МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для самостійного вивчення та виконання контрольних робіт
з дисципліни

МАТЕМАТИКА

для слухачів підготовчого відділення
(заочна форма навчання)

Одеса 2013

Методичні вказівки для самостійного вивчення та виконання контрольних робіт з дисципліни “Математика“ для слухачів підготовчого відділення (заочна форма навчання)

Укладачі:
Аркатов Ю.М., Расторгуєва Т.Є., Ткаченко Н.А.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Програма з математики для вступників до вищих навчальних закладів складається з трьох розділів. Перший з них є переліком основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти вступник (уміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем). У другому розділі вказано теореми, які необхідно вміти доводити. Зміст теоретичної частини іспитів повинен формуватися з цього розділу. У третьому розділі перелічені основні математичні вміння й навички, якими повинен володіти вступник.

На іспиті з математики вступник до вищого навчального закладу повинен показати:

а) чітке знання позначень, математичних понять, термінів, формулювань правил, ознак теорем, передбачених програмою, вміння доводити їх;

б) уміння точно і стисло висловити математичну думку в усній і письмовій формі, використовувати відповідну символіку;

в) упевнене володіння практичними математичними вміннями й навичками, передбаченими програмою, вміння застосовувати їх при розв'язанні задач та вправ.

ВИБІР ВАРІАНТУ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Щоб визначити номер вашого варіанту, треба знайти в таблиці букву, з якої починається ваше прізвище та ім’я, потім знайти суму відповідних їм цифр – це буде номер варіанту. Наприклад, Петренко Дмитро – П – 2, Д – 1:
2 + 1 = 3, варіант №3, завдання 102, 105, 108, 111,114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144, 147, 150, 153, 156, 159, 162, 165, 168, 171, 174.

Таблиця вибору номера варіанту

1	А В Д Є З Ї Д О М П Р О Р Т Ф Ц Ш Ю
2	Б И Г Е Ж І Й Л Н П З У Х Ч Щ Я

Варіанти завдань

Номер контрольної роботи	Номер варіанта	Номер завдань
1	2	101, 104, 107, 110
	3	102, 105, 108, 111
	4	103, 106, 109, 112
2	2	113, 116, 119, 122, 125
	3	114, 117, 120, 123, 126
	4	115, 118, 121, 124, 127
3	2	128, 131, 134, 137, 140
	3	129, 132, 135, 138, 141
	4	130, 133, 136, 139, 142
4	2	143, 146, 149
	3	144, 147, 150
	4	145, 148, 151
5	2	152, 155, 158
	3	153, 156, 159
	4	154, 157, 160
6	2	161, 164, 167
	3	162, 165, 168
	4	163, 166, 169
7	2	170, 173
	3	171, 174
	4	172, 175

ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ

І ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ ТА ФАКТИ

Арифметика, алгебра і початок аналізу

1. Натуральні числа та нуль. Читання та запис натуральних чисел. Порівняння натуральних чисел. Додавання, віднімання, множення та ділення натуральних чисел. Квадрат і куб числа.

2. Подільність натуральних чисел. Дільники і кратні натурального числа. Парні і непарні числа. Ознаки подільності на 2, 5, 3, 9, 10. Ділення з остачею. Прості й складені числа. Розкладання натурального числа на прості множники. Найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне.

3. Звичайні дроби. Порівняння звичайних дробів. Правильний і неправильний дріб. Ціла та дробова частина числа. Основна властивість дробу. Скорочення дробу. Середнє арифметичне кількох чисел. Основні задачі на дроби.

4. Одночлен і багаточлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.

5. Багаточлен з однією змінною. Корінь багаточлена (на прикладі квадратного тричлена).

6. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.

7. Нерівності. Розв'язування нерівностей. Рівносильні нерівності.

8. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь.

9. Степінь із натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь.

10. Логарифми та їх властивості.

11. Поняття функції. Способи завдання функції. Область визначення, область значень функції. Функція, обернена до даної.

12. Графік функції. Зростання та спадання функції; періодичність, парність, непарність функції.

13. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму. Найбільше й найменше значення функції на проміжку.

14. Означення й основні властивості функцій: лінійної $y = kx + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневої $y = x^n$ $(n \in Z)$, показникової $y = a^x$, $a > 0$, логарифмічної, тригонометричних функцій ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$).

15. Тригонометрія. Основні тригонометричні формули.

16. Арифметична та геометрична прогресії. Формула n-го члена і суми n перших членів прогресій.

17. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст. Похідні елементарних функцій.

18. Означення первісної. Невизначений і визначений інтеграл.

Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Рівність і подібність геометричних фігур. Відношення площ подібних фігур.

2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.

3. Вектори. Операції над векторами.

4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.

5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.

6. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція.

7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорди, січні кола. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола. Сектор, сегмент.

8. Центральні й вписані кути.

9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції.

10. Довжина кола і довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга й площа сектора.

11. Площина. Паралельні площини й площини, що перетинаються.

12. Паралельність прямої й площини.

13. Кут прямої з площиною. Перпендикуляр до площини.

14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.

15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Пряма і похила призми; піраміда. Правильна призма і правильна піраміда. Паралелепіпеди, їх види.

16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Площина, дотична до сфери.

17. Формули площі поверхні й об'єму призми, піраміди, циліндра, конуса.

18. Формули площі сфери, об'єму кулі та її частин.

II ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ТА ТЕОРЕМИ

Алгебра і початок аналізу

1. Функція $y = ax + b$, її властивості та графік.
2. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості та графік.
3. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості та графік.
4. Формула коренів квадратного рівняння.
5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
6. Властивості числових нерівностей.
7. Логарифм добутку, степеня, частки.
8. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$, $y = tgx$, їх означення, властивості та графіки.
9. Корені рівнянь $\sin x = a$; $\cos x = a$; $tgx = a$.
10. Основні тригонометричні формули.
11. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу. Формули зведення.
12. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
13. Правила диференціювання. Похідна суми, добутку і частки двох функцій. Похідні елементарних функцій.
14. Рівняння дотичної до графіка функції.

Геометрія

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Ознаки паралельності прямих.
4. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
5. Ознаки паралелограма.
6. Коло, описане навколо трикутника.
7. Коло, вписане в трикутник.
8. Дотична до кола та її властивість.
9. Вимірювання кута, вписаного в коло.
10. Ознаки рівності, подібності трикутників.
11. Теорема Піфагора, наслідки з теореми Піфагора.
12. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
13. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
14. Ознаки паралельності прямої і площини.
15. Ознака паралельності площин.
16. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.

17. Перпендикулярність двох площин.
18. Паралельність прямих і площин.
19. Перпендикулярність прямих і площин.

III. ОСНОВНІ ВМІННЯ ТА НАВИЧКИ

Вступник повинен уміти:

1. Виконувати арифметичні дії над натуральними числами, десятковими і звичайними дробами; користуватися калькулятором та таблицями для проведення обчислень.

2. Виконувати тотожні перетворення багаточленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.

3. Будувати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій.

4. Розв'язувати рівняння і нерівності першого і другого степеню, а також рівняння та нерівності, що зводяться до них; розв'язувати системи рівнянь та нерівностей першого і другого степеня і ті, що зводяться до них. Найпростіші рівняння і нерівності, що мають степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції.

5. Розв'язувати задачі на складання рівнянь і систем рівнянь.

6. Зображати геометричні фігури на площині і виконувати найпростіші побудови на площині.

7. Використовувати геометричні відомості при розв'язуванні алгебраїчних задач, а з алгебри і тригонометрії — при розв'язуванні геометричних задач.

8. Виконувати на площині операції над векторами (додавання і віднімання векторів, множення вектора на число) і користуватися властивостями цих операцій.

9. Застосовувати похідну при дослідженні функцій на зростання (спадання), на екстремуми і для побудови графіків функцій.

10. Застосовувати інтеграл для знаходження площі фігур, заданих нескладними графіками.

1 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ЧИСЛОВИХ ВИРАЖЕНЬ. ВИКОНАННЯ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ

1.1 Безліч цифр та безліч натуральних чисел

Визначення 1. ***Множина цифр***
Цифри – це знаки. Наприклад, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. *Безліч* цифр це всі цифри. Безліч цифр *позначається* буквою Ф (читати – «фе»):

$$Ф = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Зауваження. Знаки 0, 1 ., 9 – це *елементи* безлічі цифр. Цифри – це знаки, за допомогою яких записують числа.

Визначення 2. ***Множина натуральних чисел***
Натуральне число складається з однієї або декількох цифр. Безліч *натуральних чисел N* – це всі *n* – значні цілі позитивні числа:

$$\mathbf{N} = \{1 ., 9, 11 ., 99, 100 ., 999 .\}.$$

Зауваження.
1. Цифри це однозначні натуральні числа.
2. Цифра 0 (нуль) – це не натуральне число. Це ціле число.
3. Безліч натуральних чисел позначається буквою N (читати – «ен»).

Визначення 3. ***Загальна формула натурального числа***
Якщо a_n – це цифри 0, 1 ., 9, тоді *загальна формула n* – значного натурального числа – це:

$$a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0\,. \tag{1}$$

1.2 Арифметичні дії над натуральними числами

Визначення 1. ***Арифметичні дії***
Дії *складання, віднімання, множення і ділення* – це *арифметичні дії.*

Визначення 2. ***Числовий вираз.***
Числовий вираз - це вираз, який складається з чисел і дій над цими числами.

Зауваження. Числовий вираз може мати дужки:
(...) - це круглі дужки;
[...] - це квадратні дужки;
{...} - це фігурні дужки.

Якщо в числовому виразі є дужки, то спочатку треба виконувати дії в дужках.

Визначення 3. ***Порядок арифметичних дій.***
1. Якщо дужок в числовому виразі немає, тоді слід виконати дії множення і ділення (зліва направо), потім складання і віднімання у будь-якому порядку.
2. Якщо в числовому виразі є дужки, то починати треба робити дії в дужках.

1.3. Ознаки подільності. Види чисел.

Теорема 1. ***Ознака подільності числа на число два без залишку***
Натуральне число $C = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ ділиться на число 2 без залишку, якщо остання цифра цього числа, ділиться на 2 без залишку.

Зауваження.
1. Число, яке ділиться на 2 *без залишку*, називається *парним*.
2. Число, яке ділиться на 2 *із залишком*, називається *непарним*.

Визначення 1. ***Формула парного і непарного числа***
Всі парні числа b_k можна отримати за допомогою формули:
$$b_k = 2 \cdot k\,,\ k = 0,1,2,... \tag{2}$$
Всі непарні числа c_k можна отримати за допомогою формули:
$$c_k = 2 \cdot k + 1\,,\ k = 0,1,2,... \tag{3}$$

Зауваження. Якщо у формулах (2) або (3) підставити будь-яке натуральне число, то по формулі (2) завжди виходитиме парне число, а по формулі (3) виходитиме непарне число.
Наприклад, по формулі (1): $b_{12} = 2 \cdot 12 = 24$ – парне число;
по формулі (2): $c_{12} = 2 \cdot 12 + 1 = 25$ – непарне число.

Теорема 2. ***Ознака подільності числа на число три без залишку***
Натуральне число $C = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ ділиться на 3 без залишку, якщо сума всіх цифра цього числа:
$$a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 \tag{4}$$
ділиться на 3 без залишку.

Приклад. Знайдіть суму цифр числа 84325.
Відповідь. Сума цифр числа 84325 це: 8+4+3+2+5=22.

Приклад. Число 100002 ділиться на три із залишком або без залишку?
Відповідь. Сума цифр числа 100005 це: 1+0+0+0+0+5=6. Число 6 ділиться на 3 без залишку, тому число 100005 ділиться на три без залишку.

Теорема 3. ***Ознака подільності числа на число п'ять без залишку***
Натуральне число *C* ділиться на число 5 без залишку, якщо остання цифра цього числа: a_0, є цифрою 5 або 0.

Приклад. Число 1870 ділиться на п'ять із залишком або без залишку?
Відповідь. Остання цифра 0, тому число 1870 ділиться на п'ять без залишку.

Визначення 2. ***Просте число***
Натуральне число $C = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$, яке ділиться без залишку тільки на 1 і на число *C*, а на всі інші натуральні числа ділиться із залишком, називається *простим числом.*

Зауваження.
1. Прикладами простих чисел є числа: 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 .
2. Якщо натуральне число не є простим, то воно називається *складеним числом.*

1.4 Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне

Визначення 1. ***Розкладання на множники.***
Якщо натуральне число написане як добуток декількох чисел, тоді це означає, що натуральне число *розклали на множники.*

Пояснення. Наприклад, запис числа 30 у вигляді: $30 = 2 \cdot 15$ означає, що число 30 розклали на множники 2 і 15.

Зауваження. Якщо натуральне число розклали на множники і всі множники – *прості числа,* то це означає, що натуральне число *розклали на прості множники.*

Приклад. Напишіть розкладання на прості множники числа 30.
Рішення. Число 30 ділиться на два без залишку (чому?), тому можна написати так: $30 = 2 \cdot 15$. Число 15 ділиться на три без залишку, тому можна написати: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Всі множники – це прості числа. Це розкладання на прості множники.

Зауваження. Чому результат $30 = 2 \cdot 15$ неправильний? Тому, що число 15 непросте, а складене. Результат $30 = 2 \cdot 15$ це розкладання на множники 2 і 15.

Визначення 2. ***Спільний дільник і найбільший спільний дільник (НСД)***
Загальний дільник чисел *A* і *B* – це число *D*, на яке діляться числа *A* і *B* без залишку (A : D) і (B : D).
Найбільший спільний дільник (НСД) – це найбільше число, на яке діляться числа *A* і *B* без залишку.

Зауваження. Якщо число *D* – це НСД для чисел *A* і *B*, то записуватимемо це так: $D = \text{НОД}(A, B)$.

Приклад 3. Знайдіть НСД (18, 12).
Рішення. Розкладемо кожне число на прості множники:
18 = 2 · 3 · 3; 12 = 2 · 2 · 3. НОД (18, 20) = 6 – це найбільше число, на яке діляться числа 12 і 18.

Визначення 3. ***Спільне кратне і найменше спільне кратне (НСК)***
Загальне кратне чисел *A* і *B* – це число *K*, яке ділиться на число *A* і *B* без залишку.
Найменше загальне кратне (НСК) – це найменше число, яке ділиться на числа *A* і *B* без залишку.

Зауваження. Якщо число *К* – це НСК для чисел *A* і *B*, то записуватимемо це так: *К=НСК (А, В*).

Приклад. Знайдіть НСК (18, 12, 30).
Рішення. Розкладемо кожне число на прості множники:

18 = 2 · 3 · 3; 12 = 2 · 2 · 3; 30 = 2 · 3 · 5.

Додамо до першого твору 2 · 3 · 3 нові прості числа:
НСК (18, 12, 30) = (2· 3· 3) · (2) · (5) = 180.

1.5 Математичні вирази. Одночлени. Многочлени.

Визначення 1. ***Математичний вираз***.
Математичний вираз – це запис (формула), в якому використовуються числа, знаки дій, дужки, букви і інші математичні символи.

Зауваження.
1. Якщо математичний вираз складається тільки з чисел, тоді воно називається *числовим виразом*. Наприклад, 15·2-7+23 – це числовий вираз.

2. Якщо в математичному виразі є букви, тоді це алгебраїчний вираз. Наприклад:

$$2x^3 + 3a - 4 \qquad (5)$$

- це вираз алгебри; букви x і a – це змінні.

Якщо $x = 1$, $a = 2$, тоді: $2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 2 - 4$ – це числовий вираз.

> **Визначення 2.** ***Одночлен***.
> Алгебраїчний вираз – *одночлен* – це утворення числа з натуральними буквеними ступенями.

Пояснення. Наприклад, $21a^2b^3$ - це одночлен; $5a^{\frac{1}{2}}b^3$ - це не одночлен тому, що у букви a дробовий ступінь; $3a^2b^{-3}$ - це не одночлен тому, що у букви b негативний ступінь; $21 + a^2b^3$ - це не одночлен тому, що це не твір, а сума.

Зауваження.

1. Число в одночлені називається коефіцієнтом одночлена. Наприклад, у одночлена $21a^2b^3$ коефіцієнт 21; a^2b^3 - це буквений вираз.

2. Якщо перший множник одночлена це число (коефіцієнт), а всі інші множники – букви, (які не повторюються), то одночлен написаний в стандартному вигляді. Наприклад, $a^2 \cdot 5 \cdot b$ - цей одночлен написаний не в стандартному вигляді – перший множник, а число (коефіцієнт) – другий множник. Якщо цей одночлен написати так: $5a^2b$ або, тоді він написаний в стандартному вигляді.

Одночлен $21a^2 \cdot b \cdot a^3$ написаний не в стандартному вигляді тому, що буква a повторюється. У стандартному вигляді цей многочлен слід написати так: $21ba^5$ або $21a^5b$.

3. Якщо два одночлени мають однакові буквені вирази (ступені букв теж однакові), тоді ці два одночлени називаються подібними. Наприклад, $8x^3a^2y^4$ і $3a^2x^3y^4$ - подібні одночлени тому, що у них буквений вираз однаковий $(x^3a^2y^4)$ і $(a^2x^3y^4)$, і ступені кожної букви однакові: у букви a – ступінь 2; у букви x – ступінь 3; у букви y – ступінь 4.

Одночлени $3ax$ і $5a^2x$ - не подібні тому, що буквений вираз однаковий, але ступені різні.

4. Ступінь одночлена – це сума показників ступенів всіх букв. Наприклад, ступінь одночлена $21a^2b^3$ рівний: $2 + 3 = 5$.

5. Види многочленів по ступенях:

- многочлен першого ступеня: 5x+4y-9;
- многочлен другого ступеня: 6a2-7b+ab;

- многочлен третього ступеня: 2x2y+y3-5; і так далі

6. Многочлен ступеня *n* від змінної *x*:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n.$$

Визначення 3. *Многочлен.*
Многочлен – це сума (різниця) одночленів.

Пояснення. Наприклад, $5x^4y^2 + 3x - 2y^5$ – це многочлен тому, що це сума (різниця) трьох одночленів: $5x^4y^2$, $3x$ і $2y^5$.

Зауваження.

1. Якщо многочлен складається з двох одночленів, то він називається двочленом. Наприклад, $(3x - 2y^5)$ - це двочлен.

2. Якщо многочлен складається з трьох одночленів, то він називається тричленом. Наприклад, $(5x^4y^2 + 3x - 2y^5)$ - це тричлен.

3. Многочлен написаний в стандартному вигляді, якщо всі одночлени многочлена написані в стандартному вигляді.

Визначення 4. *Ступінь многочлена*.
Ступінь многочлена – це найбільша (найбільша) із ступенів одночленів, з яких складається многочлен.

Пояснення. Щоб знайти ступінь многочлена $2a2^b - 5a^4 + 3ab - 7{,}2b^3a^2$ треба знайти ступені всіх одночленів:

$2a^2b \to 2 + 1 = 3$

$5a^4 \to 4$

$3ab \to 1 + 1 = 2$

$7{,}2b^3a^2 \to 3 + 2 = 5$

Найбільший ступінь одночлена: $\max(3;4;2;5) = 5$, тому ступінь многочлена рівний п'яти.

1.6. Дія над одночленами і многочленами.

Правило 1. *Множення одночлена на одночлен*
Щоб помножити одночлен на одночлен треба:

1. помножити коефіцієнти одночленів;
2. написати одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Помножте одночлен $7a^3bx$ на одночлен $5ac^2$.

Рішення. $\left(7a^3bx\right)\cdot\left(5ac^2\right)=(7\cdot5)\cdot\left(a^3\cdot a\right)\cdot b\cdot x\cdot c^2=35a^4bxc^2$.

Приклад. Помножте одночлен $\left(-m^3\cdot n^2\cdot a\right)$ на одночлен $\left(8an^3\right)$.

Рішення. $\left(-m^3n^2a\right)\cdot\left(8an^3\right)=(-1\cdot8)\cdot\left(n^2\cdot n^3\right)\cdot(a\cdot a)\cdot m^3=-8n^5a^2m^3$.

Правило 2. ***Множення многочлена на одночлен*** .
Щоб помножити одночлен на многочлен треба:
1. одночлен помножити на кожен одночлен многочлена;
2. написати многочлен в стандартному вигляді.

Приклад. Помножте двочлен $\left(3a^2+4b^3\right)$ на одночлен $5ab$.

Рішення.

$5ab\cdot\left(3a^2+4b^3\right)=5ab\cdot3a^2+5ab\cdot4b^3=(5\cdot3)a\cdot\left(b\cdot b^3\right)=15a^3b+20ab^4$.

Визначення 1. ***Подібні члени***
Подібні члени – це одночлени, які мають однаковий буквений вираз.

Зауваження. Буквені вирази однакові, якщо у них:
1. однакові букви (змінні);
2. букви мають однакові ступені.

Приклад. Які з вказаних одночленів є подібними?

1) $5a^2b$; 2) $5ab$; 3) $-4a^2b$; 4) $5a^2$; 5) $3ba$.

Рішення. Перший одночлен ($5a^2b$) має буквений вираз $\left(a^2b\right)$. Другий одночлен – (ab). Букви однакові, ступені букви a різні, тому – це не подібні одночлени. У третьому одночлені буквений вираз -$\left(a^2b\right)$, тому перший і третій одночлени – це подібні одночлени. Подібними будуть другий і п'ятий одночлени.

Правило 3. ***Множення многочлена на многочлен***
Щоб помножити многочлен на многочлен треба:
1. кожен одночлен першого многочлена помножити на другий многочлен;
2. привести подібні числа.

Приклад. Помножте многочлен $\left(2a+3x^2\right)$ на многочлен $\left(5x^2-4a+3\right)$.

Рішення.

$$\left(2a+3x^2\right)\cdot\left(5x^2-4a+3\right)=2a\cdot\left(5x^2-4a+3\right)+3x^2\cdot\left(5x^2-4a+3\right)=$$

$$=10ax^2-8a^2+6a+15x^4-12x^2a+9x^2=-2x^2a-8a^2+6a+15x^4+9x^2.$$

Визначення 2. ***Приведення подібних одночленів.***
Привести подібні одночлени – це означає написати новий одночлен, у якого:

1. буквений вираз такий же як у подібних одночленів;
2. коефіцієнт рівний сумі коефіцієнтів подібних одночленів.

Приклад. Приведіть подібні члени:
$5x^2z-zx^2-3x^2z+2zx^2$.

Рішення. Буквений вираз у цих подібних членів - $\left(x^2z\right)$; у третього – 2. Тому,

$5x^2z-zx^2-3x^2z+2zx^2=\left(5+\left(-1\right)+\left(-3\right)+2\right)x^2z$.

$5x^2z-zx^2-3x^2z+2zx^2+3x^2z$

Приклад. Розкрийте дужки (2ab+b2)+(3a2-b2+4ab)-(2a+b2-ab).
Рішення. (2ab+b2)+(3a2-b2+4ab)-(2a+b2-ab)=[Розкриваємо дужки. Якщо перед дужками стоїть знак «-», то знак кожного члена треба змінити на протилежний]= $=2ab+b^2+3a^2-b^2+4ab-2a-b^2+ab$=[Приводимо подібні члени]= $=7ab-2a+3a^2-b^2$.

Визначення 3. ***Розкладання многочленів на множники***
Розкласти многочлен на множники – це означає записати його як добуток одночленів і многочленів.

Приклад 7. Розкладете на множники $ab+ac$.
Рішення. $ab+ac=a\cdot\left(b+c\right)$.

Способи розкладання многочленів на множники:
1. Винесення загального множника за дужки.
Приклади.
1) $10x^2y+20x^3y^2+5xy$=[$5xy$ – це спільний множник]=$5xy\left(2x+4x^2y+1\right)$.
2) $a(x-y)-b(y-x)=a(x-y)+b(x-y)=(x-y)(a+b)$.

2. Спосіб угрупування.

Приклади.

1) $x^3-3x^2+5x-15=\left[\begin{array}{l}\textit{групуємо перший і другий члени,}\\ \textit{третій і четвертий члени}\end{array}\right]=$

$=(x^3-3x^2)+\left(5x-15\right)=x^2(x-3)+5(x-3)=(x-3)(x^2+5).$

2) $5y+3x-15-xy=(5y-15)-(xy-3x)=$
$=5(y-3)-x(y-3)=(y-3)(5-x).$

3. Використання формул скороченого множення.

Таблиця 1. Формули скороченого множення.

1.	Різниця квадратів	$a^2-b^2=\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right)$
2.	Квадрат суми (повний квадрат)	$\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$
3.	Квадрат різниці (повний квадрат)	$\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$
4.	Сума кубів	$a^3+b^3=\left(a+b\right)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$
5.	Різниця кубів	$a^3-b^3=\left(a-b\right)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$
6.	Куб суми	$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
7.	Куб різниці	$\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Приклади.

1) $(x+3)^2-16=\left[\textit{застосовуємо формулу різниці квадратів}\right]=$
$=(x+3-4)\cdot(x+3+4)=(x+7)\cdot(x-1).$

2) $6x^2+24xy+24y^2=\left[\textit{виносимо за дужки } 6\right]=6(x2+4x+4)=$
$=\left[\textit{це формула квадрату суми}\right]=6(x+2)^2.$

1.7 Дробно раціональні вирази

Визначення 1. *Раціональний дріб.*
Раціональний дріб (дробовий раціональний вираз або дріб алгебри) – це дріб, чисельник і знаменник якої многочлени.

Зауваження.

1. Раціональний дріб рівний нулю, якщо її чисельник рівний нулю, а знаменник не рівний нулю.

$$\frac{A}{B}=0 \Rightarrow A=0,\ B\neq 0;$$

2. Можна змінювати знаки чисельника і знаменника раціонального дробу:
$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B}$, наприклад: $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{3-2x}{1-x}=-\frac{3-2x}{x-1}=-\frac{2x-3}{1-x}$.

Алгоритм 1. Додавання (віднімання) раціональних дробів.
Щоб виконати дію додавання (віднімання) декількох раціональних дробів треба:

1. розкласти знаменники дробів на множники;
2. записати найменший загальний множник;
3. знайти додаткові множники для кожного дробу;
4. виконати множення чисельників дробів на додаткові множники;
5. записати результат.

Зауваження. Множення і ділення раціональних дробів виконується так само як множення і ділення звичайних дробів.

Приклад. Спростити вираз:

$$\left(\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}\right):\frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}.$$

Рішення.

1) $\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}=\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}+$

$$+\frac{3a-2}{3a^2-1}=\frac{(3a+2)\left(3a^2-1\right)-\left(18a^3-a-9\right)+(3a-2)\left(3a^2+1\right)}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}=$$

$$\frac{9a^3-3a+6a^2-2-18a^3+a+9a^3+3a-6a^2-2}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}=\frac{a+5}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)};$$

2) $\frac{a+5}{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}:\frac{a^2+10+25}{9a^4-1}=\frac{a+5}{(3a+1)\left(3a^2+1\right)}\cdot\frac{\left(3a^2-1\right)\left(3a^2+1\right)}{(a+5)^2}=$

$$=\frac{1}{a+5}.$$

Зауваження. При розв'язанні завдань на виконання арифметичних дій насамперед варто звернути увагу на форму представлення чисел і порядок дій. Корисно потренуватися в переході від десяткових до звичайних дробів і назад, у переході від змішаних чисел до дробів і назад. У процесі обчислень корисно спочатку максимально спростити арифметичний вираз, вибравши придатне представлення чисел, звільнитися від степенів із від'ємними показниками та ін.

Для відшукання *найбільшого загального дільника* двох натуральних чисел варто виконати наступні операції:

1) розкласти кожне з даних чисел на прості множники;
2) знайти добуток простих множників, що входять у кожне з даних чисел.

Якщо якийсь простий множник входить у ці розкладання в різних степенях, то в найбільший спільний дільник він входить у найменшому з цих степенів. Якщо немає жодного простого множника, що входить до обох розглянутих чисел, то найбільший спільний дільник дорівнює одиниці.

Приклад. Спростити:

$$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}-\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}$$

Розв'язання. Перетворімо перший дріб:

$$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}=\frac{(a^2-4)+(2c^2-ac^2)}{(a^2-c^4)+(2a+2c^2)}=\frac{(a-2)(a+2)+c^2(2-a)}{(a-c^2)(a+c^2)+2(a+c^2)}=$$

$$=\frac{(a-2)(a+2-c^2)}{(a+c^2)(a-c^2+2)}=\frac{a-2}{a+c^2}$$

Перетворімо тепер другий дріб:

$$\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}=\frac{(a-2)^2}{(a^2+ac^2)-(2a+2c^2)}=\frac{(a-2)^2}{a(a+c^2)-2(a+c^2)}=$$

$$=\frac{(a-2)^2}{(a+c^2)(a-2)}=\frac{a-2}{a+c^2}$$

Отже $\quad \dfrac{a-2}{a+c^2}-\dfrac{a-2}{a+c^2}=0$.

Відповідь: 0.

2. АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

2.1 Поняття рівняння

Визначення 1. ***Рівняння з однією невідомою***
Рівняння з однією змінною або рівняння з однією невідомою величиною – це рівність:

$$f(x)=\varphi(x), \tag{2.1}$$

у якому $f(x)$ і $\varphi(x)$ - функції від змінній *x*.

Зауваження.

1. Рівняння (1) можна записати так:

$$g(x)=0 \ . \tag{2.2}$$

Така форма запису називається стандартною.

2. Тип рівняння визначається типом дій, які виконуються над невідомою величиною *x*. Наприклад, якщо над величиною *x* виконуються дії: складання (віднімання) і множення (ділення) на число, те рівняння називається лінійним і в стандартному вигляді його записують так:

$$ax+b=0. \tag{2.3}$$

Визначення 2. *Розв'язання рівняння*
Розв'язання рівняння $g(x)=0$ – це числове значення невідомої величини: $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, для якого виконується рівність: $g(a)=0$.

Зауваження.

1. Розв'язання рівняння називається *коренем* цього рівняння.
2. Рівняння може мати декілька коренів.

Приклад. Яке значення невідомої величини, є розв'язанням рівняння: $\sqrt[3]{\mathrm{x}-1}-2\mathrm{x}+16=0$.

Варіанти відповідей: A) 0; B) 1; C) -7; D) 9; E) -1.

Рішення. Перевіримо числове значення 0, тобто $\mathrm{x}=0$:

$$\sqrt[3]{0-1}-2\cdot 0+16\overset{?}{=}0 \ \Rightarrow \ -1-0+16\overset{?}{=}0 \ \Rightarrow \ 15\neq 0.$$

Число 0 не є розв'язанням рівняння.
Перевіримо числове значення 9, тобто $x=9$:

$$\sqrt[3]{9-1}-2\cdot 9+16\overset{?}{=}0 \ \Rightarrow \ 2-18+16\overset{?}{=}0 \ \Rightarrow \ 0=0.$$

Число 9 є розв'язанням рівняння.

Приклад. Розв’яжіть рівняння $2x-6=0$.
Рішення. $2x=6 \Rightarrow x=3$ - це корінь рівняння або розв’язання рівняння.
Відповідь: $x=3$.

Визначення 3. ***Область допустимих значень (ОДЗ)***
Область допустимих значень рівняння – це безліч значень невідомого, при яких рівняння має сенс (існує).

Зауваження. При знаходженні ОДЗ для рівнянь потрібно пам'ятати, що:

1. Якщо рівняння є дріб $\frac{A}{B}$, то знаменник цього дробу не повинен бути рівний нулю: $\frac{A}{B} \Rightarrow B \neq 0$.

2. Якщо рівняння містить корінь парного ступеня, то підкорінний вираз повинен бути ненегативним: $\sqrt[2n]{A} \Rightarrow A \geq 0$.

Приклад . Знайдіть ОДЗ рівнянь:
1) $\frac{2}{x-1}+3x=5$; 2) $3x^2-5x+4=0$.

Рішення.
1) Знаменник дробу не рівний нулю: $x-1 \neq 0$; $x \neq 1$. Отже, ОДЗ: $x \neq 1$ або $x \notin R \setminus \{1\}$.
2) Невідома величина x може приймати будь-які значення. Тому ОДЗ: $x \in R$.

Визначення 4. ***Рівносильність рівнянь***
Рівняння називаються *рівносильними або еквівалентними*, якщо безліч їх рішень співпадає (однакові).

Пояснення. Наприклад, рівняння $2x=10$ і $3x=15$ рівносильні, тому що у них однаковий корінь $x=5$. Рівняння $2x=10$ і $2x^2=10x$ нерівносильні тому, що перше рівняння має один корінь $x=5$, а друге два корені: $x_1=5,\ x_2=0$.

Зауваження.
1. Якщо ліву і праву частини рівняння (2.1) помножити на одне і теж число, то вийде рівняння рівносильне рівнянню (2.1):
$$f(x)=\varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot f(x)=a\cdot\varphi(x).$$
2. Якщо до лівої і правої частин рівняння (2.1) додати одне і теж число, то вийде рівняння рівносильне рівнянню (2.1):
$$f(x)=\varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad a+f(x)=a+\varphi(x)$$

2.2. Лінійні рівняння і нерівності.

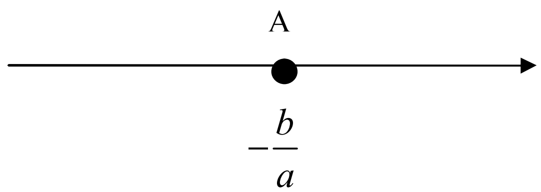
Визначення 1. ***Лінійне рівняння*.**
Лінійне рівняння – це рівність:

$$ax + b = 0, \tag{2.4}$$

у якому x – це невідома величина, $a \neq 0$ *і* b – це параметри (коефіцієнти) рівняння.

Зауваження.

1. У лінійному рівнянні невідома величина має перший ступінь, тобто: $ax^1 + b = 0$. Наприклад, рівняння $2x - 8 = 0$ - це лінійне, а $2x^2 - 8 = 0$ - це нелінійне рівняння, тому що невідома величина x має другий ступінь – x^2.
2. Формула (2.4) – це стандартна форма запису лінійного рівняння. Наприклад, рівняння $2x - 6 = 2$ - це лінійне рівняння, яке написане в нестандартній формі. Якщо це рівняння написати так: $2x - 6 = 2 \Rightarrow 2x - 8 = 0$, то це рівняння написане в стандартній формі.
3. Вирішити рівняння – це означає знайти числове значення невідомої величини.
4. Вирішення лінійного рівняння (2.4) можна знайти по формулі:
$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b - b = -b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a}. \tag{2.5}$$
5. Геометричне вирішення лінійного рівняння – це крапки на числовій осі.



Крапка А – це зображення вирішення рівняння (2.4).

Приклад. Знайдіть вирішення рівняння: $2(x-1) + 3 = -x - 5$

Рішення. Напишемо рівняння в стандартному вигляді (2.4):

$$2(x-1) + 3 = -x - 5 \Rightarrow 2x - 2 + 3 = -x - 5 \Rightarrow$$

$$2x + x + 1 + 5 = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3; \\ b = 6. \end{array}\right.$$

Використовуємо формулу (2.5):

$$x = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

Зауваження. Якщо рішення правильне, то рівність повинна бути правильною, коли $x=-2$: $2\left(-2-1\right)+3=-\left(-2\right)-5 \Rightarrow -3=-3$.

2.3. Системи рівнянь

Визначення 1. ***Рівняння з двома невідомими.***
Рівняння з двома невідомими – це рівняння, яке в загальному вигляді записується так: $f(x,y)=0$, де x і y – невідомі величини.

Зауваження

1. *Розв'язанням рівняння з двома невідомими* є пара чисел: $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, $\mathrm{y}=\mathrm{b}$.
   Якщо числа *a* і *b* – це розв'язання рівняння (2.4), то повинно мати місце тотожність:
   $$f(a,b)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0.$$
   Записувати розв'язання рівняння (2.4) будемо так: $\left(\mathrm{a},\mathrm{b}\right)$.
2. Загальний вид лінійного рівняння з двома невідомими має вигляд:
   $$Ax+By+C=0 \;, \tag{2.6}$$

де A, B і C – це коефіцієнти рівняння. Лінійне рівняння з двома невідомими (2.6) має нескінченно багато рішень.

Приклад. Знайдіть вирішення рівняння: $15\mathrm{x}+3\mathrm{y}=9$.

Рішення. Виразимо невідому y через x:
$$15x+3y=9 \quad \Rightarrow \quad y=3-5x.$$
Задамо довільне значення величини x. Наприклад $\mathrm{x}=1$. Підставимо це значення x в останню рівність і знайдемо y: $\mathrm{y}=3-5\cdot 1=-2$. Вирішення рівняння: $\left(1;-2\right)$.

Визначення 2. ***Система двох рівнянь з двома невідомими***
Система двох рівнянь з двома невідомими – це два рівняння $f(x,y)=0$ і $\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$, які об'єднані разом з допомогою фігурної дужки і в загальному вигляді ця система записується так:
$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases} \tag{2.7}$$
де x і y - невідомі величини.

Зауваження

1. Вирішенням системи (2.7) є загальні вирішення двох рівнянь. Якщо загальних рішень немає, то система не має рішення.

2. Якщо обидва рівняння в системі (2.7) лінійні, то система називається лінійною і записується так:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y = b_1, \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y = b_2. \end{cases} \tag{2.8}$$

3. Лінійна система (2.8) завжди має єдине рішення, якщо виконується умова:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 .$$

Алгоритм 1. ***Вирішення системи рівнянь (2.8) методом підстановки***
Якщо система (2.8) має рішення, то, щоб це рішення знайти, треба:

1) вибрати одне рівняння і виразити одну невідому величину через іншу; наприклад, з першого рівняння виразимо змінну x через y:

$$a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y = b_1 \;\Rightarrow\; x = \frac{-a_{12}\cdot y + b_1}{a_{11}}.$$

2) підставити отриманий вираз x в друге рівняння.

Якщо система з *n* лінійних рівнянь містить *n* невідомих, то можливі наступні три випадки:
1) система не має рішень;
2) система має тільки одне рішення;
3) система має нескінченно багато рішень.

Приклад . Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язати систему лінійних рівнянь можна способом підстановки, який полягає в тому, що з якого-небудь рівняння системи виражають одне невідоме через інші невідомі, а потім підставляють значення цього невідомого в інші рівняння.

З першого рівняння виражаємо: $x = \dfrac{8-3y}{2}$.

Підставляємо цей вираз в друге рівняння та одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8-3y}{2} \\ 3\cdot\dfrac{8-3y}{2} + 2y = 7 \end{cases}$$

З другого рівняння одержуємо $y = 2$. З урахуванням цього з першого рівняння $x = 1$.
Відповідь. (1; 2).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Розв'язання. Система має нескінченно багато рішень, тому що друге рівняння виходить із першого шляхом множення на 2 (тобто фактично є всього одне рівняння з двома невідомими).
Відповідь. Нескінченно багато рішень.

Приклад. При яких значеннях параметра *a* система рівнянь

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2 \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

має нескінченно багато рішень?

Розв'язання. З першого рівняння виражаємо x:

$$x = -\frac{a}{2}y + \frac{a}{2} + 1$$

Підставляємо цей вираз в друге рівняння, одержуємо

$$(a+1)(-\frac{a}{2}y + \frac{a}{2} + 1) + 2ay = 2a + 4$$

Далі помножимо обидві частини рівняння на 2 та спростимо його:

$$(a+1)(a+2-ay) + 4ay = 4a + 8$$

$$4ay - a(a+1)y = 4(a+2) - (a+1)(a+2)$$

$$ya(4-a-1) = (a+2)(4-a-1)$$

$$ya(3-a) = (a+2)(3-a)$$

Аналізуючи останнє рівняння, відзначимо, що при $a = 3$ воно має вигляд $0 \cdot y = 0$, тобто воно задовольняється при будь-яких значеннях *y*.
Відповідь. 3.

2.4. Квадратне рівняння.

Визначення 1. *Квадратне рівняння.*
Квадратне рівняння – це рівність:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.9}$$

у якому *x* – невідома величина; *a, b*, *c* – параметри рівняння і $a \neq 0$.

Зауваження.
1. Формула (2.9) – це стандартний вид квадратного рівняння. Наприклад, рівняння $2x^2 - 3x = -2$ – квадратне, але записано не в стандартному вигляді; $2x^2 - 3x + 2 = 0$ – це стандартний вид квадратного рівняння.

2. Якщо розділити ліву і праву частини рівняння (2.9) на параметр a:

$$ax^2+bx+c=0\ \Big|\cdot\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}=0\Rightarrow,$$

$$x^2+px+q=0 \tag{2.10}$$

$$p=\frac{b}{a},\ q=\frac{c}{a}, \tag{2.11}$$

то отримане квадратне рівняння (2.10) називається *приведеним*.

Визначення 2. ***Дискримінант квадратичного рівняння.***
Дискримінант – це характеристика квадратного рівняння, яка для рівняння (2.9) визначається формулою:

$$D=b^2-4ac, \tag{2.12}$$

а для приведеного рівняння (2.10) ця формула набуває такого вигляду:

$$D=p^2-4q. \tag{2.13}$$

Зауваження. Дискримінант квадратного рівняння може бути позитивним ($D>0$), негативним ($D<0$) і рівним нулю ($D=0$).

Визначення 3. ***Формула для знаходження коренів квадратного рівняння.***
Розв'язання (корені) квадратного рівняння (2.9) можна знайти за допомогою формули:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \tag{2.14}$$

де D – дискримінант рівняння (2.9) (формула (2.12)).

Зауваження.
1. Якщо $D>0$, то рівняння (2.9) має два різних кореня:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \tag{2.15}$$

2. Якщо $D=0$, то рівняння (2.9) має два однакові корені:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}. \tag{2.16}$$

В цьому випадку ($D=0$) говоритимемо, що рівняння має один корінь.
3. Якщо $D<0$, то рівняння (2.9) не має кореня: $x\in\varnothing$.
4. Якщо квадратне рівняння приведене (формула(2.10)), то формулу для кореня можна написати так:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}, \tag{2.17}$$

де D – дискримінант рівняння (формула (2.13)).

Приклад. Розв’яжіть квадратне рівняння: $-4x^2+8x=3$.

Рішення. Напишемо рівняння в стандартному вигляді (2.9) і знайдемо параметри цього рівняння:

$$-4x^2+8x-3=0 \Rightarrow a=-4;\ b=8;\ c=-3.$$

Знайдемо дискримінант рівняння (формула (2.12)):

$$D=b^2-4ac=8^2-4\cdot(-4)\cdot(-3)=64-48=16>0.$$

Рівняння має два різних кореня:

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-4)}=\frac{-8\pm4}{-8}=\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-8+4}{-8}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}; \\ x2=\dfrac{-8-4}{-8}=\dfrac{-12}{-8}=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Теорема 1. Якщо квадратне рівняння (2.9) має два корені x_1 і x_2, то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Зауваження.

1. Якщо квадратне рівняння приведене (формула (2.10)), то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (2.19)$$

2. Теорема 1 називається теоремою Вієта.

Приклад. Напишіть приведене квадратне рівняння, якщо його корені відомі: $x_1=-3,\quad x_2=4$.

Рішення. Треба написати рівняння: $x^2+px+q=0$, параметри p і q - невідомі. Використовуємо теорему Вієта (формула (2.19)):

$$\begin{cases} -3+4=-p \\ -3\cdot4=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1, \\ q=-12. \end{cases}$$

Відповідь: $x^2-x-12=0$.

Перевіримо результат – знайдемо корінь цього рівняння (формули (2.13) і (2.17)):

$$D=(-1)^2-4\cdot(-12)=49;\ x1,2=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{1\pm7}{2}=\left[\begin{array}{l} x_1=-3; \\ x_2=4, \end{array}\right.$$

Зауваження.

1. Якщо один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то квадратне рівняння можна вирішувати, не обчислюючи дискримінанта:

1) $b = 0;\ c \neq 0;\ \frac{c}{a} < 0;$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

2) $b \neq 0;\ c = 0;$

$$x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Теорема Вієта (пряма) затверджує: якщо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1 і x_2, то виконуються співвідношення

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Приклад . Розв'язати рівняння $2x^2 + 5x - 1 = 0$.

Розв'язання.

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 33 > 0;$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4}$$

Відповідь: $\frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Приклад . Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} = 4.$$

Розв'язання. Позначимо $y = \frac{x^2 + x - 5}{x}$, тоді одержуємо рівняння $y + \frac{3}{y} = 4$.

Перетворимо його:

$$y + \frac{3}{y} - 4 = 0, \quad \frac{y^2 - 4y + 3}{y} = 0,$$

$$\text{звідси} \quad \begin{cases} y^2 - 4y + 3 = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Квадратне рівняння $y^2 - 4y + 3 = 0$ має корені $y_1 = 1;\ y_2 = 3$ (обидва корені входять в область припустимих значень).

Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне (рівносильне) сукупності рівнянь

$$\frac{x^2+x-5}{x}=1 \quad \text{чи} \quad \frac{x^2+x-5}{x}=3.$$

Перетворимо їх:

$$\frac{x^2+x-5}{x}-1=0 \qquad \text{чи} \qquad \frac{x^2+x-5}{x}-3=0$$

$$\begin{cases} x^2-5=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x^2-2x-5=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$x_1=\sqrt{5};\; x_2=-\sqrt{5} \quad \text{чи} \quad x_3=1+\sqrt{6};\; x_4=1-\sqrt{6}$$

(усі знайдені корені рівняння входять в область припустимих значень).
Відповідь. $-\sqrt{5}; \sqrt{5}; 1-\sqrt{6}; 1+\sqrt{6}.$

Приклад. Розв’язати рівняння

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=72$$

Розв’язання. Перегрупуємо співмножники і перетворимо отримане рівняння:

$$(x+2)(x+3)(x+5)x=72; \quad (x^2+5x+6)(x^2+5x)=72.$$

Позначимо $y=x^2+5x$, тоді одержимо рівняння $(y+6)y=72$, чи $y^2+6y-72=0$.
Корені цього рівняння: $y_1=6; \quad y_2=-12$.
Таким чином, вихідне рівняння еквівалентне сукупності рівнянь

$$x^2+5x=6 \qquad \text{чи} \qquad x^2+5x=-12.$$

Перше рівняння має корені $x_1=1; x_2=-6$. Друге рівняння коренів не має, тому що $D=25-48=-23<0$.
Відповідь. -6; 1.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47 \; .$$

Розв’язання. Згрупуємо доданки:

$$4(x^2+\frac{1}{x^2})+12(x+\frac{1}{x})=47$$

Позначимо $y=x+\dfrac{1}{x}$, при цьому помітимо що

$$y^2=(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \; ,$$

звідси $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$. З урахуванням цього одержуємо рівняння

$$4(y^2-2)+12y=47\ , \qquad \text{чи} \qquad 4y^2+12y-55=0.$$

Це квадратне рівняння має корені $y_1=\dfrac{5}{2}; \quad y_2=-\dfrac{11}{2}$.

Вихідне рівняння еквівалентне сукупності рівнянь:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \qquad \text{чи} \qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}$$

Вирішимо їх:

$$x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=0 \qquad \text{чи} \qquad x+\frac{1}{x}+\frac{11}{2}=0$$

$$\begin{cases}2x^2-5x+2=0\\ x\neq 0\end{cases} \qquad \text{чи} \qquad \begin{cases}2x^2+11x+2=0\\ x\neq 0\end{cases}$$

$$x_1=2; \quad x_2=\frac{1}{2} \qquad \text{чи} \qquad x_3=\frac{-11+\sqrt{105}}{4}; \quad x_4=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$$

(усі знайдені корені входять в область припустимих значень).

Відповідь. 2; 0,5; $\dfrac{-11+\sqrt{105}}{4}$; $\dfrac{-11-\sqrt{105}}{4}$.

Зауваження. У найпростіших випадках при розв’язуванні систем рівнянь другого степеня виникає можливість виразити одне невідоме через інше і підставити цей вираз в друге рівняння.

При розв’язуванні систем рівнянь другого степеня часто використовується також спосіб заміни змінних.

Приклад. Серед рішень $(x;y)$ системи знайти таке, для якого сума $(x+y)$ максимальна. Обчислити значення цієї суми:

$$\begin{cases}2x+y=7\\ xy=6\end{cases}$$

Розв’язання. З першого рівняння одержуємо: $y=7-2x$. Підставляючи значення y в друге рівняння, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}y=7-2x\\ 7x-2x^2=6\end{cases}$$

Квадратне рівняння $-2x^2+7x-6=0$ має корені $x_1=2; x_2=\dfrac{3}{2}$.

З першого рівняння одержуємо $y_1=3; y_2=4$.

Рішення мають вигляд: (2;3) і (1,5;4).

Найбільша сума $x+y=1{,}5+4=5{,}5$.

Відповідь. 5,5.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 7 \\ xy + 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $a = x + y; b = xy$.

Одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ b + 2a = 8 \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} a = 7 - 2b \\ b + 14 - 4b = 8 \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

Повертаючись до змінних *x* та *y,* одержуємо

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Вирішимо цю систему:

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ (3 - y)y = 2 \end{cases}$$

$y^2 - 3y + 2 = 0;\ y_1 = 1;\ x_1 = 2;\ y_2 = 2;\ x_2 = 1.$

Відповідь. (2; 1), (1; 2).

2.5 Ірраціональні рівняння і системи ірраціональних рівнянь

Якщо в рівнянні невідома величина міститься під знаком радикала, то таке рівняння називається ірраціональним. Одним із засобів розв'язування ірраціональних рівнянь є піднесення обох частин рівняння до степеня, що дорівнює показнику степеня кореня. Якщо показник степеня парний, то необхідна перевірка знайдених рішень.

Приклад. Розв'язати рівняння $\sqrt{x + 2} = x$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$x + 2 = x^2$$

Квадратне рівняння $x^2 - x - 2 = 0$ має корені $x_1 = 2; x_2 = -1$.

Перевірка. 1) $x = 2$, тоді $\sqrt{2 + 2} = 2$; $2 = 2$ - вірно. 2) $x = -1$, тоді $\sqrt{-1 + 2} = -1$; $1 = -1$ - невірно.

Відповідь. 2.

Зауваження. Якщо при рішенні рівнянь чи систем рівнянь робиться перевірка, то область припустимих значень можна і не знаходити.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$$

Розв’язання. Розкриємо дужки:

$$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$$

Позначимо $y=\sqrt{x^2+5x+2}$ та перейдемо до рівняння $y^2+2-3y=6$, чи $y^2-3y-4=0$. Воно має корені $y_1=-1;\ y_2=4$.

Вихідне рівняння еквівалентне сукупності рівнянь

$$\sqrt{x^2+5x+2}=-1 \quad \text{чи} \quad \sqrt{x^2+5x+2}=4$$

Перше рівняння не має рішень, тому що $\sqrt{x^2+5x+2}\geq 0$.

Розв’язуючи друге рівняння, одержимо

$$x^2+5x+2=16, \quad x^2+5x-14=0$$

звідки $x_1=2;\ x_2=-7$.

Перевірка. 1) x = 2, тоді $\sqrt{2^2+5\cdot 2+2}=4;\ 4=4$ - вірно.

2) x = -7, тоді $\sqrt{(-7)^2+5\cdot(-7)+2}=4; \quad 4=4$ - вірно.

Відповідь. 2; -7.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{1-x\sqrt{x^2-1}}=x-1$$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$1-x\sqrt{x^2-1}=x^2-2x+1,$$

$$-x\sqrt{x^2-1}=(x-2)$$

Було би помилкою скоротити обидві частини рівняння на *x*. При цьому можна втратити рішення. Тому вирішуємо так:

$$-x\sqrt{x^2-1}-x(x-2)=0,$$

$$-x\,(\sqrt{x^2-1}+(x-2))=0,$$

$$-x=0 \quad \text{чи} \quad \sqrt{x^2-1}+(x+2)=0$$

$$x=0 \quad \text{чи} \quad \sqrt{x^2-1}=-(x-2).$$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрату:

$$x^2-1=x^2-4x+4, \text{ звідки } x=\frac{5}{4}.$$

Перевірка: 1) $x=\frac{5}{4}$, тоді $\sqrt{1-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{25}{16}-1}}=\frac{5}{4}-1; \quad \sqrt{1-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}; \quad \frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ – вірно.

2) x = 0, тоді $1-0\sqrt{0-1}=0-1$ – невірно.

Відповідь. 5/4.

2.6 Рівняння з модулем

Щоб вирішити рівняння, що містить змінну під знаком модуля, треба звільнитися від знака модуля, використовуючи його визначення:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

На практиці це робиться так:
1) знаходять критичні точки, тобто значення змінної, при яких вирази, що знаходяться під знаком модуля, звертаються в нуль;
2) розбивають область припустимих значень змінної на проміжки, на кожнім з яких вирази, що знаходяться під знаком модуля, зберігають знак;
3) на кожнім із знайдених проміжків розв’язують рівняння без знаку модуля.
Сукупність (об'єднання) рішень зазначених проміжків і складає всі рішення розглянутого рівняння.
Розглянемо це на конкретному прикладі.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$|x+2| + |x+3| = x.$$

Розв’язання. Знайдемо критичні точки:

$$x + 2 = 0 \quad \text{чи} \quad x + 3 = 0$$
$$x = -2 \quad \text{чи} \quad x = -3.$$

Розв’яжемо задачу на кожнім проміжку:
1) $x < -3,\ -x-2-x-3 = x,\ -3x = 5;\ x = -\frac{5}{3}$ (не входить у розглянутий проміжок).
2) $-3 \leq x < -2,\ -x-2 = x+3 = x;\ x = 1$ (не входить у розглянутий проміжок).
3) $x \geq -2,\ x+2+x+3 = x; x = -5$ (не входить у розглянутий проміжок).
Відповідь. Немає рішень.

Приклад. Розв’язати рівняння

$$|x + 5| - | x - 3 | = 8.$$

Розв’язання. Знайдемо критичні точки:

$$x + 5 = 0 \quad \text{чи} \quad x - 3 = 0;$$
$$x = -5 \quad \text{чи} \quad x = 3.$$

Розв’яжемо задачу на кожнім проміжку:
1) $x < -5,\ -x-5-(-x+3) = 8,\ -x-5+x-3 = 8;\ -8 = 8$ - невірно. На розглянутому проміжку рішень немає.
2) $-5 \leq x < 3,\ x+5-(-x+3) = 8;\ x+5+x-3 = 8;\ 2x = 6;\ x = 3$ (не входить у розглянутий проміжок).

3) $x \ge 3,\; x+5-(x-3)=8;\quad x+5-x+3=8;\quad 8=8$ - вірно. Рівняння виконується при всіх х із розглянутого проміжку.
Відповідь: $[3;\infty)$.

3 НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

3.1 Лінійні нерівності

Визначення 1. ***Нерівність з однією невідомою***
Нерівність з однією змінною або нерівність з однією невідомою величиною – це математичний вираз:

$$f(x) > \varphi(x),$$

у якому $f(x)$ і $\varphi(x)$ – функції від змінної x.

Зауваження. *Рішенням нерівності* з однією змінною називається множина таких значень змінної, що звертають її у вірну числову нерівність.

Визначення 2. ***Область допустимих значень (ОДЗ)***
Область допустимих значень нерівності – це безліч значень невідомого, при яких нерівність має сенс (існує).

Приклад. Знайдіть ОДЗ нерівності: $\sqrt{x-2}<5$.
Рішення. Підкореневий вираз повинен бути ненегативним: $x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$. ОДЗ: $x \ge 2$.

Визначення 3. ***Лінійна нерівність***.
Лінійна нерівність – це нерівності, які в стандартному вигляді записуються так:

$$ax+b>0 \tag{3.1}$$

$$ax+b<0, \tag{3.2}$$

$$ax+b \ge 0, \tag{3.3}$$

$$ax+b \le 0. \tag{3.4}$$

a і b – це параметри; x – невідома величина. (3.1) і (3.2) – це строгі лінійні нерівності; (3.3) і (3.4) – це нестрогі лінійні нерівності.

Зауваження.
1. Вирішення лінійної нерівності – це безліч значень невідомої величини.
2. Якщо $a > 0$, те вирішення нерівності (3.3) можна написати так:

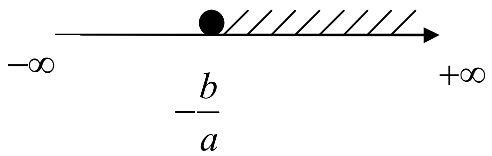
$$ax+b>0 \Rightarrow ax+b-b>0-b \Rightarrow ax>-b \Rightarrow \frac{ax}{a} > \frac{-b}{a} \Rightarrow x>-\frac{b}{a}. \tag{3.5}$$

Точка $x=-\frac{b}{a}$ – не належить вирішенню нерівності.

Приклад . Розв'яжіть нерівність: $3x+9>0$.

Рішення. $3x+9>0 \Rightarrow 3x>-9 \Rightarrow x>-\frac{9}{3} \Rightarrow x>-3$.

3. Геометрично вирішення лінійної нерівності (3.5) – це частина числової осі.



● - це символ – точка $\left(-\frac{b}{a}\right)$ не належить рішенню. Формулу (3.5) можна написати так:

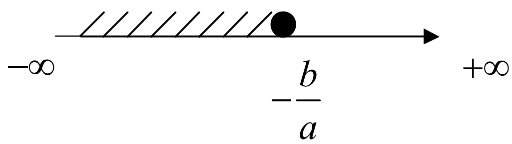
$$x>-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$$

4. Якщо *a<0*, то вирішення нерівності (3.1) можна написати так:

$$ax+b>0 \Rightarrow ax+b-b>-b \Rightarrow ax>-b \Rightarrow \frac{ax}{a}<\frac{-b}{a} \Rightarrow x<-\frac{b}{a}. \qquad (3.6)$$

Знак нерівності треба змінити, якщо *a<0*.

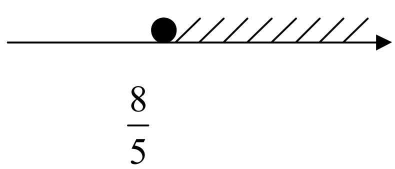
$$x<-\frac{b}{a} \Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$$



Приклад. Розв'яжіть нерівність: $-5x+8<0$.

Рішення. $-5x+8<0 \Rightarrow -5x+\cancel{8}-\cancel{8}<-8 \Rightarrow -5x<-8 \Rightarrow \frac{-5x}{-5}>\frac{-8}{-5} \Rightarrow x>\frac{8}{5}$;

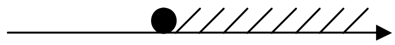
$x\in\left(\frac{8}{5};\infty\right)$



5. Якщо нерівність нестрога, наприклад (3), тоді його рішення можна написати так:

$$ax + b \geq 0 \quad a>0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a}$$

Крапка $x = -\frac{b}{a}$ належить вирішенню нерівності.



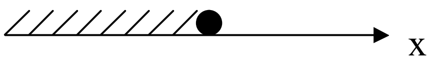
$$-\frac{b}{a}$$

● - це символ – крапка $\left(-\frac{b}{a}\right)$ належить, вирішенню нерівності.

Приклад. Вирішите нерівність і зобразите його рішення: $-4x + 3 > 2x - 7$.

Рішення. $-4x + 3 \geq 2x - 7 \Rightarrow -6x \geq -10 \Rightarrow x \leq \frac{-10}{-6} \Rightarrow x \leq \frac{10}{6} \Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$.

Відповідь: $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$



$$\frac{5}{3}$$

3.2 Системи лінійних нерівностей.

Визначення 1. ***Системи лінійних нерівностей.***
Системи лінійних нерівностей – це системи вигляду:

$$\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x < b_2. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Зауваження:

1. Системи нерівностей (3.7) – це системи з однією невідомою x.
2. Системи нерівностей (3.7) – це строгі нерівності. На місці знаків > і < можуть бути знаки ≥ і ≤. Тоді нерівності будуть нестрогі.
3. Щоб вирішити систему нерівностей (3.7) треба:
   - вирішити кожну нерівність;
   - на одній числовій осі намалювати їх рішення;
   - знайти загальне рішення.

4. Загальне вирішення системи – це частина числової осі, де вирішення нерівностей перетинаються («штрихування перетинаються»).

Приклад. Знайдіть вирішення системи нерівностей:

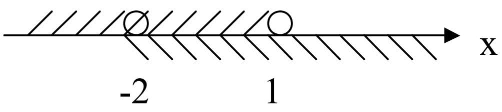
$$\begin{cases} 5x-4<x, \\ -2x-3<1. \end{cases}$$

Рішення. Вирішимо кожну нерівність:

$5x-4<x \Rightarrow 4x<4 \Rightarrow x<1,$

$-2x-3<1 \Rightarrow -2x<4 \Rightarrow x>-2.$

Намалюємо ці рішення на одній числовій осі:



«Штрихування перетинаються», коли $\begin{cases} x<1, \\ x>-2 \end{cases}$ - це загальне рішення. Можна написати його так: $x \in (-2;1)$, або так $-2<x<1$.

Алгоритм 1. ***Вирішення нерівностей вигляду*** $f(x)\cdot g(x)>0$.

Щоб вирішити нерівність

$$f(x)\cdot g(x)>0 \tag{3.8}$$

треба:

1. замінити його системами нерівностей:

$$f(x)\cdot g(x)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{3.9}$$

2. вирішити кожну систему;
3. об'єднати їх рішення.

Приклад. Вирішіть нерівність: $(2x-5)(4-x)>0$.

Рішення. Замінимо нерівність системами нерівностей і вирішимо їх:

$$\begin{cases} 2x-5>0, \\ 4-x>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>5, \\ -x<-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>25, \\ x<4, \end{cases} \Rightarrow x>4$$

$$\begin{cases} 2x-5<0, \\ 4-x<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<5, \\ -x<-4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2,5, \\ x>4. \end{cases} \Rightarrow x \notin \varnothing$$

$$\left[\begin{array}{l} x > 4, \\ x \in \varnothing, \end{array}\right. \Rightarrow x > 4.$$

Визначення 2. ***Подвійна нерівність.***
Подвійна нерівність – це нерівність вигляду:

$$f(x) < g(x) < h(x). \tag{3.10}$$

Алгоритм 2. ***Вирішення подвійних нерівностей*** (3.10).
Щоб вирішити нерівність (3.10), треба:

1. Замінити його системою нерівностей:

$$\begin{cases} g(x) < h(x), \\ g(x) > f(x). \end{cases}$$

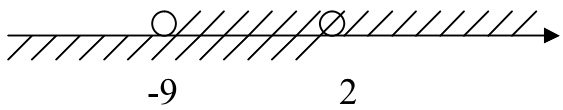
2. Вирішити систему.

Приклад. Вирішите подвійну нерівність: $4x - 9 < 5x < 14 - 2x$.
Рішення. Замінимо подвійну нерівність системою нерівностей:

$$\begin{cases} 5x > 4x - 9, \\ 5x < 14 - 2x. \end{cases}$$

Вирішимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 5x > 4x - 9, \\ 5x < 14 - 2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -9, \\ 7x < 14, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -9, \\ x < 2. \end{cases}$$



$$x \in (-9; 2)$$

Визначення 3. ***Дробові нерівності.***
Дробові нерівності – це нерівності вигляду:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0. \tag{3.11}$$

Зауваження:

1. Нерівність (3.11) і нерівність (3.8) *рівносильні*, тобто вони мають однакові рішення.
2. Алгоритм вирішення нерівності (3.11) такий же, як алгоритм вирішення нерівності (3.8) (див. алгоритм 3.7).

3. Якщо нерівність (3.11) нестрога, тобто:

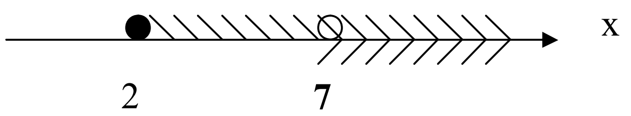
$$\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0, \qquad (3.12)$$

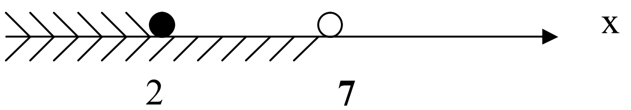
тоді $g(x) \ne 0$.

Приклад. Вирішення нерівності $\dfrac{x-2}{x-7} \ge 0.$

Рішення. Замінимо дробову нерівність системами рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0, \\ x-7 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x > 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \le 0, \\ x-7 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x < 7 \end{cases} \end{array}\right.$$





Вирішення першої системи: $x > 7$ або $x \in (7;\infty)$; другий: $x \le 2$ або $x \in (-\infty;2]$.

Вирішення дробової нерівності можна записати так:

$$\left[\begin{array}{l} x > 7 \\ x \le 2 \end{array}\right. \text{ або } x \in (-\infty;2) \cup (7;\infty).$$

3.3 Раціональні нерівності і системи нерівностей

Нерівності вигляду $P_n(x) > 0$ $(P_n(x) < 0)$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0\right)$, де $P_n(x); Q_m(x)$ – многочлени відповідно степенів n і m, тобто

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

як правило розв’язуються методом інтервалів.

Відзначимо, що нерівність $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0\right)$ рівносильна нерівності $P_n(x) \cdot Q_m(x) > 0$ $(P_n(x) \cdot Q_m(x) < 0)$.

Розглянемо метод інтервалів на прикладі.

Приклад. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^3-27}{x^3+8}\le 0.$$

Розв'язання. Розкладемо чисельник і знаменник дробу, що знаходиться в лівій частині нерівності, на множники:

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\le 0 \ .$$

Дискримінанти рівнянь $x^2+3x+9=0$ і $x^2-2x+4=0$ від'ємні ($D_1=-27<0$ і $D_2=-12<0$); отже, рівняння рішень не мають.

Відсутність рішень означає, що квадратні тричлени на множники не розкладаються і на всьому проміжку зміни x мають постійний знак, що збігається зі знаком старшого члена (у нашому випадку «+»).

Помножимо і розділимо вихідну нерівність на додатні вирази (x^2-2x+4) і (x^2+3x+9) відповідно. Одержимо рівносильну нерівність

$$\frac{x-3}{x+2}\le 0.$$

Знайдемо множину рішень нерівності. Для цього замінимо її на рівносильну нерівність:

$(x-3)(x+2)<0$, з урахуванням того, що x = 3.

Відзначимо на координатній прямій точки, в яких ліва частина нерівності звертається в нуль. Одержимо три проміжки. У крайньому правому проміжку знак «+», далі знаки чергуються.

Відповідь: $(-2;3]$.

Декілька нерівностей з однією змінною можуть утворити систему. Рішенням системи нерівностей з однією змінною називаються значення змінної, при яких кожна з нерівностей перетворюється у вірну числову нерівність.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0,\\(x-4)(x+4)\le 0\end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуємо методом інтервалів першу нерівність. Точки 3 і -1 «виколоті», тому що знаменник містить множники (x-3) і (x+1), які не можуть дорівнювати 0. Перша нерівність має рішення x <-1 і x >3.
Розв'язуємо методом інтервалів другу нерівність, її рішення $-4\le x\le 4$.
Знайдемо перетинання цих рішень.

Відповідь. $-4\le x<1;\ 3<x\le 4$.

3.4 Нерівності з модулем

Нерівності, що містять змінну під знаком модуля, розв'язуються аналогічно рівнянням подібного роду.
Розглянемо це на конкретному прикладі.

Приклад . Розв'язати нерівність $|2x-1|-|x-2| \geq 4$.

Розв'язання. Критичними точками являються x = 1/2 і x = 2.

1)Розглянемо проміжок $x < \frac{1}{2}$. На ньому вихідна нерівність має вигляд $-2x+1-(-x+2) \geq 4$, звідки $x \leq -5$. Отже, на цьому інтервалі розв'язком нерівності буде проміжок $x \leq -5$.

2) Розглянемо проміжок $\frac{1}{2} \leq x < 2$. На ньому вихідна нерівність має вигляд $(2x-1)-(-x+2) \geq 4$, звідки $x \geq \frac{7}{3}$.

Таким чином, вихідна нерівність на цьому проміжку не має рішення.

3) Розглянемо проміжок $x > 2$. На ньому вихідна нерівність має вигляд $(2x-1)-(x-2) \geq 4$, звідки $x \geq 3$.

4) Об'єднання отриманих рішень $x \leq -5$ і $x \geq 3$ буде розв'язком вихідної нерівності.

Відповідь. $-\infty < x \leq -5$ та $3 \leq x < \infty$ **.**

3.5 Ірраціональні нерівності

Під ірраціональними нерівностями маються на увазі нерівності, у яких невідомі величини знаходяться під знаком кореня (радикала). Звичайний спосіб розв'язування таких нерівностей полягає у зведенні їх до раціональних нерівностей (що не мають коренів). Звільнитися від коренів іноді вдається шляхом піднесення обох частин нерівності до степеню. При цьому (в зв'язку з тим, що перевірка отриманих рішень підставленням викликає труднощі) необхідно стежити за тим, щоб при перетворенні нерівностей щоразу виходила нерівність, рівносильна вихідній.

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей варто пам'ятати, що при піднесенні обох частин нерівності до непарного степеню завжди виходить нерівність, рівносильна вихідної. Якщо ж обидві частини нерівності підносять до парного степеню, то отримана нерівність буде рівносильна вихідній і буде мати той же зміст лише у випадку, якщо обидві частини вихідної нерівності невід'ємні.

Приклад. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x+61} < x+5.$$

Розв'язання. Знайдемо область припустимих значень вихідної нерівності

$$x+61 \ge 0, \ \ x \in [-61;+\infty).$$

Права частина нерівності (x+5) може бути від'ємною. Причому область припустимих значень не «виручає».

Розглянемо два випадки.

I. $x+5 \ge 0$, тобто $x \in [-5;+\infty)$.

У цьому випадку обидві частини нерівності невід'ємні. Отже, обидві частини нерівності піднести до квадрату:

$$x+61 < x^2+10x+25 \ , \qquad -x^2-9x+36<0,$$
$$-(x-3)(x+12)<0 \ , \qquad (x-3)(x+12)>0.$$

Рішення цієї нерівності $x \in (-\infty;-12) \cup (3;+\infty)$.

Знайдемо перетин отриманої множини з множиною $[-5;+\infty)$. Це інтервал $(3;+\infty)$. Перетин останньої множини з областю припустимих значень вихідної нерівності буде $x \in (3;+\infty)$.

II. $x+5<0$, тобто $x \in (-\infty;-5)$.

У цьому випадку ліва частина нерівності невід'ємна, а права від'ємна. Така нерівність невірна, тобто розглянутий проміжок не містить рішень вихідної нерівності.

Відповідь. $(3;+\infty)$.

4 ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

4.1 Логарифмічні рівняння

Визначення 1. ***Логарифмічне рівняння***
Якщо над невідомою величиною виконується операція логарифмування, то рівняння (нерівність) називається *логарифмічним*.

Зауваження.
1. Над невідомою величиною можуть виконаються і інші операції.
2. Невідома величина може знаходиться і в підставі логарифма.

Приклад. Які з рівнянь є логарифмічними?

A) $x+\log_2 5=10$; B) $\dfrac{(x+1)^2}{\log_3 4}=1$; C) $2\log_2(x+4)=3x^2+x+1$;

D) $4x+1=\log_x 5$.

Відповідь. C і D.

Визначення 2. ***Прості типи логарифмічних рівнянь*** Простими називатимемо наступні типи рівнянь (нерівностей):

$$\log_{\alpha(x)} f(x) = \log_{\alpha(x)} g(x), \tag{4.1}$$

$$\log_{\alpha(x)} f(x) = A, \tag{4.2}$$

$$\log_a f(x) = \log_b h(x), \tag{4.3}$$

Алгоритм 1. ***Вирішення рівняння*** $\log_{\alpha(x)} f(x) = \log_{\alpha(x)} g(x)$.

1. Знайдіть ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \alpha(x) > 0, \\ \alpha(x) \neq 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

2. Пропотенціюйте рівність (4.1) по підставі $\alpha(x)$:

$$\log_{\alpha(x)} f(x) = \log_{\alpha(x)} g(x) \Rightarrow \alpha(x)^{\log_{\alpha(x)} f(x)} = \alpha(x)^{\log_{\alpha(x)} g(x)} \Rightarrow$$

$$f(x) = g(x) \tag{4.5}$$

3. Розв’яжіть рівняння (4.5).
4. Порівняйте розв’язання рівняння (4.5) з рішенням системи (4.4) і запишіть результат.

Зауваження.
1. Рівняння (4.2) можна вирішити, якщо використовувати визначення логарифма, тобто:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = A \Rightarrow f(x) = \varphi(x)^A. \tag{4.6}$$

2. Рівняння (4.3) – це окремий випадок рівняння (4.1):

$$\log_a f(x) = \log_b h(x) \Rightarrow \log_a f(x) = \frac{\log_a h(x)}{\log_a b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \log_a f(x) = \log_a h(x)^{\frac{1}{\log_a b}} \tag{4.7}$$

Якщо порівняти (4.7) з (4.1), то: $a = \alpha(x)$; $g(x) = h(x)^{\frac{1}{\log_a b}}$

3. Для вирішення логарифмічних рівнянь використовуються визначення логарифма $\log_a b = c \Rightarrow b = a^c$, властивості логарифмів і властивості логарифмічної функції.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+1\right)=-1$.

Рішення.

1. Знайдемо ОДЗ рівняння: $2x+1>0$; $2x>-1$; $x>-\dfrac{1}{2}$ - область допустимих значень змінної x.
2. Використаємо визначення логарифму: $\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+1\right)=-1 \Rightarrow$

$$2x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow 2x+1=3 \Rightarrow 2x=3-1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1.$$

3. Порівняємо розв'язання з ОДЗ: $x=1>-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=1\in ОДЗ$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(3x-2\right)=2$.

Рішення. $\log_2\left(x-1\right)\left(3x-2\right)=2$;

$$\begin{cases}\left(x-1\right)\left(3x-2\right)=4,\\ x-1>0,\\ 3x-2>0;\end{cases} \quad \begin{cases}3x^2-5x+2-4=0,\\ x>1,\\ x>\dfrac{2}{3};\end{cases} \quad \begin{cases}3x^2-5x-2=0,\\ x>1;\end{cases}$$

$D=25+24=49;$

$x_1=\dfrac{5+7}{6}=2;\ x_2=\dfrac{5-7}{6}=-\dfrac{1}{3}<1$.

Відповідь. $\mathrm{x}=2$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $\log_x\left(x^2-3x+6\right)=2$.

Рішення. У цьому рівнянні краще зробити перевірку рішень, чим знаходити ОДЗ. Записуємо рівняння без знаку логарифма: $x^2-3x+6=x^2$; $-3x+6=0$; $x=2$. Перевірка: $\log_2\left(2^2-3\cdot 2+6\right)=2$, $\log_2 4=2\Rightarrow 2=2$. Перевірка дає вірний результат. **Відповідь**: $x=2$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(2x+1)-\log_2 x=\log_4 64.$$

Розв'язання. Запишемо різницю логарифмів у лівій частині рівняння у вигляді логарифма частки, а праву частину спростимо:

$$\log_2\frac{2x+1}{x}=3$$

Отримане рівняння еквівалентне рівнянню

$$\frac{2x+1}{x}=2^3;\quad \frac{2x+1}{x}=8$$

на області визначення вихідного рівняння, тобто на області припустимих значень x, що задається системою нерівностей:

$$\begin{cases}2x+1>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ x>0\end{cases}\Rightarrow x>0$$

Останнє рівняння легко розв'язати:

$$\frac{2x+1}{x}=8;\ 2x+1=8x;\ 6x=1;\ x=\frac{1}{6}.$$

Відповідь: 1/6.

4.2 Показові рівняння

Визначення 1. *Показове рівняння*
Показове рівняння – це рівняння, в якому невідома величина знаходиться в показнику ступеня.

Зауваження. Далі розглядатиметься тільки просте показове рівняння вигляду:

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0. \tag{4.8}$$

Визначення 2. *Область допустимих значень невідомої (змінної) величини в показовому рівнянні (4.8).*
Область допустимих значень (ОДЗ) невідомої величини в рівнянні $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ - це область визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\text{ОДЗ}=\begin{cases}\mathrm{D(f)}\\ \mathrm{D(g)}\end{cases}. \tag{4.9}$$

Приклад. Знайдіть ОДЗ рівняння $3^{\frac{1}{x}}=3^{2x-4}$.

Рішення. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=2x-4$.

$$\text{ОДЗ=}\begin{cases}\mathrm{D(f)}:\mathrm{x}\in(-\infty,\infty)/0,\quad (\mathrm{x}\neq 0),\\ \mathrm{D(g(x))}:\mathrm{x}\in(-\infty,\infty),\end{cases}\Rightarrow \mathrm{x}\in(-\infty,\infty)/0$$

Невідома величина x може приймати всі числові окрім нуля: $x\neq 0$. Тому, що при $x=0$ вираз $\dfrac{1}{x}$ не має сенсу або невизначено, тобто ОДЗ: $x\neq 0$.

Алгоритм 1. ***Вирішення показового рівняння*** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.
Щоб вирішити рівняння (4.9) треба:

1. написати ОДЗ рівняння (4.9);
2. перейти від рівняння (4.9) до рівняння:
$$f(x) = g(x); \tag{4.10}$$
3. вирішити рівняння (4.10);
4. вирішення рівняння (4.10) – це рішення і рівняння (4.8).

Зауваження.
1. Якщо $a = 1$, то x – будь-яке число з ОДЗ.
2. Найпростіше показникове рівняння вигляду $a^x = b$, де $a > 0; b > 0; a \neq 1$, має розв'язок $x = \log_a b$.
3. Показникове рівняння вигляду $a^{f(x)} = b$, де $a > 0$; $b > 0$; $a \neq 1$, розв'язується шляхом логарифмування обох частин рівняння по основі *a*.
У результаті виходить рівняння, еквівалентне даному $f(x) = \log_a b$.
4. Показникове рівняння вигляду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, де $a > 0; a \neq 1$, також розв'язується шляхом логарифмування обох частин рівняння по основі *a*. Еквівалентне йому рівняння $f(x) = \varphi(x)$.

Приклад. Розв'язажіть рівняння
$$3^{2-x} - 6 \cdot 3^{2x} = 3^{2x+1}.$$
Розв'язання. Запишемо праву частину рівняння у вигляді $3^{2x+1} = 3 \cdot 3^{2x}$.
Перенесемо другий член із лівої частини рівняння в праву і приведемо подібні члени, тоді одержимо
$$3^{2-x} - 6 \cdot 3^{2x} = 3 \cdot 3^{2x};\ 3^{2-x} = 6 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^{2x};\ 3^{2-x} = 9 \cdot 3^{2x}\ .$$
Запишемо праву частину рівняння у вигляді $9 \cdot 3^{2x} = 3^{2x+2}$. Таким чином, вихідне рівняння приймає вигляд $3^{2-x} = 3^{2x+2}$.
Логарифмуючи по основі 3, одержимо $2 - x = 2x + 2;\ 3x = 0;\ x = 0.$
Відповідь. 0.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $9^x - 3^x - 6 = 0$.
Розв'язання. Перший член рівняння можна представити у вигляді $9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$. Тоді вихідне рівняння приймає вигляд:
$$(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0\ .$$
Подібні рівняння, у яких невідома функція знаходиться у різних степенях, розв'язуються методом заміни змінної.
Позначимо $3^x = y$, тоді маємо $y^2 - y - 6 = 0$. Це квадратне рівняння легко розв'язати:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 1\cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};\ y_1 = 3;\ y_2 = -2.$$

Другий корінь не підходить, тому що показова функція завжди додатна. Отже, $3^x = 3;\ x = 1$.

Відповідь. 1.

5 ЛОГАРИФМІЧНІ І ПОКАЗНИКОВІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

При розв’язанні систем логарифмічних і показникових рівнянь використовуються звичайні прийоми розв’язання логарифмічних і показникових рівнянь і звичайні прийоми розв’язування систем рівнянь.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 80 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$$

Розв’язання. З другого рівняння системи легко одержати $x + y = (\sqrt{5})^2 = 5$. Виразимо з цього рівняння x через y і підставимо в перше рівняння системи

$$x = 5\text{-}y, \text{ тоді } 5^{5-y} \cdot 2^y = 80.$$

Останнє рівняння перетворимо таким засобом:

$$5^{5-y} \cdot 2^y = 80 \Rightarrow 5^5 \cdot 5^{-y} \cdot 2^y = 80 \Rightarrow 5^5(5^{-1})^y \cdot 2^y = 80 \Rightarrow 5^5(5^{-1}\cdot 2)^y = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^5\left(\frac{2}{5}\right)^y = 80 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^y = \frac{80}{5^5} = \frac{16}{5^4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4.$$

З останнього виразу одержуємо, що у = 4. Завдяки тому, що x = 5-y, знайдемо

$$x = 5\text{-}4 = 1.$$

У вихідну систему входить вираз $\log_{\sqrt{5}}(x+y)$, отже, по визначенню логарифма, вираз $(x+y)$ повинне бути більше нуля. Отримані значення змінних (x=1; y=4) задовольняють цій умові і являються рішеннями даної системи.

Відповідь. (1; 4).

6 ЛОГАРИФМІЧНІ І ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

6.1 Логарифмічні нерівності.

Визначення 1. ***Логарифмічна нерівність***
Якщо над невідомою величиною виконується операція логарифмування, то нерівність називається *логарифмічною*.

Зауваження.
1. Над невідомою величиною можуть виконуватися і інші операції.
2. Невідома величина може знаходитися і в основі логарифма.

Приклад. Які з нерівностей є логарифмічними?

А) $x^2 - 4 > \log_3 7$; В) $\log_4 x > 5$; С) $\log_{3x} 8 > 1 + x$; D) $81 < \log_x 3$.

Відповідь. В, С і D.

Визначення 2. ***Прості типи логарифмічних нерівностей.***
Простими називатимемо наступні типи рівнянь (нерівностей):

$$\log_{\alpha(x)} f(x) > \log_{\alpha(x)} g(x), \tag{6.1}$$

$$\log_{\alpha(x)} f(x) > A, \tag{6.2}$$

$$\log_a f(x) > \log_b h(x). \tag{6.3}$$

Зауваження.
1. При потенціюванні нерівності за основою менше 1 треба змінити знак нерівності на протилежний, тобто:

$$\log_{\alpha(x)} f(x) > \log_{\alpha(x)} g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha(x) > 1, f(x) > g(x), \\ \alpha(x) < 1, f(x) < g(x). \end{array}\right. \tag{6.4}$$

2. Для вирішення логарифмічних нерівностей використовуються визначення логарифму $\log_a b = c \Rightarrow b = a^c$, властивості логарифмів і властивості логарифмічної функції.
3. Розв'язання логарифмічних нерівностей засноване на тому, що функція $y = \log_a x$ при $a > 1$ є монотонно зростаючою, а при $0 < a < 1$ - монотонно спадаючою:

$$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \varphi(x) > 0, \\ a > 1, \\ f(x) > \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a f(x) > \log_a \varphi(x),\\ 0 < a < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \varphi(x) > 0,\\ 0 < a < 1,\\ f(x) < \varphi(x)\end{cases}$$

4. При переходах від найпростіших логарифмічних нерівностей до рівносильних систем нерівностей, що не містять знака логарифма, варто враховувати область припустимих значень вихідної нерівності.

Логарифмічна нерівність вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) > b$ еквівалентна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) > 0,\\ \varphi(x) > 1,\\ f(x) > (\varphi(x))^b\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} f(x) > 0,\\ 0 < \varphi(x) < 1,\\ f(x) < (\varphi(x))^b\end{cases}$$

Аналогічно розв'язується і логарифмічна нерівність вигляду
$\log_{\varphi(x)} f(x) < b$.

Таблиця 6.1 Залежність нерівності від знаку

Нерівність	
$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) > \varphi(x)\end{cases}$ ОДЗ	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \\ f(x) < \varphi(x)\end{cases}$ ОДЗ
Знак нерівності **не змінюється** (функція зростає).	Знак нерівності **змінюється** (функція спадає**).**
$\log_2 x < \log_2 3$ $\begin{cases} x > 0 \\ x < 3\end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3$	$\log_2 x < \log_2 3$ $\begin{cases} x > 0 \\ x > 3\end{cases} \Rightarrow x > 3$

Приклад. Знайти найбільше ціле *x*, що задовольняє нерівності

$$\log_3(2x+1) - \log_3 5 < 0$$

Розв'язання. Перенесемо другий член нерівності в праву частину. Одержимо

$$\log_3(2x+1) < \log_3 5$$

Завдяки тому, що основи логарифмів однакові і більше 1, остання нерівність еквівалентна такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 < 5\end{cases}$$

Цю систему легко розв'язати:

$$\begin{cases}2x+1>0\\2x+1<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2},\\x<2\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};2\right).$$

За умовою задачі необхідно знайти найбільше ціле x даного проміжку. Число 2 даному проміжку не належить, тому найбільше ціле значення x=1.

Відповідь. 1.

Приклад . Знайти найбільше ціле *x,* що задовольняє нерівності

$$\log_{x+0,5}(3-x)>1$$

Розв'язання. Логарифмічна нерівність подібного вигляду еквівалентна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases}3-x>0,\\x+0,5>1,\\3-x>x+0,5\end{cases}\quad \text{і} \quad \begin{cases}3-x>0,\\0<x+0,5<1,\\3-x<x+0,5\end{cases}$$

Розв'язуємо першу з цих систем:

$$\begin{cases}3-x>0,\\x+0,5>1,\\3-x>x+0,5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3,\\x>\dfrac{1}{2},\\x<\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$$

Розв'язуємо другу систему:

$$\begin{cases}3-x>0,\\0<x+0,5<1,\\3-x<x+0,5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3,\\x+0,5>0,\\x+0,5<1,\\\dfrac{5}{2}<2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3,\\x>-0,5,\\x<0,5,\\x>\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Розв'язком вихідної нерівності є об'єднання двох рішень цих систем, тобто остаточно $x\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. Найбільше ціле x із цього проміжку x = 1.

Відповідь. 1.

6.2 Показникові нерівності.

Алгоритм 2. ***Вирішення показникової нерівності***

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}. \tag{6.5}$$

Щоб вирішити нерівність (6.5) треба:

1. написати ОДЗ нерівності (6.5);
2. перейти від нерівності (6.5) до нерівності

$$f(x) > g(x), \tag{6.6}$$

якщо $a > 1$, і

$$f(x) < g(x), \tag{6.7}$$

якщо $a < 1$;

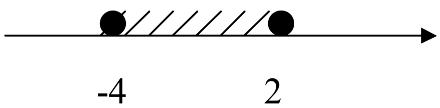
3. вирішити нерівність (6.6) або (6.7);
4. вирішення нерівності (6.6) або (6.7) – це розв'язання нерівності (6.5).

Приклад. Розв'яжіть нерівність: $0,7^{8-x^2} \le 0,7^{2x}$.
Рішення. Знайдемо ОДЗ цієї нерівності: $x \in R$.

$$0,7^{8-x^2} \le 0,7^{2x} \Rightarrow 8 - x^2 \ge 2x \quad \left(0,7 < 1_{6}^{D}\right)$$

Вирішимо отриману квадратну нерівність:

$$x^2 + 2x - 8 \le 0, \qquad x_1 = -4;\ x_2 = 2$$



Відповідь: $x \in [-4; 2]$

Розв'язок показникових нерівностей заснований на тому, що функція $y = a^x$ при $a > 1$ є монотонно зростаючою, а при $0 < a < 1$ - монотонно спадаючою:

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

Розв'язок нестрогих показникових нерівностей відрізняється від розв'язку відповідних строгих нерівностей лише включенням у множину усіх рішень нерівності також і коренів відповідного рівняння.

Нерівність типу $a^{f(x)} \ge b$, де $a > 0; a \ne 1;\ b > 0$ може бути розв'язана шляхом логарифмування обох її частин (тому що обидві частини нерівності додатні). При всіх $b \le 0$ нерівність подібного типу справедлива для будь-якого х з області припустимих значень нерівності.
Нерівність $a^{f(x)} \le b$, де $a > 0; a \ne 1; b \le 0$ рішень не має.

Деякі показникові нерівності містять вирази вигляду $f(x)^{\varphi(x)}$. Нагадаємо, що функція $f(x)^{\varphi(x)}$ визначена тоді, коли визначені обидві функції $f(x)$, $\varphi(x)$ і, крім того, $f(x) > 0$.

Приклад. Знайти найбільше ціле *x,* що задовольняє нерівності

$$3^{\sqrt{x+1}+1} - 28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$$

Розв'язання. Для зручності позначимо $3^{\sqrt{x+1}} = y$. Вихідна нерівність приймає вигляд

$$3y - 28 + \frac{9}{y} < 0$$

Помножимо обидві частини нерівності на y (при цьому зміст нерівності не зміниться, тому що y по визначенню завжди більше нуля). Одержимо

$$3y^2 - 28y + 9 < 0.$$

Розкладаючи квадратний тричлен у лівій частині нерівності на множники і розв'язуючи отриману нерівність методом інтервалів, для *y* одержимо

$$(3y-1)(y-9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{3}, \\ y < 9. \end{cases}$$

Переходячи від *y* до вихідної функції $3^{\sqrt{x+1}}$, маємо

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{3}, \\ 3^{\sqrt{x+1}} < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} > -1, \\ \sqrt{x+1} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x+1 < 4 \Leftrightarrow x < 3 .$$

З огляду на область припустимих значень вихідної нерівності (x > -1), остаточний результат $x \in (-1;3)$. Найбільше ціле *x* із цього проміжку x=2**.**

Відповідь. 2.

7. ТРИГОНОМЕТРІЯ

7.1 Основні тригонометричні формули

1 група. Співвідношення між тригонометричними функціями того самого аргументу:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

2 група. Формули додавання:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

3 група. Формули кратних аргументів. Формули подвійного та половинного аргументів.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Використовуючи формули подвійного аргументу, можна записати:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Вибір знаків «+» чи «-» у цих формулах залежить від того, у якій чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$.

4 група. Добуток тригонометричних функцій. Сума тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

Використовуючи формули перетворення добутку в суму, одержуємо:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

7.2 Тотожні перетворення тригонометричних виражень

Приклад. Спростити: $\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{\pi}{8}-\cos^4\frac{\pi}{8}\right)$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу різниці квадратів, одержимо:

$$\sqrt{2}\left(\sin^4\frac{\pi}{8}-\cos^4\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)\right)\cdot 1=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-1$$

Відповідь: -1.

Приклад. Обчислити $tg\alpha$, якщо $\cos 2\alpha=-\frac{5}{13}$ і $\alpha\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$.

Розв'язання. Якщо назвати кут 2α аргументом, то кут α варто назвати половинним аргументом. Скориставшись формулою $\cos 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, замість вихідного рівняння будемо мати: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-\frac{5}{13}$.

Звідси $tg^2\alpha=\frac{9}{4}$, тобто $tg\alpha=\frac{3}{2}$ чи $tg\alpha=-\frac{3}{2}$.

З врахуванням того, що $\alpha\in\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$, маємо $tg\alpha=\frac{3}{2}=1{,}5$.

Відповідь: 1,5.

7.3 Тригонометричні рівняння

Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння вигляду $\sin x = a$, (де $|a| \le 1$), $\cos x = a$, (де $|a| \le 1$), $tgx = a$, (де $-\infty < a < +\infty$), $ctgx = a$, (де $-\infty < a < +\infty$).

Рішення цих рівнянь мають наступний вигляд:

$\sin x = a, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z;$

$\cos x = a, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z;$

$tgx = a, x = arctga + \pi n, n \in Z;$

$ctgx = a, x = arcctga + \pi n, n \in Z.$ (Z – безліч цілих чисел).

Рішення тригонометричних рівнянь при $a = 0$ і $a = \pm 1$ доцільно запам'ятати:

$\sin x = 0, x = \pi n, n \in Z;$

$\sin x = 1, x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

$\sin x = -1, x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

$\cos x = 0, x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z;$

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$

$tgx = 0, x = \pi n, n \in Z.$

Приклад. Розв’язати рівняння

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \ .$$

Розв’язання. Використовуючи формули, одержимо:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0; \quad 2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

Позначаючи $\sin x = a$, одержимо квадратне рівняння $2a^2 - 5a + 2 = 0$, звідки $a_1 = \dfrac{1}{2}; a_2 = 2.$

Переходячи до змінної x, одержимо два рівняння: $\sin x_1 = \dfrac{1}{2}$ і $\sin x_2 = 2.$

Рішення цих рівнянь $x_1 = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{2} + \pi n, n \in Z; \quad x_2 \in \varnothing.$

Відповідь. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x.$$

Розв'язання. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$ Це однорідне тригонометричне рівняння другого степеня. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x$. Це можна зробити, тому що множина значень х, що задовольняє рівнянню $\cos x = 0$, не являється рішенням даного рівняння.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

$$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0.$$

Виконуючи заміну $tgx = a$, маємо $a^2 - 2a - 3 = 0$, звідки $a_1 = -1; a_2 = 3.$
Таким чином, $tgx_1 = -1$ чи $tgx_2 = 3.$
Рішення цих рівнянь мають вигляд:

$x_1 = arctg(-1) + \pi n, n \in Z,$ чи $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$;

$x_2 = arctg3 + \pi k, k \in Z.$

Відповідь. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x_2 = arctg3 + \pi k, k \in Z.$

8. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

8.1 Приріст функції в точці. Диференціал функції

1. Кінцевий приріст аргументу.

Величина, яка визначається формулою:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \tag{8.1}$$

x_1 - початкове значення аргументу («початок»); x_2 - кінцеве значення аргументу («кінець»); Δx – кінцевий приріст аргументу (читати: «дельта ікс»).

Кінцівка приросту аргументу означає, що величина Δx є дійсним числом $(\Delta x \in R)$, тобто її можна записати у вигляді десяткового дробу. Зазвичай $\Delta x << 1$ (читати: «набагато менше»).

2. Кінцевий приріст функції $y = f(x)$ в точці $x = x_1$.

Якщо $y_1 = f(x_1)$ - значення функції в точці x_1, а $y_2 = f(x_2)$ - значення функції в точці x_2 і $x_2 = x_1 + \Delta x$ то величина:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \tag{8.2}$$

називається *приростом функції*.

Приклад. Знайдіть приріст функції $y = x^2$ в точці $x = 2$, якщо приріст аргументу $\Delta x = 0,5$.

Рішення. Застосуємо формулу (8.2), в якій:

$y = f(x) = x^2;\ x_1 = 2;$

$\Delta x = 0,5 : \Delta\left(x^2\right) = x^2\,|_{x=2+0,5} - x^2\,|_{x=2} = (2+0,5)^2 - 2^2 = 2,25.$

3. Безкінечно маленький приріст аргументу.

Якщо приріст аргументу прагне (наближається) до нуля: $\Delta x \to 0$ (читати: «дельта x прагне до нуля»), то це означає, що приріст аргументу є нескінченно маленьким. Якщо $\Delta x \to 0$, то нескінченно маленький приріст аргументу позначатимемо dx (читати: «де ікс») і називатимемо диференціал аргументу.

Нескінченно маленьку величину неможливо записати у вигляді десяткового дробу, тобто: $dx \notin R$, але в загальному випадку $dx \neq 0$. Щоб підкреслити нескінченну мізерність величини dx, писатимемо так: $dx = [0]$.

Якщо якась величина ε є нескінченно маленькою, то символічно цей факт записуватимемо так: $\varepsilon = [0]$.

4. Нескінченно маленький приріст функції. Диференціал функції.

Якщо в точці $x = x_1$ аргумент функції $y = f(x)$ має нескінченно маленький приріст: $x_2 = x_1 + dx$, тоді приріст функції можна записати так (див. формулу (8.2)):

$$\Delta y = \Delta f(x_1) = f(x_1 + dx) - f(x_1).$$

Якщо приріст функції $y = f(x)$ є нескінченно маленьким в точці $x = x_1$, тобто: $\Delta y \to 0$, то позначати його будемо $dy(x_1)$:

$$dy(x_1) = f(x_1 + dx) - f(x_1) \tag{8.3}$$

і воно називається диференціалом функції в точці $x = x_1$.

8.2 Похідна функція від функції $y = f(x)$

1. Перша похідна функції $y = f(x)$ в точці $x = x_1$.

Якщо в точці $x = x_1$ існує безкінечно маленький приріст функції (диференціал функції), то число, котре позначається $f^{(1)}(x_1)$, чи $f'(x_1)$, чи $y^{(1)}(x_1)$, чи $y'(x_1)$ і виходить за наступною формулою:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx}\Big|_{dx=0} = \frac{df(x_1)}{dx}\Big|_{dx=0} \tag{8.4}$$

називається першою похідною функції $f(x)$ в точці x_1.

Довідкова інформація.

За допомогою вертикальної межі:

$$\ldots\big|_{x=x_1}$$

позначається дія, яка називається підстановка. Для того, щоб її виконати треба у вираз, який знаходиться зліва від вертикальної межі підставити замість x його значення x_1.

Наприклад, $(3x+4)\big|_{x=-2} = 3\cdot(-2)+4 = -2$.

Приклад . Знайдіть похідну функції $y = x^2$ в точці $x = 3$.

Рішення: Запишемо диференціал функції в точці $x = 3$.

$$d\left(x^2\right)\big|_{x=3} = x^2\big|_{x=3+dx} - x^2\big|_{x=3} = (3+dx)^2 - 3^2 = 6dx + (dx)^2$$

Застосуємо формулу (8.4):

$$\left(x^2\right)'\big|_{x=3} = \frac{6dx+(dx)^2}{dx}\bigg|_{dx=0} = (6+dx)\big|_{dx=0} = 6.$$

Зауваження:

а) Якщо диференціал функції в точці $x = x_1$ рівний нулю $df(x_1) = 0$, то це означає, що на відрізку (x_1, x_1+dx) функція $y = f(x)$ не зміниться, тобто $f(x) = const$, $x \in (x_1, x_1+dx)$.

б) Якщо $df(x_1) = 0$, то і перша похідна функції в цій точці $f'(x_1) = 0$.

в) Швидкість зміни функції $y = f(x)$ на відрізку $x \in (x_1; x_1+\Delta x)$ визначається так:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \quad (8.5)$$

г) Швидкість зміни функції $y = f(x)$ в точці $x = x_1$ визначається так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_1+dx) - f(x_1)}{dx}\bigg|_{dx=0} = f'(x_1). \quad (8.6)$$

2. Якщо при обчисленні похідної не фіксувати точку $x = x_1$, а вважати, що $x \in D(y)$ ($D(y)$ - це область визначення функції), тоді формулу (8.4) треба записати так:

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\bigg|_{dx=0} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (8.7)$$

Приклад. Знайдіть першу похідну функції $y = x^3$.

Рішення. Застосуємо формулу (8.7):

$$\left(x^3\right)' = \frac{\left(x+dx\right)^3 - x^3}{dx}\Big|_{dx=0} = \frac{x^3 + 3x^2 dx + 3x\left(dx\right)^2 - x^3}{dx}\Big|_{dx=0} =$$

$$= 3x^2 + 3x \cdot dx\Big|_{dx=0} = 3x^2.$$

8.3.Алгоритм обчислення похідної складної функції

1. Проста функція.

Якщо у визначенні функції $f\left(x\right)$ використовується тільки одна операція, то таку функцію називатимемо простою.

Наприклад:

а) $f(x) = x^2$ - у визначенні цієї функції використовується тільки одна операція – зведення в квадрат: $f = \left\{\exp 2\right\}$.

б) $f(x) = 2^x$ - у визначенні цієї функції використовується тільки одна операція – потенціювання за основою 2: $f = \left\{\exp_2\right\}$.

в) $f(x) = \sqrt{x}$ - у визначенні цієї функції використовується тільки одна операція – витягання кореня другого ступеня (квадратного): $f = \left\{\sqrt{\ }\right\}$.

2. Таблиця похідних простих функцій.

Використовуючи визначення (4) з 8.2 можна вирахувати похідні всіх простих функцій. Результати цих обчислень приведені в таблиці (дод. 2).

3. Складна функція.

Якщо у визначенні функції $y = f\left(x\right)$ використовується більше однієї операції, то така функція називається складною. Операції виконуються в певному порядку. Якщо кожну операцію позначати буквою L_i, де $i = 1,2,3...,n$, то складну функцію $y = f\left(x\right)$ символічно можна записати так:

$$y = f\left(x\right) \Rightarrow y = L_n\left(L_{n-1}\left(...L_2\left(L_1\left(x\right)\right)\right)\right).$$

Наприклад, у функції $y = f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1}$ виконуються три операції:

$L_1 = x^2 = "exp2"$ - операція піднесення до ступеня два;

$L_2 = "+"$ - операція складання;

$L_3 = "\sqrt{\ }"$ - операція здобування кореня квадратного.

Причому виконуються вони в наступному порядку: першою виконується операція L_1, другою - L_2 і останньою – операція L_3. Тому, функцію $f\left(x\right)$ символічно можна записати так:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2+1} = L_3\left(L_2\left(L_1(x)\right)\right).$$

Тоді, функцію $y = f(x)$ можна записати так: $y = L_1\left(L_2\left(L_3(x)\right)\right)$.

4. Складна функція з виділеною останньою операцією.

Якщо складну функцію $y = f(x)$ записати так: (див. 3):

$$y = f(x) = L_n\left(L_{n-1}\left(...L_2\left(L_1(x)\right)\right)\right), \tag{8.8}$$

тоді останньою дією (операцією) є дія Ln. Якщо всі операції $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ позначити через u, тоді складну функцію $y = f(x)$ можна записати так:

$$y = f(x) = L_n\left(u(x)\right). \tag{8.9}$$

Таку форму запису складної функції називатимемо складною функцією з виділеною останньою операцією. Наприклад, запишемо функцію $y = \sqrt{x^2+1}$ (див. приклад з (3)) з виділеною останньою операцією:

$$y = \sqrt{u(x)}; u(x) = x^2 + 1.$$

Якщо у визначенні складної функції $y = f(x)$ останньою операцією є яка-небудь арифметична операція (складання, множення, віднімання, ділення), то виділяючи цю операцію записуватимемо функцію $y = f(x)$ так:

$$y = f(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = u(x) + v(x); & (a) \\ y = v(x) \cdot v(x); & (б) \\ y = u(x) - v(x); & (в) \\ y = \dfrac{u(x)}{v(x)}. & (г) \end{array}\right.$$

Наприклад:

$$1. y = x^2 + \sin 5x \Rightarrow y = u(x) + v(x); \left[\begin{array}{l} u(x) = x^2; \\ v(x) = \sin 5x; \end{array}\right.$$

$$2. y = tgx \cdot \ln 3x \Rightarrow y = u(x) \cdot v(x); \left[\begin{array}{l} u = tgx; \\ v(x) = \ln 3x; \end{array}\right.$$

$$3. y = 2^{4x} - arctg7x \Rightarrow y = u(x) - v(x); \left[\begin{array}{l} u(x) = 2^{4x}; \\ v(x) = arctg7x; \end{array}\right.$$

$$4. y = \frac{(x+1)^3}{\cos 4x} \Rightarrow y = \frac{u(x)}{v(x)}; \left[\begin{array}{l} u = (x+1)^3; \\ v(x) = \cos 4x; \end{array}\right.$$

Приклад. Запишіть функцію $f(x)=\left(\cos\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^4$ з виділеною останньою операцією.

Рішення. Задана функція визначається за допомогою чотирьох операцій: складання, здобуття кореня квадратного, операції «косинус» і операції зведення до четвертої степені. Порядок виконання цих операцій наступний: перша (L_1) - «здобуття кореня квадратного»;

друга (L_2) - «складання»;

третя (L_3) - «косинус»;

четверта (L_4) - зведення до четвертої степені.

Тому, задану функцію символічно можна записати так

$$f(x)=\left(\cos\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^4=L_4\left(L_3\left(L_2\left(L_1(x)\right)\right)\right)=\left(u(x)\right)^4,$$

де

$$u(x)=L_3\left(L_2\left(L_1(x)\right)\right)=\cos\left(1+\sqrt{x}\right).$$

5. Обчислення похідної складної функції: «правило останньої дії».

Якщо в складній функції $y=f(x)$ виділити останню операцію Ln (дія) і записати функцію так:

$$y=f(x)=L_n\left(u(x)\right)$$

(див. формулу (8.9) в (4)), тоді для похідної функції $y=f(x)$ має місце формула:

$$y'=f(x)=L_1'(u)\cdot u'(x) \tag{8.10}$$

Приклад . Знайдіть першу похідну функції $y=\sin\left(x^2\right)$.

Рішення.

1. Запишемо цю функцію з виділеною останньою операцією: $y=\sin u$, де $u=x^2$. Остання операція – це "sin". Тоді, застосовуючи формулу (8.10), отримаємо:

$$y'=\left(\sin\left(x^2\right)\right)'=(\sin u)'\cdot\left(x^2\right)'.$$

2. Кожна з функцій: $\sin u$ і x^2 є простий, оскільки над аргументом u виконується одна операція, а над аргументом x виконується одна операція $\exp_x 2$ - зведення в квадрат. Використовуючи таблицю (дод. 2), отримаємо:

$$(\sin u)' = \cos u, \left(x^2\right)' = 2x \Rightarrow \left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2 .$$

6. Алгоритм обчислення похідної складної функції.

Якщо $y = f(x)$ - складна функція, то для обчислення похідної функції y' треба:

1. Записати цю функцію з виділеною останньою операцією:

$$y = f(x) = L_n(u(x)), \tag{8.11}$$

де Ln - це остання операція (дія), а $u(x)$ - це все інші операції.

2. Застосувати формулу (8.10):

$$y' = L_1'(u) \cdot u'(x). \tag{8.12}$$

Функція $L_1(u)$ - завжди проста – над аргументом u виконується одна операція L_1, тому значення похідної $L_1'(u)$ можна знайти в таблиці (дод. 2)

3. Записати вираз для $L_1'(u)$ за допомогою таблиці (дод. 2).

4. Якщо $u(x)$ - це проста функція, то за допомогою таблиці (дод. 2) записати вираз $u'(x)$ і тоді формула (8.12) – відповідь.

5. Якщо $u(x)$ - це складна функція, тоді треба записати цю функцію з виділеною останньою операцією:

$$u(x) = L_2(v(x)),$$

де L_2 - це остання операція, а $v(x)$ - всі інші операції.

6. Застосувати формулу (8.10):

$$u'(x) = L_2'(v) \cdot v'(x)$$

7. Якщо $L_2(v)$ - це проста операція.

8.4. Дослідження функції за допомогою похідної

Монотонність функції

Якщо із збільшенням аргументу x від a до b значення функції $y = f(x)$ або тільки збільшуються, або тільки зменшується на інтервалі $(a;b)$, то функція $f(x)$ є монотонною на цьому інтервалі. У першому випадку функція $f(x)$ монотонно зростає; у другому, - монотонно спадає.

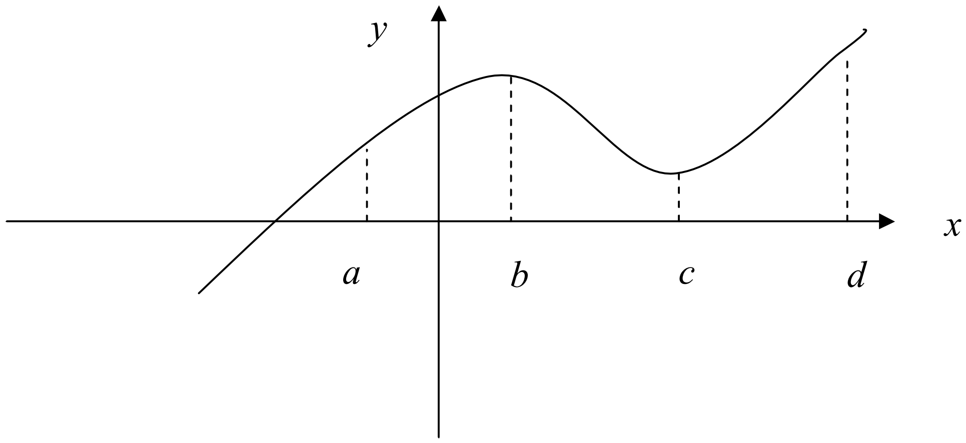


Рис 8.1

Наприклад, на малюнку 8.1, функція монотонно зростає на інтервалах: $(a;b)$ і $(c;d)$; а на інтервалі $(b;c)$ функція монотонно спадає.

Умова монотонності функції

Для того, щоб знайти інтервали, на яких функція $f(x)$ є монотонною, треба вирішити нерівності:

$$f'(x) > 0, \tag{8.13}$$

або

$$f'(x) < 0. \tag{8.14}$$

У разі (8.13) рішення нерівності визначають значення аргументу, на яких функція $f(x)$ монотонно зростає. Позначається так: $(\nearrow)$. У випадку (8.14) – значення *x*, на яких функція монотонно спадає. Позначається: $(\searrow)$.

Приклад. Знайдіть відрізки монотонності функції $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 2x^2 + 1$.

Рішення. Використовуючи нерівність (8.13), знайдемо відрізки монотонного зростання функції:

$$(\nearrow) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1\right)' > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$$

При решті всіх значень x функція монотонно убуватиме: $(\searrow)$ $\Rightarrow x \in (0;2)$. Нерівність (8.14) можна не вирішувати.

Критичні точки функції.

Значення аргументу x функції $f(x)$, при яких виконується рівність:

$$f'(x) = 0 \tag{8.15}$$

називаються *критичними точками першого типу* функції.

Приклад. Знайдіть критичні точки першого типу функцій:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3 \tag{8.16}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-2 \tag{8.17}$$

Рішення.

8.16 Використовуємо визначення критичних точок першого типу (8.15):

$$f'(x)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3\right)'=0\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0;\\ x_2=1;\\ x_3=-1.\end{array}\right.$$

Функція (8.16) має три критичні точки першого типу:
$x_1=0, x_2=1, x_3=-1$.

8.17 $f'(x)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{3}x^3+x-2\right)'=0\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x\in\varnothing$.

Управління (8.15) для функції (8.17) не має рішень, тому у цієї функції критичних точок першого типу немає.

Критичні точки другого типу визначаються наступною умовою:

$$f''(x)=0. \tag{8.18}$$

Приклад. Знайдіть критичні точки другого типу функцій (8.19) і (8.20) з попереднього прикладу .

Рішення.

$$f''(x)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3\right)''=0\Rightarrow\left(\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+3\right)'\right)'=0\Rightarrow \tag{8.19}$$

$$\Rightarrow\left(x^3-x\right)'=0\Rightarrow 3x^2-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_4=\frac{1}{\sqrt{3}};\\ x_5=-\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{array}\right.$$

Функція (8.19) має дві критичні точки другого типу: $x_4=\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $x_5=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$f''(x)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3+x-2\right)''=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\left(\frac{1}{3}x^3+x-2\right)'\right)'=\left(x^2+1\right)'=2x=0\Rightarrow x_6=0 \tag{8.20}$$

Функція (8.20) має одну критичну точку другого типу: $x_6=0$.

Увігнутість і опуклість функції.

Якщо для функції $f(x)$ виконується нерівність:

$$f''(x)>0 \tag{8.21}$$

для значень $x\in(b;d)$, то при цих значеннях аргументу функція є увігнутою. Позначається – $(\cup)$.

Якщо ж має місце нерівність:

$$f''(x)<0 \tag{8.22}$$

для $x\in(a;b)$, то функція – опукла. Позначається - $(\cap)$.

Приклад. Знайдіть інтервали опуклості і угнутості функції:

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3+5x-3.$$

Рішення. Інтервали опуклості і угнутості функції $f(x)$ визначаються нерівностями функції $f(x)$ визначаються нерівністю (8.21) і (8.22). Вирішимо нерівність (8.21):

$$f''(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3+5x-3\right)''=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+5\right)'=$$
$$=x^2-x>0\Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty).$$

При цих значеннях x функція – увігнута, а при всіх останніх: $x\in(0;1)$ - опукла $(\cap)$.

Точки перегину функції

Значення аргументу, при яких змінюється характер (властивість) опуклості, називаються точками перегину.

Точки перегину визначаються наступними умовами. По-перше

$$f''(x)=0, \tag{8.23}$$

тобто – це критичні точки другого типу (див. формулу (8.18)). По-друге, якщо x_1 - це точка перегину, то при $\varepsilon>0$

$$\begin{cases} f''(x_1+\varepsilon)>0, \\ f''(x_1-\varepsilon)<0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f''(x_1+\varepsilon)<0, \\ f''(x_1-\varepsilon)>0, \end{cases} \tag{8.24}$$

тобто зліва і праворуч від точки $x = x_1$ друга похідна повинна мати різні знаки.

Приклад. Знайдіть точки перегину функції:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3$$

Рішення. Знайдемо критичні точки другого типу:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3\right)'' = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)' = x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2.$$

Критична точка другого типу одна: $x = -2$.
Визначимо знаки $f''(x)$ справа і зліва від крапки $x_1 = -2$:

$$f''(-3) = -3 + 2 = -1 < 0; f''(-1) = -1 + 2 = 1 > 0.$$

Умова (8.24) виконано – точки $x = -2$ - це точки перегину.

Правила диференціювання

Нехай С – стала, *u*, *v* – функції. Тоді

$$(Cu)' = Cu'$$
$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x_0),$$

де $(x_0; y_0)$ - точка дотику, $f'(x)$ - кутовий коефіцієнт дотичної.

Приклад. Обчислити значення похідної функції

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2 \quad \text{при} \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

Розв'язання. Скориставшись правилами диференціювання, одержимо:

$$f'(x) = \left(\sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2\right)' = \left(\sqrt{3}\sin x\right)' + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)' - \left(\frac{3}{\pi}x^2\right)'.$$

Застосовуючи формули, одержимо:

$$f'(x) = \sqrt{3}\cos x + 0 - \frac{3}{\pi}2x = \sqrt{3}\cos x - \frac{6}{\pi}x.$$

Обчислимо значення похідної у точці $x = \frac{\pi}{6}$.

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Приклад . Знайти точки екстремуму функції

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 - 5.$$

Розв'язання. Для знаходження точок екстремуму функції необхідно знайти похідну $f'(x)$ і значення x, у яких вона дорівнює нулю:

1) $f'(x) = \left(\frac{x^5}{5} - x^4 - 5\right)' = \frac{5}{5}x^4 - 4x^3 - 0 = x^4 - 4x^3.$

2) $x^4 - 4x^3 = 0, x^3(x-4) = 0.$

Одержане рівняння має два корені $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$. Це і є критичні точки. Визначимо знак похідної праворуч і ліворуч від точки $x_1 = 0$. Для цього обчислимо: $f'(-1) = (-1)^3 \cdot (-1-4) = 5;$ $f'(1) = (1)^3 \cdot (1-4) = -3.$

Отже, при переході через точку $x_1 = 0$ знак похідної міняється з «+» на «-», тобто точка $x_1 = 0$ - точка максимуму. Провівши такий самий аналіз для $x_2 = 4$, легко переконатися, що це точка мінімуму.

Відповідь. $x_{\max} = 0;$ $x_{\min} = 4.$

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x + \frac{3}{2}$$

на відрізку [-1;2].

Розв'язання. Функція досягає свого найбільшого чи найменшого значення на відрізку або в точках екстремуму, або на кінцях цього відрізка.

1) Знайдемо значення функції на кінцях відрізка [-1;2]:

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{2} - 2(-1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4;$$

$$f(2) = \frac{2^4}{2} - 2\cdot 2 + \frac{3}{2} = 8 - 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

2) Далі знайдемо похідну даної функції і прирівняємо її нулю:

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{2}-2x+\frac{3}{2}\right)'=\frac{4x^3}{2}-2=2x^3-2,$$

$2x^3-2=0, x^3-1=0, x=1.$

3) Обчислимо значення заданої функції у цій точці x = 1:

$$f(1)=\frac{1^4}{2}-2\cdot 1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}=0$$

Найбільше значення функції дорівнює $\frac{11}{2}$ при x=2, а найменше дорівнює 0 при x=1 .

Відповідь. $f_{\max}=\frac{11}{2}; f_{\min}=0.$

Приклад. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{3x^2+2}{x-1}$ в точці його перетинання з віссю ординат.

Розв'язання. 1) Рівняння дотичної відповідно до формули записується у вигляді $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, де $(x_0;y_0)$ - точка дотику.

Абсциса x_0 точки перетинання графіка заданої функції з віссю OY дорівнює 0, а ордината

$$y_0=f(0)=\frac{3\cdot 0^2+2}{0-1}=-2.$$

Таким чином, точка дотику (0;-2).

2) Знайдемо похідну заданої функції в точці x_0. Використовуючи правила і формули диференціювання, одержимо:

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2+2}{x-1}\right)'=\frac{(3x^2+2)'(x-1)-(3x^2+2)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2x(x-1)-(3x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{6x(x-1)-3x^2-2}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^2}.$$

3) У точці x_0=0 маємо

$$f'(0)=\frac{3\cdot 0^2-6\cdot 0-2}{(0-1)^2}=-2.$$

4) Рівняння дотичної має вигляд

$$y-(-2)=-2(x-0),\quad \text{чи} \quad y+2=-2x, y=-2x-2.$$

Відповідь. $y=-2x-2.$

9 ПРОГРЕСІЇ

9.1 Арифметична прогресія

Числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, складеному з деяким числом, називається арифметичною прогресією. Таким чином, $a_{n+1} = a_n + d$, де a_n і a_{n+1} відповідно n і $n+1$-й члени прогресії; d - різниця арифметичної прогресії.

Ця формула незручна тим, що для обчислення $n+1$-го члена необхідно знати всі попередні члени прогресії. Формула n-го члена у вигляді

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

позбавлена зазначеного недоліку.

Сума членів арифметичної прогресії визначається по наступних формулах:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \quad \text{чи} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Ознака арифметичної прогресії формулюється так: кожен член арифметичної прогресії, починаючи з другого, являється середнім арифметичним сусідніх з ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

9.2 Геометрична прогресія

Числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на деяке відмінне від нуля постійне число, називається геометричною прогресією. Таким чином, $b_{n+1} = b_n q$ **,** де b_n і b_{n+1} відповідно n і $n+1$-й члени прогресії; q - знаменник геометричної прогресії, $q \neq 0$.

Ця формула незручна тим, що для обчислення n-го члена необхідно знати всі попередні члени прогресії. Формула

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

позбавлена зазначеного недоліку.

Сума n перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Ознака геометричної прогресії має наступне формулювання: кожен член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнє геометричне сусідніх з ним членів:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \ .$$

Геометрична прогресія, у якої $|q| < 1$, називається нескінченно спадною, а її сума визначається за формулою

$$S = \frac{b_1}{1-q} \ .$$

Приклад. Знайти суму всіх двозначних додатних чисел.

Розв'язання. Очевидно, що ці числа утворюють арифметичну прогресію, у якій

$$a_1 = 10; d = 1; a_n = 99 .$$

Для обчислення суми прогресії необхідно знайти n:

$$a_n = a_1 + d(n-1), 99 = 10 + n - 1, n = 90.$$

Звідси

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905.$$

Відповідь. 4905.

Приклад. Визначити, при яких x три числа a_1, a_2, a_3, узяті в зазначеній послідовності, утворюють арифметичну прогресію, якщо

$$a_1 = \lg 2; a_2 = \lg(3^x - 3); a_3 = \lg(3^x + 9).$$

Розв'язання. Якщо числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію, то для них виконується ознака арифметичної прогресії:

$$\lg(3^x - 3) = \frac{\lg 2 + \lg(3^x + 9)}{2}, \quad \lg(3^x - 3)^2 = \lg 2(3^x + 9),$$

$$(3^x - 3)^2 = 2(3^x + 9).$$

Нехай $3^x = y$, тоді $(y-3)^2 = 2(y+9)$, чи $y^2 - 8y - 9 = 0$, звідки $y_1 = 9; y_2 = -1$ (не підходить).

Переходячи до змінної *x*, маємо $3^x = 9, \quad x = 2.$

Відповідь. 2.

Приклад. Обчислити $32 - \frac{96}{5} + \frac{288}{25} - \frac{864}{125} + \ldots$

Розв'язання. Для даної послідовності чисел виконується ознака геометричної прогресії:

$$\left(-\frac{96}{5}\right)^2 = 32 \cdot \frac{288}{25},$$

тому дана послідовність є геометричною прогресією, у якої

$$b_1 = 32; q = -\frac{3}{5}.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Звідси $S = 20$.
Відповідь. 20.

10. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

Приклад 10.1. Метелик і муха рухаються по прямій. Метелик доганяє муху, їхні швидкості дорівнюють 1,2 м/с і 30 см/с. Через скільки секунд відстань між комахами скоротиться з 6,5 м до 20 см?

Розв'язання. Відносна швидкість зближення дорівнює різниці їхніх швидкостей: $v = 1{,}2 - 0{,}3 = 0{,}9$ м/с. Відстань, яку треба скоротити комахам, дорівнює різниці відстаней у початковий і кінцевий моменти часу:

S = 6,5-0,2=6,3 м.

Отже, час, що нас цікавить, дорівнює $S / v = 6{,}3 / 0{,}9 = 7$ с.
Відповідь. 7 с.

Приклад 10.2. Вісімнадцятивідсотковий розчин солі масою 2 кг розбавили склянкою води (0,25 кг). Якої концентрації розчин у відсотках у результаті був отриманий?

Розв'язання. Знайдемо, скільки солі знаходиться у 2 л розчину. Для цього складемо пропорцію:

2 кг - 100%,
x солі - 18%

Отже, $x = \frac{2 \cdot 18}{100} = 0{,}36$.

Після додавання склянки води одержали розчин масою Р=2+0,25=2,25 кг. Відсотковий зміст солі - це та частина, що складають 0,36 кг солі в загальній кількості розчину (2,25 кг), помножена на 100.

Отже, шукана величина дорівнює $\frac{0{,}36 \cdot 100}{2{,}25} = 16\%$.

Відповідь. 16%.

11. ГЕОМЕТРІЯ

В останньому параграфі розглянемо декілька прикладів розв'язування задач з геометрії.

Приклад. В прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола поділяє гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайти катети трикутника.

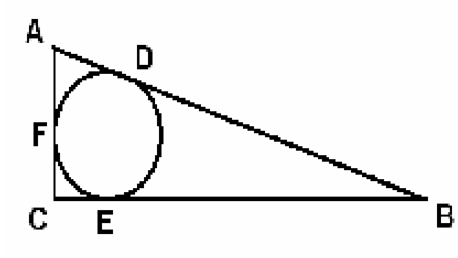


Рис. 11.1

Розв'язання. В ΔABC (рис. 11.1) кут C - прямий, AD=5 см, DB=12 см, E і P – точки дотику вписаного кола і відповідних катетів.
AD=AF, BD=BE, FC=EC по властивості дотичних до кола, проведених з однієї точки. Нехай EC=x, тоді за теоремою Піфагора для ΔABC можна записати

$$(5+x)^2+(12+x)^2=(5+12)^2,\quad x_1=3;\quad x_2=-20 \text{ (не підходить)}.$$

Отже, AC==5+3=8 см, BP=12+3=15 см.

Відповідь. 8 см, 15 см.

Приклад. Середня лінія рівнобічної трапеції, описаної біля кола, дорівнює 68 см. Визначити радіус цього кола, якщо нижня основа трапеції більше верхньої на 64 см.

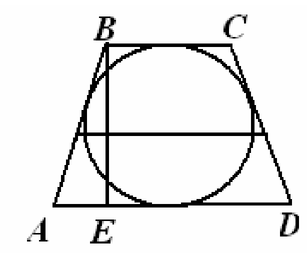


Рис. 11.2

Розв'язання. Якщо креслення виконане неакуратно, то може здаватися, що середня лінія трапеції являється діаметром кола. З рисунка 11.2 видно, що це не так.

$$\frac{BC + AD}{2} = 68$$ по властивості середньої лінії трапеції.

$AD - BC = 64$ за умовою.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержуємо AD=100, BC=36.

За властивістю описаного чотирикутника AB+CD=BC+AD.

Завдяки тому, що AB=CD, одержимо $AB = \dfrac{BC + AD}{2}$, чи AB=68.

Розглянемо прямокутний трикутник ABE $(BE \perp AD)$. Завдяки тому, що трапеція рівнобічна, одержимо $AE = \dfrac{AD - BC}{2} = 32$.

По теоремі Піфагора для ΔABE маємо $AB^2 = AE^2 + BE^2$.

Звідси $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$.

Знаючи, що BE=2R, маємо R=30.

Відповідь. 30 см.

Приклад. Висота конуса складає $\frac{2}{3}$ від діаметра його основи. Знайти відношення площі основи конуса до площі його бічної поверхні.

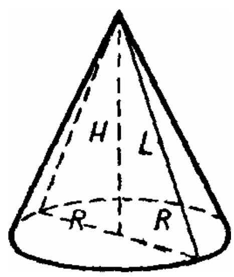


Рис. 11.3

Розв'язання. Площа основи конуса $S_{осн} = \pi R^2$. Площа бічної поверхні конуса $S_{бічн.пов.} = \pi RL$, де L – довжина твірної (рис. 11.3). За теоремою Піфагора

$$L^2 = H^2 + R^2; H = \frac{2}{3} \cdot 2R = \frac{4}{3} R.$$

Звідси $L = \sqrt{\dfrac{16}{9} R^2 + R^2} = \dfrac{5}{3} R$. Отже, конус має $S_{бічн.пов.} = \pi R \cdot \dfrac{5}{3} R = \dfrac{5}{3} \pi R^2$.

Відношення, що необхідно знайти:

$$\frac{\pi R^2}{\frac{5}{3} \pi R^2} = \frac{3}{5} = 0,6 \ .$$

Відповідь. 0,6.

ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Завдання до контрольної роботи № 1

Обчислити:

101. $$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$$

102. $$\left(6 - 4 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4}$$

103. $$\frac{(0{,}6)^{0} - (0{,}1)^{-1}}{\left(\frac{3}{2^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$$

Спростити вираз:

104. $$\left(\frac{1}{n-8} - \frac{n}{n^2 - 64}\right) : \frac{8n}{n^2 - 16n + 64} - \frac{2}{n+8}$$

105. $$\frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3 - 18a}{4a^2 + 9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2 - 12a + 9} - \frac{3}{4a^2 - 9}\right)$$

106. $$\frac{1}{3b-1} - \frac{27b^3 - 3b}{9b^2 + 1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2 - 6b + 1} - \frac{1}{9b^2 - 1}\right)$$

Спростити вираз:

107. $$\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} - 3\right)^2}$$

108. $$\sqrt{\left(\sqrt{6} - 3\right)^2} + \sqrt{\left(2 - \sqrt{6}\right)^2}$$

109. $$\sqrt{\left(8 - \sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(2 - \sqrt{7}\right)^2}$$

У завданнях 110-112 використати поняття арифметичної прогресії:

110. Знайти суму всіх тризначних чисел, кратних 7.

111. Знайти суму всіх тризначних чисел, кратних 8.

112. Знайти суму всіх тризначних чисел, кратних 9.

Завдання до контрольної роботи № 2

Знайти область визначення функції:

113. $$y=\sqrt{9-8x-x^2}+\frac{x+3}{x^2-2x}$$

114. $$y=\sqrt{12+4x-x^2}-\frac{x-5}{x^2+3x}$$

115. $$y=\sqrt{48+2x-x^2}+\frac{4}{x^2-36}$$

Розв'язати рівняння:

116. $$\frac{x}{x+8}+\frac{x+8}{x-8}=\frac{x^2+x+72}{x^2-64}$$

117. $$\frac{x}{x-6}+\frac{x-1}{x+6}=\frac{54-5x}{x^2-36}$$

118. $$\frac{14x^2}{16-x^2}+\frac{11}{x-4}=\frac{49}{x+4}$$

Розв'язати систему нерівностей:

119. $$\begin{cases}(x+1)(x^2-x+1)-x(x^2+4)\ge 9,\\ \dfrac{x-3}{5}<\dfrac{x+5}{3}.\end{cases}$$

120. $$\begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)-x(x^2+5)\ge 4,\\ \dfrac{x-2}{7}<\dfrac{x+1}{4}.\end{cases}$$

121. $$\begin{cases}(x+3)(x-3)-4x<x^2-7x+3,\\ \dfrac{5x+3}{2}-1\ge 3x.\end{cases}$$

Розв’язати систему рівнянь:

122. $$\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ xy + y^2 = 15. \end{cases}$$

123. $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

124. $$\begin{cases} x^2 - xy = -2, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

Розв’язати нерівність:

125. $$\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$$

126. $$\frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$$

127. $$\frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 + |x| - 6} \geq 0$$

Завдання до контрольної роботи № 3

Розв’язати рівняння:

128. $$x - \sqrt{x+1} = 5$$

129. $$\sqrt{23 - x} = x - 3$$

130. $$\sqrt{x + 78} - x = 6.$$

Розв’язати нерівність:

131. $$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$$

132. $$x + 4 < \sqrt{-x^2 - 8x - 12}$$

133. $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$

Спростити вираз:

134. $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}$.

135. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cos\beta}$.

136. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$.

Розв'язати рівняння :

137. $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$.

138. $1+\cos 8x=\cos 4x$.

139. $1-\cos 8x=\sin 4x$.

Розв'язати рівняння :

140. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x=(\sqrt{3}-1)\cos^2 x+1$

141. $4+2\sin^2 x=(3+\sqrt{3})\sin 2x+2(2-\sqrt{3})\cos^2 x$

142. $4\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} 2x}=5$

Завдання до контрольної роботи № 4

Обчислити значення виразу:

143. $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}2}$

144. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1/2}+2^{\log_2 5-1}$

145. $4^{0,75}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}+\log_{0,5}\sqrt{2}$

Розв'язати рівняння :

146. $25\cdot 9^{x}-34\cdot 15^{x}+9\cdot 25^{x}=0$.

147. $4\cdot 9^{2x}-3\cdot 4^{2x}-4\cdot 36^{x}=0$.

148. $2^{2x+1}+3^{2x+1}=5\cdot 6^{x}$

Розв'язати рівняння :

149. $3^{\frac{1}{2}+\log_3\cos x}+6^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}+\log_9\sin x}$

150. $5^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}+\log_5\sin x}=15^{\frac{1}{2}+\log_{15}\cos x}$

151. $2-6^{\frac{1}{2}+\log_6\sin x}=2^{\frac{1}{2}+\log_2\cos x}$

Завдання до контрольної роботи № 5

Розв'язати рівняння :

152. $\log_2\left(\frac{1}{|x-1|-1}\right)=1$.

153. $\log_2(|x+1|-2)=-2$.

154. $\log_3\left(\frac{2}{|x+2|-3}\right)=0$

Розв’язати нерівність:

155. $\log_3\log_{\frac{9}{16}}\left(x^2-4x+3\right)\le 0$

156. $$\log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x - 6\right) \ge 0$$

157. $$\log_{\frac{27}{41}} \log_5 \left(x^2 - 2x - 3\right) \ge 0$$

Розв'язати систему рівнянь:

158. $$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 5^y = 75, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

159. $$\begin{cases} 5^{x-1} \cdot 7^y = \frac{1}{7}, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

160. $$\begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 3^y = 63, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Завдання до контрольної роботи № 6

Дослідити на екстремум функцію:

161. $$y(x) = \sqrt{2x^2 - x + 2}\,.$$

162. $$y(x) = (2x - 1) \cdot e^{3x}\,.$$

163. $$y(x) = \sqrt{1 - 2x + 3x^2}$$

164. Написати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 7 - \frac{1}{3}x^3 + x$ в точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

165. Написати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 1 - x^4$ в точці $x_0 = 2$.

166. Написати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ в точці $x_0 = 2$.

167. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x)=\left|x^2-4\right|$ та прямими $x=-1,\quad x=2,\quad y=0$.

168. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x)=\left|4-x^2\right|$ та прямими $x=1,\quad x=2,\quad y=0$.

169. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x)=\left|9-x^2\right|$ та прямими $x=-1,\quad x=2,\quad y=0$.

Завдання до контрольної роботи № 7

170. Перпендикуляр, опущений з точки кола на його діаметр, ділить діаметр на два відрізки, один із яких на 27 см більший за інший. Знайдіть довжину кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 18 см.

171. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки 20 см і 25 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

172. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а менша бічна сторона - $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 120°.

173. Основою піраміди є ромб із стороною 16 см і гострим кутом 60°. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30°. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.

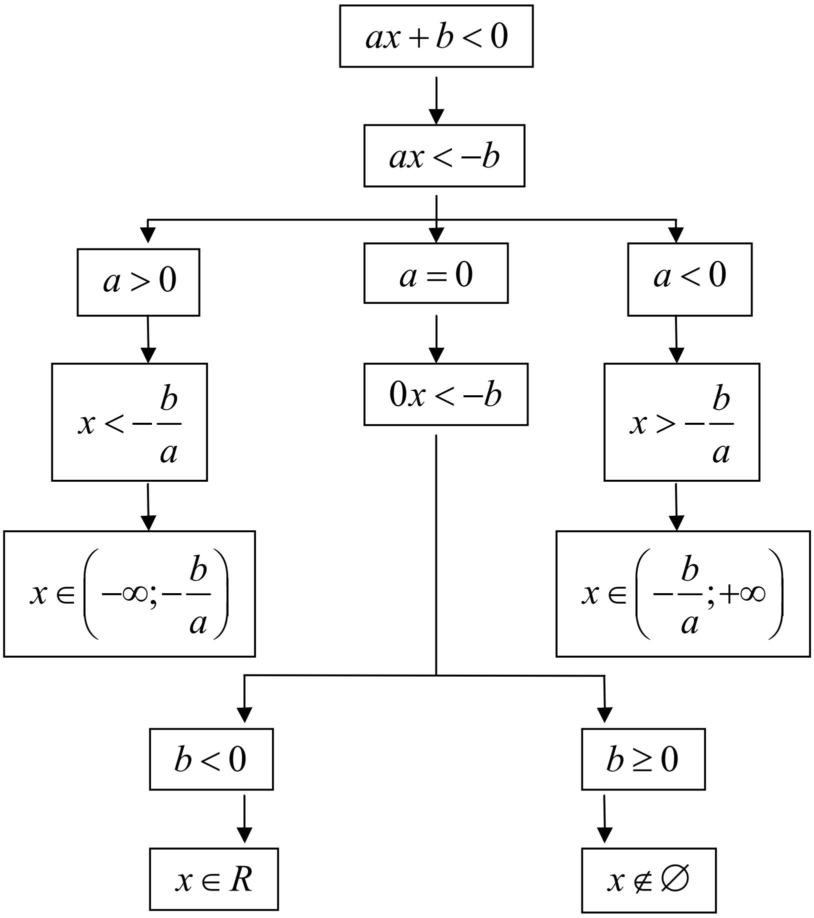
174. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює *a.*

175. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною 20 см і основою 24 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 45°. Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Розв’язання лінійної нерівності



Додаток 2

Таблиця похідних простої функції

1.	$(C)' = 0$
2.	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
2.1	$\left(x^2\right)' = 2x$
3.	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}$
3.1	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
4.	$\left(\sqrt[k]{x^m}\right)' = \left(x^{\frac{m}{k}}\right)' = \frac{m}{k}x^{\frac{m}{k}-1}$
4.1	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4.2	$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
5.	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
5.1	$\left(e^x\right)' = e^x$
6.	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$
6.1	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$
7.	$\left(\sin x\right)' = \cos x$
8.	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
9.	$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\left(\cos x\right)^2}$
10.	$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\left(\sin x\right)^2}$
11.	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$\left(\mathrm{arc\,tg}x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$
14.	$\left(\mathrm{arc\,ctg}x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

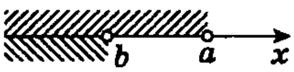
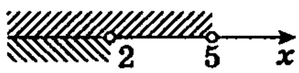
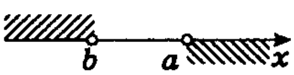
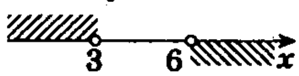
Додаток 3

Системы линейных неравенств с одной переменной

Системы вида: $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases}$ **или** $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ **или** $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ **или** $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x > b_2 \end{cases}$ **называются *системами двух линейных уравнений с одной переменной*. (Вместо знаков >, < могут быть знаки** $\geqslant$, $\leqslant$.)

Чтобы решить систему неравенств, надо каждое неравенство системы решить отдельно, а потом найти решение системы как пересечение множеств решений неравенств.

Возможные случаи решения систем линейных неравенств

Системы линейных неравенств $(a > b)$	Решение и его геометрическая иллюстрация	Пример
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (a; +\infty)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$  $x \in (3; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty; b)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty; 2)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 4 $x \in (b; a)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$  $x \in (1; 4)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 Решений нет	$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$  Решений нет

Література

1. Шкиль н.І., Слепкань з.І. Алгебра і початки аналізу, 10-11 клас. – Київ, «Зодіак-еко», 2003.

2. Погорелов а.В. Геометрія, 7-11 клас. – Москва, «Освіта», 2000.

3. Ськанаві м.І. Збірка завдань по математиці для конкурсних іспитів до вузів. – Москва, «Вища школа», 1997.

4. Мерзляк а.Г., Полонський в.Б. Збірка завдань і завдань для тематичного оцінювання по алгебрі і початкам аналізу (7, 8, 9, 10, 11 клас). – Харків, “Гімназія”, 2005.

5. Мерзляк а.Г., Полонський в.Б. Збірка завдань і завдань для тематичного оцінювання по геометрії (7, 8, 9, 10, 11 клас). – Харків, “Гімназія”, 2005.

6. Нелін Є.П., Долгова О.Є., Алгебра і качани аналізу. – Харків, “Світ дитинства”, 2005.