

СТАЦІОНАРНІ СТАНИ У 1D СИСТЕМІ НЕПРУЖНИХ ЧАСТИНОК

О.І. ГЕРАСИМОВ¹, Н. ВАНДЕВАЛЛЕ¹, А.Я. СПІВАК, М.М. ХУДИНЦЕВ,
Г. ЛЮМЕ¹, С. ДОРБОЛЛО¹, О.А. КЛИМЕНКОВ

УДК 538.9:539.215
© 2008 р.

Одеський державний екологічний університет
(Вул. Львівська, 15, Одеса 65016; e-mail: ogerasimov@paco.net),

¹GRASP, Physics Department, University of Liege
(B-4000 Liege, Belgium)

В одновимірній відкритій системі непружних частинок знайдено умови існування асимптотичних квазістаціонарних станів. Досліджено вплив початкових та зовнішніх умов на структуру таких станів та переходи між ними. Теоретичні та чисельні розрахунки порівнюються з даними проведеного безпосередньо фізичного експерименту. Обговорено можливості застосування методів статистичної фізики до вивчення відкритих систем (зокрема, гранульованих матеріалів) поблизу виявлених квазістаціонарних станів.

ної кластеризації та утворення патернів (дефектів) та інші [1–15].

Складність процесів, що відбуваються у гранульованих матеріалах, спонукає до їх попередніх досліджень за допомогою вивчення динаміки простих модельних систем, де частинки взаємодіють між собою непружно, а дисипація енергії компенсується за рахунок її підведення з боку зовнішніх меж. Безпосередні фізичні експерименти з ГМ вказують на можливість існування в них асимптотичних стаціонарних станів, що, у свою чергу, відкриває можливості застосувань до їх вивчення методів статистичної механіки.

1. Вступ

Протягом двох останніх десятиріч помітно зріс інтерес наукової спільноти до вивчення складних відкритих систем, в яких внаслідок дисипації енергії відбуваються суттєво нелінійні динамічні процеси. До переліку таких систем, безумовно, відносяться і так звані гранульовані матеріали (ГМ). ГМ складаються з великої кількості частинок (гранул), що мають складну морфологію поверхні та дисперсію розмірів. Взаємодія між гранулами відбувається тільки завдяки зіткненням, які носять непружний характер. Тобто ГМ є прикладом відкритої системи, для якої, зокрема, не виконується закон збереження енергії (мається на увазі кінетична енергія відносного руху).

Як у випадку вивчення структури, так у разі досліджень динаміки гранульованих матеріалів роль, яку відіграють контакти проміж частинками-гранулами — є провідною. Так, скажімо напруги у статичному гранульованому середовищі, або хвилі деформації у разі їх динамічної поведінки головним чином відбуваються та розвиваються саме у межах міжчастинкових контактів абож контактів проміж частинками та підкладкою. До того треба було б додати, що дисипативні втрати енергії, які є однією з головних прикмет гранульованих матеріалів також відбуваються майже виключно в зонах інтерфейсів.

Інтерес до досліджень ГМ пов'язаний з перспективою їх практичних застосувань у багатьох галузях виробництва. Вони також у величезних кількостях поширені у довіллі. Як приклад достатньо лише згадати звичайний пісок.

У визначеному сенсі одновимірні моделі дисипативних систем можуть сприяти кращому порозумінню фізичних процесів у таких — інтерфейсних структурах і мають сприйматися як перший крок до вивчення реалістичних та, безумовно, складніших тривимірних систем.

ГМ виявляють незвичайні властивості, які відрізняють їх від властивостей типових рідин, газів та твердих тіл. Такі, наприклад як явища непружного колапсу та ниткоподібної кластеризації, компактизації та сегрегації, флюїдизація типу лавиноподібного спливання тонкого шару ГМ, ефекти бразильського горіху та арки (останній веде до насичення тиску під стовпом ГМ у вертикальних контейнерах), анізотроп-

Нижче розглянемо тривіальну, але досить наочну модель 1D системи непружних частинок у гравітаційному полі. Головною метою вивчення таких систем є безпосередня демонстрація існування в них асимптотичних квазістаціонарних станів, та вивчення критеріїв їх існування, а також властивостей, шляхом порівняння теоретичних результатів з даними чисельних та безпосередніх фізичних експериментів. На іс-

нування асимптотичних квазістаціонарних станів в збуджених гранульованих матеріалах (мова йде, безумовно, про стаціонарні стани із складнішою структурізацією) вказують деякі сучасні експерименти [7, 15]. Тому вивчення окремих особливостей їх формування навіть на найпростіших моделях (зокрема, низьковимірних) викликає інтерес.

2. Постульовані стаціонарні стани у вертикальній 1D системі непружних частинок у гравітаційному полі (теоретичне визначення)

Розглянемо систему N безструктурних частинок однакової маси, які розташовані вертикально у вакуумі (за відсутності тертя), в полі сил тяжіння g . Втрати енергії, під час бінарних зіткнень між частинками, можуть бути зкомпенсовані внаслідок відбиття нижньої частинки від горизонтально розташованої “гарячої” твердої підкладки, яка, таким чином, виступає джерелом термалізації системи. У випадку, коли таке відбиття відбувається абсолютно пружньо, система фактично є замкнутою. Навпаки, коли гаряча підкладка здатна надавати до системи довільну (але визначену) енергію – система є відкритою.

Модель, яку запропоновано сконструйовано таким чином, що при довільних швидкостях зіткнення падаючої частинки із підкладкою, в момент відбиття швидкість завжди має одне й те саме стале значення (покладемо ω_0). Взагалі-то ω є величиною, яка розподілена із деякою вагою $\Phi(\omega)$. В нашій моделі початкова швидкість після зіткнення з підкладкою підпорядковується розподілу у вигляді дельта-функції Дірака $\Phi(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$.

Внаслідок бінарного характеру зіткнень частинок їх швидкості перед зіткненням (ω_1, ω_2) та після зіткнення (ω'_1, ω'_2) задовольняють такі співвідношення:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1 + \varepsilon}{2} \omega_{12}, \quad \omega'_2 = \omega_2 + \frac{1 + \varepsilon}{2} \omega_{12}, \quad (1)$$

де $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$; ε – коефіцієнт непружних втрат (коли $\varepsilon = 1$, то зіткнення є абсолютно пружними, а повна кінетична енергія зберігається; навпаки, коли $\varepsilon < 1$, мають місце дисипативні втрати енергії).

У постульованому стаціонарному стані періоди руху частинок між зіткненнями дорівнюють деякій сталій T_N .

Зважаючи на рівноприскорений характер руху частинок, між зіткненнями, отримуємо для періоду ко-

ливань T_N такий вираз [5]:

$$T_N = \frac{2\omega_0}{g} \left[N + \frac{(1 - \varepsilon)}{3(1 + \varepsilon)} (N - 1)(2N - 1) \right]^{-1}. \quad (2)$$

Таким чином, як випливає із (2) період коливального руху N -ї частинки у стаціонарному стані в побудованій модельній системі залежить від усіх параметрів моделі ω_0, g і ε , та досягає максимальних або мінімальних значень, відповідно, у межах абсолютно пружних ($\varepsilon = 1$) та непружних ($\varepsilon = 0$) зіткнень.

Стаціонарний рух у такій модельній системі має виглядати як вертикальна стратифікація (тобто розшарування) системи на послідовність інтервалів, у межах яких відповідні частинки здійснюють простий періодичний рух. При цьому зіткнення кожної пари частинок відбувається на відповідних фіксованих висотах.

Розмір системи, в якій здійснюється визначений стаціонарний рух, знаходимо за формулою

$$L = \frac{gT^2}{8} \left(1 + 4 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{A}{(1 + A)^2} (1 + 2(N - i)) \right), \quad (3)$$

де

$$A = \frac{(1 + 2\varepsilon) - (1 - \varepsilon)(N - i)}{(2 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)(N - i)}$$

– відношення часу, протягом якого i -та частинка летить угору, до часу, протягом якого вона рухається у зворотньому напрямку. Кожний окремий доданок у (3) задає розмір відповідної області, у якій періодично рухається i -та частинка. Умова, за якою хоча б один з цих додатків стає завменьшки нуля – визначає критерій зруйнування стаціонарного стану:

$$\varepsilon \geq \varepsilon_c = \frac{N - 2}{N + 1}. \quad (4)$$

Зі співвідношення (4) для критичного значення коефіцієнта непружних втрат ε_c випливає, що для систем, які вміщують лише одну, чи дві частинки, стаціонарні стани створюються для довільних значень ε . Якщо-ж кількість частинок у системі перевищує дві, стаціонарні стани існують за умов обмеження коефіцієнта непружних втрат енергії внаслідок міжчастинкових зіткнень.

Таким чином, в моделі з сильно непружними зіткненнями асимптотичний стан не може існувати. Визначений стаціонарний стан за достатньо великих N , тобто у випадку великих за розмірами систем, чи систем з багатьох частинок не існує.

Отримані результати вказують на той факт, що у великих за розмірами системах або системах із

сильною дисипацією, для створення умов існування стаціонарних станів недостатньо лише надавати до системи енергію зовні (дисипативні та зовнішні потоки енергії вже не встигають компенсувати один одного).

3. Стаціонарні стани у 1D горизонтальній системі N непружних частинок

Питання про існування стаціонарних станів у випадку одновимірних систем, у яких непружні частинки зіштовхуються за умов відсутності гравітаційних сил будемо вивчати на прикладі системи, яку розглядали у п.2 розташовуючи її у горизонтальному рівні. Подальший аналіз, як і у попередньому випадку, проведемо шляхом постулювання існування у такій системі стаціонарних станів.

Припустимо, що будь-які дві виділені частинки після зіткнення рухаються у протилежних напрямках. Відповідний стаціонарний режим буде виглядати як простий періодичний (коливальний) рух частинок системи з однаковим періодом T . Крім того, у стаціонарному стані 1D системи частинка з номером i рухається в межах інтервалу x_i , який задовольняє співвідношення

$$L = \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5)$$

де L – розмір всієї системи.

У визначеному стаціонарному стані швидкість будь-якої частинки будемо позначати як v_i^r , у випадку коли вона рухається зліва-направо, і v_i^l , відповідно, коли вона рухається у протилежному напрямку. Абсолютні значення швидкостей частинок безпосередньо перед та після виділеного зіткнення дорівнюють (див.(1)):

$$v_i^l = v_1^r - (i-1)v_{12} + (i-2)\frac{1+\varepsilon}{2}v_{12}, \quad (6)$$

$$v_i^r = v_1^r - (i-1)\frac{\varepsilon-1}{2}v_{12}, \quad (7)$$

де $v_{12} = v_{i,i+1} = v_i^r - v_{i+1}^l$ – відносна швидкість частинок (яка дорівнює сталій).

Розмір області системи x_i , в межах якої i -та частинка здійснює періодичні коливання із відповідною сталою амплітудою, у стаціонарному стані, знаходимо за допомогою співвідношення

$$x_i = \frac{v_i^r v_i^l}{v_i^l - v_i^r} T. \quad (8)$$

Період T стаціонарного руху, який задовольняє умовам із (5), (8) дорівнює

$$T = \frac{L}{\sum_{i=1}^N \frac{v_i^r v_i^l}{v_i^l - v_i^r}}. \quad (9)$$

Таким чином, як випливає з формул (9), (6) та (7), для визначення періоду T необхідно знайти відносну швидкість частинок v_{12} та задати умови їх відбиття на межах системи. Розглянемо тепер декілька прикладів, у яких енергія надається зовні до системи (завдяки цьому і підтримується визначений стаціонарний стан дисипативної системи).

У випадку, коли енергія надходить з обох меж системи (тобто частинки відбиваються від лівої та правої меж 1D системи з деякими визначеними сталими швидкостями v_1^r і v_N^l), v_{12} знаходимо за допомогою (6):

$$v_{12} = \frac{2v_{1N}}{(1-\varepsilon)N + 2\varepsilon}, \quad (10)$$

де $v_{1N} = v_1^r - v_N^l$.

Якщо енергія надходить у систему з боку однієї із меж (наприклад, лівої), покладаємо взаємодію частинки з номером N (яка є найближчою до правої стінки системи) із своєю межею абсолютно пружною. Тобто її відбиття від межі є дзеркальними, і не приводять до втрат енергії: $v_N^r = -v_N^l$. Приймаючи до уваги (7), можна виразити v_N^l через v_{12} . А саме, використовуючи (10), отримуємо

$$v_{12} = \frac{4v_1^r}{2(1-\varepsilon)N + 3\varepsilon - 1} \quad (11)$$

Отже, аналітичний розв'язок побудованої моделі отримано.

Зауважимо, що період T визначеного стаціонарного руху залежить від розміру системи L , та коефіцієнта непружних втрат ε , а також від енергії, яку система отримує ззовні.

Розглянемо тепер такий різновид руху в системі, яка складається із двох частинок, в якому після зіткнення одна із частинок не встигає долетіти до найближчої до неї стінки, а друга, встигаючи відбитися від протилежної межі, настигає частинку, яка “запізнюється”. На подальшому кроці (такті) частинки міняються ролями. У такому разі на одне зіткнення частинки із стінкою припадає два її зіткнення з іншою

частинкою. Покажемо, що у такому випадку стаціонарний режим також є принципово можливим.

Будемо позначати швидкість частинки, розташованої ближче до “гарячої” стінки, звідки надходить енергія, через v , а швидкість іншої – w . Нехай після першого зіткнення частинок їх швидкості v_1 та w_1 розподілені таким чином, що “запізнюватись” буде перша частинка.

Після пружнього відбиття від стінки частинки 2 вона наздоганяє частинку 1, і вони знову зіштовхуються. При цьому втрачається кінетична енергія (цей процес визначається коефіцієнтом ε), а швидкості, якими вони будуть володіти після зіткнення будуть відповідати співвідношенню (1). Позначаємо отримані частинками швидкості після 2-го зіткнення через $v_{2,i}$ та $w_{2,i}$ (тут i – індекс завдає номер відповідного двоударного режиму).

Далі, на подальшому етапі, запізнюється друга частинка. При цьому частинка 1 рухається значно швидше і встигає, відбившись від “гарячої” стінки із швидкістю v_0 , наздогнати частинку 2, раніше, ніж вона відіб’ється від “холодної” стінки. Після зіткнення частинок, отримані ними швидкості знов задовольняють співвідношення вигляду (1). Позначимо ці швидкості через $v_{1,i+1}$, $w_{1,i+1}$. На цьому кроці визначений двоударний цикл завершується.

У стаціонарному стані протягом проміжку часу, який дорівнює періоду, для кожної частинки повинні періодично відтворюватися відповідні значення швидкостей і координат. За цих умов, за допомогою (1) отримуємо такі співвідношення

$$w_1 = v_0 \frac{1 + \varepsilon}{2}, \quad v_1 = v_0 \frac{1 - \varepsilon}{2}, \quad v_2 = -\varepsilon v_0, \quad w_2 = 0. \quad (12)$$

Визначення координат x_1 та x_2 , які завдають точки зіткнення частинок дає:

$$x_1 = x_2 = L. \quad (13)$$

Із отриманих співвідношень (12) та (13) можна бачити, що у постульованому тут стані системи, частинка 1 рухається по всьому об’єму системи коли частинка 2 начебто причіплюється до “холодної” стінки. Таким чином, остання ефективно стає непружною у сенсі її взаємодії із частинкою 1.

Період T визначеного типу руху в системі знаходимо у такому вигляді:

$$T = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{L}{v_0} \quad (14)$$

Підстановка $\varepsilon = 0$ до (14) природньо приводить до руху із нескінченим періодом. Останній результат можна пояснити злипанням частинок між собою внаслідок абсолютно непружного зіткнення, після чого частинка 1 вже ніколи не повернеться до “гарячої” стінки (за винятком повернення її у зліпленому з частинкою 2 стані).

Співвідношення (14) можна отримати використавши формули (5)–(11). Для цього в процесі розгляду системи з однією частинкою треба припустити, що взаємодія частинки із “холодною” межею відбувається із втратою кінетичної енергії так само, як у випадку зіткнення частинок однакової маси.

4. Нестационарні стани у горизонтальній 1D системі непружніх частинок

Розглянемо тепер питання про стійкість стаціонарного стану, на прикладі одновимірної системи, яка складається з двох непружніх частинок. Гаряча межа системи задається таким чином, що найближча до неї частинка, нехай перша, завжди відбивається від неї з однією і тією ж сталою швидкістю v_0 . Відбиття другої частинки від протилежної межі здійснюється абсолютно пружньо, тобто без будь-яких втрат енергії.

Розглянемо рух частинок у побудованій моделі, який відбувається за таким сценарієм:

- перша частинка з швидкістю v_0 налітає на другу частинку, яка рухається значно повільніше з швидкістю w_2 назустріч першій частинці;
- після зіткнення перша частинка продовжує рухатися у своєму ж напрямку з меншою швидкістю v_1 , а друга частинка змінює напрям руху на зворотній, і починає рухатися швидше за першу частинку зі швидкістю w_1 ;
- коли друга частинка досягне межі системи L , вона відбивається і рухається назустріч першій частинці з швидкістю $-w_1$;
- після наступного зіткнення частинок швидкості розподіляються таким чином, що друга частинка рухається без зміни напрямку свого руху, але з меншою швидкістю w_2 , у той час як перша частинка змінює напрямок свого руху, а її швидкість v_2 перевищує швидкість другої частинки;
- далі вищеописаний сценарій повторюється.

Крім номера частинки будемо відрізняти швидкості частинок ще за допомогою номера періоду руху p , який описується вищеописаною схемою.

Приймаючи до уваги закони непружного зіткнення частинок знаходимо відповідні швидкості ча-

СТИНОК:

$$w_{2,j+p} = \varepsilon^p w_{2,j}, \quad v_{2,j+p} = -\varepsilon v_0, \quad (15)$$

$$v_{1,j+p} = \frac{1-\varepsilon}{2} v_0 + \frac{1+\varepsilon}{2} w_{2,j} \varepsilon^{p-1}, \quad (16)$$

$$w_{1,j+p} = \frac{1+\varepsilon}{2} v_0 + \frac{1-\varepsilon}{2} w_{2,j} \varepsilon^{p-1}. \quad (17)$$

З (15)–(17) випливає, що

$$\lim_{p \rightarrow \infty} w_{2,j+p} = 0, \quad v_{2,j+p} = \text{const}, \quad (18)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} v_{1,j+p} = \frac{1-\varepsilon}{2} v_0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} w_{1,j+p} = \frac{1+\varepsilon}{2} v_0. \quad (19)$$

Таким чином, виявляється, що вищеописана система після серії зіткнень переходить саме до стаціонарного режиму руху. Узагальнюючи (15)–(19), отримуємо для швидкості таке рекурентне співвідношення:

$$v_{k+p} = \varepsilon^p (v_k - v_\infty) + v_\infty, \quad (20)$$

де v_∞ – швидкість частинки, яка відповідає її руху у стаціонарному стані.

Нехай x_p це координата зіткнення частинок вищеописаного типу руху. Протягом проміжку часу довжиною у період у різних точках простору відбувається, відповідно, два зіткнення частинок між собою. Нижній індекс p визначає номер режиму з періодичним рухом. Покладаючи, що рух частинок між зіткненнями відбувається, з сталими швидкостями, знаходимо x_p у такому вигляді:

$$x_p = x_0 \prod_{k=1}^p B_{k-1} + L \sum_{l=1}^p A_{l-1} \prod_{m=1}^{p-l} B_{l+m-1}, \quad (21)$$

де x_0 – координата першого зіткнення частинок 1 і 2; L – розмір системи;

$$A_j = \frac{2v_{1,j}}{v_0 - w_{2,j}},$$

$$B_j = \frac{v_{1,j} - w_{1,j}}{w_{2,j} - v_0}. \quad (22)$$

Використовуючи формули (21) і (22), можна показати, що $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = L$. На підставі (18) і (19) та (21),

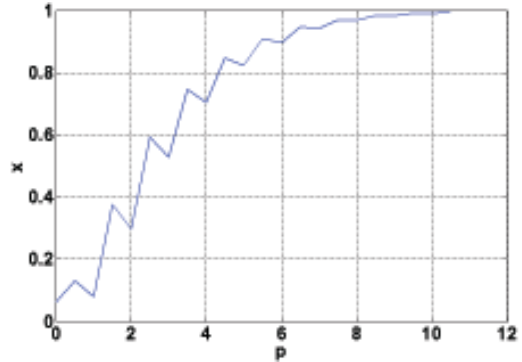


Рис. 1. Результати чисельних розрахунків за формулами (21), (22). Залежність координати зіткнення частинок 1 та 2 між собою від кількості їх зіттовхувань, при таких параметрах, які визначаються за допомогою межових та початкових умов: $L = 1$, $v_0 = 1$, $\varepsilon = 0,5$, $v_1 = 0,0250$, $w_2 = 0,675$, $x = 0,0632$

(22) можна зробити висновок, що розглянута система асимптотично прямує до стаціонарного стану з періодом, який визначається за формулою (14). На рис.1 наведено дані чисельного моделювання поведінки розглянутої системи непружних частинок, які начоно підтверджують зроблені вище висновки.

Деякі кінетичні процеси, що протікають у ГМ визначаються за допомогою так званого параметра впорядкування [14]. Визначимо параметр впорядкування $\varphi(p)$ в розглядаємій системі так:

$$\varphi(p) = \frac{v_{k+p} - v_k}{v_\infty - \frac{v_k}{v_\infty}}. \quad (23)$$

Використовуючи (20), отримуємо формулу для $\varphi(p)$, який залежить лише від p та ε :

$$\varphi(p) = 1 - \varepsilon^p. \quad (24)$$

За таких умов, $p \gg 1$, $\varepsilon \neq 1$, можна записати вираз (24) в експоненціальній формі

$$\varphi(p) = 1 - e^{-p(1-\varepsilon)}. \quad (25)$$

Як відомо [14], в деяких процесах з ГМ (наприклад, радіальна сегрегація частинок за розмірами) залежність відповідно визначеного параметра впорядкування φ , який визначає систему, від часу t описується саме експоненціальним законом:

$$\varphi(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}, \quad (26)$$

де τ_0 – час релаксації параметра впорядкування.

Порівнюючи (25) з (26), та враховуючи $p \sim t$, можемо оцінити характерний час релаксації τ_0 параметра впорядкування у випадку розглянутої нами вище моделі:

$$\tau_0 = \frac{1}{1 - \varepsilon}. \quad (27)$$

З (27) випливає, що із збільшенням коефіцієнта непружних втрат енергії ε зростає час релаксації τ_0 системи до асимптотичного квазістаціонарного стану. При $\varepsilon \rightarrow 1$, $\tau_0 \rightarrow \infty$, тобто система навіть асимптотично не прямує до квазістаціонарного стану. Зроблені висновки повністю узгоджуються з даними чисельних експериментів, які було здійснено за допомогою методів молекулярної динаміки та розрахунків за отриманою шляхом аналітичних розв'язків формулою (21). Така залежність підтверджується і експериментально [15].

5. Рух центра мас горизонтальної 1D системи N непружних частинок

Розглянемо знову 1D систему N непружних частинок, які розташовані між "гарячою" та "холодною" межами. Покладемо, що в початковому стані швидкості усіх частинок, крім першої, дорівнюють нулю. Перша частинка, отримавши певну порцію енергії від "гарячої" межі, рухається із швидкістю v_0 у напрямку решти частинок. Після першого зіткнення з найближчою до неї частинкою швидкість k -ї частинки дорівнює $v_k = v_0 \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{k-1}$, після другого зіткнення $-v_k = v_0 \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{k-1} \frac{1-\varepsilon}{2}$ (тут k – номер частинки). У випадку слабкої дисипації у системі під час зіткнень (тобто при $\varepsilon \approx 1$) можна вважати, що після другого зіткнення k -ї частинки її швидкість зменшується майже до нуля $v_k \approx 0$. У такому випадку легко уявити характер руху частинок після відбиття N -ї частинки від абсолютно пружної межі системи. А саме, після першого зіткнення маємо: $u_k = -v_0 \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{(N-1)+(N-k)}$. Після другого зіткнення $-u_k = -v_0 \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{(N-1)+(N-k)} \frac{1-\varepsilon}{2}$ (де u_k – швидкість k -ї частинки на шляху від N -ї до 1-ї частинки). Як і у попередньому випадку при $\varepsilon \approx 1$, можна вважати, що після другого за чергою зіткнення k -ї частинки $u_k \approx 0$.

Швидкість руху центра мас V_c отримуємо, приймаючи до уваги, що $V_c = V_{in} + V_{out}$, де $V_{in} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k$,

$$V_{out} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k.$$

Відповідно V_c має такий вигляд:

$$V_c = \frac{2v_0}{N(1-\varepsilon)} \left[1 - 2 \frac{(3+\varepsilon)}{\sqrt{8(1+\varepsilon)}} \times \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{N-1} + \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2N-1} \right]. \quad (28)$$

Враховуючи, що для $0 \leq \varepsilon \leq 1$, маємо $1 \leq \frac{(3+\varepsilon)}{\sqrt{8(1+\varepsilon)}} \leq 1,06$, вираз для V_c може бути записано у спрощеному вигляді:

$$V_c \approx \frac{2v_0}{N(1-\varepsilon)} \left[1 - \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{N-\frac{1}{2}} \right]^2 \approx \frac{2v_0}{N(1-\varepsilon)} \left[1 - \exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{2} \left(N - \frac{1}{2}\right)\right) \right]^2. \quad (29)$$

Зауважимо, що $V_c \geq 0$, тобто центр мас рухається у бік "холодної" межі. Насправді, центр мас не може постійно рухатися у одному напрямку, оскільки система має обмежений розмір. Таким чином, отримане значення швидкості дрейфу центра мас не дає повної картини поведінки системи. Але, ця величина дозволяє оцінити швидкість центра мас у граничних випадках великих N та ε .

У границі, коли $\varepsilon \rightarrow 1$ (або $N \rightarrow \infty$), для швидкості центра мас маємо $V_c \rightarrow 0$. Таким чином, швидкість центра мас розглянутої системи експоненціально мала у випадку великих за розмірами систем, які складаються з великої кількості частинок, а також – у разі малих непружних втрат енергії, які відбуваються під час зіткнень.

На рис.2 наведено результати чисельного обчислення руху центра мас, які наочно підтверджують отримані вище теоретичні висновки.

6. Фізичний експеримент

Фізичний експеримент, який було спрямовано на дослідження динаміки модельної 1D гранульованої системи, полягав у імпульсному збудженні вертикального стовпчика металевих кульок сферичної форми у вертикальному напрямку.

За допомогою швидкодіючої цифрової камери (500 кадрів за секунду) визначали траєкторії руху частинок. Точність виміру координат частинок становила 0,5 мм. Використовували 12 металевих кульок діаметром 8,73 мм, які було розташовано у скляній трубці діаметром 8,9 мм. Маса кожної частинки становила

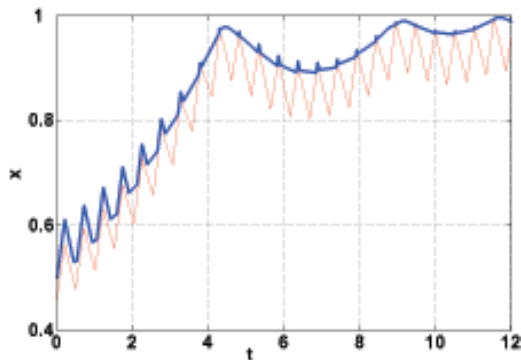


Рис. 2. Результати чисельних розрахунків руху центра мас у 1D горизонтальній системі 10-ти непружних частинок. Неконтрасно-суцільна лінія — відповідає руху центра мас системи в цілому; контрастно-суцільна — відтворює рух центра мас $N - 1$ непружної частинки (за винятком руху першої частинки, яка є найближчою до “гарячої” межі системи); $\varepsilon = 0,95$, $v_0 = 5$, $dt = 10^{-5}$

2,74 г. Коефіцієнт непружних втрат під час центральних бінарних зіткнень частинок дорівнює 0,9. Імпульс збудження дорівнює 0,16 Н · с.

Змінюючи частоти збудження (від 1 до 14 Гц), вдалося виявити наявність розшарування системи на підсистеми з двома якісно різними характерами руху. Початково, частинки знаходяться у спокої у стані безпосереднього контакту одна на одній, вертикально. Під час збудження, з цим ростом частоти спочатку верхня частинка збільшуючи амплітуду руху починає коливатися майже періодично відносно решти частинок. При цьому всі інші частинки системи рухаються досить щільною групою (кластер). За подальшого збільшення частоти збудження спостерігається перехід до стану простого періодичного руху другої зверху частинки, потім — третьої (див. рис.3).

Таким чином, спостерігаємо, що в разі збільшення енергії, яка надходить до системи зовні, вона переходить до асимптотично стаціонарного стану (у вигляді простого періодичного руху). Звернемо увагу на те, що найближчі до підкладки і майже нерухомі частинки практично відіграють роль провідника, який передає енергію найвищій частинці стовпчика, яка переходить до стаціонарного режиму руху.

Подібно до отриманих нами даних, у роботі [4] було виявлено, що у одновимірній системі, яка розташована між “гарячою” та “холодною” межами більшість частинок створюють майже нерухомий кластер, який будується з протилежного боку від підкладки (тобто — біля холодної межі системи) і динамічну частину системи, яка вміщує від однієї до декількох частинок.

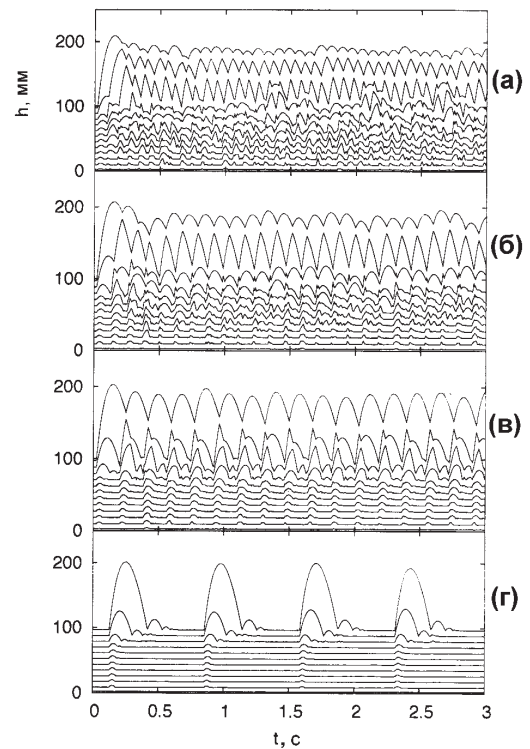


Рис. 3. Результати експериментального вимірювання траєкторій руху частинок у вертикальній системі з 12-ти металевих кульок, які було отримано за допомогою швидкісної цифрової камери. Частоти збудження дорівнюють, відповідно: а — 13,8 Гц; б — 8,93 Гц; в — 5,61 Гц; г — 1,37 Гц

Навідміну від [4] в розглянутій нами задачі роль холодної стінки виконує гравітаційне поле, яке обмежує висоту, на яку піднімається верхня рухома частинка, а нерухомий кластер будується навпаки біля гарячої стінки. Різниця зумовлена різними граничними умовами, а явище, що спостерігається, зобов’язане нелінійному характеру дисипативної системи, яка контролюється відповідним параметром $N\varepsilon$.

Теоретичне вивчення руху центра мас дослідженої системи підтверджує характер руху, який спостерігається експериментально і полягає у наявності режиму розшарування системи на майже нерухомий кластер і групу частинок, які перебувають у стані балістичного руху. Як свідчать отримані із спостережимої експериментальної картини дані, швидкість з якою кожна верхня частинка, яка переходить до стану простого періодичного руху відбивається від найближчої до неї (розташованої знизу), що належить до майже нерухомої частини стовпчика (кластеру) є сталою. Саме цей критерій притаманний і розглянутій теоретичній моделі, яка, нагадаємо, побудова-

на за умов обмежень за густиною, та слабкої дисипації і слабких зовнішніх збуджень. Внаслідок вертикального розташування частинок у стовпчику і наявності власних розмірів частинок та дійсно слабких дисипації та інтенсивності збуджень, фізична система приблизно зустрічає умови теоретичної моделі.

Для системи, частинки якої знаходяться у стаціонарному режимі, було чисельно розраховано розміри областей, в межах яких вони здійснюють періодичний рух. Порівняння цих величин з даними описаних вище експериментальних спостережень, свідчить про те, що розмір системи у стаціонарному стані руху добре співвідноситься з теоретично розрахованим значенням L (див. (3)), якщо у визначенні кожного окремого інтервалу періодичного руху врахувати власні розміри частинок.

Таким чином, знайдена у фізичному експерименті асимптотична квазістаціонарна границя руху може вважатися підтвердженням існування теоретично постульованих стаціонарних станів в 1D дисипативних відкритих системах.

7. Висновки

Таким чином, одновимірна модель системи непружних частинок, яка є за побудовою обмежена умовами слабких дисипації та рівня надходження енергії до системи, за умов найпростіших способів надходження енергії зовні шляхом дзеркального відбиття, або відбиття із завданним розподілом швидкостей, припускає можливість існування стаціонарних станів у вигляді простого періодичного руху окремих частинок в межах відповідних різних за довжиною інтервалів. Перехід системи до визначеного стану здійснюється асимптотично за різних способів надходження енергії зовні через межі системи. Виявлено існування критерію переходу, який виникає внаслідок умови балансу процесів термалізації та дисипації. Встановлений критерій (див. (4)) мультиплікативно залежить від початкового розміру системи, та абсолютної величини коефіцієнта непружних втрат енергії (ця обставина впливає із самої побудови моделі). Відповідні безпосередні фізичні експерименти по спостереженню стаціонарних станів у вертикальній колонці металевих кульок, яка є приблизною модельною реалізацією відкритої дисипативної системи, що збуджується внаслідок імпульсного збудження підкладки, свідчать про наочне підтвердження наявності прогнозованих теоретично квазістаціонарних станів, до яких асимптотично прямує 1D відкрита система непружних частинок.

Визначені стаціонарні режими відкривають принципи можливості застосування до певного класу відкритих дисипативних систем поблизу стаціонарних станів методів статистичної механіки.

1. H.M. Jaeger, S.R. Nagel, and R.P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259 (1996).
2. P.G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 374 (1999).
3. J.Duran, *Sands, Powders and Grains* (Springer-Verlag, New York, 2000).
4. Y. Du, H. Li, and L. Kadanoff, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1268 (1995).
5. O.I. Gerasimov, N.N. Khudyntsev, O.A. Klymenkov, and A.Ya. Spivak, *Ukr. Fiz. Zh.* **50**, 624 (2005).
6. O.I. Gerasimov, V.A. Idomskyy, and P.P.-J.M. Schram, *Cond. Matt. Phys.* **4**, 161 (2001).
7. S. Luding, E. Clement, A. Blumen, and J. Rajchenbach, *Phys. Rev. E* **49**, 1634 (1994).
8. J.M. Luck, A. Mehta, *Phys. Rev. E* **48**, 3988 (1993).
9. A. Mehta, J.M. Luck, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 393 (1990).
10. N.B. Tuffillaro and A.M. Albano, *Amer. Journ. Phys.* **54**, 939 (1986).
11. E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve, and C. Caste, *Europ. Phys. Journ.* **B5**, 111 (1998).
12. J.-M. Hertzsch, *Europ. Phys. Journ.* **B18**, 459 (2000).
13. S. Bernard, T. Schwager, T. Poschel, and C. Saluena, *Europ. Phys. Journ.* **4**, 233 (2000).
14. O.I. Gerasimov, P.P.-J.M. Schram, and K. Kitahara, *Ukr. Fiz. Zh.* **48**, 885 (2003).
15. F. Cantelaube, D. Bideau, *Europhys. Lett.* **30**, 133 (1995).

Одержано 11.06.07

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В 1D СИСТЕМЕ НЕУПРУГИХ ЧАСТИЦ

О.И. Герасимов, Н. Ванделлале, А.Я. Спивак, Н.Н. Худинцев, Г. Люме, С. Дорболло, О.А. Клименков

Резюме

В одномерной модели системы неупругих частиц обнаружены условия существования квазистационарных состояний, которые возникают при разных способах поступления энергии в систему. Изучено влияние начальных и граничных условий (в частности гравитации), на структуру таких состояний и переходов между ними. Проведены теоретические и численные расчеты, а также выполнен непосредственный физический эксперимент. Сравнение полученных данных указывает на их количественное совпадение. Обсуждена возможность использования методов равновесной статистической физики для изучения открытых систем (в частности — гранулированных материалов) в окрестности открытых квазистационарных состояний.

STATIONARY STATES IN A 1D SYSTEM
OF INELASTIC PARTICLES

*O.I. Gerasymov¹, N. Vandewalle¹, A.Ya. Spivak,
N.N. Khudyntsev, G. Lumay¹, S. Dorbolo¹, O.A. Klymenkov*

Odesa State Ecological University
(15, L'vivs'ka Str., Odesa 65016, Ukraine;
e-mail: ogerasimov@paco.net),
¹GRASP, Physics Department, University of Liege
(B-4000 Liege, Belgium)

S u m m a r y

The existence conditions of asymptotic quasistationary states are found for a one-dimensional open system of inelastic particles.

The influence of initial and external conditions on the structure of such states and transitions between them is investigated.

The theoretical and numerical calculations are compared to the data of the direct physical experiment. The possibilities to apply the methods of statistical physics to the study of open systems (in particular, granulated materials) close to the discovered quasistationary states are discussed.