

Міністерство освіти і науки України
Одеський державний екологічний університет

О.І. Герасимов, А.Я. Співак

МЕХАНІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Конспект лекцій

Одеса - 2008

ББК 22
Г 37
УДК 532

Друкується за рішенням методичної ради Одеського державного екологічного університету (протокол № 2 від 23.10.08р.)

Герасимов О.І., Співак А.Я. «Механіка суцільних середовищ»

Конспект лекцій спрямований на поліпшення засвоєння студентами матеріалів спеціальної дисципліни “Механіка суцільного середовища”. Вибрані питання із достатньою для фахових вимог повнотою формують уявлення про предмет та головні напрямки розвитку цієї дисципліни. Матеріали викладаються по такій схемі: теоретичний вступ, вибрана типова проблема у вигляді питання або задачі, які потребують розв’язку, методичні вказівки до розв’язання (або ж повний розв’язок), відповідь, коментар.

Конспект розроблено для студентів-екологів старших курсів. Він також може бути корисним і для студентів інших спеціальностей природничих напрямків підготовки.

© Герасимов О.І., Співак А.Я., 2008
© Одеський державний екологічний
університет, 2008

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Вступ. Гіпотеза суцільного середовища та рух в'язкої рідини	5
1. Ідеальна рідина.....	8
2. Гідродинамічна нестійкість в зсувних течіях.....	16
2.1. Нестійкість тангенціального розриву.....	17
2.2. Стійкість площиннопаралельної течії нестислої рідини.....	18
2.3. Стійкість ріплонів (квантів флуктуацій) на поверхні розділу двох рідин.....	20
2.4. Нестійкість течії між циліндрами, що обертаються.	23
3. Конвективна нестійкість нестислої рідини.....	25
3.1. Механічна рівновага нерівномірно нагрітої рідини	26
3.2. Площинний горизонтальний шар з вільними ізотермічними границями (задача Релея).....	27
3.3. Конвективна нестійкість рідини, яка обертається ..	30
3.4. Конвективна нестійкість у моделі Веландера-Лоренца.....	31
3.5. Модель Лоренца. Дивний атрактор.....	34
4. Просторово-осереднений профіль турбулентної течії.....	36
4.1. Стаціонарна осереднена турбулентна течія (СОТТ) у прикордонному шарі.....	38
4.2. Профіль СОТТ і витрати рідини при протіканні у круглій трубі	39
4.3. Кореляційні нестійкості.....	40
5. Кінетика і кореляційна нестійкість фазових переходів.....	42
5.1. Релаксація незберігаючогося поля упорядкування.	43
5.2. Релаксація зберігаючогося поля параметра порядку поблизу точок розшарування.....	46
6. Нестійкість типу біфуркації народження циклу.....	48
6.1. Хімічний реактор Ліфевра-Прігожина (брюселятор)	51
7. Конструювання детермінованих механічних структур в теорії динамічних дисипативних систем (сухих гранульованих середовищ).....	54
7.1. Стаціонарні стани в 1D системах з дисипативними взаємодіями.....	55
Додаток 1.....	60
Додаток 2.....	61
Література.....	62

Передмова

Конспект лекцій спрямований на полегшення засвоєння студентами матеріалів курсу “Механіка суцільного середовища”, на який відводиться 64 академічних години. Вибрані питання повністю формують уявлення про предмет та головні напрямки розвитку цієї дисципліни. Матеріали викладаються по такій схемі: теоретичний вступ, вибрана типова задача, яка потребує розв’язку, методичні вказівки до її розв’язання (або ж її повний розв’язок), відповідь, коментар.

На думку автора такий підхід до викладання курсу є найбільш спрямований на ефективне засвоєння матеріалу та формування навиків їх практичного застосування. Кожний розділ вміщує також посилку на природне джерело відповідної задачі. Список додаткової літератури досить повний.

Вступ. Гіпотеза суцільного середовища та рух в'язкої рідини.

Властивості рідин та газів таких, наприклад, як густина, склад або швидкість мають дуже нерівномірний розподіл, коли речовина розглядається у такому малому масштабі, що спостерігаються окремі молекули. Але в механіці рідини зазвичай вивчається поведінка речовини як цілого, у макроскопічному масштабі, великому у порівнянні з середньою відстанню між молекулами. Далі ми будемо вважати макроскопічну поведінку рідини однаковою, так як би її структура була б ідеально безперервною, а фізичні величини, наприклад маса і кількість руху, пов'язані з тією ж речовиною, яка міститься в середині розглядаемого об'єму (відволікаючись від того, що у дійсності вони концентруються в його малих частках). Таке припущення як раз і має назву *гіпотези суцільного середовища*.

Гіпотеза суцільного середовища дає можливість надати визначений сенс терміну “значення у точці”, який застосовується до різноманітних параметрів рідини, наприклад густини, швидкості, температури, та й взагалі вважати ці величини безперервними функціями координат і часу. З огляду на вищесказане, можна скласти рівняння, які не залежать (коли річ іде про їхню форму) від структури частинок рідини. На цьому шляху гази і рідини вивчаються однаково, - і в дійсності базові рівняння не залежать від того, чи існує будь яка структура частинок відповідної речовини. Аналогічна гіпотеза застосовується і в механіці твердих деформуємих тіл, і вже ці обидва визначених предмета разом часто називають взагалі механікою суцільних середовищ.

Макроскопічний рух рідини або газу зображується загальною системою рівнянь гідродинаміки. Для реальної стискаємої рідини, яка знаходиться у полі тяжіння, ця система містить у собі:

рівняння руху (рівняння Нав'є-Стокса)

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

рівняння теплопровідності

$$\rho T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) S \right] = \kappa \Delta T + D, \quad (2)$$

і рівняння безперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3)$$

Тут \vec{v} швидкість, p тиск, ρ густина, T абсолютна температура, S густина ентропії, η і ξ , відповідно, зсувна і об'ємна в'язкість, D дисипативна функція:

$$D = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} \right)^2 + \xi (\operatorname{div} \vec{v})^2, \quad (4)$$

δ_{ik} дельта-символ Кронекера.

До рівнянь (1)-(3) необхідно додати рівняння стану середовища

$$\rho = \rho(T, p). \quad (5)$$

Рівняння (1)-(3) витікають із локальних законів збереження, відповідно, імпульсу, енергії і маси [1]. Загальна задача гідродинаміки полягає у визначенні поля швидкості, тиску і температури шляхом знаходження рішень замкненої системи рівнянь (1)-(3), (5). Для її розв'язання до системи рівнянь (1)-(3), (5) слід додати граничні умови, які вимагають, наприклад, у випадку двох

несумішних рідин, однаковості швидкостей і модулів сил, з якими рідини діють одна на одну на границі розділу:

$$n_i^{(1)} \sigma_{ik}^{(1)} = -n_i^{(2)} \sigma_{ik}^{(2)}, \quad (6)$$

тут \vec{n} - одиничний вектор нормалі, зовнішній по відношенню до поверхні рідини;

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \xi \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v}$$

тензор напружень.

На вільній поверхні рідини

$$\sigma_{ik} n_k = 0. \quad (7)$$

Для рівняння теплопровідності типові умови на границі розділу двох середовищ, які не містять джерел тепла, є у дорівнюванні температур

$$T^{(1)} = T^{(2)} \quad (8)$$

і нормальних компонент теплових потіків

$$\alpha_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} = \alpha_2 \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n} \quad (9)$$

де $\frac{\partial T}{\partial n}$ похідна від T по напрямленню нормалі до поверхні.

1. ІДЕАЛЬНА РІДИНА [1]

Одним з головних рівнянь гідродинаміки є рівняння Ейлера (1755 р.)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (1)$$

Якщо рідина знаходиться у полі тяжіння, то на кожну одиницю її об'єма діє ще одна сила $\rho \vec{g}$, де \vec{g} - прискорення сили тяжіння. Так що (1) приймає вигляд

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}. \quad (2)$$

Це рівняння руху не враховує процесів дисипації енергії, які можуть мати місце у протікаючій рідині внаслідок внутрішнього тертя (в'язкості) у рідині і теплообміну між різними її ділянками. Про рух рідин і газів, при яких несуттєві процеси теплопровідності і в'язкості, зазвичай говорять як про рух *ідеальної рідини*.

Відсутність теплообміну між окремими ділянками рідини (а також, звичайно, і між рідиною та навколишніми речами що торкаються з нею) означає, що рух здійснюється адіабатично, причому адіабатично у кожній з ділянок рідини. Таким чином, рух ідеальної рідини слід розглядати як адіабатичний.

При адіабатичному русі ентропія кожної ділянки рідини залишається сталою при переміщенні її у просторі. Позначивши через s ентропію, віднесену до одиниці маси рідини, ми можемо виразити адіабатичність руху рівнянням

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (3)$$

де повна похідна за часом означає зміну ентропії заданої ділянки рідини, що пересувається. Цю похідну можна написати у вигляді

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} s = 0. \quad (4)$$

Це і є загальне рівняння, що являє собою адіабатичність руху ідеальної рідини. За допомогою (4) із вступу його можна написати у вигляді “рівняння безперервності” для ентропії

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s \vec{v}) = 0. \quad (5)$$

Множина $\rho s \vec{v}$ це густина потіку ентропії. Якщо в деякий початковий момент часу ентропія однакова у всіх точках об’єма рідини, то вона залишеться повсюди однаковою та незмінною з часом і при подальшому русі рідини. У цих випадках можна, таким чином, писати рівняння адіабатичності у вигляді

$$s = \text{const}. \quad (6)$$

Такий рух називають ізентропічним.

Ізентропічністю руху можна скористатися для того, щоб надати рівнянню руху (1) трохи інакший вигляд. Для цього скористаємося відомим термодинамічним співвідношенням

$$dw = Tds + Vdp,$$

де w - теплова функція одиниці маси рідини, $V = 1/\rho$ - питомий об’єм, а T - температура. Оскільки $s = \text{const}$, маємо

$$dw = Vdp = \frac{1}{\rho} dp,$$

і тому

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla w.$$

Рівняння (1) можна, відповідно, написати у вигляді

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\text{grad } w. \quad (7)$$

Корисно помітити ще одну форму рівняння Ейлера, в якому воно містить тільки швидкість. Skorиставшись відомою формулою векторного аналізу

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 = [\vec{v} \text{ rot } \vec{v}] + (\vec{v} \nabla) \vec{v},$$

можна написати (7) у вигляді

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \text{ rot } \vec{v}] = -\text{grad} \left(w + \frac{v^2}{2} \right). \quad (8)$$

Застосувавши до обох сторін цього рівняння операцію rot , отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = \text{rot} [\vec{v} \text{ rot } \vec{v}], \quad (9)$$

яке містить тільки швидкість.

Стан рідини яка рухається визначається п'ятью величинами: трьома компонентами швидкості \vec{v} і, наприклад, тиском p і густиною ρ . Відповідно до цього повна система гідродинамічних рівнянь повинна містити п'ять рівнянь. Для ідеальної рідини ціми рівняннями є рівняння Ейлера, рівняння безперервності і рівняння, що висловлює адіабатичність руху.

Для рідини, що знаходиться у стані спокою в однорідному полі тяжіння, рівняння Ейлера (2) приймає наступний вигляд

$$\text{grad } p = \rho \vec{g}. \quad (10)$$

Це рівняння описує механічну рівновагу рідини. (Якщо зовнішні сили взагалі відсутні, то рівняння рівноваги дає нам $\nabla p = 0$, тобто $p = \text{const}$, - тиск однаковий у всіх точках рідини.)

Рівняння (10) безпосередньо інтегрується, якщо густину рідини можна вважати сталою у всьому її об'ємі, тобто якщо немає суттєвого стиснення рідини під дією зовнішнього поля. Спрямовуючи вісь Z вертикально вгору, маємо:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Звідси

$$p = -\rho gz + \text{const.}$$

Якщо рідина у стані спокою має вільну поверхню (на висоті h), до якої прикладений однаковий у всіх точках зовнішній тиск p_0 , то ця поверхня повинна бути горизонтальною площиною $z = h$. Із умови $p = p_0$ при $z = h$ маємо

$$\text{const} = p_0 + \rho gh,$$

так що

$$p = p_0 + \rho g(h - z). \quad (11)$$

Для великих мас рідини або газу густину ρ неможна, взагалі кажучи, вважати сталою; це в особливості відноситься до газів (наприклад, до повітря).

Рівняння гідродинаміки суттєво спрощуються у випадку стаціонарної течії рідини. Під стаціонарною розуміють таку течію, при якій у кожній точці простору, що зайнятий рідиною, швидкість течії залишається сталою у часі. Іншими словами, \vec{v} є функцією одних тільки координат, так що $\partial \vec{v} / \partial t = 0$. Рівняння (8) зводиться тепер до

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\vec{v} \text{ rot } \vec{v}] = -\text{grad } w. \quad (12)$$

Введемо поняття про лінії тока, як лінії, дотичні до яких вказують напрямок вектора швидкості у точці дотику в даний момент часу; вони визначаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (13)$$

При стаціонарному протіканні рідини лінії тока залишаються незмінними у часі і співпадають з траєкторіями частинок рідини. При нестаціонарній течії таке співпадання, зрозуміло, не має місця: дотичні до лінії тока дають напрямки швидкості різних частинок рідини у послідовних точках простору у визначений момент часу, в той час як дотичні до траєкторії дають напрямки швидкості визначених частинок у послідовні моменти часу.

Помножимо рівняння (12) на одиничний вектор дотичної до лінії тока у кожній її точці; цей одиничний вектор позначимо \vec{T} . Проекція градієнта на деякий напрямок дорівнює, як відомо, похідній, яка береться по цьому напрямку. Тому шукана проекція від $\text{grad } w$ є $\partial w / \partial l$. Що стосується вектора $[\vec{v} \text{ rot } \vec{v}]$, то він перпендикулярний до швидкості \vec{v} , і тому його проекція на напрямок \vec{T} дорівнює нулеві.

Таким чином, з рівняння (12) ми отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = 0.$$

Звідси витікає, що величина $\frac{v^2}{2} + w$ стала вздовж лінії тока:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const}. \quad (14)$$

Значення const , взагалі кажучи, відрізняється для різних ліній тока.

Рівняння (14) має назву рівняння Бернуллі (1738 г.).

Якщо рідина протікає у полі тяжіння, то до правої частини рівняння (12) треба додати ще прискорення сили тяжіння \vec{g} . Виберемо напрямок сили тяжіння у якості напрямку вісі Z , причому позитивні значення Z відраховуються вгору. Тоді косинус кута між напрямками \vec{g} і \vec{l} дорівнює похідній $-dz/dl$, так що проекція \vec{g} на \vec{l} є

$$-g \frac{dz}{dl}.$$

Відповідно цьому будемо мати тепер

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w + gz \right) = 0.$$

Таким чином, рівняння Бернуллі висловлює, що вздовж ліній тока залишається сталою сума

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const.} \quad (15)$$

Інтеграл

$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{l},$$

що береться вздовж замкненого контура, має назву циркуляції швидкості вздовж цього контура.

Розглянемо замкнений контур, що проведений в рідині у деякий момент часу. Будемо розглядати його як “рідкий”, тобто як зібраний з частинок рідини, що знаходяться на ней. З рухом часу ці частинки пересуваються, а з ними пересувається і весь контур. З’ясуємо, що відбувається при цьому з циркуляцією швидкості вздовж контура. Іншими словами, обчислимо похідну за часом

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} d\vec{l}.$$

Ми пишемо тут повну похідну за часом відповідно тому, що шукаємо зміну циркуляції вздовж рідкого контура що пересувається, а не вздовж контура, який нерухомий у просторі.

Для запобігання путанини будемо тимчасово позначати диференціювання по координатам знаком δ , залишивши знак d для диференціювання за часом. Окрім того, помітимо, що елемент $d\vec{l}$ довжини контура можна написати у вигляді різниці $\delta\vec{r}$ радіус-векторів \vec{r} точок двох кінців цього елемента. Таким чином, напишемо циркуляцію швидкості у вигляді

$$\oint \vec{v} \delta \vec{r}.$$

При диференціюванні цього інтеграла за часом слід мати на увазі, що змінюється не тільки швидкість, але і сам контур (тобто його форма). Тому, при внесенні знаку диференціювання за часом під знак інтеграла, слід диференціювати не тільки \vec{v} , але і $\delta \vec{r}$:

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \delta \vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta \vec{r} + \oint \vec{v} \frac{d\delta \vec{r}}{dt}.$$

Оскільки швидкість \vec{v} є не що інше, як похідна за часом від радіус-вектора \vec{r} , то

$$\vec{v} \frac{d\delta \vec{r}}{dt} = \vec{v} \delta \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \delta \vec{v} = \delta \frac{v^2}{2}.$$

Але інтеграл по замкненому контуру від повного диференціала дорівнює нулю. Тому другий з написаних інтегралів зникає і залишається

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \delta \vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta \vec{r}.$$

Тепер залишається підставити сюди для прискорення $d\vec{v}/dt$ його вираз відповідно з (7):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad } w.$$

Застосувавши формулу Стокса, отримаємо тоді (оскільки $\text{rot grad } w = 0$):

$$\oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r} = \int \text{rot} \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{f} = 0.$$

Таким чином, переходячи до старих позначень, знаходимо остаточно:

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} d\vec{l} = 0,$$

або

$$\oint \vec{v} d\vec{l} = \text{const.} \quad (16)$$

Ми приходимо до результату, що (у ідеальній рідині) циркуляція швидкості вздовж замкненого рідкого контура залишається незмінною з часом. Це твердження має назву теореми Томсона (W. Thomson, 1869) або *закону збереження циркуляції швидкості*. Підкреслимо, що він отриман шляхом використання рівняння Ейлера у формі (7) і тому пов'язан з припущенням про ізентропічність руху рідини. Для неізентропічного руху цей закон не має місця.

2. ГІДРОДИНАМІЧНА НЕСТІЙКІСТЬ В ЗСУВНИХ ТЕЧІЯХ.

Точний стаціонарий розв'язок рівнянь гідродинаміки формально існує при різноманітних співвідношеннях між коефіцієнтами системи (1), (3), (5). Однако, реальні рухи, які задовольняють рівнянням гідродинаміки, повинні ще бути стійкими, тобто малі збурення раз виникнувши, повинні згасати з часом, в протилежному випадку - рух нестійкий.

Розглянемо, наприклад, поле швидкостей $v_0(\vec{r})$ та тисків $p_0(\vec{r})$, які є стаціонарним рішенням рівняння Нав'є-Стокса без урахування теплопровідності $\rho = \rho(\rho)$ і стислості рідини. Введемо мале, нестаціонарне збурення швидкості $v_1(\vec{r}, t)$ тиску $p_1(\vec{r}, t)$ таким чином, щоб результуючий рух

$$v = v_0 + v_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1$$

задовольняє рівнянням (1) - (3). При цьому відомі функції v_0 і p_0 задовольняють рівнянням

$$\left(\vec{v}_0 \vec{\nabla}\right) \vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_0 + \nu \Delta \vec{v}_0, \quad \text{div } \vec{v}_0 = 0 \quad (1)$$

а $v_1(\vec{r}, t)$, з точністю до доданків вищих порядків малості, рівнянням

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \left(\vec{v}_0 \vec{\nabla}\right) \vec{v}_1 + \left(\vec{v}_1 \vec{\nabla}\right) \vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_1 + \nu \Delta \vec{v}_1, \quad \text{div } \vec{v}_1 = 0 \quad (2)$$

Загальний розв'язок системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь, з незалежними від часу коефіцієнтами, може бути записано у вигляді суми часткових рішень, в яких $v_1(\vec{r}, t)$ залежить від часу у вигляді множника $\exp(-i\omega t)$

$$v_1^{(i)} = \sum_{(\alpha)} A_{\alpha i} \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

Частоти збурень $\{\omega_\alpha\}$ визначаються в результаті розв'язання рівнянь (2) з відповідними граничними умовами. Якщо в спектрі власних частот $\{\omega_\alpha\}$ опиняться такі, що $\text{Im}\omega_\alpha > 0$, то відповідні відхилення амплітуд гідродинамічних змінних будуть нескінченно зростати з часом, а відповідаючий їм рух - нестійким.

2.1. Нестійкість тангенціального розриву [1, 3].

Два межуючих площиннопаралельних шара ідеальної рідини, ковзаючи по поверхні розділу, рухаються один відносно іншого в системі координат, зображеної на рис. 1. Розглядаючи невелику частку поверхні розділу та течію рідини біля неї, можемо вважати цю ділянку площинною, а швидкість рідини з обох її сторін сталою.

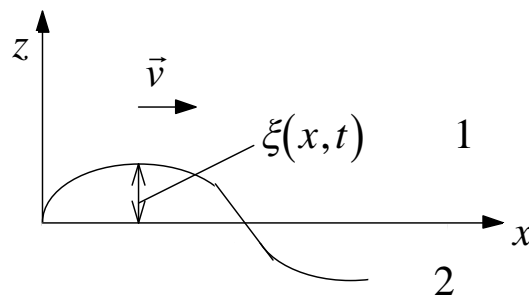


Рис. 1.

Надав слабке збурення поверхні розділу $\xi(x, t)$ і, відповідно, тиску і швидкості рідини, які пропорційні $\exp[i(kx - \omega t)]$, користуючись (2), (3), довести, що тангенціальний розрив швидкості нестійкий.

Вказівка: не обмежуючи загальності, можемо вважати, що нижній шар (2, $z < 0$) знаходиться у стані спокою, а верхній (1, $z > 0$) - рухається з швидкістю $\vec{v}(v_x, 0, 0) = \vec{v}(v, 0, 0)$. Розглянемо систему з боку шару 1. Якщо ξ зміщення вздовж вісі z точок поверхні розриву при збуренні, то $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ є швидкість зміни координати поверхні при заданій координаті x . В потрібному наближенні

$$v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

причому для v_z слід брати її значення на поверхні. Нормальні компоненти швидкості v_z і тиск на поверхні тангенціального розриву неперервні.

Відповідь:

$$\omega_{1,2} = kv \frac{\rho_1 \pm i \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.2)$$

Таким чином, тангенціальний розрив швидкості нестійкий.

2.2. Стійкість площиннопаралельної течії нестислої рідини [1,3].

Дослідити стійкість площиннопаралельної течії нестислої рідини з великою в'язкістю, при малих числах Рейнольдса, без урахування теплопровідності, у полі тяжіння, в системі координат, зображеній на рис. 1 (розглядається тільки шар 2).

Вказівка: кожен тип руху рідини визначається трьома параметрами – в'язкістю ν , типовою швидкістю потоку U , яким-небудь лінійним розміром l . Ці величини мають такі розмірності:

$[v] = \text{см}^2/\text{с}$, $[l] = \text{см}$, $[u] = \text{см}/\text{с}$. Із них можна скласти лише одну незалежну безрозмірну комбінацію, яка має назву число Рейнольдса

$$R = ul/v. \quad (2.3)$$

Всяк інший безрозмірний параметр можна записати у вигляді функції від R .

Нелінійний член в рівнянні Нав'є-Стокса $\sim (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ має порядок величини u^2/l , а доданок $\nu \Delta \vec{v} \sim \nu u/l^2$, їх відношення ul/ν є як раз число Рейнольдса, тому, при $R \ll 1$ членом $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ можна знехтувати.

При довільній в'язкості шукаємо рішення рівнянь руху для збурень швидкості і тиску

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu \Delta_{x,z} v_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu \Delta_{x,z} v_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

залежне від t і x згідно закону $\exp(-i\omega t + ikx)$ та згасаюче по напрямку вглиб рідини ($z < 0$). Отримаємо

$$\begin{aligned} v_x &= \exp(-i\omega t + ikx) [A \exp(kz) + B \exp(mz)], \\ v_z &= \exp(-i\omega t + ikx) \left[-iA \exp(kz) - i \frac{k}{m} B \exp(mz) \right], \\ \frac{p}{\rho} &= \exp(-i\omega t + ikx) \left[\frac{\omega}{k} A \exp(kz) \right] - gz, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{де } m = \sqrt{k^2 - i \frac{\omega}{\nu}}.$$

Граничні умови на поверхні рідини мають вигляд

$$\sigma_{zz} = \left(-p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=\xi} = 0, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{xz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \Big|_{z=\xi} = 0. \quad (2.7)$$

Диференціюючи (2.6) по t і ураховуючи, що

$$g v_z = g \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (2.8)$$

покладемо в граничних умовах $z=0$. Із умови сумісності отриманих таким чином двох однорідних рівнянь для A і B отримаємо дисперсійне рівняння у наступному вигляді

$$\left(2 - i \frac{\omega}{\nu k^2} \right)^2 + \frac{g}{\nu^2 k^3} = 4 \cdot \sqrt{1 - i \frac{\omega}{\nu k^2}}, \quad (2.9)$$

яке визначає залежність ω від хвильового вектора k .

Відповідь:

$$\omega = \begin{cases} \pm \sqrt{gk} - i 2\nu k^2, & \nu k^2 \ll \sqrt{gk}, \\ -\frac{ig}{2\nu k}, & \nu k^2 \gg \sqrt{gk}. \end{cases} \quad (2.10).$$

2.3. Стійкість рішплонів (квантів флуктуацій) на поверхні розділу двох рідин [1].

Два межуючих математично вздовж площини $z=0$ площиннопаралельних шара, 1 ($z>0$) і 2 ($z<0$) в'язкої, нестислої, нетеплопровідної рідини рухаються один відносно іншого з сталою швидкістю $\vec{v}_c(v_x^c, 0, 0) = \vec{v}_c(v^c, 0, 0)$ в системі координат, зображеній на рис. 2.

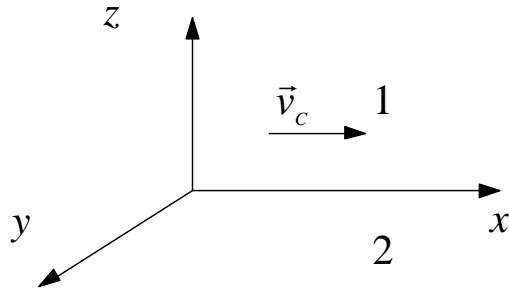


Рис. 2.

Знехтуючи вя'зкістю верхнього шару, дослідити стійкість руху відносно деформацій поверхні розділу $\xi(x, y) \sim \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, генеруємих тепловим рухом молекул рідини (ріпплонів).

Вказівка: Поле швидкостей і тисків зручно надати у вигляді

$$\begin{aligned} v_\gamma &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r_\gamma} - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ v_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial r_\gamma} \\ \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz, \quad \gamma = x, y. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Функції φ і Ψ , які задовольняють рівнянням

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \nu\Delta\Psi, \quad \Delta\varphi = 0, \quad (2.12)$$

можна шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \Psi &= \tilde{f}(z)\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}), \\ \varphi &= \tilde{f}(z)\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

де $\vec{k} = \vec{k}(k_x, k_y)$, $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$.

Добавка до тиску δp , яка спричинена скривленням поверхні, може бути розрахована за формулою Лапласа

$$\delta p = -\alpha \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right), \quad (2.14)$$

де α - коефіцієнт поверхневого натягу.

Граничні умови складаються з безперервності нормальних та тангенціальних компонент тензора напружень

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\gamma z}^{(1)} &= \sigma_{\gamma z}^{(2)}, \quad \gamma = x, y\end{aligned}\quad (2.15)$$

та, окрім того, у виконанні умов виду

$$\begin{aligned}v_z^{(1)} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + v^c \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ v_z^{(2)} &= \frac{\partial \xi}{\partial t},\end{aligned}\quad (2.16)$$

які слідують з постановки задачі.

Користуючись (2.11)-(2.16), отримаємо дисперсійне рівняння для ріплонів в умовах зсувної течії

$$\begin{aligned}\rho_2(2vk^2 - i\omega)^2 + gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha k^3 - \rho_1(v^c k - \omega) = \\ 4v^{3/2}k^3 \sqrt{vk^2 - i\omega}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Можна показати, що рівняння (2.17) має тільки комплексні корені $\{\omega_\alpha\}$, причому $\text{Im } \omega_\alpha$ і $\text{Re } \omega_\alpha$ обертаються на нуль одночасно, іншою мовою на ω -площині нуль є точкою біфуркації рішення рівняння (2.17). При наближенні системи до стану гідродинамічної нестійкості ($\text{Im } \omega_\alpha, \text{Re } \omega_\alpha \rightarrow 0$), рівняння (2.17) спрощується та припускає аналітичне рішення виду

$$\omega_{1,2} = \left(-\frac{2vk^2\rho_2 \pm \Omega_-}{\rho_1 + \rho_2} \right) i + \frac{\rho_1 vk}{\rho_1 + \rho_2} \mp \Omega_+ \quad (2.18)$$

де Ω_\pm - деякі розмірні функції від k .

Умова зриву гідродинамічної стійкості

$$\text{Im } \omega_1 = -\frac{2vk^2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \Omega_- = 0, \quad (2.19)$$

дозволяє знайти рівняння кривої рівноваги на площині (k, v) :

$$k = \frac{\rho_1 v^2}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\rho_1^2 v^4}{\alpha^2} - g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha}}, \quad (2.20)$$

графік якої зображен на Рис. 3.

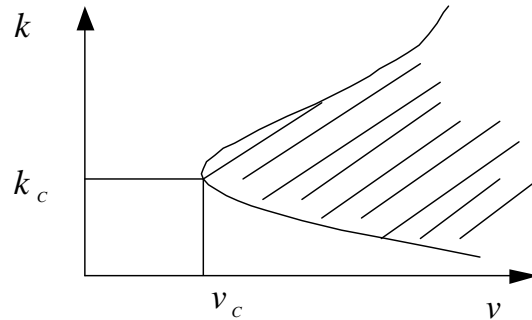


Рис.3.

Штриховкою на Рис. 3 позначена область нестійких станів ріплонів, причому, мінімальна швидкість “вітру”, при якому виникає нестійкість визначається, з урахуванням (10), згідно наступного правила

$$v_c = \sqrt[4]{\frac{4\alpha(\rho_2 - \rho_1)g}{\rho_1}} \quad (2.21)$$

2.4. Нестійкість течії між циліндрами що обертаються [1-4].

Встановити критерій стійкості куєттовського руху в'язкої, нестислої рідини, замкненої між двома коаксіальними нескінченними циліндрами з радіусами $R_1 < R_2$, які обертаються вздовж своєї вісі з кутовими швидкостями Ω_1 і Ω_2 .

Вказівка: записуючи рівняння Нав'є-Стокса у циліндричній системі координат (див. Додаток 1), з урахуванням граничних вимог виду

$$v_{\varphi}|_{r=R_1} = \Omega_1 R_1, \quad v_{\varphi}|_{r=R_2} = \Omega_2 R_2, \quad (2.22)$$

користуючись (1), отримуємо вираз для поля швидкості

$$v_r = v_z = 0, \quad v_{\varphi} = Ar + \frac{B}{r}, \quad (2.23)$$

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = -\frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

При стаціонарній ламінарній течії діюча на елементи рідини центробіжна сила урівноважується радіальним градієнтом тиску. Записуючи вимогу нестійкості для елемента маси m , зміщеного під дією збурення з положення r_0 в положення $r > r_0$:

$$[r_0 v_{\varphi}(r_0)]^2 - [r v_{\varphi}(r)]^2 > 0, \quad r > r_0, \quad (2.24)$$

або інаше:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_{\varphi})^2 < 0, \quad (2.25)$$

із (2.23), (2.25) отримуємо критерій нестійкості (так званий критерій Релєя)

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) v_{\varphi} < 0. \quad (2.26)$$

Більш повний аналіз, що враховує також вплив в'язкості, може бути здійснен методом малих збурень [4, 5].

3. КОНВЕКТИВНА НЕСТІЙКІСТЬ НЕСТИСЛОЇ РІДИНИ.

Система рівнянь (1)-(3), (5) може бути застосована для опису вільної теплової конвекції, тобто руху рідини що виникає у полі тяжіння при наявності просторової неоднорідності густини, яка визвана неоднорідністю температури. Якщо стисненням рідини можна знехтувати, теплова конвекція описується системою рівнянь гідродинаміки у наближенні Обербека-Буссінеска, маючого вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} &= -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p' + \nu\Delta\vec{v} + g\beta T'\vec{\gamma}, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v}(\vec{\nabla}T') &= \chi\Delta T', \quad \text{div}\vec{v} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\vec{\gamma}$ одиничний вектор, спрямований вертикально ввєрх,

$\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$ - коєф. теплового розширювання, $\chi = \kappa/\rho_0$ -

коєфіцієнт температуропровідності, p - відхилення від гідростатичного тиску \bar{p} , що визначається рівнянням $\vec{\nabla}\bar{p} = \rho_0 g$, T' - мале відхилення температури T від якогось сталого середнього значення \bar{T} , приймаємого за початок відліку $T = \bar{T} + T'$, мале у тому сенсі, що обумовлені їм відхилення густини ρ від середнього значення $\rho_0(\bar{T}, \bar{p})$ малі в порівнянні з ρ_0 .

Одним з критеріїв подібності вільного конвективного руху є, наприклад, безрозмірна комбінація вигляду

$$P = \frac{\nu}{\chi}, \quad (2)$$

маюча назву число Прандтля.

Граничні умови полягають у заданні температури і теплового потіку на межах масиву (див. , наприклад, (8), (9) глави 2).

Вводючи поля температури та тиску, які відрізняються від рівноважних (T_0, ρ_0) , а саме, $T = T_0 + T_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, де T_1 і ρ_1 збурення, які генерують конвективний рух з швидкістю v_1 , за допомогою (3.1), у лінійному наближенні, отримаєм рівняння, які описують малі нестационарні збурення рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \rho_1 + \nu \Delta \vec{v}_1 + g\beta T_1 \vec{\gamma}, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} &= -\vec{v}_1 \vec{\nabla} T_0 + \chi \Delta T_1, \\ \operatorname{div} \vec{v}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Система лінійних однорідних диференціальних рівнянь в часних похідних з сталими коефіцієнтами (3.3) має часні рішення, які залежать від часу по експоненційному закону

$$\{\vec{v}, \rho, T\} \sim \exp(-\lambda t), \quad (4)$$

де λ декремент, що визначає рух збурення у часі. Індекс 1 у величин v_1, ρ_1, T_1 далі будемо опускати.

3.1. Механічна рівновага нерівномірно нагрітої рідини [7].

Знайти умову механічної рівноваги у нерівномірно нагрітої рідини, яка описується рівняннями конвекції (3), наведеними у вступі до цієї глави.

Відповідь: у стані механічної рівноваги температура рідини залежить лише від вертикальної координати Z згідно наступному закону

$$T_0 = -A Z + B, \quad (3.1)$$

тут A і B сталі величини, тобто рівноважний градієнт температури у всіх точках рідини вертикален і має стале значення

$$\vec{\nabla} T_0 = -A\vec{\gamma}. \quad (3.2)$$

3.2. Площинний горизонтальний шар з вільними ізотермічними границями (задача Релея) [7].

Дослідити стійкість рівноваги горизонтального нескінченного шару рідини обмеженого паралельними площинами $z = 0, h$. Температура на границях шару фіксована, у стані рівноваги градієнт температури (див. (3.2)) дорівнює $\vec{\nabla} T_0 = -A\vec{\gamma}$, де $A = \Theta/h$, Θ - різниця температур між площинами.

Вказівка: запишемо систему рівнянь для збурень (3) у безрозмірному вигляді. Для цього виберемо наступні одиниці вимірювання: відстань - характерний лінійний розмір порожнини або масиви l , часу - l^2/ν , швидкості - χ/l , тиску - $\rho_0 \nu \chi/l^2$, температури - $A l$. У вказаних змінних система (3) приймає наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} p + \Delta \vec{v} + R T \vec{\gamma}, \\ P \frac{\partial T}{\partial t} - (\vec{v} \vec{\gamma}) &= \Delta T, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $R = g\beta A l^4 / (\nu \chi)$ - безрозмірний параметр, який зветься числом Релея.

Застосовуючи до першого рівняння системи (3.3) операцію rot rot і проєціюючи отримане рівняння на вісь Z , за допомогою (3.3), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z &= \Delta \Delta v_z + R \Delta_1 T, \\ P \frac{\partial T}{\partial t} &= \Delta T + v_z,\end{aligned}\tag{3.4}$$

де $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ двохвимірний оператор Лапласа.

При граничних умовах

$$v_z|_{z=0,1} = 0, \quad T|_{z=0,1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \right|_{z=0,1} = 0,\tag{3.5}$$

шукаємо часткові рішення (3.4) у вигляді

$$\begin{aligned}v_z(\vec{r}, t) &= v(z) \exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)], \\ T(\vec{r}, t) &= \Theta(z) \exp[-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)],\end{aligned}\tag{3.6}$$

де k_1 і k_2 дійсні хвильові числа, що характеризують періодичність збурень вздовж напрямків x і y . Підстановка (3.6) у (3.4) дає систему рівнянь для амплітуд v і Θ :

$$\begin{aligned}-\lambda(v'' - k^2 v) &= v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v - Rk^2 \Theta, \\ -\lambda P \Theta &= \Theta'' - k^2 \Theta + v,\end{aligned}\tag{3.7}$$

де $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, штрих означає диференціювання по z .

Перетворюючи, з урахуванням (3.4), (3.6), граничні умови (3.5) до вигляду

$$v|_{z=0,1} = 0, \quad \Theta|_{z=0,1} = 0, \quad v''|_{z=0,1} = 0,\tag{3.8}$$

із (3.7), (3.8) отримаємо

$$v = a \sin(2\pi z), \quad \Theta = b \sin(2\pi z), \quad n = 1, 2, 3, \dots\tag{3.9}$$

Коефіцієнти a і b знаходяться із однорідної системи вигляду

$$\begin{aligned}(\pi^2 n^2 + k^2)[\lambda - (\pi^2 n^2 + k^2)]a + Rk^2 b &= 0, \\ a + [\lambda P - (\pi^2 n^2 + k^2)]b &= 0,\end{aligned}\tag{3.10}$$

корені якої дають значення декрементів λ в залежності від параметрів - чисел Релея, Прандтля та хвильового числа:

$$\lambda_n = \frac{P+1}{2P}(\pi^2 n^2 + k^2) \pm \left[\frac{(P-1)^2}{4P^2}(\pi^2 n^2 + k^2) + \frac{Rk^2}{P(\pi^2 n^2 + k^2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Число n у (3.11) визначає масштаб і четність збурень.

Відповідь: критичне число Релея R_c при якому виникає нестійкість по відношенню до збурень з заданими n і k , як витікає з (3.11), дорівнює

$$R_c = \frac{(\pi^2 n^2 + k^2)^3}{k^2}. \quad (3.12)$$

Звернемо увагу на те, що в задачі присутнє виродження: одному і тому ж критичному числу Релея відповідає нескінченне число збурень з довільним співвідношенням між k_1 і k_2 . Наприклад, дійсна форма вертикальної компоненти швидкості, у вигляді

$$v_z(x, y, z) = v(z) \cos(k_1 x) \cos(k_2 y), \quad (3.13)$$

описує конвективні ячейки прямокутної форми з сторонами $L_1 = 2\pi/k_1$ і $L_2 = 2\pi/k_2$. Вираз (3.13) описує рух у вигляді конвективних валів з вісями, паралельними вісі x ($k_1 = 0, k_2 = k$), або вісі y ($k_1 = k, k_2 = 0$). При $k_1 = k_2 = k/\sqrt{2}$ має місце ячейка квадратної форми. Можливі просторові періодичні структури і більш складного вигляду, при яких, наприклад, трикутні або гексагональні ячейки цілком заповнюють шар [2, 4, 7].

3.3. Конвективна нестійкість рідини яка обертається [1-4].

Рідина рівномірно обертається з однорідною кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \Omega \vec{\gamma}$. В межі, коли центробіжною конвективною силою в порівнянні з конвективною силою у полі сил тяжіння можна знехтувати ($\Omega^2 l/g \ll 1$), дослідити стійкість системи відносно виникнення конвекції.

Вказівка: в наближенні Буссінеска рівняння теплопровідності і безперервності залишаються без змін, а рівняння руху, за рахунок появи сил інерції - коріолісової і центробіжної \vec{F}_e і \vec{F}_{oa} :

$$\vec{F}_e = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}, \quad F_{oa} = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}), \quad (3.14)$$

в межі $\Omega^2 l/g \ll 1$, у безрозмірних одиницях (див. задачу 3.2) приймає добавку вигляду

$$-D\vec{\gamma} \times \vec{v}, \quad (3.15)$$

де $D = 2\Omega l^2/\gamma$ параметр, що характеризує обертання (число Рейнольдса). Граничні умови (3.5), (3.8) необхідно поповнити

умовою для віхора $\text{rot}_z \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = i(k_1 v_y - k_2 v_x)$, яка,

оскільки на вільній границі зникають дотичні напруження, має вигляд $(\text{rot}_z \vec{v})' = 0$.

Відповідь: декременти λ задовільняють рівнянню у вигляді

$$p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0, \quad (3.16)$$

де (для головної моди з $n = 1$)

$$\begin{aligned}
p &= P, & q &= -(\pi^2 + k^2)(1 + 2P), \\
r &= (\pi^2 + k^2)^2(2 + P) - \frac{1}{\pi^2 + k^2}(k^2 R - \pi^2 P T), \\
s &= -(\pi^2 + k^2)^3 + k^2 R - \pi^2 T,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$T = (4\Omega^2 h^4 / \nu^2) = D^2$ - безрозмірне число Тейлора.

В залежності від значень параметрів (3.17) рівняння (3.16) має: а) три дійсні кореня (монотоні збурення), при цьому, границя стійкості визначається з умови $\lambda = 0, s = 0$ і задовольняє критерію:

$$R_c = \frac{1}{k^2} [(\pi^2 + k^2)^3 + \pi^2 T], \tag{3.18}$$

б) один дійсний і два комплексно-спряжені корені (коливальні збурення), тоді критерій стійкості слідує з співвідношення $ps - qr = 0$ і має вигляд:

$$R_c = \frac{2(1+P)}{k^2} \left[(\pi^2 + k^2)^3 + \frac{\pi^2 P^2}{(1+P)^2} T \right]. \tag{3.19}$$

3.4. Конвективна нестійкість у моделі Веландера-Лоренца [3, 8, 9].

Тороїдальна трубка з середнім радіусом l і площиною поперечного перерізу A наповнена нестислою рідиною, яка підпорядковується рівнянню стану у наступному вигляді

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)], \tag{3.20}$$

($\beta > 0$ - коефіцієнт теплового розширення), розташована вертикально у однорідному полі тяжіння \vec{g} , як зображено на Рис. 4. На стінках трубки підтримується незалежна від часу температура

$T_w(\varphi)$ (φ - кутова координата, яка відліковується від вертикалі супротив годинникової стрілки від напрямку \vec{g}).

Охолодження

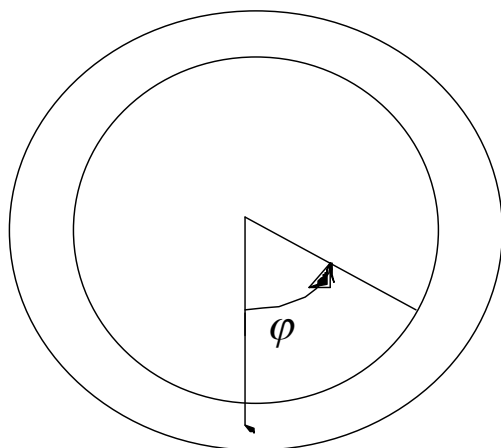


Рис. 4.

Нагрів

Покладемо, що: а) залежність властивостей рідини від температури суттєва лише в разі визначення виштовхуючої сили; б) течія ламінарна і спрямована по φ , тобто потік $q(t)$ визначається виразом наступного вигляду

$$q(t) = \int_{(A)} v_{\varphi} dA, \quad (3.21)$$

в) сила тертя \vec{F}_{mp} пропорційна миттєвому потоку

$$\vec{F}_{mp} = -R\rho_0 q(t)\vec{\varphi} = \int \vec{f}_{mp} dA, \quad (3.22)$$

де R - стала; г) температура і швидкість рідини однорідні за поперечним перерізом трубки; д) теплообмін між стінками трубки і рідиною дорівнює $\tilde{K}[T_w(\varphi) - T(\varphi, t)]$, де \tilde{K} - стала.

При зроблених припущеннях отримати і безрозмірювати систему рівнянь, які описують конвекцію і чисельно за допомогою ЕОМ дослідити стійкість руху.

Вказівка: з урахуванням (3.20) - (3.22), ліанерізовані рівняння руху (3) приймають наступний вигляд

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p [\rho_0 + \beta \rho_0 (T_0 - T)] \vec{g} + \vec{f}_{\text{мп}}. \quad (3.23)$$

Інтегрування (3.23) за перерізом трубки дає

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{A\beta g}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi - Rq(t). \quad (3.24)$$

Обмежуючись, в рівнянні теплопровідності системи (3), урахуванням доданків, які описують конвекцію у запропонованій в постановці задачі моделі, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\varphi, t) + \frac{q}{Al} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \tilde{k} [T_w(\varphi) - T(\varphi, t)]. \quad (3.25)$$

Розкладаючи T_w і T в ряди Фур'є по φ

$$\begin{aligned} T(\varphi, t) &= c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(t) \sin n\varphi + c_n(t) \cos n\varphi), \\ T_w(\varphi) &= w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \sin n\varphi + w_n(t) \cos n\varphi) \end{aligned} \quad (3.26)$$

і підставляючи (3.26) у (3.24), (3.25), отримаємо нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів фур'є-розкладу (3.26):

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{A\beta g}{2} s_1 - Rq, \\ \frac{ds_1}{dt} - \frac{q}{Al} c_1 &= \tilde{k}(v_1 - s_1), \\ \frac{dc_1}{dt} + \frac{q}{Al} s_1 &= \tilde{k}(w_1 - c_1), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{ds_n}{dt} - \frac{nq}{Al} c_n = \tilde{k}(v_n - s_n), \quad \frac{dc_n}{dt} + \frac{nq}{Al} s_n = \tilde{k}(w_n - c_n). \quad (3.28)$$

З (3.27) слідує, що течія рідини визначається коефіцієнтами рядів Фур'є (3.26) з $n=1$. Позначивши $\tilde{\gamma} = g\beta/2\tilde{k}Rl$ і користуючись

безрозмірними змінними: $\sigma = R/\tilde{\kappa}$, $\tau = \tilde{\kappa} t$, $x = q/\tilde{\kappa} A l$,
 $z = r - \tilde{\gamma} c_1$, $y = \tilde{\gamma} s_1$, $r = \tilde{\gamma} w_1$, $r' = \tilde{\gamma} v_1$, перепишемо (3.27) у
 безрозмірному вигляді

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y + rx - zx + r', \\ \frac{dz}{d\tau} &= xy - z.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Покладемо $r' = 0$, $\sigma = 10$ і чисельно дослідимо поведінку траєкторії заданої системи (3.29) у фазовому просторі.

Аналіз розрахунків показує, що при $1 < r < 24,74$ рух носить характер стійкої циркуляції з сталою швидкістю; при $r > 24,74$ швидкість циркуляції змінюється нерегулярно, змінює напрямок, що породжує флуктуації різниці температур між верхньою та нижньою частинами трубки (вона дорівнює $2c_1 = 2(r - z)/\tilde{\gamma}$), що спостерігається експериментально.

3.5. Модель Лоренца. Дивний атрактор[3, 8, 9].

Конвекція Релея-Бенара у рідині між двома паралельними площинами, при припущеннях, аналогічних зробленим в задачі 3.4, описується (у безрозмірних змінних) системою рівнянь Лоренца:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Чисельно дослідити біфуркації в системі Лоренца, які мають місце при зміні параметра r (числа Релея).

Вказівка: покласти $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Параметру r , послідовно, надавати чисельні значення:

$$\begin{aligned} r < 1, & \quad r = 1, & \quad r = 1 + \varepsilon, & \quad r = 13,926, \\ r > 13,926, & \quad r \cong 24,74, & \quad r > 24,74, & \quad r > 50. \end{aligned} \quad (3.31)$$

При цьому, в разі віддалення параметра r від чисельного значення 13,926 ($r > 13,926$), ми спостерігаємо специфічну поведінку траєкторії в середині обмеженого об'єму у фазовому просторі, тобто, дві скіль завгодно близькі точки простору станів, пересуваючись далі по проходючим крізь них траєкторіям, далеко розійдуться; спочатку близькі точки можуть відноситися і до однієї й тієї ж траєкторії; з огляду обмеженості області незамкнена траєкторія може підійти до самої себе скіль завгодно близько. Притягуюча множина нестійких траєкторій у просторі станів дисипативної функції зветься *дивним атрактором* [1, 8]. Така складна, нерегулярна поведінка траєкторій асоціюється з турбулентним рухом рідини [8].

4. ПРОСТОРОВО-ОСЕРЕДНЕНИЙ ПРОФІЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЇ ТЕЧІЇ.

Турбулентний рух має наступні основні властивості: є макроскопічним і хаотичним, суттєво нерівноважним, число макроскопічних ступенів свободи дуже велике. Гідродинамічний рух у турбулентному режимі такий складний, що потребує статистичного опису. При цьому, рівняння гідродинаміки ((1-3), (5) глави 2) зберігають вигляд, але записуються для випадкових функцій $\tilde{v}(\vec{r}, t)$, $\tilde{p}(\vec{r}, t)$, $\tilde{T}(\vec{r}, t)$. Враховуючи, що рідина нестисла ($\text{div } \vec{v} = 0$, $\tilde{\rho} = \rho = \text{const}$) випишемо рівняння руху для випадкових функцій \tilde{v} , \tilde{p} , у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + (\tilde{v}\vec{\nabla})\tilde{v}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\pi}_{ij}}{\partial r_j}, \quad (1)$$

де

$$\tilde{\pi}_{ij} = -\eta \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial r_i} \right) \quad (2)$$

тензор в'язких напружень, тиск \tilde{p} можна шукати через швидкість \tilde{v} за допомогою рівняння

$$\Delta \tilde{p} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial r_j} \frac{\partial v_j}{\partial r_i}. \quad (3)$$

Позначуючи середню швидкість

$$v_i(\vec{r}, t) = \langle \tilde{v}_i(\vec{r}, t) \rangle \quad (4)$$

та відхилення від неї

$$\delta v_i(\vec{r}, t) = \tilde{v}_i(\vec{r}, t) - v_i(\vec{r}, t), \quad (5)$$

(аналогічно для p і δp) і використовуючи тотожність

$$\langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle = v_i v_j + \langle \delta v_i \delta v_j \rangle, \quad (6)$$

усереднемо рівняння (1) і надамо результат усереднення у вигляді

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial r_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial r_j} - \frac{\partial \langle \delta v_i \delta v_j \rangle}{\partial r_j}. \quad (7)$$

У незалежну систему рівнянь (7) входять разом з першими, другі моменти флуктуацій

$$\rho \langle \delta v_i \delta v_j \rangle, \quad (8)$$

які мають назву напруження Рейнольдса. Останні можна залучити до тензора в'язких напружень, отримуючи при цьому єдиний тензор $\pi_{ij}^{\text{турб.}}$ який має вигляд

$$\pi_{ij}^{\text{оопа.}} = -\eta_{\text{оопа.}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right). \quad (9)$$

Зачіплюючися рівняння для моментів, отримані з (7) не припускають точного розв'язку і згідно цієї причини повинні бути замкнені, наприклад, за допомогою введення (феноменологічним шляхом), так званої турбулентної в'язкості $\eta_{\text{турб.}}$, яка визначається згідно наступного правила

$$\eta_{\text{турб.}} = \eta + \rho k, \quad (10)$$

де $\eta_{\text{турб.}} = \rho \nu_{\text{турб.}}$ - повна в'язкість для турбулентної течії, k - коефіцієнт турбулентної в'язкості. Використання (10) дозволяє надати (7) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial r_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_j} (v_{\text{турб.}} v_{ij}), \\ v_{ij} &\equiv \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}. \end{aligned} \quad (11)$$

У розповсюдженій моделі [3, 5] турбулентна в'язкість визначається виразом

$$\eta_{\text{турб.}} = \eta \left(1 + \frac{R}{R_{\text{кр.}}} \right), \quad (12)$$

де R і $R_{\text{кр.}}$ числа Рейнольдса турбулентного руху, причому $R_{\text{кр.}}$ є критерієм зриву турбулентності, так що

$$R_{\text{кр.}} = \frac{v_0 L_0}{\nu} \quad (13)$$

де L_0 - мінімальний масштаб розвинутої турбулентності, v_0 - відповідна швидкість.

Співвідношення (11)-(13) є вже замкненою системою рівнянь для розрахунку профелів осередненної турбулентної течії.

4.1. Стаціонарна осереднена турбулентна течія (СОТТ) у прикордонному шарі [5].

Використовуючи (11)-(13) розрахувати профіль СОТТ яка протікає вздовж необмеженої площинної поверхні: $\vec{v} = \{v_x(y) = v(y), 0, 0\}$ (вісі x і z системи координат лежать у площині течії, а вісь y перпендикулярна до неї, течія рухається вздовж вісі x). Перепадом тиску вздовж вісі x знехтувати, дію зовнішніх сил не враховувати. Отриманий результат порівняти з профілем ламінарної течії у прикордонному шарі $v_{\text{ламин.}}$.

Вказівка: число Рейнольдса R визначається виразом

$$R = v^* y / \nu, \quad (4.1)$$

де $v^{*2} = \tilde{\sigma} / \rho$, $\tilde{\sigma}$ - сила тертя, діюча на одиницю поверхні, яка використовується у якості першої граничної умови. Друга гранична умова має вигляд $v|_{y=0} = 0$.

Відповідь:

$$v = v^* R_{кр.} \ln\left(1 + v^* y / v R_{кр.}\right), \quad v_{ламин.} = v^{*2} y / v. \quad (4.2)$$

4.2. Профіль СОТТ і витрати рідини при протіканні у круглій трубі [5].

Розрахувати і порівняти з ламінарним профіль СОТТ і витрати рідини при протіканні у круглій трубі радіусом a і довжиною l , яка має місце під дією різниці тисків Δp на кінцях труби.

Вказівка: число Рейнольдса визначемо за наступним правилом

$$R = R^* (a^2 - r^2) / a^2, \quad R^* = v^* a / 2\nu, \quad (4.3)$$

а характерну швидкість v^* - із умови балансу сили тиску ρv^{*2} і сили тертя на одиницю поверхні труби $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = \eta \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=a} = \Delta p a / 2l, \quad (4.4)$$

тут r - радіус-вектор у полярній системі координат з початком у центрі кругового перерізу.

Відповідь:

$$v = \frac{\Delta p a^2}{4l\eta} \frac{R_{кр.}}{R^*} \ln\left(1 + \frac{R^*}{R_{кр.}} \frac{a^2 - r^2}{a^2}\right), \quad (4.5)$$

$$v_{ламин.} = \frac{\Delta p}{4\eta l} (a^2 - r^2),$$

$$Q = \pi \rho \frac{\Delta p a}{l\eta} \frac{R_{кр.}}{R^*} \left[\left(1 + \frac{R_{кр.}}{R^*}\right) \ln\left(1 + \frac{R^*}{R_{кр.}}\right) - 1 \right], \quad (4.6)$$

$$Q_{ламин.} = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} a^4.$$

4.3. Кореляційні нестійкості [5].

Методом малих збурень дослідити стійкість напружень Рейнольдса (другіх моментів) у теорії “мілкої води” [1], коли глибина \tilde{h} змінюється згідно до випадкового закону:

$$\tilde{h} = h + \delta h, \quad (4.7)$$

де $h = \langle \tilde{h} \rangle$ детермінована величина (середня глибина), δh флуктуаційна поправка, яка передбачається гауссовою, тобто

$$\langle \delta h \rangle = 0, \quad \langle \delta h \delta h' \rangle = B(\vec{r}, \vec{r}') \delta(t - t'), \quad (4.8)$$

де $\delta(t - t')$ - дельта функція Дірака.

Вказівка: розглянемо рівняння “мілкої води”, для спрощення, у одновимірному (у площині границі) наближенні:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \xi = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{h} v) = 0, \quad (4.10)$$

де ξ - функція форми поверхні, v горизонтальна швидкість.

Користуючись методом, наданим у вступі до глави 4, отримаємо замкнену систему рівнянь для другіх моментів:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle + g \left\langle u \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (4.11)$$

$$\left\langle \xi \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{2} g \frac{\partial}{\partial x} \langle \xi^2 \rangle = 0, \quad (4.12)$$

$$\left\langle v \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial \tilde{h} v}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \xi^2 \rangle + \left\langle \xi \frac{\partial \tilde{h}v}{\partial x} \right\rangle = 0. \quad (4.14)$$

Із (4.11) - (4.14) отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v\xi \rangle + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle \xi^2 \rangle + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle v^2 \rangle = 0. \quad (4.15)$$

Розглядаючи короткохвильові збурення для другіх моментів, знехтуємо членами з просторовими похідними. У результаті, замість (4.11) і (4.14) отримаємо співвідношення наступного вигляду

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle + g \frac{\partial}{\partial x} \langle v\xi \rangle = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \xi^2 \rangle - \frac{1}{2} B(x, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle v^2 \rangle = 0. \quad (4.17)$$

Із (4.15) - (4.17) (див. вступ до глави 2) отримаємо дисперсійне рівняння:

$$\omega^3 - i \frac{g^2 k^4 B}{2} - \omega g h k^2 = 0, \quad (4.18)$$

з якого, при знехтуванні членом ω^3 , слідує наявність нестійкого рішення з

$$\text{Im } \omega = \frac{g B k^2}{2h}. \quad (4.19)$$

5. КІНЕТИКА І КОРЕЛЯЦІЙНА НЕСТІЙКІСТЬ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ [10, 11].

Система, яка робить фазовий перехід при нескінченно повільній зміні стану, макроскопічно неоднорідна. Якщо швидкість зміни стану кінцева, то ті ступені свободи, часи релаксації яких завеликі, виявляються “замороженими”. Такими ступенями свободи можуть бути гідродинамічні моди, наприклад, поле концентрацій $\varphi(\vec{r}, t)$ що задовольняє закону збереження:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0, \quad (1)$$

де потік \vec{j} визначен співвідношеннями які мають вигляд

$$\vec{j} = -b\vec{\nabla}\mu, \quad \mu = \frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(\vec{r}, t)}, \quad (2)$$

а Φ термодинамічний потенціал системи.

В припущенні малого відхилення параметра порядку $\varphi(\vec{r}, t)$ від критичного значення, згідно до теорії фазових переходів Ландау [11], розкладемо Φ у ряд по ступеням φ і його градієнта:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \left\{ c(\vec{\nabla}\varphi)^2 + d\tau\varphi^2 + \frac{1}{2}\beta\varphi^4 + \dots \right\} dv. \quad (3)$$

З урахуванням (2), (3) після переходу до безрозмірних змінних, які визначаються співвідношеннями

$$\vec{r} \rightarrow \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\vec{r}, \quad t \rightarrow \frac{c}{b\alpha^2}t, \quad \varphi \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\varphi, \quad \tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (4)$$

рівняння (1) приймає наступний вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \{ -\Delta \varphi + \tau \varphi + \varphi^3 \}, \quad (5)$$

де коефіцієнти α , β , b і c мають звичайний сенс [11]. При дослідженні кінетики переходів порядок-безлад типу феропаромагнетик або сегнетоелектричного типу, параметр порядку $\varphi(\vec{r}, t)$ є неконсервативним і замість рівняння (1) слід записати рівняння Онсагера

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Gamma \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi}, \quad (6)$$

де Γ - кінетичний коефіцієнт.

Рівняння (6), з урахуванням (4) у безрозмірних змінних вигляду

$$\varphi = \sqrt{\frac{b}{|\alpha|}} \varphi, \quad \vec{r} = \frac{\vec{r}}{a}, \quad t = \frac{c\Gamma}{a^2} t, \quad (7)$$

де a - масштаб довжини приймає наступний вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + \alpha \varphi^2 (1 + \varphi^2) \varphi. \quad (8)$$

Рішення рівнянь (5), (8) з відповідними початковими умовами описує кінетику фазових переходів, а легко одержані з (5), (7) рівняння для других моментів, дозволяють дослідити кореляційну стійкість.

5.1. Релаксація незберігаючого поля упорядкування [10].

Ізотропна система, яка описується скалярним незберігаючим полем упорядкування $\varphi(\vec{r}, t)$ і яка дозволяє фазовий перехід другого роду, фазова діаграма якого у вісях $\varphi - T$ надана на рис. 5, знаходячись у стані $A_0(n_0, T_0)$ (n - густина, T - температура), миттєво, шляхом охолодження, переводиться у стан $A_1(n_0, T_1)$.

Покладаючи, що інтервал $\Delta T = |T_1 - T_c|$ достатньо, але не дуже малий, так що теорія самоузгодженого поля [11] повністю приймається, дослідити стійкість системи у стані $A_1(n_0, T_1)$.

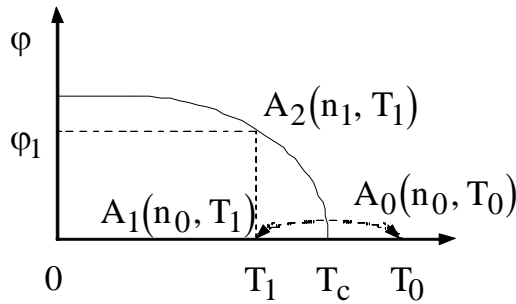


Рис. 5.

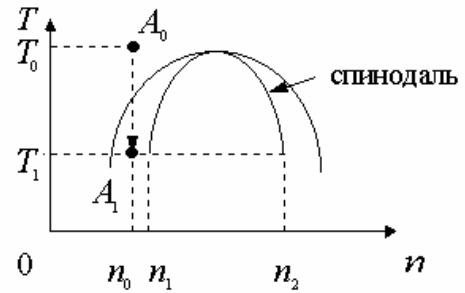


Рис. 6.

Вказівка: користуючись (8) і застосовуючи ліанерізацію вигляду

$$\varphi^3(\vec{r}, t) = \langle \varphi^2(t) \rangle \varphi(\vec{r}, t), \quad (5.1)$$

отримаємо вираз для середнього квадрата параметра порядку:

$$\langle \varphi^2(t) \rangle = \frac{\int e^{2(\varepsilon^2 - k^2)t} \langle |\varphi_{\vec{k}}(0)|^2 \rangle \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}}{1 - \varepsilon^2 \int \left[e^{2(\varepsilon^2 - k^2)t} - 1 \right] \frac{\langle |\varphi_{\vec{k}}(0)|^2 \rangle}{\varepsilon^2 - k^2} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}}, \quad (5.2)$$

де: кутові дужки $\langle \dots \rangle$ позначають осереднення за розподілом початкових значень параметра порядку $\varphi(\vec{r}, 0)$, $\varphi_{\vec{k}}(0)$ - фур'є-зображення $\varphi(\vec{r}, 0)$.

Приймаючи для $\langle |\varphi_{\vec{k}}(0)|^2 \rangle$ найпростішу квазі-Орнштейн-Церніковську форму [10], отримаємо

$$\left\langle \left| \varphi_{\vec{k}}(0) \right|^2 \right\rangle = \tilde{m} \int \frac{e^{\varepsilon_0 \left[1 - \sqrt{r^2 + 1} \right]}}{\sqrt{r^2 + 1}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} = 4\pi\tilde{m}e^{\varepsilon_0} \frac{K_1\left(\sqrt{k^2 + \varepsilon_0^2}\right)}{\sqrt{k^2 + \varepsilon_0^2}},$$

$$T > T_c,$$
(5.3)

де ε_0 - зворотній радіус кореляцій, $K_1(z)$ функція Макдональда (див. додаток 3, [13]), \tilde{m} - норміровочний множник. Підставляючи (5.3) у (5.2), після перетворень, маємо

$$\left\langle \varphi^2(t) \right\rangle = \frac{I_1(t)}{\frac{2\pi^2}{m} e^{\varepsilon_0} e^{-2\varepsilon_0^2 t} + \varepsilon_0^2 \left[I_2(t) - e^{-2\varepsilon_0^2 t} I_2(0) \right]},$$
(5.4)

де

$$I_1(t) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} t^{-1/2} e^{\frac{1}{16t}} W_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8t}\right),$$
(5.5)

$W_{\nu, \mu}(z)$ - функція Уїттекера (див. додаток 3, [13]). Функція $I_2(t)$ має вигляд аналогічний (5.5) [10].

Відповідь: з аналізу (5.4), (5.5) слідує, що стан нестійкий, процес переходу у стан стійкої рівноваги $A_2(n_1, T_1)$ носить чисто релаксаційний характер з характерним часом t_0 (час на півширині функції $\langle \varphi^2(t) \rangle$):

$$t_0 = \frac{c^2 \Gamma}{2|\alpha|} \ln\left(\frac{b}{2m|\alpha|}\right).$$
(5.6)

5.2. Релаксація зберігаючогося поля параметра порядку поблизу точок розшарування [11].

Для двокомпонентної системи, яка дозволяє фазовий перехід і описується зберігаючим полем параметра порядку, дослідити релаксацію середнього параметра порядку в отриманом, аналогічно задачі 5.1 релаксаційному мікрогетерогеному стані $A_1(n_0, T_1)$ (див. фазову діаграму, наведену на Рис. 6, де n позначає концентрацію).

Вказівка: для малих часів релаксація визначається ліанерізованим рівнянням, отриманим за допомогою (5) і (5.1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{D} \Delta \varphi - \Delta^2 \varphi, \quad (5.7)$$

де $\tilde{D} = \tau + 3\varphi_0^2$, $\varphi_0^2 \equiv \langle \varphi^2(0) \rangle$. Лінія $\tau + 3\varphi_0^2$, $\tau < 0$ [10, 11], є лінею рівноважного розслоєння.

Вводячи фур'є-гармоніки $\varphi_{\vec{k}}(t)$ для поля $\varphi(\vec{r}, t)$ можна показати, що за час $t \sim \theta$ ($t \ll \theta \approx \tilde{D}^{-2}$), система опинюється розбитою на ячейки з розмірами λ , причому $\lambda^2 \sim |\tilde{D}|^{-1} \sim |\tau|^{-1}$. У кожній ячейці релаксація йде у напрямку до одного з локальних мінімумів термодинамічного потенціалу Φ , відповідаючих температурі T_1 .

Нелінійну стадію релаксації дослідимо, припустивши, що за час, зрівняний з θ вона носить локальний характер. Вважаючи, що

$$|\vec{\nabla} \varphi| \approx \frac{\langle \varphi \rangle}{\lambda}, \quad \langle \varphi \rangle / \lambda^2 \approx |\Delta \varphi|, \quad \text{із (5) отримаємо рівняння, яке якісно описує}$$

релаксацію середнього значення параметра порядку $\langle \varphi \rangle$ по ячейці:

$$\frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} = -\lambda^{-2} \left\{ \lambda^{-2} + \tau + \langle \varphi \rangle^2 \right\} \langle \varphi \rangle. \quad (5.8)$$

Інтегруючи (5.8) отримаємо

$$\langle \varphi \rangle^2 = (\tau + \lambda)^2 \frac{1}{\exp\left\{\frac{2}{\lambda^2}(\tau + \lambda^{-2})(t - t_0)\right\} - 1}. \quad (5.9)$$

Таким чином, як слідує з (5.9), за час $t \sim \theta$ має місце релаксація $\langle \varphi \rangle$ до одного із значень, що визначається співвідношенням:

$$\langle \varphi \rangle = \pm \sqrt{-(\tau + \lambda^{-2})}. \quad (5.10)$$

Задача може бути також вирішена методом, що використаний у задачі (5.1).

6. НЕСТІЙКІСТЬ ТИПУ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ [9].

Розглянемо яке-небудь фізичне явище, що описується автономною системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tilde{v}) \equiv \dot{x}, \quad (1)$$

де \tilde{v} - дійсний параметр.

Припустимо, що (1) має ізольовану особливу точку $x_*(\tilde{v})$ і, що матриця Якобі, для якої введемо позначення:

$$A(\tilde{v}) = D_x f(x_*(\tilde{v}), \tilde{v}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_*(\tilde{v}), \tilde{v}); i, j = 1, \dots, n \right), \quad (2)$$

має пару комплексно-спряжених власних чисел

$$\lambda_1(v_c) = \lambda_2^*(v) = \alpha(v) + i\omega(v), \quad (3)$$

таких, що при де якому $v = v_c$ виконуються наступні умови:

$$\omega(v_c) = \omega_0 > 0, \quad \alpha(v_c) = 0, \quad \alpha'(v_c) \neq 0. \quad (4)$$

Число v_c , при цьому, зветься критичним значенням параметра v . Якщо усі власні числа $A(v_c)$, виключаючи $\pm i\omega_0$, мають строго від'ємні дійсні частини, то (4) має таке значення, що при переході v через значення v_c має місце втрата лінійної стійкості стаціонарної точки $x_*(\tilde{v})$. Народження періодичних рішень із рівноважного стану має назву біфуркація народження циклу. В більшості випадків періодичні умови існують тільки при $\tilde{v} > \tilde{v}_c$ або при $\tilde{v} < \tilde{v}_c$; вони можуть бути записані у параметричному вигляді $x = p(t, \tilde{v})$ і мають амплітуду $\sim \text{const}|\tilde{v} - \tilde{v}_c|^{1/2} + O(|\tilde{v} - \tilde{v}_c|)$. Дамо алгоритм дослідження біфуркації народження циклу для систем, які описуються системою звичайних диференціальних рівнянь:

а) Оберемо біфуркаційний параметр \tilde{v} і задамо вивчаєму систему

$$\dot{x} = f(x, \tilde{v}). \quad (5)$$

б) Знайдемо цікавлючу нас непорушну точку $x_*(\tilde{v})$ і обчислимо власні числа матриці Якобі (2). Упорядкуємо власні числа таким чином, щоб

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_n. \quad (6)$$

в) Знайдемо таке значення \tilde{v}_c , що $\operatorname{Re} \lambda_1(\tilde{v}_c) = 0$. При цьому, якщо власні числа $\lambda_1(\tilde{v}_c)$ і $\lambda_2(\tilde{v}_c)$ комплексно-спряжені ($\lambda_1(\tilde{v}_c) = \lambda_2^*(\tilde{v}_c)$), то для v із деякого інтервала, що містить v_c , при виконанні умов:

$$\operatorname{Re} \lambda'_1(\tilde{v}_c) \neq 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_1(\tilde{v}_c) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_j(\tilde{v}_c) < 0, \quad j = 3, \dots, n \quad (7)$$

має місце біфуркація народження циклу.

г) Приведемо $A(v_c)$ до вигляду

$$A(v_c) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де $\omega_0 = \operatorname{Im} \lambda_1(\tilde{v}_c) > 0$.

д) У початковій системі при $\tilde{v} = \tilde{v}_c$ зробимо заміну змінних

$$x = x_*(\tilde{v}_c) + \hat{P}y, \quad (9)$$

де $\hat{P} = \hat{I}$ одинична матриця. Одержану систему рівнянь в змінних y позначимо через

$$\dot{y} = F(y). \quad (10)$$

Матриця Якобі системи (10) у нулі буде мати вигляд

$$\frac{\partial F(0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Елементи цієї матриці будемо позначати через $\frac{\partial F}{\partial y_j}$

е) Обчислимо у точці $y = 0$ наступні величини:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \right) \right], \frac{\partial F}{\partial y} \\ g_{02} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right], \\ g_{20} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right], \\ G_{21} &= \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_2^2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

ж) Якщо $n = 2$, покладемо $g_{21} = G_{21}$ і обчислимо

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20} g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2} g_{21}. \quad (13)$$

Тоді, періодичне рішення (з точністю до вибору початкової фази), записується у вигляді

$$x = x_*(\tilde{v}) + \hat{P}y, \quad (14)$$

де:

$$\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{Re} z, \quad y_2 = \operatorname{Im} z, \\ z &= \varepsilon e^{2\pi i t / T} + \frac{i\varepsilon^2}{6\omega_0} \left[g_{02} e^{-4\pi i t / T} - 3g_{20} e^{4\pi i t / T} + 6g_{11} \right] + O(\varepsilon^3), \\ T &= \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + \tau_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)), \\ \varepsilon^2 &= (\tilde{v} - \tilde{v}_c) / \mu_2 + O((\tilde{v} - \tilde{v}_c)^2), \\ \mu_2 &= -\operatorname{Re} c_1(0) / \alpha'(0), \\ \tau_2 &= -\frac{1}{\omega_0} (\operatorname{Im} c_1(0) + \mu_2 \omega'(0)), \quad \beta_2 = 2 \operatorname{Re} c_1(0), \\ \alpha'(0) &= \operatorname{Re} \lambda'_1(\tilde{v}_c), \quad \omega'(0) = \operatorname{Im} \lambda'_1(\tilde{v}_c), \quad \beta = \beta_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (15)$$

Причому, при $\beta(\varepsilon) < 0$ має місце стійкість, яка змінюється біфуркацією народження циклу при $\beta(\varepsilon) > 0$ (теорема Флоке [9]).

Розглянемо конкретний приклад застосування збудованого алгоритму.

6.1. Хімічний реактор Лефевра-Пригожина (брюселятор) [12].

Лефевром і Пригожиным була запропонована модель автокаталітичної хімічної реакції, яка у найпростішому випадку (відсутність дифузії), описується системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(B+1)x + x^2y + A, \\ \dot{y} &= Bx - x^2y, \end{aligned} \quad (6.1)$$

де A і B - концентрація яких то небудь “початкових реагентів”, що припускаються постійними, невідомі x і y - концентрація двох проміжних продуктів. Дослідити стійкість системи, яка описується рівняннями (6.1) відносно біфуркації народження циклу.

Вказівка: матриця Якобі у єдиній нерухомій точці системи (6.1) ($x = A$, $y = B/A$; $A, B > 0$) має вигляд

$$\begin{pmatrix} B-1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Із характеристичного рівняння для власних чисел матриці (6.2)

$$\lambda^2 - 2\lambda + A^2 = 0, \quad (6.3)$$

слідуює, що якщо $\lambda^2 < A^2$ власні числа λ утворюють комплексно-спряжену пару, тобто:

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + i\omega \quad \omega = \sqrt{A^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}[B - (1 + A^2)] \quad (6.4)$$

Вибіраючи у якості біфуркаційного параметра B відмітимо, що коли він зростаючи минає значення $B_0 = 1 + A^2$, точка $(A, B/A)$ втрачає лінійну стійкість із-за появи комплексно-спряжених власних чисел з позитивною дійсною частиною.

За допомогою власного вектору v_1 , що відповідає λ_1 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (\alpha + 1 - B + i\omega)/A^2 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

визначимо

$$\hat{P} = (\text{Re } v_1, -\text{Im } v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\alpha + 1 - B)/A^2 & -\omega/A^2 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

і введемо

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \hat{P}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \hat{P}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B/A \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Вважаючи $B = B_0 = 1 + A^2$ (тобто $\alpha = 0$, $\omega = \omega_0 = A$), запишемо систему (6.1) у змінних y_1 і y_2 :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -Ay_2 + F_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 &= Ay_1 + F_2(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2) &= (1/A - A)y_1^2 - 2y_1y_2 - y_1^3 - 1/A y_1^2 y_2, \\ F_2(y_1, y_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Обчислення за формулами (12), (13) дає

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{2}(1/A - A), \quad g_{02} = g_{11} - i, \\ g_{20} &= g_{11} + i, \quad g_{21} = \frac{1}{4}(-3 + i/A), \\ c_1(0) &= \frac{i}{2A} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} = \\ &= -\left\{ \frac{1}{4A^2} + \frac{1}{8} + i \left[\frac{1}{6A} (1/A - A)^2 + \frac{1}{24A} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Далі маємо $\alpha'(0) = 1/2$, $\omega'(0) = 0$, отже,

$$\begin{aligned}\mu_2 &= -\operatorname{Re} c_1(0)/\alpha'(0) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4} > 0, \\ \tau_2 &= -[\operatorname{Im} c_1(0) + \mu_2\omega'(0)]/\omega(0) = \frac{1}{6A^2} \left[\left(\frac{1}{A} - A \right)^2 + \frac{1}{4} \right] > 0.\end{aligned}\quad (6.11)$$

Таким чином, біфуркація завжди закритична. Так як

$$\beta_2(0) = -2\alpha'(0)\mu_2 < 0, \quad (6.12)$$

то народжені періодичні рішення стійкі. При B достатньо близьких до B_0 період зростає при зростанні B :

$$T = \frac{2\pi}{A} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{A} - A \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \left[1 + \frac{A^2}{2} \right]^{-1} (B - B_0) + O((B - B_0)^2) \right\}. \quad (6.13)$$

Самі періодичні рішення, за допомогою (15), приблизно можуть бути записані у наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B_0/A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

де

$$y_1 + iy_2 = \left[2A^2 \left(1 + \frac{A^2}{2} \right)^{-1} (B - B_0) \right]^{1/2} \exp \left[2\pi i \left(t + \frac{\hat{\Phi}}{T} \right) \right] + O(B - B_0) \quad (6.15)$$

Φ - довільна початкова фаза.

Збудоване рішення має назву - об'ємні коливання "брюселятора" і може бути також отримано чисельно при застосуванні програми BIFOR2 (див. [9], а також додаток 2).

7. КОНСТРУЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ МЕХАНІЧНИХ СТРУКТУР В ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ ДИСИПАТИВНИХ СИСТЕМ (СУХИХ ГРАНУЛЬОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ) [14,15].

Тепер приділяється багато уваги вивченню гранульованих матеріалів. Ця зацікавленість пов'язана з наявністю у них багатьох екзотичних властивостей, які можуть мати різноманітні застосування у практиці. Ці матеріали складають системи, які мають назву динамічні дисипативні гранульовані системи. Теорія гранульованих систем знаходиться зараз в стані становлення і повністю ще не сформульована. Тому вельми актуальні праці по вивченню спрощених модельних систем, де частинки взаємодіють між собою непружно, а дисипація енергії компенсується за рахунок підведення до системи енергії з боку зовнішніх границь.

Уявимо собі систему N безструктурних частинок однакової маси, що рухаються вертикально в вакуумі (за умови відсутності тертя), у полі сил тяжіння \vec{g} . Покладемо, що втрати енергії, в бінарних зіткненнях між частинками, компенсуються при відбиваннях нижньої частинки від горизонтально розташованої твердої підкладки, яка таким чином відіграє роль резервуару енергії з нескінченною ємністю.

Розглянемо для початку випадок коли $N=2$. Позначимо початкові координати і швидкості частинок, відповідно (x_{01}, v_{01}) і (x_{02}, v_{02}) . Для визначеності покладемо $0 \leq x_{01} \leq x_{02}$. Нехай для всіх швидкостей зіткнення падаючої частинки з підкладкою, в момент відбивання швидкість завжди має одне і теж саме відокремлене значення, скажімо v_0 . Таким чином, будучи, взагалі кажучи,

величиною розподіленою з деякою імовірністю $\Phi(v)$, початкова швидкість після зіткнення з підкладкою у такій моделі підпорядковується розподілу у вигляді дельта-функції Дірака: $\Phi(v) = \delta(v - v_0)$.

Розглянемо зіткнення, в якому частинки налітають одна на одну із швидкостями v_1 та v_2 , а розлітаються із швидкостями v'_1 та v'_2 , які задовольняють співвідношенням

$$v'_1 = v_1 - \frac{1 + \alpha}{2} v_{12}, \quad (1)$$

$$v'_2 = v_2 + \frac{1 + \alpha}{2} v_{12}, \quad (2)$$

де $v_{12} = v_1 - v_2$, а α - параметр, характеризуючий дисипативні зіткнення (коли $\alpha = 1$ зіткнення абсолютно пружні і повна кінетична енергія зберігається, при $\alpha < 1$ має місце дисипація). В літературі параметр α має назву **restitution coefficient**. Позначивши кінетичну енергію частинок 1 і 2 в момент зіткнення і після зіткнення, відповідно E_1^+ і E_2^- , E_1^- і E_2^+ , випишемо співвідношення, що визначає дисипацію енергії в системі

$$[E_1^+ + E_2^-] - [E_1^- + E_2^+] = \frac{1 - \alpha^2}{4} m v_{12}^2, \quad (3)$$

m - маса частинки.

7.1. Стаціонарні стани в 1D системах з дисипативними взаємодіями.

Комп'ютерна візуалізація руху у такій системі демонструє можливість синхронізації в стаціонарному режимі у якому частинки періодично коливаються з практично однаковою амплітудою.

Розв'язати пропонуємому модель (вспуп до глави 7) аналітично для системи двох і трьох частинок. Для N частинкової системи зробити граничний перехід, використовуючи результати розв'язку для 2-х і 3-х частинкових систем. Знайти межі існування системи у стаціонарному стані.

Вказівка: Покладемо $E_2^- = E_2^+$. Із (1-3) у цьому випадку витікає зв'язок між v_1 і v_2 :

$$v_1 = v_2 \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}. \quad (7.1)$$

Наступною умовою виступає дорівнення періодів руху обох частинок. Час, необхідний частинці 1, щоб після зіткнення з підкладинкою набрати швидкість v_1 , має вигляд

$$t^+ = \frac{v_0 - v_1}{g}. \quad (7.2)$$

Щоб знову повернутися на підкладинку після зіткнення із частинкою 2, частинці 1 потрібен час t^-

$$t^- = T - t^+, \quad (7.3)$$

де

$$T = -\frac{2v_2}{g}, \quad (7.4)$$

період описаного руху.

Введемо змінну x , що дорівнює висоті на якій має місце відповідне зіткнення двох частинок у шуканому режимі. Приймаючи до уваги рівноприскорений характер руху частинок, між зіткненнями, вираз для x має наступний вигляд:

$$x = 0 + v_0 t^+ - \frac{g}{2} t^{+2}, \quad (7.5)$$

а вираз для координати нижньої частинки у момент зіткнення її з підкладинкою може бути наведено у такому вигляді:

$$0 = x + \omega_1' t - \frac{g}{2} t^2. \quad (7.6)$$

Додаючи почленно праві і ліві частини формул (7.5) і (7.6), а також скориставшись співвідношеннями (1), (7.1-7.4), після спрощень приходимо до виразу, що пов'язує v_2 , v_0 і α :

$$v_2 = -v_0 \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3}. \quad (7.7)$$

Підставляючи (7.7) в (7.4), отримаємо вираз для періоду коливань

$$T = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3}. \quad (7.8)$$

Як витікає з (7.8) період стаціонарного режиму руху у розглянутій модельній системі залежить від усіх початкових параметрів моделі v_0 , g і α .

Розглянемо тепер одновимірну систему з трьох непружних частинок. Користуючись схемою, розвинутою вище, отримаємо, що стаціонарний режим в системі трьох частинок також можливий, а період, дається виразом :

$$T = \frac{6v_0}{g} \cdot \frac{1 + \alpha}{19 - \alpha}. \quad (7.9)$$

Визначимо характерний розмір області де здійснюється Рух, що відповідає стаціонарному режиму. Користуючись (7.5) отримаємо

$$x = \frac{10v_0^2}{g} \cdot \frac{(4\alpha - 1)(4 - \alpha)}{(19 - \alpha)^2} \quad (7.10)$$

із (7.10) витікає умова зникання цього режиму :

$$\alpha \leq \alpha_{II} = 0.25. \quad (7.11)$$

Розглядаючи систему N-частинок, по аналогії з попереднім аналізом нескладно знайти період коливань частинок у шуканому стаціонарному режимі :

$$T_N = \frac{V_0}{g} \cdot \frac{2N(1 + \alpha)}{N^2(1 + \alpha) + 2(1 - \alpha) \sum_{i=1}^{N-1} (N - i)^2}. \quad (7.12)$$

Аналізуючи параметр α_n при інших розмірах системи ($N > 3$) знаходимо розподіл цього параметру від N :

$$\alpha_n = \frac{N - 2}{N + 1} \quad (7.13)$$

Вже при $N=100$, $\alpha_n=0.9706$, тобто доволі швидко α_n досягає 1. Таким чином даний режим при великих N вироджується.

Одновимірною моделлю системи непружних частинок, яка є за побудовою обмеженою умовами слабких дисипації та рівня надходження енергії до системи, за умов найпростіших способів надходження енергії зовні шляхом дзеркального відбиття, або відбиття із завданням розподілом швидкостей, припускає можливість існування стаціонарних станів у вигляді простого періодичного руху окремих частинок в межах відповідних різних за довжиною інтервалів. Перехід системи до визначеного стану здійснюється асимптотично за різних способів надходження енергії зовні через границі системи. Виявлено існування критерію переходу, який виникає внаслідок умови балансу процесів термалізації та дисипації. Встановлений критерій (7.13) мультиплікативно залежить від початкового розміру системи, та абсолютної величини коефіцієнта непружних втрат енергії (ця обставина витікає із самої побудови моделі). Відповідні безпосередні фізичні експерименти по спостереженню стаціонарних станів у вертикальній колонці

металевих кулек, яка є приблизною модельною реалізацією відкритої дисипативної системи - що збуджується внаслідок імпульсного збудження підкладки, свідчать про наочне підтвердження наявності прогнозованих теоретично квазі-стаціонарних станів, до яких асимптотично прямує 1D відкрита система непружних частинок.

Визначені стаціонарні режими відкривають принципові можливості застосування до певного класу відкритих дисипативних систем поблизу стаціонарних станів методів статистичної механіки.

ДОДАТОК 1.

Компоненти тензора напружень і рівняння руху в'язкої нестислої рідини в циліндричних координатах r, φ, z :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \sigma_{r\varphi} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \sigma_{\varphi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v_\varphi - \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z.$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

$$(\vec{v}\vec{\nabla})f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

ДОДАТОК 2.

Визначення, асимптотики та рядові розкладення функцій
Макдональда $K_\nu(z)$ і Уіттекера $W_{k,\mu}(z)$:

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2};$$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{2};$$

$$W_{k,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{1/2-\mu} \Psi\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 2\mu + 1, z\right);$$

$$\Psi(a, c, z) \approx \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c}, \quad |z| \rightarrow 0;$$

$$\Psi(a, c, z) \approx z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{z^n}, \quad |z| \gg |a|, |c|,$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, том VI. Гидродинамика.-М.: Наука; 1986.-736 с.
2. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости.-М.: Мир, 1981.-638 с.
3. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности /Сборник статей/.-М.: Мир. 1984.-344 с.
4. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение.-М.:Наука, 1981.-366 с.
5. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, том 1, 2.-М.: Наука; 1965.- 639 с., 720 с.
6. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости.-М.: ИЛ, 1958.- 500 с.
7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.-М.: Наука, 1972.- 392 с.
8. Странные аттракторы.-М.: Мир, 1981.- 253 с.
9. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.-М.: , 1985.- с. 203-271.
- 10.Герасимов О.И., Фишер И.З. Кинетика фазового перехода в системах с несохраняющимся полем упорядочения.//Физика жидкого состояния.- 1983, вып. 11.- с. 17-21.
- 11.Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.-М.: Наука, 1982.- 381 с.
- 12.Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.-М.: Мир, 1979.- 512 с.

- 13.Справочник по специальным функциям.-М.: Наука, 1979.- 830 с.
- 14.Gerasymov O.I., Khudyntsev N.N., Klymenkov O.A., Spivak A.Ya.
The kinetics of processes occurring in granular materials in the field of
vibroaccelerations. //Ukr.Journ.Phys.-2005.-Vol.50, № 6.-P.624-632.
- 15.Герасимов О.І., Вандевалле Н., Співак А.Я., Худинцев М.М.,
Люме Г., Дорболло С., Клименков О.А. Стационарні стани у 1D
системі непружних частинок //Укр.фіз.журн. -2008.- **53**, № 11.-
С.1129-1137.