ерміта, Лежандра, Лаггера, експоненціальні поліноми тощо.

Нехай маємо значення метеорологічної величини у точках, що визначаються радіусами – векторами  $\rho_i$ :  $f(\rho_1); f(\rho_2); f(\rho_3); \dots; f(\rho_n)$ . Ставиться задача проінтерполювати значення функції в точку  $\rho_0$ . Позначимо його через  $\hat{f}(\rho_0)$ . Екстрапольоване значення функції, очевидно, можна записати таким чином:

$$\hat{f}(\rho_0) = F[f(\rho_1), f(\rho_2), \dots, f(\rho_n)]. \quad (7.166)$$

Вигляд функціонала  $F$  залежить від методу інтерполяції і положення точки  $\rho_0$  відносно точок  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ . Позначивши точне значення функції через  $f(\rho_0)$ , отримаємо похибку інтерполяції

$$\delta_f(\rho_0) = \hat{f}(\rho_0) - f(\rho_0). \quad (7.167)$$

Виникає питання, від чого залежить ця похибка? Справа у тому, що в дійсності ми оперуємо не з функціями  $f(\rho_i)$ , а з функціями  $\tilde{f}(\rho_i)$ , які містять похибку вимірювання  $\delta_f(\rho_i)$ , тобто

$$\tilde{f}(\rho_i) = f(\rho_i) + \delta_f(\rho_i). \quad (7.168)$$

Таким чином,



$$\hat{f}(\rho_0) = F[\tilde{f}(\rho_1), \tilde{f}(\rho_2), \dots, \tilde{f}(\rho_n)]. \quad (7.169)$$

Зрозуміло, що від  $\delta_f(\rho_i)$  будуть залежати й результати інтерполяції.

Часто в метеорологічних задачах використовують у якості функціонала  $F$  лінійну форму, тобто

$$\hat{f}(\rho_0) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}(\rho_i). \quad (7.170)$$

Інтерполяція, що проводиться за допомогою рівності (7.170), називається лінійною інтерполяцією. Коефіцієнти  $a_i$  є ваговими множниками (вагами).

#### 7.4.2 Точність інтерполяції

Як зазначалося раніше, при інтерполяції будь-якої метеорологічної величини виникає похибка, яка визначається рівністю (7.168). Мірою цієї похибки будемо вважати її середній квадрат [20]

$$E^2 = \overline{[\hat{\delta}_f(\rho_0)]^2}, \quad (7.171)$$

де риска зверху позначає операцію осереднення.

Покажемо, що у випадку лінійної інтерполяції середній квадрат похибки інтерполяції визначається характеристиками статистичної структури поля метеорологічної величини, яке інтерполюється, а також похибки вимірювань. Для цього підставимо в формулу (7.171) вирази (7.167) і (7.170). Будемо мати

$$E^2 = \overline{\left[ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}(\rho_i) - f(\rho_0) \right]^2}. \quad (7.172)$$

Функції, що містяться у виразі (7.172), можна записати таким чином:

$$\tilde{f}(\rho_i) = \bar{f}(\rho_i) + \tilde{f}'(\rho_i), \quad (7.173)$$

$$f(\rho_0) = \overline{f(\rho_0)} + f'(\rho_0). \quad (7.174)$$

де штрихами позначаються пульсації функцій. З урахуванням цього, формула (7.172) перетворюється, тобто

$$E^2 = \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right] + \left[ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}'(\rho_i) - f'(\rho_0) \right] \right\}^2. \quad (7.175)$$

Праву частину рівності (7.175) піднесемо до другого степеня. Отримаємо:

$$E^2 = \left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}'(\rho_i) - f'(\rho_0) \right]^2 + 2 \left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}'(\rho_i) - f'(\rho_0) \right]. \quad (7.176)$$

Проаналізуємо праву частину виразу (7.176), використовуючи властивості оператора осереднення. Очевидно

$$\left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right]^2 = \left[ \sum_{i=1}^n a_i \overline{f(\rho_i)} - \overline{f(\rho_0)} \right]^2 = \left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right]^2 = (\bar{\delta})^2 \quad (7.177)$$

є квадратом середньої похибки інтерполяції

$$\left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right] \left[ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}'(\rho_i) - f'(\rho_0) \right] = \left[ \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_0) \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n a_i \overline{\tilde{f}'(\rho_i)} - \overline{f'(\rho_0)} \right] = 0,$$

оскільки

$$\tilde{f}'(\rho_i) = \bar{f}'(\rho_0) = 0.$$

Позначимо

$$E'^2 = \left[ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}'(\rho_i) - f'(\rho_0) \right]^2 \quad (7.178)$$

Тоді маємо

$$E^2 = E'^2 + (\bar{\delta})^2 \quad (7.179)$$

Розглянемо смисл складової  $E'^2$ . Для цього у рівності (7.178) врахуємо, що

$$\tilde{f}'(\rho_i) = \tilde{f}(\rho_i) - \bar{f}(\rho_i) = f(\rho_i) - \bar{f}(\rho_i) + \delta_f(\rho_i) = f'(\rho_i) + \delta_f(\rho_i).$$

Отже

$$E'^2 = \left[ \sum_{i=1}^n a_i [\tilde{f}'(\rho_i) + \delta_f(\rho_i)] - f'(\rho_0) \right]^2. \quad (7.180)$$

Якщо піднести до другого степеня праву частину рівняння (7.180), то отримаємо:

$$\begin{aligned} E'^2 = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \{ \overline{f'(\rho_i) f'(\rho_j)} + \overline{\delta_f(\rho_i) f'(\rho_j)} + \overline{\delta_f(\rho_j) f'(\rho_i)} + \overline{\delta_f(\rho_i) \delta_f(\rho_j)} \} - \\ & - 2 \sum_{i=1}^n a_i [\overline{f'(\rho_i) f'(\rho_0)} - \overline{\delta_f(\rho_i) f'(\rho_0)}] + \overline{[f'(\rho_0)]^2}. \end{aligned} \quad (7.181)$$

або, оскільки

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f'(\rho_i)f'(\rho_j)} = K_f(\rho_i, \rho_j), \\ \overline{f'(\rho_i)f'(\rho_0)} = K_f(\rho_i, \rho_0), \\ \overline{f'(\rho_i)\delta_f(\rho_j)} = \overline{f'(\rho_j)\delta_f(\rho_i)} = K_{f\delta}(\rho_i, \rho_j), \\ \overline{\delta_f(\rho_i)f'(\rho_i)} = K_{f\delta}(\rho_i, \rho_0), \\ \overline{[f'(\rho_0)]^2} = \sigma_f^2(\rho_0), \end{array} \right. \quad (7.182)$$

$$\begin{aligned} E'^2 = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j [K_f(\rho_i, \rho_j) + 2K_{f\delta}(\rho_i, \rho_j) + K_\delta(\rho_i, \rho_j)] - \\ & - 2 \sum_{j=1}^n a_i [K_f(\rho_i, \rho_0) - K_{f\delta}(\rho_i, \rho_0)] + \sigma_f^2(\rho_0). \end{aligned} \quad (7.183)$$

Як відомо, виконуються такі умови:

- похибки вимірювань не корелюються з величиною, що вимірюється. Тому  $K_{f\delta}(\rho_i, \rho_j) = 0; \forall i, j = \overline{0, n}$ ;

- похибки вимірювань в різних точках поля не корелюють між собою, тобто

$$K_\delta(\rho_i, \rho_j) = \begin{cases} \sigma_\delta^2(\rho_i), & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \quad (7.184)$$

З урахуванням зазначених умов рівняння (7.183) спрощується і має вигляд

$$E'^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_f(\rho_i, \rho_j) + \sum_{j=1}^n a_i^2 \sigma_\delta^2(\rho_i) - 2 \sum_{i=1}^n a_i K_f(\rho_i, \rho_0) + \sigma_f^2(\rho_0). \quad (7.185)$$

Отже, рівності (7.179) і (7.185) свідчать про те, що середній квадрат похибки інтерполяції  $E^2$  складається з квадрата середньої похибки інтерполяції, а також величини  $E'^2$ , яка повною мірою визначається характеристиками статистичної структури поля, яке інтерполюється, і дисперсією похибки вимірювань метеорологічної величини в точках поля.

### 7.4.3 Оптимальна інтерполяція

Оперуючи з лінійною моделлю (7.170), ми прийняли припущення, що коефіцієнти  $a_i$  є знаними величинами. Але в дійсності ці коефіцієнти підлягають визначенню на основі інформації про статистичну структуру полів. Ясно, що метод визначення цих коефіцієнтів повинен бути таким, що б він давав змогу знайти найкращі у певному смислі, значення коефіцієнтів. Таким чином, ця задача є задачею оптимізації моделі (7.170). Щоб вирішити таку оптимізаційну задачу, треба, по-перше, визначити критерій якості [4, 20].

Природно вважати, що таким критерієм є мінімум середнього квадрата похибки інтерполяції  $E^2$ . Отже, задача полягає у тому, щоб знайти такі коефіцієнти  $a_i (i = \overline{1, n})$ , які б приводили до мінімуму середнього квадрата інтерполяції. З врахуванням рівності (7.179) сформульована умова має такий вигляд

$$\frac{\partial E'^2}{\partial a_i} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (7.186)$$

Застосовуючи зазначену операцію диференціювання до рівняння (7.185), маємо

$$\frac{\partial E'^2}{\partial a_i} = 2 \sum_{j=1}^n a_j [K_f(\rho_i, \rho_j) + \sigma_\delta^2(\rho_j)] - 2K_f(\rho_0, \rho_i) = 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (7.187)$$

або

$$\sum_{j=1}^n a_j [K_f(\rho_i, \rho_j) + \sigma_\delta^2(\rho_j)] = K_f(\rho_0, \rho_i), \quad (i = \overline{1, n}). \quad (7.188)$$

Оскільки характеристики кореляційної структури метеорологічних полів і статистичні характеристики похибок вимірювань відомі (принципи досліджень кореляційного аналізу метеорологічних полів розглядалися в попередніх розділах), можна позначити

$$K_{ij} = K_f(\rho_i, \rho_j) + \sigma_\delta^2(\rho_j) \quad (7.189)$$

і тоді маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} a_j = K(\rho_i, \rho_0) \quad (7.190)$$

відносно шуканих коефіцієнтів  $a_j$  лінійної інтерполяційної моделі (7.170). Систему рівнянь (7.190) можна записати в матричній формі

$$KA = K_0 \quad (7.191)$$

якщо позначити

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, \quad (7.192)$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} K_f(\rho_1, \rho_0) \\ K_f(\rho_2, \rho_0) \\ \dots \\ K_f(\rho_n, \rho_0) \end{pmatrix}, \quad (7.193)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (7.194)$$

Якщо  $|K| \neq 0$ , то розв'язок системи (7.191) буде мати вигляд

$$A = K^{-1}K_0. \quad (7.195)$$

При вирішенні задачі оптимальної інтерполяції виникає ряд труднощів. Якщо дисперсії похибок вимірювання, взагалі кажучи, відомі, то коваріаційні моменти треба розраховувати на основі множини полів метеорологічної величини, що визначена в  $n$  точках поля. Для цього, по-перше, треба строго закріпити положення точок  $\rho_i$  і  $\rho_j$ . В дійсності при інтерполяції функції  $f$  в точку  $\rho_0$  визначається деяка кількість впливових точок. Але заздалегідь невідомо, чи буде значення функції  $f(\rho)$  у цих точках знаним на час виконання інтерполяції. Добре відомо, що в

метеорологічній інформації бувають прогалини. Дуже не густою є метеорологічна мережа на океанічних просторах і дуже часто виникає потреба використовувати корабельну інформацію. Але положення корабля наперед визначити неможливо.

Задача значно спрощується для однорідних та ізотропних полів.

Для них, як відомо,  $\bar{f} = const$  ;  $\sigma_f^2 = const$ , а  $K_f(\rho_i, \rho_j) = K_f|\rho_i - \rho_j| = K_f(d_i)$ , де  $d_i$ - відстані між точками поля. У більшості випадків метеорологічні поля не мають властивостей однорідності та ізотропності. Проте часто є можливість вирішити задачу оптимальної інтерполяції за допомогою модифікованих полів, які мають зазначені властивості.

Розглянемо функції:

$$\varphi_0 = \frac{f'(\rho_0)}{\sigma_f(\rho_0)}, \quad (7.196)$$

$$\varphi_i = \frac{\tilde{f}'(\rho_i)}{\sigma_f(\rho_i)}. \quad (7.197)$$

Оскільки в чисельниках цих рівностей розташовуються пульсації функцій, тобто відхилення їх від середнього значення, то

$$\varphi_i = 0, \quad \forall i = \overline{0, n}, \quad \sigma_{\varphi_i}^2 = 1, \quad \forall i = \overline{0, n},$$

$K_\varphi(\rho_i, \rho_j) = r_f(\rho_i, \rho_j)$  - коваріаційна функція. З достатньою для практики точністю можна припустити, що  $r_f(\rho_i, \rho_j) = r_f(d_i)$ , тобто, що поля функції  $\varphi(\rho_i)$ - однорідні і ізотропні.

Якщо

$$\hat{f}'(\rho_0) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}'(\rho_i), \quad (7.198)$$

то з урахуванням рівностей (7.196) і (7.197) маємо

$$\hat{\varphi}(\rho_0) = \sum_{i=1}^n b_i \varphi(\rho_i), \quad (7.199)$$

де/

$$b_i = \frac{\sigma_f(\rho_i)}{\sigma_f(\rho_0)} a_i. \quad (7.200)$$

Вирішуючи задачу оптимальної інтерполяції для функції  $\varphi(\rho_i)$ , що дає можливість без перелічених вище труднощів знайти коефіцієнти інтерполяції  $b_i$ , за допомогою рівності (7.200) можна, знаючи середні квадратичні відхили метеорологічної величини в точках поля, отримати коефіцієнти  $a_i$ , тобто вигляд інтерполяційного полінома для вихідної метеорологічної величини  $f(\rho)$ .

Задача оптимальної інтерполяції - дуже важлива. На її основі здійснюється об'єктивний аналіз метеорологічних полів, який зводиться до визначення значень метеорологічної величини у вузлах регулярної сітки точок, а також вирішується задача узгодження полів метеорологічних величин при реалізації чисельних (гідродинамічних) методів метеорологічних прогнозів.

#### *Запитання для самоперевірки*

1. Система яких векторів може бути базисом багатовимірного простору?
2. Які вектори є ортогональними?
3. Що таке норма вектора?
4. Які функції є ортогональними?
5. Наведіть приклади ортогональних функцій?
6. Що таке інтерполяція функцій?
7. Що таке екстраполяція функцій?
8. Які задачі в гідрометеорології та екології вирішуються шляхом екстраполяції?
9. У чому полягає розв'язок основної задачі компонентного аналізу?
10. Які компоненти двовимірних фізичних полів є головними компонентами?
11. Яку важливу задачу дослідження фізичних параметрів можливо вирішувати за допомогою неканонічного розкладу випадкової функції?
12. Які труднощі можуть виникнути при вирішенні задачі оптимальної інтерполяції?



## ЛІТЕРАТУРА

1. Андерсон Т.В. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
2. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с.
3. Виленкин С.Д. Статистическая обработка результатов исследований случайных функций. М.: Энергия, 1979. 319 с.
4. Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерполяции метеорологических данных. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 360 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1978, 362 с.
7. Казакевич Д.И. Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 228 с.
8. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
9. Коняев К.В. Спектральный анализ случайных океанологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 206 с.
10. Лоева И.Д., Евсеева Л.П. Статистический анализ временных рядов. Л.: Труды ГГО. 1983. Вып.475. С.101-108.
11. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. 387 с.
12. Майборода Л. А., Школьный Е. П. Атмосфера и управление движением летательных аппаратов. СПб: ВИТИ, 2010. 572 с.
13. Мышкис А.А. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969, 659 с.
14. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428 с.
15. Пикунов В.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т2.М.: Наука, 1985. 560 с.
16. Пугачев В.С. Теория случайных функций. М.: Физматгиз, 1962. 883 с.
17. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.
18. Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988, 383 с.
19. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. М.: Машиностроение, 1968. 248 с.
20. Школьный Е.П., Лоева И.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації. Підручник. К.: Вища школа, 1999. 599 с.
21. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 279 с.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

### Б

базис – 84, 98  
- ортонормований – 98  
- трикутний – 85  
білий шум – 52

### В

визначник Грама – 100  
власне значення – 115  
власний вектор – 115  
властивість ергодична – 25

### Г

головна компонента – 116

### Д

дельта-функція – 46  
дисперсія випадкової функції – 12

### Е

екстраполяція – 119

### З

закон розподілу випадкової функції – 9  
згладжувальна функція – 75  
згортка функції – 49

### І

інтеграл від випадкових функцій – 21  
інтерполяція оптимальна – 124

### Й

ймовірнісні характеристики  
- випадкових функцій – 11  
- стаціонарних випадкових функцій – 25

### К

канонічний розклад випадкової функції – 90  
когерентність – 71  
ко-спектр – 68  
Кронекера символ – 89

### М

математичне сподівання випадкової функції – 11  
матриця трикутна – 86  
множник Гіббса – 81

### Н

неканонічний розклад випадкової функції – 93

### О

оператор лінійний – 15  
особливі точки – 59  
ортогональні поліноми  
- експоненціальні – 101  
- Лежандра – 105  
- Чебишева – 108

### П

полюси – 51  
похідна випадкової функції – 18

перетворення  
- Фур'є – 35  
- лінійне – 16, 55  
періодичність – 78  
процеси стаціонарні випадкові – 24

## Р

рекурентні формули – 103  
рівність Парсеваля – 111  
рівняння лінійні диференціальні –  
54, 56  
розподіл ймовірностей – 9  
розподіли випадкової функції  
- багатовимірний – 10  
- двовимірний – 10  
- одновимірний – 10  
ряди Фур'є – 35, 99

## С

спектр  
- амплітудний – 70  
- взаємний – 67  
- стаціонарної випадкової  
функції – 31  
- лінійчатий – 32  
- квадратурний – 68

## Т

трендова компонента – 77

## Ф

Функція  
- аналітична – 50, 51  
- Бартлета – 61, 81  
- вагова – 49, 81  
- випадкова – 7  
- взаємна коваріаційна – 13  
- експоненціальна – 101

- згладжувальна – 75  
- коваріаційна – 12  
- кореляційна – 12  
- координатні – 91  
- Парзена – 61  
- передаточна – 51  
- Хенінга – 61

фільтр Тюккі – 82

## Щ

щільність спектральна – 35

Навчальне видання

**ЛОЄВА Інеса Дмитрівна  
СЕРГА Едуард Миколайович,  
ШКОЛЬНИЙ Євген Павлович**

# **МЕТОДИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ**

**Навчальний посібник**

Підп. до друку \_\_\_\_\_ Формат 60×84/16  
Умовн. друк. арк. . Наклад \_\_\_\_\_ прим. Зам № \_\_\_\_\_

---

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, вул. Львівська, 15

---