МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський державний екологічний університет

Ю. М. Аркатов

МАТЕМАТИКА

для слухачів підготовчого відділення

Частина 1

Зміст

ПЕРЕДМОВА……………………………………………………………………………..5

ЛЕКЦІЯ 1

ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

Розділ 1.

ПОНЯТТЯ ДЕСЯТКОВОГО І ЗВИЧАЙНОГО ДРОБУ

1.1Система числення. Поняття дробу……………………………… 7

1.2 Поняття десяткового дробу………………………………………… 7

1.3 Типи чисел………………………………………………………………… 8

1.4. Звичайні дроби………………………………………………………… 9

Розділ 2.

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Числові множини……………………………………………………….. 12

2.2. Геометричне зображення дійсних чисел…………………… 14

2.3. Проміжок, інтервал, відрізок…………………………………... 15

2.4. Геометричне зображення проміжків…………………………….. 16

2.5. Об'єднання і пересічення числових множин………………. 17

Розділ 3.

ПОНЯТТЯ І ВЛАСТИВОСТІ ДІЙ НАДДІЙСНИМИ ЧИСЛАМИ

3.1. Поняття операції…………………………………………………….. 19

3.2. Поняття операції складання і множення. Властивість комутативності………………………………………………………. 20

3.3. Поняття операції піднесення до степеня і потенціюванн……… 21

3.4. Тригонометричні операції синус, косинус, тангенс,котангенс… 24

3.5. Унарні і бінарні операції……………………………………….. 27

3.6. Поняття прямої і зворотної операції над дійсним числом……… 27

3.7. Поняття області визначення операції

(або області допустимих значень операції)………………………. 29
3.8. Віднімання як операція зворотна до операції складання……… 30
3.9. Ділення як операція, зворотна до операції множення……..…….31
3.10. Добуття кореня як операція зворотна, до операції піднесеннядо степені……………….. 31
3.11. Логарифмування як операція, зворотна до операції потенціювання………………………………………………… 34
3.12. Зворотні тригонометричні операції……………………… 36

ЛЕКЦІЯ 2

МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ І ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Розділ 1

МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ

1.1 Змінна величина і математичний вираз…………………………… 39
1.2. Область визначення математичного виразу……………………….. 42
1.3. Корінь математичного виразу………………………………... 45
1.4. Поняття математичного тотожності……………………………… 45
1.5. Поняття рівняння та його розв'язання……………………………… 46
1.6. Поняття функції………………………………………………… 48
1.7. Поняття нерівності……………………………………………………51

Розділ 2

БАГАТОЧЛЕНИ, ОДНОЧЛЕНИ І ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Поняття одночлена…………………………………………… 52
2.2. Поняття багаточлена………………………………………………….54
2.3. Дії над одночленами і багаточлена-ми………………………………..56
2.4. Формули скороченого множен-ня……………………………………60
2.5. Розкладання багаточлена на множни-ки………………………………...63

Розділ 3

АЛГЕБРАЇЧНІ ДРОБИ І ДІЇ НАД НИМИ

3.1. Поняття алгебраїчного дробу…………………………………………65

3.2. Область допустимих значень (ОДЗ) математичного виразу..........66
3.3. Основна властивість алгебраїчного дробу 68
3.4. Скорочення дробів.. 69
3.5. Дії з алгебраїчними дробами: додавання (віднімання) дробу 70
3.6. Дії з алгебраїчними дробами: множення дробів.......................... 74
3.7. Дії з алгебраїчними дробами: ділення дробів...........................75

ЛЕКЦІЯ 3

РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Розділ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Поняття рівняння...76
1.2. Поняття розв’язання рівняння з однією змінною величиною...............77
1.3. Область допустимих значень рівняння з однією змінною величиною ... 81
1.4. Поняття розв’язання рівняння з двома змінними величинами...............82
1.5. Поняття системи і сукупності рівнянь... 84

Розділ 2

КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ І ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЇХ РОЗВ’ЯЗАНІВ

2.1. Геометричне зображення розв’язківрівнянь і систем рівнянь...............87
2.2. Типи рівнянь і стандартна форма їх запису.................................91

ЛЕКЦІЯ 4

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

Розділ1

ДЕКАРТОВА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

1.1. Координати точки.. 105
1.2. Система координат... 105
1.3. Геометрична інтерпретація поняття координата точки............ 106

Розділ 2

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

2.1. Поняття вектора на площині і його геометрична інтерпретація......108
2.2. Координати вектора.. 109
2.3. Модуль вектора.. 110

2.4. Колінеарні, ортогональні і рівні вектори………………………….. 110
2.5. Дії над векторами………………………………………………… 112
2.6. Формула обчислення кута між векторами………………………… 115

Література………………………………………………………………… 117

ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій з дисципліни«Математика» призначений для самостійного вивчення курсу "Елементарна математика" при дистанційній формі навчання.Перша частина коспекту складається з чотирьох лекцій.

Впершій лекції розглядаються основні математичні поняття – числа, числові множини і властивостіоперацій (дії) над числом.

Десятковий і звичайний дроби розглядаються як можливі форми запису чисел в десятковій системі числення. Визначаються основні поняття, пов'язані з десятковим і звичайним дробами.

Виходячи з аналізу структури десяткового дробу, вводяться поняття натурального, цілого, раціонального і дійсного числа. Сукупності тих або інших типів чисел визначаються як числові множини. Так, наприклад, множина всіх можливих десяткових дробів визначається як множина дійсних чисел.

Розглядається питання, пов'язане з геометричною інтерпретацією дійсних чисел. Для цього вводиться поняття числової осі і поняття координати точки на цій осі. Наведені приклади зображення числовихмножин на числовій осі: проміжки, інтервали, відрізки і дій об'єднання і перетин цих множин.

Розглянуто визначення поняття прямої і зворотної операцій над дійсним числом і основні властивості операцій, які використовуються в елементарній математиці; ознаки ділення цілих чисел без залишку; поняття найменшого загального кратного і найбільшого загального дільника; алгоритм розкладання цілого числа на прості множники; властивості звичайних дробів і правила виконання дій складання, віднімання, множення і ділення над ними.

У другій лекції проведена класифікація математичних виразів і розглянуті поняття, пов'язані з ними.

Третя лекція є введенням в тему «Методи розв’язання рівнянь в елементарній математиці».

У четвертій лекціїв максимально короткій і акцентованій формі викладена необхідна математична інформація з теми «Вектори на площині», обсяг якої регламентується програмою зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Кожна лекція містить велику кількість розв’язаних завдань, які або пояснюють зміст визначення того чи іншого поняття, або ілюструють метод (алгоритм) розв’язання стандартної задачі.

При роботі з лекціями варто звернути увагу на слова і словосполучення виділені *курсивом*. Таким чином виділяється або ім'я нового математичного поняття, або те, що важливо для подальшої роботи, або при вирішенні завдань.

ЛЕКЦІЯ 1

ЧИСЛА І ДІЇ НАД НИМИ

Розділ 1

ПОНЯТТЯ ДЕСЯТКОВОГО І ЗВИЧАЙНОГО ДРОБУ

1.1. Система числення. Поняття дробу

Спосіб запису чисел за допомогою спеціальних знаків *(цифр)* називається *системою числення*, а кількість використовуваних цифр називається *основою* цієї *системи числення*.

Якщо, наприклад, використовувати такі десять знаків:

$$\Phi = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \tag{1.1}$$

то система числення має основу рівну десяти і називається *десятковою системою числення*.

У десятковій системі числення числа записуються у вигляді дробів, які за способом запису поділяються на два типи: *десяткові дроби і звичайні дроби*.

1.2. Поняття десяткового дробу

Десятковий дріб – *це форма (спосіб) запису числа*, який має таку структуру:

$$\pm\, a_1a_2a_3 \ldots a_n , b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots; \tag{1.2}$$

де a_i і b_i – цифри, тобто: $a_i = 0,1,2,\ldots,9$ и $b_i = 0,1,2,\ldots,9$, $\quad i = 1,2,3,\ldots$.

Зауваження

1. Кома у формулі (1.2) розділяє десятковий дріб на дві частини: цифри, розташовані зліва від коми, утворюють *цілу частину* десяткового дробу, а цифри, розташовані праворуч від коми – *дробову частину*. Наприклад, в десятковому дробу *237,67* цілу частину утворюють цифри *237*, а дробову частину – цифри *67*.

2. Десятковий дріб може бути додатним (знак «+» зазвичай не пишуть) і від'ємним, йому відповідає знак « – » у формулі (1.2).
3. Три крапки в кінці формули (1.2) означають, що кількість цифр в дробовій частині є необмеженою. В цьому випадку *десятковий дріб називається нескінченним.* Якщо ж дробова частина десяткового дробу містить кінцеве число цифр в дробовій частині, то дріб називається *скінченним*. Наприклад, дріб *3,1425926* є скінченним, а дріб 3,1425926… – нескінченним.
4. Якщо десятковий дріб нескінченний, але якась послідовність (група) цифр в дробовій частині, починаючи з деякого місця, періодично повторюється, то дріб називається *періодичним*. Наприклад, нескінченний дріб *1,73252525…* є періодичним, оскільки послідовність, що складається з двох цифри *2* і *5,* періодично повторюється. Для періодичних дробів визначена спеціальна форма запису. Наприклад: *1,73252525… = 1,73(25).*

1.3. Типи чисел

Залежно від того як влаштована дробова частина десяткового дробу, числу привласнюється відповідне ім'я.

- *Цілі числа.* Якщо дробова частина десяткового дробу дорівнює нулю, тобто всі цифри $b_i = 0$:

$$\pm a_1 a_2 \ldots a_n, 00\ldots = +a_1 a_2 \ldots a_n; \qquad (1.3)$$

  то таке число називається *цілим*. Цілими є, наприклад, наступні числа: *0; -1; 1; -2; 2; -3; 3* і так далі.
- *Натуральні числа.* Додатні цілі числа (1.3) називаються натуральними числами, тобто: *1, 2, 3, 4* і так далі. Число «нуль» є цілим, але не є натуральним числом.
- *Раціональні числа.* Числа, які можна записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного дробу, називаються раціональними. Наведемо декілька прикладів раціональних чисел: *17,35; 0,001; -2,3; 3,43575757…=3,43(57).*
- *Дійсні числа.* Будь-яке число, яке можна записати у вигляді десяткового дробу (1.2.1) називається дійсним.

1.4. Звичайні дроби

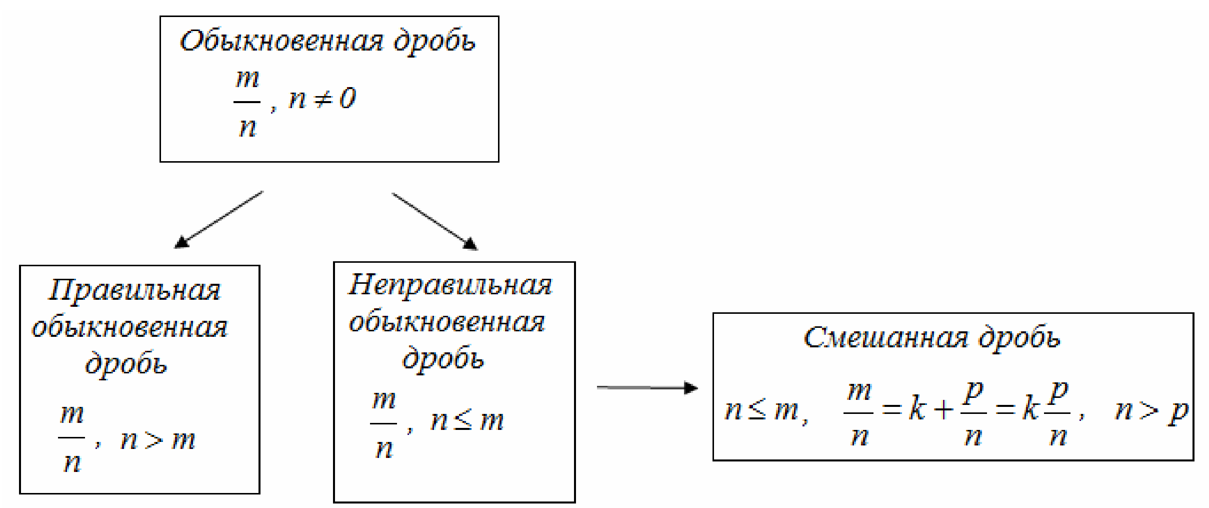
Число, записане у вигляді:

$$\frac{m}{n}, \qquad (1.4)$$

називається *звичайним дробом*. У формулі (1.4) горизонтальна риса називається *дробовою рискою*, а m і $n \neq 0$ – цілі числа, причому число m, розташоване вище за дробову риску називається *чисельником дробу*, а число n, розташоване нижче за дробову риску, – *знаменником*.

Зауваження.

1. Умова $n \neq 0$ у формулі (1.4.1) означає, що дріб вигляду $\frac{m}{0}$ не має сенсу (не існує).
2. Дріб (1.4.1) називається *правильним*, якщо його знаменник більший від чисельника, тобто $n > m$. В разі, якщо: $n \leq m$, дріб називається *неправильним*. Так, наприклад, $\frac{4}{17}$ – це правильний дріб (чисельник 4 менший від знаменника 17), а $\frac{7}{3}$ – неправильний (чисельник 7 більший вид знаменника 3).
3. Дріб, записаний у вигляді суми цілого числа k і правильного дробу $\frac{m}{n}$, тобто: $k + \frac{m}{n}$, називається *мішаним дробом* і записується так: $k\frac{m}{n}$. Наприклад, число, записане у вигляді: $4\frac{2}{3}$, слід сприймати так: $4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.



- Якщо дріб від’ємний, то чисельник і знаменник дробу мають *різні знаки:*

$$\frac{m}{n}<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m>0, \\ n<0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m<0, \\ n>0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

- Якщо дріб додатний, то чисельник і знаменник дробу мають *однакові знаки*:

$$\frac{m}{n}>0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m>0, \\ n>0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m<0, \\ n>0. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Зауваження

1. Якщо два і більше математичних виразів за сенсом даного завдання «логічно сполучені» один з одним сполучником «і», то їх об'єднують за допомогою *фігурної дужки*. Якщо ж доречний союз «або», то – квадратні дужки.

Наприклад, у формулі (1.5) перша фігурна дужка $\begin{cases} m>0, \\ n<0, \end{cases}$ сполучає дві нерівності, які логічно зв'язані одна з одною сполучником «і»: $m>0$ і $n<0$.

2. Наявність сполучника «або» у формулах (1.5) і (1.6) означає, що дві фігурні дужки в цих формулах слід було б об'єднати за допомогою *квадратної дужки* таким чином:

$$\frac{m}{n}<0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>0, \\ n<0; \end{cases} \\ \begin{cases} m<0, \\ n>0; \end{cases} \end{array}\right. \frac{m}{n}>0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>0, \\ n>0, \end{cases} \\ \begin{cases} m<0, \\ n>0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1.7)$$

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Числові множини

Термін «*множина*» використовують для позначення сукупності помітних між собою об'єктів довільної природи, які можна розглядати як одне ціле. Ці об'єкти називаються *елементами множини*.

Якщо елементами множини є числа, то вона називається *числовою множиною*. Залежно від того, які види чисел є її елементами, числовій множини привласнюється відповідна назва. Розглянемо деякі з числової множин.

Множина натуральних чисел (позначається буквою N).

Її елементами є всі натуральні числа. Якщо a – натуральне число, то факт *приналежності* цього числа множини натуральних чисел символічно записується так: $a \in N$, ($\in$ – символ *«належати»*). Оскільки кількість елементів цієї множини необмежено велика, то повний список елементів записати неможливо, але декілька перших елементів випишемось:

$$N = \{1,2,3,\ldots\}. \tag{2.1}$$

Множина цілих чисел (позначається буквою Z).

Елементами цієї множини є всі цілі числа. Оскільки кожне натуральне число є цілим, то множина натуральних чисел N є частиною *(підмножиною)* множини цілих чисел Z. Список елементів цієї множини виглядатиме так:

$$Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}. \tag{2.2}$$

Факт включення множини N в множину Z символічно записується так: $N \subset Z$ ($\subset$– символ «*включення*»).

Множина раціональних чисел (позначається буквою Q).

Елементами множини Q є всі раціональні числа, тобто всі можливі скінченні і нескінченні періодичні десяткові дроби. Оскільки будь-яке ціле число можна розглядати як безконечний періодичний десятковий дріб (наприклад, $a = 3 = 3{,}00... = 3{,}(0)$), то множина Z є підмножиною множини Q і тому: $Z \subset Q$ і $N \subset Z \subset Q$.

Теорема 1. Будь-який скінченний або нескінченний періодичний десятковий дріб можна записати у вигляді звичайного дробу (1.4).

Пояснення. Наведемо декілька прикладів, що ілюструють теорему 1:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad 0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}; \quad 1{,}25 = 1 + 0{,}25 = 1 + \frac{25}{100} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Дещо складніше перетворити нескінченний періодичний десятковий дріб на звичайний. Алгоритм розв'язання такої задачі буде розглянуто пізніше, а зараз наведемо лише декілька результатів:

$$0{,}333... = 0{,}(3) = \frac{1}{3}; \quad 0{,}43535... = 0{,}4(35) = \frac{431}{990}.$$

Зауваження

З теореми 1 випливає твердження, що *елементами множини раціональних чисел є всі можливі звичайні дроби* $\frac{m}{n}$. Отже список цієї множини можна представити такою формулою:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in N, n \in Z \right\}. \qquad (2.3)$$

Множина дійсних чисел (позначається буквою R).

Елементами множини R є *дійсні числа*, тобто *всі можливі десяткові дроби*: $Q \subset R$, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Зауваження

Множини можна *класифікувати за кількістю елементів* в них:

- Якщо множина містить стільки елементів, що їх кількість може виражатись деяким натуральним числом, то воно називається *скінченною*.

Наприклад, множина цифр (1.1) скінченна, тому що кількість елементів в ній дорівнює десяти.

- Якщо в множині кількість елементів необмежено велика, то вона називається *нескінченною*. Такими є множини N,Z,Q,R.

- Множина називається *порожньою* (позначається символом $\varnothing$ або 0), якщо вона не містить елементів.

2.2. Геометричне зображення дійсних чисел

Для зображення дійсних чисел використовується *числова вісь* (дивіться малюнок 2.1), яка є прямою лінією, з вибраними на ній:

- довільною точкою (*початок відліку*);
- позитивним напрямом (стрілка *зліва направо*);
- масштабом (*одиницею виміру довжини*) .

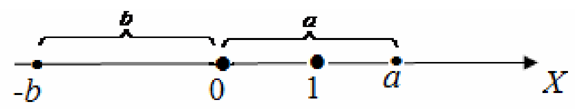


Рисунок 2.1. $\left(a>0,\ b>0\right)$

Між дійсними числами і точками числової осі встановлюється взаємно-однозначна відповідність:

- числу 0 відповідає точка «початок відліку» (дивіться рис. 2.1);
- додатним числам a $\left(a>0\right)$ відповідають точки, розташовані *праворуч* від неї, на відстані a від початку відліку (дивіться рис. 2.1);
- від'ємним числам, $\left(-b\right)$, де $\left(b>0\right)$, відповідають точки, розташовані на відстані b від початку відліку, *зліва* від неї (дивіться рис. 2.1).

Зауваження.

1. Геометричним образом дійсного числа b є точка на числовій осі.
2. Кожній числовій осі зазвичай привласнюється ім'я, яке вказується біля «стрілки». Так, наприклад, числова вісь, зображена на рис. 2.1, має ім'я «вісь X».
3. Слід розрізняти *«ім'я точки»* на числовій осі (для цього використовуються великі літери латинського алфавіту: $A,\ B,\ C,\ \dots$) і *значення числа*, яке

зображується за допомогою цієї точки. Наприклад запис: $A(12)$ означає, що точці *A* на числовій осі відповідає число *12* (дивіться рис. 2.2).

4. Якщо числова вісь позначена буквою *X*, то числові значення точки на цій осі далі позначатимемо тією ж буквою (лише маленькою), що і вісь. Наприклад, запис $B(x_1)$ означає, що точці*B* на числовій осі відповідає якесь число x_1. Оскільки величина числа не задана, то зображати точку *B* на числовій осі можна довільно. Наприклад, так, як вказано на рис. 2.2.

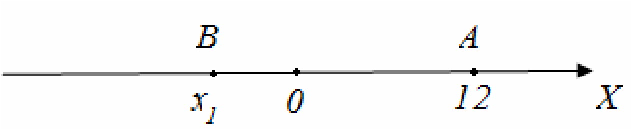


Рисунок 2.2.

Визначення поняття *координати точки на числовій осі.*Число, яке зображується за допомогою точці на числовій осі, далі називатимемо *координатою* цієї *точки*.

Пояснення. Запис $A(12)$ можна інтерпретувати тепер так: точка *A* на числовій осі має координату *12*, тобто вона знаходиться на відстані *12* одиниць з правого боку від початку осі. Число x_1 – це координата точки *B* (дивіться малюнок 2.2).

2.3. Проміжок, інтервал, відрізок

Якщо два дійсні числа a і b задовольняють нерівність $a < b$, то *множина чисел* x,поміщених між цими двома числами, називається *проміжком*, а самі числа a і b називаються *кінцями проміжку*.

Типи проміжків

- Якщо кінці проміжку належать йому, тобто $a \le x \le b$, то проміжок називається *відрізком* і позначається так: $[a;b]$. Тобто

$$a \le x \le b \quad \Leftrightarrow \quad [a;b]. \qquad (2.4)$$

- Якщо кінці проміжку не належать йому, тобто $a < x < b$, то проміжок називається *інтервалом* і позначається так: $(a;b)$. Тобто

$$a < x < b \quad \Leftrightarrow \quad (a;b). \qquad (2.5)$$

- Якщо лише один з кінців інтервалу належить йому, тобто $a \le x < b$ або $a < x \le b$, то проміжок називається *напівінтервал* і позначається так: $(a;b)$. Тобто

$$a \le x < b \quad \Leftrightarrow \quad [a;b) \text{або} \quad a < x \le b \quad \Leftrightarrow \quad (a;b]. \qquad (2.6)$$

- Якщо одне з чисел a або b є *необмежено великим*, то проміжок називається *необмеженим*. Для позначення додатної і від'ємної необмежено великої величини використовується символ: $\pm\infty$. Отже необмежені проміжки позначаються таким чином:

$$x \ge a \quad \Leftrightarrow \quad [a;\infty)\ ; \quad x > a \quad \Leftrightarrow \quad (a;\infty)\ ;$$
$$x \le b \quad \Leftrightarrow \quad (-\infty;b]\ ; \quad x < b \quad \Leftrightarrow \quad (-\infty;b). \qquad (2.7)$$

Зауваження.

1. Якщо проміжок скінченний, тобто $a,b \in R$, то *довжина проміжку* d у всіх випадках визначається формулою:

$$d = |b - a|. \qquad (2.8)$$

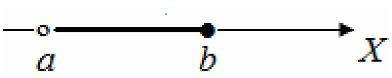
2. *Порожня множина* $\varnothing$ є проміжком, довжина якого дорівнює *0*.
3. Якщо елементами проміжку є натуральні числа *i* від *1* до *m* ($i = 1,2,...,m.$), то замість запису $i \in [1;m]$ часто використовується запис: $i = \overline{1,m}$.

2.4. Геометричне зображення проміжків

Геометричним зображенням скінченних проміжків (2.4), (2.5) або (2.6) є *відрізок на числовій осі*, початком якого є точка, що зображує число *a*; кінцем – точка, що зображує число *b*. Причому, якщо будь-який з кінців проміжку належить йому, то ця точка на рисунку заштриховується (*рис. 2.3а і 2.3с*), якщо ж не належить, то не заштриховується (дивіться *рис. 2.3b і 2.3с*).

$x \in [a;b]$ $x \in (a;b)$

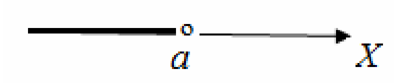
Рисунок 3a *Рисунок 3b*



$x \in (a;b]$

Рисунок 3c

Геометричним зображенням необмежених проміжків (2.7) є *напівпряма*, початок (кінець) якої зображується точкою, заштрихованою або не заштрихованою залежно від того належить або не належить вона проміжку (дивіться рис.*2.4a, 2.4b*).



$x \in (-\infty;a)$ $x \in (a;\infty)$

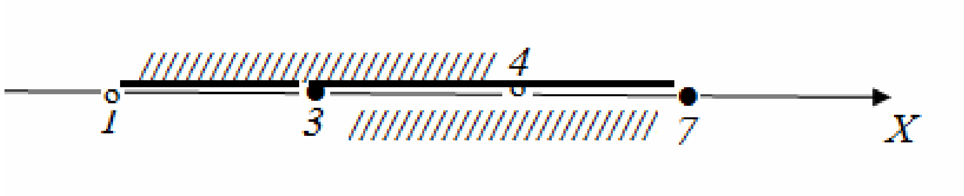
Рисунок 4a *Рисунок 4b*

2.5. Об'єднання і пересічення множин

Визначення поняття *об'єднання числових множин.* *Об'єднанням* двох числових множин A і B називається *операція*, яка позначається символом $\cup$ і породжує нову множину $A \cup B$, *елементами* якої *є всі елементи першої і другої множин.*

Приклад. Задано два інтервали на множини R: $A = (1;4]$ і $B = [3;7]$. Визначте множину, яка є об'єднанням цих множин.

Розв'язання. Штрихування над числовою віссю відповідає множині A, штрихування знизу – множині B. Згідно з визначенням поняття *об'єднання числових множин* результатом є множина $(1;7]$, виділена на малюнку «жирною» лінією.



$A \cup B = (1;7]$

Рисунок 2.5

Визначення поняття *пересічення числових множин.* Пересіченням двох числових множин A і B називається операція, яка позначається символом $\cap$ і породжує нову множину $A \cap B$, елементами якої є *загальні* елементи першої і другої множин.

Приклад. Задано два інтервали на множини R : $A = (1;4]$ і $B = (3;7]$. Визначте множину, яка є пересіченням цих множин.

*Розв'язання.*Згідно з визначенням поняття «*пересічення числової множин»* результатом операції пересічення є множина, яка складається із *загальних елементів* множин A і B. На рисунку *2.5* ці загальні елементи розташовані на тій частині числової осі, де «штрихування перетинаються». Ця область осі відповідає множині $(3;4]$:

$(1;4] \cap (3;7] = (3;4]$.

ПОНЯТТЯ І ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ (ДІЇ) НАД ДІЙСНИМИ ЧИСЛАМИ

3.1. Поняття операції

Термін *операція* застосовується до *арифметичних* (складання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, потенціювання, добування кореня, логарифмування) і *тригонометричних* (синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс) дій над числами.

Таблиця 3.1.

№	Назва операції	Символічне позначення операції
1	складання	$+$
2	множення	$\times$
3	піднесення до степеня	exp
4	потенціювання	exp
5	синус	sin
6	косинус	cos
7	тангенс	tan або tg
8	котангенс	cot або ctg
9	віднімання	$-$
10	ділення	$:$ або $-$
11	добування кореня	$\sqrt{\ }$
12	логарифмування	log
13	арксинус	$arc\,sin$ або $a\,sin$
14	арккосинус	$arc\,cos$ або $a\,cos$

15	арктангенс	$arctg$ або $atan$
16	арккотангенс	$arcctg$ або $acot$

Кожна з перерахованих вище операцій (дій) є деяким *правилом*, згідно з яким число a, над яким виконується ця операція, «перетворюється» на число c.

$a \xrightarrow{операция} c$.

Якщо позначити це правило (операцію) буквою L, то символічно факт такого «перетворення» будемо записати так:

$$L(a) = c \quad \text{або} \quad a \xrightarrow{L} c. \qquad (3.1)$$

Наведемо декілька прикладів таких «перетворень» одного числа на інше за допомогою тригонометричних операцій:

$$cos 0 = 1; \qquad sin 3,14159 = 0;\ arctg 1 = 0,785398; \qquad (3.2)$$

$$0 \xrightarrow{cos} 1; \qquad 3,14159 \xrightarrow{sin} 0; \qquad 1 \xrightarrow{arctg} 0,785395.$$

Зауваження.

1. Як конкретно операція L «перетворює» число *a* на число *c,* то окрема тема для розмови і зараз не найважливіша. Тим паче, що за допомогою калькуляторів це питання вирішується дуже просто, швидко і безпомилково. Важливішим для подальшого є питання, пов'язане з властивостями кожної з перерахованих вище операцій.

2. Відзначимо, що для виконання арифметичних операцій, наприклад складання, крім числа *a*, над яким виконується дія, треба задати ще одне число *b*, за допомогою якого реалізується «перетворення» числа а на нове число *c*. Число *b* далі будемо називати «*допоміжним*» і використовувати таку символіку (детальніше дивіться підрозділ 3.5): $L(a;b) = c$ или $a \xrightarrow{L,b} c$.

3.2. Поняття операції складання і множення. Властивість комутативності

Для *операцій складання:*

$$L_1(a,b) = a + b = c \qquad (3.3)$$

і множення:

$$L_2(a,b) = a \cdot b = c \qquad (3.4)$$

має місце рівність:

$a + b = b + a$ (3.5)

$a \cdot b = b \cdot a$ (3.6)

тобто, результат c не залежить від того, яке з чисел a або b вважати «допоміжним», а яке – числом, над яким виконується операція. Така властивість цих операцій називається *комутативністю* і в загальному випадку вона може виражатись у вигляді такої наступної символічної формули:

$L(a;b) = L(b;a)$. (3.7)

Питання як «технічно» виконувати дії складання і множення над дійсними числами, записаними або у вигляді десяткового дробу, або у вигляді звичайного дробу, буде розглянуто далі .

Зауваження.

При складанні (множенні) декількох чисел мають місце такі формули:

$a + b_1 + b_2 = (a + b_1) + b_2 = (a + b_2) + b_1,$ (3.8)

$a \cdot b_1 \cdot b_2 = (a \cdot b_1) \cdot b_2 = (a \cdot b_2) \cdot b_1,$ (3.9)

які визначають *асоціативну* властивість операцій складання (3.8) і множення (3.9). Сенс цих формул полягає в наступному. Якщо над числом a виконується дві операції складання (множення) за допомогою двох «допоміжних» чисел b_1 і b_2, то асоціативність операції означає, що результат не залежить від того, в якому порядку виконувати ці дії.

3.3. Поняття операції піднесення до степені і потенціювання

Не всі бінарні операції мають властивість комутативності. Зокрема, операція *піднесення до степеня числа а,* для запису якої далі користуватимемося такою символікою:

a^b або $exp_a b$, (3.10)

де b – називається *показником степеня* («допоміжне» число); *a* – *основою*, вона не є комутативною, тобто для неї не має місця формула (3.7):

$$a^b \neq b^a \quad \text{або} \quad exp_a b \neq exp_b a. \qquad (3.11)$$

Аналогічним чином відбувається і з операцією *потенціювання числа a*, для запису якої використовуються формули, подібні до формул (3.3.1):

$$b^a \quad \text{або} \quad exp_b a, \qquad (3.12)$$

де «допоміжне» число b тепер є основою.

У формулі (3.10) число *a*, над яким виконується операція піднесення до ступеня, є основою, а у формулі (3.12) – показником ступеня.

Пояснення. Розглянемо формулу 3^4. Якщо не вказано число, над яким виконується дія в цій формулі, то можливі дві інтерпретації цієї формули. Перша – це піднесення числа *3* до степеня *4*; друга – це потенціювання числа *4* по основі *3*. У першому випадку операція виконується над числом *3*, а число *4* відіграє роль «допоміжного» числа. У другому випадку, операція виконується над числом *4*, а «допоміжним» є число *3*.

Зауваження.

1. Не дивлячись на можливість двох інтерпретацій формули 3^4, результат в обох випадках буде одним і тим же, і його можна визначати за такою формулою:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b}; \quad b \in N, \qquad (3.13)$$

   тобто $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Відзначимо ще раз, що формула (3.3.4) «працює», лише за умови, що показник степеня є натуральним числом.
2. Хоча при $b \notin N$ формула (3.13) не має місця, операції піднесення до степеня і потенціювання визначені, тобто можуть виконуватись за будь-якого значення степеня.

Властивості операції піднесення до ступеня

Для операції піднесення до степеня мають місце такі формули:

$$0^m = 0; \qquad (3.14)$$

$1^m = 1;$ (3.15)

0^0 *не существует;* (3.16)

0^{-m} $(m > 0)$ *не существует;* (3.17)

$a^0 = 1;$ (3.18)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (3.19)

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (3.20)

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; \qquad (3.21)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \qquad (3.22)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (3.23)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (3.24)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad (3.25)$$

Наведемо приклади, що ілюструють можливості вживання деяких з наведених вище властивостей операції піднесення до степеня (потенціювання).

Приклад. Обчисліть: $\left(6 - 4\left(\frac{5}{16}\right)^0\right)^{-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}.$

Розв'язання.

$\left(\frac{5}{16}\right)^0 \overset{(14)}{=} 1;$ $\left(6 - 4\left(\frac{5}{16}\right)^0\right)^{-2} = (6 - 4 \cdot 1)^{-2} = (2)^{-2} \overset{(17)}{=} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\overset{(17)}{=}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\overset{(15)}{=}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2+3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1};$$

$$\left(6-4\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}.$$

3.4. Тригонометричні операції синус, косинус, тангенс, котангенс

Перше знайомство з математичними термінами синус, косинус, тангенс, котангенс пов'язано з геометрією. Так, наприклад, якщо в прямокутному трикутнику (дивіться *рисунок 3.1*) позначити через α величину

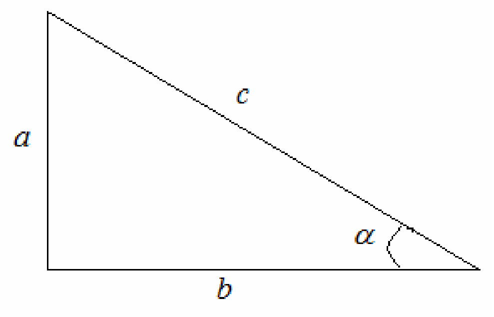


Рисунок 3.1.

кута, утвореного катетом, довжиною b і гіпотенузою, довжиною c, то відношення довжини цього катета до довжини гіпотенузи визначалось як «косинус кута α»:

$$cos\,\alpha=\frac{b}{c}. \qquad (3.26)$$

Відношення другого катета, довжиною a до довжини гіпотенузи визначалось як «синус кута α »:

$$sin\,\alpha=\frac{a}{c}, \qquad (3.27)$$

а відношення довжин катетів один до одного, визначали «тангенс і котангенс кута α»:

$$tg\alpha = \frac{a}{b}, \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a}. \qquad (3.28)$$

Така *геометрична інтерпретація цих математичних понять* проста і корисна, але неправильно було б обмежуватися лише нею.

Синус, косинус, тангенс, котангенс можна розглядати як деякі нові *математичні операції*, не додаючи їм якогось конкретного геометричного сенсу і залишаючи осторонь питання про те, як ці операції виконувати. Ці операції *виконуються над дійсними числами і мають певні властивості.*

Деякі властивості тригонометричних операцій

- Операції $sin\,a$ і $cos\,a$ можуть виконуватись над будь-яким дійсним числом *a:* $a \in R$.
- Результат виконання операцій $sin\,a$ і $cos\,a$ знаходиться на відрізку $\left[-1;\,1\right]$, тобто

$$\begin{aligned} &-1 \le sin\,a \le 1, \quad або \quad sin\,a \in \left[-1;1\right]; \\ &-1 \le cos\,a \le 1 \quad або \quad cos\,a \in \left[-1;1\right]; \end{aligned} \qquad (3.29)$$

- Результатом виконання операцій tga і $ctga$ може бути будь-яке дійсне число, тобто:

$$tga \in \left(-\infty;\,\infty\right), \qquad ctga \in \left(-\infty;\,\infty\right). \qquad (3.30)$$

- При деяких значеннях *a* результат операції tga *не існує*:

$$a = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot m, \quad m = 0;\, \pm 1;\, \pm 2;\, \ldots\,. \qquad (3.31)$$

Зокрема

$$m = 0; \quad a = \frac{\pi}{2}, \qquad m = 1; \quad a = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}, \qquad m = -1; \quad a = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Факт «не існування» значення tga зручно позначати за допомогою символу ∞. Наприклад,

$$tg\frac{\pi}{2} = \infty, \quad tg\frac{3\pi}{2} = \infty, \quad tg\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \infty. \qquad (3.32)$$

- Результат $ctga$ не існує, якщо:

$$a = \pi + \pi \cdot m, \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots , \qquad (3.33)$$

тобто, можна записати, що:

$$ctg0 = \infty, \quad ctg\pi = \infty, \quad ctg(-\pi) = \infty \qquad (3.34)$$

- Хоча питання про те, як проводити обчислення, пов'язані з тригонометричними операціями не розглядається в курсі елементарної математики, результати виконання цих операцій над деякими числами, що часто зустрічаються, слід знати (дивіться *таблицю 3.2*).

Таблиця 3.2

№	$\alpha \Rightarrow$	*0*	*π/6*	*π/4*	*π/3*	*π/2*	*π*	*3π/2*	*2π*
1	*sinα*	*0*	*1/2*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	*1*	*0*	*-1*	*0*
2	cosα	*1*	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	*1/2*	*0*	*-1*	*0*	*1*
3	tgα	*0*	$\sqrt{3}/3$	*1*	$\sqrt{3}$	∞	*0*	∞	*0*
4	ctgα	∞	$\sqrt{3}$	*1*	$\sqrt{3}/3$	*0*	∞	*0*	∞

Деякі властивості тригонометричної операції до іншої.

$$sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1; \qquad (3.35)$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2 \alpha}; \qquad (3.36)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2 \alpha}; \qquad (3.37)$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1; \qquad (3.38)$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}; \qquad (3.39)$$

$$ctg\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}. \qquad (3.40)$$

3.5. Унарні і бінарні операції

Для виконання будь-якої тригонометричної операції *треба задати лише* ***одне*** *число* – число, над яким ця дія виконується. З цієї причини тригонометричні операції називаються *унарними* (від латинського *uno* – один).

Виконання ж арифметичних операцій потребує завдання ***двох*** *чисел* – не лише числа a, над яким виконується операція L, але і другого «допоміжного» числа b. Так, наприклад, для того, щоб виконати операцію складання над числом a, треба задати ще одне число b, за допомогою якого реалізується «перетворення» числа a на нове число c. З цієї причини операція складання і все інші арифметичні операцій називаються *бінарними* (приставка *бі* означає подвоєння, від латинського *bis* – двічі). Для їх запису будемо використовувати наступну символіку:

$L(a;b) = c$ або $a \xrightarrow{L,b} c$, (3.41)

де a – число, над яким виконується операція L; b – «допоміжне» число; c – число, на яке «перетворюється» число a.

3.6. Поняття прямої і зворотної операції над дійсним числом

Передбачимо, що над числом a виконується якась арифметична або тригонометрична операція L, результатом чого є число a_1:

$L(a;b) = a_1,$ (3.42)

а потім над числом a_1 виконується інша операція K, так що в результаті виходить число a_2:

$$K(a_1;b) \overset{(41)}{=} K(L(a;b);b) = a_2. \qquad (3.43)$$

Якщо число a_2 виявиться рівним вихідному числу a, то операції K і L називаються оберненими по відношенню одна до одної. Символічно цю ситуацію можна записати так:

$$K(L(a;b);b) = a. \qquad (3.44)$$

Визначення поняття оберненої операції. Якщо над числом *a* виконується операція L, а потім над результатом $L(a)$ виконується операція L^{-1}, так що в результаті виходить вихідне число *a*, тобто:

$$L^{-1}\left(L(a)\right) = a, \qquad (3.45)$$

для унарної операції і

$$L^{-1}(L(a;b);b) = a \qquad (3.46)$$

для бінарної операції, то операції L і L^{-1} є *оберненими операціями по відношенню одна до одної.*

Зауваження.

1. Відзначимо, що (-1) у формулах (3.45), (3.46) це не показник степені *L*, а лише символ «оберненості». Для *кожної* математичної операції *L* існує зворотна по відношенню до неї операція, яку прийнято позначати як L^{-1}.

2. Якщо операція L^{-1} є оберненою по відношенню до операції *L*, то і *L* є зворотною до операції L^{-1}, тобто мають місце такі формули:

$$L^{-1}(L(a;b);b) = L(L^{-1}(a;b);b) = a, \qquad (3.47)$$

для бінарної операції і:

$$L^{-1}(L(a)) = L(L^{-1}(a)) = a, \qquad (3.48)$$

для унарної операції.

3.Всі математичні операції, наведені в *таблиці 3.1*, можна розбити на пари взаємнообернених операцій. Причому, операцію *L* з цієї пари називатимемо *прямою операцією*, а L^{-1} – оберненою. У таблиці 3.3 наведений список таких пар операцій.

Таблиця 3.3.

	Прямі операції		*Зворотні операції*
1	складання	1*	віднімання
2	множення	2*	ділення
3	піднесення до степеня	3*	добування кореня
4	потенціювання	4*	логарифмування
5	синус	5*	арксинус
6	косинус	6*	арккосинус
7	тангенс	7*	арктангенс
8	котангенс	8*	арккотангенс

3.7. Поняття області визначення операції (або області допустимих значень операції)

Результат операцій «*tg*» і «*ctg*» над деякими числами не існує (дивіться підрозділ 3.4, формули (3.30) – (3.34)). Така ситуація має місце і для інших операцій, які будуть розглянуті далі (дивіться таблицю 3.3). У зв'язку з цим, при розгляді тієї або іншої операції слід, перш за все, визначитися з тим, над якими числами ця операція може бути виконана, а над якими – ні, тобто результат її виконання не існує.

Далі для позначення *факту існування результату* виконання операції L над числом a будемо використовувати термін – *операція L визначена для числа а,* якщо ж результат $L(a)$ не існує, то операція L над числом *а невизначена*.

Пояснення. Слід розрізняти дві ситуації. Перша, коли результат не можна отримати «з технічних причин», але в принципі він існує, і друга, коли результат не існує в принципі. Лише для другого випадку використовується термін – операція невизначена.

Розглянемо приклад, коли результат існує, але його не можна записати з технічних причин. Піднесення числа $a = 217005$ до степеня $b = 3308705$: $L(217005;3308705) = 217005^{3308705}$. Отримати результат цієї дії з *технічної точки зору* непросто, але результат в принципі існує! Тобто, *операція піднесення числа $a = 217005$ до степеня $b = 3308705$ визначена.*

Інший приклад. Операція ділення числа $a = 35$ на $b = 0$. Результат операції $\frac{a}{b} = \frac{35}{0}$ не існує, тобто, операція $\frac{a}{b}$ невизначена, якщо $b = 0$. В цьому випадку доречне позначення, яке використовувалося у формули (3.30), $\frac{a}{0} = \infty$.

Визначення поняття *область визначення (область допустимих значень) операції.* Множина чисел D, над якими виконується операція L і результат виконання цієї операції $L(a)$ при $a \in D$ існує, називається *областю визначення операції (ОВО) або її областю допустимих значень (ОДЗ).*

Пояснення. Для операції ділення $\frac{a}{b}$ *область визначення або область допустимих значень D* можна записати так:

$$D = \begin{cases} a \in R, \quad \text{будь} - \text{яке дійсне число;} \\ b \in R, b \neq 0, \quad \text{будь} - \text{яке дійсне число окрім нуля.} \end{cases}$$

або

$D = \{ a | a \in R, a \neq 0 \}$. (3.49)

3.8. Віднімання як операція обернена до операції складання

Операція віднімання дійсного числа b з числа a символічно записується у вигляді формули: $a - b$, і може виконуватись за будь-яких числових значеннях a і b.

Тут передбачається розглянути операцію віднімання з точки зору її «обернена» по відношенню до операції складання. Для цього розглянемо приклад, який ілюстрував би визначення оберненої операції (формули (3.46), (3.47)) стосовно операції віднімання.

Нехай дія складання виконується, наприклад, над числом $a = 3$, а роль «допоміжного» числа відіграватиме число $b = 7$.Запишемо, символічну формулу для цієї ситуації:

$$3 \xrightarrow{L:\ операция\ сложения\ с\ числом\ 7} 3 + 7 = 10;$$

$$L(3;7) = 3 + 7 = 10. \qquad (3.50)$$

З порівняння формул (3.42) і (3.43) випливає, що число 10 – це a_1. Тепер над цим числом виконаємо операцію L^{-1}, зворотну по відношенню до операції $L(3;7)$. Ця операція називається операцією віднімання. Формула (3.47) тут матиме такий вигляд:

$$10 \xrightarrow{L^{-1}:\ операция\ вычитания\ числа\ 7} 10 - 7 = 3;$$

$$L^{-1}\left(\overbrace{L(3;7)}^{3+7};7\right) = (3 + 7) - 7 = 3.$$

В результаті послідовного виконання двох операцій складання і віднімання над числом *3*, вийшло теж число. Можна сказати, що операції складання і віднімання як би «знищують» одна одну, залишаючи незмінним число (у розглянутому прикладі – це число *3*), над яким ці операції виконуються.

3.9. Ділення як операція обернена до операції множення

Розглянемо операцію ділення як дію обернену по відношенню до операції множення на конкретному прикладі.

Виконаємо спочатку над числом $a = 3$ операцію множення, використовуючи як допоміжне число $b = 4$, тобто:

$$3 \xrightarrow{L:\ \text{операция умножения на число } 4} 3 \cdot 4 = 12\,,$$

або $$L(3;4) = 3 \cdot 4 = 12\,.$$

Операція, обернена по відношенню до операції множення називається діленням. Виконаємо її над результатом множення, тобто над числом *12:*

$$L^{-1}\left(\overbrace{L(3;4)}^{3\cdot 4};4\right) = (3 \cdot 4) : 4 = 3\,.$$

Операція ділення «знищила» операцію множення, так що у результаті вийшло вихідне число *3*.

3.10. Добуття кореня як операція обернена до операції піднесення до степеня

Нехай над числом *5* виконується дія піднесення до степеня *3* (це число є «допоміжним»):

$$5 \xrightarrow{L:\ \text{возведение в степень } 3} 5^3\,,$$

або $$L(5;3) = 5^3 = 125\,.$$

Виконаємо тепер над отриманим числом $L(5;3)$ операцію, зворотну дії піднесення до степеня. Ця операція називається *операцією добуття кореня*. У нашому прикладі – це буде корінь третього степеня або корінь кубічний:

$$5^3 \xrightarrow{L^{-1}:\ \text{извлечение корня степени } 3} \sqrt[3]{5^3} = 5\,, \qquad (3.51)$$

$$L^{-1}\left(\overbrace{L(5;3)}^{5^3};3\right) = \sqrt[3]{5^3} = 5\,. \qquad (3.52)$$

Для позначення операції зворотної до дії піднесення до степеня можна використати й інше позначення. Річ у тому, що «нейтралізувати» операцію піднесення до степеня можна таким чином (дивіться формулу (3.22)):

$$5^3 \xrightarrow{L^{-1}:\ возведение\ в\ степень\ \frac{1}{3}} \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} \overset{(18)}{=} 5^{3\cdot\frac{1}{3}} = 5^1 = 5. \qquad (3.53)$$

Порівнюючи формули (3.52) і (3.53), можна записати, що:

$$\sqrt[3]{5^3} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (3.54)$$

Узагальнюючи результат (3.10.4), отримаємо:

$$\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}}. \qquad (3.55)$$

Зауваження

1. Якщо над числом a виконується операція, записана у вигляді формули $a^{\frac{m}{n}}$, то враховуючи що:

- по-перше, дріб $\dfrac{m}{n}$ можна записати у вигляді добутку таким чином:

$$\frac{m}{n} = \left[\begin{array}{l} m\cdot\dfrac{1}{n}; \\ \dfrac{1}{n}\cdot m; \end{array}\right. \qquad (3.56)$$

- по-друге, властивість операції піднесення до степеня (3.22) дію $a^{\frac{m}{n}}$ можна записати у вигляді:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} \overset{(46)}{=} \sqrt[n]{a^m}, \qquad (3.57)$$

або

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \overset{(46)}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^m. \qquad (3.58)$$

2. Операцію добуття кореня парного степеня з числа a не завжди можна виконати.

3.Область визначення (дивіться 3.7*) операції* $\sqrt[n]{a}$ має такий вигляд:

$$D\left(\sqrt[n]{a}\right)=\left[\begin{array}{l} a\ge 0,\quad якщо\quad n-парне; \\ a\in R,\quad якщо\quad n-непарне. \end{array}\right.$$ або

$D\left(\sqrt[n]{a}\right)=\{\, a \,|\, a\in R, a\ge 0\,\}$. (3.59)

3.11. Логарифмування як операція обернена до операції потенціювання

Дія логарифмування (символ *log*) може виконуватись лише над *додатним числом a* за допомогою «допоміжного *додатного числа b*» *не рівного одиниці:*

$log_b\, a = c.$ (3.60)

$a>0,\quad b>0,\quad b\ne 1,\quad c\in R.$ (3.61)

Результат *c* може бути будь-яким дійсним числом, якщо він існує.

Пояснення. У формулі (3.61) міститься інформація про область визначення D операції логарифмування, яку, дотримуючись прийнятихпозначень (дивіться підрозділ 3.7), слід написати так:

$$D\left(log_b\, a\right)=\begin{cases} a>0, \\ b>0, \\ b\ne 1. \end{cases} \quad \text{або} \quad D\left(log_b\, a\right)=\left\{a \,|\, a,b\in R, a>0, b>0, b\ne 1\right\} \qquad (3.62)$$

Дія логарифмування є дією оберненою до дії потенціювання. Це означає, що, якщо, наприклад, над числом $a=4$ виконати операцію потенціювання з основою $b=3$ (число 3 «відіграє роль допоміжного числа»):

$$4 \xrightarrow[\text{по основанию}\quad 3]{L:\ \text{потенцирование}} 3^4,$$

$L\left(4;3\right)=3^4$,

а потім над результатом 3^4 виконати операцію логарифмування за тією ж основою $b=3$:

$$3^4 \xrightarrow[\text{по основанию} \quad 3]{L^{-1}:\text{ логарифмирование}} log_3 3^4,$$

$$L^{-1}\left(L\left(4;3\right),3\right)=log_3\left(3^4\right),$$

то в результаті вийде вихідне число *4*. Тобто:

$$log_3\left(3^4\right)=4. \quad (3.63)$$

Узагальнюючи результат (3.63) на випадок довільного числа a, можна записати таку рівність:

$$log_b\left(b^a\right)=a. \quad (3.64)$$

Причому «допоміжне число» $b \in R, b>0, b \neq 1$.

Пояснення. Формула (3.64) допускає таке тлумачення: будь-яке число a можна *«записати у вигляді логарифма»* з довільно вибраною основою b. Так, наприклад, на вираз (3.63) можна поглянути як на рівність, в якій *«число 4 записане у вигляді логарифма»* з основою *3*.

При записі числа «у вигляді логарифма» вибирати основу можна довільним чином, маючи на увазі обмеження (3.62). Число *4* тоді можна записати так (дивіться формулу (3.63)):

$$4=log_3\left(3^4\right)=log_{25}\left(25^4\right)=log_{0,3}\left(0,3^4\right).(3.65)$$

Властивості операції логарифмування

$$log_b 1=0; \quad (3.66)$$

$$log_a a=1. \quad (3.67)$$

$$log_b\left(a\cdot c\right)=log_b a+log_b c. \quad (3.68)$$

$$log_b\left(\frac{a}{c}\right)=log_b a-log_b c. \quad (3.69)$$

$$log_b a^p = p \cdot log_b a. \qquad (3.70)$$

$$log_{b^p} a = \frac{1}{p} log_b a. \qquad (3.71)$$

$$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}. \qquad (3.72)$$

$$log_b a = \frac{1}{log_a b}. \qquad (3.73)$$

Зауваження.

Формулу (3.67) називають *логарифмічною одиницею*. З її допомогою зручно записувати числа «у вигляді логарифма».

Приклад. Запишіть, число 25 у вигляді логарифма з основою 3.

Розв'язання. Основу b можна вибирати будь-яке. Тут величина основи нав'язана: $b = 3$, тому результат виглядатиме так: $25 = log_3 3^{25}$.

3.12. Обернені тригонометричні операції

Якщо над числом $a = 4$ виконати операцію синус:

$$4 \xrightarrow{L:\ "sin"} sin 4,$$

то, виконавши над отриманим результатом операцію, зворотну до синуса, яка називається *арксинус («arcsin»)*, в результаті повинно вийти число 4:

$$sin 4 \xrightarrow{L^{-1}:\ "arc sin"} arc sin(sin 4),$$

$$arc sin(sin 4) = 4. \qquad (3.74)$$

Для довільного числа a формулу (3.74) можна записати так:

$$arc sin(sin a) = a. \qquad (3.75)$$

Формула (3.75) визначає операцію *«arcsin»* як операцію, обернену по відношенню до дії *«sin»*.

Зауваження.

1. Якщо операція *«arcsin»* виконується над деяким числом a_1 і результатом її виконання є число b, тобто:

$$arc\,sin\,a_1 = b,$$

то має місце таке твердження.
Число a_1, над яким виконується операція *«arcsin»*, може набувати значень, щоналежать лише відрізку $[-1;\,1]$. Іншими словами, область визначення D операції *«arcsin»* має такий вигляд:

$$D = \{a_1 | a_1 \in R, -1 \le a_1 \le 1\} \quad (3.76)$$

2. Якщо $a_1 \notin [-1;\,1]$, то операція *«arcsin»* не може бути виконана, тобто вона *невизначена* при цих числових значеннях a_1. Наприклад, операція $arc\,sin\,1,25$ невизначена, оскільки число, над яким виконується дія $(1,25)$ більше від одиниці.

Операції $"arccos",\ "arctg",\ "arcctg"$ зворотні для операцій $"cos","tg","ctg"$ визначаються формулами, аналогічними формулі (3.75):

$$arccos(cos\,a) = a, \quad (3.77)$$

$$arctg(tga) = a, \quad (3.78)$$

$$arcctg(ctga) = a. \quad (3.79)$$

Зауваження.

1. Якщо операція *«arccos»* виконується над числом a_1, то це число може набувати значень, які належать лише відрізку $[-1;\,1]$. Тобто, операція *«arccos»* визначена на відрізку $[-1;\,1]$.

$$D(arccos\,a_1) = \{-1 \le a_1 \le 1\}. \quad (3.80)$$

2. Операції $arctg\, a_1$ і $arcctg\, a_1$ *визначені* при будь-яких значеннях a_1.

$$
\begin{aligned}
&D\left(arc\,tg\, a_1\right) = \left\{-\infty \le a_1 \le \infty\right\}, \\
&D\left(arc\,ctg\, a_1\right) = \left\{-\infty \le a_1 \le \infty\right\}.
\end{aligned}
\qquad (3.81)
$$

ЛЕКЦІЯ 2

МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗУ І ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Розділ 1

МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ

Розглянемо використання деяких понять і пов'язаних з ними символів в письмовій математичній мові.
Символічні позначення, які використовуються в математиці, служать для викладу математичних суджень в зручній для роботи (читаемій і компактній) формі. Крім символів, які вже розглядалися раніше і використовувалися, наприклад для запису чисел і дій над ними, застосовуються і деякі інші символи, наприклад, літери і дужки.

У разі буквених символів зазвичай використовують букви грецького і латинського алфавітів (дивіться додаток 1). Використовуються вони для позначення чисел в тих випадках, коли конкретне значення числа з якихось причин не важливе. Тому буквами оперують, як числами.

1.1 Змінна величина і математичний вираз

Математичний вираз (далі, просто - вираз) – це запис, якій складається з математичних символів:

- чисел, записаних за допомогою цифр або букв,
- знаків математичних дій,
- дужок: $(\ldots), [\ldots], \{\ldots\}$,
- знаків рівності і нерівності $"<,\ >,\ \leq,\ \geq"$..

Прикладами математичних виразів можуть бути такі символічні записи:

$$a+b=b+a, \tag{1.1}$$

$$2\sqrt{x} + a \le 3\sqrt{x} - 4, \qquad (1.2)$$

$$(x-4)(x+3) = 0. \qquad (1.3)$$

Зауваження

1. Кожна буква у виразі може бути або *змінною величиною*, або *постійною величиною*.

2. Питання про те, до якого виду величин належить та чи інша буква, вирішується шляхом попереднього оголошення статусу кожної літери. Якщо ж таке попереднє оголошення не зроблено, то «за замовчуванням» (традиційно):

● букви, розташовані в кінці латинського алфавіту (наприклад: *x, y, z, t, v, u, w*), розглядаються як змінні;

● букви, розташовані на початку латинського алфавіту (*a, b, c* і інші) або літери грецького алфавіту (α, β, γ, λ, ...), розглядаються як сталі і їх називають *параметрами виразу*.

3. Для позначення деяких найбільш важливих в математиці чисел «закріплені» букви. Наприклад, $\pi = 3{,}1415926...$; $e = 2{,}18728....$; .

4. Відзначимо ще раз, що традиційне використання тих чи інших букв для позначення сталих і змінних величин зовсім не означає, що, наприклад, за буквою *x* «ховається» обов'язково змінна величина. Все залежить від розглянутого виразу і конкретного сенсу тієї чи іншої літери в цьому виразі, якщо такий випливає з постановки розв'язуваної задачі.

5. Якщо в математичному виразі операції виконуються тільки над числами, то такий математичний вираз називається числовим. Результат (число), який отримуємо після виконання всіх операцій в аналізованому числовому виразі, називається значенням числового виразу.

6. Дужки - це символи, за допомогою яких задається порядок виконання операцій в математичному виразі. Зазвичай використовуються три типи дужок: (...) - *круглі*; [...] - *квадратні*; {...} - *фігурні*. Порядок виконання операції в математичному виразі береться такий:

• якщо дужок в математичному виразі немає, тоді слід спочатку виконати дії множення і ділення (зліва направо), потім додавання і віднімання в будь-якому порядку;

• при наявності дужок - спочатку виконуються операції в круглих дужках, потім в квадратних і в останню чергу - в фігурних.

Приклад. Вкажіть порядок дій в числовому виразі:

$$\frac{3}{4}\cdot\left(6-4\cdot\frac{5}{16}\right):5+\frac{2}{3}.$$

Розв'язання. Порядок дій повинен бути такій:
• множення в дужках;
• віднімання в дужках;
• множення поза дужками;
• розподіл;
• складання.

Щоб уникнути помилок при виконанні дій, зручно над кожним з них вказувати номер його виконання. У розглянутому прикладі це буде виглядати так:

$$\frac{3}{4}\overset{(3)}{\cdot}\left(6\overset{(2)}{-}4\overset{(1)}{\cdot}\frac{5}{16}\right)\overset{(4)}{:}5\overset{(5)}{+}\frac{2}{3}$$

Математичні вирази можна класифікувати і привласнювати їм «імена». Якщо, наприклад, в якості ознаки за яким здійснюється класифікація виразів, використовується факт наявності знака «дорівнює», то два математичних вирази A і B пов'язані, цим знаком утворюють *рівність*: $A = B$.

Якщо ж зв'язок здійснюється за допомогою знаків будь-якої нерівності: $A < B,\ A > B,\ A \le B,\ A \ge B$, то ці вирази називаються *нерівностями.*

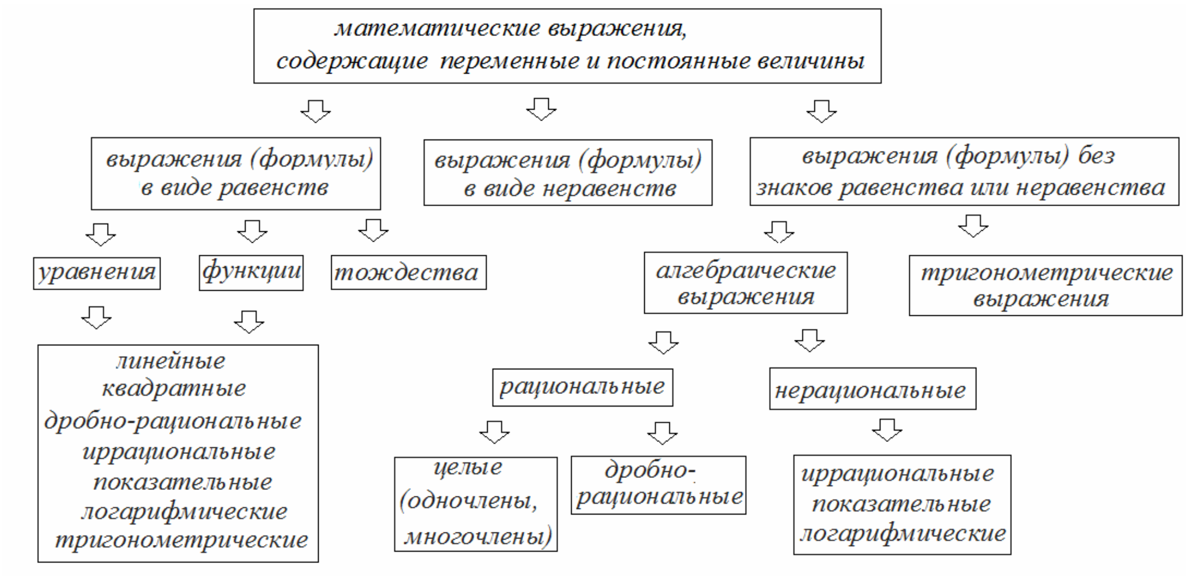


Рисунок 1.1

Залежно від того, чи використовуються у виразі буквені позначення чи ні, чи присутні змінні величини і якщо «так», то, скільки їх і які операції виконуються над ними, математичні вирази класифікуються далі як *тотожності*, *рівняння* і *функції* різних типів (дивіться рис. 1.1). Далі будуть розглянуті всі перераховані вище типи математичних виразів.

Зауваження.

1. Оскільки поняття «математичний вираз» і «формула» близькі за змістом, то часто їх і не розрізняють. Проте, відзначимо, що поняття формула звичайно використовують для тих математичних виразів, які мають якийсь самостійний математичний сенс. Так, наприклад, серед перерахованих нижче математичних виразів (1.1) - (1.3) формулою варто було б назвати тільки математичний вираз (1.1), тому що він видображає властивість комутативності операції додавання, тобто має самостійний математичний сенс.

1.2. Область визначення математичного виразу

Математичні вирази (рівняння, нерівності, функції, тотожності) містять операції, які виконуються як над змінними величинами, так і над параметрами цього виразу. Тому, завжди необхідно визначитися з тим, яких числових значень можуть набирати параметри і змінні в розглянутому виразі.

Визначення поняття *область визначення математичного виразу*. *Область визначення математичного виразу* (рівняння, нерівності, функції, тотожності) - це *числова множина* (позначається літерою D), елементами якої є тільки ті числові значення змінних і параметрів, при яких всі дії над ними можуть виконуватись.

Пояснення. Обмеження на можливі числові значення змінних і параметрів в математичному виразі завжди пов'язані тим, що деякі операції визначені не для всіх дійсних чисел. У таблиці 1.1 наведені області визначення всіх операцій.

Якщо у виразі використовуються n операцій: $L_1, L_2, ..., L_n$ і їх областями визначення є множини: $D(L_1), D(L_2), ..., D(L_n)$, то область визначення D математичного виразу виходить як результат перетину всіх множин $D(L_i), \quad i = 1,2,...,n$: (4).

$$D = D(L_1) \cap D(L_2) \cap ... \cap D(L_n). \qquad (1.4)$$

Приклад. Знайдіть область визначення математичного виразу: $\frac{arcsin\, x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. У заданому виразі використовуються три операції: добування кореня квадратного, ділення і арксинус. Напишемо і зобразимо на числової осі область визначення кожної операції:

$$D(arcsin\, x) = \{x | -1 \le x \le 1\}, \quad D\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \{x | x \in R, \quad x \ge 0, x \ne 0\}.$$

Областю визначення виразу є перетин двох множин: перша - це множина $D(arcsin\, x)$ і друга - $D\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Використовуючи «інтервальні» позначення, напишемо множину, яка є їх перетином: $x \in [-1;1] \cup [0;\infty) = [0;1]$.

Таблица 1.1.

№	Назва операції	Позначення операції L	Область визначення операції L: $D(L)$	Область визначення операції L («интервальніпозначення»)

1 2 3	додавання, множення, віднімання	$a+b$ $a\cdot b$ $a-b$	$D(a+b)=D(a\cdot b)=D(a+b)=$ $=\{a,b\vert a\in R, b\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$, $b\in(-\infty;\infty)$
3 4	піднесення до степеня, потенціювання	$exp_b\, a$ или b^a	$D(exp_b\, a)=D\left(b^a\right)=$ $\{a,b\vert a\in R, b\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$, $b\in(-\infty;\infty)$
5 6	синус, косинус	$sin\, a$ $cos\, a$	$D(sin\, a)=D(cos\, a)=\{a\vert a\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$
7	тангенс	$tg\ a$	$D(tga)=\left\{a\left\vert a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right.\right\}$	$a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$
8	котангенс	$ctg\ a$	$D(ctga)=\{a\vert a\neq\pi k, k\in Z\}$	$a\in(2\pi k;\pi+\pi k)\cup$ $\cup(\pi k;2\pi(k+1))$
10	ділення	$\frac{a}{b}$	$D\left(\frac{a}{b}\right)=\{a,b\vert a\in R;\ b\in R,\ b\neq$	$a\in(-\infty;\infty)$; $b\in(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;\infty)$
11	добування кореня	$\sqrt[n]{a}$	$D\left(\sqrt[n]{a}\right)=\{a\vert a\in R,\quad a\geq 0\}$, *якщо* $n-$ *парне;* $D\left(\sqrt[n]{a}\right)=\{a\vert a\in R\}$, *якщо* $n-$ *непарне.*	$a\in[0;\infty)$ *якщо* $n-$ *парне;* $a\in(-\infty;\infty)$ *якщо* $n-$ *непарне.*
12	логарифмування	$log_b\, a$	$D(log_b\, a)=\{a,b\vert a>0;\ b>0,\ b$	$a\in(0;\infty)$ $b\in(0;1)\cup(1;\infty)$
13 14	арксинус арккосинус	$arc\sin a$ $arc\cos a$	$D(arcsin\ a)=D(arccos\ a)=$ $=\{a\vert -1\leq a\leq 1\}$	$a\in[-1;1]$
15	арктангенс	$arctg\ a$ $arcctg\ a$	$D(arctg\ a)=D(arcctg\ a)=$ $=\{a\vert a\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$

1 6	арккотангенс			

1.3. Корінь математичного виразу

Якщо змінній величині *x* в математичному виразі $F(x)$ дати якесь числове значення *a*, то математичний вираз стає числовим виразом *F (a)* і його можна обчислити: $F(a)=b$.

Якщо вираз $F(x)$ матиме, наприклад, такий вигляд:

$x \cdot (x+1) - 3 \cdot x$

і, якщо змінній *x* дати числове значення *5*, тобто: $x=5$, то вийде числовий вираз $F(5)$, який матиме вигляд: $5 \cdot (5+1) - 3 \cdot 5$. Виконавши дії, отримаємо значення цього виразу, яке дорівнює *15*, тобто: $F(5)=15$.

Визначення поняття *корінь математичного виразу*. Якщо існує таке числове значення змінної величини, підстановка якого в математичний вираз перетворює його на *нуль*, то це значення змінної величини називається *коренем математичного виразу*.

***Пояснення*.** Вираз $x \cdot (x+1) - 3x$ «перетворюється» на нуль, якщо покласти $x=2$. Тоді,

$2 \cdot (2+1) - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$.

Значить, значення $x=2$ змінної величини є коренем цього виразу.

1.4. Поняття математичного тотожності

Визначення поняття *тотожність*. Якщо рівність двох математичних виразів виконується при будь-якому значенні, букв які входять в нього, то ця рівність називається *тотожністю*.

Пояснення. Вираз $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ є тотожністю. Якщо підставити в цей вираз замість x будь-яке число, то буде виходити правильна числова рівність. Наприклад, якщо підставити $x = 3$, то:

$$3^2 - 4 \overset{?}{=} (3-2)(3+2)1 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4 \overset{?}{=} 1 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 5 .$$

Зауваження. Щоб довести, що рівність є тотожністю треба виконати перетворення лівої або / і правої частин рівності так, щоб вони виявилися однаковими.

1.5. Поняття рівняння та його розв'язання

Розглянемо два вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$, які пов'язані між собою знаком рівності:

$$f(x) = \varphi(x), \tag{1.5}$$

де x - змінна величина.

Визначення понять *рівняння і розв'язок рівняння*. *Рівняння* - це рівність двох математичних виразів, в яких присутня змінна величина, яка називається невідомою величиною. Причому, рівність має місце тільки при деяких числових значеннях невідомої величини. Ці значення невідомої величини називаються *розв'язками рівняння*.

Зауваження.

1. Формулу (1.5) далі будемо називати *«загальним виглядом рівняння»* з одною невідомою величиною.

2. Якщо рівняння (1.5) записати у вигляді: $f(x) - \varphi(x) = 0$ і якщо значення змінної величини $x = a$ є *розв'язком* цього рівняння, тобто: $f(a) - \varphi(a) = 0$, то згідно з визначенням поняття корінь «математичного виразу», значення $x = a$ є коренем математичного виразу. Тому, терміни *розв'язокрівняння* і *корінь рівняння* для рівняння мають однаковий сенс.

3. Щоб знайти корінь математичного виразу, треба цей вираз прирівняти до нуля і знайти розв'язок отриманого таким чином рівняння.

4. Рівняння може містити кілька змінних величин. У цьому випадку рівняння називається рівнянням з багатьма змінними або невідомими величинами.

Наприклад, якщо їх дві, то загальний вигляд такого рівняння буде такий:

$$f(x,y)=\varphi(x,y).\quad(1.6)$$

Пояснення. Розглянемо математичний вираз: $3x-2=2x$, який слід класифікувати як рівняння, тому що він:

• по-перше, є рівністю;

• по-друге, в ньому присутня буква *x*, яка «за замовчуванням» - змінна величина;

• по-третє, ця рівність не виконується при будь-яких значеннях змінної величини. Наприклад, якщо,

$x=10$, то $3\cdot 10-2\overset{?}{=}2\cdot 10$ і $28\neq 20$,

то і рівність не має місця. Якщо ж вибрати $x=2$, то

$3\cdot 2-2\overset{?}{=}2\cdot 2$ и $4=4$.

Рівність має місце і числове значення невідомої величини *x=2* є розв'язком рівняння.

Приклад. Вкажіть, які з перерахованих нижче чисел є розв'язками рівняння:

$x^4+2x^2+12=x^6-28$.

Варіанти відповіді: А) 0; Б) -2; В 1; Г) 2; Д 1.

Розв'язання. Для відповіді на запитання треба замість змінної (невідомої) величини *x* в рівняння підставити передбачуваний розв'язок цього рівняння (число). Якщо після виконання дій вийде правильне рівність, то це буде означати, що це число є розв'язком рівняння. Якщо ж рівність лівої і правої частин рівняння не відбувається, то досліджуване число не є розв'язком.

Підставимо число *0* (варіант *А*):

$$0^4+2\cdot 0^2+12\overset{?}{=}0^6-28 \quad\Rightarrow\quad 12\overset{?}{=}-28 \quad\Rightarrow\quad 12\neq -28,$$

тобто, число *0* не є розв'язком рівняння. Підставивши кожне з решти чисел в рівняння, можна переконатися, щ розв'язком рівняння будуть два числа *2* і *(-2)*:

$$(-2)^4 + 2\cdot(-2)^2 + 12 \overset{?}{=} (-2)^6 - 28 \quad \Rightarrow \quad 16+8+12 \overset{?}{=} 64-28 \quad \Rightarrow \quad 36 = 36 .$$

$$2^4 + 2\cdot 2^2 + 12 \overset{?}{=} 2^6 - 28 \quad \Rightarrow \quad 16+8+12 \overset{?}{=} 64-28 \quad \Rightarrow \quad 36 = 36 .$$

Поняття рівносильних рівнянь. Рівняння з однією змінною (невідомою) величиною можуть:

- не мати розв'язків;
- мати один або декілька розв'язків;
- мати нескінченно багато розв'язків.

Наведемо приклади рівнянь, які ілюстрували б це твердження.

- Рівняння: $\cos x = 4$, не має розв'язків.
- Рівняння: $2x = 4$, має один *розв'язок*: $x = 2$.
- Рівняння: $x^2 = 4$, має два розв'язки: $x_1 = 2, \quad x_2 = -2$.
- Рівняння: $\cos x = 1$, має нескінченно багато розв'язків:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2\pi, \quad x_3 = 4\pi, ..., \quad x_n = 2\pi n, ...$$

Визначення поняття *рівносильні рівняння*. Два рівняння називаються *рівносильними*, якщо *всі* розв'язки першого рівняння є і розв'язками другого рівняння і навпаки, *всі* рішення другого рівняння є рішеннями першого рівняння. Або *обидва рівняння не мають розв'язків*.

1.6. Поняття функції

Поняття функції так само як і поняття множини, або поняття числа належать до категорії невизначених понять математики. Тому, звичайно всілякі визначення поняття функції зводяться до *опису* цього поняття. Причому ці описи, в залежності від передбачуваного використання поняття функції, різні. Відзначимо, що найбільш загальне тлумачення поняття функції пов'язано з деякими теоретико-множинними поняттями і тут ми його обговорювати не будемо.

Розглянемо попередньо поняття *залежності значень двох змінних величин* і *y* одне від одного. Нехай має місце рівність двох математичних виразів:

$F\left(x,y\right) \, i \, \varPhi\left(x,y\right)$ кожен з яких або хоча б одне з них містить дві змінні величини:

$$F\left(x,y\right)=\varPhi\left(x,y\right).(1.7)$$

Наприклад, якщо:

$F\left(x,y\right)=x+2y \quad i \quad \varPhi\left(x,y\right)=x\cdot(y+3),$

то рівність (1.7) матиме такий вигляд:

$$x+2y=x\cdot(y+3). \tag{1.8}$$

де x і y змінні.

Рівність цих двох математичних виразів матиме місце не при будь-яких значеннях змінних x і y. Дійсно, вибравши довільно, наприклад, $x=2$ і $y=4$ та підставивши їх у вираз (1.8), отримаємо, що

$F\left(2,-4\right)\overset{?}{=}\varPhi\left(2,-4\right) \quad \Rightarrow \quad 2+2\cdot\left(-4\right)=2\cdot\left(\left(-4\right)+3\right) \quad \Rightarrow \quad -5\neq-2$

рівність не має місця.

Якщо числове значення однієї із змінних, наприклад x, вибирати довільно, а значення y якось «підбирати», то рівність (1.8) можна забезпечити. Наприклад, $x=1$:

$1+2y=1\cdot(y+3) \quad \Rightarrow \quad 2y=y+2.$

Остання рівність «підказує», як вибрати числове значення іншої змінної величини y. Воно визначається рівністю: $2y=y+2$. Щоб ця рівність мала місце, значення змінної величини у треба покласти рівним 2, тоді:

$2y=y+2 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot2=2+2 \quad \Rightarrow \quad 4=4.$

і рівність (1.6.2) матиме місце.

У разі, якщо вибрати $x=3$, то вибір значення змінної y буде зумовлений рівністю, яка вийде, якщо в вираз (1.8) підставити $x=3$:

$x+2y=x\cdot(y+3) \quad \Rightarrow \quad 3+2y=3\cdot(y+3) \quad \Rightarrow \quad 2y=3\cdot y+6.$

Щоб отримана рівність мала місце, значення змінної величини *y* має дорівнювати *(-6)*.

Таким чином, якщо $x = 1$, то $y = 4$; якщо ж $x = 3$, то $y = -6$. Тобто, числове значення змінної величини *y*, залежить від числового значення змінної *x*. Це означає, що рівності (1.7), (1.8) визначають зв'язок між двома змінними величинами *x* і *y*. Отже, рівність двох математичних виразів (1.7), які містять дві змінні величини *x* і *y*, можна розуміти як спосіб завдання зв'язку між цими змінними величинами. Цей зв'язок будемо далі *називати функціональною залежністю* (зв'язком) між змінними *x* і *y*.

Якщо рівність (1.7) можна записати так, що одна змінна величина виражена через іншу, наприклад:

$$F\left(x,y\right) = \Phi\left(x,y\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = f(x) \qquad (1.9)$$

то змінна *x* називається *незалежною змінною або аргументом*, а змінна *y* - *залежною або функцією*. Наприклад, якщо зв'язок між змінними величинами *x* і *y* заданий рівністю:

$$\frac{y}{2} - 2x^2 = 3 \cdot x^2 - \frac{y}{2} + 1,$$

то цю рівність можна записати так:

$$y = 5x^2 + 1$$

Буква f у формулі (1.9) має сенс математичних дій, за допомогою яких реалізується функціональний зв'язок між змінними *x* і *y*. Тут доречно нагадати, що змінні величини позначаються не тільки буквами *x* і *y*. Так наприклад, якщо рівність має вигляд: $y = f(t)$ або $x = f(t)$, то це означає, що в першому випадку *y* - це функція, а *t* - це аргумент, а в другому *x* - це функція, а *t* - це аргумент.

Зауваження.

1. Зв'язок між двома змінними величинами x і y, який реалізується за допомогою математичного виразу (1.7) далі будемо називати *неявним способом завдання функції.*

2. У разі, якщо цей математичний вираз можна записати у вигляді формули (1.6.3), то будемо говорити, що *функція задана явно*.

3. Задати функцію за допомогою формул (1.7) або (1.9) - це означає поставити функцію аналітично. Інші, не аналітичні способи завдання функції, будуть розглянуті далі.

Пояснення.

1. *Функція* - це назва (ім'я), яке привласнюється залежній *зміній* величині (традиційне позначення - y).

2. Числові значення y цієї залежної змінної величини виходять в результаті математичних дій (у формулі (1.9) вони позначені літерою f), які виконуються над незалежною змінною величиною (традиційне позначення - x).

1.7. Поняття нерівності

Якщо між двома математичними виразами A і B є знак нерівності: $A > B$ або $A < B$, то математичний вираз називається нерівністю (строгою). Якщо: $A \leq B$ або $A \leq B$ - нерівність називається *нестрогою*.

Властивість 1. Якщо до обох частин нерівності $A > B$ (або $A < B$) додати або відняти одне і теж число або математичний вираз C, то знак нерівності при такому перетворенні не зміниться.

Тобто, якщо $A > B$, то:

$$\begin{aligned} A > B \quad &\to \quad A + C > B + C, \\ A > B \quad &\to \quad A - C > B - C. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Якщо, то:

$$\begin{aligned} A < B \quad &\to \quad A + C < B + C, \\ A < B \quad &\to \quad A - C < B - C. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Властивість 2. Якщо обидві частини нерівності $A > B$ (або $A < B$) помножити на одне і теж число або математичний вираз *C*, то знак нерівності при такому перетворенні:

- *не зміниться*, якщо $C > 0$;
- *зміниться* на протилежний, якщо $C < 0$.

Тобто:

$$\text{якщо } A > B \text{ и } C > 0, \text{ то } \quad A \cdot C > B \cdot C; \tag{1.12}$$

$$\text{якщо } A > B \text{ и } C < 0, \text{ то } \quad A \cdot C < B \cdot C; \tag{1.13}$$

$$\text{якщо } A < B \text{ и } C > 0, \text{ то } A \cdot C < B \cdot C; \tag{1.14}$$

$$\text{якщо } A < B \text{ и } C < 0, \text{ то } A \cdot C > B \cdot C. \tag{1.15}$$

$$\text{якщо } A > B \text{ и } C > 0, \text{ то } \frac{A}{C} > \frac{B}{C}; \tag{1.16}$$

$$\text{якщо } A > B \text{ и } C < 0, \text{ то } \frac{A}{C} < \frac{B}{C}; \tag{1.17}$$

$$\text{якщо } A < B \text{ и } C > 0, \text{ то } \quad \frac{A}{C} < \frac{B}{C}; \tag{1.18}$$

$$\text{якщо } A < B \text{ и } C < 0, \text{ то } \quad \frac{A}{C} > \frac{B}{C}. \tag{1.19}$$

Розділ 2

БАГАТОЧЛЕНИ, ОДНОЧЛЕНИ І ДІЇ НАД НИМИ

2.1. Поняття одночлена

Розглянемо математичні вирази, в яких немає знаків «більше», «менше» і «дорівнює», а присутні тільки числа, букви і дії над ними. Класифікація таких математичних виразів і привласнювання їм спеціальних назв здійснюється згідно з тим, які дії виконуватимуться в них.

Визначення поняття *одночлен*. *Одночлен* - це добуток дійсного числа на буквений вираз, який представляє собою добуток букв, показник степеня яких є натуральним числом.

Пояснення. Наприклад, вираз: $21 \cdot a^3 \cdot b^2$ є одночленом. При запису одночлена знак множення зазвичай не пишуть, тобто одночлен $21 \cdot a^3 \cdot b^2$ можна записати так: $21a^3b^2$.

Вираз: $5a^{\frac{1}{2}}b^3$ не є одночленом тому, що показник степеня у літери *a* дробовий, так само як і вираз $3a^2b^{-3}$ не є одночленом - у літери *b* показник степеня від'ємний. У виразі $21 + a^2b^3$ присутня дія додавання, тому цей вислів не є одночлен.

Зауваження.

1. Число в одночлені називається коефіцієнтом одночлена. Наприклад, у одночлена $21a^2b^3$ коефіцієнт дорівнює *21*; a^2b^3 - це буквений вираз. Якщо до складу одночлена входять тільки букви, наприклад c^2b^3y, то його коефіцієнтом є число *1*, яке зазвичай не пишуть, тобто: $1 \cdot c^2b^3y = c^2b^3y$.

2. *Стандартною формою запису одночлена є запис*, в якому перший множник одночлена - це число (коефіцієнт), а всі інші множники - букви, які не повторюються і розташовуються в будь-якому порядку.

Наприклад, $a^2 \cdot 5 \cdot b$ - це одночлен, який записаний не в стандартному вигляді, тому що першим множником є не число 5, а буква. Стандартна запис цього одночлена повинен виглядати як $5a^2b$ або $5ba^2$.

У одночлена $21a^2 \cdot b \cdot a^3$ буква а повторюється два рази, тому він записаний не в стандартному вигляді. Якщо використовувати властивості операції піднесення до степеня і записати: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, то отримаємо стандартну форму цього богаточлена у вигляді: $21ba^5$ або $21a^5b$. Порядок розташування букв в одночленні значення не має.

3. Степінь одночлена - це сума показників степенів всіх літери. Наприклад, степінь одночлена $7a^2b^3$ дорівнює: $2 + 3 = 5$.

Приклад. Які або який з наведених виразів (1 - 4) є одночленом?

$$1)\ 7a^{-2}b^{3};\quad 2)\ \frac{5x^{2}}{y^{3}};\quad 3)\frac{xb^{3}}{8};\quad 4)\ 0{,}1\cdot b^{3}y;\quad 5)\ 12a^{5{,}2}b^{3}y;\quad 6)\ 1+4ab^{3}$$

Розв'язання. Вираз *(1)* не є одночленом, тому що один з показників степеня є від'ємним числом. Вираз *(2)* не є одночленом тому, що має місце операція ділення на y^{3}. Вираз *(5)* не є одночленом тому, що показник степеня у літери *а* дробовий. У виразі *(6)* присутня дія додавання, тому цей вираз не є одночленом. Одночленами є тільки варіанти *(3)* і *(4)*.

Приклад. Які або якій з наведених одночленів (1 - 4) записані в стандартній формі?

$$1)\ a^{2}8b^{3};\quad 2)\ 21a^{2}\cdot b\cdot a^{3};\quad 3)\,3xb^{3};\quad 4)\ 1{,}7\cdot b^{5}y^{3};$$

Розв'язання. Одночлен (1) записаний не в стандартному вигляді, тому що першим множником повинен бути коефіцієнт 8. Стандартний запис цього одночлена повинен виглядати, як $8a^{2}b^{3}$ або $8a^{2}b^{3}$.

У одночлен (2) буква а повторюється два рази, тому він записаний не в стандартному вигляді. Якщо використовувати властивості операції піднесення до степеня і записати: $a^{2}\cdot a^{3}=a^{5}$, то отримаємо стандартну форму цього многочлена у вигляді: $21ba^{5}$ або $21a^{5}b$.

Порядок розташування букв в одночлені значення не має. Одночлени (3) і (4) записані в стандартному вигляді.

2.2. Поняття богаточлена

Визначення поняття *багаточлена.* Якщо над декількома одночленами виконуються дії додавання, віднімання, то такий математичний вираз називається *багаточленом*.

Пояснення. Розглянемо вираз: $5x^{4}y^{2}+3x-y^{5}$. Кожен з доданків цього виразa: $5x^{4}y^{2}$, $3x$ і y^{5} є одночленом і над ним виконуються дії додавання, віднімання, тому цей вираз є багаточленом.

Зауваження.

1. Якщо багаточлен складається з двох одночленів, то він називається *двочленом*. Наприклад, вираз $\left(3x-2y^5\right)$ - це *двочлен*.

2. Якщо багаточлен складається з трьох одночленів, то він називається *тричленом*. Наприклад, $\left(5x^4y^2+3x-2y^5\right)$ - це *тричлен*.

3. Багаточлен написаний в стандартному вигляді, якщо всі одночлени багаточлена написані в стандартному вигляді і серед них немає подібних. Наприклад, багаточлен: $5a^2c+3ac-ac^3+ac$ записаний не в стандартному вигляді, тому що другий і третій одночлени - подібні. Якщо їх привести, то вийде багаточлен, записаний в стандартному вигляді:

$$5a^2c+3ac-ac^3+ac=5a^2c+\left(3ac+ac\right)-ac^3=5a^2c+4ac-ac^3.$$

4. *Степенем багаточлена* називається найбільший із степенів одночленів, з яких він складається.

Приклад. Знайдіть степінь багаточлена: $2a^2-5a^4+3ab-7{,}2b^3a^2$.

Розв'язання. Щоб визначити степінь заданого багаточлена треба знайти степені всіх одночленів:

$2a^2b \quad \Rightarrow \quad 2+1=3;$ $\qquad 5a^4 \quad \Rightarrow \quad 4;$

$3ab \quad \Rightarrow \quad 1+1=2;$ $\qquad 7{,}2b^3a^2 \quad \Rightarrow \quad 3+2=5$

Найбільший степінь *5* має останній одночлен, тому степінь багаточлена дорівнює *5*.

Зауваження.

1. Багаточлен другого степеня:

$$ax^2+bx+c \quad (2.1)$$

називається квадратним тричленом. У формулі (6.2.1*) a, b, c* - коефіцієнти тричлена, *x* - змінна величина.

Формула (2.1) - це загальноприйнята, стандартна форма запису квадратного тричлена. Наприклад, коефіцієнти тричлена $2x^2+4x-6$ рівні:

$a=2, b=4, c=-6$.

Дискримінантом квадратного тричлена називається число, яке обчислюється за формулою:

$$D = b^2 - 4ac \quad (2.2)$$

Наприклад, дискримінант тричлена $2x^2 + 4x - 6$ буде дорівнює:

$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64$.

Числове значення змінної величини *x*, підстановка якого перетворює квадратний тричлен на нуль, називається *коренем квадратного тричлена*.

Наприклад, у тричлена $2x^2 + 4x - 6$ є два кореня - це числа *1* і *(-3)*. Перевіримо, що число *1* є коренем тричлена. Для цього треба змінній величини *x* дати значення *1*. Підставляючи $x = 1$, отримаємо:

$2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 6 = 0$.

Якщо підставити $x = -3$, то:

$2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 6 = 2 \cdot 9 - 12 - 6 = 0$.

Приклад. Запишіть квадратний тричлен: $-4 + 3x^2 - x$ в стандартному вигляді і вкажіть його коефіцієнти.

Розв'язання. Стандартна форма запису квадратного тричлена має вигляд:

$$ax^2 + bx + c$$

тому його треба записати в такий спосіб: $3x^2 - x - 4$. Його коефіцієнти рівні: $a = 3, b = -1, c = -4$.

Приклад. Обчисліть дискримінант квадратного тричлена: $-4x^2 + x - 3$.

Розв'язання. Напишемо коефіцієнти квадратного тричлена:

$a = -4, b = 1, c = -3$

і застосуємо формулу: $D = b^2 - 4ac$,

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-4)(-3) = -47.$

2.3. Дії над одночленами і багаточленами

Розглянемо правила виконання деяких дій над одночленами.

Множення одночлена на одночлен. Щоб помножити одночленна одночлен треба:

• перемножити коефіцієнти одночленів;

• використовуючи формулу: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, скласти степені з однаковими основами;

• написати отриманий одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Помножте одночлен $7a^3bx$ на одночлен $5ac^2$.

Розв'язання. $\left(7a^3bx\right)\cdot\left(5ac^2\right)=(7\cdot 5)\cdot\left(a^3\cdot a\right)\cdot b\cdot x\cdot c^2=35a^4bxc^2$.

Піднесення одночлена до степеня. Щоб піднести одночлен до степеня треба:

• піднести до степеня коефіцієнт одночлена;

• використовуючи формулу: $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$, піднести до степеня кожну з букв;

• записати отриманий одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Виконайте дію: $\left(7a^3bx\right)^2$.

Розв'язання. $\left(7a^3bx\right)^2 = 7^2\cdot\left(a^3\right)^2\cdot b^2\cdot x^2 = 49a^6b^2x^2$.

Ділення одночлена на одночлен. Щоб розділити одночлен на одночлен треба:

• виконати операцію ділення коефіцієнтів одночленів;

• використовуючи формулу, виконати дії над степенями з однаковими основами;

• записати отриманий одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Розділіть одночлен $\left(-15m^3n^5a^4\right)$ на одночлен $\left(5a^4mn^3\right)$.

Розв'язання. $\dfrac{-15m^3n^5a^4}{5a^4mn^3}=\left(\dfrac{-15}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{m^3}{m}\right)\cdot\left(\dfrac{n^5}{n^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a^4}{a^4}\right)=-3m^2n^2a^0=-3m^2n^2$.

Зауваження.

При діленні одночлена на одночлен в результаті може вийти математичний вираз, який не є одночленом.

Приклад. Розділіть одночлен $\left(5x^2y^3\right)$ на одночлен $\left(2x^4ay\right)$.

Розв'язання. $\dfrac{5x^2y^3}{2x^4ay} = \left(\dfrac{5}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{x^2}{x^4}\right) \cdot \left(\dfrac{y^3}{y}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right) = 2{,}5x^{-2}y^2a^{-1}$.

Отриманий вираз не є одночленом, тому що в його буквеному виразі присутні від'ємні показники степеня.

Зведення подібних членів. Якщо багаточлен складається з подібних одночленів, то їх суму, різницю можна записати у вигляді одного одночлена. Ця процедура називається зведенням подібних членів. Для цього необхідно:

- складти, відняти коефіцієнти подібних членів;
- приписати їх загальну буквену частину до отриманого коефіцієнта.

Приклад. Наведіть подібні члени в багаточлені:

$5a^2b + 3a^2 - 3a^2b + b - 3a^2 + 4b$.

Розв'язання. Згрупуємо подібні члени в заданому багаточлені:

$5a^2b + 3a^2 - 3a^2b + b - a^2 + 4b = \left(5a^2b - 3a^2b\right) + \left(3a^2 - a^2\right) + \left(b + 4b\right)$.

Зведемо подібні члени в кожній круглій дужці:

$5a^2b - 3a^2b = (5-3)a^2b = 2a^2b$;

$3a^2 - a^2 = (3-1)a^2 = 2a^2$;

$b + 4b = (1+4)b = 5b$.

В результаті отримаємо:

$\left(5a^2b - 3a^2b\right) + \left(3a^2 - a^2\right) + (b + 4b) = 2a^2b + 2a^2 + 5b$.

Додавання багаточленів. Для складання двох і більше багаточленів треба:

- «з'єднати» їх знаком «плюс»;

• розкрити (прибрати) дужки;

• звести подібні члени.

Приклад. Виконайте додавання двох багаточленів:

$\left(-5x^2+3x-3\right)$ і $\left(2x^2-x-4\right)$

Розв'язання.

$$\left(-5x^2+3x-3\right)+\left(2x^2-x-4\right)=-5x^2+3x-3+2x^2-x-4=$$

$$=\left(-5x^2+2x^2\right)+\left(3x-x\right)+\left(-3-4\right)=-3x^2+2x-7.$$

$$5a^2b-3a^2b=\left(5-3\right)a^2b=2a^2b;$$

$$3a^2-a^2=\left(3-1\right)a^2=2a^2;$$

$$b+4b=\left(1+4\right)b=5b.$$

В результаті отримаємо:

$$\left(5a^2b-3a^2b\right)+\left(3a^2-a^2\right)+\left(b+4b\right)=2a^2b+2a^2+5b\ .$$

Множення багаточлена на число. При множенні багаточлена на число треба коефіцієнт кожного багаточлена помножити на це число.

Приклад. Виконайте множення числа $\left(-4\right)$ на багаточлен:

$$2ax^2-3cx+ax.$$

Розв'язання. Виконаємо дію:

$$\left(-4\right)\cdot\left(2ax^2-3cx+ax\right)=-4\cdot 2ax^2+4\cdot 3cx-4\cdot 1ax=-8ax^2+12cx-4\ .$$

Зауваження.

1. Якщо перед багаточленом стоїть знак мінус, наприклад:

$$-\left(2ax^2-3cx+ax\right),$$

то це означає, що багаточлен множиться на число $\left(-1\right)$. Виконання дії множення призведе до зміни знака у кожного одночлена:

$$-\left(2ax^2-3cx+ax\right)=(-1)\cdot\left(2ax^2-3cx+ax\right)=$$
$$(-1\cdot 2)ax^2+\left(-1\cdot(-3)\right)cx+(-1\cdot 1)ax=-2ax^2+3cx-ax.$$

Віднімання многочленів. Для вирахування двох і більше багаточленів треба:
- «з'єднати» їх знаком «мінус»;
- розкрити (прибрати) дужки;
- звести подібні члени.

Приклад. Виконайте дію:

$$\left(4ax^2+3cx+2b\right)-\left(3b+5cx+2ax^2\right).$$

Розв'язання. Виконаємо дію:

$$\left(4ax^2+3cx+2b\right)-\left(3b-5cx+2ax^2\right)=4ax^2+3cx+2b-3b+5cx-2ax^2=$$
$$=2ax^2+8cx-b$$

Множення багаточлена на багаточлен. Щоб помножити багаточлен на багаточлен треба:

- кожен одночлен першого багаточлена помножити на кожен одночлен другого багаточлена;
- звести подібні члени.

Приклад. Виконайте множення багаточленів:

$$\left(4x^2+2b\right)\cdot\left(-2b+4x^2\right).$$

Розв'язання. Виконаємо дію:

$$\left(4x^2+2b\right)\cdot\left(-2b+4x^2\right)=4x^2\cdot\left(-2b+4x^2\right)+2b\cdot\left(-2b+4x^2\right)=$$
$$=-8bx^2+16x^2\cdot x^2-4b^2+8bx^2=16x^4-4b^2.$$

2.4. Формули скороченого множення

Формули, про яких тут піде мова, дозволяють скоротити обсяг технічної роботи, пов'язаної з перетвореннями багаточленів, зокрема з їх множенням. Успіх застосування формул скороченого множення пов'язаний з умінням побачити ту чи іншу формулу (або її фрагмент) в розглянутому математичному виразі. Часто ці формули присутні в ньому в дещо завуальованому вигляді, а видає їх присутність наявність характерних математичних виразів («структур»). До їх числа відносяться, наприклад, ті, що наведені у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

№	*«Структура» алгебраїчного виразу*	*Назва алгебраїчного виразу*
1	$A^2 + B^2$	сума квадратів
2	$A^2 - B^2$	різниця квадратів
3	$A^3 + B^3$	сума кубів
4	$A^3 - B^3$	різниця кубів
5	$2AB$	подвоєній добуток
6	$A^2 + B^2 + 2AB$	повний квадрат суми
7	$A^2 + B^2 - 2AB$	повний квадрат різниці
8	$A^2 + B^2 + AB$	неповний квадрат суми
9	$A^2 + B^2 - AB$	неповний квадрат різниці
10	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	куб суми
11	$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	куб різниці

Квадрат суми (різниці) двох виразів. Піднесення до квадрата суми або різниці двох математичних виразів a і b можна виконати за такими формулами:

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \tag{2.3}$$

$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab. \tag{2.4}$$

Вираз $a^2+b^2\pm 2ab$ називається *повним квадратом сум (різниці)a* і b.

Приклад. Розкрийте дужки: $(2x+3y)(2x+3y)$.

Розв'язання.

$$(2x+3y)(2x+3y)=(2x+3y)^2=$$
$$=(2x)^2+(3y)^2+2\cdot 2x\cdot 3y=4x^2+9y^2+12xy.$$

Куб суми (різниці) двох виразів. Піднесення до куба суми або різниці двох математичних виразів a і b можна виконати за такими формулами:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \qquad (2.5)$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (2.6)$$

Вираз $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ називається кубом сум (різниці) a і b.

Приклад. Розкрийте дужки: $(2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$.

Розв'язання.

$$(2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)=(2x+3y)^3=$$
$$=(2x)^3+(3y)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot(3y)^2\cdot 2x=$$
$$=8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2.$$

Добуток різниці двох виразів на їх суму.

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2. \qquad (2.7)$$

Вираз називається *різницею квадратіва* і b.

Добуток суми (різниці) двох виразів на неповний квадрат їх різниці (суми).

$$(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3 \qquad (2.8)$$

$$(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3. \qquad (2.9)$$

Вираз $a^2+b^2\pm ab$ називається неповним квадратом суми (різності) a і b.

Приклад. Розкрийте дужки: $\left(2x+3y\right)\left(4x^2+9y^2-6xy\right)$..

Розв'язання.

$$\left(2x+3y\right)\left(4x^2+9y^2-6xy\right)=\left(2x+3y\right)\left(\left(2x\right)^2+\left(3y\right)^2-2x\cdot 3y\right)=$$
$$=\left(2x\right)^3+\left(3y\right)^3=8x^3+27y^3.$$

2.5. Розкладання багаточлена на множники

Від стандартної форми запису багаточлена у вигляді суми одночленів іноді зручно перейти до іншої форми його запису - у вигляді добутку багаточлена або багаточленів і одночлена. Таке перетворення багаточлена носить назву *розкладання на множники*.

Визначення поняття *розкладання багаточлена на множники.* Якщо позначити буквою A довільний многочлен, то запис цього багаточлена у вигляді добутку:

$$A=A_1\cdot A_2,$$

де A_1 и A_2 і якісь многочлени, називається *розкладання багаточлена A* на множники A_1 і A_2.

Прикладами таких перетворень є формули скороченого множення (2.3) - (2.9), якщо на них подивитися не «зліва направо», а «справа наліво». Пояснимо це твердження.

Як приклад розглянемо формулу (2.7):

$$\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)=a^2-b^2,$$

яка будучи так записаною, дозволяє, не виконуючи операції множення, відразу записати результат множення у вигляді багаточлена a^2-b^2. Тобто, добуток багаточленів, за допомогою формул скороченого множення, зводиться до багаточлена, записаного в стандартному вигляді.

Якщо ж в цій формулі поміняти місцями ліву і праву частини рівності, тобто записати її так:

$$a^2-b^2=\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right),$$

то їй можна надати інший зміст, а саме: $a^2 - b^2$, багаточлен, записаний в стандартному вигляді, представлений у вигляді добутку двох багаточленів $(a+b)$ і $(a-b)$, тобто розкладений на множники $(a+b)$ і $(a-b)$.

Переходячи до питання про методи розкладання багаточленів на множники, треба відзначити, що один з методів пов'язаний із застосуванням формул скорченого множення (2.3) - (2.9).

Метод розкладання багаточлена на множники: формули скорченого множення.

Цей метод розкладання багаточлена на множники може бути застосований до багаточленів, які мають якусь характерну структуру. Таким багаточленів зазвичай привласнюють спеціальні «імена». Зокрема, якщо багаточлен має структуру:

• *різниці квадратів,* то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b); \tag{2.10}$$

• *суми кубів,* то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right); \tag{2.11}$$

• *різниці кубів,* то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right); \tag{2.12}$$

• *повного квадрата суми*, то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2; \tag{2.13}$$

• *повного квадрата різниці*, то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2; \tag{2.14}$$

• *куба суми*, то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3;(2.15)$$

• *куба різниці,* то він може розкладатись на множники за такою формулою:

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3. \tag{2.16}$$

Приклад. Розкладіть на множники: $4a^2-9$.

Розв'язання. Застосування формул скороченого множення пов'язано з наявністю (і їх треба побачити!) стандартних математичних структур в розглянутому багаточлені.

$$4a^2-9=(2a)^2-3^2 \overset{(6.5.1)}{=} (2a-3)\cdot(2a+3).$$

Метод розкладання багаточлена на множники: винесення спільного множника за дужки.

Для реалізації цього методу треба:

1. визначити загальний множник в розглянутому багаточлені;

2. розділити на нього все одночлени, з яких складається багаточлен;

3. записати добуток загального множника на отриману частку, взявши цю частку в дужки.

Приклад. Розкладіть на множники: $8x^4a^2-2a^5x^3$.

Розв'язання. Застосуємо метод винесення спільного множника за дужки.

(1) Загальними множниками є: число 2, a^2, x^3. Зверніть увагу, що в якості показників степенів у букв a і x вибираються найменші степені. Отже, загальним множником є одночлен $2a^2x^3$.

(2) і (3) $$8x^4a^2-2a^5x^3=2a^2x^3\cdot\left(\frac{8x^4a^2}{2a^2x^3}-\frac{2a^5x^3}{2a^2x^3}\right)=2a^2x^3\cdot\left(4x-a^3\right).$$

Метод розкладання багаточлена на множники: угруповання.

Якщо в розглянутому багаточлені немає загальних множників і немає «стандартних структур» (формули скороченого множення), то іноді можна шляхом групування елементів багаточлена штучно створити загальний множник. Отриманий таким чином загальний множник потім виноситься за дужки. Успіх застосування методу групування часто залежить від того наскільки вдало згруповані одночлени, з яких складається даний багаточлен. Проілюструємо застосування цього методу таким прикладом.

Приклад. Розкладіть на множники: $7a+7c+ax+cx$.

Розв'язання. Згрупуємо перший одночлен з другим, третій з четвертим:

$$7a+7c+ax+cx=(7a+7c)+(ax+cx)=7(a+c)+x(a+c)=$$
$$=(a+c)(7+x)$$

$$7a+7c+ax+cx=(7a+7c)+(ax+cx)=7(a+c)+x(a+c)=$$
$$=(a+c)(7+x).$$

Розділ 3

АЛГЕБРАЇЧНИ ДРОБИ І ДІЇ НАД НИМИ

3.1. Поняття алгебраїчного дробу

Багаточлени часто називають цілими математичними виразами. Термін «цілий», який використовується тут по відношенню до багаточленів, вже використовувався при іншій нагоді - для позначення безлічі цілих чисел. Такий збіг не випадковий. Справа в тому, що між множиною всіляких математичних виразів і множиною дійсних чисел можна провести певну аналогію.

• Множина цілих чисел є «аналогом» множини багаточленів.

• Множина раціональних чисел (тобто чисел, які можна записати у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де n – цілі числа, m - натуральні числа) є « аналогом» множини алгебраїчних дробів $\frac{A}{B}$, де чисельникA і знаменник B - багаточлени.

Визначення поняття *алгебраїчний дріб.* Математичний вираз вигляду $\frac{A}{B}$ називається алгебраїчним дробом, якщо А і В є багаточленами, причому $B \neq 0$.

Приклад. Вкажіть, які з наведених математичних виразів, є алгебраїчними дробами.

$$А)\ \frac{1+a^2}{2};\quad Б)\ \frac{a^2+3x}{3};\quad В)\ \frac{5}{x^3+4y};\quad Г)\ \frac{2x^3+4}{x+1};\quad Д)\ a^2-cx^2.$$

Розв'язання. Математичний вираз є алгебраїчним дробом, якщо, по-перше, він є дробом, і по-друге, знаменник дробу містить буквений вираз. Ці дві вимоги задовольняють варіанти *В)* і *Г).*

Нагадаємо, що операція ділення на нуль невизначена. Тому, в будь-якому алгебраїчному дробу знаменник не повинен дорівнювати нулю. Ця умова може призвести до обмежень на числові значення букв, які завжди містяться в знаменнику алгебраїчного дробу.

3.2. Область допустимих значень (ОДЗ) математичного виразу

Визначення поняття *область допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчного дробу.* Алгебраїчний дріб вигляду $\frac{A}{B}$ визначений (тобто, має сенс) тільки за умови, що

$$B \neq 0. \tag{3.1}$$

Нерівність (1) визначає область (множину) допустимих числових значень (ОДЗ) букв, які входять в розглянутий дріб. Позначається ця множина традиційно буквою D:

$$D\left(\frac{A}{B}\right) = \{B \neq 0\}.$$

Приклад. Запишіть ОДЗ для алгебраїчного дробу $\dfrac{2x^3+4}{x+1}$.

Розв'язання. Дріб має сенс, тобто є визначеним, якщо знаменник дробу не дорівнює нулю. Тому, множину D можна задати умовою:

$$x+1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq -1. \qquad (3.2)$$

Інший спосіб запису множини D має вигляд:

$$D\left(\frac{2x^3+4}{x+1}\right)=\{x|\ x+1\neq 0\}. \qquad (3.3).$$

Множину D можна записати, використовуючи «інтервальні» позначення:

$$D=(-\infty;-1)\cup(-1;\infty) \qquad (3.4)$$

Це ОДЗ даного дробу визначає обмеження на можливі числові значення, яких може набирати буква x.

Формули (3.2) - (3.4) - це аналітичні способи запису ОДЗ. Для графічного зображення допустимих значень x будемо використовувати позначення і зображення числових множин на числовій осі. Наприклад, множина або область допустимих значень розглянутого прикладу графічно може бути представлена так:

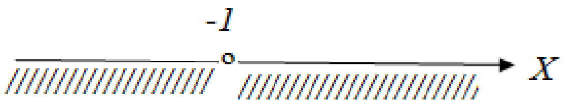


Рисунок 3.1.

Обмеження на числові значення букв (змінних), які виконуються в математичному виразі, можуть бути пов'язані не тільки з операцією ділення. Всі зворотні операції мають цей «недолік». У таблиці 1 наведено список операцій, які породжують ті чи інші обмеження на можливі числові значення богаточлена A.

Таблиця 3.1

	Операція	*Умова, за якої операція може виконуватись*
1.	Ділення $\dfrac{1}{A}$	$A\neq 0$
2.	Добуття кореня парного степеня $\sqrt[2n]{A}$	$A\geq 0$

3.	Логарифмування $log_b A$	$A > 0$
4.	Обернені тригонометричні дії $arcsin A, \quad arccos A$	$-1 \le A \le 1$

3.3. Основна властивість алгебраїчного дробу

Якщо чисельник і знаменник алгебраїчного дробу помножити або розділити на одне й те саме не рівне нулю вираз, то величина дробу при такому перетворенні не зміниться.

Наприклад,

$$\frac{x+2a}{a-x} = \frac{(x+2a)\cdot(a+x)}{(a-x)\cdot(a+x)} .$$

Приклад. Запишіть дроби $\frac{a}{a-b}$ і $\frac{x}{x-y}$ так, щоб у них були однакові знаменники.

Розв'язання. Використовуючи основну властивість дробу, помножимо чисельник і знаменник першого дробу на один і той же вираз $(x-y)$, припускаючи, що: $x-y \neq 0$:

$$\frac{a}{a-b} = \frac{a\cdot(x-y)}{(a-b)\cdot(x-y)},$$

а чисельник і знаменник другого дробу на вираз $(a-b)$,, припускаючи, що:

$a-b \neq 0$:

$$\frac{x}{x-y} = \frac{x\cdot(a-b)}{(x-y)\cdot(a-b)}.$$

Одержані таким чином дроби мають одинакові знаменники.

3.4. Скорочення дробів

Скоротити дріб - це означає розділити його чисельник і знаменник на один і теж, не рівний нулю, вираз. Скорочення дробів виконується з метою спрощення математичних виразів. Тому, вираз, на якій ділиться його чисельник і знаменник має бути загальним дільником.

Приклад. Виконайте скорочення дробу:

$$\frac{(a-2c)(a+c)}{(a+c)(a-c)}\ .$$

Розв'язання. У чисельника і знаменника даного дробу є спільний дільник: $(a+c)$, тому виконаємо скорочення (поділ чисельника і знаменника) на цей вислів:

$$\frac{(a-2c)(a+c)}{(a+c)(a-c)}=\frac{\dfrac{(a-2c)(a+c)}{(a+c)}}{\dfrac{(a+c)(a-c)}{(a+c)}}=\frac{a-2c}{a+c}.$$

Зауваження. Якщо чисельник і знаменник вихідного дробу багаточлени, то щоб виконати дію скорочення цього дробу, треба попередньо його чисельник і знаменник розкласти на множники. Якщо в результаті цього розкладання в чисельнику і знаменнику дробу з'являться спільні множники, то виконати скорочення на ці множники.

Приклад. Виконайте скорочення дробу:

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}\ .$$

Розв'язання. Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, використовуючи формули:

$$a^2-x^2=(a-x)(a+x);\quad a^2+2ax+x^2=(a+x)^2=(a+x)(a+x).$$

Якщо підставити в вихідний дріб ці розкладання:

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(a+x)},$$

то видно, що чисельник і знаменник дробу містять загальний множник $(a+x)$. Тому, можна виконати скорочення дробу, розділивши чисельник і знаменник дробу на спільний множник $(a+x)$:

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(a+x)}=\frac{\dfrac{(a-x)(a+x)}{(a+x)}}{\dfrac{(a+x)(a+x)}{(a+x)}}=\frac{a-x}{a+x}.$$

3.5. Дії з алгебраїчними дробами: додавання (віднімання) дробів

Найбільш простим є випадок, коли *у всіх дробів однаковий знаменник*. Результатом складання (вирахування) таких дробів є дріб, знаменник якого такий же як і у вихідних дробів, а чисельник дорівнює сумі (різниці) чисельників цих дробів. Після виконання дії додавання дробів, в отриманому дробу треба виконати операцію скорочення, якщо це можливо.

Приклад. Знайдіть суму дробів:

$$\frac{ax}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{a^2}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{x+a}{a^2\cdot(x+a)}\ .$$

Розв'язання. Оскільки знаменники всіх дробів однакові, то в результаті вийде дріб з таким же знаменником, а чисельник дорівнюватиме сумі чисельників всіх дробів, тобто:

$$\frac{ax}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{a^2}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{x+a}{a^2\cdot(x+a)}=\frac{ax+a^2+x+a}{a^2\cdot(x+a)}.$$

Щоб спробувати виконати скорочення отриманого дробу, треба розкласти чисельник на множники. Для цього згрупуємо перші два доданки чисельника і два останніх:

$$ax+a^2+x+a=\left(ax+a^2\right)+(x+a)=a(x+a)+(x+a)=(x+a)(a+1).$$

Підставимо отриманий результат в чисельник дробу і виконаємо скорочення:

$$\frac{ax+a^2+x+a}{a^2\cdot(x+a)}=\frac{(x+a)(a+1)}{a^2\cdot(x+a)}=\frac{a+1}{a^2}.$$

Приклад. Виконайте дії:

$$\frac{3x}{x^2-4cx+c^2-1}-\frac{4x-2c+5}{x^2-4cx+c^2-1}+\frac{2x-3c+4}{x^2-4cx+c^2-1}\ .$$

Розв'язання. Знаменники всіх дробів однакові, тому в результаті вийде дріб з таким же знаменником. Чисельник дорівнюватиме сумі і різниці чисельників всіх дробів:

$$\frac{3x}{x^2-4cx+c^2-1}-\frac{4x-2c+5}{x^2-4cx+c^2-1}+\frac{2x-3c+4}{x^2-4cx+c^2-1}=$$

$$=\frac{3x-(4x-2c+5)+(2x-3c+4)}{x^2-4cx+c^2-1}.$$

Виконаємо тотожні перетворення в чисельнику - розкриємо дужки і зведемо подібні члени:

$$3x-(4x-2c+5)+(2x-3c+4)=3x-4x+2c-5+2x-3c+4=x-c-1\ ..$$

В результаті вийде такий дріб:

$$\frac{x-c-1}{x^2-4cx+c^2-1}.$$

Розкладемо знаменник на множники:

$$x^2-4cx+c^2-1=\left(x^2-4cx+c^2\right)-1=(x-c)^2-1^2=$$

$$=(x-c-1)(x-c+1).$$

Тепер можна виконувати скорочення дробу:

$$\frac{x-c-1}{x^2-4cx+c^2-1}=\frac{x-c-1}{(x-c)^2-1}=$$

$$=\frac{x-c-1}{(x-c-1)(x-c+1)}=\frac{1}{x-c+1}.$$

Додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками.

Щоб скласти (відняти) дроби з різними знаменниками, треба кожен дріб перетворити так, щоб у всіх дробів був однаковий знаменник. Ця процедура називається *зведення дробів до спільного знаменника*. Потім скласти (відняти) одержані таким чином дроби за правилом додавання дробів з однаковими знаменниками.

Алгоритм зведення дробів до спільного (однакового) знаменника.

Для того, щоб привести дроби до спільного найпростішого (найменшого) знаменника треба виконати наступні дії.

- Розкласти знаменник кожного дробу на множники.
- Записати спільний знаменник як добуток всіх різних множників з найбільшим степенем.
- Визначити та записати для кожного дробу додаткові множники, тобто множники, на які треба помножити чисельник і знаменник кожного дробу так, щоб у всіх дробів був однаковий знаменник.
- Застосувати правило додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

Приклад. Виконайте дії:

$$\frac{3}{x^3-x^2}+\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^3-x}=\frac{3}{x^2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

Розв'язання. Оскільки у дробів різні знаменники, то можна застосувати алгоритм складання (вирахування) дробів з різними знаменниками.

Крок 1. Розкладемо знаменник кожного дробу на множники:

$$x^3-x^2=x^2(x-1); \qquad x^2+2x+1=(x+1)^2=(x+1)(x+1);$$

$$x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x(x-1)(x+1).$$

Крок 2. Напишемо загальний знаменник як добуток всіх різних множників з найбільшим степенем:

$$\frac{2}{x^3-x^2}+\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^3-x}=\frac{2}{x^2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{\ldots\ldots\ldots}{x^2(x-1)(x+1)^2}.$$

Крок 3. Визначимо і напишемо для кожного дробу додаткові множники. Для цього порівняємо знаменники кожного дробу зі спільним знаменником:

$x^2(x-1)(x+1)^2$.

З порівняння знаменника першого дробу $x^2(x-1)$ зі спільним знаменником $x^2(x-1)(x+1)^2$ випливає, що його треба помножити на $(x+1)^2$. Це і є додатковий множник для першого дробу.

Знаменник другого дробу $(x+1)^2$ порівнюємо з $x^2(x-1)(x+1)^2$ - додатковий множник: $x^2(x-1)$.

Знаменник третього дробу $x(x+1)(x-1)$ порівнюємо з $x^2(x-1)(x+1)^2$ - додатковий множник: $x(x+1)$. Тепер кожний дріб можна записати в такий спосіб:

$$\frac{2}{x^2(x-1)}=\frac{2\cdot(x+1)^2}{x^2(x-1)(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1\cdot x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{1\cdot x(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}=\frac{x(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}.$$

Крок 4. Застосуємо правило додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{2}{x^3-x^2}+\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^3-x}=\frac{2}{x^2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{2\cdot(x+1)^2}{x^2(x-1)(x+1)^2}+\frac{x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}-\frac{x(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot(x+1)^2+x^2(x-1)-x(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}.$$

При виконанні додавання (віднімання) дробів звичайно використовують певну форму запису перетворень, які виконуються.

3.6. Дії з алгебраїчними дробами: множення дробів

Результатом множення двох дробів є дріб, чисельник якого є добуток чисельників вихідних дробів, а знаменник - добуток знаменників вихідних дробів.

Приклад. Виконайте множення дробів: $\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{a^2-ax}{(a-x)^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{a^2-ax}{(a-x)^2}=\frac{\left(a^2-x^2\right)\cdot\left(a^2-ax\right)}{4ax\cdot(a-x)^2}.$$

Якщо можливо, то отриманий дріб треба скоротити:

$$\frac{\left(a^2-x^2\right)\cdot\left(a^2-ax\right)}{4ax\cdot(a-x)^2}=\frac{(a-x)\cdot(a+x)\cdot a\cdot(a-x)}{4ax\cdot(a-x)^2}=\frac{(a-x)^2\cdot(a+x)\cdot a}{4ax\cdot(a-x)^2}=\frac{a+x}{4x}.$$

Таким чином:

$$\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{a^2-ax}{(a-x)^2}=\frac{a+x}{4x}.$$

3.7. Дії з алгебраїчними дробами: ділення дробів

Дію ділення двох дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{m}{n}$ можна «замінити» дією множення за таким правилом:

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m} \quad .$$

Далі слід застосувати правило множення дробу на дріб.

Приклад. Виконайте ділення дробів: $\frac{a^2-x^2}{4ax}:\frac{3a-3x}{6ax^3}$.

Розв'язання. $\frac{a^2-x^2}{4ax}:\frac{3a-3x}{6ax^3}=\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{6ax^3}{3a-3x}=\frac{\left(a^2-x^2\right)\cdot 6ax^3}{4ax\cdot(3a-3x)}$.

Скоротимо отриманий дріб:

$$\frac{\left(a^2-x^2\right)\cdot 6ax^3}{4ax\cdot\left(3a-3x\right)}=\frac{\left(a-x\right)\cdot\left(a+x\right)\cdot 6ax^3}{4ax\cdot 3\cdot\left(a-x\right)}=\frac{\left(a+x\right)\cdot x^2}{2}.$$

ЛЕКЦІЯ 3

РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Розділ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Поняття рівняння

Якщо має місце рівність двох математичних виразів $f(x)$ і $\varphi(x)$, в яких x - змінна величина, то рівність:

$$f(x)=\varphi(x), \tag{1.1}$$

прийнято називати *рівнянням з однієї змінною величиною*, яку часто називають невідомою величиною.

Зауваження.

1. Математичні вирази можуть містити і кілька змінних величина, наприклад, дві x і y. У цьому випадку рівняння матиме такий вигляд:

$$f(x,y)=\varphi(x,y) \tag{1.2}$$

і називається рівнянням з двома змінними (невідомими) *величинами.*

2. Одне з математичних виразів у формулах (1.1), (1.2) може і не містити змінних величин, тобто бути константою (лат. constant - постійна, незмінна величина), яку зазвичай позначають буквою *C*. Зокрема, константа *C* може бути і нулем. Так, наприклад, якщо $\varphi(x)=C=0$, То рівняння (1.1) буде виглядати так:

$$f(x)=0. \tag{1.3}$$

Якщо ж $\varphi(x,y) = C = 0$, То рівняння (1.2) матиме вигляд:

$$f\left(x,y\right) = 0. \qquad (1.4)$$

Форму запису рівнянь з однією і двома змінними величинами (1.3) і (1.4) далі будемо називати загальним видом рівнянь з однією і двома змінними величинами відповідно.

3. Будь-яке рівняння з допомогою тотожних перетворень можна записати в загальному вигляді. Так, наприклад, рівняння (1.1) можна привести до виду (1.1.3), якщо $\varphi(x)$ перенести з лівої частини в праву:

$f\left(x\right) - \varphi\left(x\right) = 0$

і позначити математичне вираз $f\left(x\right) - \varphi\left(x\right)$ як $g\left(x\right)$. Тоді отримаємо, що $g\left(x\right) = 0$.

Приклад . Запишіть рівняння $3x^2 - 1 = -5x$ в загальному вигляді.
Рішення. Так як стандартний вид рівняння з однією змінною величиною визначається формулою $f\left(x\right) = 0$ (Дивіться 1.3), то треба або ($-5x$) перенести в ліву частину рівняння або ($3x^2 - 1$) перенести в праву. У першому випадку отримаємо: $3x^2 - 1 + 5x = 0$, у другому, $-3x^2 + 1 - 5x = 0$. Якщо в останньому рівнянні винести *(-1)* за дужку, то обидва рівняння будуть виглядати однаково.

1.2.Поняття розв'язання рівняння з однією змінною величиною

Числове значення змінної величини $x = x_1$, яке забезпечує рівність двох математичних виразів $f\left(x\right)$ і $\varphi\left(x\right)$:

$$f\left(x_1\right) = \varphi\left(x_1\right), \qquad (1.5)$$

називають розв'язком рівняння (1.1).

Так, наприклад, два вирази $f\left(x\right) = 2x + 3$ і $\varphi\left(x\right) = x^2$ дорівнюватимуть один одному, якщо змінній величині x надати числове значення $x = x_1 = -1$. Перевіримо, що це дійсно так:

$$f\left(-1\right) \overset{?}{=} \varphi\left(-1\right) \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \left(-1\right) + 3 \overset{?}{=} \left(-1\right)^2 \quad \rightarrow \quad 1 = 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(-1) = \varphi(-1). \tag{1.6}$$

Тому число $x = -1$ слід назвати розв'язком рівняння:

$$f(x) = \varphi(x) \quad \rightarrow \quad 2x + 3 = x^2. \tag{1.7}$$

Якщо ж в якості числового значення змінної величини x вибрати число 1: $x = x_1 = 1$, то:

$$f(1) \stackrel{?}{=} \varphi(1) \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 1 + 3 \stackrel{?}{=} 1^2 \quad \rightarrow \quad 5 \neq 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(1) \neq \varphi(1). \tag{1.8}$$

Рівність не має місце і тому $x = 1$ не є розв'язком рівняння (1.7).

Зауваження. Вирази виду (1.6) і (1.8) будемо далі називати, відповідно, правильним і неправильним рівністями.

Визначення поняття розв'язання рівняння з однією невідомою величиною. Числове значення змінної (невідомої) величини $x = x_1$, підстановка якої в рівняння $f(x) = \varphi(x)$ перетворює його на правильну числову рівність:

$$f(x) = \varphi(x) \quad \xrightarrow{x = x_1} \quad f(x_1) = \varphi(x_1), \tag{1.9}$$

називається *розв'язком рівняння*.

Зауваження.

1. *Множення* розв'язків *рівняння.* Якщо рівняння (1.1) має *n*розв'язков (позначимо їх через $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$), то всі ці утворюють множення, яке далі будемо називати множиною розв'язків рівняння.

Множину розв'язків рівняння можна задати або у вигляді списку:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}, \tag{1.10}$$

або у вигляді сукупності:

$$X = \left[\begin{array}{l} x_1; \\ x_2; \\ x_3; \\ \vdots \\ x_n, \end{array}\right. \qquad (1.11)$$

або, використовуючи *визначальне властивість*, в такий спосіб:

$$X = \left\{ x \middle| x \in R,\ f\left(x\right) = \varphi\left(x\right) \right\}. \qquad (1.12)$$

Роль визначальної властивості виконує саме рівняння, яке «породжує» елементи множини - розв’язки цього рівняння.

Так, наприклад, в розглянутому вище рівнянні (1.7) крім розв’язкіа $x = 1$ існує ще одне рішення: $x = -3$. Якщо підставити число $x = -3$ в рівняння (1.7), то вийде правильне рівність: $f\left(-3\right) = \varphi\left(-3\right)$ і множинарозв’язківX розглянутого рівняння можна записати трьома способами:

$$X = \left\{1,\ -3\right\}, \qquad X = \left[\begin{array}{l} 1; \\ -3; \end{array}\right. X = \left\{ x \;\middle|\; x \in R,\ 2x + 3 = x^2 \right\}.$$

2. *Рівняння* (1.1.1) *може не мати розв’язків.*

   Як приклад розглянемо рівняння: $x^2 = -1$. Так як, квадрат будь-якого дійсного числа більший або дорівнює нулю, тобто: $x^2 \geq 0$, якщо $x \in R$, то x^2 не може дорівнювати *(-1)* ні при якому значенні змінної величини x. Безліч розв’язків такого рівняння є порожнім: $X = \varnothing$
3. *Рівняння* (1.1) *може мати нескінченно багато розв’язків*. Множина розв’язків такого рівнянь є нескінченна і тому задати таку множину списком або сукупністю неможливо. Залишається тільки одна можливість - задати визначальної властивості множини. Приклади, що ілюструють цю ситуацію, будуть розглянуті пізніше.

4. Для геометричного зображення розв'язків рівняння з однією змінною величиною x використовується одна числова вісь OX, на якій точками позначаються розв'язки рівняння.
5. Якщо рівняння з однією змінною записано в загальному вигляді (1.3), то його рішення $x = x_1$ має перетворити вираз $f(x)$ на нуль:
$$f(x_1) = 0, \tag{1.13}$$
але чисельне значення змінної величини, яке перетворює математичний вираз на нуль називається коренем цього виразу. Тому часто розв'язок рівняння називають *коренем рівняння*.

Приклад. Доведіть, що число 3 є розв'язком рівняння: $\dfrac{4x-5}{x^2-1} = 2x-5$.

Розв'язання. Згідно з визначенням, число 3розв'язкомрівняння, якщо підстановка цього числа в рівняння перетворить його в правильне рівність.

Результат підстановки $x = 3$ в рівняння дає правильну рівність, дійсно:
$$\frac{4\cdot 3-5}{3^2-1} \overset{?}{=} 2\cdot 3-5 \quad \to \quad 1=1.$$
Отримана тотожність є доказом того, що число 3 є розв'язком рівняння.

Рівняння з параметром. Якщо хоча б один з виразів $f(x)$ або $\varphi(x)$, що входять в рівняння (1.1) або (1.2), крім змінних величин, які традиційно позначаються буквами *x, y,* містять ще якусь букву (або букви), наприклад a, то в запису рівняння цей факт фіксується в такий спосіб :
$$f(x,a) = \varphi(x,a), \tag{1.14}$$
$$f(x,y,a) = \varphi(x,y,a). \tag{1.15}$$

Букву a й інші початкові літери латинського алфавіту *(b, c, ...)* в цьому випадку слід розглядати як постійні величини, які називаються *параметрами рівняння*.

Розв'язками рівняння з параметрами (1.14 і 1.15) будуть не числа, а математичні вирази, які містять цей параметр. Розглянемо приклад, який ілюструє цю ситуацію.

Приклад. Запишіть безліч X рішень рівняння:

$$(x-2a)(x+a^2-1)(x-3) = 0.$$

Розв'язання. Так як, добуток кількох співмножників дорівнює нулю, якщо хоча б один із співмножників дорівнює нулю, то чи $(x-2a)=0$, або $\left(x+a^2-1\right)=0$, або $(x-3)=0$.

З першого рівняння слід, що $x_1=2a$; з другого: $x_2=1-a^2$; з третього: $x=3$. Перші два розв'язка являють собою математичні вирази: одночлен $2a$ і багаточлен $1-a^2$, які містять параметр *a*, третійрозв'язок - число три. Так, що список множини розв'язків *X* складається з трьох елементів і має такий вигляд:

$X=\left\{2a;1-a^2;3\right\}$.

1.3. Область допустимих значень рівняння з однією змінною величиною

«Супутником» кожного математичного виразу, яке містить «букви» (не залежно від того, яку роль вони виконують: толі змінних величин, толі параметрів) є область допустимих значень (ОДЗ) цього виразу. Рівняння є окремим випадком математичного виразу, яке обов'язково містить змінну величину, тому перш ніж приступати до пошуку розв'язків рівняння необхідно відповісти на питання, які числові значення може приймати змінна (невідома) величина. Тобто, треба знайти область (множину) допустимих значень рівняння.

Нагадаємо, що поява цього математичного поняття пов'язано з тією обставиною, що не всі з розглянутих в курсі елементарної математики операцій можуть бути виконаними над будь-якими дійсними числами. Наприклад, операцію вилучення кореня квадратного з негативного числа виконати неможливо на множині дійсних чисел. Іншими словами, не існує дійсного числа, яке було б результатом наступного дії: $\sqrt{-9}$. Тобто, $\sqrt{-9}\notin R$, не існує дійсного числа $\sqrt{-9}$.

Якщо рівняння записано у вигляді формули (1.1), то, перш ніж приступати до його вирішення, треба з'ясувати які числові значення змінної величини є «дозволеними» або допустимими, тобто треба знайти ОДЗ кожного з виразів $D\big(f(x)\big)$ і $D\big(\varphi(x)\big)$, а потім їх загальну область допустимих значень: $D\big(f(x),\varphi(x)\big)$.

Загальна ОДЗ двох математичних виразів $f(x)$ і $\varphi(x)$ являє собою перетин двох числових множин: $D(f(x))$ і $D(\varphi(x))$, тобто:

$$D(f,\varphi)=D(f)\cap D(\varphi). \tag{1.16}$$

У записі формули (1.3) і далі, де це не призведе до непорозуміння, будемо опускати змінну x.

Приклад. Запишіть ОДЗ рівняння: $\sqrt{x-1}=\dfrac{3x}{x-2}$.

Розв'язання. Вираз $\sqrt{x-1}$, що стоїть з лівого боку рівності, містить дві операції: віднімання і добування кореня. Обмеження на числові значення змінної величини x дає тільки операція добування кореня. Нагадаємо, що вираз, над яким виконується дія добування кореня, має бути невід'ємним, тобто: $x-1\ge 0$ і тому ОДЗ лівої частини рівняння можна записати так:

$$D\left(\sqrt{x-1}\right)=\left\{x\middle|x-1\ge 0\right\}=[1;\infty) . \tag{1.17}$$

Операція, яка дає обмеження на числові значення змінної величини x в виразі $\dfrac{3x}{x-2}$, розташованому з правого боку рівності - це операція ділення. Нагадаємо, що, якщо розподіл виконується над якимось математичним виразом, то цей вираз не повинен дорівнювати нулю, тобто: $x-2\ne 0$. Тоді:

$$D\left(\frac{3x}{x-2}\right)=\left\{x\middle|x-2\ne 0\right\}=(-\infty;2)\cup(2;\infty). \tag{1.18}$$

ОДЗ рівняння виходить, як перетин множин (1.3.2) і (1.3.3):

$$D=D\left(\sqrt{x-1}\right)\cap D\left(\frac{3x}{x-2}\right)=\left\{x\middle|\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x-2\ne 0\end{cases}\right\}=[1;\infty)\cap(-\infty;2)\cup(2;\infty). \tag{1.19}$$

Розв'язаннясистеми нерівностей:

$$\begin{cases}x-1\ge 0,\\ x-2\ne 0,\end{cases} \tag{1.20}$$

визначають область (множину) допустимих («дозволених») значень змінної величини.

Зауваження. Розв’язками рівняння $f(x)=\varphi(x)$ можуть бути тільки ті числа які належать області допустимих значень цього рівняння.

1.4.Поняття розв’язка рівняння з двома змінними величинами

Щоб забезпечити рівність двох математичних виразів $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$в рівнянні (1.2) треба обом змінним величинам x і y надати якісь конкретні числові значення: $x = x_1,\ y = y_1$, так щоб мало місце рівність:

$$f(x_1;y_1)=\varphi(x_1;y_1) \tag{1.21}$$

Так, наприклад, якщо в рівняння (1.2), в якому $f(x,y)=4x-3y$ і $\varphi(x,y)=y^2+x^2$, підставити $x=1$ і $y=4$, то результат буде таким:

$$f(x;y)=\varphi(x;y) \quad \to \quad x+4y=y^2+x^2; \tag{1.22}$$

$$f(1;4)\overset{?}{=}\varphi(1;4) \quad \to \quad 1+4\cdot 4\overset{?}{=}4^2+1^2 \quad \to \quad 17=17 \quad \to$$
$$\to \quad f(1;4)=\varphi(1;4). \tag{1.23}$$

Якщо ж вибрати і підставити іншу пару чисел: $x=2$ і $y=1$, то отримаємо:

$$f(x;y)=\varphi(x;y) \quad \to \quad x+4y=y^2+x^2;$$
$$f(2;1)\overset{?}{=}\varphi(2;1) \quad \to \quad 2+4\cdot 1\overset{?}{=}1^2+2^2 \quad \to \quad 6\neq 5 \quad \to$$
$$\to \quad f(2;1)\neq\varphi(2;1). \tag{1.24}$$

Числовий вираз (1.23) є правильною рівністю і тому пару чисел $x=1$ і $y=4$ будемо називати розв’язками даного рівняння. Пара чисел $x=2$ і $y=1$ не є розв’язками рівняння, так як їх підстановка в рівняння дає неправильне числове рівність (1.24).

Визначення поняттярозв’язкарівняння з двома змінними величинами. Числові значення невідомих (змінних) величин $x=x_1$ і $y=y_1$, підстановка яких у рівняння $f(x,y)=\varphi(x,y)$ перетворює його на правильну числову рівність: $f(x_1,y_1)=\varphi(x_1,y_1)$, називається *розв’язком цього рівняння.* Записується розв’язок так: $(x_1;y_1)$.

Зауваження.

1. Розв'язками рівняння (1.4.2) крім пари чисел $(1;4)$ (тобто, $x = 1$ і $y = 4$) є також пари: $(0;0)$, $(1;0)$ та інші.
2. Елементами множини рішень X рівняння з двома змінними тепер будуть не числа: $x_1,\ x_2,\ x_3,\dots,x_n$, як у випадку рівняння з однією змінною, а пари чисел $(x_1;y_1)$, $(x_1;y_1)$, ..., $(x_1;y_1)$, тобто:

$$X = \{(x_1;y_1),(x_2;y_2),\dots,(x_n;y_n)\}. \qquad (1.25)$$

Так, наприклад, список елементів множини рішень рівняння (1.22) матиме вигляд: $X = \{(1;4),(0;0),(1;0),\dots\}$.

3. Рівняння з двома змінними величинами, так само, як і рівняння з однією змінно величиною, може мати або кілька рішень, або нескінченно багато, або зовсім не мати рішень.
4. Геометричним чином нескінченної кількості розв'язків рівняння з двома змінними величинами є лінія на площині *XOY*.

2.1. Поняття системи і сукупності рівнянь

Системи і сукупності рівнянь з однією змінною (невідомої) величиною.Розглянемо два рівняння з однією змінною:

$$f(x)=\varphi(x), \qquad g(x)=h(x). \qquad (1.26)$$

Якщо цю пару рівнянь записати, використовуючи фігурну дужку, в такий спосіб:

$$\begin{cases} f(x)=\varphi(x), \\ g(x)=h(x), \end{cases} \qquad (1.27)$$

то виходить новий математичний об'єкт, який називається *системою двох рівнянь з однією змінною (невідомої) величиною.*

Запис цієї ж пари рівнянь за допомогою квадратної дужки:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x), \\ g(x)=h(x), \end{array}\right. \tag{1.28}$$

називається сукупністю двох рівнянь.

Визначення поняття розв'язка системи рівнянь. Якщо перше і друге рівняння системи (1.27) мають розв'язок і серед цих розв'язків є загальні (однакові), то ці загальні розв'язки рівнянь і називаються розв'язками системи рівнянь (1.27).

Пояснення. Розглянемо як приклад наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3)=0, \\ (x+1)(x-3)x=0. \end{cases} \tag{1.29}$$

Перше рівняння має розв'язки: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$, а друге рівняння: $x_4=-1,\ x_5=3,\ x_6=0.$ Множини X_1 і X_2розв'язків першого та другого рівнянь: $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,2,3\},\quad X_2=\{x_4,x_5,x_6\}=\{-1,3,0\}$ мають один загальний елемент (один спільнийрозв'язок): $x_3=x_5=3$, тому список множини Xрозв'язків системи (1.5.4) складається з одного елемента: $X=\{3\}$.

Зауваження.

1. Якщо хоча б одне з рівнянь в системі рівнянь не має розв'язків, то і система не має розв'язків.
2. Якщо використовувати визначення операції перетин множин, то записати рішення X системи рівнянь (1.29), як і будь-який інший системи, можна як перетин множин X_1 і X_2розв'язків першого та другого рівнянь:

$$X=X_1\cap X_2=\{1,2,3\}\cap\{-1,3,0\}=\{3\}. \tag{1.30}$$

Визначення поняття розв'язка сукупності рівнянь. Якщо перше і друге рівняння сукупності (1.28) мають розв'язки, то всі ці розв'язкиі є рішеннями сукупності рівнянь (1.28).

Пояснення. Розглянемо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}(x-1)(x-2)(x-3)=0,\\(x+1)(x-3)x=0.\end{array}\right. \tag{1.31}$$

Множини X_1 і X_2 рішень першого та другого рівнянь сукупності (1.5.6) мають вигляд: $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,2,3\}, \quad X_2=\{x_4,x_5,x_6\}=\{-1,3,0\}$. Тоді, згідно з визначенням поняття «розв'язка сукупності рівнянь», список множини Xрозв'язків сукупності рівнянь (1.31) буде наступний: $X=\{1,2,3,-1,0\}$.

Зауваження.

1. Сукупність рівнянь не має розв'язків тільки в разі, коли всі рівняння сукупності не мають розв'язків.
2. Використовуючи визначення операції об'єднання множин,розв'язкиX сукупності рівнянь можна записати як об'єднання множин X_1 і X_2розв'язків першого та другого рівнянь:

$$X=X_1 \cup X_2=\{1,2,3\}\cup\{-1,3,0\}=\{1,2,3,-1,0\}. \tag{1.32}$$

Приклад. Рівняння $g(x)=\varphi(x)$ має множину розв'язків $X_1=\{-3,5,7\}$, а рівняння $h(x)=f(x)$ має множину розв'язків $X_2=\{-5,-3,7,8\}$. Запишіть список множини розв'язків X_3 системи цих рівнянь і список множини розв'язків X_4 сукупності цих рівнянь.

Розв'язання. Список множини X_3 системи рівнянь складається із загальних розв'язків першого та другого рівняння або, іншими словами, X_3 є перетин множин X_1 і X_2. Тому,

$$X_3=X_1\cap X_2=\{-3,5,7\}\cap\{-5,-3,7,8\}=\{-3,7\}.$$

Список множини X_4 сукупності рівнянь складається з усіх розв'язків першого та другого рівняння, тобто є об'єднанням множин X_1 і X_2, Причому повторюваних елементів бути не повинно:

$$X_4=X_1 \cup X_2=\{-3,5,7\}\cup\{-5,-3,7,8\}=\{-3,5,7,-5,8\}.$$

Системи рівнянь з двома змінними (невідомими) величинами. Якщо два рівняння з двома змінними величинами: $f(x,y)=\varphi(x,y)$ і $u(x,y)=g(x,y)$ записати у вигляді:

$$\begin{cases} f(x,y)=\varphi(x,y), \\ u(x,y)=g(x,y), \end{cases} \tag{1.33}$$

то така математична структура називається *системою двох рівнянь з двома невідомими*.

Якщо позначити через X_1 множинурішень першого рівняння в (1.33), а через X_2 - множинурозв'язків другого рівняння в (1.33), то розв'язком системи є спільні розв'язка першого і другого рівнянь, так само як і в разі системи рівнянь (1.28) з однією змінною (дивіться визначення поняття «*розв'язок системи рівнянь* в цьому підрозділі).

Приклад. Рівняння $f(x,y)=\varphi(x,y)$ має множину розв'язків $X_1=\{(-1;5),(3;-2),(1;7),(-3;0)\}$, а рівняння $u(x,y)=g(x,y)$ має множину розв'язків $X_2=\{(1;1),(3;-2),(1;7),(4;-1),(0,0)\}$. Запишіть список множини розв'язків X системи цих рівнянь.

Розв'язання. Список множини X системи рівнянь складається із загальних розв'язківпершого та другого рівняння або, іншими словами, X є перетин множин X_1 і X_2. Тому,

$$X=X_1\cap X_2=$$

$$=\{(-1;5),(3;-2),(1;7),(-3;0)\}\cap\{(1;1),(3;-2),(1;7),(4;-1),(0,0)\}=$$

$$=\{(3;-2),(1;7)\}.$$

Розділ 2

КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ І ГОМЕТРИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЇХ РОЗВ'ЯКІВ

2.1. Геометричне зображення розв'язків рівнянь і систем рівнянь

Багатьом алгебраїчним поняттям можна дати так звану геометричну інтерпретацію. Іншими словами, поставити у відповідність поняттю деякий геометричний образ. Так, наприклад, геометричним образом будь-якого дійсного негативного числа *a* є точка на числовій осі, розташована лівіше початку числової осі і на відстані *a* від нього.

Так як рішенням рівняння (1.1) з однією змінною є дійсні числа, то їх геометричним зображенням будуть точки на числовій осі. Розглянемо приклад, який ілюструє це твердження.

Приклад. Зобразіть розв'язки рівняння:

$$\left(x+1\right)\left(x-1{,}2\right)\left(x-3\right)=0 \qquad (2.1)$$

Розв'язання. Геометричним зображенням розв'язків рівняння (2.1) будуть точки на числовій осі. Спочатку знайдемо ці розв'язки, а потім покажемо їх.

Маючи на увазі, що:

- *по перше*, ліва частина рівняння являє собою твір трьох співмножників $\left(x+1\right)$, $\left(x-1{,}2\right)$, $\left(x-3\right)$;
- *по-друге,* твір будь-якого числа співмножників дорівнює нулю, якщо або перший співмножник дорівнює нулю, або другий співмножник дорівнює нулю і так далі, то рівняння (2.1) можна записати як сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0; \\ x-1{,}2=0; \\ x-3=0; \end{array}\right.$$

розв'язками цих рівнянь будуть наступні числа: $x_1=-1;\ x_2=1{,}2;\ x_3=3$.

Напишемо множину Xрозв'язків рівняння (2.1) або у вигляді сукупності рішень:

$$X=\left[\begin{array}{l} x=-1; \\ \\ x=1{,}2; \\ \\ x=3; \end{array}\right. \qquad (2.2)$$

або у вигляді списку: $X=\{-1;\ 1,2;\ 3\}$ і зробимо їх графічно (рисунок 1):

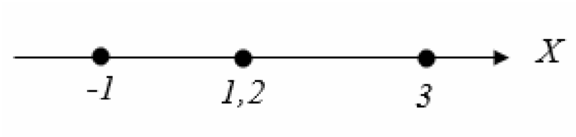
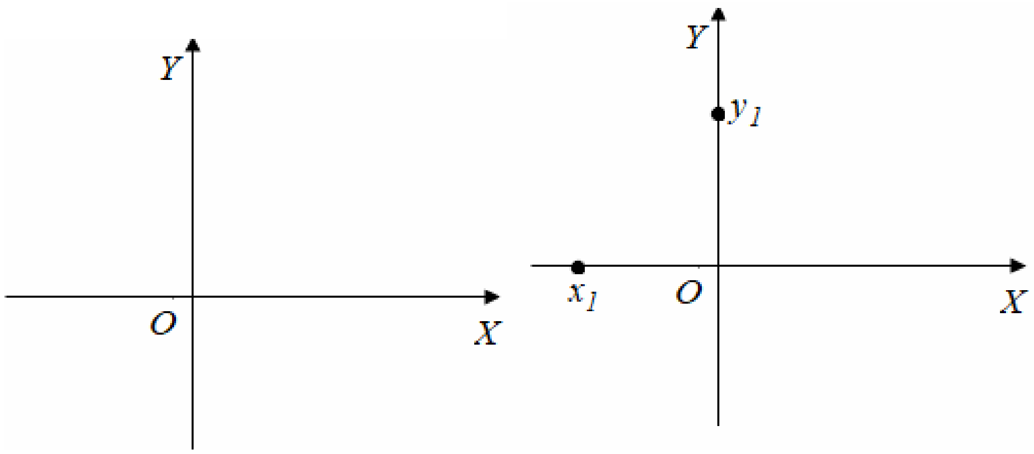


Рисунок 1.

Зображення розв'язків рівняння з двома змінними. Розв'язком рівняння з двома змінними $f(x,y)=\varphi(x,y)$є два числа $(x_1,\ y_1)$. Перше число - це значення змінної *x*, а друге - значення змінної *y*. Для їх зображення треба використовувати дві числові осі *X* і *Y*, які зазвичай зображують так, як показано на малюнку 2а.



(a) *(b)*

Рисунок 2.

Число x_1 зображують у вигляді точки на осі *X*, число y_1 - на осі *Y*. На рисунки*2b* зображена ситуація, коли $x_1<0$, а $y_1>0$. Розв'язок рівняння, тобто пара чисел$(x_1,\ y_1)$, зображується точкою на площині *XOY* так, як показано на рисунки*3*.

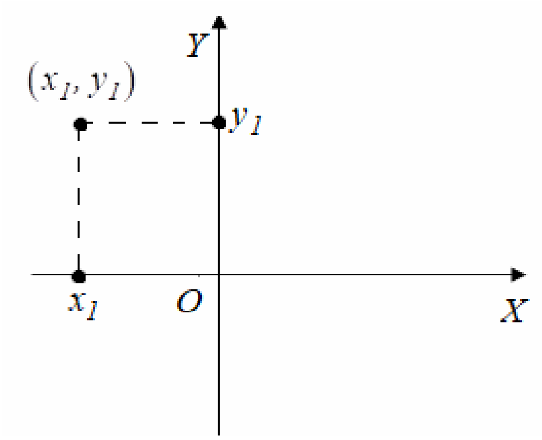


Рисунок *3*.

Розглянемо випадок, коли рівняння $f(x,y) = \varphi(x,y)$ має нескінченно багато рішень: (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots,(x_n, y_n),\dots$. Якщо зобразити всі ці рішення точками на площині XOY, то ці точки утворюють лінію на цій площині. Так, що можна стверджувати, що геометричним чином розв'язків рівняння з двома змінними величинами є лінія на площині XOY.

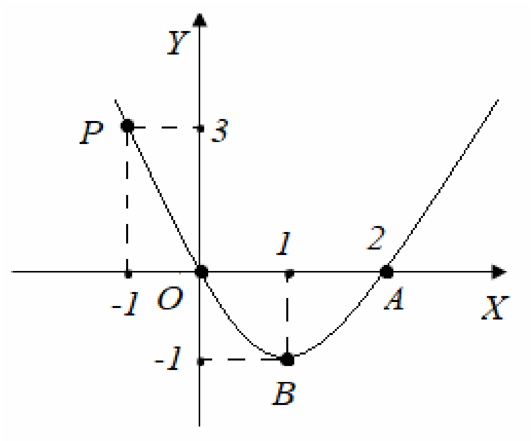


Рисунок 4

Наприклад, геометричним чином розв'язків рівняння $3y + 2x = 2y + x^2$ буде лінія, зображена на рисунки4. Кожна точка цієї лінії визначається двома числами (x_n, y_n)і ця пара чисел обов'язково є одним з розв'язків даного рівняння. Наприклад, точці P відповідає пара чисел$(-1; 3)$. Неважко перевірити, що ця пара чисел є розв'язком даного рівняння:

$$3y + 2x = 2y + x^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \overset{?}{=} 2 \cdot 3 + (-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 7 = 7 .$$

Аналогічним чином йде справа і з іншими точками, які обрані з нескінченної кількості точок лінії: $O(0;0)$, $B(1;-1)$, $A(2;0)$.

Зауваження.

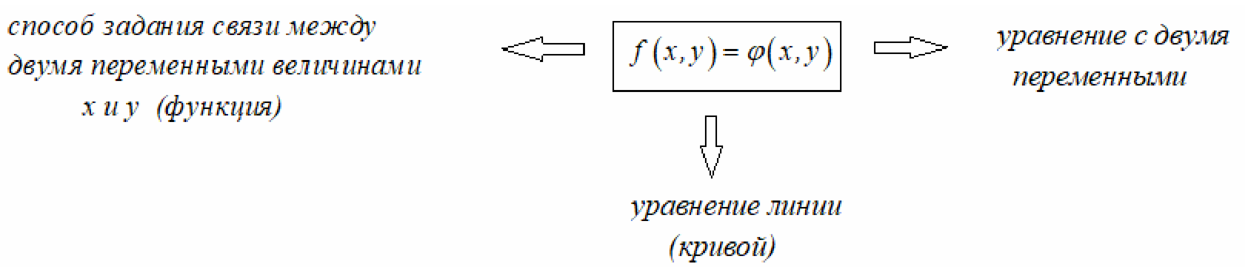
Можна стверджувати, що будь-яка лінія на площині *XOY* є зображенням рішень якогось рівняння з двома змінними величинами $f(x,y)=\varphi(x,y)$. Тому, лінію на площині XOY можна було б називати «лінією рішень рівняння», а саме рівняння називати рівнянням лінії.

Визначення поняття *рівняння лінії*. Рівняння вида $f(x,y)=\varphi(x,y)$ з двома змінними величинами називається *рівнянням лінії*.

Пояснення. Математичний вираз виду: $f(x,y)=\varphi(x,y)$ вже розглядалося у зв'язку з поняттям «функція».

Залежно від конкретної ситуації рівність двох математичних виразів $f(x,y)=\varphi(x,y)$ може бути названо (інтерпретовано):

- як рівняння з двома змінними величинами x і y;
- як *спосіб* завдання функціонального зв'язку між цими змінними величинами;
- як рівняння лінії (кривої);



Малюнок 5

2.2. Типи рівнянь і стандартна форма їх запису

Для деяких рівнянь існують алгоритми (методи, інструкції, формули) знаходження їх рішень. Ці алгоритми не є універсальними. Групу рівнянь, для вирішення яких використовується один і той же алгоритм рішення, будемо називати рівняннями, які належать до одного типу.

Рівняння одного типу, як би вони не були задані спочатку, завжди можна, використовуючи математичні перетворення, записати в так званій стандартній формі. У таблиці 1 наведені формули, які визначають стандартну форму записи кожного з типів рівнянь.

Таблиця 1

№	Назва (тип рівняння)	Формула (стандартна форма запису рівняння)	Область допустимих значень змінної величини x
1	лінійне	$ax=b$	$D=(-\infty;\infty)$; $a,b\in R$.
2	квадратне	$ax^2+bx+c=0$	$D=(-\infty;\infty)$; $a,b,c\in R$, $a\neq 0$.
3	дрібно-раціональне	$\dfrac{\mu(x)}{g(x)}=0$	$D=\{x\mid x\in D(\mu)\cap D(g)\}$, $D(\mu)=\{x\mid g(x)\neq 0\}$.
4	показове	$a^{f(x)}=b^{\varphi(x)}$	$D=D(f)\cap D(\varphi)$; $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1$.
5	ірраціональне	$\sqrt{f(x)}=\varphi(x)$	$D=\{x\mid \varphi(x)\geq 0,\quad x\in D(f)\cap D(\varphi)\}$, $D(f)=\{x\mid f(x)\geq 0\}$
6	логарифмічне	$\log_a f(x)=$ $=\log_b\varphi(x)$	$D=\{x\mid f(x)>0,\ \varphi(x)>0\}$; $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1$.
7	тригонометричне	$\sin f(x)=a$ $\cos f(x)=a$ $tg\ f(x)=a$ $ctg\ f(x)=a$	$D=\{x\mid x\in D(f)\}$, $a\in[-1;1]$; $D=\{x\mid x\in D(f)\}$, $a\in[-1;1]$; $D=\{x\mid \cos f(x)\neq 0, x\in D(f)\}$, $a\in R$; $D=\{x\mid \sin f(x)\neq 0, x\in D(f)\}$, $a\in R$.

- ***Лінійне рівняння***. Якщо рівняння

$$f(x)=\varphi(x) \tag{2.3}$$

після перетворень може бути записано у вигляді:

$$ax=b \tag{2.4}$$

де a і b - числа або параметри рівняння, то рівняння (2.4) є лінійним. Формула (2.4) - загальний вигляд лінійного рівняння.

Зауваження.

1. Область (множина D) допустимих значень змінної величини x в рівнянні (2.4) - всі дійсні числа, тобто: $D=R=(-\infty;\infty)$.
2. Над змінної x у формулі (2.4) виконується дію множення (ділення) на число.

Приклад. Доведіть, що рівняння:

$x(1-2x)-3=(3-x)(2x+1)$

є лінійним рівнянням.

Розв'язання. Розкриємо дужки:

$$x-2x^2-3=6x+3-2x^2-x\,;$$

наведемо подібні члени:

$$x-2x^2-3=5x+3-2x^2$$

і перенесемо всі складові, які містять змінну x, в ліву сторону від значка рівності, а які не містять - в праву:

$$x-2x^2-3=5x+3-2x^2 \quad\to\quad x-2x^2-5x+2x^2=3+3 \quad\to\quad -4x=6\,.$$

Отримане рівняння має структуру рівняння (2.2.2) з $a=-4, b=6$, що і є доказом того, що вихідне рівняння є лінійним.

- ***Квадратне рівняння***. Якщо рівняння (2.3) може бути приведене до вигляду:

$$ax^2+bx+c=0\,, \tag{2.5}$$

то воно називається квадратним, а формула (2.5) - загальним видом квадратного рівняння. Величини *a, b, c* - числа або коефіцієнти (параметри) квадратного рівняння (*a* - перший коефіцієнт, *b* - другий коефіцієнт, *c* - вільний член).

Якщо $b=0 \; и \; c \neq 0$, або $b \neq 0 \; и \; c=0$, То квадратне рівняння називається *неповним* і має такий вигляд:

$$ax^2+c=0, \tag{2.6}$$

$$ax^2+bx=0. \tag{2.7}$$

Зауваження.

1. Область (множина *D*) допустимих значень змінної величини *x* в рівнянні (2.5) - всі дійсні числа, тобто: $D=R=(-\infty;\infty)$.
2. Параметри *a, b, c* рівняння (2.5) можуть набувати будь-яких числових значень крім *a = 0.* Якщо *a = 0,* то квадратне рівняння (2.5) стає лінійним (2.4).
3. Над змінної *x* у формулі (2.5) виконуються дії зведення в квадрат, множення (ділення) на число, додавання (віднімання).

Приклад. Доведіть, що рівняння:

$$(1+x)(1-x)-1=(5-x)(2x+1)$$

є квадратним.

Розв'язання. Ідея доказу полягає в наступному: якщо рівняння можна перетворити так, щоб воно мало вигляд (2.5), або (2.6), (2.7), то це і означає, що рівняння є квадратним.

Розкриємо дужки і наведемо подібні члени:

$$(1+x)(1-x)-1=(5-x)(2x+1) \quad \Rightarrow \quad 1-x^2-1=10x+5-2x^2-x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -x^2=9x+5-2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=9x+5.$$

Перенесемо всі складові або в праву, або в ліву частини рівності. У першому випадку вийде:

$$x^2=9x+5 \quad \Rightarrow \quad -x^2+9x+5=0.$$

Отримане рівність є квадратним рівнянням, яке записано в стандартній формі (2.5). Коефіцієнти квадратного рівняння рівні:

$$a = -1;\ b = 9;\ c = 5.$$

- ***Дрібно - раціональне рівняння***. Якщо рівняння (2.3) може бути приведене до вигляду:

$$\frac{\mu(x)}{g(x)} = 0, \tag{2.8}$$

то воно називається дрібно - раціональним, а формула (2.8) - загальним видом дрібно - раціонального рівняння. У формулі (2.8) $\mu(x)$ і $g(x)$ в загальному випадку якісь математичні вирази, що містять одну змінну величину.

Зауваження.

1. Для того, щоб записати область (безліч *D*) допустимих значень *x* розглянутого рівняння треба визначити області допустимих значень *x*:
   - чисельника (множина $D(\mu)$),
   - знаменника (множина $D(g)$)
   - і операції ділення $\frac{\mu(x)}{g(x)}$ (позначимо цю множину буквою *A*).

Множина *A* визначається умовою:

$$g(x) \neq 0, \tag{2.9}$$

яке забезпечує здійсненність операції ділення $\mu(x)$ на $g(x)$.

Значення змінної величини *x* в рівнянні (1.7.6) повинні належати трьом множинам: $x \in D(\mu)$, $x \in D(g)$ і $x \in A$ одночасно. Це означає, що множина допустимих значень *x* (множина *D*) є перетином цих трьох множин:

$$D = A \cap D(\mu) \cap D(g). \tag{2.10}$$

Це в свою чергу означає, що для визначення множини *D* треба знайти рішення системи, яка складається з трьох співвідношень (зазвичай це нерівності), що задають безлічі $A, D(\mu), D(g)$:

$$x \in \begin{cases} A, \\ D(\mu), \\ D(g). \end{cases} \qquad (2.11)$$

2. У рівнянні (2.8) над змінною величиною x виконуються дії, які «приховані» за символами μ і g. Але, незалежно від того які це дії, статус «дрібно-раціонального» рівняння (2.8) отримує тому, що в ньому присутня операція ділення на математичний вираз $g(x)$, Яке містить змінну величину x.
3. Якщо вираз $\mu(x)$ число, тобто: $\mu(x) = C$, То рівняння (2.8) матиме вигляд:

$$\frac{C}{g(x)} = 0, \qquad (2.12)$$

Статус дрібно-раціонального рівняння воно буде зберігати.

4. Якщо ж $g(x) = C$, тобто в знаменники дробу відсутня змінна x:

$$\frac{\mu(x)}{C} = 0, \qquad (2.13)$$

тоді рівняння втрачає статус дрібно-раціонального і буде належати до якогось іншого типу рівнянь, який буде визначатися конкретним видом вирази $\mu(x)$.

Приклад. Знайдіть область (множину D) допустимих значень змінної величини x в рівнянні: $\dfrac{x^2}{x-3} = 0$.

Розв'язання. Рівняння задано в стандартній формі (2.8):

$\mu(x) = x^2, \quad g(x) = x - 1,$

Напишемо області допустимих значень *x* чисельника (множина $D(\mu)$), знаменника (множина $D(g)$) рівняння і умову існування дроби $\frac{x^2}{x-3}$ (множина *A*).

- Множина *A* визначається умовою: $x-3 \neq 0$. Операція ділення на нуль не визначена, тому треба виключити цю можливість (дивіться формулу 2.9).
- Множина $D\left(\mu = x^2\right) = R = (-\infty;\infty)$, тобто змінна *x* може приймати всі можливі значення тому, що в виражені $\mu(x) = x^2$ використовується тільки операція піднесення до степеня і ця операція може бути виконана над будь-яким дійсним числом.
- Аналогічним чином йде справа з безліччю $D(g = x-1)$, тобто:

$D(g = x-1) = R = (-\infty;\infty)$.

Допустимі значення змінної величини *x* в розглянутому рівнянні (тобто елементи множини *D*) повинні належати трьом множинам $A, D(\mu), D(g)$. Це означає, що допустимі значення *x* повинні визначатися з рішення системи (2.11), яка в даному випадку буде виглядати так:

$$x \in \begin{cases} A, \\ D(\mu), \\ D(g), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3 \neq 0, \\ x \in (-\infty,\infty), \\ x \in (-\infty,\infty), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -3, \\ x \in (-\infty,\infty), \\ x \in (-\infty,\infty), \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (-\infty,3) \cup (3,\infty).$$

Тобто, множина *D* - це множина всіх дійсних чисел крім числа *3*:

$D = (-\infty,3) \cup (3,\infty)$.

Приклад. Напишіть нерівності, які визначають область (множину *D*) допустимих значень змінної величини *x* в рівнянні: $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}-1} = 0$

Розв'язання. Рівняння записано в стандартній формі (2.8):

$\mu(x) = \sqrt{x-3}$ *и* $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

Щоб написати область *D* допустимих значень цього рівняння треба спочатку написати умови, які визначають множини $A, D(\mu), D(g)$.

- Множина A визначається умовою того, що знаменник рівняння не повинен дорівнювати нулю і тому: $\sqrt{x}-1\neq 0$.
- Множина $D(\mu)$ визначається умовою: $x-3\geq 0$ - дія добування кореня, яке виконується над виразом $x-3$ може бути виконано тільки тоді, коли цей вираз невід'ємний.
- Умова, яке визначає безліч $D(g)$ можна записати так: $x\geq 0$. У вираженні для $g\ (x)$ є операція добування кореня з x. Щоб забезпечити виконуваність цього дії треба вимагати позитивність x.

Значення змінної x, які задовольняють трьом отриманим вище умов, визначають безліч D, тобто:

$$D=\begin{cases}\sqrt{x}-1\neq 0,\\ x-3\geq 0,\\ x\geq 0.\end{cases}$$

- **Показові рівняння**. Якщо рівняння (2.3) після перетворень може бути записано у вигляді:

$$a^{\mu(x)}=b^{g(x)} \tag{2.14}$$

де a і b - числа, які задовольняють умовам $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1$, то рівняння (2.14) називається *показовим*, а формула (2.14) - *загальним видом показового рівняння*.

Зауваження.

1. У будь-якому показовому рівнянні змінна величина x знаходиться в показнику степеня, тобто над змінноюx виконується операція потенціювання.
2. Так як будь-який вираз виду $a^{\mu(x)}$ більший від нуля, тобто $a^{\mu(x)}\neq 0$, то рівняння виду $a^{\mu(x)}=0$ рішень не має:

$$a^{\mu(x)}=0 \quad \rightarrow \quad x=\varnothing \tag{2.15}$$

3. Рівняння вигляду:

$$a^{\mu(x)}=C, \tag{2.16}$$

де C - постійна величина (число), є окремим випадком рівняння (2.14) і відповідає ситуації, коли права частина рівняння (2.14) не залежить від змінної x.

Область допустимих значень рівняння (2.14) визначається перетином множин $D(\mu)$ і $D(g)$ - областей допустимих значень виразів $\mu(x)$ і $g(x)$:

$$D = D(\mu) \cap D(g). \tag{2.17}$$

Приклад. Наведіть рівняння *(1)* і *(2)* до стандартного вигляду:

$$3^{5x} - 3^{2x} = 0, \quad (1) \; 5^{x-3} = \frac{1}{8^{2x-3}} . \quad (2)$$

Розв'язання.

1. Рівняння *(1)* є показовим, тому що над змінною величиною *x* виконується операція потенціювання (змінна *x* знаходиться в показнику степеня). Якщо винести за дужки вираз 3^{2x}, то рівняння *(1)* буде мати наступний вигляд:

$$3^{5x} - 3^{2x} = 0 \quad \to \quad 3^{2x} \cdot \left(3^{3x} - 1\right) = 0 .$$

Добуток двох виразів дорівнює нулю, коли або перший співмножник 3^{2x} дорівнює нулю, або другий співмножник $\left(3^{3x} - 1\right)$ дорівнює нулю, тому вихідне рівняння можна записати як сукупність двох рівнянь:

$$3^{2x} \cdot \left(3^{3x} - 1\right) = 0 \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} 3^{2x} = 0, \\ 3^{3x} - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Якщо перше з рівнянь в сукупність можна відкинути, так як воно не має розв'язків (дивіться зауваження 2), а в другому перенести *(- 1)* в праву сторону рівняння, то отримаємо, що:

$$3^{2x} \cdot \left(3^{3x} - 1\right) = 0 \quad \to \quad \left[\begin{array}{l} 3^{2x} = 0, \\ 3^{3x} - 1 = 0, \end{array}\right. \quad \to \quad 3^{3x} = 1 .$$

Таким чином рівняння (1) вдалося привести до стандартного вигляду (2.14).

2. У рівнянні *(2)* досить застосувати формулу: $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ до правої частини рівняння, щоб відразу отримати стандартну форму записи цього рівняння:

$$5^{x-3} = \frac{1}{8^{2x-3}} \quad \rightarrow \quad 5^{x-3} = 8^{-(2x-3)}.$$

- **Логарифмічні рівняння**. Якщо рівняння (2.3) після перетворень можна записати у вигляді:

$$log_a \mu(x) = log_b g(x) \tag{2.18}$$

де a і b - числа, які задовольняють умовам $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$, то рівняння (2.18) називається *логарифмічним*, а формула (2.18) - загальним видом цього рівняння.

Вирази $\mu(x)$ і $g(x)$, над якими виконується дія «логарифм», повинні задовольняти умови:

$$\begin{cases} \mu(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Якщо позначити через *A* безліч рішень системи нерівностей (2.19), то записати цю множину можна так:

$$A = \{x | \ \mu(x) > 0, \ \mu(x) > 0, \ x \in R\}, \tag{2.20}$$

Область допустимих значень логарифмічного рівняння (2.18) буде визначається перетином трьох множин: А і множин $D(\mu)$ і $D(g)$ - областей допустимих значень виразів $\mu(x)$ і $g(x)$:

$$D = A \cap D(\mu) \cap D(g). \tag{2.21}$$

Приклад. Напишіть нерівності, які визначають область допустимих значень змінної величини *x* в рівнянні:

$$log_3(x+1) = log_5 \frac{1}{x-3}.$$

Розв'язання. Рівняння записано в стандартній формі (2.18). Вираження $\mu(x)$ і $g(x)$ мають такий вигляд:

$$\mu(x) = x + 1 \ \ и \ \ g(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Область D допустимих значень розглянутого рівняння визначається перетином трьох множин: A і множин $D(\mu)$ і $D(g)$(Дивіться формулу 2.17). Розглянемо кожне з цих множин.

Множина $D(\mu)$ - це область визначення виразу $\mu(x)$. Так як в цьому виразі використовується тільки одна дія додавання, яку можнавиконати над будь-якими дійсними числами, то:

$$D(\mu) = D(x+1) = R = (-\infty;\infty).$$

Множина $D(g)$ - це область визначення виразу $g(x)$. У цьому виразі використовується дії додавання і ділення. Якщо дію віднімання здійснимо при будь-яких значеннях x, то дія ділення може бути виконано за умови, що дільник не дорівнює нулю, тобто: $x-3 \neq 0$. Тоді, безліч $D(g)$ можна записати в такий спосіб:

$$D(g) = D\left(\frac{1}{x-3}\right) = \left\{x \middle| \ x-3 \neq 0, x \in R\right\}.$$

Множина A логарифмічного рівняння, записаного в стандартному вигляді (2.18) визначається завжди формулою (2.20), яке в даному випадку буде мати вигляд:

$$A = \left\{x \middle| \ x+1 > 0, \ \frac{1}{x-3} > 0, \ x \in R\right\}.$$

Таким чином, змінна величина x в розглянутому логарифмічному рівнянні може набувати значень, які визначаються наступними умовами:

$$x \in \begin{cases} x-3 \neq 0; \\ x+1 > 0, \\ \dfrac{1}{x-3} > 0. \end{cases}$$

Відзначимо, що перша умова вже «міститься» в третьому, так як з умови $\frac{1}{x-3}>0$ випливає, що $x-3>0$, а це означає зокрема, що $x-3\neq 0$ тому, що нерівність суворе.

Отриману вище систему нерівності можна записати так:

$$x\in\begin{cases}x+1>0,\\ x-3>0.\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x>-1,\\ x>3.\end{cases}\ \rightarrow\ x>3\,.$$

Приклад. Запишіть логарифмічне рівняння в стандартному вигляді:

$3\cdot log_2\left(x^2-1\right)=4$. *(1)*

Розв'язання. Щоб записати рівняння (1) в стандартному вигляді треба вирішити дві проблеми: «прибрати» число *3* в лівій частині рівняння і записати праву частину рівняння в «вигляді логарифма».

Перший спосіб. Будь-яке дійсне число *A* можна за допомогою формул:

$$log_m m=1 \qquad (*)$$

і

$$k\cdot log_m a=log_m a^k \qquad (**)$$

записати в такий спосіб:

$$A=A\cdot 1=A\cdot log_m m=log_m m^A. \qquad (***)$$

В якості основи логарифма *m* можна вибирати будь-яке припустиме число $\left(m\neq 1, m>0\right)$.

Напишемо число *4*, використовуючи формулу (***):

$$4=4\cdot 1=4\cdot log_m m=log_m m^4\,.$$

Число *3* в лівій частині рівняння можна «занести» під знак логарифма використовуючи формулу (**):

$$3\cdot log_2\left(x^2-1\right)=log_2\left(x^2-1\right)^3.$$

З урахуванням двох останніх рівності вихідне рівняння *(1)* буде мати вигляд:

$$log_2\left(x^2-1\right)^3=log_m m^4 .$$

Вибираючи, наприклад, $m=2$ остаточно отримаємо:

$$log_2\left(x^2-1\right)^3=log_2 2^4 .$$

Другий спосіб. Розділимо ліву і праву частини рівняння *(1)* на число *3*:

$$3\cdot log_2\left(x^2-1\right)=4 \quad \rightarrow \quad log_2\left(x^2-1\right)=\frac{4}{3}$$

і число $\frac{4}{3}$ напишемо «у вигляді логарифма», використовуючи формулу (***):

$$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}\cdot log_m m=log_m m^{\frac{4}{3}} .$$

Підставляючи отриманий вираз для числа $\frac{4}{3}$ в рівняння і вибираючи $m=2$, отримаємо для рівняння *(1)* наступну форму його запису:

$$log_2\left(x^2-1\right)=log_2 2^{\frac{4}{3}} .$$

Можна довести, що обидві форми запису рівняння *(1),* отримані першим і другим способами, тотожні.

- **Тригонометричні рівняння**. Якщо рівняння (2.3) після перетворень можна привести до одного з наступних видів:

$$\begin{aligned} &sin\,\mu\left(x\right)=a, \quad (1)\\ &cos\,\mu\left(x\right)=a, \quad (2)\\ &tg\;\mu\left(x\right)=a, \quad (3)\\ &ctg\;\mu\left(x\right)=a, \quad (4) \end{aligned} \tag{2.22}$$

де $\mu\left(x\right)$- вираз, що містить змінну величину *x*; *a* - число, яке задовольняють умови:

$$a\in\left[-1;1\right] \tag{2.23}$$

в разі *(1), (2)* і

$$a \in \left(-\infty;\infty\right) \qquad (2.24)$$

в разі *(3), (4)*. Якщо, наприклад, в рівнянні *(1)* формули (2.22) $a = 3$, то рівняння $sin\,\mu\left(x\right) = 3$ розв'язків не має.

Так як дії *«sin»* і *«cos»* можуть виконуватися над будь-яким числом, то область допустимих значень *D*рівнянь *(1) і (2)* у формулі (2.22) збігаються з область допустимих значень виразу $\mu\left(x\right)$:

$$D = D\left(\mu\left(x\right)\right). \qquad (2.25)$$

У випадках *(3) і (4)* формули (2.22) дії *«tg»* і *«ctg»* не визначені (тобто, не можуть бути виконані), якщо $\mu\left(x\right) = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$ для випадку *(3)* і $\mu\left(x\right) = \pi \cdot n$ для випадку *(4)*, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ і це означає, що області визначення дії «tg» і «ctg» $D\left(tg\right)$ і $D\left(ctg\right)$ матимуть вигляд:

$$D\left(tg\right) = \left\{x \middle| \ \mu\left(x\right) \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, \quad x \in R\right\}, \qquad (2.26)$$

$$D\left(ctg\right) = \left\{x \middle| \ \mu\left(x\right) \neq \pi \cdot n, \quad x \in R\right\}. \qquad (2.27)$$

Областю допустимих значень рівнянь *(3)* і *(4)* буде перетин безлічі $D = D\left(\mu\left(x\right)\right)$ з безліччю $D\left(tg\right)$ в разі *(3)* і з $D\left(ctg\right)$ в разі *(4):*

$$D = D\left(tg\right) \cap D\left(\mu\right), \qquad (2.28)$$

$$D = D\left(ctg\right) \cap D\left(\mu\right). \qquad (2.29)$$

***Приклад*.** Напишіть область допустимих значень рівнянь:

$(1)\ cos\left(\frac{x}{x-5}\right) = -0,25$; $\qquad$ $(2)\ \ sin\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}$; $\qquad$ $(3)\ \ tg\left(3x\right) = -7$.

Розв'язання.

1. Область допустимих значень D рівняння *(1)* збігається з областю допустимих значень виразу $\frac{x}{x-5}$ (Дивіться формулу 2.25):

$$D = D\left(\frac{x}{x-5}\right) = \{x \mid x - 5 \neq 0, \quad x \in R\} = \{x \mid x \neq 5, \quad x \in R\}.$$

В інших позначеннях множина *D* можна записати так:

$$D = (-\infty, 5) \cup (5, \infty) \quad \text{або} \quad x \in (-\infty, 5) \cup (5, \infty).$$

У рівнянні (1) допустимими є всі значення *x* окрім $x = 5$.

2. Відповідно до формули (2.25) область допустимих значень *D* рівняння *(2)* збігається з областю допустимих значень виразу $\sqrt{x}$:

$$D = D\left(\sqrt{x}\right) = \{x \mid x \geq 0, \quad x \in R\} \text{ або } D = D\left(\sqrt{x}\right) = [0, \infty),$$

$$x \in [0, \infty)$$

Тобто допустимими є всі позитивні значення *x*.

3. Для рівняння (3) областю його допустимих значень буде перетин безлічі $D(3x)$ з безліччю $D(tg)$: $D = D(tg) \cap D(3x)$.

У вираженні *3x* використовується тільки операція множення, яка може бути виконана над будь-яким числом, тобто вона визначена на безлічі *R*. Тому, $D(3x) = R = (-\infty; \infty)$.

Так як безліч $D(tg)$ визначається формулою (2.26), то:

$$D(tg) = \left\{x \,\middle|\, 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n, \quad x \in R\right\}$$

і область визначення *D* (множина значень змінної *x*) рівняння *(3)* задається наступною системою:

$$D = D(tg) \cap D(3x) \rightarrow x \in \begin{cases} x \in (-\infty; \infty), \\ 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot n, n = 0, \pm 1, \ldots . \end{cases}$$

ЛЕКЦІЯ 4

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ

Розділ 1

ДЕКАРТОВА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

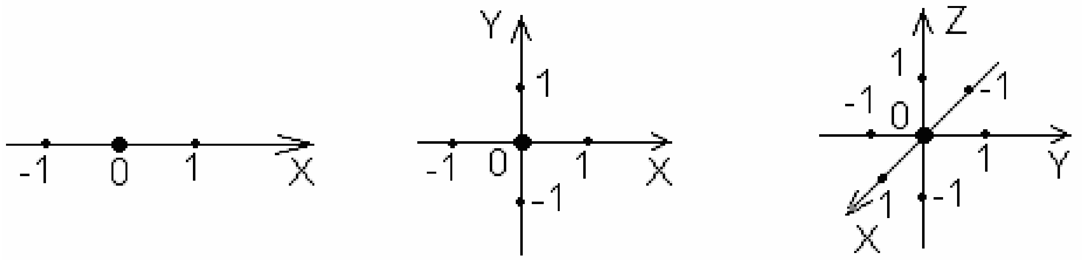
1.1. Координати точки

Положення точки *P* на площині однозначно визначається за допомогою *двох чисел*, які називаються *координатами точки* і традиційно позначаються буквами x і y. Наприклад, якщо $x = 2 \quad i \quad y = -3$, будемо записувати це в такий спосіб $P(2;-3)$. Кількість координат визначається *розмірністю простору*, в якому знаходиться дана точка.

Положення точки *P*, яка знаходиться на прямій лінії (одновимірний простір) однозначно визначається однією координатою - $P(x)$; на площині (двовимірний простір) - $P(x,y)$ двома координатами; в реальному просторі (тривимірний простір) - $P(x,y,z)$ трьома.

1.2.Система координат

Координати точки *P* задаються в *системі координат*. Найбільш уживаною є декартова прямокутна система координат (ДПСК). Координати називаються в цьому випадку декартівами координатами і позначаються x, y, z.. На малюнку 1 зображена одновимірна, двовимірна і тривимірна декартова системи координат. В одновимірному просторі *декартова система координат - це числова вісь (координатна вісь)* - пряма, на якій обрана точка відліку *O* (початок координатної системи) і масштаб.

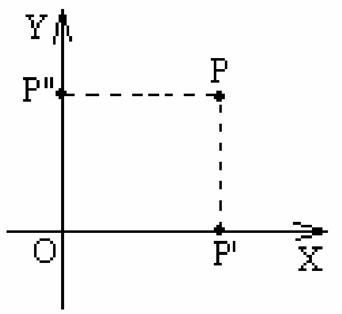


Малюнок 1.1

В двовимірному просторі ДПСК (малюнок 1) являє собою дві взаємно перпендикулярні числові осі на площині (координатні осі). Точка перетину *O* осей називається початком координат; горизонтальна вісь називається віссю абсцис (вісь *OX*), вертикальна - віссю ординат (вісь *OY*); площина, в якій знаходяться координатні осі *OX* і *OY* називається координатною площиною *XOУ*. У тривимірному просторі - ДПСК (малюнок 1) - це три числові осі із загальним початком в точці *O*; дві координатні осі (зазвичай це *OX* і *OY*), що лежать в горизонтальній площині, називаються віссю абсцис і віссю ординат, а вертикальна вісь *OZ* - віссю аплікат. ДПСК в просторі має три координатні площини: перша - *XOY*, утворена осями *OX* і *OY*, друга *XOZ* - осями *OX* і *OZ*, третя *ZOY* - осями *OY* і *OZ*.

1.3.Геометрична інтерпретація поняття координата точки

З геометричної точки зору координата точки *P* в ДПСК на площині - це відстань від цієї точки до відповідної координатної осі, взята зі знаком плюс або мінус (малюнок 2). Відстань від осі *OY* (довжина відрізка або рівного йому відрізка) - це *x* - координата точки *P*, відстань від осі *OX* (довжина відрізка або рівного йому відрізка) - у координата точки.



Малюнок 1.2.

Зауваження

1. Точки P' і P'' на малюнку 2 називаються прямокутними проекціями точки P на координатні осі OX і $OУ$ відповідно.

2. У ДПСК в просторі відстані від точки P до координатної площини XOY, взята з відповідним знаком є z - координата точки P, відстані від точки P до координатної площині XOZ - y - координата точки P, відстані від точки P до координатної площини ZOY - x - координата точки P.

3. Якщо координати двох точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ задані в ДПСК в просторі, то відстань між ними визначається формулою:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (1.1)$$

На площині відстань між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ дорівнює:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (1.2)$$

Приклад. Знайдіть відстань між точками *P (-1; 5) і M (-4; -2)*.

Розв'язання. Оскількиточки задані двома координатами, то вони розташовані на площині і треба використовувати формулу (1.2):

$$PM = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (5-(-2))^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}.$$

Приклад. Задана точка *A (-3, 4)*. Знайдіть відстань від точки *A* до осі *OX* і осі *OY*.

Розв'язання. Оскільки координата будь-якої точки в ДПСК на площині - це відстань від цієї точки до відповідної координатної осі, то: x - координата точки Aдорівнює *(-3)* - відстань до осі OY одно *(+3*); y - координата точки A дорівнює *(+4)* - відстань до осі OX одно *(+4)*.

Приклад. Напишіть координати точки, розташованої на від'ємній частині осі ОХ на відстані *4* від початку координат.

Варіанти відповідей: 1) (4; -4); 2) (-4; 0); 3) (0; 4); 4) (4; 0); 5) (0; -4).

Розв'язання. Оскільки точка розташована на осі OX, то це означає, що відстань від точки до осі OX дорівнює нулю, тобто $y = 0$. Відстань від осі OY дорівнює *4*, отже х - координата точки дорівнює *(+4)* або *(-4)*. Точка знаходиться на від'ємній частині осі OX, тому: $x = -4$.

Розділ 2

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

2.1. Поняття вектора на площині і його геометрична інтерпретація

Вектор - це новий математичний об'єкт, який з геометричної точки зору, являє собою відрізок AB, причому точки A і B не рівноправні, як у звичайного відрізка, і тому мають спеціальні назви: точка A називається *початком вектора*, точка B - *кінцем вектора*. Позначають такий вектор $\overrightarrow{AB}$ (дивіться малюнок 3). Стрілка на малюнку показує, яка точка - початок, а яка - кінець вектора.

Зауваження.

1. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ - це різні вектори, тому, що початком першого вектора є точка A, другого - точка B: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$..

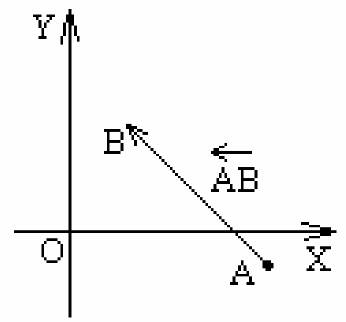
2. Стрілка над «ім'ям вектора» AB замінює слово вектор і підкреслює той факт, що мова йде не просто про відрізок AB, а про вектор $\overrightarrow{AB}$.

2.2. Координати вектора

Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, то два числа (позначимо їх $(AB)_1$ і $(AB)_2$), які виходять за формулами:

$(AB)_1 = x_2 - x_1;$

$(AB)_2 = y_2 - y_1;$



Малюнок 2.1.

називаються *координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$. Можна сказати, що вектор $\overrightarrow{AB}$ заданий, якщо задані його координати і записувати будемо це так:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \qquad (2.1)$$

Зауваження 1. Для того щоб обчислити координати вектора треба від *координат кінця вектора відняти координати початку*.

Приклад. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо відомі координати точок початку і кінця вектора $A(3;-2), B(-7;-1)$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.1):

$x_2 - x_1 = -7 - 3 = -10; \quad y_2 - y_1 = -1 - (-2) = 1;$

$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1,\, y_2 - y_1\right) = \left(-10;\, 1\right)$;

$\overrightarrow{BA} = \left(x_1 - x_2,\, y_1 - y_2\right) = \left(10; -1\right)$.

Зауваження. Крім позначення вектора символом $\overrightarrow{AB}$ використовуються і інші символи. Наприклад, вектор $\overrightarrow{AB} = \left(-10;\, 1\right)$ можна записати так: $\vec{a} = \left(-10;\, 1\right)$ або так $\overrightarrow{\left(-10;\, 1\right)}$.

2.3. Модуль вектора

Модуль вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ *–це число*, яке позначається $\left|\vec{a}\right|$ і обчислюється за формулою:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}. \quad (2.2)$$

З геометричної точки зору модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ - це довжина відрізка *AB*:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}. \quad (2.3)$$

Зауваження. Оскільки модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ - це довжина відрізка *AB*, то формула (2.2)і формула (2.3) збігаються.

Приклад. Обчисліть модуль вектора $\vec{c}$, якщо відомі координати точок початку і кінця цього вектора: $P(-3;4)$ і $M(1;-1)$.

Розв'язання. Щоб застосувати формулу (2.2)або (2.3)для обчислення модуля вектора треба попередньо знайти координати цього вектора c_1 *и* c_2.

З формули (2.1) випливає, що: $c_1 = 1 - \left(-3\right) = 4$ і $c_2 = -1 - 4 = -5$. Тобто, $\vec{c} = \left(4; -5\right)$ і тоді:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}.$$

2.4. Колінеарні, ортогональні і рівні вектори

Колінеарність векторів. Якщо координати двох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2)$ *пропорційні*, тобто:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, (2.4)$$

то ці вектори називаються *колінеарними* (паралельними). Колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

З геометричної точки зору колінеарність векторів означає, що вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих.

Приклад. Визначте координату *x* так, щоб вектори $\vec{k} = (-4, x)$ і $\vec{p} = (16, 8)$ були колінеарні.

Розв'язання. Напишемо умову колінеарності (2.4) заданих векторів:

$$\frac{16}{-4} = \frac{8}{x} \quad \Rightarrow \quad 16x = 8 \cdot (-4) \quad \Rightarrow \quad x = -2 .$$

Ортогональність векторів. Якщо координати двох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2)$, задовольняють умову:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \qquad (2.5)$$

то вони називаються *ортогональними* (перпендикулярними). Ортогональність векторів $\vec{a} = (a_1, a_2)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2)$ позначається так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

З геометричної точки зору ортогональність векторів відповідає тому, що вони лежать на взаємно перпендикулярних прямих.

Приклад. Визначте координату *x* так, щоб вектори $\vec{k} = (3x, -3)$ і $\vec{p} = (x, 16)$ були ортогональними.

Розв'язання. Запишемо умову ортогональності (2.5) заданих векторів:

$$3x \cdot x + (-3) \cdot 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = -4.$$

Рівність векторів. Два вектори $\vec{a}=(a_1,a_2)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2)$ рівні, якщо рівні їх відповідні координати:

$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$.(2.6)

2.5. Дії над векторами

Додавання (віднімання) векторів. Сумою (різницею) двох векторів $\vec{a}=(a_1,a_2)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2)$ називається вектор $\vec{c}=(c_1,c_2)$, координати якого визначаються рівностями:

$c_1=a_1\pm b_1,\quad c_2=a_2\pm b_2$.(2.7)

Тобто,

$$\vec{c}=\vec{a}\pm\vec{b}=\overrightarrow{(a_1,a_2)}\pm\overrightarrow{(b_1,b_2)}=\overrightarrow{(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2)}\ . \qquad (2.8)$$

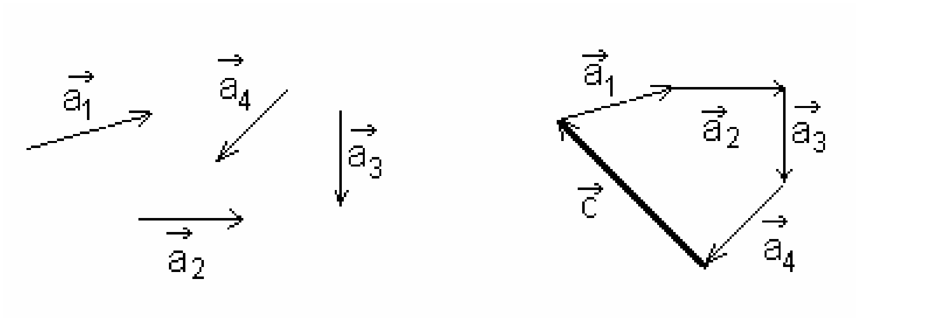
***Зауваження*.**

1. При додаванні (відніманні) більш ніж двох векторів правило (8) зберігається.

2. При геометричному складання кількох вільних векторів використовується правило замикального вектора. Наприклад, щоб геометрично знайти суму векторів: $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ (дивіться *рисунок 2.2*) треба:

• шляхом паралельного перенесення поєднати початок другого вектора $\vec{a}_2$ з кінцем першого $\vec{a}_1$, початок третього $\vec{a}_3$ з кінцем другого $\vec{a}_2$ і так далі;

• вектор, який замикає отриману ламану лінію (*рисунок 2.2.b*), початок якого знаходиться в початку першого вектора $\vec{a}_1$, а кінець в кінці останнього вектора і являє собою суму векторів



$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$

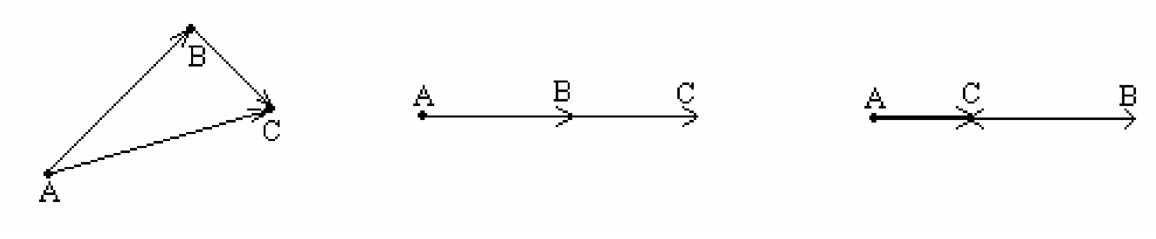
(a) *(b)*

Рисунок 2.2.

3. У разі двох не колінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ замикальним вектором є вектор $\overrightarrow{AC}$, який утворює з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ трикутник ABC (*рисунок 2.3а*).

4. Якщо вектора $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ єоднаковонапрямленними, то їх «геометрична сума» - вектор $\overrightarrow{AC}$, наведена на *рисунку 2.3b*.

5. У разі, коли вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ протилежно спрямовані, результат їх геометричного складання наведено на *рисунку* 2.3*c*. Вектор $\overrightarrow{AC}$ виділений жирною лінією.



abc

Рисунок2.3.

6. Щоб знайти різницю двох векторів $\vec{a} - \vec{b}$ треба шляхом паралельного перенесення поєднати початок першого вектора $\vec{a}$ з початком другого вектора $\vec{b}$ (*рисунок2.4*). Вектор $\vec{c}$, що з'єднує кінці обох векторів і спрямований від кінця вектора $\vec{b}$ до кінця вектора $\vec{a}$, є різниця векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (*рисунок*2.4).

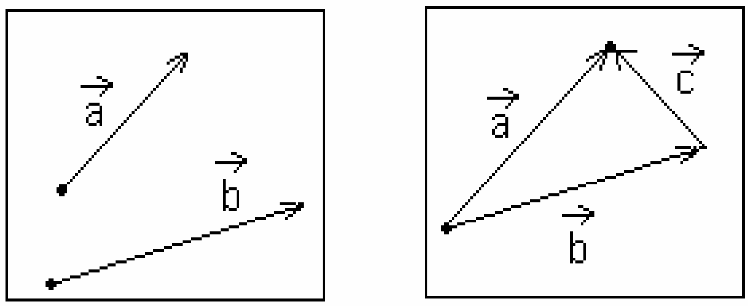


Рисунок 2.4.

Множенням векторів. Добутком числа λ на вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$ називається вектор $\vec{b} = (b_1, b_2)$, координати якого визначаються так:

$b_1 = \lambda a_1, \qquad b_2 = \lambda a_2.$(2.9)

Тобто,

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{(a_1, a_2)} = \overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$.(2.10)

Для операцій додавання векторів і множення на число існує формула:

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (2.11)

Зауваження

1. Якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.
2. Якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і $\lambda > 0$, то:
   - вектор $\vec{a}$ *збігається за напрямком* з вектором $\vec{b}$

   $(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b})$ і $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.
3. Якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і $\lambda < 0$, то:
   - вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежноспрямовані $(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b})$ і $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.
4. Для операцій додавання векторів і множення на число має місце формула:

$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}+\ldots\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}+\ldots$.   .

Приклад. Знайдіть координати вектора $\vec{c}=\left(-4\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, якщо

$\vec{a}=(1,-2)$ і $\vec{b}=(3,-2)$.

Розв'язання.

$\vec{c}=\left(-4\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-4\cdot\vec{a}-\left(-4\right)\cdot\vec{b}=-4\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}=$

$=-4\cdot\overrightarrow{(1,-2)}+4\cdot\overrightarrow{(3,-2)}=\overrightarrow{(-4,8)}+\overrightarrow{(12,-8)}=$

$=\overrightarrow{(-4+12;\ 8+(-8))}=\overrightarrow{(16;0)}.$

Скалярний добуток. Результатом скалярного добутку вектора $\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$ на вектор $\vec{b}=\left(b_1,b_2\right)$ є число, яке позначається: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ і обчислюється за формулою:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$.(2.12)

Оскільки формула (2.12)дозволяє виконати множення двох векторів, якщо відомі їх координати, то її називають *координатної формою записи скалярного добутку*.

Множення двох векторів можна виконати, використовуючи іншу формулу:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\beta$,(2.13)

де $\left|\vec{a}\right|$ і $\left|\vec{b}\right|$ - модулі векторів $\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$ і $\vec{b}=\left(b_1,b_2\right)$, а β - кут між ними. Такий спосіб запису добутку векторів називається *геометричною формою запису скалярного добутку*, тому що як в ній використовуються геометричні характеристики вектора: довжина (модуль) і кут.

Зауваження.

1. З формули (2.12) і визначення модуля вектора (2.2) випливає, що, якщо помножити вектор $\vec{a}$ на себе, то:

$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_2=a_1^2+a_2^2=\left|\ \vec{a}\ \right|^2$.(2.14)

Квадрат вектора визначається як скалярний добуток цього вектора на себе:

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}$ і $\vec{a}^{\,2}=\left|\ \vec{a}\ \right|^2$.

2.6. Формули обчислення кута між векторами

Якщо прирівняти праві частини формул (12) і (13), то можна отримати, що

$$cos\beta = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) дозволяє обчислити кут між векторами, якщо відомі координати цих векторів.

Приклад. Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = (-2;4)$ і $\vec{c} = (3;1)$.

*Розв'язання.*Застосуємо формулу (2.15), обчисливши попередньо модулі векторів і їх скалярний добуток:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 1 = -2.$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{-2}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

1. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 8 класу./За редакцією З.І.Слепкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. - 232 с.
2. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 9 класу./За редакцією З.І.Слепкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. - 256 с.
3. Шкіль М.І., та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвіт. навч. закладів - К:, Зодіак - ЕКО, 2006. - 272 с.
4. Шкіль М.І., та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу загальноосвіт. навч. закладів - К:, Зодіак - ЕКО, 2006. - 384 с.
5. Погорєлов О.В. геометрія: Планіметрія: Підруч. Для 7-9 кл. загальноосвіт. навч.закл. -К.: Школяр, 2004.-240 с.
6. Погорєлов О.В. геометрія: Стереометрія: Підруч. Для 10-11 кл. серед. шк., - К.: Школяр, 2006.-128 с.
7. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни "Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: ОДЕКУ, 2007-51с.