

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ**

**Н.С. ЛОБОДА
В.А. ОВЧАРУК**

ГІДРОЛОГІЧНІ РОЗРАХУНКИ

Конспект лекцій

Одеса - 2005

ББК 26.22
Л 68
УДК 556.048

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол № _____ від _____ 2005 р.)

Лобода Н.С.
Овчарук В.А.

Гідрологічні розрахунки: Конспект лекцій. – Одеса: Вид-во 2005.- 175 с.

Конспект лекцій призначений для студентів за спеціальністю „Гідрологія та гідрохімія”, напрям підготовки „Гідрометеорологія”. В конспекті розглянуто статистичні методи дослідження стоку, розрахунки основних гідрологічних характеристик при наявності, недостатності та відсутності гідрометеорологічної інформації.

Конспект лекцій може бути використаний для денної та заочної форми навчання.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Статистичні методи в гідрологічних розрахунках.....	7
1.1 Обґрунтування можливостей застосування методів математичної статистики для визначення характеристик стоку річок.....	7
1.2 Основні положення теорії імовірностей.....	10
1.2.1 Поняття імовірності. Випадкова подія.....	10
1.2.2 Випадкові величини та закони їх розподілу.....	10
1.2.2.1 Інтегральний закон розподілу безперервної випадкової величини.....	12
1.2.2.2. Диференційний закон розподілу безперервної випадкової величини.....	14
1.2.2.3 Характеристики положення кривих розподілу.....	17
1.3 Статистичні характеристики стокових величин, методи їх визначення та особливості практичного застосування.....	19
1.3.1 Метод моментів. Статистичні моменти як характеристики кривої розподілу.....	20
1.3.2 Точність розрахунків статистичних параметрів за вибірковими даними.....	26
1.3.2.1 Вимоги до оцінок статистичних параметрів.....	26
1.3.2.2 Поняття про систематичні та випадкові похибки визначення статистичних параметрів.....	27
1.3.2.3 Метод статистичних іспитів.....	27
1.3.3 Метод найбільшої правдоподібності.....	32
1.3.3.1 Приклад застосування методу найбільшої правдоподібності до визначення статистичних параметрів нормального закону розподілу.....	33
1.3.3.2 Точність визначення статистичних параметрів, обчислених за методом найбільшої правдоподібності.....	36
1.3.4 Графо-аналітичний метод Г.А.Алексєєва.....	38
1.3.5 Теоретичні криві розподілу, їх особливості та границі застосування.....	43
1.3.5.1 Нормальний закон розподілу випадкових величин.....	46
1.3.5.2 Розподіл Пірсона III.....	48
1.3.5.3 Логарифмічно-нормальний закон розподілу.....	50
1.3.5.4 Крива трипараметричного гама розподілу С.М.Крицького та М.Ф.Менкеля.....	52
1.3.6 Клітчатка ймовірностей, їх призначення.....	53
1.3.7 Розрахунки характеристик стоку заданої забезпеченості за теоретичними законами розподілу.....	54

1.3.8 Загальні уявлення про теорію випадкових процесів.....	55
1.3.8.1 Поняття про випадкову функцію.....	55
1.3.8.2 Закон розподілу випадкової функції.....	57
1.3.8.3 Характеристики випадкових функцій. Визначення характеристик випадкових функцій.....	58
1.3.8.4 Поняття про стаціонарність випадкового процесу. Ергодичність стаціонарних випадкових процесів.....	66
1.3.8.5 Автокореляційна функція, коефіцієнт автокореляції.....	74
1.4 Приклад розрахунків.....	77
2 Річний стік.....	86
2.1 Норма річного стоку, циклічність коливань річного стоку.....	86
2.1.1 Прийоми згладжування часових рядів річного стоку.....	87
2.2 Розрахунки норми річного стоку при тривалих рядах спостережень.....	92
2.3 Розрахунки норми річного стоку при недостатності спостережень	100
2.4 Фактори формування річного стоку.....	117
2.4.1 Рівняння водного балансу.....	119
2.4.2 Генетичний метод розрахунку річного стоку.....	120
2.5 Розрахунки норми річного стоку за відсутності даних спостережень.....	128
2.6 Мінливість річного стоку.....	130
3 Внутрішньорічний розподіл стоку.....	136
3.1 Типовий розподіл.....	137
3.2 Розрахунковий розподіл.....	137
3.3 Крива тривалості добових витрат.....	141
4 Мінімальний стік.....	150

ВСТУП

Гідрологічні розрахунки – це частина загальної гідрології або так звана інженерна гідрологія, яка поєднує вчення про стік з вирішенням прикладних задач для потреб водного господарства, гідротехніки, гідроенергетики, дорожнього будівництва та інших галузей народного господарства.

При цьому досліджуються закономірності виникнення та розвитку стокових процесів у різні фази його формування у зв'язку з процесами, які виникають в атмосфері та літосфері, а також у зв'язку з факторами антропогенного впливу на водні об'єкти. Результати досліджень представляються у вигляді математичної моделі, яка описує у математичній формі зв'язок між характеристиками стоку та кількісними показниками стокоформуючих процесів.

Об'єкт дослідження – поверхневі водні ресурси, тобто води постійних водотоків та водойм.

Предмет дослідження – кількісні характеристики стоку річок у різні фази його формування.

Головна задача – визначення таких кількісних характеристик стоку, які б на підставі аналізу минулого та теперішнього стану водних об'єктів дозволяли б описувати розвиток гідрологічних явищ та процесів у майбутньому.

Отже, **гідрологічні розрахунки** - це головний розділ інженерної гідрології, який поєднує теоретичні та експериментальні дослідження в галузі гідрології суші з інженерно-будівельною та водогосподарською практикою.

Предмет вивчення дисципліни “Гідрологічні розрахунки” – методи та методики визначення кількісних характеристики стоку річок у різні фази його формування з урахуванням об'єму вихідної інформації.

Мета дисципліни “Гідрологічні розрахунки” – вивчення закономірностей виникнення та формування процесів річкового стоку, методів та методик визначення кількісних характеристик стоку у різних гідрометеорологічних та водогосподарських умовах його формування для забезпечення ефективної діяльності споживачів водних ресурсів.

Для успішного засвоєння дисципліни студентам необхідні знання та вміння з таких дисциплін як “Теорія імовірностей та математична статистика”, “Методи аналізу та обробки гідрометеорологічної інформації”, “Фізична гідрологія”.

Гідрологічні розрахунки як науковий розділ гідрології суші почав формуватися у XIX сторіччі і подальший його розвиток пов'язаний з потребами народного господарства. У 1929 році була створена єдина

гідрологічна служба колишнього СРСР, що забезпечило розвиток гідрологічних розрахунків як окремого розділу гідрології суші.

Значний вклад в удосконалення дисципліни внесли наукові праці Д.Г. Кочеріна, Д.Л. Соколовського, А.В. Олексєєва, А.М. Бефані, М.А. Великанова, Є.Д. Гопченка та інш. Велику роль у розвитку гідрологічних розрахунків відігравали Всесоюзні Гідрологічні з'їзди.

До самостійних розділів дисципліни належать

- **статистичні методи** дослідження характеристик стоку;
- **методи визначення характеристик річного стоку** як інтегрального показника водних ресурсів;
- **методи визначення характеристик мінімального стоку**;
- **методи визначення характеристик внутрішньорічного розподілу стоку**;
- **методи визначення характеристик максимального стоку**.

В залежності від обсягу вихідної інформації ці методи розділяються на методи визначення характеристик стоку при **наявності, недостатності та відсутності даних спостережень**.

Доцільне використання методів гідрологічних досліджень є складовою частиною широкої програми з охорони природи, а також водних ресурсів. Отримані за результатами гідрологічних розрахунків дані використовуються при комунально-побутовому та промисловому водопостачанні, для забезпечення водою сільського господарства, енергетики, в гідротехнічному будівництві, гірській та нафто-газовій промисловості, при розробці проектів по захисту оточуючого середовища. Водне господарство, для потреб якого виконуються гідрологічні розрахунки, об'єднує групу галузей, задача яких – розробка та використання поверхневих та підземних вод. До цих галузей належать: гідроенергетика, водний транспорт, меліорація, водопостачання та каналізація, обводнення, охорона водних джерел від забруднення, забезпеченість раціонального використання води. Боротьба з повеннями та засухами також вимагають глибоких знань гідрологічних явищ та процесів, тому розробка та застосування методів та методик розрахунків максимального та мінімального стоку річок займають одне з головних місць у гідрологічних розрахунках.

За основу викладених у конспекті лекцій питань взято такі твори як монографія А.В. Рождественського “Статистические методы в гидрологии”, підручника В.А. Шелутко “Численные методы в гидрологии”, підручника “Обработка та аналіз гідрометеорологічної інформації”, підготовленого авторами Школьним Є.П., Лоевою І.Д., Гончаровою Л.Д, підручника Є.Д.Гопченко та О.В.Гушлі „Гідрологія суші з основами водних меліорацій”.

1 СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ГІДРОЛОГІЧНИХ РОЗРАХУНКАХ

1.1 Обґрунтування можливостей застосування методів математичної статистики до визначення характеристик стоку річок

Математична статистика – це прикладна математична дисципліна, яка спорідна теорії ймовірностей. Задача математичної статистики полягає у тому, щоб на підставі властивостей деякої підмножини (вибірки) зробити висновки про властивості усієї множини в цілому. Уся множина в цілому має назву генеральної сукупності.

Часові ряди однорідних за своїм походженням гідрометеорологічних величин можна розглядати як вибірку з генеральної сукупності (статистичний ряд). При цьому до статистичного ряду пред'являється вимога щодо незв'язності її членів. Це означає, що статистична залежність між ними має бути відсутньою. Ця вимога не завжди виконується і для урахування внутрішньорядних зв'язків, через що при оцінках статистичних характеристик у гідрологічних розрахунках використовують основні положення теорії випадкових процесів.

Чи можливо застосовувати методи математичної статистики до величин стоку? Це ж саме питання можна сформулювати і таким чином: чи є допустимим розглядати величини стоку як випадкові?

Теоретичним обґрунтуванням можливості застосування статистичних методів до розрахунків величин стоку є **закон великих чисел** та **центральна гранична теорема**, які ще мають назву граничних теорем теорії ймовірностей.

У вузькому розумінні під законом великих чисел розуміють комплекс теорем, для кожної з яких установлюється факт наближення середніх характеристик до деяких сталих. Фізичний зміст закону великих чисел зводиться до такого: індивідуальні особливості кожного випадкового явища практично не впливають на середній результат, а випадкові відхилення нівелюються. Закон великих чисел є законом сталості середніх величин. Іншими словами, закон великих чисел дозволяє зробити такі висновки: при достатньо великій кількості спостережень отримані за виборками характеристики стоку достатні для опису генеральної сукупності у цілому. Відомі теореми, які відносяться до закону великих чисел, - це теореми Чебишева, Бернуллі та інш.

Виходячі з того, що більшість осереднених характеристик стоку набуває сталості при довжині рядів у 40-50 років і не змінюється при

подальшому зростанні довжини рядів говорить про те, що стокові ряди підкорюються закону великих чисел.

Під центральною граничною теоремою розуміють групу теорем, зміст яких міститься у такому: подія, що відбувається у результаті підсумовування або визначення добутку великої кількості незалежних або малозалежних подій є випадковою і підкорюється нормальному закону розподілу. Якщо величини стоку можна розглядати як результат додавання випадкових незалежних подій, то легко прийти до ствердження, що стік є випадковою величиною, яка підкорюється нормальному закону розподілу. Але аналіз вихідної інформації по стоку показує, що статистичний розподіл величин стоку у більшості випадків не може бути описаний за нормальним законом розподілу. Справа у тому, що події, які приводять до формування величин стоку залежні одна від одної, тобто між стокоформуєчими факторами у більшості випадків завжди існує зв'язок. В результаті виникає також зв'язок між по передніми та наступними членами рядів стоку. Структура таких часових рядів стоку може бути описаною за допомогою так званих автокореляційних функцій.

На відміну від метеорологічних рядів існує багато особливостей при застосуванні методів математичної статистики у гідрологічних розрахунках. Ці особливості можна представити наступним чином.

1. Першою особливістю застосування методів математичної статистики у гідрологічних розрахунках є обмежена за часом інформація. Ряди стоку короткі, їх середня довжина становить у середньому по Україні менше 40 років. У зв'язку з цим особлива увага у гідрологічних розрахунках приділяється методам оцінок статистичних параметрів за даними спостережень. Окрім того, у гідрологічних розрахунках через нестачу даних не використовуються сгруповані ряди. Особливої ваги набувають питання приведення коротких гідрологічних рядів та їх статистичних параметрів до тривалого періоду спостережень, екстраполяції емпіричних кривих розподілу стоку за межі вимірювання.

2. Ряди стоку можуть бути статистично неоднорідними через вплив водогосподарських заходів, які трансформують вихідні ряди. Великого значення набувають методи прийняття чи відхилення гіпотез про статистичну однорідність рядів, наявність "викидів" та інш. Постійний вплив водогосподарських заходів на формування процесів стоку приводить до появи тенденцій до монотонної зміни осереднених характеристик стоку. Наприклад, середнє арифметичне значення може зменшуватись у часі. Для опису таких рядів на основі методів математичної статистики запобігають до теорії нестационарних гідрологічних процесів.

3. Значення стоку завжди додатні. Область визначення стокових величин знаходиться у межах від 0 до безконечності, у той час як випадкова величина, розподілена за нормальним законом розподілу

імовіроностей змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Ряди стоку характеризуються додатньою асиметрією на відміну від нормально розподіленої випадкової величини, для якої асиметрія дорівнює нулю. Виражена відмінність розподілів стокових величин від нормального закону спонукає до пошуку інших теоретичних законів розподілу випадкових величин, які б задовільно описували емпіричні закони розподілу. Найчастіше у гідрологічних розрахунках у якості теоретичних використовуються закони розподілу Пірсона III і трьохпараметричний гамма-розподіл С.М. Крицького та М.Ф. Менкеля.

4. Як уже відмічалось, між суміжними членами рядів стоку може існувати зв'язок, який характеризується коефіцієнтом автокореляції $r(1)$. Для описання таких рядів у гідрологічних розрахунках використовують теорію випадкових функцій. Наявність внутрішньорядної зв'язності, яка порушує принцип випадковості, зменшує об'єм незалежної інформації, тому у гідрологічних розрахунках розроблені методики урахування впливу внутрішньорядної кореляції на статистичні оцінки, отримані відомими у математичній статистиці методами.

5. Задачі гідрологічних розрахунків по визначенню характеристик стоку є ретроспективно-описувальними та прогностичними. На початку необхідно виявити закономірності формування явища, побудувати математичну модель і вже за математичною моделлю передбачувати майбутній режим річок та водотоків. Таке передбачення у гідрологічних розрахунках надається в ймовірнісній формі.

Математичні моделі можна класифікувати за ступенем їх невизначеності – детерміністичні і стохастичні. Детерміністична модель не містить у собі випадкових компонент, а стохастична – містить. У існуючих стохастичних моделях ряди стоку розглядаються або як **послідовність незалежних випадкових величин**, або у якості стохастичної моделі приймається та чи інша модифікація **простого ланцюга Маркова**, у якій стік розглядається як послідовність залежних випадкових величин. Ступінь залежності характеризується коефіцієнтом автокореляції, а у якості математичного апарата виступає закон двовимірного розподілу випадкових величин.

1.2 Основні положення теорії ймовірностей

1.2.1 Поняття ймовірності. Випадкова подія

Як зазначалося, процес, відображенням якого є гідрологічні послідовності вимірювань, може бути описаний як імовірністний, або стохастичний. Перед тим як перейти до визначення імовірності, введемо поняття випадкової події.

Випадкова подія – факт, який в результаті експерименту (іспиту) може відбутись, а може не відбутись. Випадковою подією можуть бути такі характеристики:

А – число сонячних днів за тиждень;

В – тривалість пересихання річок за період спостережень;

С – число днів на протязі року з опадами.

Розглядаючи ці події, приходимо до висновку, що кожна з них має ту або іншу можливість своєї появи: одна – більшу, друга – меншу. Для того, щоб кількісно порівняти між собою події за ступенем можливості їх появи, необхідно з кожною подією зв'язати відповідне число, яке тим більше, чим більш імовірна подія. Таке число має назву імовірності події. Тобто, **імовірність події – чисельна міра ступеня об'єктивної можливості здійснення цієї події.**

Для співвідношення різних подій за ступенем можливості їхнього здійснення встановлюють одиницю вимірювання. Імовірність достовірної події (**достовірна подія – подія яка в результаті експерименту обов'язково має відбутися**) приймається рівною одиниці, імовірність недостовірної події (**недостовірна подія** - така подія, яка в даному досліді ніяк не може відбутися) дорівнює 0.

Наприклад, імовірність такої події як наявність протягом тижня не більше семи сонячних днів дорівнює одиниці. У свою чергу, наявність в календарному тижні більше семи сонячних днів має імовірність, що дорівнює нулю.

Імовірності інших подій знаходяться у інтервалі від 0 до 1. Сума імовірностей розглядуваної випадкової події завжди дорівнює 1.

1.2.2 Випадкові величини та закони їх розподілу

Якщо в результаті іспитів розглядається не сама подія, а її кількісна характеристика, то в теорії імовірностей використовується *поняття* випадкової величини. **Випадковою називається величина, яка внаслідок спроби набуває те чи інше значення, наперед невідомо, яке саме.** Якщо можливі значення випадкової величини можна перерахувати, то випадкова

величина відноситься до дискретної, тобто випадкова величина описується кінцевим числом значень. Приклади дискретних випадкових величин: 1) число випадків пересихання річки за літньо-меженний період; 2) наявність дощових паводків у році; 3) число днів у році з витратами води вище або менше будь-якого рівня.

Дискретна випадкова величина X , можливі значення якої $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ з імовірнісної точки зору буде повністю описана, якщо кожному значенню випадкової величини поставити у відповідність значення імовірності його появи в спробі. Наприклад, у результаті n іспитів випадкова величина приймає n значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Законом розподілу випадкової дискретної величини називається співвідношення, яке установлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та її імовірностями. Такий закон розподілу називається таблицею розподілу

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Сума імовірностей $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Якщо таблицю розподілу представити у графічному вигляді (рис.1.1), то ми отримаємо багатокутник розподілу.

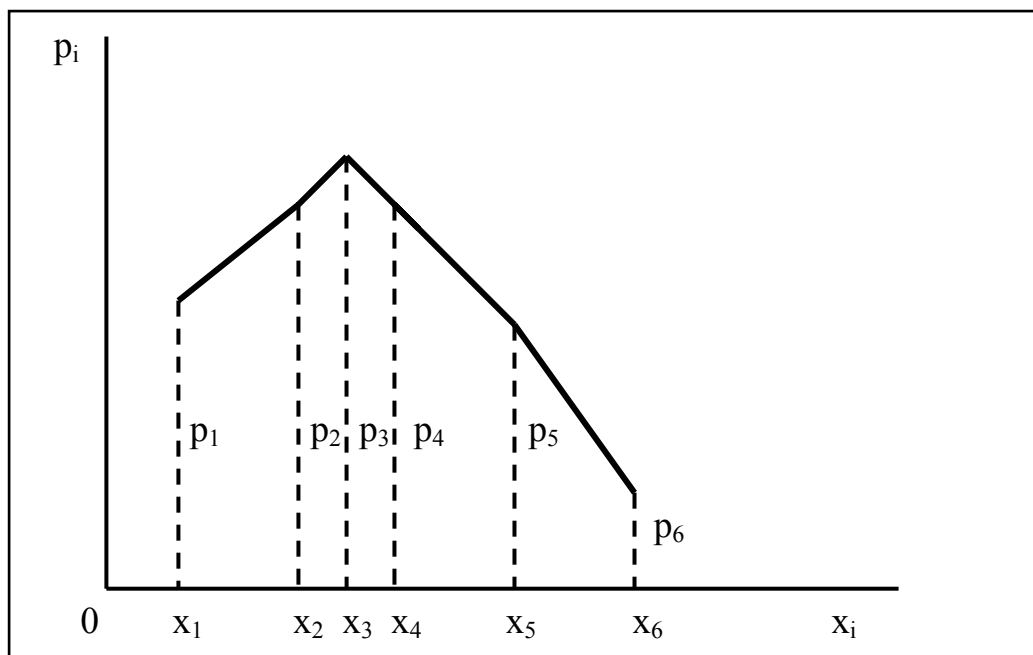


Рисунок 1.1 – Багатокутник розподілу

Закон розподілу, представлений у вигляді таблиці, або багатокутника є вичерпною імовірнісною характеристикою випадкової величини.

Визначити імовірність появи кожного значення випадкової дискретної величини у результаті проведення n іспитів або спроб можливо, якщо представити її як відношення числа випадків, коли розглядувана величина спостерігалася до загальної кількості іспитів

$$p_i = \frac{m}{N}, \quad (1.1)$$

де p_i - імовірність появи випадкової величини;

i - номер іспита;

m - число випадків, коли величина спостерігалася у результаті проведення іспитів;

N - загальна кількість величин, які описують дискретну випадкову величину X .

Наряду з дискретними величинами існують – безперервні. Випадкові величини, які заповнюють деякий проміжок на вісі x називають безперервними. Кожне окреме значення безперервної випадкової величини не володіє ніякою відмінною від нуля імовірністю. Для того, щоб задати закон розподілу безперервної випадкової величини вводиться поняття функції розподілу $F(x) = p(X < x)$, де $F(x)$ не імовірність події $X=x$, а імовірність того, що $X < x$, де x – деяка поточна змінна.

1.2.2.1 Інтегральний закон розподілу безперервної випадкової величини

Для описування закону розподілу безперервної випадкової величини використовується інтегральна функція розподілу імовірної величини $F(x) = P(X < x)$. Функція розподілу $F(x)$ має такі властивості:

1. функція розподілу $F(x)$ монотонно неспадна, тобто при $x_2 > x_1$, $F(x_2) > F(x_1)$ (рис.1.2).
2. на мінус нескінченності, коли $x \rightarrow -\infty$, $F(-\infty) = 0$
3. на плюс нескінченності, коли $x \rightarrow +\infty$, $F(+\infty) = 1$

У гідрологічних розрахунках здебільшого використовується не інтегральна функція розподілу $F(x)$, а функція забезпеченості $P(x)$, яка пов'язана з інтегральною функцією співвідношенням

$$P(x) = 1 - F(x). \quad (1.2)$$

Забезпеченість випадкової величини x – це ймовірність того, що випадкова величина X більше деякого заданого значення x , тобто $P(x)=P(X>x)$.

Для дискретних випадкових величин функція забезпеченості може бути представленою у вигляді

$$F(x)=P(x<X)=\sum_{x_i<x}p_i(X=x_i), \quad (1.3)$$

де нерівність $x_i < x$ указує, на те, що підсумовування відбувалося не для усіх x_i , а лише для тих, які менше x .

Таким чином, функція розподілу дискретної випадкової величини x може бути представленою у вигляді ступінчастої функції. Інтегральна функція, яка представлена у графічному вигляді, має назву інтегральної кривої розподілу (рис.1.2, рис.1.3).

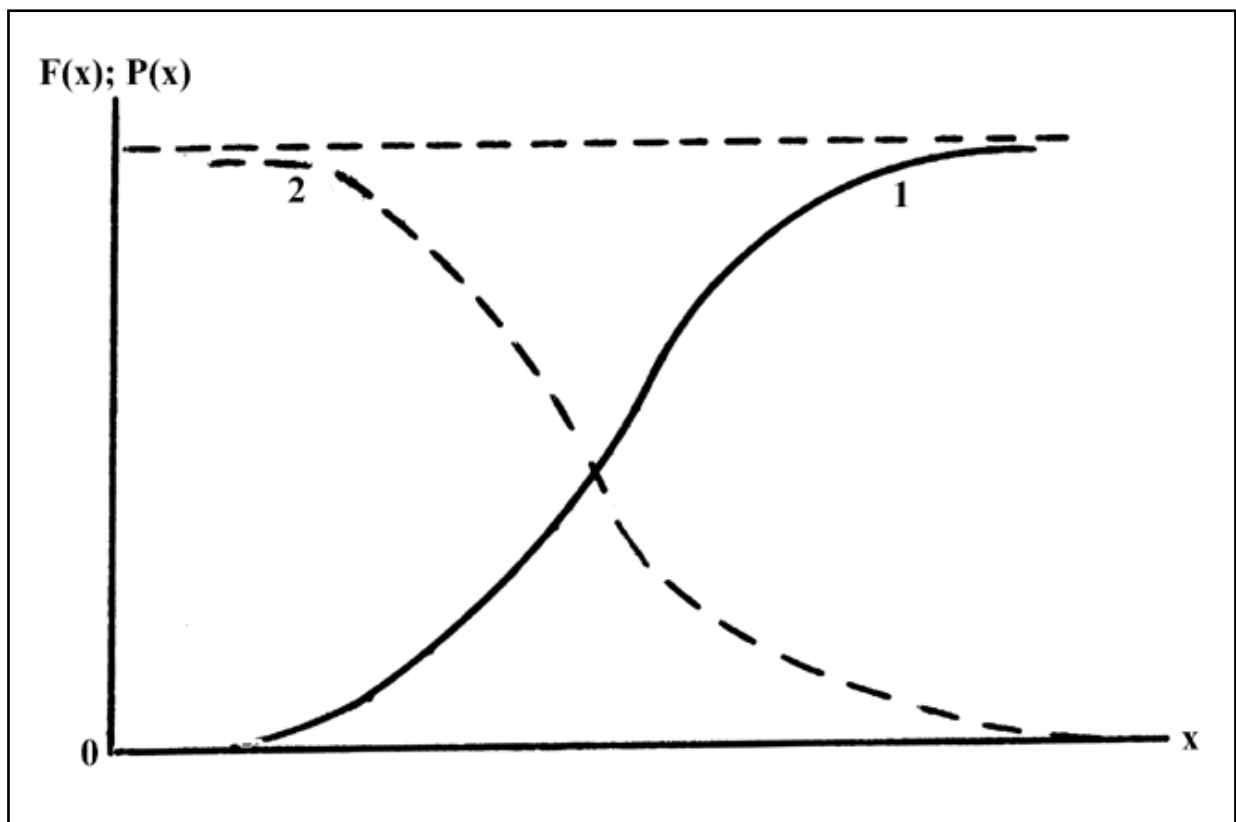


Рисунок 1.2 – Інтегральна функція розподілу $F(x)$ випадкової величини x (1) та функція забезпеченості (2)

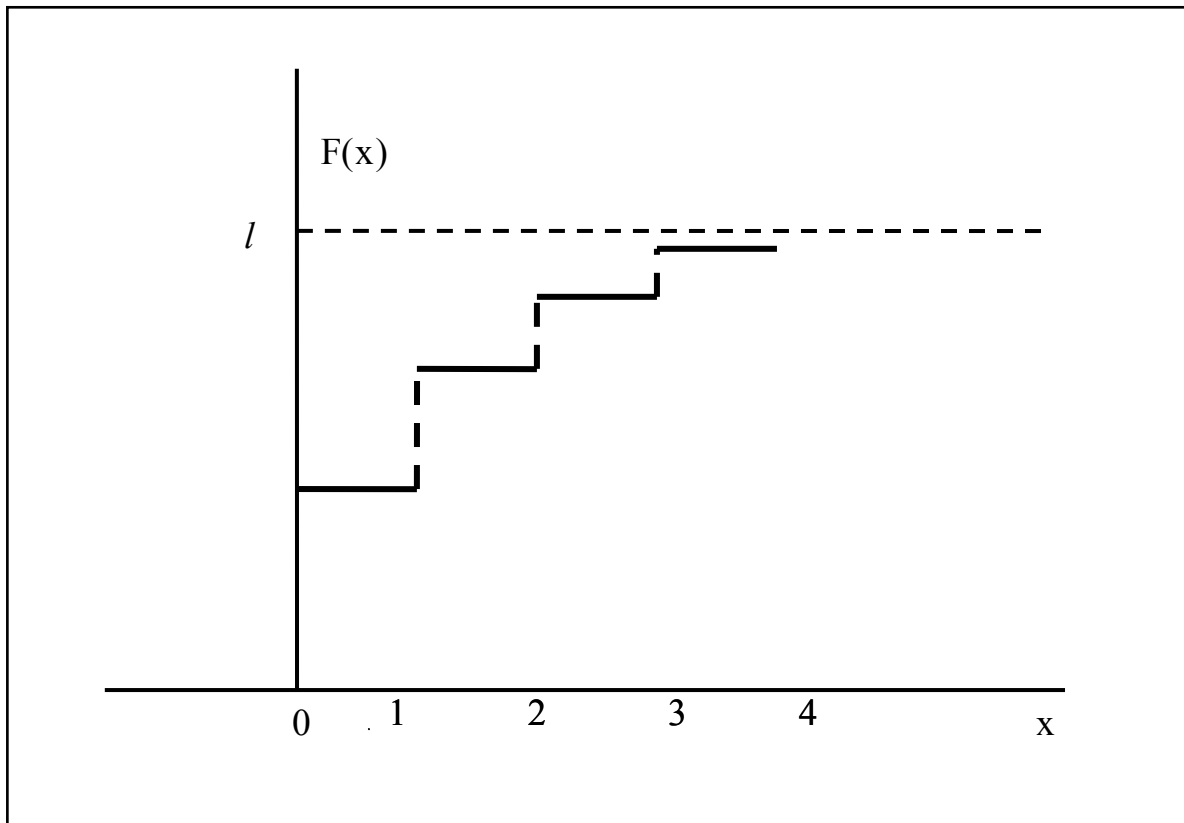


Рисунок 1.3 - Интегральная функция распределения $F(x)$ случайной величины x , заданная дискретными данными

1.2.2.2 Дифференциальный закон распределения непрерывной случайной величины

Рассмотрим непрерывную случайную величину X , обладающую свойством монотонности. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал от x до $x + \Delta x$ на оси x составляет

$$p(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x), \quad (1.4)$$

где правая часть есть прирост функции распределения на интервал длиной Δx . Если эту вероятность разделить на Δx , то получим среднюю вероятность – производную от функции распределения в точке

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad (1.5)$$

$$\text{звідки } F'(x) = f(x)$$

Похідна $F'(x)$ носить назву щільності розподілу безперервної випадкової величини $f(x)$ і є диференційним законом розподілу. Ця формула існує тільки для безперервних рядів випадкових величин.

Згідно з виразом (1.5) можна вирішити протилежну задачу, тобто виразити функцію розподілу через щільність. Якщо

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x), \text{ то} \quad (1.6)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+x} f(x) dx \quad (1.7)$$

Диференційна функція розподілу безперервної випадкової величини x має наступні властивості.

1. Щільність розподілу завжди невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$,
2. Інтеграл від функції щільності імовірностей у межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.8)$$

3. Щільність імовірності – це величина розмірна і її розмірність зворотня розмірності величини x .

З геометричної точки зору перераховані властивості указують, що крива розподілу функції щільності імовірності лежить не нижче осі абсцис, та що повна площа, обмежена кривою $f(x)$ і віссю абсцис дорівнює 1 (рис.1.4).

Між інтегральною функцією, диференційною функцією та функцією забезпеченості існують певні співвідношення, які можна представити таким чином

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad (1.9)$$

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad (1.10)$$

$$P(x) = 1 - \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_x^{\infty} f(x)dx \quad . \quad (1.11)$$

З (1.9) – (1.11) витікає, що знаючи закон розподілу однієї з перерахованих характеристик можна перейти до закону розподілу іншої характеристики.

У загальному випадку закон розподілу випадкової величини – це співвідношення між випадковою величиною та її статистичною характеристикою, у якості якої можуть бути – імовірність, інтегральна функція розподілу, щільність розподілу, забезпеченість.

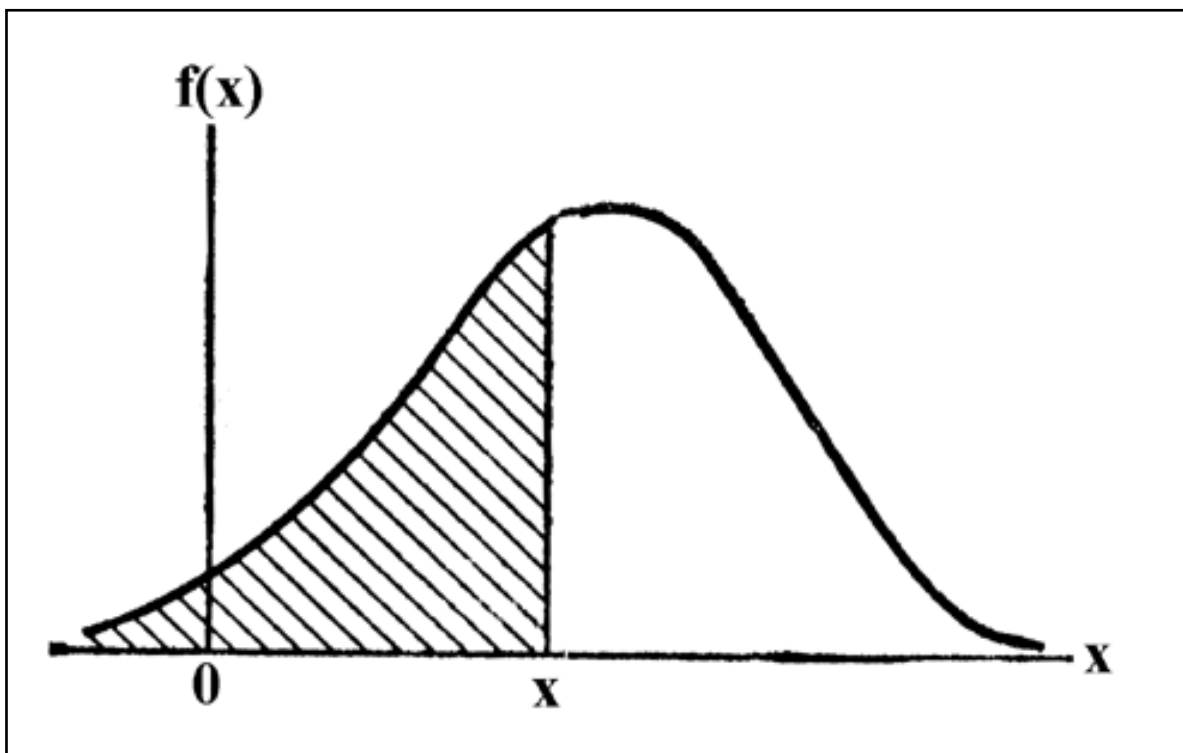


Рисунок 1.4 – Крива розподілу випадкової величини $f(x)$.
(Площа під кривою, що лежить лівіше перерізу x є функція розподілу $F(x)$.
Загальна площа під кривою розподілу дорівнює одиниці.)

1.2.2.3 Характеристики положення кривих розподілу

При виконанні гідрологічних розрахунків однією з основних задач є описування імовірнісних властивостей випадкової величини на основі кривої розподілу. Для уяви про характер розподілу достатньо знати лише числові параметри кривої розподілу: математичне сподівання випадкової величини, моду, медіану, варіацію, асиметрію, ексцес випадкових величин та інше.

Математичне сподівання випадкової величини m_x є центром статистичного розподілу, відносно якого групуються члени сукупності та являє собою середнє зважене по імовірності значення випадкової величини X , тобто

$$m_x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_N p_N}{p_1 + p_2 + \dots + p_N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i p_i}{\sum_{i=1}^N p_i}. \quad (1.12)$$

Враховуючи, що для дискретних випадкових величин $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, з (1.12) отримаємо

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i p_i. \quad (1.13)$$

Математичне сподівання для безперервної випадкової величини може бути представлене у вигляді

$$m_x = \int_{+\infty}^{-\infty} x f(x) dx. \quad (1.14)$$

де $f(x)dx$ - елемент імовірності, який несе те саме смислове навантаження, що й p_i для дискретних випадкових величин.

Оскільки на практиці фахівці використовують обмежені у часі виборки – статистичні ряди - , для яких період спостережень n значно менший за довжину генеральної сукупності N , значення імовірності

появи заданного значення випадкової величини замінюється на відносну частоту $p_i^* = \frac{m_i}{n}$.

Слід зазначити, що статистичні параметри, розраховані за даними виборки, являють собою лише наближене значення параметру генеральної сукупності і називаються “оцінками” таких параметрів.

Оцінкою або емпіричним еквівалентом математичного сподівання, розрахованого за виборкою, є середнє арифметичне значення \bar{X}

$$m_x^* = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{m_i}{n}, \quad (1.15)$$

де n - загальне число незалежних дослідів (спостережень);

m_1, m_2, \dots, m_n - частоти випадкових величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$;

$\frac{m_i}{n}$ - відносна частота або імпірична імовірність p_i^* .

Якщо n прагне до N , p_i^* спрямовується до свого теоретичного значення p_i , а m_x^* - до математичного сподівання m_x .

Якщо частота m_1, m_2, \dots, m_n дорівнює одиниці, тобто кожне значення випадкової величини повторюється в досліді один раз, то $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$. Відповідно

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.16)$$

Середнє арифметичне значення має ту саму розмірність що й величина, по котрій воно розраховано.

Моду випадкової величини m_0 називають найбільш імовірне її значення. На графіку це найбільша ордината кривої розподілу. Розрізняють одно та багатомодальні розподілення. Розподіл гідрологічних величин є одномодальним.

Для безперервної випадкової величини мода - це випадкова величина з найбільшою щільністю імовірності, для дискретної - з найбільшою імовірністю.

Медіана випадкової величини m_e - це значення випадкової величини, яке ділить площу під кривою розподілу порівну, тобто

$$\int_{-\infty}^{m_e} f(x)dx = \int_{m_e}^{+\infty} f(x)dx. \quad (1.17)$$

Для дискретної випадкової величини, приймається правило, що, коли число членів ряду x_i непарне та дорівнює $2m+1$, то медіана ряду буде дорівнювати значенню X_{m+1} , яке є середнім членом ранжированого ряду, тобто $m_e = x_{m+1}$. Якщо число членів ряду парне, тобто дорівнює $2m$, то за медіану приймається середнє значення між центральними величинами ранжированого ряду.

1.3 Статистичні характеристики стокових величин, методи їх визначення та особливості практичного застосування

Основною задачею гідрологічних розрахунків є визначення величин стоку із заданими імовірністними характеристиками. Найчастіше використовується така імовірнісна характеристика як забезпеченість (імовірність перевищення заданої величини). Для того, щоб отримати величини стоку заданої забезпеченості необхідно підібрати теоретичний закон розподілу, який найточніше описує емпіричний розподіл стокових величин, та визначити статистичні параметри, необхідні для практичного застосування цього закону. *Під статистичними параметрами розуміємо параметри законів розподілу, які описують основні властивості статистичного розподілу випадкової величини.*

Величини стоку завжди позитивні, а верхня границя їх значень не обмежена, отже, областю визначення теоретичного закону розподілу величин стоку повинна бути область $(0, \infty)$.

Ряди спостережень за стоком здебільшого короткі, тому кількість статистичних параметрів, які використовуються, не повинна бути великою.

Світовий досвід показує, що при розрахунках стоку найбільш оптимальними для практичного застосування є такі теоретичні закони розподілу, для описування яких достатньо двох або трьох статистичних параметрів – математичне сподівання, дисперсія, а також коефіцієнти варіації та асиметрії.

Статистичні параметри стоку визначаються за рядами спостережень фазовооднорідних стокових величин. Наприклад, статистичні параметри можна розраховувати по рядах максимального стоку весняного водопілля, річного стоку, максимального стоку дощових паводків та інш. У сучасній гідрології, як правило, використовуються три найбільш поширені методи визначення статистичних параметрів – метод моментів, метод найбільшої

правдоподібності, графо-аналітичний метод. Перший з цих методів не пов'язаний ні з одним із законів розподілу випадкової величини.

Статистичні параметри, визначені по рядах спостережень, відрізняються від відповідних параметрів генеральної сукупності і називаються оцінками статистичних параметрів.

При відсутності чи недостатності даних спостережень для визначення статистичних параметрів розроблено додаткові спеціальні методи, які викладаються у наступних розділах.

1.3.1 Метод моментів. Статистичні моменти як характеристики кривої розподілу

Поняття моментів перенесено в статистику із розділу фізики “Механіка”, де момент являє собою добуток сили на плече. Плече – відстань від точки, у якій прикладено силу, до точки опори. Значення дискретної випадкової величини розглядається як матеріальна точка на числовій осі з масою пропорціональною імовірності появи цієї випадкової величини. Якщо у якості плеча розглядається відстань від нуля числової осі до матеріальної точки, то такі статистичні моменти називаються початковими. Коли ж для визначення статистичного моменту береться відстань від математичного сподівання до розглядуваної матеріальної точки, то статистичний момент отримує назву центрального.

Для описування властивостей кривих розподілу широко використовують початкові та центральні моменти.

Початкові моменти s-го порядку дискретної величини X являють собою суму

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^N x_i^s p_i. \quad (1.18)$$

Для безперервної випадкової величини сума записується через інтеграл

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx. \quad (1.19)$$

Таким чином, для дискретної випадкової величини оцінка початкового моменту s-того порядку розраховується за формулою

$$\hat{\alpha}_s = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i^* , \text{ де } p_i^* = \frac{1}{n} . \quad (1.20)$$

Перший початковий момент ($s=1$) представляє собою математичне сподівання

$$\alpha_1 = m_x = \sum_{i=1}^N x_i p_i , \quad (1.21)$$

а його оцінка – середнє арифметичне значення

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{m}_x = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i p_i^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} , \quad (1.22)$$

Центральний момент β_s s -го порядку N дискретних випадкових величин описується наступним виразом

$$\beta_s = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^s p_i , \quad (1.23)$$

відповідно для безперервних випадкових величин -

$$\beta_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx . \quad (1.24)$$

Оцінка центрального моменту s -го порядку виконується в такий спосіб

$$\hat{\beta}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^s , \text{ де } p_i^* = \frac{1}{n} . \quad (1.25)$$

При $s=1$

$$\beta_s = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^n p_i = m_x - m_x = 0 , \quad (1.26)$$

$$\hat{\beta}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} = 0, \quad (1.27)$$

Тобто перший центральний момент дорівнює нулю.
При $s=2$

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (1.28)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.29)$$

Другий центральний момент характеризує розсіювання випадкової величини відносно її центру і носить назву дисперсії D_x

$$\beta_2 = D_x = \sigma_x^2. \quad (1.30)$$

Квадратний корінь із дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням σ_x . Оцінка середнього квадратичного відхилення розраховується наступним чином

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (1.31)$$

Оцінки другого центрального моменту мають негативне зміщення (заниження). Для його усунення в (1.31) вводиться поправочний коефіцієнт $\sqrt{n/(n-1)}$, з урахуванням якого (1.31) приймає вигляд

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (1.32)$$

З метою порівняння мінливості різномасштабних випадкових величин використовують безрозмірну характеристику σ_x / \bar{x} , яка має назву коефіцієнта варіації

$$C_V = \frac{\sigma_x}{m_x}. \quad (1.33)$$

Оцінка коефіцієнта варіації знаходиться за виразом

$$\widehat{C}_V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}^2 (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n-1}}; \quad (1.34)$$

де $k_i = x_i / \bar{x}$ - модульний коефіцієнт.

При $s=3$ з використанням (1.23) та (1.25) отримаємо вирази для розрахунків третього центрального моменту для генеральної сукупності та вибірки

$$\beta_3 = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^3 p_i, \quad (1.35)$$

$$\widehat{\beta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3. \quad (1.36)$$

Третій центральний момент характеризує несиметричність (асиметричність) розподілу випадкової величини відносно математичного сподівання і може бути як від'ємним, так і позитивним.

Нормування β_s через σ_x^3 дозволяє отримати безрозмірний параметр статистичного розподілу, названий коефіцієнтом асиметрії C_s

$$C_s = \frac{\beta_3}{\sigma_x^3}, \quad (1.37)$$

який при розрахунках за виборками представляється у вигляді

$$\widehat{C}_s = \widehat{\beta}_3 / \widehat{\sigma}_x^3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \widehat{\sigma}_x^3}. \quad (1.38)$$

Вираз (1.38) при використанні модульних коефіцієнтів набуває виду

$$\widehat{C}_s = \frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{n\widehat{C}_v^3} . \quad (1.39)$$

Як і оцінка параметру C_v , оцінка коефіцієнта асиметрії за виразом (1.39), є зміщеною відносно відповідного параметра генеральної сукупності. Негативна зміщеність може бути усунена шляхом введення поправочного коефіцієнта $n^2 / (n - 1)(n - 2)$, запропонованого Є.Г. Блохіновим.

Таким чином, кінцевий вид формули для розрахунків коефіцієнту асиметрії має наступний вигляд

$$\widehat{C}_s = \frac{n}{(n - 1)(n - 2)} \frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{\widehat{C}_v^3} . \quad (1.40)$$

Для випадкової величини, яка підкорюється нормальному закону розподілу, $C_s = 0$, тобто крива щільності імовірностей симетрична відносно математичного сподівання.

Четвертий центральний момент ($s=4$) покладений в основу характеристики гостровершинності кривої розподілу випадкової величини – ексцес. Формула для визначення четвертого центрального моменту за виборкою набуває вигляду

$$\widehat{\beta}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 . \quad (1.41)$$

Четвертий центральний момент характеризує гостровершинність графіку розподілу у порівнянні з кривою нормального розподілу. Для випадкової величини з нормальним законом розподілу співвідношення β_4 / σ_x^4 завжди дорівнює 3. Таким чином, нормування β_4 через σ_x^4 дозволяє отримати безрозмірний параметр, названий ексцесом

$$E = \frac{\beta_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (1.42)$$

$$\hat{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n\hat{\sigma}_x^4} - 3. \quad (1.43)$$

Якщо $E > 0$, то крива розподілу витягнута догори відносно нормального закону розподілу, для якого $E = 0$. Коли ж $E < 0$, крива розподілу приплюснута донизу по відношенню до кривої нормального розподілу (рис.1.5).

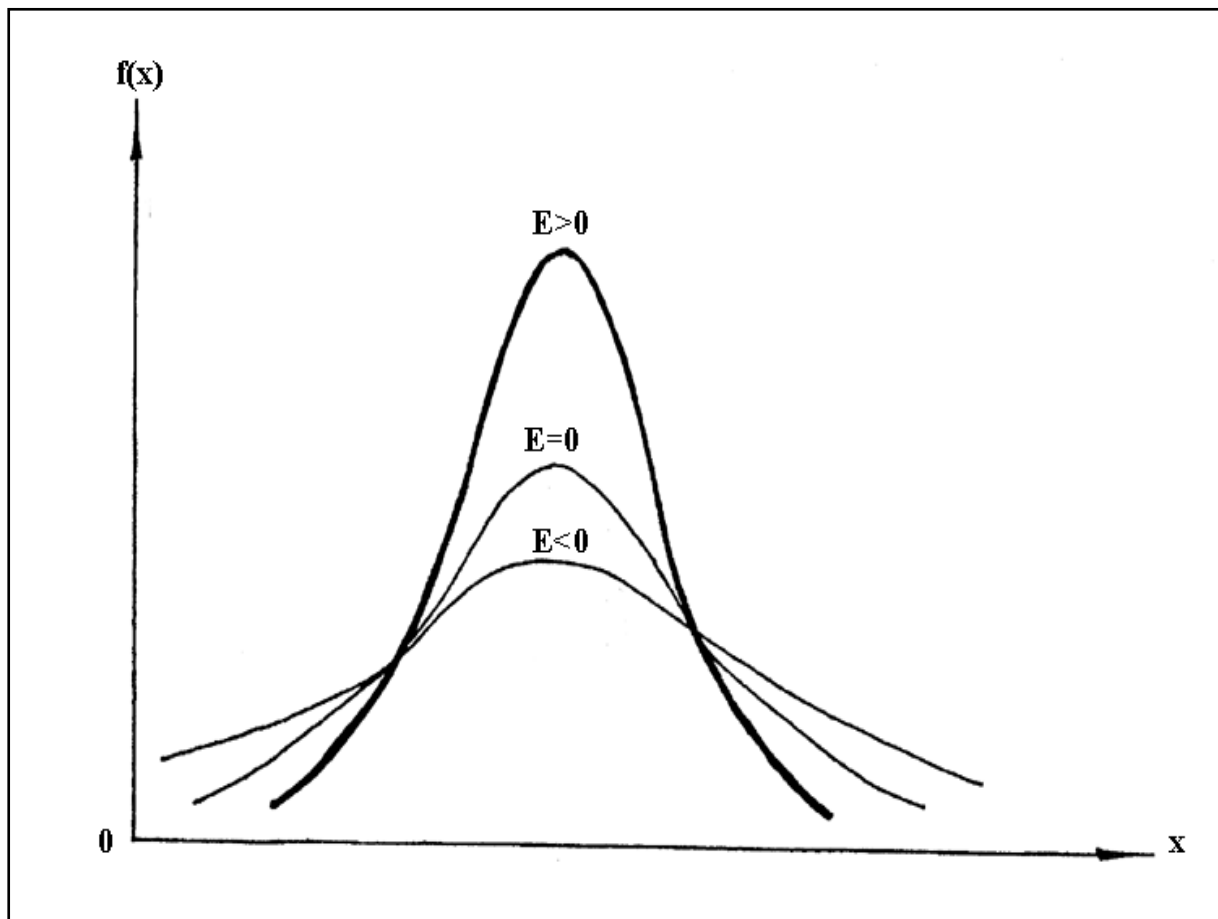


Рисунок 1.5 - Криві розподілу з різними значеннями ексцесу E

1.3.2 Точність розрахунків статистичних параметрів за вибірковими даними

1.3.2.1 Вимоги до оцінок статистичних параметрів

Статистичні параметри, розраховані за виборками, називаються вибірочними оцінками статистичних параметрів. Значення вибірочних оцінок відрізняються від значень відповідних параметрів генеральної сукупності. Для того, щоб по оцінкам достатньо вірогідно характеризувати параметри генеральної сукупності, ці оцінки повинні задовольняти вимогам незсуненості, ефективності та умотивованості.

Припустимо, що з генеральної сукупності отримано m вибірок, за якими отримано m оцінок параметрів.

Оцінка статистичного параметру називається незсуненою, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру генеральної сукупності

$$M[\hat{\theta}_m] = \theta, \quad (1.44)$$

де M - позначка математичного сподівання;

$\hat{\theta}_m$ - оцінка статистичного параметру;

θ - значення параметру генеральної сукупності.

Вимога незсуненості гарантує відсутність систематичних похибок при оцінках параметрів.

Незсунена оцінка, яка має найменшу дисперсію серед усіх можливих незсунених оцінок параметра, розрахованих по вибірках одного і того ж об'єму, називається ефективною, тобто повинна виконуватись умова

$$D[\hat{\theta}_m] \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (1.45)$$

Оцінка параметру називається умотивованою, якщо вона по імовірності збігається до параметра генеральної сукупності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p \left| \hat{\theta}_m - \theta \right| < \varepsilon) = 1 \quad (1.46)$$

де ε - мале позитивне число;

$\hat{\theta}_m$ - вибірочна оцінка параметру;

θ - значення параметру генеральної сукупності.

У методі моментів вимогам незсуненості, ефективності та умотивованості відповідає тільки середнє арифметичне значення.

Як було зазначено вище, для усунення систематичних похибок при розрахунку параметрів σ_x , C_V , C_S вводилися відповідні поправочні коефіцієнти $\sqrt{n/(n-1)}$ при обчисленні середньоквадратичного відхилення та коефіцієнта варіації, а також $n^2/(n-1)(n-2)$ - при обчисленні коефіцієнта асиметрії C_S .

У зв'язку зі зміщенням параметрів, метод моментів рекомендовано вживати при $C_S < 0.5$.

Особливістю методу моментів є той факт, що при розрахунках за цим методом посилюється внесок значних відхилень від центру розподілу.

1.3.2.2 Поняття про систематичні та випадкові похибки визначення статистичних параметрів

Погрішності виборочних параметрів можна поділити на систематичні і випадкові. Систематичні погрішності виникають за рахунок факторів, які однаково впливають при багатократному повторенні вимірювань. Випадкові погрішності виникають в результаті впливу комплексу факторів, кожний з яких урахувати неможливо, що приводить при кожному вимірюванні до різних погрішностей як за числовим значенням, так і за знаком. Систематичні погрішності не можуть бути вилучені або зменшені при багатократному вимірюванні. У той же час випадкові погрішності зменшуються при збільшенні числа вимірювань однієї і тієї ж величини, через те, що середнє арифметичне таких вимірювань у середньому завжди ближче до значення генеральної сукупності. Систематичні погрішності, коли вони відомі, можуть бути усунені або шляхом зміни методу вимірювань, або шляхом введення у розрахункові формули відповідних поправочних коефіцієнтів. Випадкові ж погрішності можна лише оцінити. При цьому постає питання про те як саме виконується оцінка випадкових погрішностей.

1.3.2.3 Метод статистичних іспитів

Мірою точності обчислення статистичного параметру є середнє квадратичне відхилення або випадкова похибка оцінки цього параметру.

Формули для обчислення випадкових похибок визначення статистичних параметрів отримуються на основі методу статистичних

іспитів або методу Монте – Карло. Цей метод дозволяє моделювати процеси, на розвиток яких суттєво впливає випадковий фактор.

Моделювання виконується наступним чином.

1. Задається ряд випадкових чисел δ_i (наприклад, за спеціально розробленою таблицею випадкових чисел, де числа змінюються в інтервалі від 0 до 1, тобто $0 < \delta_i < 1$).
2. Отримані випадкові числа приймаються за забезпеченості $\delta_i = P_i$.
3. Величина стоку заданої забезпеченості визначається за вибраним законом розподілу, тобто

$$P(x) = \int_x^{\infty} f(x) dx . \quad (1.47)$$

З (1.47) або за таблицею вибраного розподілу встановлюється шукане x . При цьому статистичні параметри розподілу задаються рівними відповідним параметрам генеральної сукупності.

Розглянемо випадок, коли у якості теоретичного закону розподілу вибраний закон розподілу Пірсона III. Це трьохпараметричний закон розподілу випадкової величини, для практичного застосування якого необхідно задати три параметри – математичне сподівання m_x , коефіцієнт варіації C_v , коефіцієнт асиметрії C_s . Припустимо, що ці параметри задані у вигляді конкретних чисел.

Як відомо закон Пірсона III представляється у вигляді чисел Форстера Φ_P

$$\Phi_P = \frac{x_P - m_x}{\sigma_x} , \quad (1.48)$$

звідки

$$x_P = m_x + \Phi_P \sigma_x , \quad (1.49)$$

де P - забезпеченість.

За виразом (1.49) можна генерувати ряди довжиною в декілька тисяч членів.

4. Після генерації довготривалого ряду величин стока різної забезпеченості, який розглядається як генеральна сукупність, відбувається його розбиття на вибірки меншої довжини. Наприклад, якщо ряд довжиною 5000 членів розбити на вибірки довжиною в 100 елементів, то

буде отримано 50 вибірок, а отже і 50 значень оцінок статистичних параметрів.

4. Середня квадратична похибка визначення середнього арифметичного значення при довжині виборки $n = 100$ буде визначатися за формулою

$$\sigma_{\bar{x},n=100} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\bar{x}_j - m_x}{m-1}}, \quad (1.50)$$

$\sigma_{\bar{x},n=100}$ - середня квадратична похибка визначення середнього арифметичного значення при довжині виборки $n = 100$;

\bar{x}_j - середнє арифметичне, розраховане за j -тою вибіркою;

m – число вибірок.

Середнє квадратичне відхилення коефіцієнту варіації, розраховане по 200 вибіркам довжиною в 20 елементів розраховується таким чином

$$\sigma_{C_v,n=20} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{C_{v_j} - C_v}{m-1}}, \quad (1.51)$$

де $\sigma_{C_v,n=20}$ - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта варіації при довжині виборки $n = 20$;

C_{v_j} - значення коефіцієнту варіації, розраховане за j -тою вибіркою;

m – число вибірок.

Середньо квадратичні відхилення статистичних параметрів при їх визначенні за вибірковими даними або так звані випадкові похибки можна розроховувати для вибірок різної довжини і у подальшому установити математичне співвідношення між похибками та довжиною вибірок $\sigma_{C_v} = f(n)$, або між похибками та середньоквадратичним відхиленням вихідних вибірок $\sigma_{C_v} = f(C_v)$. Саме методом статистичних іспитів і були отримані формули для розрахунків випадкових похибок визначення статистичних параметрів C_s та C_v за обмеженими у часі даними.

Що стосується оцінки математичного сподівання, то її середньоквадратичне відхилення розраховується за формулою розробленою для величин, які підкоряються нормальному закону розподілу, тобто формула може бути отриманана аналітичним шляхом, дотримуючись при цьому припущення, що нормальний закон розподілу вибірових середніх зберігається і для вибірок, які відхиляються від нормального розподілу

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.52)$$

Похибки σ_{C_V} коефіцієнтів варіації C_V , розрахованих за методом моментів, обчислюються за формулою СН – 435-72

$$\sigma_{C_V} = C_V \sqrt{(1 + C_V^2) / 2n}, \quad (1.53)$$

або за формулою Блохінова Є. Г.

$$\sigma_{C_V} = \frac{C_V}{n + 4C_V^2} \sqrt{\frac{n}{2} (1 + C_V^2)}, \quad (1.54)$$

Середня квадратична похибка σ_{C_S} коефіцієнта асиметрії визначається за теоретичною формулою С.М.Крицького та М.Ф.Менкеля

$$\sigma_{C_S} = \sqrt{\frac{6}{n} (1 + 6C_V^2 + 5C_V^4)}, \quad (1.55)$$

або формулою Резніковського А.Ш.

$$\sigma_{C_S} = \frac{1}{C_V} \sqrt{\frac{6}{n}}, \quad (1.56)$$

Для визначення якості розрахунків статистичних параметрів за даними спостережень необхідно ввести критерій якості, а саме – допустиму похибку розрахунків. Допустиму похибку краще представляти у долях або відсотках від значення параметру, точність визначення якого оцінюється. Отже, і самі випадкові похибки зручніше представляти у відсотках, тобто

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}\sqrt{n}} = \frac{C_V}{\sqrt{n}} \cdot 100\%. \quad (1.57)$$

Із виразу (1.57) видно, що відносна випадкова похибка визначення середнього арифметичного значення пропорційна коефіцієнту C_V та

зворотня числу членів виборки n . Із збільшенням числа спостережень відносна похибка $\varepsilon_{\bar{x}}$ зменшується.

Для середніх арифметичних значень допустимою похибкою є похибка, що дорівнює 10%. Якщо фактична похибка розрахунку, визначена за формулою (1.57) перевищує 10%, то вихідний ряд вважається коротким, а визначений статистичний параметр (у даному випадку – середнє арифметичне) потребує уточнення. Уточнення може бути виконано із залученням даних по річці-аналогу більшої довжини. Методи уточнення параметрів розрахункового ряду з використанням даних по річці – аналогу називаються методами приведення статистичних параметрів коротких рядів до довгого періоду. Такі методи будуть розглянуті у наступних розділах.

Відносна випадкова похибка коефіцієнту варіації визначається таким чином

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V} \cdot 100\% . \quad (1.58)$$

Допустимою похибкою визначення коефіцієнту варіації є величина, що дорівнює 15%.

У свою чергу, відносна похибка визначення коефіцієнту асиметрії розраховується за виразом

$$\varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} \cdot 100\% . \quad (1.59)$$

При практичному застосуванні формул (1.53) – (1.59) використовуються значення коефіцієнту варіації, розраховані за вибіркою. З формул (1.52) – (1.56) можна знайти довжину ряду, при якій випадкова похибка дорівнює заданій величині. Так, при $C_V = 0.2-1.0$ та заданій $\varepsilon_{C_S} = \pm 15\%$ необхідні ряди довжиною 300- 350 років. Зазначимо, що гідрологічні ряди найчастіше мають довжину 20-40 років і лише окремі з них досягають довжини в 50-100 років. У зв'язку з великою похибкою визначення за даними спостережень коефіцієнт C_S нормують за співвідношенням з C_S/C_V у межах виділених районів.

1.3.3 Метод найбільшої правдоподібності

Походження назви цього методу пов'язане із застосуванням функції правдоподібності до визначення статистичних параметрів трьохпараметричного гама-розподілу, запропонованого С.М.Крицьким та М.Ф.Менкелем. Сутність методу найбільшої правдоподібності полягає в тому, щоб застосувати функцію правдоподібності до вибраного теоретичного закону статистичного розподілу випадкової величини з метою оптимізації параметрів розподілу.

Функція правдоподібності - це імовірність сумісного з'явлення подій. У свою чергу імовірність сумісної появи подій може розглядатися, як добуток імовірностей кожної із подій.

Хай задана вибірка спостережених значень випадкових величин x_1, x_2, \dots, x_n . Знайти функцію правдоподібності цієї виборки - це означає обчислити імовірність сумісної появи значень x_1, x_2, \dots, x_n в результаті проведення n -експериментів.

Метод найбільшої правдоподібності - метод математичної статистики, у якому за оцінку невідомого значення параметру щільності імовірності береться те його значення, при якому функція правдоподібності досягає свого максимуму для даної вибірки випадкових величин. Математичний вираз для функції правдоподібності з невідомим параметром θ має такий вигляд:

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \alpha) = f(x_1, \alpha), f(x_2, \alpha), \dots, f(x_n, \alpha) \quad (1.60)$$

Функція правдоподібності задає імовірність появи вибірки x_1, x_2, \dots, x_n . Чим більше значення функції L , тим більша імовірність появи виборки. Звідси і походить назва методу – метод найбільшої правдоподібності.

Якщо в залежності від параметра a величина L значно змінюється, то можна з імовірністю близькою до 1 отримати значення a . І, навпаки, якщо L не змінюється в залежності від a , то немає підстав робити висновки про a взагалі.

Сам параметр a знаходять з умови, що похідна від функції правдоподібності буде дорівнювати нулю. Відповідно правилам диференційного обчислення для знаходження оцінки найбільшої правдоподібності необхідно вирішити рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0. \quad (1.61)$$

З метою спрощення визначення функції правдоподібності до рівняння (1.61) вводять логарифм і розглядають рівняння

$$\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial(\ln a)}{\partial a} = 0. \quad (1.62)$$

1.3.3.1 Приклад застосування методу найбільшої правдоподібності до визначення статистичних параметрів нормального закону розподілу

Розглянемо нормальний закон розподілу, який можна представити у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (1.63)$$

де $f(x)$ - щільність імовірності;

m_x - математичне сподівання;

σ_x - середнє квадратичне відхилення.

У такому випадку функція правдоподібності має вигляд

$$L = f(x_1)f(x_2)f(x_3)\dots \cdot f(x_n). \quad (1.64)$$

Задача полягає у тому, щоб знайти статистичні параметри $\hat{\sigma}_x^2, \bar{x}$, використовуючі функцію найбільшої правдоподібності. Представимо імовірність кожного члена вибірки, виражену через функцію $f(x)$

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_x^2}} e^{-\frac{(x_1-\bar{x})^2}{2\hat{\sigma}_x^2}}, \quad (1.65)$$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_x^2}} e^{-\frac{(x_2-\bar{x})^2}{2\hat{\sigma}_x^2}}, \quad (1.66)$$

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_x^2}} e^{-\frac{(x_n-\bar{x})^2}{2\hat{\sigma}_x^2}}, \quad (1.67)$$

У такому випадку функція правдоподібності прийме вигляд

$$L = f(x_1)f(x_2)f(x_3)\dots \cdot f(x_n) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}_x^2)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{2\hat{\sigma}_x^2}} \quad (1.68)$$

Представимо функцію у логарифмічному вигляді

$$\ln L = \ln 1 - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln (\hat{\sigma}_x^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{2(\hat{\sigma}_x^2)} \quad (1.69)$$

Для пошуку оптимального визначення статистичного параметру \bar{x} обчислюється похідна

$$\frac{\partial(\ln \bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (1.70)$$

Звідки отримуємо

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \bar{x}} = \frac{2}{2(\hat{\sigma}_x^2)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (1.71)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (1.72)$$

$$\sum x_i - \bar{x} \cdot n = 0. \quad (1.73)$$

Отже,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}. \quad (1.74)$$

Аналогічно відбувається пошук оптимального виразу для статистичного параметру $\hat{\sigma}_x^2$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial (\hat{\sigma}_x^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{(\hat{\sigma}_x^2)} - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} \cdot (-1) \frac{1}{(\hat{\sigma}_x^2)^2} = 0. \quad (1.75)$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}_x^2} - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}_x^4} = 0. \quad (1.76)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_x^2} \left(n - \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}_x^2} \right) = 0. \quad (1.77)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}. \quad (1.78)$$

Таким чином, у результаті застосування функції правдоподібності до нормального закону розподілу були отримані математичні вирази для визначення статистичних параметрів $\hat{\sigma}_x^2, \bar{x}$, які збігаються з відповідними виразами метода моментів.

Метод найбільшої правдоподібності приводить до обґрунтованих оцінок з незначним зміщенням. Але вид розрахункових формул статистичних параметрів залежить від обраного закону розподілу випадкової величини. Є.Г.Блохін застосував метод найбільшої правдоподібності до трипараметричного гама-розподілу С.М.Крицького та М.Ф.Менкеля. Строге рішення приводить до складних трансцендентних рівнянь. У зв'язку з цим був запропонований спрощений спосіб оцінки параметрів. У результаті отримані такі статистики

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad (1.79)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lg \frac{x_i}{\bar{x}}}{n}; \quad (1.80)$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\bar{x}} \lg \frac{x_i}{\bar{x}}}{n} . \quad (1.81)$$

Перша із статистик λ_1 , дорівнює середньоарифметичному значенню випадкової величини \bar{X} . Дві другі (λ_2, λ_3) функціонально зв'язані з коефіцієнтом варіації C_V та коефіцієнтом асиметрії C_S . Для переходу від λ_2 та λ_3 до C_V та C_S/C_V побудовані спеціальні номограми.

Деяка зміщеність параметрів λ_2 та λ_3 може бути усунена за рахунок поправочного множника $\frac{n}{n-1}$. Тоді

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lg k_i}{n-1} ; \quad (1.82)$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \lg k_i}{n-1} . \quad (1.83)$$

Метод найбільшої правдоподібності рекомендується застосовувати для визначення статистичних параметрів при $C_V > 0.5$.

При $C_V \leq 0.5$ методи найбільшої правдоподібності та моментів практично дають однакові результати.

1.3.3.2 Точність визначення статистичних параметрів, обчислених за методом найбільшої правдоподібності

Середня квадратична похибка обчислення n -річних середніх арифметичних значень стокових рядів $\sigma_{\bar{x}}$ може бути обчислена за тією ж формулою, що і в методі моментів

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} . \quad (1.84)$$

Середня квадратична похибка розрахунку коефіцієнта варіації C_V , отримана на основі статистичних іспитів, для умови $C_S/C_V = 2$ дорівнює:

$$\sigma_{C_V} = \frac{C_V}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{3}{3 + C_V^2}}. \quad (1.85)$$

Якщо $C_s / C_V \neq 2.0$ стандарт вибіркової оцінки C_V , визначеної методом найбільшої правдоподібності, коректується за допомогою поправочного коефіцієнта

$$K_{C_V} = \frac{\varphi_{C_V} (\text{при } C_V = mC_V)}{\varphi_{C_V} (\text{при } C_s = 2C_V)}. \quad (1.86)$$

який знімається з графіка залежності K_{C_V} для вибірових оцінок C_V та співвідношення C_s/C_V (рис.1.6).

Середнє квадратичне відхилення для C_s/C_V , визначеного за методом найбільшої правдоподібності, установлюється за зв'язком σ_{C_s}/C_V і C_V (рис.1.7).

Обчислення відносних середньоквадратичних відхилень статистичних параметрів відбувається за формулами (1.57 – 1.59).

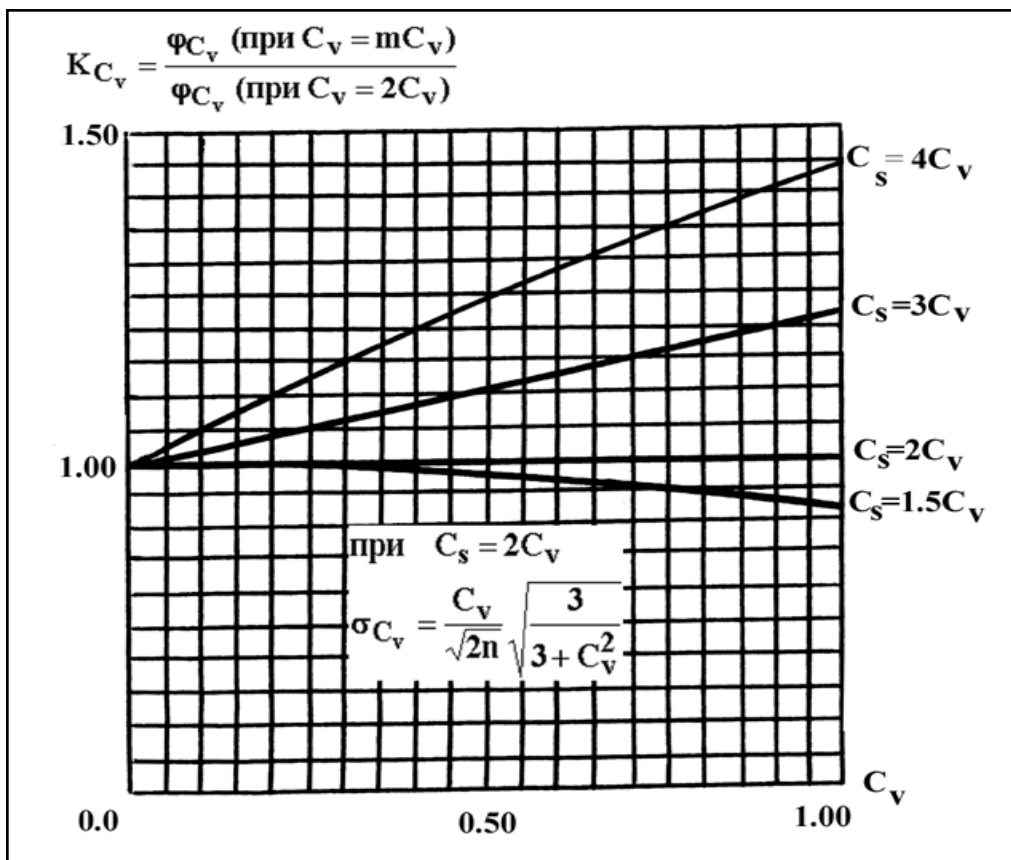


Рисунок 1.6 – Графік для визначення коефіцієнту K_{C_V}

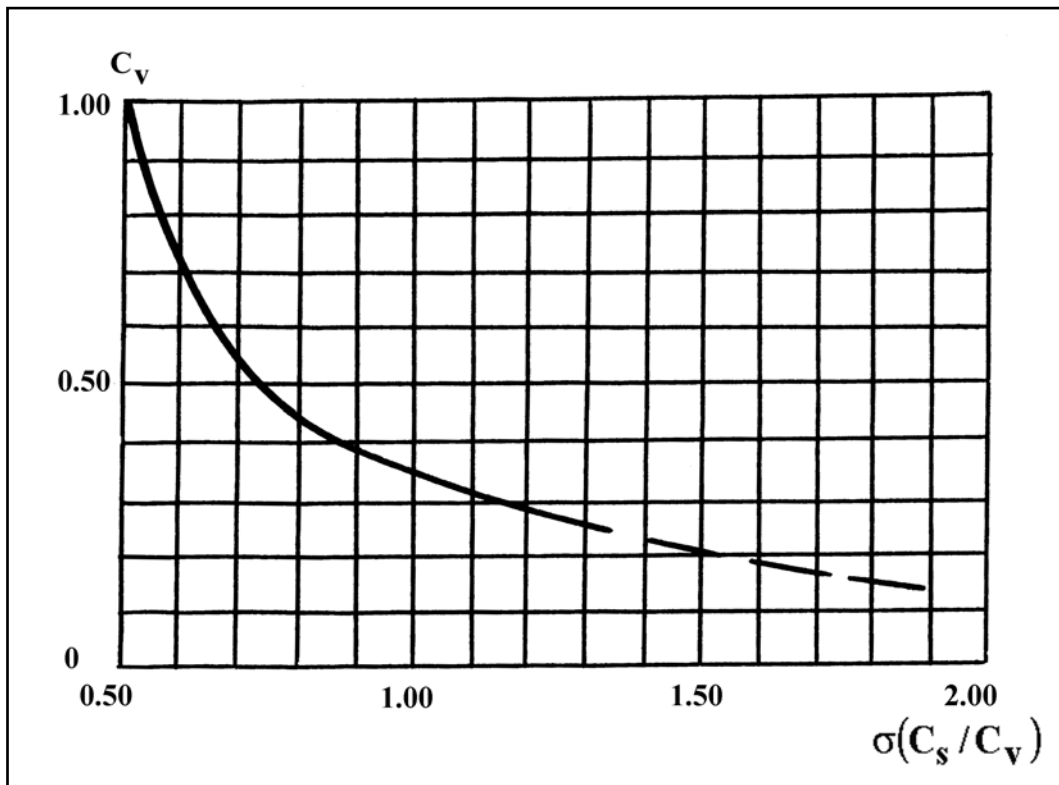


Рисунок 1.7 - Графік для визначення σ_{C_s/C_v}

1.3.4 Графо-аналітичний метод Г.А.Алексєєва

Графо-аналітичний метод являє собою спрощений засіб розрахунків статистичних параметрів. В ньому використовується емпірична крива забезпеченостей і аналітичний (теоретичний) закон розподілу. При його застосуванні приймається умова збіжності теоретичної кривої розподілу з емпіричною хоча б у трьох точках, які зветься характерними. Цей метод дозволяє оцінити статистичні параметри по рядам стоку безпосередньо для того теоретичного розподілу імовірностей, який в більшій мірі відповідає емпіричному. Розглянемо випадок, коли, за теоретичний розподіл стокової величини прийнятий закон розподілу Пірсона III.

У гідрологічних розрахунках закон розподілу випадкової величини задається у вигляді функції забезпеченості. Забезпеченість значення x випадкової величини X є імовірність перевищення x , тобто

$$P(x) = p(X > x). \quad (1.87)$$

Оцінкою забезпеченості значення x_i з вибірки випадкових величин довжиною n є відносна частота події $X \geq x_i$. Для обчислення емпіричної забезпеченості p використовується формула

$$\hat{p}(x_i) = \frac{m}{n+1}, \quad (1.88)$$

де m - порядковий номер елемента x_i у ранжованому статистичному ряді (мається на увазі статистичний ряд, в якому всі члени розміщені в порядку зменшення $x_{i+1} < x_i$). Фактично m являє собою абсолютну частоту події $X \leq x_i$.

З графіка емпіричної кривої забезпеченості, що нанесена на відповідну клітчатку імовірностей, знімають величини стоку в характерних точках з забезпеченістю 5, 50 та 95 відсотків (%). Виходячи з припущення, що ці точки емпіричної кривої забезпеченості співпадають з теоретичною, звернемося до закону розподілу Пірсона Ш. Цей теоретичний закон розподілу випадкової величини надається в СНП 2.01.14-83 таблицею нормованих відхилень Φ , що залежать від забезпеченості P і коефіцієнту асиметрії C_s :

$$\Phi_p(C_s) = \frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x}. \quad (1.89)$$

Для трьох характерних точок за формулою (1.88) визначаються випадкові величини x_p :

$$x_5 = \bar{x} + \hat{\sigma}_x \Phi_5, \quad (1.90)$$

$$x_{50} = \bar{x} + \hat{\sigma}_x \Phi_{50}, \quad (1.91)$$

$$x_{95} = \bar{x} + \hat{\sigma}_x \Phi_{95}, \quad (1.92)$$

з трьома невизначеними параметрами \bar{x} , $\hat{\sigma}_x$ та \hat{C}_s . Параметр \hat{C}_s входить у рівняння (1.90 -1.92) в силу того, що Φ_p є функцією C_s . Для визначення коефіцієнту асиметрії використовується коефіцієнт скісності S , який функціонально пов'язаний з C_s і наводиться у таблицях ординат кривої забезпеченості Пірсона Ш.

Коефіцієнт скісності розраховується за такою формулою

$$\widehat{S} = \frac{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}}. \quad (1.93)$$

За таблицею 1.1 відповідно \widehat{S} встановлюється коефіцієнт \widehat{C}_S та нормовані ординати $\Phi_5, \Phi_{50}, \Phi_{95}$.

Для отримання математичного виразу, що буде визначати середньоквадратичне відхилення, віднімаємо з лівої та правої частин рівняння (1.90) відповідні частини рівняння (1.92):

$$\widehat{\sigma}_x (\Phi_5 - \Phi_{95}) = x_5 - x_{95}, \quad (1.94)$$

звідки

$$\widehat{\sigma}_x = \frac{x_5 - x_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}}. \quad (1.95)$$

Середнє арифметичне значення знаходять з рівняння (1.91)

$$\bar{x} = x_{50} - \widehat{\sigma}_x \Phi_{50}. \quad (1.96)$$

Коефіцієнт варіації розраховується як

$$\widehat{C}_V = \frac{\widehat{\sigma}_x}{\bar{x}}. \quad (1.97)$$

Якщо коефіцієнт скісності S від'ємний, то це свідчить про від'ємну асиметрію ($C_S < 0$) розподілу. У таких випадках наведені в таблиці ординат кривої забезпеченості Пірсона III величини беруться з протилежним знаком:

$$\frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = -\Phi_p, \quad (1.98)$$

для значень забезпеченості $P^* = 100 - P$ і при додатному значенні коефіцієнта асиметрії $C_S^* = |C_S|$.

Таблиця 1.1 – Значення коефіцієнта асиметрії C_s та скісності S біноміальної кривої розподілу

C_s	$\frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_p - 1}{C_v} = \Phi(P, C_s)$						$\Phi_5 - \Phi_{95}$	S
	Φ_1	Φ_2	Φ_5	Φ_{10}	Φ_{50}	Φ_{95}		
0.0	2.33	2.02	1.64	1.28	0.00	-1.64	3.28	0.00
0.1	2.40	2.11	1.67	1.29	-0.02	-1.61	3.28	0.03
0.2	2.47	2.16	1.70	1.30	-0.03	-1.58	3.28	0.06
0.3	2.54	2.21	1.72	1.31	-0.05	-1.52	3.27	0.09
0.4	2.61	2.26	1.75	1.32	-0.07	-1.52	3.27	0.11
0.5	2.68	2.31	1.77	1.32	-0.08	-1.49	3.26	0.16
0.6	2.75	2.35	1.80	1.33	-0.10	-1.45	3.25	0.17
0.7	2.82	2.40	1.82	1.33	-0.12	-1.42	3.24	0.20
0.8	2.89	2.45	1.84	1.34	-0.13	-1.38	3.22	0.22
0.9	2.96	2.50	1.86	1.34	-0.15	-1.35	3.21	0.25
1.0	3.02	2.54	1.88	1.34	-0.16	-1.32	3.20	0.28
1.1	3.09	2.58	1.89	1.34	-0.18	-1.28	3.17	0.31
1.2	3.15	2.62	1.92	1.34	-0.19	-1.24	3.16	0.34
1.3	3.21	2.57	1.94	1.34	-0.21	-1.20	3.14	0.37
1.4	3.27	2.71	1.95	1.34	-0.22	-1.17	3.12	0.39
1.5	3.33	2.74	1.96	1.33	-0.24	-1.13	3.09	0.42
1.6	3.39	2.78	1.97	1.33	-0.25	-1.10	3.07	0.45
1.7	3.44	2.82	1.98	1.32	-0.27	-1.06	3.04	0.49
1.8	3.50	2.85	1.99	1.32	-0.28	-1.02	3.01	0.51
1.9	3.55	2.88	2.00	1.31	-0.29	-0.98	2.98	0.54
2.0	3.60	2.91	2.00	1.30	-0.31	-0.95	2.95	0.57
2.1	3.65	2.94	2.01	1.29	-0.32	-0.91	2.92	0.59
2.2	3.68	2.95	2.02	1.27	-0.33	-0.88	2.90	0.63
2.3	3.73	2.98	2.01	1.26	-0.34	-0.85	2.86	0.64
2.4	3.78	3.02	2.00	1.25	-0.35	-0.82	2.82	0.68
2.5	3.82	3.05	2.00	1.23	-0.36	-0.79	2.79	0.69
2.6	3.85	3.05	2.00	1.21	-0.37	-0.76	2.76	0.72
2.7	3.92	3.10	2.00	1.19	-0.38	-0.74	2.74	0.74
2.8	3.96	3.12	2.00	1.18	-0.39	-0.71	2.71	0.76
2.9	4.01	3.12	1.99	1.15	-0.39	-0.69	2.68	0.78
3.0	4.05	3.14	1.97	1.13	-0.40	-0.66	2.63	0.80
3.1	4.09	3.14	1.97	1.11	-0.40	-0.64	2.62	0.81
3.2	4.11	3.14	1.96	1.09	-0.41	-0.62	2.59	0.83

Продовження таблиці 1.1

C_s	$\frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_p - 1}{C_v} = \Phi(P, C_s)$						$\Phi_5 - \Phi_{95}$	S
	Φ_1	Φ_2	Φ_5	Φ_{10}	Φ_{50}	Φ_{95}		
3.3	4.15	3.14	1.95	1.08	-0.41	-0.60	2.56	0.85
3.4	4.18	3.15	1.94	1.08	-0.41	-0.59	2.53	0.86
3.5	4.21	3.16	1.93	1.04	-0.41	-0.57	2.50	0.87
3.6	4.24	3.17	1.93	1.03	-0.42	-0.56	2.48	0.89
3.7	4.26	3.18	1.91	1.01	-0.42	-0.54	2.45	0.90
3.8	4.29	3.18	1.90	1.00	-0.42	-0.53	2.43	0.91
3.9	4.32	3.20	1.90	0.98	-0.41	-0.51	2.41	0.92
4.0	4.34	3.20	1.90	0.96	-0.41	-0.50	2.40	0.92
4.1	4.36	3.22	1.89	0.95	-0.41	-0.49	2.38	0.93
4.2	4.39	3.21	1.88	0.93	-0.41	-0.48	2.36	0.94
4.6	4.46	3.27	1.84	0.87	-0.40	-0.44	2.28	0.97
4.7	4.49	3.28	1.83	0.85	-0.40	-0.43	2.26	0.97
4.8	4.50	3.29	1.81	0.82	-0.39	-0.42	2.23	0.98
4.9	4.51	3.30	1.80	0.80	-0.39	-0.41	2.21	0.98
5.0	4.54	3.32	1.78	0.78	-0.38	-0.40	2.18	0.98
5.1	4.57	3.32	1.76	0.76	-0.38	-0.39	2.15	0.98
5.2	4.59	3.33	1.74	0.73	-0.37	-0.38	2.15	0.98

Тоді

$$S^* = -S = \frac{2x_{50} - x_5 - x_{95}}{x_5 - x_{95}}, \quad (1.99)$$

$$\hat{\sigma}_x = \frac{x_5 - x_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}}, \quad (1.100)$$

$$\bar{x} = x_{50} - \hat{\sigma}_x \Phi_{50}. \quad (1.101)$$

Зрозуміло, що хоч у графо-аналітичному методі розрахунків статистичних параметрів і використовується теоретичний закон розподілу, отримані статистичні характеристики є все ж таки тільки оцінками статистичних параметрів генеральної сукупності, бо вони спираються на

емпіричну криву забезпеченості, побудовану по даним вибірки з генеральної сукупності.

Випадкові похибки обчислення статистичних параметрів визначаються за тими ж формулами, що і в методі моментів.

1.3.5 Теоретичні криві розподілу, їх особливості та границі застосування

Теоретичні закони розподілу імовірностей базуються або на визначених теоретичних схемах, або є узагальненням емпіричних розподілів.

Вимоги до теоретичних кривих розподілу стокових величин.

1. У рівнянні кривої повинно бути як найменше параметрів, що чисельно визначаються за вибірковими даними.
2. Через те, що значення стоку завжди позитивні, крива розподілу не повинна знаходитися у області від'ємних значень.
3. Верхня границя кривої розподілу не обмежена.
4. Теоретичні криві розподілу повинні бути одномодальними, що витікає з умови однорідності і незалежності стокових величин.

Розподіл імовірностей $y = f(z)$ повинен задовольняти таким умовам: на початку та на кінці графіка щільності імовірностей $y = 0$ та між початком і кінцем досягає максимального значення. Отже, перша похідна $\frac{dy}{dz}$ повинна дорівнювати нулю у трьох точках: на початку, в кінці та у точці, яка відповідає моді. Величина z представляє собою центровану і нормовану вихідну величину x , тобто

$$z = \frac{x - m_x}{m_x} = k - 1, \quad (1.102)$$

де k - модульний коефіцієнт.

Сукупність теоретичних кривих розподілу випадкових величин Пірсона можна отримати в результаті вирішення диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z + d)}{\varphi(z)}, \quad (1.103)$$

де d – відстань між модою та математичним сподіванням на графіку кривої розподілу (рис.1.8);

$y=f(z)$ - щільність імовірності;
 $\varphi(z)$ - ряд Маклорена, який має вигляд

$$\varphi(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n. \quad (1.104)$$

Рівняння (1.103) відповідає усім вимогам. Дійсно, на кінцях розподілу при $y=0$, $\frac{dy}{dz} = 0$; при $z = -d$, тобто в точці максимуму (m_0) значення $\frac{dy}{dz}$ також дорівнює нулю.

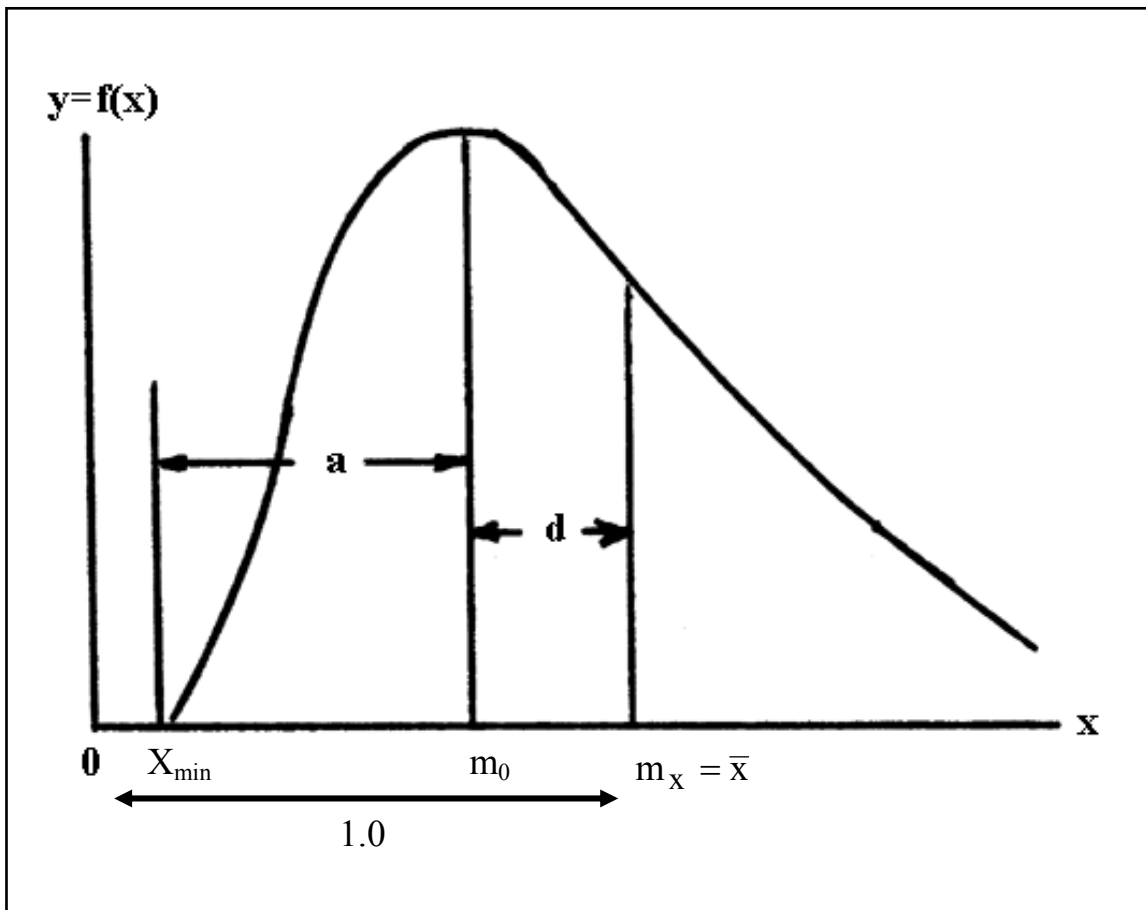


Рисунок 1.8 - Крива Пірсона III ($C_S > 0$)

Для побудови кривих розподілу Пірсон використовував тільки три перших члена ряду, тобто

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2, \quad (1.105)$$

звідки

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z+d)}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}. \quad (1.106)$$

Значення z та d вважаються відомими. Для розрахунків щільності імовірності необхідно знайти значення b . Після інтегрування (1.106) приходимо до рівняння

$$-nb_0\beta_{n-1} - b_1(n+1)\beta_n - b_2(n+2)\beta_{n+1} = \beta_{n+1} + d\beta_n, \quad (1.107)$$

де β_n - центральні моменти порядку n ;

Розглянувши цей вираз при різних n ($n=0,1,2$) та ураховуючи, що $\beta_0=1$ та $\beta_1=0$, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -b_1 = d \\ -b_0 - 3b_2\beta_2 = \beta_2 \\ -3b_1\beta_2 - 4b_2\beta_3 = \beta_3 + d\beta_2 \end{cases} \quad (1.108)$$

яка дозволяє виразити b_0 , b_1 , b_2 через центральні моменти другого та третього порядку.

З системи рівнянь (1.108) витікає, що для розрахунків перших трьох параметрів ряду Маклорена необхідно використовувати третій центральний момент, який визначається за експериментальними даними з великими погрішностями. Отже подальше збільшення числа членів Маклорена не має сенсу.

В залежності від числових значень коефіцієнтів b_0, b_1, b_2 з вихідного рівняння можна отримати сім різних типів кривих забезпеченостей. В гідрологічних розрахунках використовуються два з них: нормальний та біноміальний асиметричний (Пірсона III).

1.3.5.1 Нормальний закон розподілу випадкових величин

Нормальний закон розподілу є частим випадком розподілу Пірсона. Для знаходження відповідної функції щільності імовірностей Пірсон використав лише перший член ряду Маклорена b_0 , приймаючи, що інші його члени дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z+d)}{b_0}. \quad (1.109)$$

Звернемося до загального рішення системи рівнянь (1.108)

1. $d=0$, оскільки $b_1=0$, а отже, математичне сподівання і мода співпадають $m_x=m_0$.

2. $-b_0 = \beta_2 = \sigma_z^2$, тобто параметр $-b_0$ дорівнює дисперсії випадкової величини.

3. $\beta_3=0$, звідки $C_s=0$, тобто розподіл симетричний.

Вирішення диференційного рівняння (1.109) зводиться до такого

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{y(z)}{b_0}, \quad (1.110)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{z}{\sigma_z^2} dz, \quad (1.111)$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{\sigma_z^2} \frac{z^2}{2} + c \quad (1.112)$$

Але $y = f(x) \geq 0$, тоді $|y| = y$ та $\ln|y| = \ln y$

$$\ln y = -\frac{1}{\sigma_z^2} \frac{z^2}{2} + c. \quad (1.113)$$

У точці $z=0$ $C = \ln y$. Обозначимо значення y у точці $z=0$ через y_0 . Це значення буде максимальним, через те, що для всіх інших z $\ln y < \ln y_0$. Крім того, якщо $d=0$, то значення k відносно якого ведуться розрахунки, буде співпадати з модою, тобто мати найбільшу щільність імовірності. З урахуванням цього

$$y = y_0 e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}. \quad (1.114)$$

З властивостей щільності імовірності витікає, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1. \quad (1.115)$$

Отже,

$$y_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dz = 1. \quad (1.116)$$

Після ряду перетворень отримаємо

$$y_0 = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}}. \quad (1.117)$$

Загальний вид рівняння кривої нормального розподілу такий

$$f(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}. \quad (1.118)$$

Для вихідного ряду x , урахувавши, що $z=k-1$

$$f(x) = y = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (1.119)$$

Якщо замість значень x використати нормовані значення, представлені у виді

$$t = \frac{x - m_x}{\sigma_x} = \frac{k-1}{Cv}, \quad (1.120)$$

і, урахувавши, що $\sigma_t = 1$, отримаємо

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (1.121)$$

Вираз (1.121) задається у вигляді таблиці для практичного використання. Нормальний розподіл має ряд особливостей.

1. У зв'язку з тим, що функція (1.119) має дійсні значення при будь-яких значеннях незалежної змінної X . Область її визначення така: $-\infty < x < +\infty$.
2. Функція $f(x)$ - парна, тобто $f(x) = f(-x)$.
3. Нормальна крива не перетинає осі x .
4. Крива симетрична відносно моди.
5. Це двупараметричний розподіл.
6. Параметр σ_x є характеристикою форми кривої: чим більше σ_x максимальна ордината менше, крива розтягується.
7. Якщо змінювати m_x , то крива щільності ймовірностей буде переміщуватися уздовж осі x , зберігаючи свою форму.

Вперше нормальний закон розподілу випадкових величин був розроблений для аналізу погрішностей вимірювань. На цій основі він і отримав розповсюдження у багатьох галузях науки і техніки, в тому числі і в гідрології, де широко використовується для оцінки точності розрахунків, визначення довірчих інтервалів і таке інше. У практичних дослідженнях іноді допускається використовувати до деяких рядів з асиметричним розподілом. Однак, погрішність прийнятого припущення про нормальність розподілу може привести до неправильних рішень гідрологічних задач.

1.3.5.2. Розподіл Пірсона III

Диференціальне рівняння Пірсона III (1.103) може бути розписаним для перших двох членів ряду Маклорена. Для нормального закону розподілу була прийнята жорстка умова про те, що розподіл симетричний, тобто мода розподілу співпадає з математичним сподіванням і радіус асиметрії $d=0$.

Припустимо, що випадкова величина X позитивна, отже $x_{\min} > 0$. Обозначимо через a відстань від m_x до моди. Тоді сума $a + d$ є відстань від математичного сподівання до x_{\min} .

Звідки

$$a + d = m_x - x_{\min} = 1 - k_{\min}. \quad (1.122)$$

Через те, що $k_{\min} \geq 0$, $a + d \leq 1$.

Рівняння біноміального розподілу Пірсона III типу може бути знайдено, коли розглянути два перших члена ряду Маклорена b_0 та b_1 . Тобто,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z+d)}{b_0 + b_1 z}. \quad (1.123)$$

Після інтегрування (1.123) при використанні системи (1.108) вираз біноміального розподілу Пірсона III типу має вигляд

$$f(z) = y = y_0 e^{-z/d} (1 + z/a)^{a/d}. \quad (1.124)$$

де a - відстань від початку кривої до моди ;

y_0 - модульна ордината.

Загальний вигляд кривої Пірсона III при $C_V > 0$ (позитивній асиметрії) показаний на рис.1.8.

Параметри рівняння (1.124) зв'язані з центральними моментами розподілу

$$a + d = 2\beta_2^2 / \beta_3. \quad (1.125)$$

Для практичного застосування в (1.125) β_2 та β_3 замінюють на статистичні параметри m_x , C_V , C_S . Знаючи, що $\beta_2 = \sigma_x^2$, а $C_V = \sigma_x / \bar{x}$, запишемо

$$\beta_2 = C_V^2 m_x^2. \quad (1.126)$$

Третій центральний момент, як було показано, зв'язаний з коефіцієнтом асиметрії C_V та середнім квадратичним відхиленням

$$\beta_3 = C_S \sigma_x^3 = C_S C_V^3 m_x^3. \quad (1.127)$$

Підставляючи (1.126) та (1.127) в (1.125), отримуємо

$$a + d = 2C_V^4 m_x^4 / (C_S C_V^3 m_x^3) = 2C_V m_x / C_S. \quad (1.128)$$

В загальному вигляді

$$m_x - x_{\min} = 2C_v m_x / C_s. \quad (1.129)$$

або

$$1 - k_{\min} = 2C_v / C_s. \quad (1.130)$$

де $k_{\min} = x_{\min}/m_x$ - модульний коефіцієнт мінімального значення ряду.

Розглянемо три можливих варіанти:

- 1) якщо $k_{\min} = 0$, $C_s = 2C_v$
- 2) якщо $k_{\min} > 0$, $C_s > 2C_v$
- 3) якщо $k_{\min} < 0$, $C_s < 2C_v$

Третій випадок суперечить природі стокових рядів, які завжди позитивні, отже крива розподілу Пірсона III може використовуватись тільки тоді, коли $C_s \geq 2C_v$. З цього слід зазначити таке: крива обмежена нижньою ($x=0$) і не обмежена верхньою границею. Тобто при $x \rightarrow \infty$ крива наближається до осі абсцис; опирається на три статистичні параметри m_x , C_v , C_s , а при $x_{\min}=0$ є двопараметричним розподілом.

1.3.5.3 Логарифмічно-нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу використовується для випадкових величин, котрі міняються від $-\infty$ до $+\infty$. Для того, щоб використати цей закон для стокових величин, область визначення яких змінюється від 0 до $+\infty$, можна перетворити вихідну змінну.

У нашому розпорядженні є суттєво позитивна випадкова величина X з областю визначення $0 < x < \infty$, несиметрична. Перетворимо її у нову, яка підкорюється нормальному закону розподілу. З цією метою введемо нову змінну $u = \ln(x)$. Якщо $0 \leq x < +\infty$, то $-\infty < \ln x < +\infty$. Тоді рівняння (1.119) прийме вигляд

$$y = f(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2\sigma_u^2}}. \quad (1.131)$$

Параметри випадкової величини u можуть бути представленими наступним чином

$$\hat{m}_u = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} = \hat{m}_{\ln(x)}. \quad (1.132)$$

$$\sigma_{\ln(u)} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \hat{m}_{\ln(x)})^2 \right)}{n-1}}. \quad (1.133)$$

Для побудови відповідної кривої розподілу спочатку у такому випадку використовують таблицю нормального закону розподілу. З метою отримання закону розподілу, який можна застосувати до величин стоку, можна виконати трансформацію не вихідної змінної, а самого закону.

Нехай нам відомий закон розподілу деякої величини u . Необхідно отримати закон розподілу величини x , розподіл якої невідомий, але x функціонально зв'язаний з u , тобто

$$x = \varphi(u), \quad u = \psi(x), \quad (1.134)$$

тоді новий закон розподілу представляється у виді

$$f(x) = f(u) \frac{du}{dx}. \quad (1.135)$$

Якщо $u = \ln(x)$ підкорюється нормальному закону розподілу, то

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad (1.136)$$

і

$$f(x) = f(u) \frac{1}{x}. \quad (1.137)$$

Отже, рівняння логарифмічно-нормального закону розподілу запишеться у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{\ln x} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m_{\ln x})^2}{2\sigma_{\ln x}^2}} \frac{1}{x}. \quad (1.138)$$

Логарифмічно-нормальний закон розподілу використовується для рядів з високим коефіцієнтом асиметрії

$$C_s = 3C_v + C_v^2. \quad (1.139)$$

1.3.5.4 Крива трипараметричного гама розподілу С.М. Крицького і М.Ф. Менкеля

Трьохпараметричний гамма-розподіл базується на модифікації рівняння кривої Пірсона III при умові $C_s = 2C_v$. Для цього випадку, коли $C_s = 2C_v$, рівняння Пірсона III представляється у вигляді гама-функції

$$f(z) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha z} z^{\alpha-1}, \quad (1.140)$$

де z - значення випадкової величини в модульних коефіцієнтах, тобто $z = k$;

$\Gamma(\alpha)$ - гама-функція;

$$\alpha = \frac{4}{C_s^2} = \frac{1}{C_v^2}.$$

Рівняння гама-функції є двупараметричним, через те що залежить тільки від двох аргументів z і C_v ($C_s = 2C_v$). Позитивною якістю гама-функції є те, що значення z змінюється від 0 до ∞ , що відповідає фізичній природі стока. Однак, відношення $C_s = 2C_v$ є одним з частних випадків можливих розподілів. Щоб зробити рівняння (1.140) більш загальним вихідна величина z була трансформованою. Замість z була виведена нова змінна u

$$z = au^h \text{ та } h = \left(\frac{z}{a}\right)^{1/h}. \quad (1.141)$$

де a та h - параметри, які є функцією C_v та C_s .

Тоді

$$f(u) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha u} z^{u-1} . \quad (1.142)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{a} \right)^{1/h} z^{1/h-1} . \quad (1.143)$$

Згідно з (1.135) новий закон розподілу можна записати у вигляді

$$f(z) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\alpha u} z^{u-1} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a} \right)^{1/b} z^{1/h-1} . \quad (1.144)$$

Якщо замінити u на z і урахувати, що $z = k$, то

$$f(k) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{a} \right)^{1/b} \frac{1}{h} e^{-\alpha \left(\frac{k}{a} \right)^{1/h}} k^{a/h-1} , \quad (1.145)$$

де a і h - параметри розподілу, які зв'язані із стандартними параметрами – коефіцієнтами варіації та асиметрії.

Розрахунковий алгоритм дуже складний і вирішення надається у вигляді статистик $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Головна перевага кривих розподілу Крицького-Менкеля полягає у тому, що при будь-яких співвідношеннях між C_s та C_v нижня границя признака завжди дорівнює нулю.

При використанні трьохпараметричного гама розподілу слід пам'ятати, що у якості статистичних параметрів можна використовувати тільки параметри, визначені за методом найбільшої правдоподібності.

1.3.6 Клітчатка ймовірностей, їх призначення

Криві розподілу, побудовані в декартових шкалах координат, які використовуються в гідрології, мають випукло-вогнутий вигляд. Тому з'являються проблеми в екстраполяції емпіричних кривих забезпеченостей в області малих та великих забезпеченостей. Для усунення цих недоліків

використовують клітчатка імовірностей, які значною мірою вирівнюють залежності. Вирівнювання досягається за рахунок трансформації шкали забезпеченостей таким чином, щоб у системі координат розглядався інтегральний закон розподілу або крива забезпеченості у вигляді прямої лінії. Як правило, трансформація відбувається за допомогою графічних методів. Стосовно до закону нормального розподілу використовується клітчатка з помірною асиметрією. При позитивній асиметрії крива має злегка вогнуту форму, при негативній - випуклу.

Стосовно до логарифмічно-нормального закону використовують клітчатка значної асиметрії. Вони можуть бути побудовані на основі клітчатка нормального закону, якщо вісь ординат виразити у вигляді логарифмічної шкали.

Клітчатка імовірності, вирівнюючі трипараметричний гамма-розподіл будують для рядів, асиметрія яких значно відрізняється від нуля.

1.3.7 Розрахунки характеристик стоку заданої забезпеченості за теоретичними законами розподілу

Емпіричні криві забезпеченості не дають можливості визначити величини стоку за межами вихідної інформації. Безпосередньо графічна екстраполяція емпіричної кривої забезпеченості у область малих ($p < 5\%$) та великих ($p > 95\%$) забезпеченостей має суб'єктивний характер і може привести до значних похибок у розрахунках. Теоретичні закони розподілу у даному випадку "вирівнюють" емпіричний розподіл стокової величини та екстраполюють його за межі спостережених даних.

Найчастіше у гідрологічних розрахунках застосовуються закон Пірсона III та трипараметричний гама-розподіл С.Н.Крицького та М.Ф.Менкеля. СНіП 2.01.14-83 рекомендує при $C_v \leq 0.5$ та $C_s \geq 2C_v$ використовувати закон Пірсона III, а при $C_v > 0.5$ та $C_s < 2C_v$ - трипараметричний гама-розподіл. Ці теоретичні розподіли представлені у вигляді таблиць. Наприклад, ординати теоретичної кривої забезпеченості Пірсона III надаються у вигляді нормованих відхилень від середньої величини стоку

$$\Phi(p, C_s) = \frac{x_p - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{k_p - 1}{C_v}, \quad (1.146)$$

а ординати трипараметричного гама-розподілу - у вигляді модульних коефіцієнтів

$$K(P, C_v) = \frac{x_p}{\bar{x}}. \quad (1.147)$$

при заданому відношенні C_s/C_v .

Щоб скористатися таблицями теоретичних розподілів, спочатку необхідно визначити оцінки статистичних параметрів по матеріалам спостережень за стоком. Слід зазначити, що при використанні методу найбільшої правдоподібності для розрахунків вибірових значень статистичних параметрів, за теоретичний розподіл можна прийняти тільки трипараметричний гама-розподіл, тому що формули метода найбільшої правдоподібності виведені з цього закону. Що стосується закону розподілу Пірсона III, то при $C_s < 2C_v$ та при $P > 90\%$ ординати теоретичної кривої забезпеченості можуть мати від'ємні значення, а це суперечить фізичній суті стокових величин.

Розрахунки характеристик стоку за теоретичним розподілом Пірсона III виконуються за виразом

$$x_p = (\Phi_p C_v + 1) \bar{x}, \quad (1.148)$$

а при застосуванні трипараметричного гама-розподілу -

$$x_p = k_p \bar{x}. \quad (1.149)$$

1.3.8 Загальні представлення про теорію випадкових процесів

1.3.8.1 Поняття про випадкову функцію

На практиці приходиться оперувати величинами, які змінюються у процесі іспиту. Такі величини отримали назву випадкових функцій. Вивченням подібних випадкових явищ, в яких випадковість приймає форму процесу, займається спеціалізована галузь теорії ймовірностей – теорія випадкових функцій або стохастичних процесів.

Випадкова функція – це функція, значення якої устанавлюються за допомогою іспиту і можуть бути різними в залежності від ходу іспиту. ***Випадковою функцією називається функція, яка в разі іспиту може прийняти той чи інший конкретний вид, наперед невідомо, який саме. Конкретний вид, який приймає випадкова функція в результаті іспиту називається реалізацією випадкової функції.***

Зустрічаються випадкові функції, які залежать не від одного аргументу, а декількох. У гідрологічних розрахунках найчастіше розглядається функція тільки одного аргумента – часу. Якщо аргументом випадкової функції є час, то для її позначення використовується термін «випадковий процес».

Випадкову функцію вивчають аналітичним способом, заснованим на визначенні багатовимірного закону її розподілу, і, статистичним, заснованим на визначенні тільки числових характеристик такої функції. Перший спосіб застосовують у теоретичних дослідженнях. Другий спосіб широко використовують для вирішення різних прикладних задач у теорії випадкових функцій.

Розглянемо випадкову функцію $X(t)$, над якою проведено n незалежних іспитів і отримано n реалізацій. Кожна реалізація є звичайною, тобто не випадковою функцією. Сімейство реалізацій функції, що відповідає ймовірністному процесу з безперервною зміною функції в залежності від аргументу приведене на рис. 1.9.

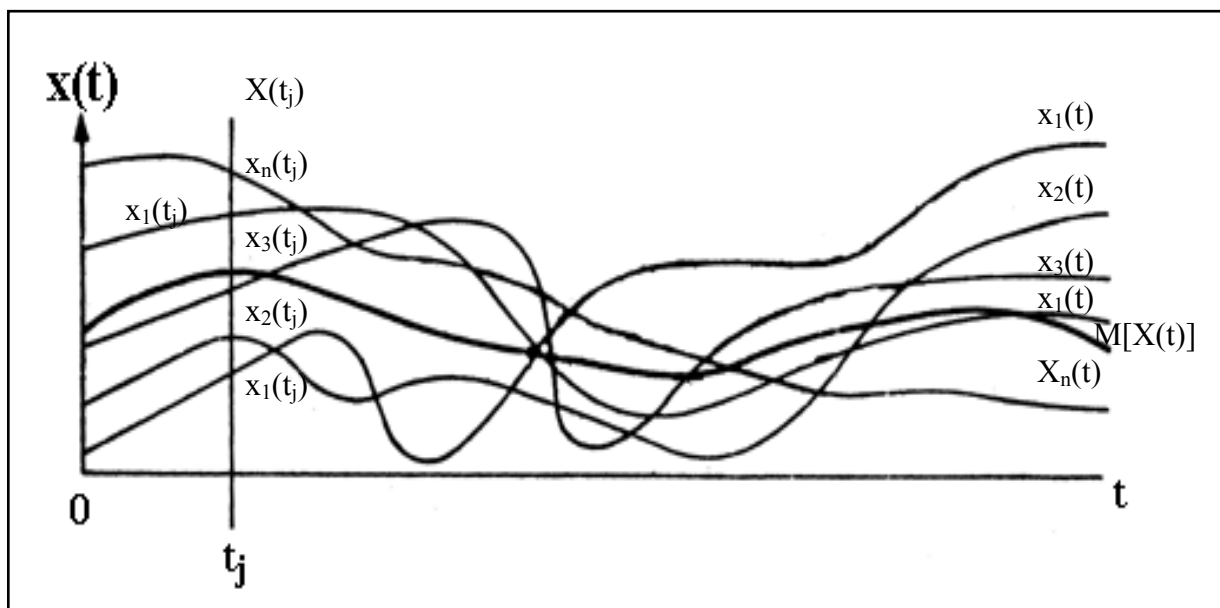


Рисунок 1.9 - Сімейство реалізацій випадкової функції

Реалізації випадкової функції можна отримати за допомогою самописного приладу, осциллограмми запису змін процесу в часі, кінозйомки, періодичної фотозйомки.

1.3.8.2 Закон розподілу випадкової функції

Закон розподілу однієї випадкової величини є функція одного аргументу, закон розподілу системи двох величин – функція двох аргументів і т.д. Однак, для практичного використання функції розподілу багатьох аргументів застосовувати незручно. Зазвичай, відмовляються від використання законів розподілу і розглядають тільки числові характеристики випадкових функцій.

Закон розподілу випадкової функції може представляти собою функцію безлічі аргументів, яку чисто формально можна записати в символічній формі.

Якщо зафіксувати деяке значення аргументу t_j , то при заданому значенні аргументу t_j (рис. 1.9) випадкова функція перетворюється у випадкову величину $X(t_j)$, яка називається перерізом випадкової функції, що відповідає моменту t_j . Значеннями цієї випадкової величини будуть значення $x_1(t_j), x_2(t_j), \dots, x_n(t_j)$, де n - кількість реалізацій.

Таким чином випадкова функція суміщує у собі риси випадкової величини і функції. Якщо зафіксувати значення аргумента, то отримуємо випадкову величину. В результаті кожного іспита випадкова функція, у свою чергу, перетворюється у звичайну не випадкову функцію.

Розглянемо випадкову величину $X(t)$ - переріз випадкової функції в момент часу t . Ця випадкова величина має закон розподілу, що у загальному випадку залежить від t і обозначається як $f(x, t)$. Функція $f(x, t)$ називається одновимірним законом розподілу випадкової функції $X(t)$. Функція $f(x, t)$ не є повною вичерпною характеристикою випадкової функції $X(t)$. Дійсно, ця функція характеризує тільки закон розподілу $X(t)$ для даного, хоча і довільного t ; вона не відповідає на запитання про взаємозв'язок випадкових величин $X(t)$ при різних t . З цього погляду більш повною характеристикою випадкової функції $X(t)$ є так званий двовимірний закон розподілу

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2). \quad (1.150)$$

Це закон розподілу системи двох випадкових величин $X(t_1), X(t_2)$, тобто закон розподілу для двох довільно узятих перетинів випадкової функції $X(t)$. Однак і ця характеристика не є вичерпною, ще більш повним описом випадкової функції був би тривимірний закон:

$$f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3). \quad (1.151)$$

Теоретично можна необмежено збільшувати число аргументів, але оперувати ними вкрай незручно. У зв'язку з цим на практиці розглядають не закони розподілу, а найпростіші характеристики випадкових функцій, аналогічні числовим характеристикам випадкових величин.

1.3.8.3 Характеристики випадкових функцій. Визначення характеристик випадкових функцій

Основними числовими характеристиками випадкового процесу є: математичне сподівання, що визначає таку функцію, навколо якої групуються реалізації випадкової функції; дисперсія, що показує ступінь розсіювання цих реалізацій відносно математичного сподівання, кореляційна функція, що визначає внутрішню структуру випадкового процесу і характеризує силу взаємного зв'язку між **реалізаціями** випадкової функції.

На відміну від числових характеристик випадкових величин, які представляють собою числа, характеристики випадкових функцій представляють собою у загальному випадку не числа, а функції.

Математичне сподівання випадкової величини визначається в такий спосіб. Розглянемо перетин випадкової функції $X(t)$ при фіксованому t . У цьому перетині ми маємо звичайну випадкову величину; визначимо її математичне сподівання. Очевидно, у загальному випадку воно залежить від t , тобто являє собою деяку функцію t :

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (1.152)$$

Таким чином, *математичним сподіванням випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $m_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перетину випадкової функції*. На рис.1.9 тонкими лініями показані реалізації випадкової функції, жирною лінією – її математичне сподівання.

Дисперсією випадкової функції $X(t)$ називається не випадкова функція $D_x(t)$, значення якої для кожного t дорівнює дисперсії відповідного перетину випадкової функції

$$D_x(t) = D[X(t)]. \quad (1.153)$$

$D_x(t)$ є ненегативною функцією. Добуваючи з неї квадратний корінь, одержимо функцію $\sigma_x(t)$ - середнє квадратичне відхилення випадкової функції

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D[X(t)]}. \quad (1.154)$$

Досить часто користуються центрованою характеристикою випадкової функції – флуктуацією

$$\delta[X(t)] = X(t) - M[X(t)], \quad (1.155)$$

очевидно, що

$$M\delta[X(t)] = 0. \quad (1.156)$$

Нормована випадкова функція представляється у вигляді

$$X_0(t) = \delta[X(t)] / \sigma[X(t)], \quad (1.157)$$

для якої справедливі рівняння

$$M[X_0(t)] = 0; \quad D[X_0(t)] = 1. \quad (1.158)$$

Дисперсія характеризує розсіювання реалізацій випадкової функції відносно функції математичного сподівання. Не виключена можливість однакової дисперсії для всіх значень аргументу t , тобто $D[X(t)] = D(X)$. Якщо така дисперсія дорівнює нулю, то можна вважати, що випадкова функція $X(t) = M[X(t)]$ має імовірність появи, яка дорівнює одиниці.

Бувають випадки, коли математичні сподівання випадкових функцій однакові, а їхні дисперсії різні. Наприклад, на рис. 1.10 показані реалізації випадкових функцій $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, що мають однакові математичні сподівання, але різні дисперсії.

Математичне сподівання і дисперсія визначають тільки смугу можливих реалізацій випадкової функції, але не поведження реалізацій усередині такої смуги.

На рис. 1.11 приведені сімейства реалізацій (а) випадкових функцій, скедастичні криві (б), що показують зміну дисперсій, і кореляційні еліпси (в), які характеризують взаємний зв'язок випадкових ординат по перетинах t_1 і t_2 . Зв'язок між випадковими величинами $X(t_1)$ і $X(t_2)$ може бути виражений за допомогою кореляційного моменту чи коефіцієнта кореляції.

Ступінь залежності між перетинами випадкової функції у різних аргументах t , характеризується ковариаційною або кореляційною функціями.

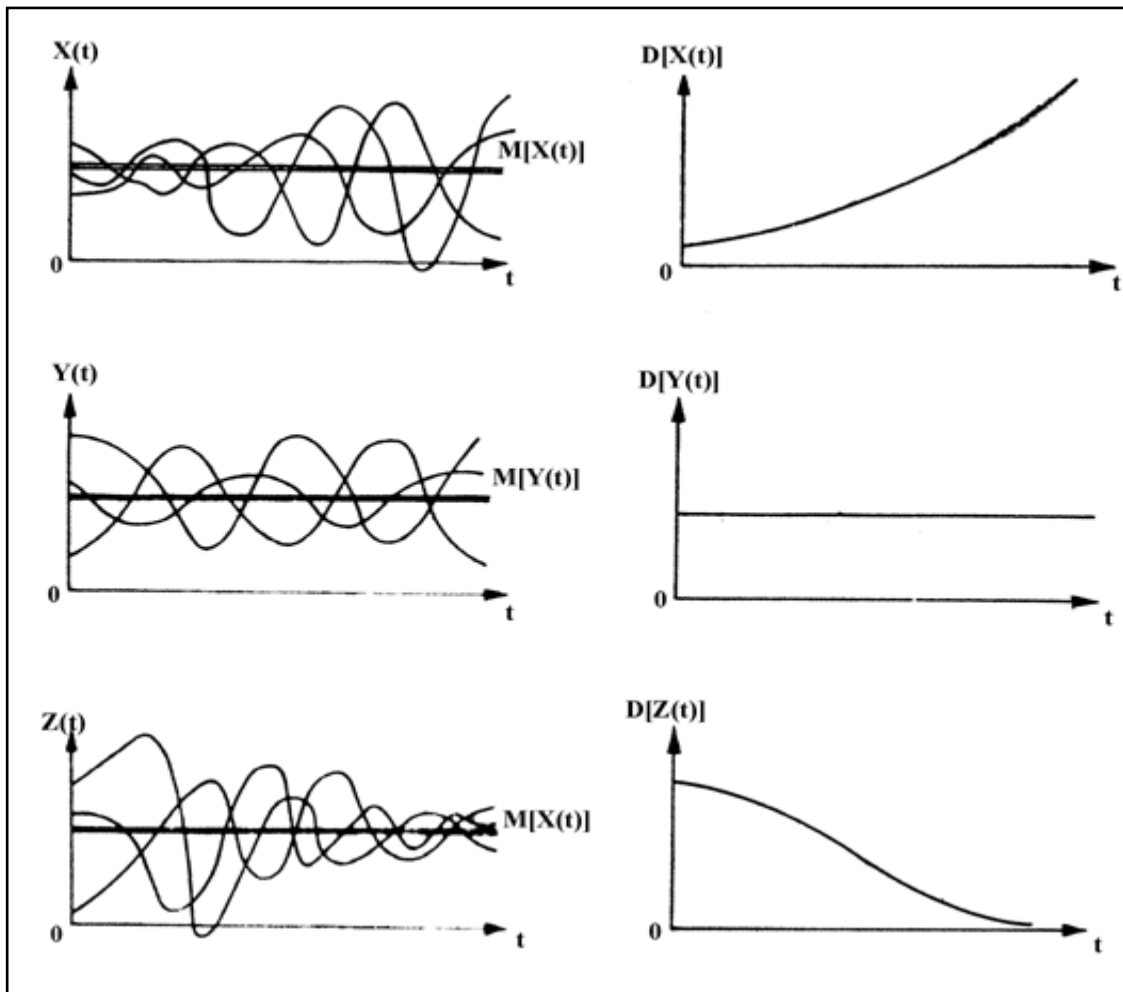


Рисунок 1.10 - Зміна дисперсії у часі для різних випадкових процесів

Коваріаційним моментом випадкової функції називається не випадкова функція двох аргументів K_x , що для кожної пари перетинів випадкової функції відповідних аргументів t_i і t_j дорівнює кореляційному моменту

$$K_x = K[X(t_i), X(t_j)] = M\{\delta[X(t_i)] \cdot \delta[X(t_j)]\}. \quad (1.159)$$

Розглянемо два випадкових процеси $X_1(t)$ і $X_2(t)$ з однаковими математичними сподіваннями та дисперсіями (рис.1.12, 1.13)

Коваріаційна функція випадкової функції $X_1(t)$ повільно убуває по мірі збільшення проміжку $t = t'$. Навпроти, коваріаційна функція випадкової функції $X_2(t)$ убуває швидко. Ці особливості випадкових процесів характеризуються саме коваріаційними моментами.

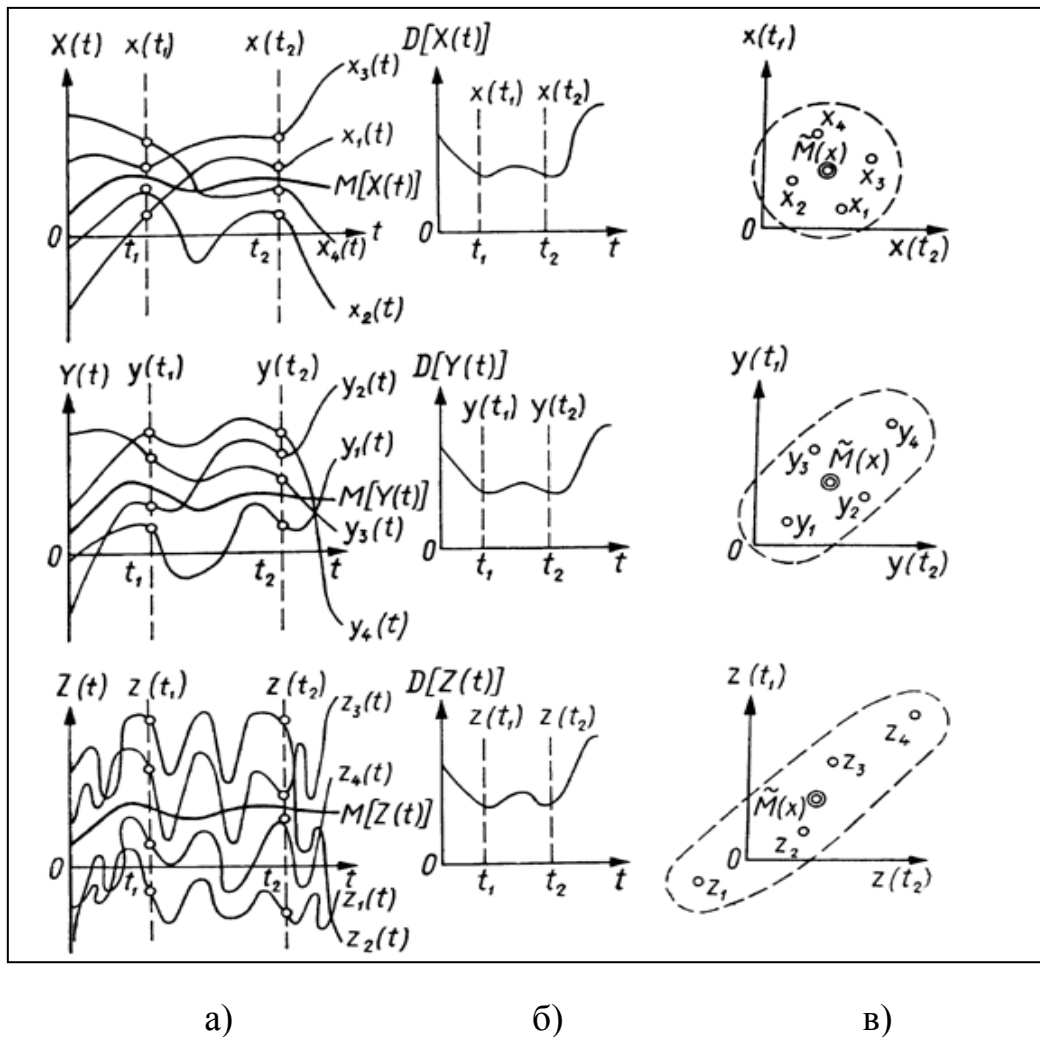


Рисунок 1.11 - Випадкові функції, їх дисперсії та еліпси розсіювання

На практиці також використовують кореляційну функцію, яка являє собою нормований кореляційний момент

$$r_x = r[X(t_i), X(t_j)] = \frac{K[X(t_i), X(t_j)]}{\sigma(t_i) \cdot \sigma(t_j)}. \quad (1.160)$$

Кореляційну функцію випадкового процесу часто називають **автокореляційною**, що означає кореляцію процесу із самим собою. При $t_i = t_j = t$, одержимо

$$K[X(t), X(t)] = M[\delta^2(t)] = D_x(t), \quad (1.161)$$

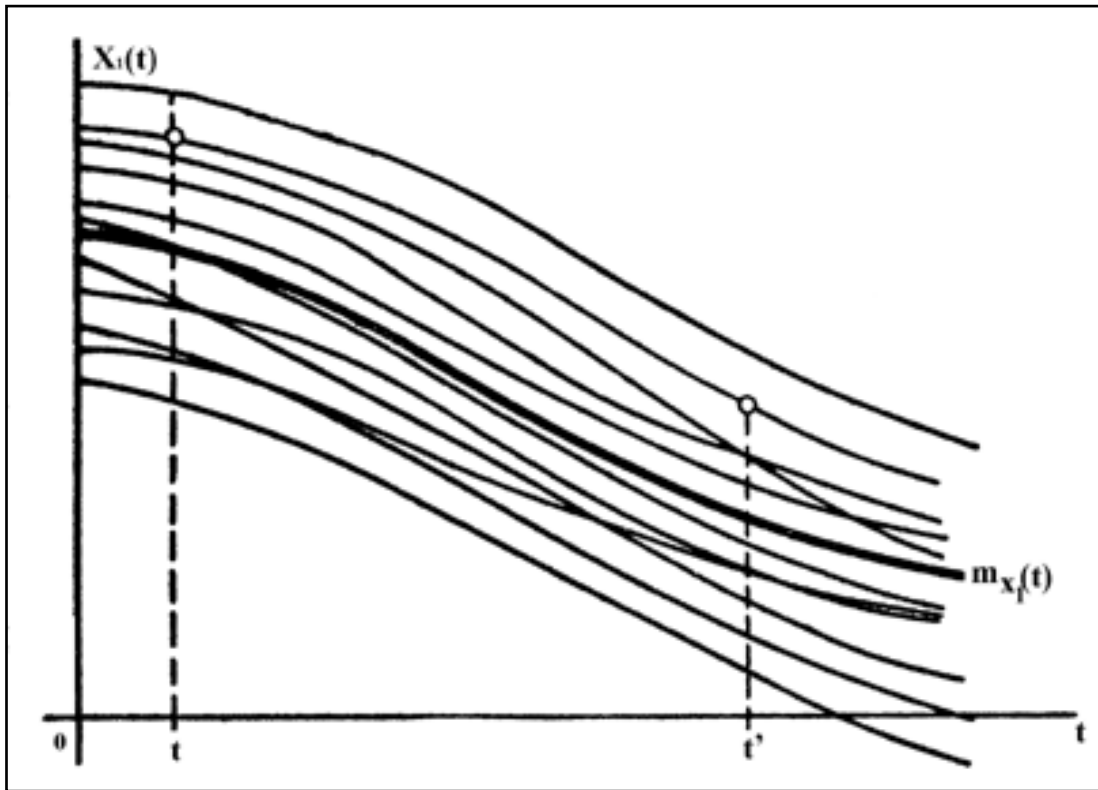


Рисунок 1.12 - Реалізації випадкової функції $X_1(t)$

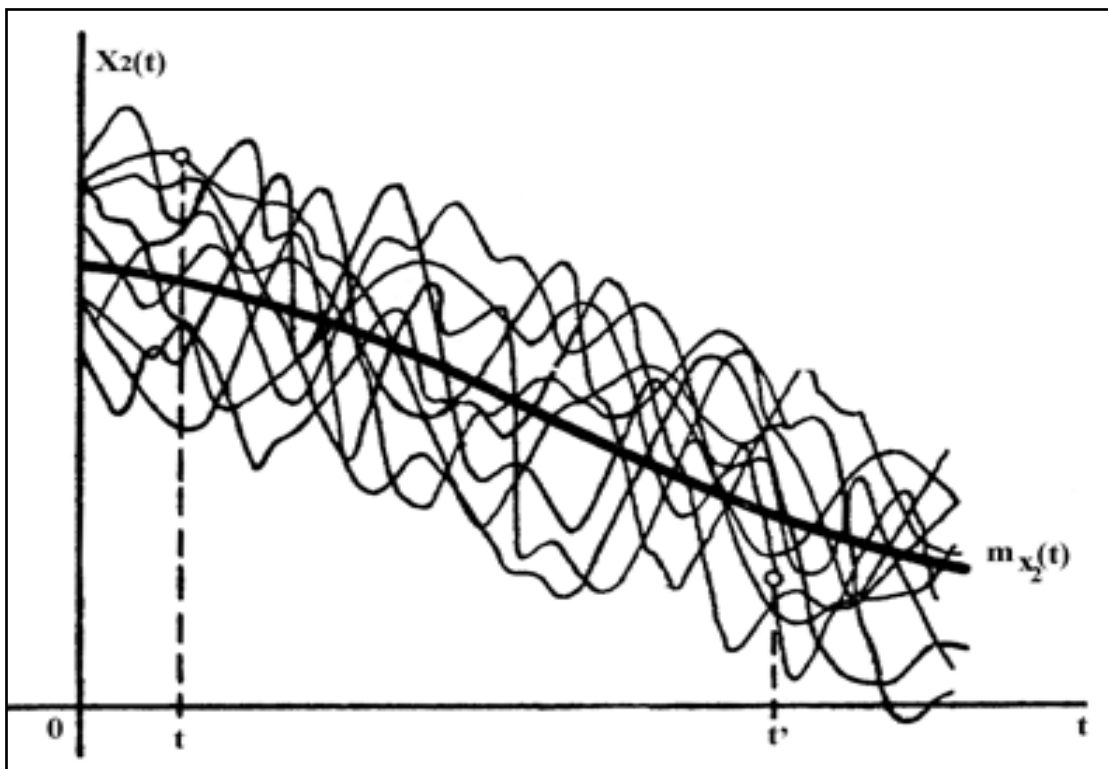


Рисунок 1.13 - Реалізації випадкової функції $X_2(t)$

тобто при $t_i = t_j$ коваріаційна функція стає дисперсією випадкової функції, а кореляційна функція дорівнює 1.

Таким чином, при $t_i = t_j$ необхідність в дисперсії як в окремій характеристиці випадкової функції відпадає: у якості основних характеристик випадкової функції достатньо розглядати її математичне сподівання і кореляційну функцію.

Коваріаційний момент двох випадкових величин $X(t)$ і $X(t')$ не залежить від послідовності, при якій ці величини розглядаються, отже, коваріаційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто не змінюється при переміні аргументів місцями

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \quad (1.162)$$

Інтервал $(t_i - t_j)$ називають «запізнюванням» чи «зсувом».

Очевидно, що значення коваріаційної і автокореляційної функцій залежать від інтервалу між t_i і t_j . Вони зменшуються із збільшенням цього інтервалу. При одних і тих самих математичних сподіваннях і дисперсіях дві випадкові функції можуть мати різні автокореляційні функції. Кореляційна функція може бути залежною не від окремих значень t_i і t_j , а від різностей $t_i - t_j$. Якщо при одному з значень t_i чи t_j , випадкова функція $X(t)$ стає не випадковою величиною, то $K[X(t_i), X(t_j)] = 0$ при будь-якій значенні іншого аргументу.

Коваріаційна (кореляційна) функція симетрична щодо своїх аргументів. Вона зображується в тривимірній системі прямокутних координат t_i, t_j і $K[X(t_i), X(t_j)]$ у вигляді поверхні симетричної щодо вертикальної площини Q , яка проходить через бісектрису кута $t_i O t_j$ (рис. 1.14). Це властивість коваріаційної функції відповідає властивості коваріаційної матриці системи випадкових величин (табл.1.1), які приблизно виражають випадкову функцію. По головній діагоналі цієї матриці розташовуються дисперсії. Симетрично щодо неї розміщуються кореляційні моменти (коваріації), які задовольняють умові $K[X(t_i), X(t_j)] = K[X(t_j), X(t_i)]$.

У прикладному варіанті теорії випадкових функцій оперують числовими характеристиками, визначеними за спостереженими даними (з іспиту).

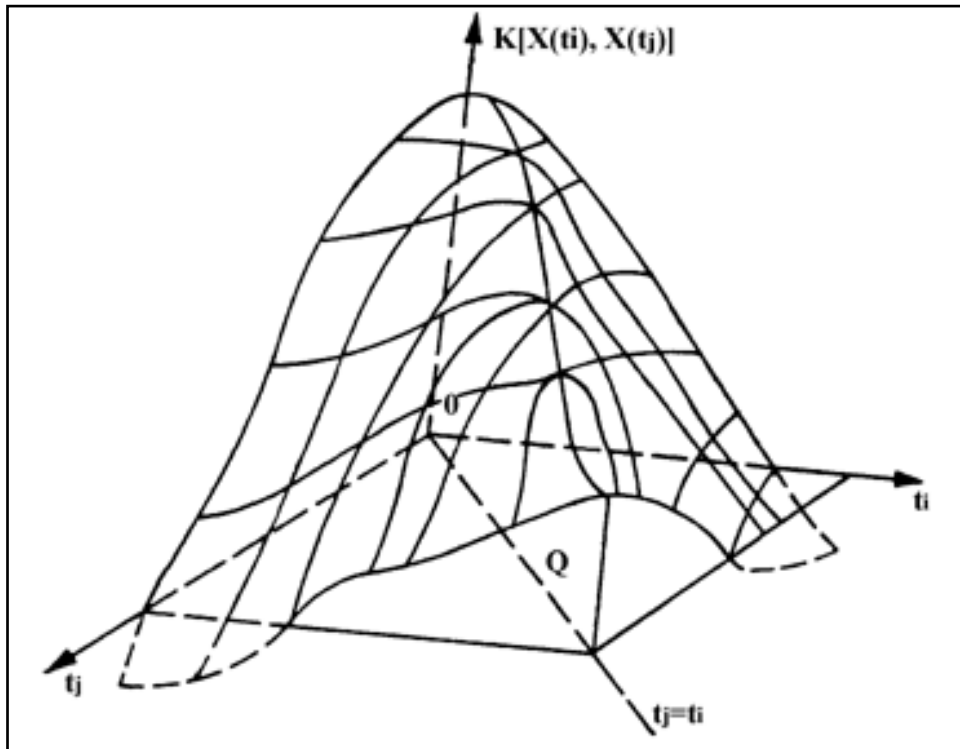


Рис. 1.14 - Коваріаційна функція у вигляді поверхні

Таблиця 1.1 – Коваріаційна матриця системи випадкових величин

t_i	t_j					
	t_1	t_2	...	t_j	...	t_n
t_1	D_1	K_{12}	...	K_{1j}	...	K_{1n}
t_2	K_{21}	D_2	...	K_{2j}	...	K_{2n}
...
t_i	K_{i1}	K_{i2}	...	D_j	...	K_{in}
...
t_n	K_{n1}	K_{n2}	...	K_{nj}	...	D_n

Нехай над випадковою функцією $X(t)$ зроблено n незалежних іспитів (спостережень), у результаті отримано n реалізацій випадкової функції. Якщо число реалізацій дорівнює m , то для кожного перетину t_i можна обчислити емпіричні (статистичні) оцінки характеристик випадкової функції

Якщо число реалізацій дорівнює m , то для кожного перетину t_i можна обчислити емпіричні (статистичні) оцінки характеристик випадкової функції $X(t)$. Так, оцінкою математичного сподівання в перетині t_i є просте середнє арифметичне

$$\bar{x}(t_i) = \frac{\sum_{j=1}^m x_j(t_i)}{m}, \quad (1.163)$$

оцінкою дисперсії -

$$\hat{\sigma}_x(t_i) = S_X^2(t_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \{ \delta[X(t_i)] \} = \frac{\sum_{j=1}^m [x_j(t_i) - \bar{x}(t_i)]^2}{m-1} \quad (1.164)$$

Для кореляційних і коваріаційних функцій розрахунок виконується по наступним формулам

$$r_x(t_i, t_k) = \frac{\sum_{j=1}^m [x_j(t_i) - \bar{x}(t_i)][x_j(t_k) - \bar{x}(t_k)]}{(m-1)S_X(t_i)S_X(t_k)} ; \quad (1.165)$$

$$K_x(t_i, t_k) = \frac{\sum_{j=1}^m [x_j(t_i) - \bar{x}(t_i)][x_j(t_k) - \bar{x}(t_k)]}{(m-1)}. \quad (1.166)$$

Після того, як характеристики обчислені, можна побудувати залежності середньої арифметичних \bar{x} і дисперсії S_X^2 від часу. Функції двох аргументів $r_x(t_i, t_k)$ і $K_x(t_i, t_k)$ також відтворюються в прямокутній сітці точок. За необхідністю всі ці функції апроксимуються аналітичними виразами.

1.3.8.4 Поняття про стаціонарність випадкового процесу. Ергодичність стаціонарних випадкових процесів

Випадкові процеси, що протікають у часі приблизно однородно, називають стаціонарними. Вони мають вид безперервних коливань відносно деякого середнього значення. Реалізації таких процесів знаходяться як би в стані статистичної рівноваги. З часом середня амплітуда і характер коливань істотно не міняються.

У строгому розумінні слова випадковий процес називають стаціонарним, якщо всі його закони розподілу не змінюються при додаванні до всіх значень аргументу одного й того самого числа, тобто якщо усі вони залежать тільки від взаємного розташування значень аргументу одного й того самого числа або якщо усі вони залежать тільки від взаємного розташування значень аргументу, але не від самих цих значень.

Таким чином, випадковий процес $X(t)$ є стаціонарним, якщо при будь-якому n і будь-якому t_0 будуть виконуватися рівності

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0) \quad (1.167)$$

Отже, щільності розподілу інваріантні стосовно зсуву початку відліку аргументу t .

Зокрема, для одновимірної щільності розподілу $f_1(x, t)$ стаціонарного випадкового процесу, приймаючм $t_0 = -t$, отримуємо

$$f_1(x, t) = f_1(x; t - t) = f_1(x; 0) = f_1(x). \quad (1.168)$$

Таким чином, одновимірна щільність розподілу стаціонарного процесу не залежить від t , вона є однію і тією ж для усіх перетинів випадкового процесу. Двовимірна щільність розподілу при $t_0 = -t_1$ представляється у вигляді

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; 0; t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; \tau), \quad (1.169)$$

тобто двовимірна щільність розподілу залежить не від двох аргументів t_1, t_2 , а тільки одного аргументу – їхньої різниці $\tau = t_2 - t_1$. Звідси для стаціонарного випадкового процесу, згідно з (1.168), одержуємо

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = m_x = \text{const}, \quad (1.170)$$

тобто математичне сподівання стаціонарного випадкового процесу не залежить від аргументу t і є постійною величиною.

Згідно з (1.169) вираз для кореляційного моменту буде наступний

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) \cdot f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = K_x(\tau). \quad (1.171)$$

Таким чином, коваріаційна функція стаціонарного випадкового процесу є функцією тільки одного аргументу $\tau = t_2 - t_1$. Умови (1.170) і (1.171) виконуються для будь-якого стаціонарного процесу, тобто є необхідними умовами його стаціонарності. Однак вони не є достатніми для стаціонарного процесу, тобто їхнє виконання не гарантує виконання умов (1.167). Таке розуміння стаціонарності випадкових функцій називають стаціонарністю у вузькому розумінні.

У прикладній теорії стаціонарних випадкових функцій користуються представленням про стаціонарність у широкому змісті. За звичай припускають, що стаціонарний випадковий процес повинний задовольняти трьом умовам

$$M[X(t_s)] = \text{const}, D[X(t_s)] = \text{const}, K_X[X(t_s), (t_k)] = K_\tau. \quad (1.172)$$

Таким чином, *випадкова функція називається стаціонарною, якщо усі її статистичні характеристики не залежать від t , точніше, не змінюються при будь-якому зсуві аргументів, від яких вони залежать.*

Однак не всі ці умови рівноцінні. Не можна вважати сталість математичного сподівання істотною вимогою до стаціонарної випадкової функції. При переході до центрованої випадкової функції – флуктуації – відразу ж виконується рівність $M\{\delta[X(t)]\} = 0$, тобто перша умова (1.172). Отже, у випадку перемінного математичного сподівання $M[X(t)]$ досить перейти до флуктуацій для того, щоб виконати одну з вимог до стаціонарного випадкового процесу.

Виконання другої умови (1.172) є частинним випадком третього. Для стаціонарного випадкового процесу характерна незалежність значень коваріаційної функції від положення відрізка τ на осі t . Коваріаційна функція повинна залежати тільки від довжини проміжку τ (1.171). Покладемо $t_s = t$; $t_k = t + \tau$. Якщо $\tau = 0$, то згідно (1.161)

$$D_X(t) = K_X[X(t), X(t+0)] = K_X(\tau = 0) = \text{const.} \quad (1.173)$$

Іншими словами, у випадку стаціонарного випадкового процесу його дисперсія є ні що інше, як значення коваріаційної функції при $\tau = 0$, що не є функцією аргументу. Слід зазначити, що з властивості симетричності коваріаційної і кореляційної функцій

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau); \quad (1.174)$$

$$r_X(\tau) = r_X(-\tau), \quad (1.175)$$

витікає незалежність цих функцій від знака величини τ , тобто можна вважати $\tau = |t_2 - t_1|$. Тому коваріаційну і кореляційну функції знаходять тільки для позитивного аргументу.

Найчастіше зустрічаються стаціонарні випадкові процеси, коваріаційні функції яких апроксимуються функціями наступних типів (рис. 1.15)

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}, \quad a > 0 \quad (1.176)$$

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau^2}, \quad a > 0 \quad (1.177)$$

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} \cdot \cos \beta\tau, \quad a > 0 \quad (1.178)$$

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a\tau^2} \cdot \cos \beta\tau, \quad a > 0 \quad (1.179)$$

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad a > 0, \beta > 0 \quad (1.180)$$

$$K_X(\tau) = \begin{cases} \sigma \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) & \text{при } |\tau| \leq \tau_0 \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_0 \end{cases} \quad (1.181)$$

На рис. 1.15 приведені графіки коваріаційних функцій тільки для $\tau > 0$, у силу парності цих функцій при $\tau < 0$ їм будуть відповідати криві, симетричні щодо осі ординат. З рис. 1.15 видно, що значення кореляційної функції убувають з ростом τ , тобто кореляційний зв'язок між різними перетинами випадкової функції убуває зі збільшенням інтервалу часу між

ними. Криві на рис. 1.15.а, 1.15.б мають вид гармонійних коливань з амплітудою, яка зменшується у часі. Вид цих кривих указує на наявність періодичності в структурі випадкової функції.

Одержання негативних значень $K_X(\tau)$ означає прояв негативних зв'язків між перетинами випадкової функції. Для всіх приведених випадків ковариаційна, а, отже, і кореляційна функція прагне до нуля при прагненні τ до нескінченності. Ця властивість виконується практично для всіх гідрометеорологічних рядів.

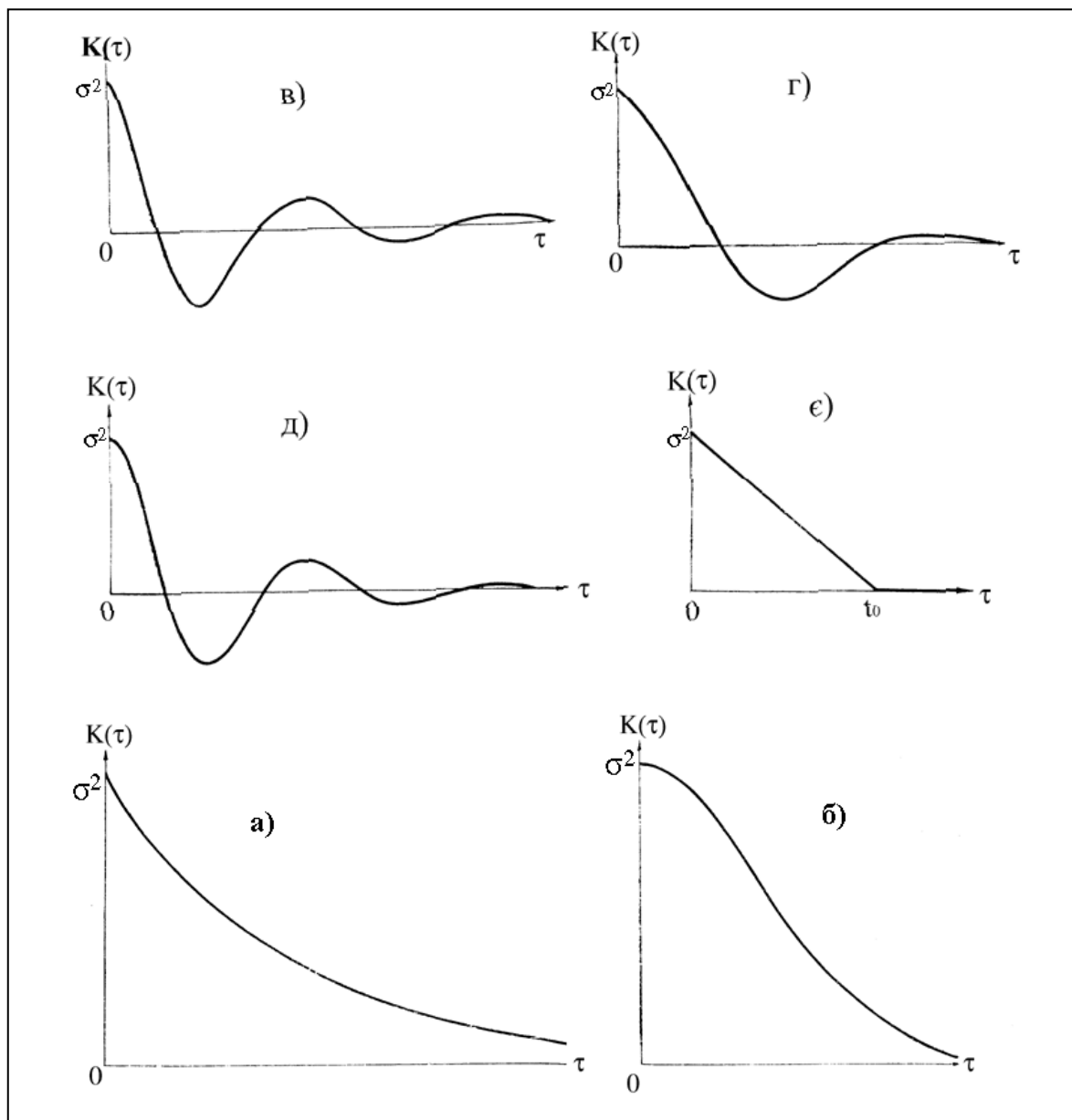


Рисунок 1.15 - Приклади ковариаційних функцій стаціонарних процесів

Коли в структурі випадкової функції як постійний доданок мається деяка випадкова величина, при $\tau \rightarrow \infty$ коваріаційна функція буде прагнути не до 0, а до дисперсії D цієї величини (рис.1.16). Як правило, вид автокореляційної функції, наведений на рис. 1.16, характерний для випадкових процесів, які знаходяться під впливом монотонно зростаючих антропогенних перетворень.

Переважній більшості стаціонарних випадкових функцій властива ергодичність. Це відноситься до випадкових функцій, що характеризуються стаціонарністю у вузькому і широкому розумінні.

Властивість ергодичності полягає у тому, що кожна окрема реалізація стандартної випадкової функції є повноправним представником усієї сукупності можливих реалізацій. Одна реалізація достатньої довжини може замінити при статистичній обробці всі реалізації в цілому. Статистичні характеристики кожної реалізації є одними й тими ж для усіх реалізацій.

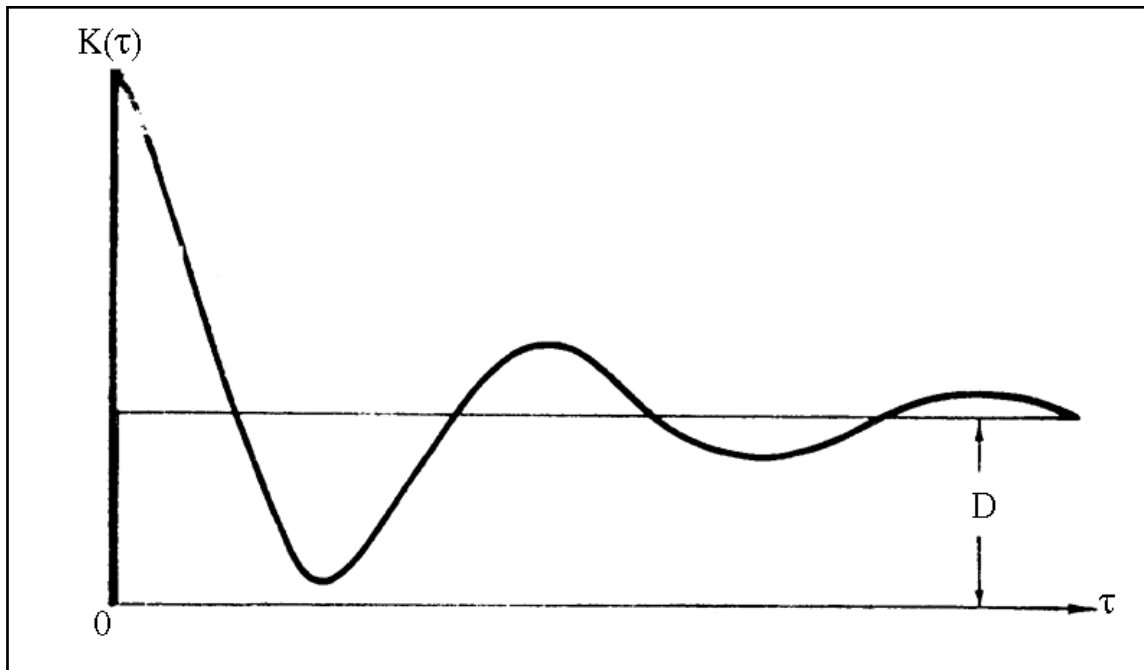


Рисунок 1.16 - Кореляційна функція при наявності постійного впливу на випадковий процес

Розглянемо дві стаціонарні випадкові функції $X_1(t)$ і $X_2(t)$ - рис.1.17. Кожна з реалізацій випадкової функції $X(t)$ має одні й тіж самі характерні ознаки: середнє значення, навколо якого коливаються реалізації; розмах коливань. Якщо вибрати довільно одну з таких

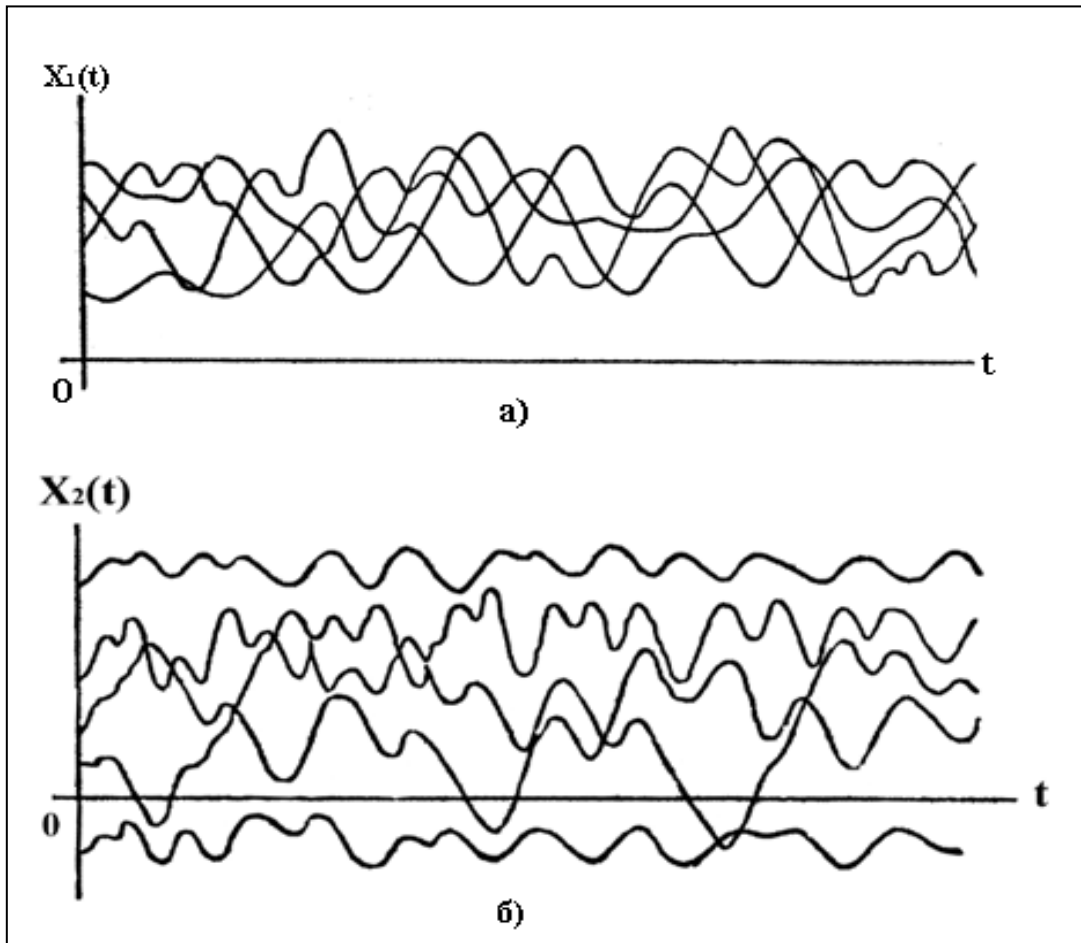


Рисунок 1.17 - Приклади стаціонарних випадкових процесів

реалізацій, то при досить довгій її тривалості T , то по ній можна одержати повне уявлення про випадкову функцію в цілому.

Осереднюючи значення цієї реалізації за часом, одержують оцінку математичного сподівання:

$$m_x \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.183)$$

автокореляційної функції:

$$K_x(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x] dt. \quad (1.184)$$

Якщо розбити інтервал запису випадкової функції на n рівних частин довжиною Δt і позначити середини отриманих ділянок t_1, t_2, \dots, t_n (рис. 1.18), то інтеграли (1.183) і (1.184) можна представити у вигляді

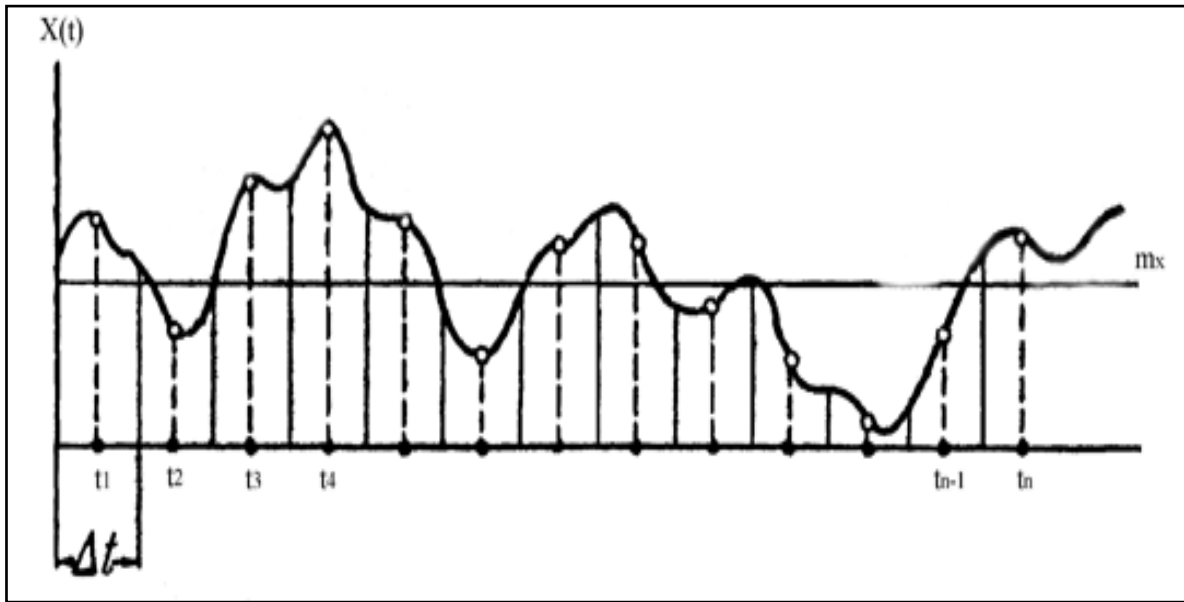


Рисунок 1.18 - Запис випадкової функції, що розбивається на n різних частин

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i) = \bar{x}. \quad (1.185)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} [x(t_i) - \bar{x}][x(t_i + \tau) - \bar{x}], \quad (1.186)$$

де $\tau = m\Delta t$, причому $m = 0, 1, 2, \dots$

У подальшому викладенні для простоти запису знак \wedge , який означає, що мова йде про оцінку характеристики за вибірковими даними, убирається, а t_i представляється як i

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.187)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x}). \quad (1.188)$$

Загальний вид функції $K_x(\tau)$ відтворюється по окремих точках. Для того, щоб математичне сподівання і кореляційна функція були визначені з задовільною точністю, потрібно, щоб число n було досить велике

(порядку сотні, а в деяких випадках навіть більше сотні). Вибір довжини елементарної ділянки Δt визначається характером зміни випадкової функції. Якщо випадкова величина змінюється порівняно плавно, ділянки Δt можна вибирати більшими, ніж коли функція робить різкі і часті коливання. Чим більш високочастотний склад мають коливання, що утворюють випадкову функцію, тим частіше потрібно розміщувати опорні точки при обробці. Орієнтовно можна вибирати елементарні ділянки Δt так, щоб на повний період самої високочастотної гармоніки в складі випадкової функції приходилося порядку 5-10 опорних точок.

Значення величини m задаються послідовно, аж до таких m , при яких кореляційна функція практично дорівнює нулю чи починає робити невеликі нерегулярні коливання біля нуля.

1.3.8.5 Автокореляційна функція, коефіцієнт автокореляції

У гідрологічних розрахунках річковий стік розглядається як ергодичний процес з річним періодом. Така гіпотеза зручна й необхідна, оскільки по кожному річковому створу є лише одна реалізація процесу стоку, яка представлена гідрологічними спостереженнями. Проте точного математичного доказу справедливості цієї гіпотези немає. Очевидно, що прийнята гіпотеза буде повністю знехтувана, якщо вимірювати час геологічними масштабами. В межах проміжків, що охоплюються періодом гідрологічних спостережень у минулому і перспективного планування в майбутньому за умови незначних антропогенних навантажень, порушення ергодичності стоку маловірогідні.

Кореляційний аналіз є одним з традиційних методів в дослідженнях зв'язків між послідовними членами рядів річного стоку. Проте значне випадкове розсіювання вибіркового оцінок коефіцієнтів кореляції при малій тривалості початкових рядів і невеликих числових значеннях $r_x(\tau)$ викликає природне утруднення в інтерпретації результатів розрахунку.

Ординати автокореляційної функції за вибірковими даними обчислюються з урахуванням зміщеності за наступною формулою:

$$r_x(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{\hat{\sigma}_x^2 (n - \tau - 1)}, \quad (1.189)$$

де n - число членів початкового ряду спостережень;

τ - зсув ряду по відношенню до самого себе при підрахунку коефіцієнта кореляції (запізнювання);

x_i - член ряду від x_i до $x_{n-\tau}$;

$x_{i+\tau}$ - члени ряду від $x_{i+\tau}$ до x_n ;

$\bar{x}, \hat{\sigma}_x$ - відповідно середнє і стандарт початкового ряду.

В [3] рекомендується урахувати зміну середнього і стандарту вибірки з ростом запізнювання автокореляційної функції. При цьому (1.189) приймає вигляд:

$$r_x(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x}_i)(x_{i+\tau} - \bar{x}_{i+\tau})}{\sigma_i \sigma_{i+\tau} (n + \tau + 1)}, \quad (1.190)$$

де $x_i, \bar{x}_{i+1}, \sigma_i$ і $\sigma_{i+\tau}$ - середні і стандарт відповідних відрізків вихідного ряду.

На думку більшості дослідників, вираз (1.190) перетворює вибіркове значення $r_x(\tau)$. Суть перетворення полягає у тому, що лінія регресії проходить при цьому через центр тяжіння не всієї сукупності точок, а тільки точок, які безпосередньо використовуються для підрахунку коефіцієнта кореляції: перетворення посилюється із зростанням запізнювання: чим більше T , тим сильніше відрізняються середнє і стандарт початкового ряду від відповідних значень тієї частини ряду, яка при зсуві використовується для підрахунку коефіцієнта кореляції.

Характеру автокореляційних функцій рядів річного стоку присвячена велика кількість досліджень як в колишньому СРСР, так і за межами країни. Найбільш суттєві роботи А.Ш.Резніковського, А.І.Чеботарьова і А.В.Рождественського, Д.Я.Ратковича, М.В. Болгова. В даний час встановлена наявність позитивного зв'язку між річним стоком суміжних років. Загальноприйнятого погляду на значущість внутрішньорядних зв'язків в послідовностях річного стоку поки немає. Навіть при відносно тривалих рядах стоку (50-60 років) недостовірні як окремі ординати автокореляційної функції, так і її контури. Тому при розрахунках річного стоку його ряди розглядаються як простий ланцюг Маркова, тобто враховуються кореляційні зв'язки тільки між стоком суміжних років. *(Послідовність випадкових іспитів, які мають таку властивість, що ймовірність результатів наступного іспиту залежать тільки від результатів безпосередньо попереднього іспиту називається простим ланцюгом Маркова)*. Таким чином, з усіх ординат автокореляційної функції береться до уваги тільки перша, яка відповідає $\tau = 1$.

Коефіцієнт кореляції між стоком суміжних років обчислюють згідно з виразом (1.190), виходячи з умови, що часовий зсув становить одиницю ($\tau = 1$):

$$r(\tau = 1) = r(1) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.191)$$

Середня квадратична похибка емпіричного коефіцієнта автокореляції визначається з рівняння:

$$\sigma_{r(1)} = \frac{1 - r(1)^2}{\sqrt{n - 1}}. \quad (1.192)$$

Розрахункове значення коефіцієнта кореляції вважається значущим, якщо виконується умова

$$r(1) \geq 2\sigma_{r(1)}. \quad (1.193)$$

Внутрішньорядні зв'язки у рядах річного стоку зменшують об'єм незалежної інформації. В той же час широко методи розрахунків статистичних параметрів припускають незалежність членів початкової вибірки. Для усунення впливу внутрішньорядних зв'язків між суміжними членами рядів річного стоку на точність розрахунків статистичних параметрів до коефіцієнтів варіації та асиметрії вносяться поправки

$$C_v = (a_1 + a_2 / n) + (a_3 + a_4 / n) \tilde{C}_v + (a_5 + a_6 / n) \tilde{C}_v^2; \quad (1.194)$$

$$C_s = (b_1 + b_2 / n) + (b_3 + b_4 / n) \tilde{C}_s + (b_5 + b_6 / n) \tilde{C}_s^2, \quad (1.195)$$

де $a_1, \dots, a_6; b_1, \dots, b_6$ - коефіцієнти, що визначаються по табл. 1.2 і 1.3

\tilde{C}_v, \tilde{C}_s - оцінки коефіцієнтів варіації і асиметрії, установлені без урахування внутрішньорядних зв'язків

$$\tilde{C}_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n - 1}}; \quad (1.196)$$

$$\tilde{C}_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum (k_i - 1)^3}{\tilde{C}_v^3}; \quad (1.197)$$

де $k_i = x_i / \bar{x}$.

Таблиця 1.2 – Коефіцієнти а у формулі (1.194)

C_s / C_v	$r(l)$	a_1	a_2	a_3	a_5	a_6	a_7
1	2	3	4	5	6	7	8
2.00	0.00	0.00	0.19	0.99	-0.88	0.01	1.54
	0.30	0.00	0.22	0.99	-0.41	0.01	1.51
	0.50	0.00	0.18	0.98	0.41	0.02	1.47
3.00	0.00	0.00	0.69	0.98	-4.34	0.01	6.78
	0.30	0.00	1.15	1.02	-7.53	-0.04	12.38
	0.50	0.00	1.75	1.00	-11.79	-0.05	21.13
4.00	0.00	0.00	1.36	1.02	-9.68	-0.05	15.55
	0.30	-0.02	2.61	1.13	-19.85	-0.22	34.15
	0.50	-0.02	3.47	1.18	-29.71	-0.41	58.08

Таблиця 1.3 – Коефіцієнти b в формулі (1.195)

$r(l)$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0.00	0.03	2.00	0.92	-5.09	0.03	8.10
0.30	0.03	1.77	0.93	-3.45	0.03	8.03
0.50	0.03	1.63	0.92	-0.97	0.03	7.94

Середні квадратичні похибки вибірових параметрів обчислюються таким чином:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+r(l)}{1-r(l)}}; \quad (1.198)$$

$$\sigma_{c_v} = \frac{C_v}{n+4C_v^2} \sqrt{\frac{n(1+C_v^2)}{2}} \left(1 + \frac{3C_v r(l)^2}{1-r(l)} \right). \quad (1.199)$$

1.4 Приклад розрахунків

1.4.1 Розрахувати статистичні параметри річного стоку з водозбору р.Ока – м.Калуга за період з 1936 по 1970 рр, використовуючи метод моментів.

Вихідні дані та результати обчислень повинні бути оформлені в таблиці такого вигляду:

Таблиця 1.4 – Розрахунок статистичних параметрів річного стоку за методом моментів р.Ока – м.Калуга, 1936-1970 рр.

№ пп	Рік	$Q_i, \text{м}^3/\text{с}$	$K_i = \frac{Q_i}{\bar{Q}}$	$K_i - 1$	$(K_i - 1)^2$	$(K_i - 1)^3$
1	1936	281	1.65	0.65	0.4225	0.2746
2	1937	304	1.38	0.38	0.1444	0.0555
.....
.....
.....
35	1970	450	0.65	-0.35	0.1225	0.04274
Сума		9531	35.08	-0.01	2.0056	0.4247

Розрахунок проводиться в такій послідовності:

1. обчислення середньої арифметичної величини за формулою (1.22)

$$n=35; \quad \bar{Q} = \frac{9531}{35} = 272 \text{ м}^3 / \text{с};$$

2. обчислення коефіцієнту варіації за формулою (1.34)

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{2.0056}{34}} = 0.24;$$

3. обчислення коефіцієнту асиметрії за виразом (1.40)

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3}{C_v^3} \frac{n}{(n-1)(n-2)} = \frac{35 \times 0.4247}{34 \times 33 \times 0.0143} = \frac{14.9}{16.0} = 0.93;$$

4. середнє квадратичне відхилення визначається за (1.33)

$$\sigma_Q = 0.24 \times 272 = 65.3 \text{ м}^3/\text{с};$$

5. випадкові похибки статистичних параметрів обчислені за формулами, приведеними в пункті 1.3.2.3:

$$\sigma_{\bar{Q}} = \frac{65.3}{\sqrt{35}} = \frac{65.3}{5.92} = 11.0 \quad (\text{за формулою 1.52});$$

$$\begin{aligned} \sigma_{C_v} &= \frac{C_v}{n + 4C_v^2} \sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}} = \\ &= \frac{0.24}{35 + 4 \times 0.24^2} \sqrt{\frac{35(1 + 0.24^2)}{2}} = 0.029 \end{aligned} \quad (\text{за формулою 1.54});$$

$$\begin{aligned} \sigma_{C_s} &= \sqrt{\frac{6}{n} (1 + 6C_v^2 + 5C_v^4)} = \\ &= \sqrt{\frac{6}{35} (1 + 6 \times 0.24^2 + 5 \times 0.24^4)} = 0.48 \end{aligned} \quad \text{за формулою (1.55);}$$

6. відносні випадкові похибки визначення статистичних параметрів визначаються за формулами (1.57)-(1.59)

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \frac{C_v}{\sqrt{n}} 100\% = \frac{0.24}{5.92} 100\% = 4.05\%;$$

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \frac{\sigma_{\bar{Q}}}{\bar{Q}} 100\% = \frac{11.0}{272} 100\% = 0.0405 \quad \text{або} \quad 4.05\%;$$

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V} 100\% = \frac{0.029}{0.24} 100\% = 12.1\%;$$

$$\varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} 100\% = \frac{0.48}{0.93} 100\% = 51.6\%.$$

На підставі отриманих результатів можна зробити висновок, що точність розрахунків статистичних параметрів \bar{Q} та C_V задовільна, так як $\varepsilon_{\bar{Q}} < 5\%$, а $\varepsilon_{C_V} < 15\%$.

Відносне середньоквадратичне відхилення параметру C_S складає 51.6%, тобто цей параметр рекомендується розраховувати по середньому для розглядуваного регіону співвідношенню C_S / C_V .

1.4.2 Розрахувати статистичні параметрів річного стоку з водозбору р. Сіверський Донець – м. Біла Калитва за період з 1934 по 1962 роки, використовуючи метод найбільшої правдоподібності.

Вихідні дані та результати обчислень оформлюють у вигляді таблиці (табл. 1.5).

Довжина ряду становить 24 роки.

Для визначення статистик $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ використані формули (1.79), (1.82), (1.83).

Таблиця 1.5 – Обчислення статистичних параметрів ряду за методом найбільшої правдоподібності р. Сіверський Донець – м.Біла Калитва, 1934-1962 рр.

№ пп	Рік	$Q_i, \text{м}^3/\text{с}$	K_i	$\lg K_i$	$K_i \lg K_i$
1	1934	271	1.84	0.404	1.013
...
...
24	1962	54.9	0.37	-0.432	-0.160
Сума		3526	24	-1.103	1.072

$$\bar{Q} = \lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{3526}{24} = 147 \text{ м}^3 / \text{с};$$

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lg k_i}{n - 1} = \frac{-1.103}{23} = -0.0480$$

$$\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \lg k_i}{n - 1} = \frac{1.072}{23} = 0.0466$$

За номограмм, наведеними в СНіП 2.01.14-83, знаходимо значення C_v та співвідношення C_s / C_v .

Таким чином, $\bar{Q} = 147 \text{ м}^3 / \text{с}$, $C_v = 0.48$, $C_s = 3C_v = 1.44$. При цьому $\sigma_Q = 0.48 \times 147 = 70.6 \text{ м}^3 / \text{с}$.

$$\sigma_{\bar{Q}} = \frac{\sigma_Q}{\sqrt{n}} = \frac{70.6}{\sqrt{24}} = 14.4 \text{ м}^3 / \text{с};$$

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \frac{C_v}{\sqrt{n}} 100\% = \frac{0.48}{\sqrt{24}} 100\% = 9.80\%.$$

Середньоквадратичне відхилення коефіцієнту варіації при $C_s = 2C_v$ розраховується за формулою (1.85)

$$\sigma_{C_v} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{3}{3 + C_v^2}} = \frac{0.48}{\sqrt{2 \times 24}} \sqrt{\frac{3}{3 + 0.48^2}} = 0.0668;$$

У нашому випадку $C_s = 3C_v$, отже для отриманого σ_{C_v} необхідно ввести поправочний коефіцієнт K , використовуючи рисунок 1.5, де $K = 1.1$. Тоді

$$\sigma_{C_v} = 0.0668 \times 1.1 = 0.0735;$$

$$\varepsilon_{C_V} = \frac{\sigma_{C_V}}{C_V} 100\% = \frac{0.0735}{0.48} 100\% = 15.3\%.$$

Середньоквадратичне відхилення C_S / C_V знаходимо в залежності від C_V (рис. 1.6).

$$\sigma_{C_S/C_V} = 0.73; \quad \varepsilon_{C_S} = \frac{\sigma_{C_S}}{C_S} 100\% = \frac{0.73}{1.44} 100\% = 50.7\%.$$

Отримані результати свідчать, що необхідно привести цей ряд до тривалого періоду, оскільки відносні середньоквадратичні відхилення параметрів Q та C_V близькі до припустимих ($\varepsilon_{\bar{Q}} = 5 - 10\%$; $\varepsilon_{C_V} = 15\%$) або дещо перевищують їх.

1.4.3 Визначити статистичні параметри максимального стоку весняного водопілля для водозбору р. Половинна - с. Половина за період з 1951 по 1967 роки.

Вихідні матеріали та матеріали розрахунків емпіричної забезпеченості розміщуються в таблиці 1.6.

Таблиця 1.6 – Розрахунки ординат емпіричної кривої забезпеченості максимального стоку весняного водопілля р.Половинна-с.Половина, 1951-1967 рр.

№ пп	Рік	$Q_{\max}, \text{м}^3/\text{с}$	$Q_{\max}, \text{м}^3/\text{с}$	$\hat{p} = \frac{m}{n+1}$
1	1951	16.1	31.5	5.90
2	1952	14.3	30.1	11.7
...
....
16	1967	24.7	9.71	94.1

Хід виконання роботи:

1. На клітчатку ймовірностей наносимо величини стоку відповідної забезпеченості (графи 4 та 5 наведеної вище таблиці).
2. будуємо емпіричну криву забезпеченості.
3. З кривої знімаємо три характерні точки Q_5, Q_{50}, Q_{95} .

4. Обчислюємо коефіцієнт скошеності S за виразом (1.93).
5. Значення C_s знаходимо з таблиці 1.1 відповідно установленому S .
6. За формулами графоаналітичного методу визначаємо оцінки статистичних параметрів σ_Q , C_v , \bar{Q} (1.95; 1.96; 1.97).

Значення характерних витрат води становлять:

$$Q_{5\%} = 35.0 \text{ м}^3 / \text{с}; \quad Q_{50\%} = 20.0 \text{ м}^3 / \text{с}; \quad Q_{95\%} = 8.50 \text{ м}^3 / \text{с}.$$

Отже, коефіцієнт скісності дорівнює:

$$S = \frac{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}} = \frac{35.0 + 8.50 - 2 \times 20.0}{35.0 - 8.50} = \frac{3.5}{26.5} = 0.13.$$

Значення коефіцієнту асиметрії установлюється в залежності від S за таблицею 1.1:

$$C_s = \varphi(S) = 0.45.$$

Статистичні параметри σ_Q , \bar{Q} , C_v обчислюються за формулами (1.95), (1.96) та (1.97):

$$\Phi_5 - \Phi_{95} = 3.26; \quad \Phi_{50} = -0.08;$$

$$\sigma_Q = \frac{x_5 - x_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}} = \frac{35.0 - 8.50}{3.26} = 8.13 \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$\bar{Q} = Q_{50} - \sigma_Q \Phi_{50} = 20.0 - 8.13 \times (-0.08) = 20.6 \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$C_v = \sigma_Q / \bar{Q} = 8.13 / 20.6 = 0.39.$$

1.4.4 Обчислити ординати кривої забезпеченості Пірсона III за статистичними параметрами $\bar{Q} = 272 \text{ м}^3/\text{с}$, $C_v = 0.24$, $C_s = 0.86$.

За визначеному по методу моментів значенню коефіцієнту варіації $C_s=0.86$ і по таблиці закону Пірсона III знаходимо нормовані відхилення Φ_p для різних забезпеченостей P та записуємо у таблицю 1.7.

Таблиця 1.7 – Ординати кривої забезпеченості річного стоку
р.Ока – м.Муром

C _s	Величина	Забезпеченість, P%					
		0.01	0.10	1.0	3.0	...	99.9
0.86	Φ _p	5.64	4.32	2.93	2.20	-1.95
	Φ _s C _v	1.35	1.04	0.70	0.53	-0.47
	K _p = Φ _p C _v + 1	2.35	2.04	1.70	1.53	0.53
	Q _p = K _p Q̄	639	551	462	416	138

1.4.5 Розрахувати коефіцієнт автокореляції та уточнити статистичні параметри річного стоку з водозбору р. Дерекойка – м. Ялта за 39-ти річний період спостережень

Вихідні дані та результати обчислень оформлюють у вигляді таблиці 1.8 згідно з формулою (1.193).

- середнє багаторічне значення річного стоку $\bar{q}=10.5$ л/с км²;
- середньоквадратичне відхилення $\sigma_q = 4.2$ л/с км² ;
- коефіцієнт варіації річного стоку $C_v = 0.40$;
- коефіцієнт асиметрії річного стоку $C_s = 1.16$;
- співвідношення $C_s / C_v = 2.89 \approx 3.00$
- середня квадратична похибка розрахунку параметра \bar{q} : $\sigma_q = 0.67$ л/с км²;

Коефіцієнт автокореляції при зсуві $\tau=1$, розрахований по (1.191), дорівнює $0.38 - r(1) = 0.38$, а середньоквадратична похибка становить 0.152 , тобто $\sigma_{\tau(1)} = 0.152$. Умова (1.194) виконується, тобто $0.380 > 2 \times 0.152$, через що значення параметру слід визнати значущим. Використовуючи формули (1.194) та (1.195), а також табл. 1.2 і 1.3, визначаємо параметри C_v і C_s з урахуванням внутрішньорядних зв'язків. Уточнені значення параметрів такі: $C_v = 0.40$, $C_s = 1.39$, $C_s / C_v = 3.43$, $\sigma_q = 0.67$, $\sigma_{C_v} = 0.049$. Як показують результати розрахунків, вплив внутрішньорядних зв'язків особливо виражений при розрахунках коефіцієнту асиметрії та співвідношення C_s / C_v .

Таблиця 1.8 – Обчислення коефіцієнту автокореляції річного стоку з водозбору р.Дерекойка - м.Ялта

№ пп	q_i л/скм ²	q_{i+1} л/скм ²	$(q_i - \bar{q})$	$(q_i - \bar{q})^2$	$(q_{i+1} - \bar{q})$	$(q_i - \bar{q}) \times$ $(q_{i+1} - \bar{q})$
1	2	3	4	5	6	7
1	11.3		0.80	0.64		
2	10.3	11.3	-0.20	0.04	0.80	-0.16
3	9.46	10.3	-1.04	1.08	-0.20	0.21
4	8.45	9.46	-2.05	4.20	-1.04	2.13
5	7.44	8.45	-3.06	9.36	-2.05	6.27
6	13.9	7.44	3.40	11.6	-3.06	-10.4
7	14.5	13.9	4.00	16.0	3.40	13.6
8	7.85	14.5	-2.65	7.02	4.00	-10.6
9	9.66	7.85	-0.84	0.71	-2.65	2.23
10	13.3	9.66	2.80	7.84	-0.84	-2.35
11	4.43	13.3	-6.07	36.8	2.80	-17.0
12	7.85	4.43	-2.65	7.02	-6.07	16.1
13	9.05	7.85	-1.45	2.10	-2.65	3.84
14	8.25	9.05	-2.25	5.06	1.45	3.26
15	9.26	8.25	-1.24	1.54	-2.25	2.79
16	11.5	9.26	1.00	1.00	-1.24	-1.24
17	8.05	11.5	-2.45	6.00	1.00	-2.45
18	8.25	8.05	-2.25	5.06	-2.45	5.51
19	13.5	8.25	3.00	9.00	-2.25	-6.75
20	10.5	13.5	0.00	0.00	3.00	0.00
21	17.5	10.5	7.00	49.0	0.00	0.00
22	20.1	17.5	9.60	92.2	7.00	67.2
23	10.1	20.1	-0.40	0.16	9.60	-3.84
24	10.9	10.1	0.40	0.16	-0.40	-0.16
25	3.82	10.9	-6.68	44.6	0.40	-2.67
26	4.00	3.82	-6.50	42.2	-6.60	43.4
27	10.5	4.00	0.00	0.00	-6.50	0.00
28	7.24	10.5	-3.26	10.6	0.00	0.00

Продовження таблиці 1.8

№ пп	q_i л/скм ²	q_{i+1} л/скм ²	$(q_i - \bar{q})$	$(q_i - \bar{q})^2$	$(q_{i+1} - \bar{q})$	$(q_i - \bar{q}) \times$ $(q_{i+1} - \bar{q})$
1	2	3	4	5	6	7
29	9.26	7.24	-1.24	1.54	-3.26	4.04
30	8.85	9.26	-1.65	2.72	-1.24	1.55
31	6.84	8.85	-3.66	13.4	-3.66	6.04
32	5.63	6.84	-4.87	23.7	-4.87	17.8
33	11.5	5.63	1.00	1.00	1.00	-4.87
34	12.9	11.5	2.40	5.76	2.40	2.40
35	24.7	12.9	14.2	202	14.2	3.40
36	15.9	24.7	5.40	29.2	5.40	76.7
37	14.7	15.9	4.20	17.6	4.20	22.7
38	8.45	14.7	-2.05	4.20	-2.05	-8.61
39	9.86	8.45	-0.64	0.41	-0.64	1.31
Сума				672		262

2 РІЧНИЙ СТІК

2.1 Норма стока, цикличність коливань річного стоку

Річний стік відноситься до категорії основних гідрологічних характеристик. Він є інтегральною характеристикою річкового стоку і дозволяє судити не тільки про водні ресурси річкових басейнів, але і про міру їх зволоженості, та про водний баланс окремих територій.

Дослідження коливань річного стоку за часом і за територією дозволяє судити про можливість і доцільність використання вод у народному господарстві.

Річний стік є базовою характеристикою при розробці нових методів гідрологічних розрахунків. На прикладі річного стоку розробляється більшість гідрологічних моделей, досліджуються питання циклічності стоку річок. В основі вивчення гідрологічних питань загально теоретичного плану дослідження зв'язку річкового стоку з кліматичними факторами також лежать дані про річний стік.

Основною характеристикою водних ресурсів річок є норма стоку.

Нормою стоку називається його середня величина за багаторічний період із незмінними ландшафтними географічними умовами, які відносяться до сучасної геологічної епохи та з однаковим рівнем господарського освоєння річки. Багаторічний ряд спостережень, за яким визначається норма стоку, повинен включати не менше двох повних циклів коливань водності. Цикли складаються з двох фаз - багатоводної та маловодної.

Норма річного стоку, як і її кліматичні складові – середні річні опади та випаровування - досить плавно змінюється за територією та піддається картуванню. Характер розподілу норм річного стоку підкорюється закону широтної географічної зональності для рівнинних районів, яка виявляється в зменшенні стоку з півночі на південь, та вертикальна зональність у гірських районах. Навіть невеликі підвищення обумовлюють збільшення стоку.

Норма стоку може бути виражена як середньорічна витрата води Q_0 в $\text{м}^3/\text{с}$; середній річний об'єм стоку W_0 в км^3 ; середній річний модуль стоку q_0 в $\text{л}/\text{скм}^2$; середній річний шар стоку Y_0 у мм, віднесений до площі водозбору.

Витрата води Q характеризує водність річки на ділянці даного створу в зазначений час, виражається в $\text{м}^3/\text{с}$.

Об'єм стоку W – об'єм води, що протікає крізь поперечний переріз річки за який-небудь проміжок часу (рік, місяць, добу).

Об'єм стоку виражається в м^3 або км^3 .

$$W = Q \cdot T. \quad (2.1)$$

Модуль стоку q – кількість води, що стікає з одиниці площі річкового басейну в одиницю часу. Ця величина виражається в літрах у секунду з 1 км² площі басейну (л/скм²) або (м³/скм²).

$$q = \frac{Q \cdot 10^3}{F}, \quad (2.2)$$

де F - площа басейну, км².

Шар стоку Y – кількість води в міліметрах, що рівномірно розподілена на площі F та стікає за деякий проміжок часу:

$$Y = \frac{W}{F \cdot 10^3}. \quad (2.3)$$

Між модулем стоку q і шаром стоку існує співвідношення

$$Y = 31.5q \quad \text{або} \quad q = 0.0317Y \quad (2.4)$$

В гідрологічних розрахунках частіше за все використовуються витрати води.

За допомогою витрат води, що вимірюються, можна визначити всі інші характеристики стоку.

Модуль та шар стоку використовуються, звичайно, при побудові гідрологічних карт, а шар стоку також і при воднобалансових розрахунках.

2.1.1 Прийоми згладжування часових рядів річного стоку

При визначенні норми річного стоку треба пам'ятати про те, що часові ряди мають деяку часову закономірність у вигляді групування багатоводних та маловодних років різної тривалості. Врахувати цю обставину можна виділенням у розрахунковому ряді річного стоку одного циклу водності, до якого входять багатоводна та маловодна групи водності.

Умови стаціонарності в рядах річного стоку можуть бути порушені за рахунок зміни рівня господарської діяльності. Тому, обчислюючи норму річного стоку, необхідно перевірити статистичну однорідність часових рядів, особливо в районах інтенсивної господарської діяльності.

В часових рядах, як було зазначено, виявлені певні закономірності у вигляді чергування груп багатоводних та маловодних років (рис.2.1). Природа цього явища дуже складна через велику кількість впливаючих факторів та інерційність геофізичних процесів.

Циклічність стоку також пов'язується із сонячною активністю та іншими геліофізичними процесами.

Оскільки низькочастотні коливання в гідрологічних рядах просліджуються дуже слабо і здійснюються на фоні різних флуктуацій, важно буває виділити не тільки тривалість окремих угруповань, а й їх амплітуду. Виникає необхідність усунути “шум”, пов'язаний з випадковим коливанням річного стоку за суміжні роки, і записати лише інформацію про багаторічну мінливість. Для цього використовують згладжування емпіричних даних, тобто заміну таблиці вихідних величин іншою таблицею близьких до них точок, які розміщені на доволі гладкій кривій. Згладжування виконується з допомогою многочленів. Оскільки найкраще згладжування спостерігається для середніх точок (коли враховується інформація про поведінку функції з обох боків від залежної точки), то кількість точок для згладжування береться непарною, а групи точок – змінними за всією таблицею. Беруть наприклад, перші три точки q_1, q_2 і q_3 , згладжують за їх допомогою середню точку q_2 , потім розглядають подальшу групу точок q_2, q_3, q_4 і згладжують точку q_3 і т.д. до кінця таблиці даних. Для таблиці зі сталим кроком згладжування найпростішим є многочлен першого ступеня згладжування.

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{T} \sum_{K=-\frac{T-1}{2}}^{\frac{T-1}{2}} q_{i+K}, \quad (2.5)$$

де \tilde{q}_i - згладжене значення річного стоку; T – інтервал осереднення.

Оператор згладжування не розповсюджується на крайні значення ряду. Тому під час згладжування за трьома точками

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{6} (5q_1 + 2q_2 - q_3), \quad (2.6)$$

$$\tilde{q}_n = \frac{1}{6} (-q_{n-2} + 2q_{n-1} + 5q_n).$$

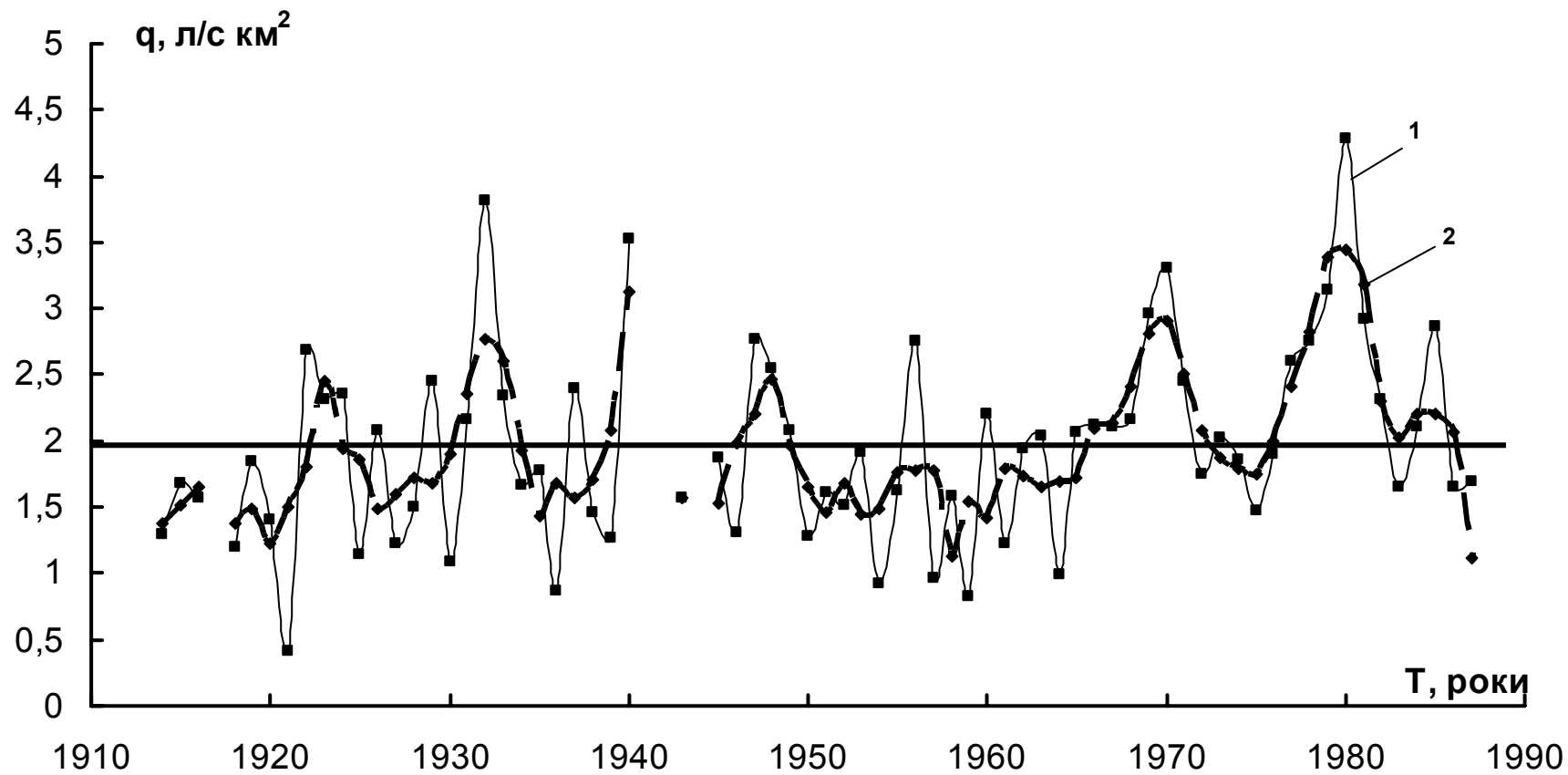


Рисунок 2.1 – Хронологічний графік коливань річного стоку р.Південний Буг – с.Олександрівка:
 1 – вихідні дані, 2 – згладжені дані

У процесі згладжування за п'ятьма точками крайні значення будуть визначатися за формулами:

а) на початку ряду

$$\tilde{q}_1 = 0.2(3q_1 + 2q_2 + q_3 - q_5) \quad (2.7)$$

$$\tilde{q}_2 = 0.1(4q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q_4)$$

б) у кінці ряду

$$\tilde{q}_{n-1} = 0.1(q_{n-3} + 2q_{n-2} + 3q_{n-1} + 4q_n) \quad (2.8)$$

$$\tilde{q}_n = 0.2(-q_{n-4} + q_{n-2} + 2q_{n-1} + 3q_n)$$

Якщо після першого етапу згладжування не відбулося, проводиться повторне згладжування тим же многочленом, що надає можливість виділити декілька багатководних та маловодних угруповань.

Зараз є велика кількість інших методів математичних фільтрів, за допомогою яких виявляють періодичні складові в рядах коливань стоку. Серед них є не тільки лінійні, а й нелінійні фільтри.

Найчастіше в практиці розрахунків використовуються інтегральні криві. Різницеві інтегральні криві відхилень річних величин стоку від його середнього значення будують у відносних величинах, тобто у модульних коефіцієнтах. Для побудування такої кривої послідовно сумують відхилення модульних коефіцієнтів хронологічного ряду від їх середнього багаторічного значення, який дорівнює одиниці.

Поточні ординати різницевої інтегральної кривої на кінець t-го року від початку побудування кривої визначають за рівнянням:

$$\sum_{i=1}^t (K_i - 1) = f(t), \quad (2.9)$$

де K_i - модульний коефіцієнт.

При побудуванні різницевої інтегральної кривої (рис.2.2) розраховують наростаючу суму відхилень з урахуванням знаку.

Різницева інтегральна крива має ту властивість, що тангенс кута α прямої, яка поєднує дві точки інтегральної кривої із віссю абсцис, характеризує середню величину підінтегральної функції за період t років, тобто:

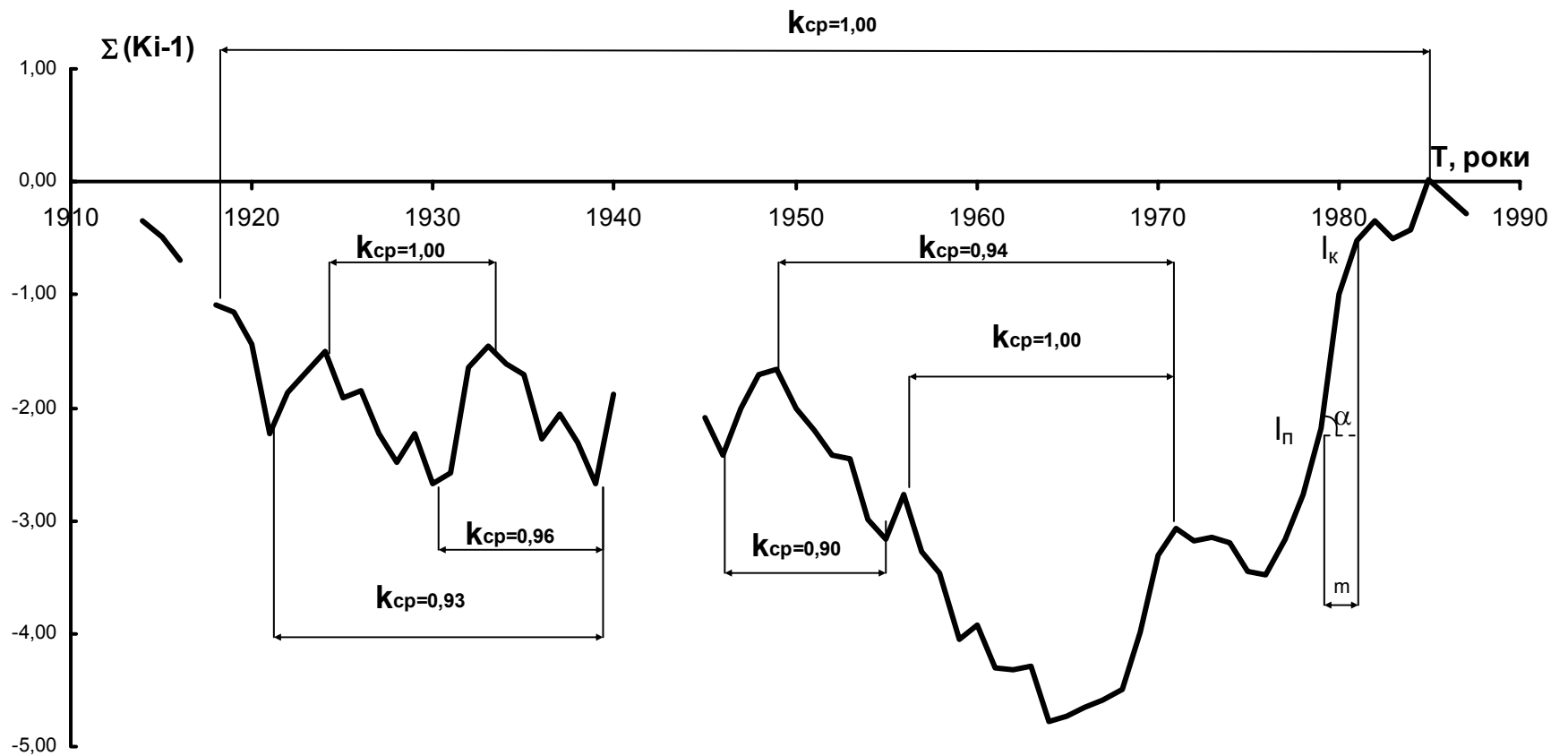


Рисунок 2.2 – Графік різницевої інтегральної кривої р.Південний Буг – с.Олександрівка

$$\operatorname{tg} \alpha = (K_i - 1)_{\text{cp}} = \frac{l_k - l_n}{m}, \quad (2.10)$$

де l_k, l_n - відповідно кінцева та початкова ординати інтегральної кривої для періоду часу, який розглядається;
 m – число років у періоді часу (рис 2.2).

Період часу, для якого об'єднуюча пряма лінія інтегральної кривої відхиляється вгору відносно осі абсцис та значення $(K_i - 1)_{\text{cp}}$ позитивне, відповідає багатоводній фазі коливань стоку. Період же, для якого об'єднуюча лінія нахилена вниз та $(K_i - 1)_{\text{cp}}$ має негативне значення, відповідає маловодній фазі.

2.2 Розрахунки норми річного стоку при тривалих рядах спостережень

Відповідно до вимог нормативного документа "СНіП 2.01.14-83" тривалість періоду спостережень вважається достатньою, якщо період репрезентативний, а відносна середня квадратична похибка не має бути понад $\pm 10\%$.

Відносна середня квадратична похибка середнього $\varepsilon_{\bar{q}}$ визначається за формулами :

при відсутності внутрішньорядового зв'язку:

$$\varepsilon_{\bar{q}} = \pm 100 C_v / \sqrt{n}. \quad (2.11)$$

Із формули видно, що помилка пропорційна коефіцієнту C_v та зворотня числу членів вибірки n років

Для статистичних сукупностей маємо

$$\varepsilon_{\bar{q}} = \pm 100 C_v \sqrt{(1+r)/(1-r)} / \sqrt{n}, \quad (2.12)$$

де r – коефіцієнт кореляції між членами ряду.

Для застосування формули (2.12) визначити коефіцієнт кореляції між членами ряду:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (q_i - \bar{q}_1) \cdot (q_{i+1} - \bar{q}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (q_i - \bar{q}_1)^2 \cdot \sum_{i=2}^n (q_i - \bar{q}_2)^2}}, \quad (2.13)$$

q_{i+1}, q_i - відповідно наступне та попереднє значення вихідного ряду, а $\bar{q}_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{n-1}$; $\bar{q}_2 = \sum_{i=2}^n \frac{q_i}{n-1}$.

Враховувати r при обчисленні похибки $\varepsilon_{\bar{q}}$ потрібно тоді, коли внутрішньорядна зв'язаність стокових значень суттєва.

При тривалому періоді спостережень розрахунок здійснюється безпосередньо за даними спостережень, при цьому в розрахунках використовується репрезентативний період із цього ряду або весь ряд, коли його тривалість становить 50-60 років та більше.

Норма стоку визначається як середньбагаторічне значення з річних величин стоку

$$\bar{q}_n = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + q_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n}, \quad (2.14)$$

де q_1, q_2, \dots, q_n - середньорічні величини стоку; n - кількість років спостережень.

Приклад розрахунку 2.1

Дано: середньорічні модулі стоку за період з 1914 по 1985 рр для р.Південний Буг – с.Олександрівка (табл.2.1). Площа водозбору $F=46200$ км².

1. Для наведеного ряду розраховується середньбагаторічне значення та коефіцієнт варіації за формулами (2.14) та (1.34).

$$\bar{q}_n = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N} = \frac{134}{70} = 1.97 \text{ л/скм}^2;$$

Таблиця 2.1 – Середньорічні модулі стоку і ковзне осереднення хронологічного ряду середньобагаторічних модулів стоку за трьохрічками р.Південний Буг – с.Олександрівка, F=46200 км²

№ п/п	рік	Модуль стоку q_i , л/скм ²	Згладжені модулі стоку \tilde{q}_3 л/скм ²
1	2	3	4
1	1914	1.29	1.37
2	1915	1.68	1.51
3	1916	1.57	1.65
4	1918	1.20	1.38
5	1919	1.84	1.48
6	1920	1.41	1.22
7	1921	0.41	1.50
8	1922	2.68	1.80
9	1923	2.32	2.45
10	1924	2.36	1.94
11	1925	1.15	1.86
12	1926	2.08	1.48
13	1927	1.22	1.60
14	1928	1.50	1.72
15	1929	2.45	1.68
16	1930	1.09	1.90
17	1931	2.16	2.35
18	1932	3.81	2.77
19	1933	2.34	2.61
20	1934	1.67	1.93
21	1935	1.77	1.44
22	1936	0.87	1.68
23	1937	2.40	1.58
24	1938	1.46	1.71
25	1939	1.27	2.09
26	1940	3.53	3.12
27	1943	1.57	1.57
28	1945	1.87	1.53
29	1946	1.31	1.98
30	1947	2.77	2.21
31	1948	2.55	2.47

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4
32	1949	2.08	1.97
33	1950	1.28	1.66
34	1951	1.61	1.47
35	1952	1.51	1.68
36	1953	1.91	1.45
37	1954	0.92	1.48
38	1955	1.62	1.76
39	1956	2.75	1.78
40	1957	0.97	1.77
41	1958	1.59	1.13
42	1959	0.83	1.54
43	1960	2.21	1.42
44	1961	1.23	1.79
45	1962	1.94	1.74
46	1963	2.04	1.66
47	1964	0.99	1.70
48	1965	2.06	1.72
49	1966	2.12	2.10
50	1967	2.11	2.13
51	1968	2.16	2.41
52	1969	2.96	2.81
53	1970	3.31	2.91
54	1971	2.45	2.50
55	1972	1.75	2.08
56	1973	2.03	1.88
57	1974	1.86	1.79
58	1975	1.48	1.75
59	1976	1.90	1.99
60	1977	2.60	2.42
61	1978	2.75	2.83
62	1979	3.14	3.39
63	1980	4.29	3.45
64	1981	2.92	3.18
65	1982	2.32	2.30
66	1983	1.65	2.03
67	1984	2.11	2.21
68	1985	2.86	2.21

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4
69	1986	1.65	2.07
70	1987	1.69	1.11

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{9.69}{69}} = 0.38$$

За формулою (2.12) оцінюється похибка середньобогаторічного значення \bar{q} :

$$\varepsilon_{\bar{q}} = \pm \frac{100 C_v}{\sqrt{n}} \% = \frac{0.38}{\sqrt{70}} \cdot 100\% = 4.6\%$$

Стандартна похибка коефіцієнта варіації обчислюється за формулою (1.53):

$$\varepsilon_{C_v} = \sqrt{\frac{1 + C_v^2}{2n}} 100\% = \sqrt{\frac{1 + 0.14}{2 \cdot 70}} 100\% = 9.2\%.$$

Таким чином, похибки при розрахунках \bar{q} та C_v укладаються в рамки допустимих (для середньобогаторічної величини річного стоку $\varepsilon_{\bar{q}}$ становить 10%, а для C_v - 15%).

За даними таблиці 2.1 будується хронологічний графік коливань річного стоку (рис.2.1), на нього наноситься норма стоку \bar{q}_n .

2. За формулою (2.6) на підставі вихідних даних виконане ковзне осереднення, результати якого занесені в табл.2.1. Якщо ряд перерваний, то осереднення перед розривом виконується як для кінцевих членів ряду, а після розриву – як для перших членів ряду.

3. Значення згладженого ряду наносяться на хронологічний графік коливань річного стоку (рис.2.1). Аналіз рисунку показує, що на хронологічному графіку коливань річного стоку після згладжування по трьохрічкам можна виділити декілька багатоводних та маловодних угруповань: з 1914 р. до 1922 р., з 1925 до 1930 р, з 1934 по 1939 р, з 1949 до 1973 р, з 1973 до 1976 р спостерігались маловодні угруповання, а з 1923

р до 1924, з 1931 по 1933 р, з 1946 по 1948 р, з 1966 до 1972 р і з 1977 до 1983 р. – багатоводні.

4. Для розрахунку ординат різницевої інтегральної кривої середньорічні модулі було внесено із табл.2.1 до табл.2.2 у хронологічному порядку. Для кожного члена ряду розраховано значення модульних коефіцієнтів $K_i = \frac{q_i}{q_n}$. Для контролю виконаної роботи знаходиться $\sum_{i=1}^n K_i$, яка повинна приблизно дорівнювати кількості членів ряду N . У наведеному прикладі $\sum_{i=1}^{70} = 69.9$, а $N=70$. Наступний етап полягає у розрахунку відхилення модульних коефіцієнтів K_i від середнього значення, тобто одиниці. Сума цих відхилень $\sum_{i=1}^n (K_i - 1)$ повинна

дорівнювати або бути близькою до нуля. Як видно із табл.2.2 $\sum_{i=1}^n (K_i - 1)$ дорівнює 0.11. Це розходження пов'язане із точністю розрахунків і його можна вважати припустимим, виходячи із умови, що ця похибка не повинна бути більшою за $\left(\frac{N}{4} \cdot 0.01\right)$. Далі, маючи значення $\sum_{i=1}^n (K_i - 1)$,

будується різницева інтегральна крива (рис.1.2). По характерних ділянках на ній можна виділити такі цикли водності: з 1921 до 1939 р. ($K_{cp} = 0.93$), з 1946 по 1955 р ($K_{cp} = 0.90$), з 1924 до 1933 р. ($K_{cp} = 1.00$), з 1949 до 1971 ($K_{cp} = 0.94$) та з 1951 по 1971р ($K_{cp} = 1.00$). За розрахунковий можна прийняти період, у якому величина K_{cp} знаходиться у межах від 0.95 до 1.05. Якщо $K_{cp} < 1.0$, то у розрахунковому періоді переважає маловодна фаза, при $K_{cp} > 1.0$ - багатоводна.

За характером різницево-інтегральної кривої можна зробити висновок про те, що до середини 60-х років минулого сторіччя переважала маловодна фаза стоку. У якості розрахункового бажано виділити цикл водності з приблизно однаковою кількістю маловодних та багатоводних років. Отже, на підставі рисунка 2.2 за характерними точками можливе прийняття розрахункового періоду з 1949 до 1982 року включно. Середньобагаторічна величина визначена за такий розрахунковий період може вважатися нормою.

Таблиця 2.2 – Розрахунок ординат різницевої інтегральної кривої для басейну р.Південний Буг – с.Олександрівка, F=46200 км²

№ п/п	роки	Модуль стоку Q_i , л/скм ²	Модульні коефіцієнти, K_i	$(K_i - 1)$	$\sum (K_i - 1)$
1	1914	1.29	0.65	-0.35	-0.35
2	1915	1.68	0.85	-0.15	-0.50
3	1916	1.57	0.80	-0.20	-0.70
4	1918	1.20	0.61	-0.39	-1.09
5	1919	1.84	0.93	-0.07	-1.16
6	1920	1.41	0.72	-0.28	-1.44
7	1921	0.41	0.21	-0.79	-2.23
8	1922	2.68	1.36	0.36	-1.87
9	1923	2.32	1.18	0.18	-1.69
10	1924	2.36	1.20	0.20	-1.50
11	1925	1.15	0.58	-0.42	-1.91
12	1926	2.08	1.06	0.06	-1.86
13	1927	1.22	0.62	-0.38	-2.24
14	1928	1.50	0.76	-0.24	-2.48
15	1929	2.45	1.24	0.24	-2.23
16	1930	1.09	0.55	-0.45	-2.68
17	1931	2.16	1.10	0.10	-2.58
18	1932	3.81	1.93	0.93	-1.65
19	1933	2.34	1.19	0.19	-1.46
20	1934	1.67	0.85	-0.15	-1.61
21	1935	1.77	0.90	-0.10	-1.71
22	1936	0.87	0.44	-0.56	-2.27
23	1937	2.40	1.22	0.22	-2.05
24	1938	1.46	0.74	-0.26	-2.31
25	1939	1.27	0.64	-0.36	-2.67
26	1940	3.53	1.79	0.79	-1.86
27	1943	1.57	0.80	-0.20	-2.08
28	1945	1.87	0.95	-0.05	-2.08
29	1946	1.31	0.66	-0.34	-2.42
30	1947	2.77	1.41	0.41	-2.01
31	1948	2.55	1.29	0.29	-1.71
32	1949	2.08	1.06	0.06	-1.66
33	1950	1.28	0.65	-0.35	-2.01
34	1951	1.61	0.82	-0.18	-2.19

Продовження таблиці 2.2

№ п/п	роки	Модуль стоку q_i , л/см ²	Модульні коефіцієнти, K_i	$(K_i - 1)$	$\sum (K_i - 1)$
35	1952	1.51	0.77	-0.23	-2.43
36	1953	1.91	0.97	-0.03	-2.46
37	1954	0.92	0.47	-0.53	-2.99
38	1955	1.62	0.82	-0.18	-3.17
39	1956	2.75	1.40	0.40	-2.77
40	1957	0.97	0.49	-0.51	-3.28
41	1958	1.59	0.81	-0.19	-3.47
42	1959	0.83	0.42	-0.58	-4.05
43	1960	2.21	1.12	0.12	-3.93
44	1961	1.23	0.62	-0.38	-4.30
45	1962	1.94	0.98	-0.02	-4.32
46	1963	2.04	1.04	0.04	-4.28
47	1964	0.99	0.50	-0.50	-4.78
48	1965	2.06	1.05	0.05	-4.73
49	1966	2.12	1.08	0.08	-4.66
50	1967	2.11	1.07	0.07	-4.59
51	1968	2.16	1.10	0.10	-4.49
52	1969	2.96	1.50	0.50	-3.99
53	1970	3.31	1.68	0.68	-3.31
54	1971	2.45	1.24	0.24	-3.06
55	1972	1.75	0.89	-0.11	-3.18
56	1973	2.03	1.03	0.03	-3.15
57	1974	1.86	0.94	-0.06	-3.20
58	1975	1.48	0.75	-0.25	-3.45
59	1976	1.90	0.96	-0.04	-3.49
60	1977	2.60	1.32	0.32	-3.17
61	1978	2.75	1.40	0.40	-2.77
62	1979	3.14	1.59	0.59	-2.18
63	1980	4.29	2.18	1.18	-1.00
64	1981	2.92	1.48	0.48	-0.52
65	1982	2.32	1.18	0.18	-0.34
66	1983	1.65	0.84	-0.16	-0.50
67	1984	2.11	1.07	0.07	-0.43
68	1985	2.86	1.45	0.45	0.02
69	1986	1.65	0.84	-0.16	-0.14
70	1987	1.69	0.86	-0.14	-0.28

2.3 Розрахунки норми річного стоку при недостатності спостережень

Короткими вважають всі ряди, які не задовольняють принципам репрезентативності вихідних рядів та точності оцінок статистичних параметрів. У таких випадках виконується приведення самого ряду або статистичних параметрів до багаторічного періоду за допомогою річок-аналогів, які мають тривалі ряди спостережень за стоком і відповідають вимогам репрезентативності.

При виборі річки-аналога необхідно дотримуватись таких вимог:

- розглядувана річка і річка-аналог знаходяться у безпосередній географічній близькості;
- схожість кліматичних умов для водозборів;
- однорідні умови формування стоку;
- синхронність коливань річного стоку на досліджуваних водозборах;
- площі водозборів не повинні відрізнятися більше, ніж в 10 разів, а їх середні висоти (для гірських річок) – більше, чим на 300 м;
- період спільних спостережень за стоком на досліджуваних річках повинен бути не менше ніж 10 років.

Об'єктивним критерієм правильності вибору річки-аналога є досить тісний зв'язок між характеристиками стоку за період спільних спостережень, який характеризується коефіцієнтом кореляції r (за умови $r \geq 0.7$).

За аналог можуть бути прийняті один або декілька пунктів, які відповідають вищенаведеним умовам.

Відповідно до СНіП 2.10.14-83 приведення статистичних параметрів розподілу до багаторічного періоду здійснюється за допомогою парної або множинної регресії за таких умов: $n \geq 10$, $r \geq 0.7$ та $k/\sigma_k \geq 2$: де n - число років спільних спостережень, r – коефіцієнт кореляції між величинами гідрологічних характеристик досліджуваної річки та річки-аналога : k – коефіцієнт регресії, σ_k – середня квадратична похибка коефіцієнта регресії.

Ідея методу приведення параметрів до багаторічного періоду базується на існуванні синхронності коливань річного стоку на близьких водозборах, що зумовлено однорідністю умов формування стоку.

Нормативним документом СНіП 2.01.14-83 рекомендується виконувати приведення статистичних параметрів коротких рядів до довгого періоду такими методами: графічним, графо-аналітичним, методом коефіцієнтів, лінійної парної або множинної регресії.

Визначення коефіцієнта кореляції r , який є критерієм схожості умов формування стоку під час вибору річки-аналога, виконується за формулою

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (q_i - \bar{q})(q_i^a - \bar{q}^a)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2 \sum_{i=1}^{n-1} (q_i^a - \bar{q}^a)^2}}, \quad (2.15)$$

де q_i, q_i^a - середньорічні модулі стоку за період спільних спостережень на досліджуваній річці та за річкою-аналогом;

\bar{q}, \bar{q}^a - відповідно середні багаторічні модулі стоку;

n - число років сумісних спостережень.

Дані перевіряються співвідношенням k/σ_k . Коефіцієнт регресії дорівнює:

$$K = \frac{r \cdot \sigma}{\sigma^a} \quad (2.16)$$

де σ та σ^a - середні квадратичні похибки значень стоку дослідженої річки та аналога при довжині рядів n .

Середньоквадратична похибка визначення коефіцієнта регресії K становить

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sigma^a} \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}}. \quad (2.17)$$

Рівняння лінійної парної регресії має вигляд:

$$\bar{q}_N = \bar{q}_n + r \frac{\sigma_n}{\sigma_n^a} (\bar{q}_N^a - \bar{q}_n^a), \quad (2.18)$$

де \bar{q}_N та \bar{q}_N^a - середні багаторічні значення (норми) модулів річного стоку досліджуваної річки та аналога;

\bar{q}_n, \bar{q}_n^a - відповідні середні значення стоку за період сумісних спостережень n ;

σ_n, σ_n^a - середньоквадратичні відхилення досліджуваного ряду та ряду річки аналога за період сумісних спостережень

Середньоквадратичні відхилення значення річного стоку σ та σ^a встановлюються за відповідними формулами:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}{n-1}} . \quad (2.19)$$

$$\sigma^a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q_i^a - \bar{q}^a)^2}{n-1}} . \quad (2.20)$$

Коефіцієнт варіації приведенного ряду дорівнює:

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{q}_N} \sqrt{1 + r^2 \left(1 - \frac{\sigma^a}{\sigma_N^a} \right)}, \quad (2.21)$$

де σ_N^a - середньоквадратичне відхилення модулів річного стоку ряду-аналога за багаторічний період спостережень N років.

Середня квадратична похибка приведенного значення норми річного стоку оцінюється за формулою:

$$\varepsilon_{\bar{q}_N} = \frac{100\sigma}{\bar{q}_N \cdot \sqrt{n}} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{n}{N} \frac{\sigma_N^a}{\sigma^a} - 1 \right)}. \quad (2.22)$$

Графічний метод. Норма річного стоку визначається за графіком зв'язку річного стоку за сумісний період спостережень на водозборі, що вивчається, та на водозборі-аналогу з багаторічними даними про стік. По побудованому графіку зв'язку середньорічних модулів стоку за сумісний період спостережень за значенням норми стоку річки-аналога знімається норма стоку для досліджуваної річки. При прямолінійному зв'язку норма стоку короткого ряду визначається безпосередньо по графіку через норму стоку річки-аналога .

При наявності нелінійних зв'язків річного стоку, що обумовлено характером коливань стоку у двох створах, необхідно мати більш тривалий ряд спільних спостережень (більш, ніж 10-20 років). У цьому випадку графік зв'язку використовується для подовження ряду по роках з подальшим обчисленням норми по відновленому ряду.

Коефіцієнт варіації ряду, приведеного графічним способом, обчислюється за формулою:

$$C_v = A \frac{\bar{q}_n^a}{\bar{q}_n} C_v^a, \quad (2.23)$$

де \bar{q}_n^a, C_v^a - статистичні параметри річного стоку річки-аналога за багаторічний період;

\bar{q}_n, C_v - статистичні параметри приведеного ряду.

Співвідношення коефіцієнта асиметрії та варіації приймається за осередненими даними групи річок гідрологічного району, де розташована досліджувана річка, з тривалими рядами спостережень.

Похибка норми річного стоку короткого ряду, приведеного до багаторічного періоду за допомогою графіків зв'язку, розраховується за формулою:

$$\varepsilon_{\bar{q}_N} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \quad (2.24)$$

де ε_1 - похибка обчислення норми річного стоку річки-аналога, яка визначається за формулою (2.11);

ε_2 - похибка кореляції стоку за період спільних спостережень, обчислена за рівнянням:

$$\varepsilon_2 = \frac{C_v \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n}}, \quad (2.25)$$

де C_v - коефіцієнт варіації річного стоку для розрахункового створу.

Графо-аналітичний метод Г.А.Алексєєва. За довготривалими даними спостережень на річці-аналогі будується емпірична крива забезпеченості величин стоку. Після згладжування графіка для характерних точок із забезпеченістю 5, 50 та 95 % визначаються відповідні величини стоку $Q_{5\%}^a, Q_{50\%}^a, Q_{95\%}^a$. Використовуючи графік зв'язку між стоком розглядуваної річки та річки-аналога, побудований за сумісний період спостережень устанавлюємо характерні величини стоку $Q_{5\%N}, Q_{50\%N}, Q_{95\%N}$, які можна вважати приведеними до довгого періоду. Надалі для визначення статистичних параметрів використовуємо вже відомі формули графо-аналітичного методу.

Коефіцієнт скісності розраховується за формулою

$$S = \frac{Q_5 + Q_{95} - 2Q_{50}}{Q_5 - Q_{95}}. \quad (2.26)$$

По спеціальній таблиці відповідно S встановлюють коефіцієнт C_s та нормовані ординати $\Phi_5, \Phi_{50}, \Phi_{95}$

$$\sigma_Q = \frac{Q_5 - Q_{95}}{\Phi_5 - \Phi_{95}}; \quad \bar{Q} = Q_{50} - \sigma_Q \Phi_{50}, \quad (2.27)$$

де σ_Q – середньоквадратичне відхилення; \bar{Q} - середнє арифметичне значення.

Коефіцієнт варіації розраховується за виразом:

$$C_v = \frac{\sigma_Q}{\bar{Q}}. \quad (2.28)$$

Метод коефіцієнтів. Для розрахунку за цим методом спочатку визначається коефіцієнт кореляції між значеннями короткого ряду та ряду аналога за період сумісних спостережень (формула 2.15). Якщо значення $r \geq 0.7$, то досліджується синхронність коливань стоку на двох постах. Для цього будуються хронологічні графіки коливань річного стоку. Якщо коливання синхронні, то можна записати

$$\frac{\bar{q}^a_N}{q^a_n} = \frac{\bar{q}_N}{\bar{q}_n}, \quad (2.29)$$

де \bar{q}^a_N та \bar{q}_N - середнє багаторічне значення річного стоку (норма) річки-аналога та короткого ряду, відповідно, а q^a_n та \bar{q}_n - середнє значення річного стоку річки-аналога та короткого ряду за період сумісних спостережень n .

Позначимо співвідношення $\frac{\bar{q}^a_N}{q^a_n}$ як K_N , тоді для досліджуваного короткого ряду можна визначити норму стоку наступним чином:

$$\bar{q}_N = K_N \bar{q}_n. \quad (2.30)$$

Приклад розрахунку 2.2

Виконати приведення статистичних параметрів річного стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ до багаторічного періоду графічним, графоаналітичним, аналітичним методами та за методом коефіцієнтів.

Дано: 1) середньорічні модулі стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ за період спостережень з 1946 по 1960 рр. (табл.2.3). Площа водозбору $F=44000 \text{ км}^2$.

2) Середньорічні модулі стоку річки-аналогу р.Південний Буг – с.Олександрівка за період спостережень з 1914 по 1987 рр ($N=70$). Площа водозбору $F=46200 \text{ км}^2$. Норма стоку $\bar{q}_N^a = 1.97 \text{ л/скм}^2$, коефіцієнт варіації $C_v = 0.38$, $C_s / C_v = 2.0$, середньоквадратична похибка $\varepsilon_{\bar{q}_N} = 4.6\%$ (приклад розрахунку 2.1).

Запропонований аналог задовольняє принципу репрезентативності та відповідає необхідним вимогам.

Таблиця 2.3 – Середньорічні модулі стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ та р.Південний Буг – с.Олександрівка за період сумісних спостережень 1946-1960 рр.

№ п/п	рік	Модуль стоку q_i , л/скм ² р.Південний Буг – м.Первомайськ	Модуль стоку q_i , л/скм ² р.Південний Буг – с.Олександрівка
1	1946	1.48	1.31
2	1947	2.95	2.71
3	1948	2.32	2.55
4	1949	2.20	2.08
5	1950	1.22	1.28
6	1951	1.61	1.61
7	1952	1.59	1.51
8	1953	1.94	1.91
9	1954	0.88	0.92
10	1955	1.55	1.62
11	1956	3.06	2.75
12	1957	0.95	0.97
13	1958	1.57	1.59
14	1959	0.86	0.83
15	1960	2.27	2.21

Середнє значення річного модуля стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ за період 1946-1960 рр. становить $\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} = \frac{26.45}{15} = 1.76$ л/скм².

Для розрахунку коефіцієнту варіації складається таблиця 2.4. Коефіцієнт варіації дорівнює:

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{2.22}{14}} = 0.40.$$

Середня квадратична похибка \bar{q} встановлюється за формулою (2.12):

$$\varepsilon_{\bar{q}} = \pm \frac{\sigma_q}{\bar{q}_N \sqrt{n}} \cdot 100\% = \pm \frac{100 C_v}{\sqrt{n}} \% = \frac{0.40}{\sqrt{15}} 100\% = 10.3\% > 10\%$$

Таблиця 2.4 – Розрахунок коефіцієнта варіації р.Південний Буг – м.Первомайськ

№ п/п	рік	Модуль стоку q_i , л/скм ²	Модульні коефіцієнти, K_i	$(K_i - 1)$	$\sum (K_i - 1)^2$
1	1946	1.48	0.841	-0.159	0.025
2	1947	2.95	1.676	0.676	0.457
3	1948	2.32	1.318	0.318	0.101
4	1949	2.20	1.250	0.250	0.063
5	1950	1.22	0.693	-0.307	0.094
6	1951	1.61	0.915	-0.085	0.007
7	1952	1.59	0.903	-0.097	0.009
8	1953	1.94	1.102	0.102	0.010
9	1954	0.88	0.500	-0.500	0.250
10	1955	1.55	0.881	-0.119	0.014
11	1956	3.06	1.739	0.739	0.546
12	1957	0.95	0.540	-0.460	0.212
13	1958	1.57	0.892	-0.108	0.012
14	1959	0.86	0.489	-0.511	0.261
15	1960	2.27	1.290	0.290	0.084
Сума			15.03	-0.010	0.0841

Значення $\varepsilon_{\bar{q}}$ більше за допустиме, тому необхідно приведення ряду до багаторічного періоду.

1. При застосуванні графічного методу будується залежність середньорічних модулів стоку розрахункової річки р.Південний Буг – м.Первомайськ та річки-аналога р.Південний Буг – с.Олександрівка за період з 1946 по 1960 рр. (рис.2.3), тобто за період сумісних спостережень.

Зв'язок прямолінійний, проходить через початок координат. Середнє відхилення точок від лінії зв'язку не перевищує 10%. Тангенс кута нахилу лінії зв'язку до осі аналога складає 0.96, тобто лінія зв'язку близька до лінії рівних значень.

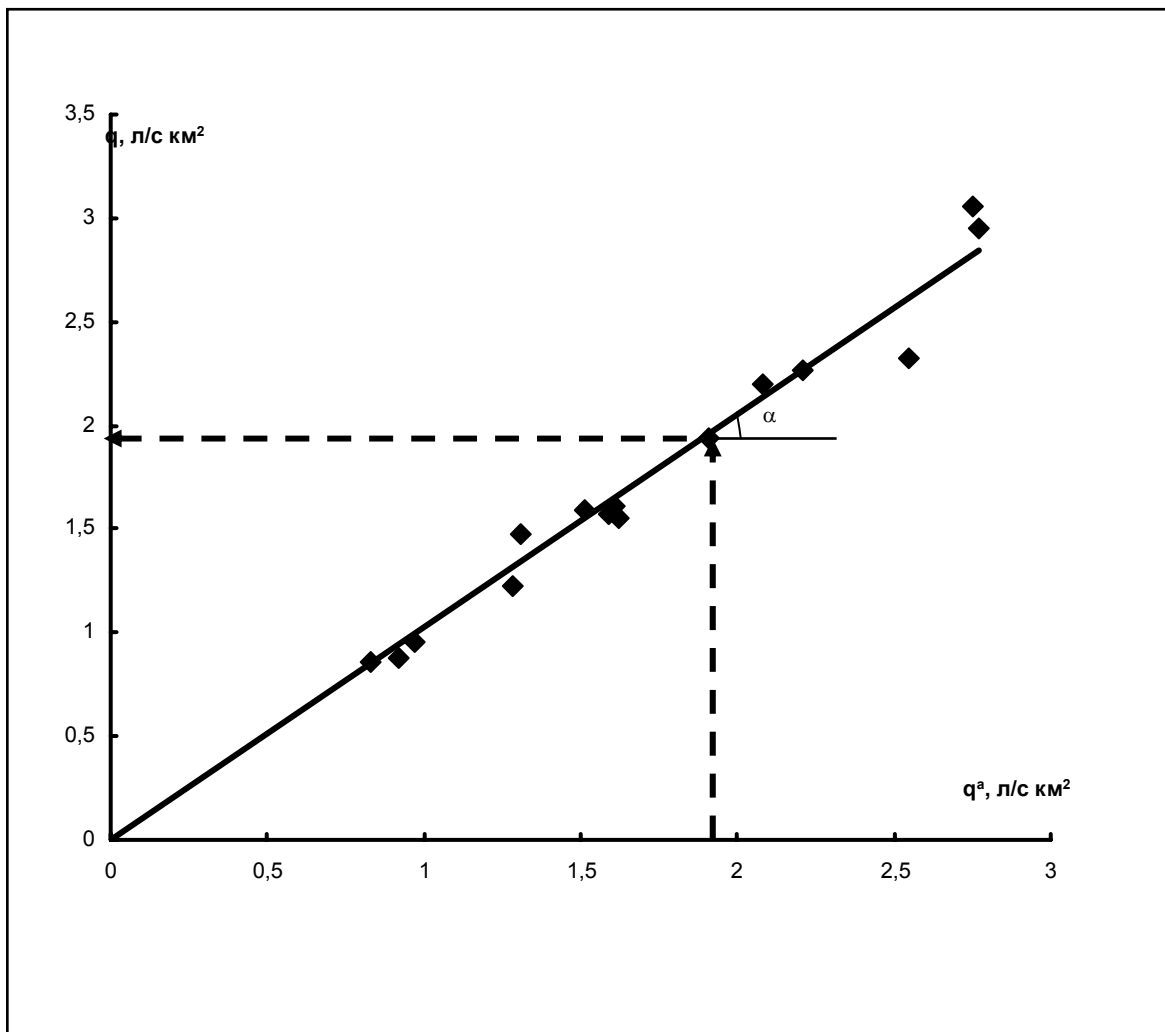


Рисунок 2.3 - Залежність середньорічних модулів стоку р.Південний Буг - с.Олександрівка (q^a) та р.Південний Буг - м.Первомайськ (q) за сумісний період спостережень (1946 - 1960 рр.)

Для підтвердження висновку розраховується коефіцієнт кореляції r за формулою (2.13) і заноситься у таблицю 2.5.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta q \cdot \Delta q^a)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta q^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta q^a)^2}} = \frac{6.19}{\sqrt{6.64 \cdot 5.69}} = 0.98$$

Таблиця 2.5 - Визначення кореляційної залежності між модулями річного стоку р.Південний Буг – с.Олександрівка та Південний Буг – м.Первомайськ

№ п/п	Рік	q_i , л/скм ²	q_i^a , л/скм ²	$\Delta = q_i - \bar{q}$	$\Delta^a = q_i^a - \bar{q}^a$	Δq^2	$(\Delta q^a)^2$	$\Delta q \times \Delta q^a$	$(\Delta q + \Delta q^a)^2$
1	1946	1.48	1.31	-0.28	-0.42	0.078	0.176	0.118	0.490
2	1947	2.95	2.77	1.19	1.04	1.416	1.082	1.238	4.973
3	1948	2.32	2.55	0.56	0.82	0.314	0.672	0.459	1.904
4	1949	2.20	2.08	0.44	0.35	0.194	0.123	0.154	0.624
5	1950	1.22	1.28	-0.54	-0.45	0.292	0.203	0.243	0.980
6	1951	1.61	1.61	-0.15	-0.12	0.023	0.014	0.018	0.073
7	1952	1.59	1.51	-0.17	-0.22	0.029	0.048	0.037	0.152
8	1953	1.94	1.91	0.18	0.18	0.032	0.032	0.032	0.130
9	1954	0.88	0.92	-0.88	-0.81	0.774	0.656	0.713	2.856
10	1955	1.55	1.62	-0.21	-0.11	0.044	0.012	0.023	0.102
11	1956	3.06	2.75	1.30	1.02	1.69	1.040	1.326	5.382
12	1957	0.95	0.97	-0.81	-0.76	0.656	0.578	0.616	2.465
13	1958	1.57	1.59	-0.19	-0.14	0.036	0.020	0.027	0.109
14	1959	0.86	0.83	-0.90	-0.90	0.810	0.810	0.810	3.240
15	1960	2.27	2.21	0.51	0.48	0.260	0.230	0.145	0.980
Σ		26.45	25.91	0.05	-0.04	6.648	5.697	6.058	
ср		1.76	1.73						

Такий високий коефіцієнт кореляції ще раз підтверджує правильність вибору річки-аналога.

По графіку зв'язку (рис.2.3) при $\bar{q}_N^a = 1.97 \text{ л/скм}^2$ норма річного стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ, приведена до багаторічного періоду, становить $\bar{q} = 1.89 \text{ л/скм}^2$.

Коефіцієнт варіації дорівнює (при $A = \text{tg } \alpha = 0.96$):

$$C_v = A \frac{\bar{q}_N^a}{\bar{q}_N} C_v^a = 0.96 \frac{1.97}{1.89} 0.38 = 0.38.$$

Коефіцієнт асиметрії прийнято за аналогом $C_s = 2C_v = 0.76$.

Похибка норми стоку приведенного ряду, розрахована за формулою (2.24) дорівнює:

$$\varepsilon_{\bar{q}_N} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \sqrt{4.60^2 + 1.95^2} = 5.0\%$$

де $\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{a}{q_N} = 4.6\%$;

$$\varepsilon_2 = \frac{C_v \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n}} 100\% = \frac{0.38 \sqrt{1-0.98^2}}{\sqrt{15}} 100\% = 1.95\%.$$

Тобто, після приведення до багаторічного періоду похибка зменшилася на 5.3%.

2. При використанні графоаналітичного методу спочатку для ряду модулів стоку річки-аналогу (р.Південний Буг – с.Олександрівка) за період 1914-1985 рр будується емпірична крива забезпеченості. З цією метою річні модулі стоку розташовують в порядку убутання та визначають рангові імовірності $P\%$ за формулою (1.88).

В таблиці 2.6 наведені ординати відповідної кривої забезпеченості.

Точки наносяться на клітчасту ймовірностей та проводиться згладжена емпірична крива забезпеченості (рис.2.4). Згідно з кривою опорні ординати становлять:

$$\begin{aligned} q_{5\%} &= 3.15 \text{ л/скм}^2; \\ q_{50\%} &= 1.74 \text{ л/скм}^2; \\ q_{95\%} &= 0.80 \text{ л/скм}^2. \end{aligned}$$

На підставі цих значень з графіка зв'язку (рис.2.3) знаходимо відповідні ординати для р.Південний Буг – м.Первомайськ. Тобто: $q_{5\%} = 3.05 \text{ л/скм}^2$, $q_{50\%} = 1.74 \text{ л/скм}^2$, $q_{95\%} = 0.80 \text{ л/скм}^2$. Ці значення

Таблиця 2.6 - Ординати емпіричної кривої забезпеченості
(р.Південний Буг – с.Олександрівка)

№ п/п	рік	q_i^a , л/скм ²	q_i^a ↓, л/скм ²	P, %
1	1914	1.29	4.29	1.41
2	1915	1.68	3.81	2.82
3	1916	1.57	3.53	4.23
4	1918	1.20	3.31	5.63
5	1919	1.84	3.14	7.04
6	1920	1.41	2.96	8.45
7	1921	0.41	2.92	9.86
8	1922	2.68	2.86	11.27
9	1923	2.32	2.77	12.68
10	1924	2.36	2.75	14.08
11	1925	1.15	2.75	15.49
12	1926	2.08	2.68	16.90
13	1927	1.22	2.60	18.31
14	1928	1.50	2.55	19.72
15	1929	2.45	2.45	21.13
16	1930	1.09	2.45	22.54
17	1931	2.16	2.40	23.94
18	1932	3.81	2.36	25.35
19	1933	2.34	2.34	26.76
20	1934	1.67	2.32	28.17
21	1935	1.77	2.32	29.58
22	1936	0.87	2.21	30.99
23	1937	2.40	2.16	32.39
24	1938	1.46	2.16	33.80
25	1939	1.27	2.12	35.21
26	1940	3.53	2.11	36.62
27	1943	1.57	2.11	38.03
28	1945	1.87	2.08	39.44
29	1946	1.31	2.08	40.85
30	1947	2.77	2.06	42.25
31	1948	2.55	2.04	43.66
32	1949	2.08	2.03	45.07
33	1950	1.28	1.94	46.48
34	1951	1.61	1.91	47.89
35	1952	1.51	1.90	49.30

Продовження таблиці 2.6

№ п/п	рік	q_i^a , л/скм ²	$q_{i\downarrow}^a$, л/скм ²	P, %
36	1953	1.91	1.87	50.70
37	1954	0.92	1.86	52.11
38	1955	1.62	1.84	53.52
39	1956	2.75	1.77	54.93
40	1957	0.97	1.75	56.34
41	1958	1.59	1.69	57.75
42	1959	0.83	1.68	59.15
43	1960	2.21	1.67	60.56
44	1961	1.23	1.65	61.97
45	1962	1.94	1.65	63.38
46	1963	2.04	1.62	64.79
47	1964	0.99	1.61	66.20
48	1965	2.06	1.59	67.61
49	1966	2.12	1.57	69.01
50	1967	2.11	1.57	70.42
51	1968	2.16	1.51	71.83
52	1969	2.96	1.50	73.24
53	1970	3.31	1.48	74.65
54	1971	2.45	1.46	76.06
55	1972	1.75	1.41	77.46
56	1973	2.03	1.31	78.87
57	1974	1.86	1.29	80.28
58	1975	1.48	1.28	81.69
59	1976	1.90	1.27	83.10
60	1977	2.60	1.23	84.51
61	1978	2.75	1.22	85.92
62	1979	3.14	1.20	87.32
63	1980	4.29	1.15	88.73
64	1981	2.92	1.09	90.14
65	1982	2.32	0.99	91.55
66	1983	1.65	0.97	92.65
67	1984	2.11	0.92	94.37
68	1985	2.86	0.87	95.77
69	1986	1.65	0.83	97.18
70	1987	1.69	0.41	98.59

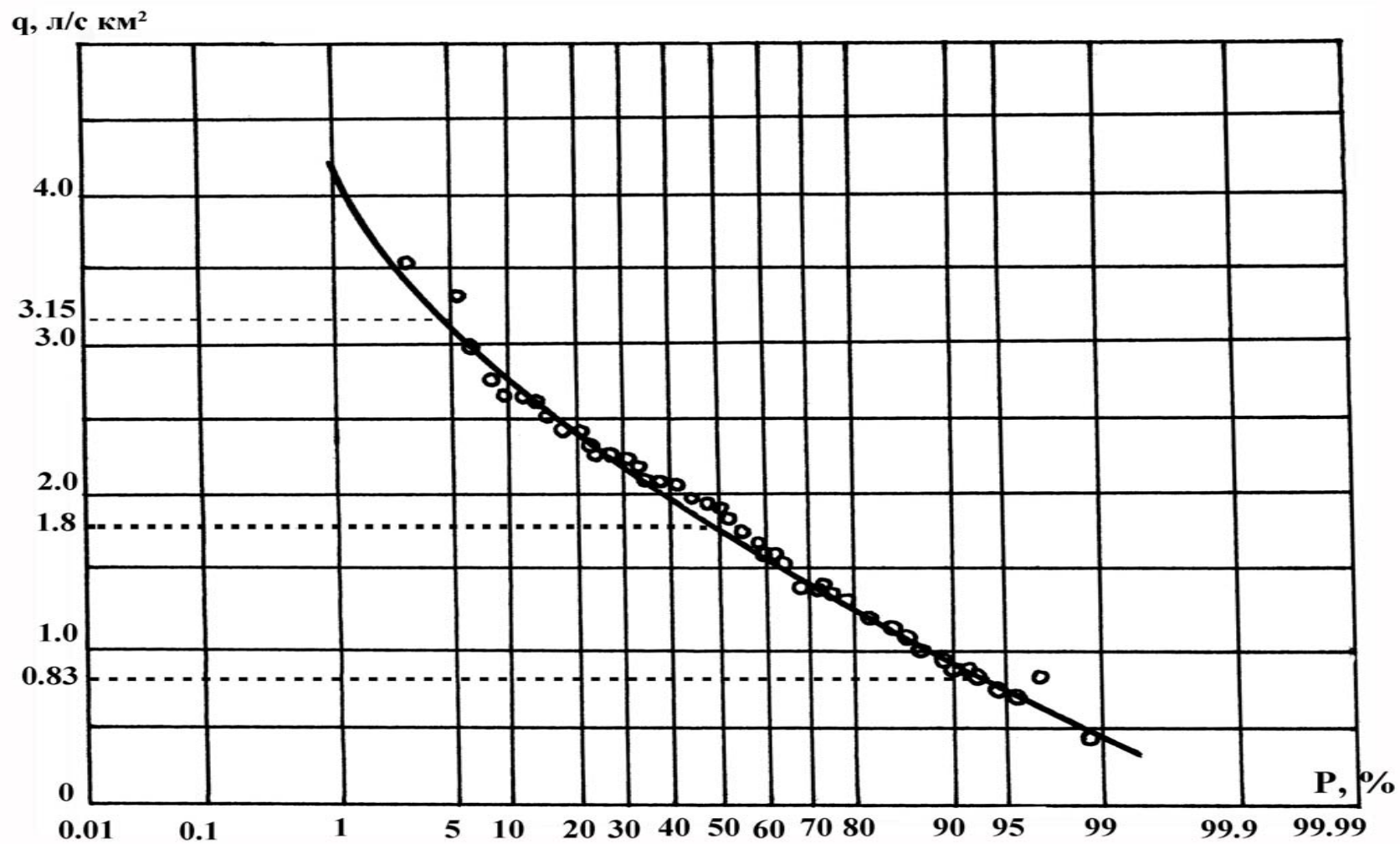


Рисунок 2.4 – Емпірична крива забезпеченості р.Південний Буг – с.Олександрівка, 1914-1985 рр.

використовуємо для подальших розрахунків. Коефіцієнт скісності дорівнює:

$$S = \frac{q_{5\%} + q_{95\%} - 2q_{50\%}}{q_{5\%} - q_{95\%}} = \frac{3.05 + 0.80 - 2 \cdot 1.74}{3.05 - 0.80} = 0.165 \approx 0.17$$

З табл.1.1 при $S = 0.17$ коефіцієнт асиметрії $C_s = 0.60$ та нормовані ординати біноміальної кривої забезпеченості складають:

$$\Phi_{5\%} = 1.80; \quad \Phi_{50\%} = -0.13; \quad \Phi_{95\%} = -1.45.$$

Середнє квадратичне відхилення становить:

$$\sigma = \frac{q_{5\%} - q_{95\%}}{\Phi_{5\%} - \Phi_{95\%}} = \frac{3.05 - 0.80}{3.25} = 0.69$$

Середньобагаторічний модуль стоку дорівнює:

$$\bar{q}_N = q_{50\%} - \sigma \Phi_{50\%} = 1.75 - 0.69(-0.18) = 1.84 \text{ л/скм}^2.$$

Коефіцієнт варіації C_v дорівнює:

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{q}_N} = \frac{0.69}{1.84} = 0.37$$

Похибка середньобагаторічного модуля стоку, розрахована як і для графічного способу, складає 5.0%.

3. При застосуванні аналітичного метода (метода парної лінійної регресії) використовується рівняння (2.18). Статистичні параметри розглядуваної річки та річки-аналога розраховуються за період сумісних спостережень. Приведення значень модулів річного стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ за рівнянням лінійної регресії виконується за наступною схемою.

По-перше, дані перевіряються за співвідношенням K/σ_k за формулами (2.16), (2.17).

Коефіцієнт регресії становить:

$$K = \frac{r\sigma}{\sigma^2} = \frac{0.98 \cdot 0.55}{0.82} = 0.68.$$

Похибка коефіцієнта регресії складає:

$$\sigma_k = \frac{r\sigma}{\sigma^2} \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{0.55}{0.82} \frac{1-0.98^2}{\sqrt{14}} = 0.01.$$

Таким чином відношення $K / \sigma_k = 68 > 2$.

Приведені розрахунки зазначають надійність аналога р.Південний Буг – с.Олександрівка для приведення норми розрахункового створу за рівнянням лінійної регресії.

Середні значення модулів стоку досліджуваних річок за період спільних спостережень з 1946 по 1960 рр становлять для р.Південний Буг – м.Первомайськ $\bar{q}^a = 1.72$ л/скм² при нормі стоку $\bar{q}_N^a = 1.97$ л/скм².

Коефіцієнт кореляції, обчислений за формулою (2.15), згідно з табл.2.2 складає $r = 0.98$.

Середньоквадратичні відхилення σ та σ^a , розраховані за період 1946-1960 рр за допомогою табл.2.3, дорівнюють:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2.24}{14}} = 0.55.$$

$$\sigma^a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (q^a_i - \bar{q}^a)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{9.41}{14}} = 0.82.$$

Приведене значення норми річного стоку, згідно з (2.18) дорівнює:

$$\bar{q}_N = \bar{q}_n + r \frac{\sigma}{\sigma^a} (q_N^a - \bar{q}_n^a) = 1.76 + 0.98 \frac{0.55}{0.82} (1.97 - 1.72) = 1.92 \text{ л/скм}^2$$

Коефіцієнт варіації за формулою (2.21) становить:

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{q}_N} \sqrt{1 + r^2 \left(1 - \frac{\sigma^a}{\sigma_N^a} \right)} = \frac{0.55}{1.92} \sqrt{1 - 0.98^2 \left[1 - \frac{0.82^2}{0.61^2} \right]} = 0.38.$$

Похибка приведенного значення норми річного стоку за рівнянням регресії (2.22) дорівнює:

$$\varepsilon_{\bar{q}_N} = \frac{100\sigma}{\bar{q}_N \cdot \sqrt{n}} \sqrt{1+r^2 \left(\frac{n}{N} \frac{\sigma_N^a}{\sigma^a} - 1 \right)} = \frac{100 \cdot 0.55}{1.92 \sqrt{15}} \sqrt{1 - 0.98^2 \left(\frac{15 \cdot 0.61^2}{68 \cdot 0.82^2} - 1 \right)} = 3.0 \%$$

тобто менше від вихідної приблизно на 7.3%.

4. Для приведення статистичних параметрів стоку до довгого періоду за методом коефіцієнтів спочатку треба розрахувати коефіцієнт кореляції між значеннями стоку досліджуваного ряду та ряду-аналогу за період спільних спостережень. Як показано вище (аналітичний метод) цей коефіцієнт для періоду з 1946р. по 1960р. між значеннями річного стоку р.Південний Буг – с.Олександрівка та р.Південний Буг – м.Первомайськ становить 0.98, тобто $r \geq 0.7$. Наступним етапом є побудування хронологічних графіків коливань річного стоку (рис.2.5). Для того щоб хронологічні графіки простіше було порівнювати між собою їх будують у модульних коефіцієнтах k_i . Як видно із рис.2.5, коливання річного стоку за період з 1946 по 1960 рр. досліджуваного ряду (р.Південний Буг - с.Олександрівка) та ряду-аналога (р.Південний Буг – м.Первомайськ) повністю синхронні.

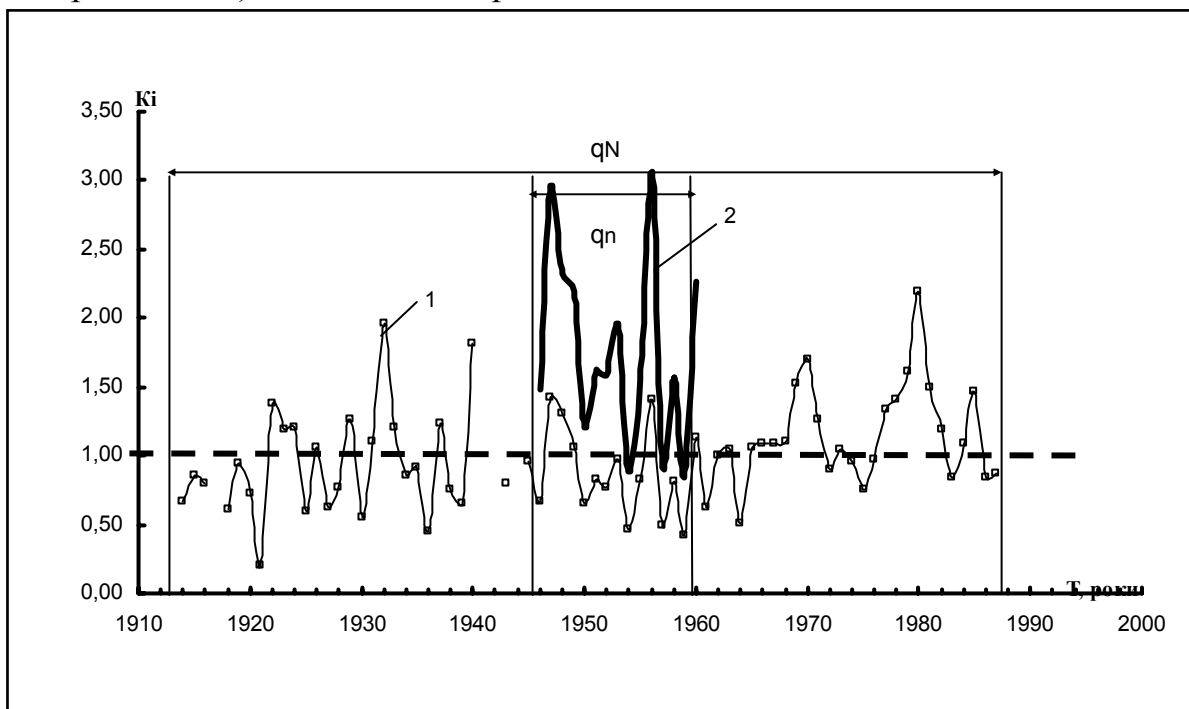


Рисунок 2.5 – Хронологічний графік коливань річного стоку р.Південний Буг – с.Олександрівка(1) та р.Південний Буг – м.Первомайськ(2)

У такому випадку, відповідно до (2.29) можна записати

$$\frac{\bar{q}^a_N}{\bar{q}^a_n} = \frac{\bar{q}_N}{\bar{q}_n};$$

Позначимо співвідношення $\frac{\bar{q}^a_N}{\bar{q}^a_n}$ через K_N .

Тоді $K_N=1.14$, а \bar{q}_N дорівнює

$$\bar{q}_N = K_N \bar{q}_n = 1.14 \cdot 1.76 = 2.00 \text{ л/скм}^2$$

Результати приведення статистичних параметрів річного стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ різними методами представлені в табл.2.7.

Як видно з табл.2.7, розрахункові значення статистичних параметрів річного стоку близькі між собою. Але параметри $\bar{q}_n, C_v, C_s / C_v$, приведені до багаторічного періоду графоаналітичним способом, дещо знижені, що обумовлено точністю проведення згладженої емпіричної кривої.

Таблиця 2.7 – Порівнювальні дані статистичних параметрів річного стоку р.Південний Буг – м.Первомайськ, обчислені різними методами

Метод приведення	\bar{q}_n , л/скм ²	$\varepsilon_{\bar{q}_n}$, %	C_v	C_s / C_v
Графічний	1.89	5.00	0.38	2.00
Графо-аналітичний	1.84	5.00	0.37	1.60
Аналітичний	1.92	3.00	0.38	2.00
Метод коефіцієнтів	2.00	5.00	0.38	2.00

Перевагу можна віддати графічному способу, як найпростішому, за умови достатнього обґрунтування графічної залежності, але найкращі результати отримуються при використанні аналітичного метода.

2.4 Фактори формування річного стоку

Стік річок формується під впливом складної взаємодії фізико-географічних факторів, що поділяються на дві групи: кліматичні та фактори підстильної поверхні. До основних кліматичних факторів (**зональні фактори**) відносяться атмосферні опади, випаровування, температура повітря. До факторів підстильної поверхні відносять **інтразональні фактори**, які пов'язані із зональними умовами, але змінюються всередині зони (рослинність, ґрунти, озерність, заболоченість) та **азональні фактори**, не пов'язані з географічними координатами басейну (площа, довжина, висота басейну тощо).

Визначальний вплив на формування стоку річок справляють кліматичні фактори. Стік за рік, за період весняної повені та дощових паводків залежить від атмосферних опадів. У кліматичних умовах України першорядне значення у формуванні стоку має сніговий покрив. У весняний період танення снігу зумовлює виникнення водопілля, під час якого проходить 50-80% річного стоку. У період танення снігу внаслідок інфільтрації талих вод відбувається посилене живлення підземних вод.

Сніговий покрив, що має малу теплопровідність, зменшує глибину промерзання ґрунтів та водоймищ. Для річок зі сніговим живленням, найбільшими у році, є максимальні витрати весняної повені. Процес формування дощових паводків визначається інтенсивністю дощу, площею його розподілу, умовами увібрання води ґрунтами, а також затримуванням води в озерних улоговинах та інших пониженнях рельєфу.

Температура повітря у зимовий період визначає глибину промерзання ґрунтоґрунтів. Від промерзлої ґрунту кількість води, що стікає, більше ніж від талої, оскільки частка води просочується вглиб талої ґрунту, збільшуючи запаси підземних вод. З температурним режимом також пов'язані процес танення снігу, замерзання та скресання водоймищ, умови протікання води у руслі, випаровування з поверхні басейну та ін.

Вплив кліматичних факторів на формування стоку річок залежить від факторів підстильної поверхні (рельєфу, лісистості, наявності озер та боліт, характеру ґрунтоґрунтів), що зумовлюють втрати стоку й умови стікання води у річки.

Рельєф басейну впливає на кількість, характер випадання та розподіл опадів по території басейну, температуру повітря та умови стікання води по поверхні. Вплив рельєфу на кількість атмосферних опадів виявляється в тому, що з підвищенням місцевості над рівнем моря до певної визначеної висоти кількість опадів збільшується. Ця закономірність найчіткіше простежується в гірських регіонах. Але й невеликі височини на рівнинах збільшують річні суми опадів на 100-150 мм порівняно з навколишньою місцевістю. Другий бік впливу рельєфу пов'язаний з нахилом річкової

мережі та схилів. Чим сильніше розсічений рельєф водозбору, тим із більшою інтенсивністю стікає вода у річки. Тому за інших однакових умов у басейнах із великими формами рельєфу хвиля весняної повені виявиться більш різкою, а загальна тривалість повені буде меншою, ніж у випадку плоского рельєфу, коли формується полого розтягнена хвиля повені. Це зумовлено тим, що для рівнинних басейнів втрати стоку у дрібних пониженнях рельєфу та на фільтрацію більші порівняно з гірськими басейнами.

Вплив лісу на формування стоку має складний характер. З одного боку, ліс збільшує кількість опадів внаслідок відмінності динамічної шорсткості лісних і безлісних територій. З другого боку, ліс кронами дерев затримує частину опадів, яка потім випаровується.

Ліс також сповільнює процес танення снігу, що спричиняє зниження максимальних витрат та збільшення тривалості повені порівняно з менш залісеними територіями.

Унаслідок високої інфільтраційної здатності лісові ґрунти спричиняють перехід поверхневого стоку в підземний. Тому внутрішньорічний розподіл стоку річок залісених басейнів має більш згладжений характер порівняно з безлісними.

Геологічна будова та ґрунти зумовлюють інтенсивність просочування атмосферних опадів та істотно впливають на формування поверхневого та підземного стоку. Близьке залягання водонепроникних порід зумовлює процес заболочування; наявність карсту значно змінює гідрологічний режим річок.

Вплив озер на режим поверхневого стоку проявляється по-різному. Стік річок, які протікають крізь озера, знижується внаслідок підвищеного випаровування з водної поверхні порівняно із сушею.

Завдяки акумуляції води в озерах у багатоводні періоди та спрацювання її у маловодні відбувається вирівнювання стоку річок. Міра впливу озер на вирівнювання внутрішньорічного розподілу стоку залежить від містоположення озер на басейні. Озера у верхів'ях річок створюють менший вирівнювальний ефект ніж озера, що знаходяться у нижній течії річки.

Наявність боліт зумовлює зниження піку та зростання тривалості весняної повені, а також зниження дощових літніх паводків. При цьому зниження піку повені відбувається внаслідок сповільненого стоку і значних розливів заболочених річок по широкій долині. На зниження літніх паводків істотно впливає вбираюча здатність торф'яників.

Значний вплив на режим стоку справляє господарська діяльність людини (лісонасадження, створення ставків і водосховищ, забір води на зрошування, випуск у річки забруднених вод, оранка басейну тощо).

2.4.1 Рівняння водного балансу

Рівняння водного балансу в гідрології виявляє одну з різноманітностей загального закону збереження енергії. На його основі розглянуто зміст, зв'язку прибутку витрати та акумуляції води для окремих ділянок території, водних об'єктів або річкових басейнів.

Метод водного балансу є одним з найобґрунтованіших при дослідженні гідрологічного режиму річок як у природному стані, так і в умовах діяльності людини. Водогосподарські та агрометеорологічні засоби можуть корінним чином змінити балансові співвідношення, що може вплинути на складові рівняння водного балансу. Установлення закономірності спрямованої зміни складових балансових рівнянь, зумовленою господарською діяльністю, дає змогу оцінити ступінь впливу цих факторів.

Розглянемо рівняння водного балансу для річкового басейну, в якому збігаються поверхневий та підземний водорозділи, а ерозійний вріз русла забезпечує дренажування основних горизонтів.

Зростання поверхневого та підземного водорозділів є умовою відсутності водообміну із сусідніми водозборами. Прихідну частину складають опади (X), а витратну – випаровування (E), поверхневий ($Y_{\text{пов}}$) та підземний ($Y_{\text{підз}}$) стік. Під E розуміють результат випаровування за винятком конденсації, яка здебільшого дуже мала порівняно з іншими прихідно-витратними компонентами рівняння водного балансу. Зміну запасів вологи в ґрунтах басейну, а також у русловій мережі, озерах та болотах, що перебувають у межах басейну, позначимо $\pm \Delta W$. У підсумку рівняння водного балансу для будь-якого часу запишемо так:

$$X = E + Y_{\text{пов}} + Y_{\text{підз}} \pm \Delta W \quad (2.31)$$

Знак “+” при ΔW вказує про накопичення, а “-” – витрату запасів води на водозборі. Якщо суму $Y_{\text{пов}} + Y_{\text{підз}}$ позначити, як сумарний стік Y , то будемо мати просту структуру:

$$X = E + Y \pm \Delta W. \quad (2.32)$$

Для багаторічного періоду зміна запасів вологи в межах річкового водозбору прагне до нуля ($\pm \Delta W = 0$), а опади, випаровування та стік будуть відповідати їх середнім значенням – \bar{X} , \bar{E} та \bar{Y} .

Тоді

$$\bar{X} = \bar{E} + \bar{Y}. \quad (2.33)$$

Аналіз цього рівняння показує, що в багаторічному періоді атмосферні опади, що випадають на поверхню водозбору, витрачаються на випаровування та стік. Проте це стосується лише великих басейнів, коли має місце повне дренування підземних вод.

У гідрологічній практиці рівняння водного балансу широко застосовують не тільки для зв'язку та контролю його складових, а й для визначення невідомих і важко вимірюваних величин. Дійсно, в межах водозбору безпосередньо вимірюються тільки опади X та загальний стік Y . Вимірювання випаровування з всієї поверхні водозбору спричиняє великі труднощі. Обчислення випаровування E за рівнянням водного балансу при відомих значеннях стоку та опадів, особливо для багаторічного періоду великих затруднень не спричиняє. Для коротких часових інтервалів при визначенні E за рівнянням, необхідно мати також дані про зміну вологи на водозборі. Аналогічні труднощі виникають і при обчисленні випаровування водозборів, що не дренують підземні води.

2.4.2 Генетичний метод розрахунку річного стоку

Згідно цьому методу, запропонованому А.М.Бефані, сумарний річний стік Y_0 може бути представлений у вигляді двох складових: поверхневої $Y_{0_{\text{пов}}}$ і підземної (грунтової) $Y_{0_{\text{гр}}}$

$$Y_0 = Y_{0_{\text{пов}}} + Y_{0_{\text{гр}}} \quad (2.34)$$

де $Y_{0_{\text{гр}}}$ - норма ґрунтового живлення; $Y_{0_{\text{пов}}}$ - норма поверхневого живлення.

Для тимчасових водотоків підземна складова дорівнює нулю, тобто

$$Y_0 = Y_{0_{\text{пов}}} \quad (2.35)$$

Опади, які попадають на поверхню такого водозбору витрачаються на випаровування і поверхневий стік, а також на поповнення запасів підземних вод, які тимчасовими водотоками не дренуються.

У природних умовах по мірі наростання водозбірної площі відбувається поступове збільшення ерозійного врезу русла річки і зумовлює зростання ступеня дренування основних водоносних горизонтів підземних вод, тобто відбувається збільшення підземного притоку в русло річки.

Мінімальну площу при якій виникає ґрунтове живлення, називають “першою критичною” і позначають як $F_{1кр}$. Відповідно, річки з площами водозборів $F < F_{1кр}$ розглядаються як малі. Зростання підземного живлення із збільшенням площі басейну відбувається до певної межі, обумовленої місцевим базисом ерозії. Площу, при якій настає стабілізація ґрунтового живлення, називають “другою критичною площею”, а річки з площею $F_{1кр} < F < F_{2кр}$ відносяться до категорії середніх. І, нарешті, річки з площею водозбору $F > F_{2кр}$, класифікуються як великі. В цьому випадку річка повністю перехоплює підземні водоносні горизонти і її підземне живлення дорівнює величині інфільтрації опадів в ґрунтові води U_0 . Вплив площі водозбору і його гідрогеологічних особливостей на підземний стік враховується за допомогою редуційного множника

$$\varphi = \text{th} \left(a_{\Gamma} n_3 \sqrt{\frac{F}{F_{1кр}} - 1} \right). \quad (2.36)$$

де th - гіперболічний тангенс;

a_{Γ} - гідрогеологічний параметр, рівний відношенню потужності всіх потоків ґрунтових вод зони дренажу по вертикалі до максимальної глибини дренажу;

n_3 - показник інтенсивності наростання підземного притоку;

F - площа водозбору, км²;

$F_{1кр}$ - перша критична площа, км².

Теоретична формула ґрунтового живлення або, кажучи точніше, формула, що апроксимує рівняння багаторічного ґрунтового живлення, має вигляд

$$Y_{0гр} = U_0 \text{th} \left(a_{\Gamma} n_3 \sqrt{\frac{F}{F_{1кр}} - 1} \right). \quad (2.37)$$

Формула розрахунку середньої багаторічної величини ґрунтового стоку має вигляд

$$\bar{Y}_{гр} = \varphi U_0', \quad (2.38)$$

де U_0' - норма просочування опадів в ґрунтові води.

Формула (2.38) з урахуванням азональних і інтразональних чинників формування стоку може бути представлена у вигляді

$$\bar{Y}_{\text{Гр}} = \varphi U_0 \gamma_{\text{Л}} \gamma_{\text{Б}} \gamma_{\text{О}} \gamma_{\text{К}} \quad (2.39)$$

де U_0 - зональна норма інфільтрації;

$\gamma_{\text{Л}}, \gamma_{\text{Б}}, \gamma_{\text{О}}, \gamma_{\text{К}}$ - коефіцієнти, що враховують вплив залісеності, заболоченості, озерності і карсту.

Для визначення параметрів формули (2.39) перш за все необхідно встановити величину критичної площі $F_{\text{Ікр}}$. Її можна визначити шляхом планіметрування витоків річок та інших виходів ґрунтових вод, які є в басейні. Але оскільки виконання такої роботи в межах великого по площі басейну доволі складна задача, то виникло питання про картування вказаної величини. Дійсно, площа $F_{\text{Ікр}}$ представляє собою величину, яка пов'язана, перш за все, з кліматом. Звичайно, можливий і вплив інтразональних факторів таких як гідрогеологічні умови даного басейну, які обумовлюють коливання площі витоків річок за територією. Але, застосовуючи осереднення результатів вимірювань всередині деякої невеликої території, можна отримати достатньо надійні дані для гідрологічних розрахунків. Як показали дослідження А.М.Бєфані, найліпшим варіантом картування є розбивка території на ділянки в межах яких значення $F_{\text{Ікр}}$ змінюється не значно. Приклад такої карти для території Українських Карпат показано на рис.2.6.

Для визначення параметра $a_{\text{Г}}$, автором цього методу, також пропонується використовувати карту районів, яка представлена на рис.2.7.

Якщо ми маємо карти параметрів $F_{\text{Ікр}}$ та $a_{\text{Г}}$, то для кожного басейну можна розрахувати φ , що дозволяє виключити вплив площі на шар просочування, розділивши U_0' на φ . Для спрощення розрахунків при визначенні гіперболічної функції φ пропонується розрахунковий графік (рис.2.8) для найбільш часто зустрічаючихся значень гідрогеологічного параметру $a_{\text{Г}}$.

Далі, по отриманих значеннях $U_0 = \frac{U_0'}{\varphi}$, А.М.Бєфані побудував карту зональних значень норми інфільтрації (просочування в ґрунтові води) рис.2.9. Поверхневий стік (за відсутності льодовикового живлення) складається з снігового живлення $Y_{\text{Ос}}$ (головним чином весняного) і дощового живлення $Y_{\text{Од}}$;

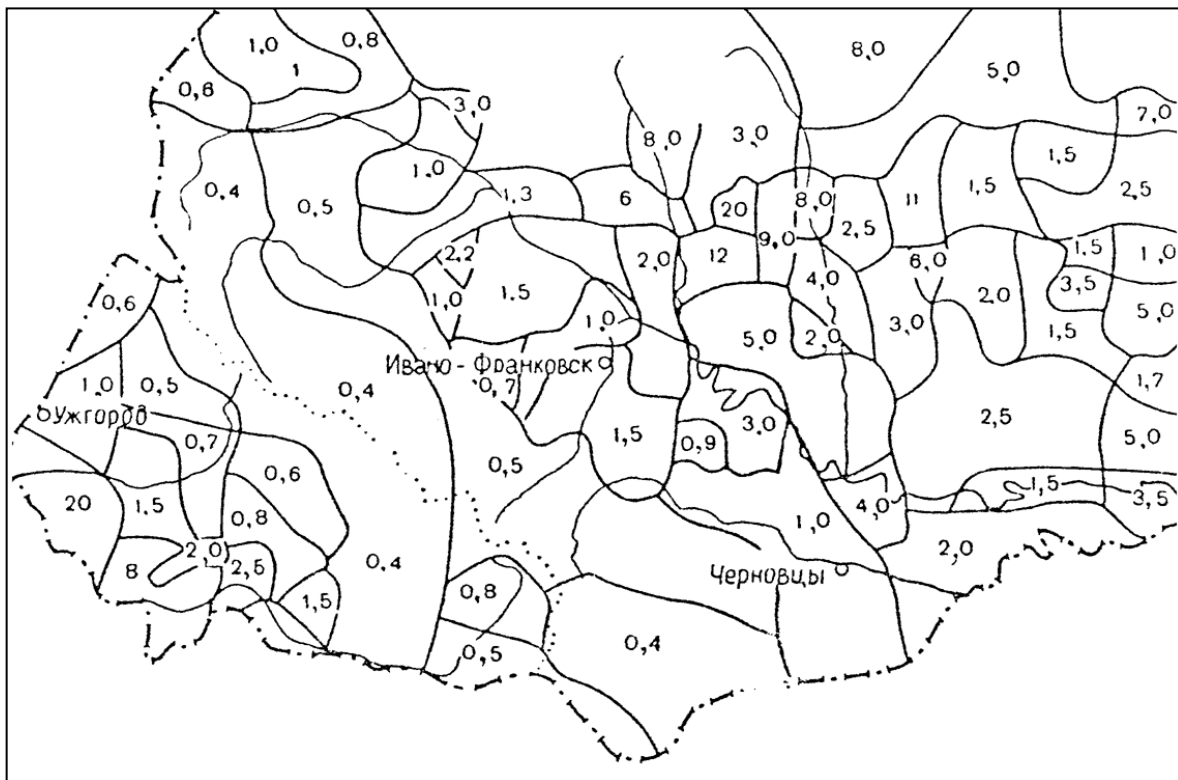


Рисунок 2.6 – Картограма для визначення початкової площі ґрунтового живлення $F_{кр}$



Рисунок 2.7 – Схематична карта районів гідрогеологічного параметру a_T в формулі (2.37)

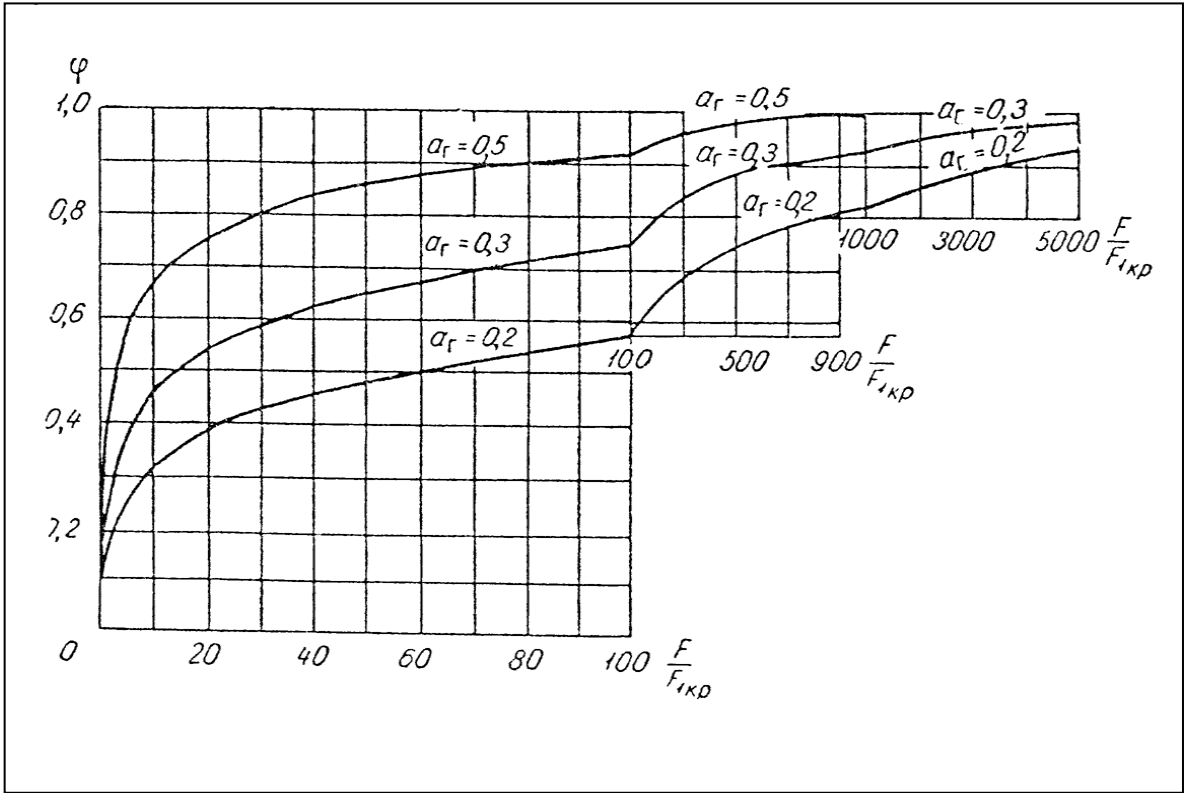


Рисунок 2.8. – Розрахунковий графік для визначення редуційного множника φ за формулою (2.37).

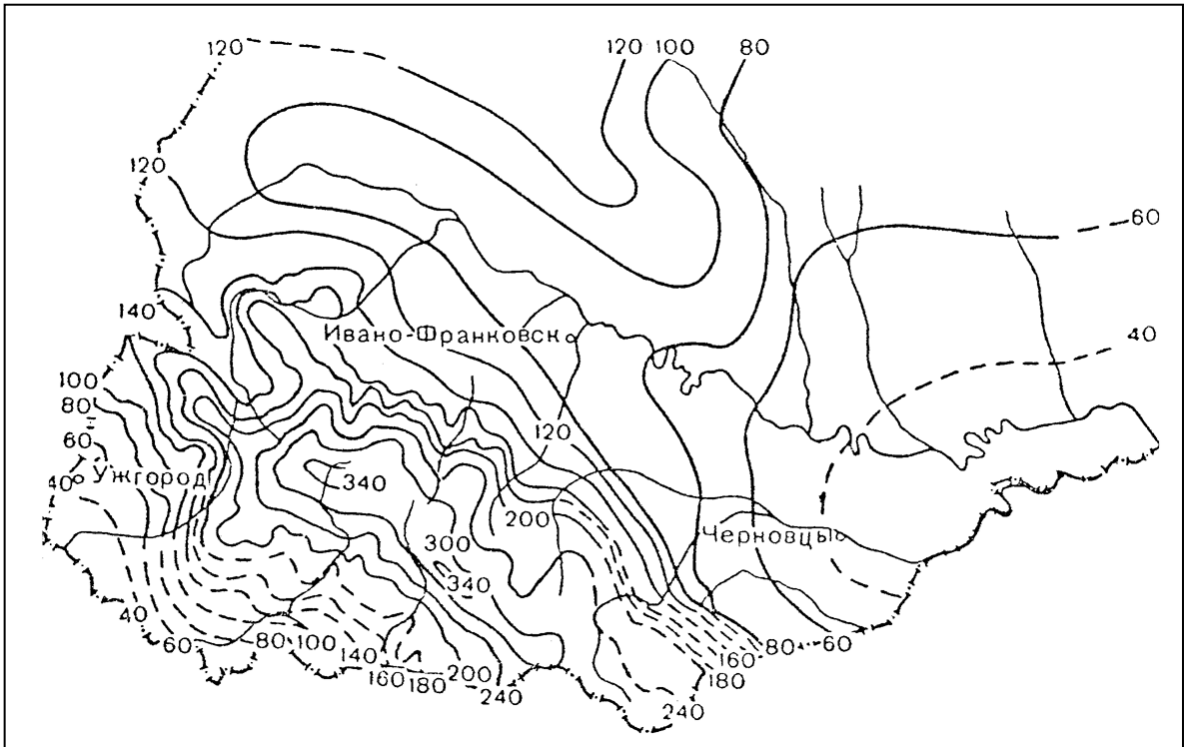


Рисунок 2.9 – Карта норми інфільтрації U_0 (у мм).

$$Y_{\text{о пов}} = Y_{\text{о с}} + Y_{\text{о д}} \quad (2.40)$$

Формула дощового припливу неоднозначна, оскільки процеси формування стоку від рідких опадів різні в різних умовах, а отже, різний вигляд приймає функціональний вираз цих процесів. Так, дощовий стік на малопроникних ґрунтах рівнин і передгір'ях утворюється там, де водоутворення схилу і стік виникають за рахунок надлишку інтенсивності зливи над інтенсивністю впитування (поверхнєве водоутворення). На підтоплюваних низинах з проникними ґрунтами поверхнєве водоутворення виникає при підйомі рівня ґрунтових вод до поверхні. У горах дощовий стік утворюється в результаті водоутворення на приповерхневому водоупорі і відбувається в кам'яних розсипах, пластах щебеня, природних дренах, тріщинах і міжгір'ях, а після насичення рихлих відкладень і концентрації вод в улоговинах - по поверхні (контактне підперте поверхнєве змішане водоутворення).

Своєрідний дощовий стік формується на болотах, в тундрі і зоні вічної мерзлоти. Теоретичні формули дощового стоку для різноманітних умов рівнини дані в роботах А.М.Бєфані. Тут розглядаються формули дощового стоку в рівнинній (передгірній) зоні при інтенсивному поверхневому водоутворенні і в горах при змішаному водоутворенні.

Формулу, придатну для обох цих випадків, можна звести до вигляду:

$$Y_{\text{од}} = S_{\text{од}} - \sum R_{\text{д}}, \quad (2.41)$$

де $S_{\text{од}}$ - сумарний шар водоутворення (поверхнєвого або змішаного) від всіх дощів за середній рік, а $\sum R_{\text{д}}$ - сума втрат води на спаді за всі випадки стоку.

Теоретична формула втрат на спаді для рівнинної території може бути записана у вигляді:

$$\sum R_{\text{д}} = a_2 \Phi^{2/3} \gamma \sqrt{S}, \quad (2.42)$$

Тут a_2 - параметр схилу, γ - приведене число випадків стоку за середній рік, Φ - геоморфологічний фактор, або індекс рельєфу;

$\Phi = \frac{1}{\sqrt{I}}$, причому l - довжина схилу в метрах і I - ухил.

Для гірських районів:

$$\sum R_{\text{д}} = a_k N \Phi. \quad (2.43)$$

Тут a_k - параметр схилу, що характеризує проникність відносного водоупору, що підстилає рихлі відкладення,
 N - число випадків стоку.

Формула шару весняного стоку має вигляд

$$Y_{oc} = S_m(1 - a_B \Phi) - a'_2 \Phi. \quad (2.44)$$

Тут S_m - максимальний шар весняного водоутворення в полі, a'_2 - параметр схилу і a_B - коефіцієнт, що враховує снігозатримання на схилах, при повній залісеності він убуває до мінімуму, збільшуючись приблизно пропорційно корінню квадратному з відносної лісистості.

Множення $S_m(1 - a_B \Phi)$ є шаром водоутворення, тобто це різниця між снігозапасами і втратами, які в свою чергу залежать від чинників, супутніх здуванню снігу в яри і балки, тобто транзиту опадів в твердому вигляді без втрат. Член $a'_2 \Phi$ виражає втрати на спаді весняного водопілля.

У Карпатах і взагалі в лісистих гірських районах, умови стоку дощових і весняних вод багато в чому аналогічні, втрати на спаді взагалі відносно невеликі, знаходяться в строгій лінійній залежності від індексу рельєфу Φ , водопровідні макропори і проміжки між камінням, розсипи, природні дрени на задернованих схилах, пласти щебеня і т.п. звичайно весною вільні від льоду, що створює однотипні умови втрат весною і влітку і т.п.

Слід зазначити, що шар дощового водоутворення зменшується під впливом лісистості і, отже, при картуванні шару польового водоутворення до цієї величини необхідно ввести редуційний коефіцієнт лісистості.

Це дозволяє об'єднати дощовий і сніговий стік в загальний вираз:

$$Y_{опов} = S_{пов} - A_1 \Phi, \quad (2.45)$$

або

$$Y_{опов} = S_{пов} - A \Phi. \quad (2.46)$$

[апроксимація двочлена (2.45) за допомогою одночлена (2.46) дає майже рівнозначні результати]. Тут A_1 - усереднений параметр схилу, залежить від втрат.

При отриманні спрощеної формули (2.45) допущено, що до шару весняного і дощового стоку можна ввести загальну поправку на лісистість, об'єднавши двочлени $1 - a_B \Phi$ і γ'_d , як множник до загального шару стока

$\gamma'_{\text{л}}$. Як показали дослідження А. Г. Іваненка, в умовах Карпат член $A_1\Phi$, що враховує втрати на спаді у формулі (2.45), відносно невеликий і множник $A\Phi$ формули (2.46) не сильно відрізняється від одиниці. Це дозволяє картувати не шар водоутворення $S_{\text{пов}}$, а безпосередньо шар поверхневого стоку $Y_{\text{пов}}$.

Ізолінії стоку в даному випадку відображуватимуть не тільки зональні зміни $S_{\text{пов}}$, але і середні в даному поясі умови рельєфу; можливі для окремих басейнів відхилення індексу рельєфу Φ від середнього по найближчих опорних станціях даного поясу, відображаються тільки на відносно малих втратах спаду і лише в особливо виняткових умовах можуть дати більш менш відчутну помилку.

Розрахункова формула норми стоку з урахуванням інтразональних факторів (лісистості, озерності, заболоченості) може бути переписана так:

$$Y_0 = Y_{\text{пов}} \gamma'_{\text{л}} \gamma'_{\text{оз}} \gamma'_{\text{б}} + U_0 \varphi \gamma_{\text{л}} \gamma_0 \text{ і т.д.} \quad (2.47)$$

У рівнинних районах (передгір'ях) роль втрат на спаді декілька вищі, причому формулу шару поверхневого стоку у зв'язку з переважаючими дощовими втратами краще всього було б виразити так:

$$Y_0 = S_{\text{пов}} (1 - A_2 \Phi^{2/3}), \quad (2.48)$$

де A_2 - параметр схилу для рівнин.

При практичних розрахунках А.М.Бєфані пропонує визначити норму поверхневого живлення по різниці між спостереженою величиною повного стоку та розрахованою за допомогою карти ізоліній параметра U_0 нормою ґрунтового живлення. Далі розробка параметрів може бути виконана за тієї ж самою схемою, яка використовувалася при побудованні карти максимального ґрунтового живлення; величини поверхневого стоку після виключення впливу лісів, озер та боліт наносилися на карту та картувалися за допомогою прийомів описаних вище. Отримана карта (рис.2.10), як і карта норми інфільтрації, дуже добре согласується із опадами та рельєфом місцевості. Середня арифметична похибка розрахунку за цією картою складає 6.6 %.

Таким чином, результати розрахунків виявилися вельми задовільними. Основна ж позитивна якість цієї методики полягає у можливості розрахунку стоку для басейнів будь-якої величини, включаючи дрібні водозбори на схилах.

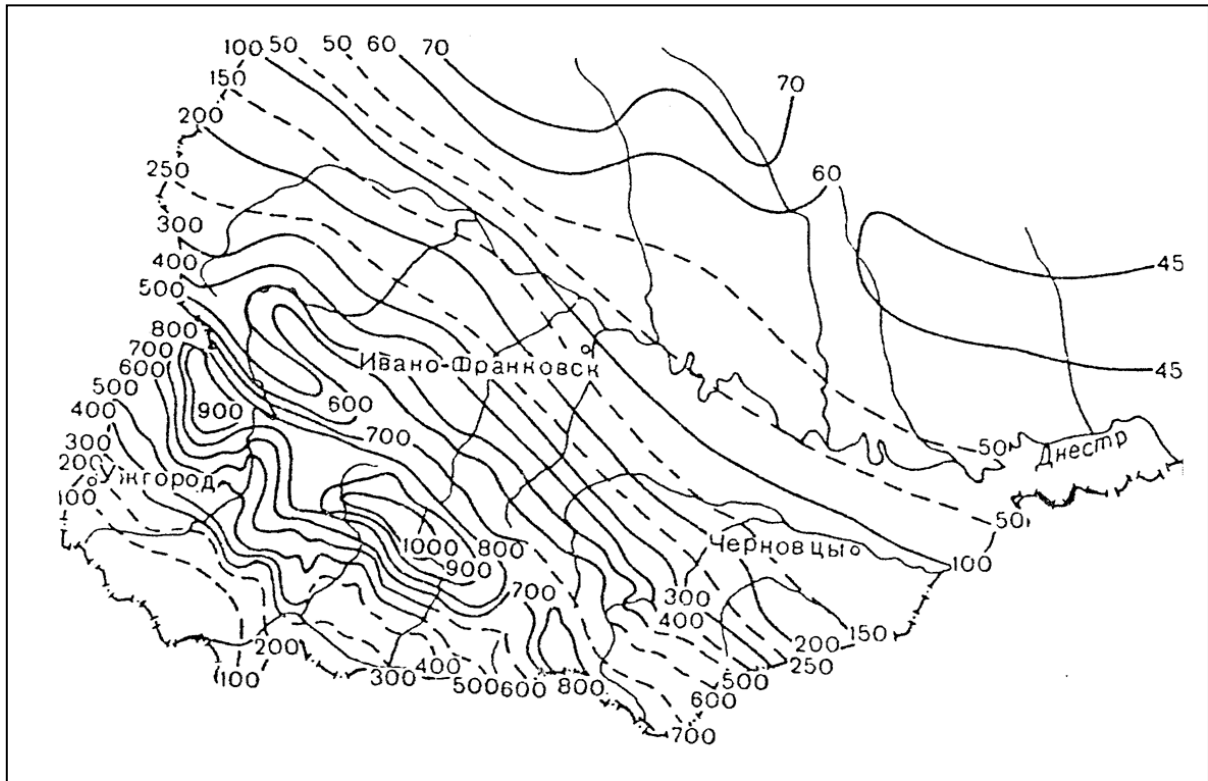


Рисунок 2.10 – Карта норми поверхневого живлення ($U_{\text{пов}}$, мм)

2.5 Розрахунки норми річного стоку за відсутності даних спостережень

За відсутності систематичних вимірювань стоку і відповідно часових рядів норма стоку визначається непрямими методами. Найпоширеніші карти норми річного стоку (модуля або шару). Будуються карти за даними вивчених річок з вимогами точності обчислювання норми стоку. Враховуючи істотний вплив на річковий стік малих річок місцевих та антропогенних факторів, при складанні карт використовують тільки репрезентативні матеріали.

Принципова можливість побудови карт норми річного стоку впливає безпосередньо з рівняння водного балансу.

В силу зональної зміни за територією кліматичних складових рівняння водного балансу, тій же закономірності безперервної та планової зміни підлягає і норма стоку \bar{Y} . Кліматичні фактори: опади, температура та вологість повітря до 80-х років минулого сторіччя не підлягали антропогенній дії у масштабах річкових водозборів. На відміну від метеорологічних величин, які належать до тієї точки простору, в якій вони

виміряні, стокові величини мають інтегральний характер. Вони відносяться не до місця вимірювання стоку, а до центра ваги водозбору :

$$\bar{Y} = \frac{\bar{Y}_1 f_1 + \bar{Y}_2 f_2 + \dots + \bar{Y}_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}, \quad (2.49)$$

де \bar{Y} - середньозважене значення норми стоку для досліджуваного водозбору; $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_n$ - середні значення норми стоку між суміжними ізолініями; f_1, f_2, \dots, f_n - площі між відповідними ізолініями стоку.

Для врахування місцевих факторів (розмір водозбору, лісистість, заболоченість та ін.) запропоновані таблиці відповідних поправок. У гірських районах, де, як правило, має місце висотна поясність у зміні річного стоку, спостерігається зростання норми з висотою, тому розрахункові схеми базуються на залежності \bar{Y} від середньої висоти H_{cp} водозбору.

Розрахунок норми річного стоку \bar{Y} за методом водного балансу для великих водозборів, що перебувають в умовах, близьких до зональних, виконується за рівнянням

$$\bar{Y} = \bar{X} - \bar{E}, \quad (2.50)$$

де \bar{X} - середньобагаторічна величина, або норма опадів у межах водозбору; \bar{E} - середньобагаторічна величина, або норма випаровування з поверхні суші у межах водозбору.

Зазначимо, що в разі зростання господарської діяльності ряди стоку значною мірою мають нестационарність і таким чином непридатні для обчислення норми стоку без встановлення норми природного річного стоку. Визначення останньої складна задача, що вимагає детального врахування всіх видів водопостачання .

Таким чином, при відсутності даних спостережень СНіП 2.01.14-83 рекомендує для рівнинних територій використовувати карту ізоліній норм річного стоку, а для гірських - залежності виду $\bar{q} = f(H)$ або $\bar{Y} = f(H)$.

Якщо досліджуваний водозбір розміщується між двома ізолініями, то норма стоку визначається шляхом інтерполяції між значеннями двох ізоліній. Коли ж водозбір перетинають декілька ізоліній використовується формула (2.19). Можливе використання регіональних методик, в яких норма стоку розраховується за рівнянням парної або множинної регресії, де в якості аргументів виступають показники стокоформуєчих факторів (координати центру тяжіння водозбору, площа центру тяжіння водозбору, площа водозбору, залісеність, заболоченість, середня висота водозбору та ін.).

2.6 Мінливість річного стоку

У багаторічному розподіленні річний стік коливається в широких межах. Мірою мінливості є дисперсія. Якщо дисперсію виразити відносно норми стоку, то дістанемо вираз для коефіцієнта ймовірності \tilde{C}_v , тобто

$$\tilde{C}_v = \frac{\sigma_Q}{\bar{Q}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K_i - 1)^2}{n - 1}}. \quad (2.51)$$

Використовуючи метод найбільшої правдоподібності, C_v визначають через статистики λ_2 та λ_3 за спеціальними номограмами.

Розрахунковий коефіцієнт C_v для біноміального та трьохпараметричного гамма-розподілу відповідно до СНіП 2.01.14-83 визначається за формулою

$$C_v = \left(a_1 + \frac{a_2}{n}\right) + \left(a_3 + \frac{a_4}{n}\right)\tilde{C}_v + \left(a_5 + \frac{a_6}{n}\right)\tilde{C}_v^2, \quad (2.52)$$

де \tilde{C}_v - зміщене значення параметру C_v .

Похибку коефіцієнтів варіації оцінюють за формулами залежно від обчислення C_v :

$$\varepsilon_{C_v} = \pm \sqrt{3 / [2n(3 + C_v^2)]} \cdot 100\%, \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_{C_v} = \pm \sqrt{(1 + C_v^2) / 2n} \cdot 100\% \quad (2.54)$$

Допустима похибка ε_{C_v} не повинна перевищувати 15%. Якщо похибки вихідної інформації значні, ряди вважаються короткими. В такому разі згідно СНіП 2.01.14-83 C_v обчислюють методом гідрологічної аналогії:

$$C_v = \frac{\sigma'}{\bar{Q}} \sqrt{1 - r^2 \left(1 - \frac{\sigma'_a}{\sigma_a}\right)}, \quad (2.55)$$

де σ' - середнє квадратичне відхилення для досліджуваної річки з періодом спостережень n' ; \bar{Q} - норма стоку короткого ряду, приведеного до розрахункового періоду; r - коефіцієнт кореляції між стоком

досліджуваної річки та річки-аналога за цей самий період спостережень;
 σ'_a – середнє квадратичне відхилення аналога за період спостережень n' ;
 σ_a – середнє квадратичне відхилення цілого ряду.

За відсутності спостережень за стоком коефіцієнт варіації може бути розрахований за інтерполяцією між значеннями для річок-аналогів, а також за формулами:

а) Д.Л.Соколовського-М.Є.Шевельова

$$C_v = 0.78 - 0.29 \lg \bar{q} - 0.063 \lg(F + 1) \quad (2.56)$$

б) К.П.Воскресенського

$$C_v = \frac{A}{q^{-0.4} (F + 1000)^{0.10}} \quad (2.57)$$

де \bar{q} - середній багаторічний модуль річного стоку; A – параметр, який визначається за річками-аналогами.

До інших факторів, що відповідно впливають на C_v , треба віднести водоймища з багаторічним регулюванням стоку. Великі водоймища перерозподіляють стік між багатоводними та маловодними річками, що сприяє зменшенню C_v із зростанням регулювання, а той же час малі водойми, особливо ставки, регулюють стік тільки в межах року. Але сумарна площа водної поверхні малих водойм обумовлює багаторічну нерівномірність стоку завдяки великій спроможності випаровування водної поверхні. У багатоводні роки різниця між випаровуванням з суші та водної поверхні незначна, і практично не позначається на мінливості річного стоку. Навпаки, в маловодні роки втрати на додаткове випаровування з водної поверхні зростають і це обумовлює зростання багаторічної мінливості. При підвищенні сухості клімату вплив штучних водойм на C_v збільшується.

Аналогічно на коефіцієнт варіації впливає зрошення, тому що зрошувальні норми визначаються водністю року (у маловодні роки вони більші, а в багатоводні – менші).

Приклад розрахунку 2.3

Визначити статистичні параметри річного стоку ($\bar{q}_n, C_v, C_s / C_v$) р.Південний Буг – с.Олександрівка та р.Південний Буг – м.Первомайськ за картами ізоліній стоку.

Дано: карта середньобогаторічного річного стоку [СНІП 2.01.14-83, дод.І, лист І] масштабу 1:1000000, ізолінії стоку приведені в модулях, q л/см² (рис.2.11), та карта коефіцієнту варіації середньобогаторічного річного стоку річок СРСР [3, дод.І, лист ІІ] масштабу 1:1000000 (рис.2.12). Площа водозбору р.Південний Буг – с.Олександрівка складає $F=46200$ км², р.Південний Буг – м.Первомайськ $F=44000$ км².

Басейн р.Південний Буг – с.Олександрівка та р.Південний Буг м.Первомайськ перетинають чотири ізолінії стоку. У цьому випадку річний стік визначається як середньозважене значення за рівнянням (2.49).

Як видно із рис.2.11 ізолінія 0.5 л/см² перетинає водозбір, утворюючи площу f_1 , ізолінії 1.0, 2.0 та 4.0 утворюють площі f_2, f_3, f_4 . Площі між ізолініями визначаються за допомогою палетки: $f_1 = 4.0$, $f_2 = 16.0$, $f_3 = 17.5$, $f_4 = 1.0$ поділок палетки. Для розрахунку стоку за формулою (2.49) складена табл.2.8.

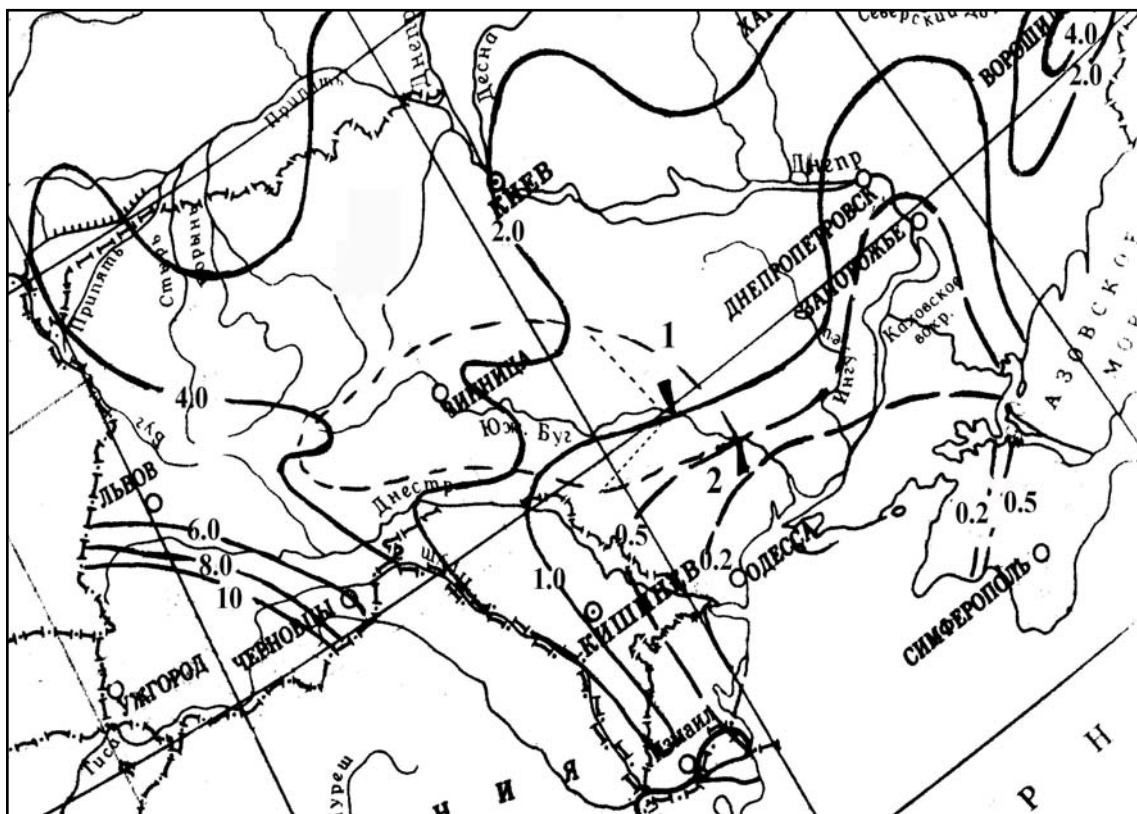


Рисунок 2.11 – Середньобогаторічний річний стік річок:
1 - р.Південний Буг – м.Первомайськ ; 2 – р.Південний Буг – с.Олександрівка

Таблиця 2.8 – Розрахунок норми стоку за допомогою карти ізоліній
р.Південний Буг-с.Олександрівка. F=46200 км²

Значення ізоліній модуля стоку, л/скм ²	Середнє значення модуля \bar{q}_i , л/скм ²	Площа водозбору між ізолініями, f ₁	q _i f _i
0.50-1.00	0.75	7.00	5.25
1.00-2.00	1.50	14.0	21.0
2.00-4.00	3.00	18.0	54.0
4.00	4.00	1.00	4.00

Використовуючи дані табл.2.8 отримаємо норму стоку для р.Південний Буг – с.Олександрівка

$$\bar{q}_n = \frac{5.25 + 21.0 + 54.0 + 4.0}{40.0} = 2.11 \text{ л/скм}^2.$$

Аналогічно, але на підставі табл.2.9 визначається норма стоку для р.Південний Буг – м.Первомайськ, F=44000 км².

$$\bar{q}_n = \frac{2.63 + 18.0 + 54.0 + 4.0}{34.5} = 2.27 \text{ л/скм}^2$$

За аналогічною схемою, використовуючи рис.2.7, визначається коефіцієнт варіації C_v. Оскільки досліджуваний водозбір перетинає 9 ізоліній, то значення C_v розраховується як середньозважене, для чого складено табл.2.10, 2.11.

Таблиця 2.9 – Розрахунок норми стоку за допомогою карти ізоліній
р.Південний Буг-с.Первомайськ, F=44000 км²

Значення ізоліній модуля стоку, л/скм ²	Середнє значення модуля q _i , л/скм ²	Площа водозбору між ізолініями, f ₁	q _i f _i
0.50-1.00	0.75	3.50	2.63
1.00-2.00	1.50	12.0	18.0
2.00-4.00	3.00	18.0	54.0
4.00	4.00	1.00	4.00

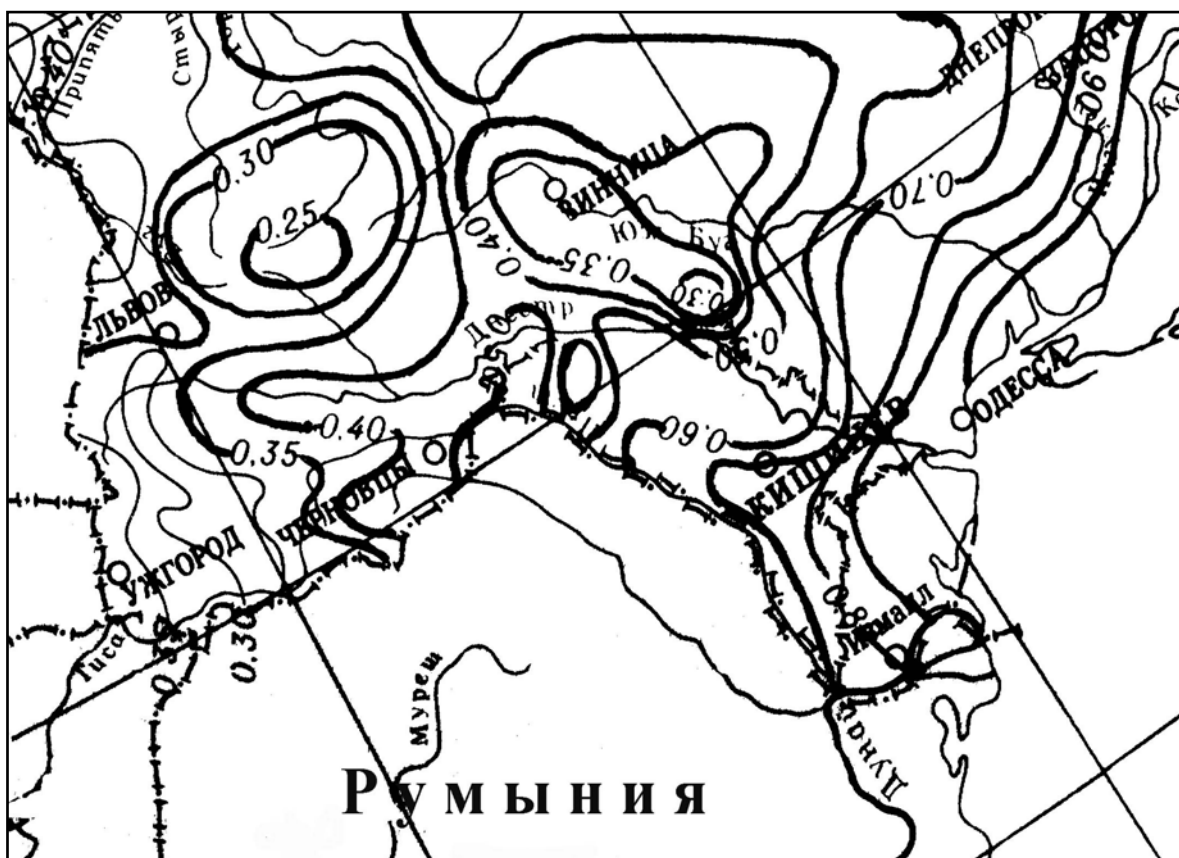


Рисунок 2.12 – Коефіцієнт варіації середньобаторічного річного стоку річок

$$C_v = \frac{0.45 + 2.93 + 4.50 + 1.00 + 3.15 + 2.75 + 1.30 + 0.725}{40.0} = 0.42.$$

Розрахунки C_v для р.Південний Буг – м.Первомайськ

$$C_v = \frac{0.30 + 2.60 + 4.50 + 1.00 + 2.92 + 2.20 + 0.32}{34.5} = 0.40.$$

Значення співвідношення C_s / C_v також визначається за картою СНіП [дод.І, лист 4]. Для р. Південний Буг – с. Олександрівка та р. Південний Буг – м. Первомайськ це співвідношення дорівнює 2.0.

Точність розрахунку норми стоку та коефіцієнту варіації за картою СНіП можна визначити як відносне середнє відхилення розрахункових значень від фактичних за формулою:

$$\Delta = \frac{|q_p - q_\phi|}{q_\phi} 100\%. \quad (2.58)$$

Таким чином, для р.Південний Буг – с.Олександрівка точність розрахунку норми стоку за допомогою карти дорівнює 6.9%, а коефіцієнту варіації 10.5%; для р.Південний Буг – м.Первомайськ 13.5% і 5.3%, відповідно.

Таблиця 2.10 – Розрахунок коефіцієнта варіації за допомогою карти ізоліній (р.Південний Буг – с.Олександрівка)

Значення ізоліній коефіцієнта варіації C_v	Середнє значення C_v	Площа водозбору між ізолініями, f_1	$C_v f_1$
0.30-0.30	0.300	1.50	0.45
0.30-0.35	0.325	9.00	2.93
0.35-0.40	0.375	12.0	4.50
0.40-0.40	0.400	2.50	1.00
0.40-0.50	0.450	7.00	3.15
0.50-0.60	0.550	5.00	2.75
0.60-0.70	0.650	2.00	1.30
0.70-0.75	0.725	1.00	0.725

Таблиця 2.11 – Розрахунок коефіцієнта варіації за допомогою карти ізоліній (р.Південний Буг – м.Первомайськ)

Значення ізоліній коефіцієнта варіації C_v	Середнє значення C_v	Площа водозбору між ізолініями, f_1	$C_v f_1$
0.30-0.30	0.300	1.00	0.30
0.30-0.35	0.325	8.00	2.60
0.35-0.40	0.375	12.0	4.50
0.40-0.40	0.400	2.50	1.00
0.40-0.50	0.450	6.50	2.92
0.50-0.60	0.550	4.00	2.20
0.60-0.70	0.650	0.50	0.32

3 ВНУТРІШНЬОРІЧНИЙ РОЗПОДІЛ СТОКУ

Протягом року стік річок розподіляється дуже нерівномірно, що зумовлено, головним чином, внутрішньорічною мінливістю метеорологічних факторів. Характерними рисами гідрологічного режиму водних об'єктів суші для річок України є: весняне водопілля, більш чи менш виразна літня та осіння межень, літньо-осінні паводки та зимова межень. Формування весняного водопілля зв'язане з таненням снігу, яке обумовлює високі рівні та витрата води, нерідко з виходом води на заплаву. У період водопілля проходить до 50-60 % річного об'єму води, а на річках посушливої зони – до 85-90 % та більше. Після закінчення весняного водопілля, якщо на його спаді не має дощових паводків, рівні поступово опускаються до межених, в цей час у живленні річки беруть участь переважно підземні води.

На малих річках, а в посушливій зоні і на середніх, коли бездощові періоди досить тривалі, річки можуть періодично пересихати. Дощові паводки в літній сезон нерідко порушують межень.

У районах із паводковим режимом у теплу частину року літня межень може бути відсутньою. Восени, коли зменшується випаровування з поверхні суші та збільшується число днів з опадами, стік річок збільшується. Якщо температура повітря плюсова, стік річок поступово зменшується, досягаючи в кінці зими найменших за рік значень. Якщо зимою спостерігається відлига, особливо в південних районах, то зимова межень формується не тільки за рахунок підземних, а й за рахунок поверхневих вод. У районах із суворим кліматом у зимовий період багато річок перемерзає, проте вихід на поверхню підземних вод утворює в руслах та долинах річок наледі.

Внутрішньорічний розподіл стоку залежить від місцевих та антропогенних факторів. Регулятором стоку виступають водоймища сезонного та багаторічного регулювання (озера, водосховища, ставки). Вирівнюванню внутрішньорічного ходу стоку сприяє карст. Протягом коротких відрізків часу вирівнюючим розподіл стоку фактором є лісистість, яка переводить частину поверхневого стоку в підземний. Викладене відноситься до великих басейнів, які забезпечені ґрунтовим живленням. На таких водозборах максимальний стік зменшується, а стік межених зростає. Стік малих річок лісистість не регулює, а лише зменшує його у зв'язку з невеликою глибиною ерозійного врізу русел річок у підстильну поверхню.

Вирівнюванню стоку сприяє також меліорація перезволожених земель. Середня тривалість пересихання каналів, що дістають живлення з боліт, які не мають меліорації, становить у середньому 30-60 днів.

Нерівномірність розподілу стоку в році спричиняє труднощі для водопостачання, гідроенергетики, зрошення та ін. Безперебійне водопостачання, зрошення, гарантована виробка електроенергії лімітується стоком межені сезонів, що пов'язано з будівництвом водосховищ, ставків для регулювання стоку і раціональнішого використання природних водних ресурсів. У районах, де місцевий стік зарегульований, для поповнення дефіциту проводиться реконструкція річкових систем з перекидом стоку сусідніх річок.

Під внутрішньорічним розподілом стоку взагалі вважають розподіл стоку за сезонами, місяцями, декадами або іншими часовими інтервалами. Розрізняють календарний та некалендарний розподіл стоку. Календарний розподіл розглядають у межах декад, місяців, сезонів. Некалендарний розподіл не пов'язаний з хронологічними строками, подається у вигляді кривих тривалостей добових витрат.

3.1 Типовий розподіл

Під типовим розподілом розуміють найчастіше повторений для даної річки (у багаторічному розрізі) або груп річок розподіл стоку протягом року. Типові схеми особливо придатні для класифікації річок та під час гідрологічного районування. За цього, зазвичай, беруть моделі фіктивних та характерних по водності років (багатоводні, середньоводні або маловодні), схеми фіктивного розподілу в результаті осереднення витрат води, а потім виражають їх у модульних коефіцієнтах, або у відсотках від річної суми. Для того щоб стійкість показників внутрішньорічного розподілу стоку відбулася, тимчасові ряди повинні бути не менше 50 років.

Внутрішньорічний розподіл стоку, як правило, обчислюється не за календарними, а за водогосподарськими роками, починаючи з багатоводного сезону. При цьому межі сезонів для всіх річок округлюють до цілого місяця (табл.3.1).

3.2 Розрахунковий розподіл

Проектування об'єктів водогосподарського призначення ведеться на нормативну задану забезпеченість.

При розрахунковому внутрішньорічному розподілі по ймовірності регламентується стік року, *лімітуючих періодів і сезонів*.

Внаслідок довільного поєднання складових річного стоку окремих років сума доданків сезонного стоку заданої ймовірності перевищення не рівна тому ж імовірностному значенню сумарного стоку, тобто

Таблиця 3.1 - Приблизні строки та тривалість основних гідрологічних сезонів в різних регіонах

Регіон	Період		Тривалість основних гідрологічних сезонів, міс.					
	зимовий	весняний	Весняний	літній	Літньо-осінній	осінній	Осінньо-зимовий	зимовий
Європейська територія Крайня північ (північніше 64 ⁰ п.ш)	-	$\frac{V-VII}{8}$	-	-	$\frac{VIII-XI}{4}$	-	-	$\frac{XII-IV}{5}$
Лісова зона (північніше 56 ⁰ та східніше 30 ⁰ с.д.)	-	$\frac{IV-VI}{3}$	-	-	$\frac{VII-XI}{5}$	-	-	$\frac{XII-III}{4}$
Південна частина лісової зони та лісо-степова зона (північніше 49 ⁰ п.ш)	-	$\frac{III-V}{3}$	-	-	$\frac{VI-XI}{6}$	-	-	$\frac{XII-II}{3}$
Степова зона (південніше 49 ⁰ п.ш. та південно-західна частина Прибалтики (південніше 57 ⁰ п.ш. і західніше 24 ⁰ с.д)	-	$\frac{II-IV}{3}$	-	-	$\frac{V-XI}{7}$	-	-	$\frac{XII-I}{2}$
Прикарпаття та Закарпаття	-	$\frac{III-V}{3}$	-	-	$\frac{VI-XI}{6}$	-	-	$\frac{XII-II}{3}$
Горні регіони Криму	$\frac{XII-V}{6}$	-	-	$\frac{VI-XI}{3}$	-	$\frac{IX-XI}{3}$	-	-
Азіатська територія Північна частина Сибіру до р.Лени (північніше 64 ⁰ на заході і 56 ⁰ біля о.Байкал)	-	$\frac{V-VI}{2}$	-	-	$\frac{VII-X}{4}$	-	-	$\frac{XI-IV}{6}$
Західна Сибір (південніше 64-60 ⁰)	-	$\frac{IV-VI}{3}$	-	-	$\frac{VII-XI}{5}$	-	-	$\frac{XII-III}{4}$

Продовження таблиці 3.1

Регіон	Період		Тривалість основних гідрологічних сезонів, міс.					
	зимовий	весняний	Весняний	літній	Літньо-осінній	осінній	Осінньо-зимовий	Зимовий
Центральний та північний Казахстан	-	$\frac{IV-V}{2}$	-	-	$\frac{VI-XI}{6}$	-	-	$\frac{XII-III}{4}$
Горний Алтай	-	-	$\frac{IV-IX}{6}$	-	-	$\frac{X-XI}{2}$	-	$\frac{XII-III}{4}$
Забайкалля	-	$\frac{IV-V}{2}$	-	-	$\frac{VI-X}{5}$	-	-	$\frac{XI-III}{5}$
Прибайкалля	-	-	$\frac{IV-VIII}{5}$	-	-	$\frac{IX-X}{2}$	-	$\frac{XI-III}{5}$
Північно-східна Сибір (північніше р.Лени)	-	-	$\frac{V-VIII}{4}$	-	-	$\frac{IX-X}{2}$	-	$\frac{XI-IV}{6}$
Далекій Схід (басейн р.Амур)	-	-	$\frac{IV-IX}{6}$	-	-	$\frac{X-XI}{2}$	-	$\frac{XII-III}{4}$
Горні райони Кавказу та Середньої Азії	-	-	$\frac{III-VI}{6}$	-	$\frac{VII-XI}{5}$	-	-	$\frac{XII-II}{3}$
Високогірні райони Кавказу та Середньої Азії	-	$\frac{III-IV}{2}$	-	$\frac{V-IX}{6}$	-	-	$\frac{X-II}{5}$	-

$$\left(\sum Q \right)_{\text{рік}} P \neq \left(\sum Q \right)_{\text{весна}} P + \left(\sum Q \right)_{\text{літо-осінь}} P + \left(\sum Q \right)_{\text{зима}} P. \quad (3.1)$$

де $\left(\sum Q \right)_{\text{рік}} P$ - сума витрат за рік заданої забезпеченості P;

$$\left(\sum Q \right)_{\text{весна}} P - \left(\sum Q \right)_{\text{літо-осінь}} P - \left(\sum Q \right)_{\text{зима}} P$$

Рішення можна знайти, якщо одну й ту ж саму забезпеченість поставити у відповідність не для всіх сезонів і року загалом, а тільки лімітуючи періоди й сезон. Тоді розрахункова ймовірність перевищення P% відноситься до $\sum Q_{\text{рік}}$, а також $\sum Q_{\text{літо}}$ і $\sum Q_{\text{зима}}$. Стік же не лімітуючого

сезону (весни) знаходиться по різниці:

$$\left(\sum Q \right)_{\text{весна}} P_1 = \left(\sum Q \right)_{\text{рік}} P - \left(\sum Q \right)_{\text{літо-осінь}} P - \left(\sum Q \right)_{\text{зима}} P, \quad (3.2)$$

Забезпеченість P_1 визначається по кривій забезпеченості стоку за весняний сезон. В цьому випадку на весну доведуться всі нев'язкі розрахунку. Тому В.Г.Андреянов запропонував *метод компонентування*, по якому нев'язкі розподіляються рівномірно всередині року. На початку рік розбивається на два періоди – весну (нелімітуючий) і межень (лімітуючий). Стік року і межені визначається, виходячи із заданої

імовірності перевищення P%, а стік за весну отримують по різниці $\left(\sum Q \right)_{\text{рік}} P$

і $\left(\sum Q \right)_{\text{межень}} P$ і по кривій забезпеченості весняного сезону $\left(\sum Q \right)_{\text{весна}} P$

встановлюють його забезпеченість P_1 . Аналогічно меженний період розбивається на два сезони: літо-осінь (нелімітуючий) і зима (лімітуючий). Тоді стік нелімітуючого сезону знаходиться по різниці:

$$\left(\sum Q \right)_{\text{літо-осінь}} P_2 = \left(\sum Q \right)_{\text{межень}} P - \left(\sum Q \right)_{\text{зима}} P \quad (3.3)$$

Розрахункова імовірність P_2 нелімітуючого сезону знаходиться по відповідній кривій забезпеченості. Отже, по методу компонування:

$$\left(\sum Q \right)_{\text{рік}}_P = \left(\sum Q \right)_{\text{весна}}_{P_1} + \left(\sum Q \right)_{\text{літо-осінь}}_{P_2} + \left(\sum Q \right)_{\text{зима}}_P. \quad (3.4)$$

Другою частиною розрахункової моделі внутрішньорічного розподілу стоку є складання схем його *внутрішньосезонного розподілу*. Типові схеми всередині окремих сезонів розраховуються не для всього періоду спостережень, а по групах водності – багатоводної, середньоводної, і маловодної. Виділення груп водності проводиться на основі ранжирування у порядку убутання рядів сезонних сум середньомісячних витрат. Верхня третина такого ряду (1-33%) – багатоводні роки, нижня (67-100%) – маловоді, середня (34-66%) – середньщводні роки. У межах окремих груп проводиться осереднення місячних витрат однакового номера в порядку убутання. Кожному середньому значенню приписується той календарний місяць, який для даного номера зустрічається найчастіше. Далі, в межах кожної групи підраховується відносний розподіл стоку по місяцях у відсотках від величини стоку за даний сезон.

3.3 Крива тривалості добових витрат

Крива тривалості добових витрат – один з варіантів не календарного внутрішньорічного розподілу стоку.

Для побудови такої кривої необхідні щоденні витрати за n років розмістити в порядку зменшення, зйти для кожного члена емпіричну забезпеченість, а потім побудувати криву забезпеченості щоденних витрат води. Від кривих забезпеченості фазово-однорідних стокових характеристик (максимального дощового стоку, весняного водопілля, мінімального або річного стоку) криві тривалості добових витрат відрізняються тим, що вони обмежені нижніми та верхніми межами і відображають розподіл витрат не в багаторічному перерізі, всередині року. Практичним призначенням кривих забезпеченості є екстраполяція вихідних рядів. Для скорочення часу на статистичну обробку рядів тривалістю 365 n членів, абсолютну криву тривалості добових витрат будують за характерними ординатами (осередненими за період спостережень), які наведено наведено в довідниках “Ресурси поверхневих вод СРСР”. Така крива буде називатися кривою тривалості.

Ординати таких кривих подані у вигляді модульних коефіцієнтів K_i , а тривалість стійкості добових витрат виражена в долях одиниці P_i . Площа під кривою обмежена модульним коефіцієнтом, що відповідає середньому багаторічному значенню, тобто $\bar{K}=1$, називається коефіцієнтом природної зарегульованості стоку:

$$\varphi = \int_0^1 P dk, \quad (3.5)$$

де φ - коефіцієнт природної зарегульованості стоку.

З рис. 3.1 видно, що чим більше площа під кривою, тим вище ступінь природної зарегульованості, чи навпаки.

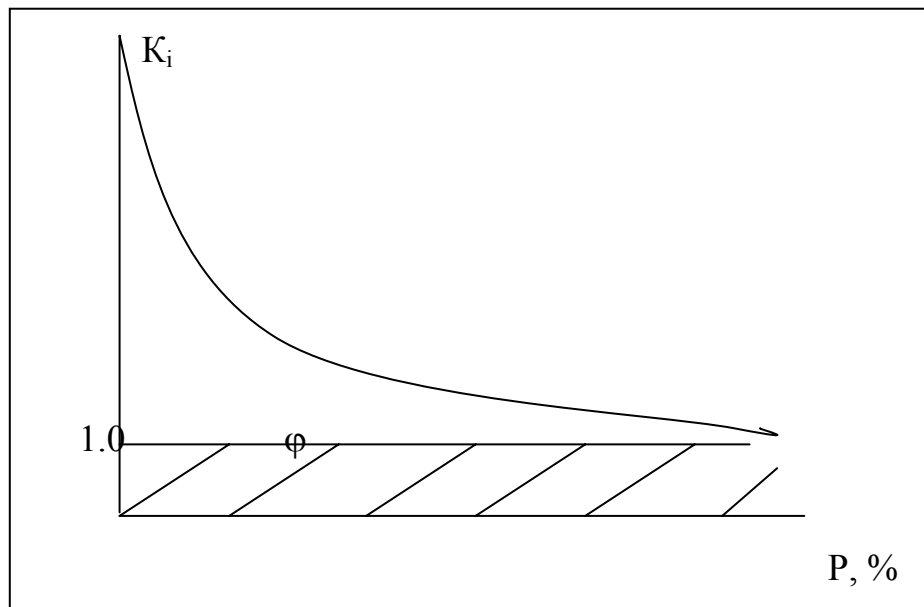


Рисунок 3.1 - Крива тривалості добових витрат води.

Для річок, що зарегульовані озерами $\varphi = 0.6-0.8$. Для гірських рік $\varphi = 0.1-0.2$.

Коефіцієнт природної зарегульованості стоку φ несе навантаження, аналогічне коефіцієнту ймовірності річного стоку C_v , з тією лише різницею, що перший визначає ймовірність у межах року, а другий – за ряд років.

Приклад розрахунку 3.1

Завдання. Розрахувати внутрішньорічний розподіл стоку методом компонування за даними спостережень на р.Вятка – м.Вятські Поляни. Період спостережень – з 1956 по 1975 рр.

Споживач – комунальне водопостачання.

Задано: середньомісячні та річні витрати води р.Вятка – м.Вятські Поляни за період спостережень (табл.3.2).

Річка, згідно додатку 1 розташована в 2-ому районі, лісна зона, північніше 56⁰ п.ш. та східніше 30⁰ с.д.

Порядок виконання. Водогосподарський рік починається у квітні (IV), закінчується - у березні (III). Лімітуючий період складається із сезонів літо-осінь та зима (VII-III), лімітуючий сезон (I-III).

Для комунального водопостачання розрахункова ймовірність перевищення дорівнює 97 %.

В таблиці 3.3. розраховані суми місячних витрат води, згідно встановленим границям водогосподарського року, лімітуючого періоду й сезону.

Для побудови емпіричної кривої забезпеченості обчислені суми місячних витрат води розташовують в порядку спадання. Рангові ймовірності перевищення знаходяться за формулою

$$P = \frac{m}{n + 1} \cdot 100 \%,$$

де m – порядковий номер ранжированої вибірки,

n – довжина ряду.

В таблиці.3.4 наводяться ординати емпіричних кривих забезпеченості для водогосподарського року, лімітуючих та нелімітуючих періодів та сезонів.

Відповідні точки наносяться на клітчатку ймовірності та проводиться три згладжені емпіричні криві забезпеченості (рис.3.2).

Відповідно до цих кривих, для розрахункової ймовірності перевищення $P = 97 \%$ знаходяться:

а) для водогосподарського року $(\sum_{\text{рік}} Q_{\text{міс}})_{97\%} = 7000 \text{ м}^3 / \text{с} ;$

б) для лімітуючого періоду $(\sum_{\text{л.п}} Q_{\text{міс}})_{97\%} = 1800 \text{ м}^3 / \text{с} ;$

в) для лімітуючого сезону $(\sum_{\text{л.с}} Q_{\text{міс}})_{97\%} = 680 \text{ м}^3 / \text{с} .$

Таблиця 3.2 - Середні місячні витрати води р.Вятка – м.Вятські Поляни (1956-1975 рр.)

Рік	Витрати води, м ³ /с												Середній за рік
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1956	187	180	173	1670	4070	1100	313	478	445	634	419	382	838
1957	323	264	258	1630	7660	1390	803	510	320	381	368	251	1100
1958	248	246	240	1450	5200	2130	753	366	294	408	275	258	989
1959	248	246	248	2230	3590	940	622	310	326	411	334	242	812
1960	212	193	207	2400	3150	617	391	233	221	205	156	177	680
1961	180	161	179	1940	3520	1590	322	259	308	306	228	205	766
1962	189	186	210	2910	3060	686	532	648	863	456	430	342	876
1963	304	239	196	1560	3970	605	502	233	258	428	506	370	773
1964	339	265	238	978	3690	1090	373	322	248	415	357	321	720
1965	246	224	198	710	4590	2680	891	843	715	890	915	409	1110
1966	363	293	263	4530	5370	872	409	281	285	424	366	237	1140
1967	165	158	174	2250	2080	471	375	348	201	257	323	203	584
1968	208	197	181	2420	3690	2210	610	1100	420	565	612	391	1067
1969	252	176	161	1820	3230	1290	697	591	446	403	360	570	848
1970	263	209	198	3490	4310	1190	539	288	321	399	390	296	991
1971	245	251	202	1750	3530	1660	1130	615	380	440	815	624	926
1972	503	312	188	2400	4200	1500	528	260	224	333	313	337	933
1973	271	209	215	2350	1810	381	260	289	338	624	488	425	638
1974	364	278	174	2240	6310	3360	752	462	370	326	326	374	1290
1975	248	240	262	2740	1440	484	277	221	212	219	204	184	651
Середній	268	226	218	2173	3880	1312	554	432	360	426	409	345	844

Таблиця 3.3 - Сума місячних витрат води ($\Sigma Q_{\text{міс}}$) р.Вятка – м.Вятські Поляни (1956 – 1975 рр.), м³/с

Рік	річні (IV-III)	Лімітуючи				Нелімітуючи			
		рік	період (VII-III)	рік	сезон (XII-III)	рік	період (IV-VI)	рік	Сезон (VII-XI)
1956/57	10356	1957/58	3516	1956/57	1227	1956/57	6840	1956/57	2889
1957/58	13147	1958/59	3367	1957/58	985	1957/58	9780	1957/58	2382
1958/59	11876	1959/60	3096	1958/59	1000	1958/59	8780	1958/59	2096
1959/60	9617	1960/61	2857	1959/60	854	1959/60	6760	1959/60	2003
1960/61	8070	1961/62	1903	1960/61	697	1960/61	6167	1960/61	1206
1961/62	9263	1962/63	2213	1961/62	790	1961/62	7050	1961/62	1423
1962/63	10666	1963/64	4010	1962/63	1081	1962/63	6656	1962/63	2929
1963/64	9274	1964/65	3139	1963/64	1212	1963/64	6135	1963/64	1927
1964/65	8462	1965/66	2704	1964/65	989	1964/65	5758	1964/65	1715
1965/66	13153	1966/67	5173	1965/66	1328	1965/66	7980	1965/66	3847
1966/67	13271	1967/68	2499	1966/67	734	1966/67	10772	1966/67	1765
1967/68	7094	1968/69	2293	1967/68	789	1967/68	4801	1967/68	1504
1968/69	12807	1969/70	1287	1968/69	980	1968/69	8520	1968/69	3307
1969/70	10071	1970/71	3737	1969/70	1240	1969/70	6340	1969/70	2497
1970/71	11921	1971/72	2931	1970/71	994	1970/71	8990	1970/71	1937
1971/72	12347	1972/73	5407	1971/72	1727	1971/72	6940	1971/72	3680
1972/73	10790	1973/74	2690	1972/73	1032	1972/73	8100	1972/73	1658
1973/74	7881	1974/75	3340	1973/74	1341	1973/74	4541	1973/74	1999
1974/75	15270	1975/76	3360	1974/75	1124	1974/75	11910	1974/75	2236

Таблиця 3.4 - Ординати емпіричних кривих забезпеченості сум місячних витрат води за розрахункові періоди, р.Вятка – м.Вятські Поляни

№ п/п	P, %	За рік		лімітуючий період		лімітуючий сезон		Нелімітуючий період		нелімітуючий сезон	
		Водогос. Рік	$(\sum Q_{\text{міс}})$ рік м ³ /с	Водогос. рік	$(\sum Q_{\text{міс}})$ л.п м ³ /с	Водогос. рік	$(\sum Q_{\text{міс}})$ л.с м ³ /с	Водогос. Рік	$(\sum Q_{\text{міс}})$ н.п м ³ /с	Водогос. рік	$(\sum Q_{\text{міс}})$ н.с м ³ /с
1	5.00	1974/75	15270	1971/72	5407	1971/72	1727	1974/75	11910	1965/66	3845
2	10.0	1966/67	13271	1965/66	5173	1973/74	1341	1966/67	10772	1971/72	3680
3	15.0	1965/66	13153	1968/69	4287	1965/66	1328	1957/58	9780	1968/69	3307
4	20.0	1957/58	13147	1962/63	4010	1969/70	1240	1970/71	8990	1962/63	2929
5	25.0	1968/69	12807	1969/70	3737	1956/57	1220	1958/59	8780	1969/70	2497
6	30.0	1971/72	12347	1956/57	3516	1963/64	1212	1968/69	8520	1957/58	2382
7	35.0	1970/71	11921	1957/58	3367	1974/75	1124	1972/73	8100	1956/57	2289
8	40.0	1958/59	11876	1974/75	3360	1962/63	1081	1965/66	7980	1974/75	2236
9	45.0	1972/73	10790	1973/74	3340	1972/73	1032	1961/62	7050	1958/59	2096
10	50.0	1962/63	10666	1963/64	3139	1958/59	1000	1971/72	6940	1959/60	2003
11	55.0	1956/57	10356	1958/59	3096	1970/71	994	1956/57	6840	1973/74	1999
12	60.0	1969/70	10077	1970/71	2931	1964/65	989	1959/60	6760	1970/71	1937
13	65.0	1959/60	9617	1959/60	2857	1957/58	986	1962/63	6656	1963/64	1927
14	70.0	1963/64	9274	1964/65	2704	1968/69	980	1969/70	6340	1966/67	1765
15	75.0	1961/62	9263	1972/73	2690	1959/60	854	1960/61	6167	1964/65	1715
16	80.0	1964/65	8462	1966/67	2449	1961/62	790	1963/64	6135	1974/75	1658
17	85.0	1960/61	8070	1967/68	2293	1967/68	789	1964/65	5163	1967/68	1504
18	90.0	1973/74	7881	1961/62	2213	1966/67	734	1967/68	4801	1961/62	1423
19	95.0	1967/68	7094	1960/61	1903	1960/61	697	1973/74	4541	1960/61	1206

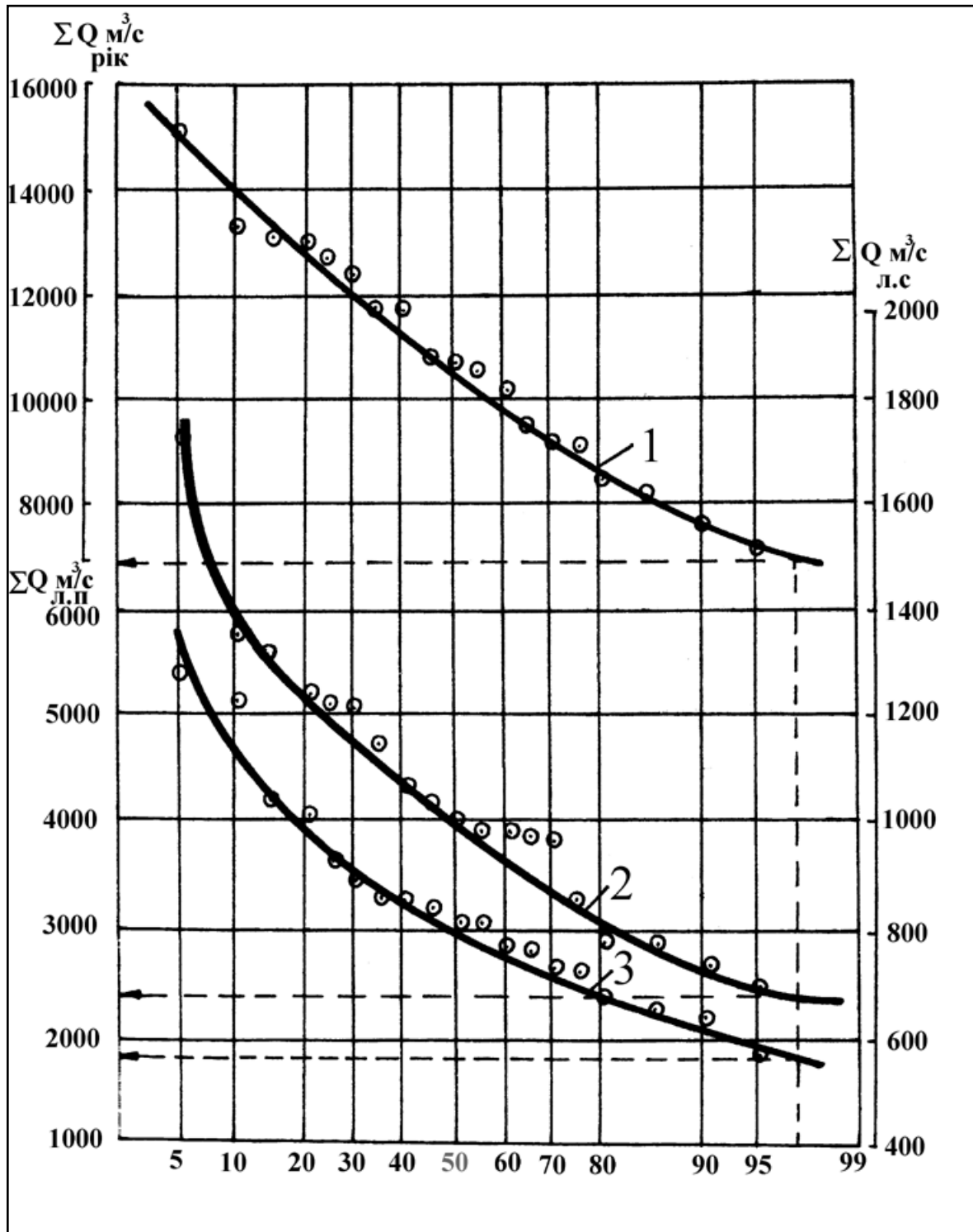


Рисунок 3.2 – Емпіричні криві забезпеченості сум місячних витрат води за 1 – рік, 2 – лімітуючий період, 3 – лімітуючий сезон (р.Вятка – м.Вятські Поляни)

Стік нелімітуючого періоду знаходиться як різниця стоку за рік та нелімітуючий період, тобто

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\text{н.л.п}} Q_{\text{міс}} \right)_{p1} &= \left(\sum_{\text{рік}} Q_{\text{міс}} \right)_{97\%} - \left(\sum_{\text{л.п}} Q_{\text{міс}} \right)_{97\%} = \\ &= 7000 - 1800 = 5200 \text{ м}^3 / \text{с} \end{aligned}$$

Стік за нелімітуючий сезон є різниця стоку лімітуючого періоду і сезону:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\text{н.л.с}} Q_{\text{міс}} \right)_{p2} &= \left(\sum_{\text{л.п}} Q_{\text{міс}} \right)_{97\%} - \left(\sum_{\text{л.с}} Q_{\text{міс}} \right)_{97\%} = \\ &= 1800 - 680 = 1120 \text{ м}^3 / \text{с} \end{aligned}$$

Спираючись на емпіричні криві $\left(\sum_{\text{н.л.п}} Q_{\text{міс}} \right) = f(P)$ та $\left(\sum_{\text{л.с}} Q_{\text{міс}} \right) = f(P)$ встановлюються по $\left(\sum_{\text{н.л.п}} Q_{\text{міс}} \right)$ та $\left(\sum_{\text{л.с}} Q_{\text{міс}} \right)$ відповідні забезпеченості $P_1 = 85\%$ та $P_2 = 95\%$ (рис.3.3).

Для найбільшої наглядності внутрішньорічний розподіл стоку представлено в процентах від річного (табл.3.5).

Таблиця 3.5 - Внутрішньорічний розподіл стоку ймовірністю перевищення $P = 97\%$ (р.Вятка – м.Вятські Поляни)

Період та сезон	Місяці	$\left(\sum Q_{\text{міс}} \right)$ м ³ /с	В % від річного
Рік (97 %)	IV-III	7000	100
Лімітуючий період (97 %)	VII-III	1800	25.7
Нелімітуючий період (85 %)	IV-VI	5200	74.3
Лімітуючий сезон (97 %)	XII-III	680	9.7
Нелімітуючий сезон (95 %)	VII-XI	1120	16.0

Аналіз таблиці показує, що найбільша частина стоку припадає на нелімітуючий період (IV-VI) – 74.3 %, а в середині його – на нелімітуючий сезон (VII-XI) – 16.0 %.

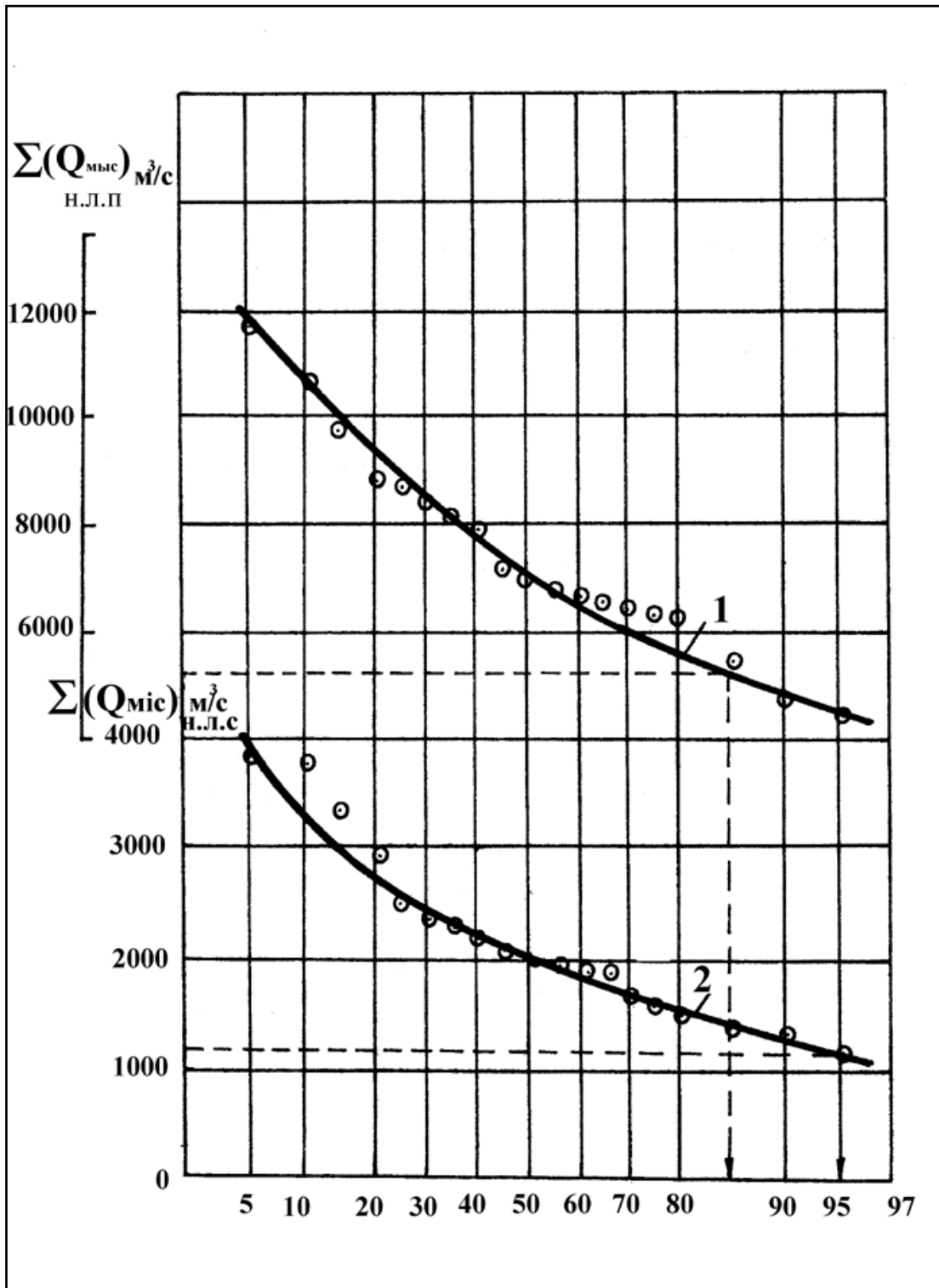


Рисунок 3.3 – Емпіричні криві забезпеченості сум місячних витрат води за 1 – нелімітуючий період, 2 – нелімітуючий сезон (р.Вятка – м.Вятські Поляни)

4 МІНІМАЛЬНИЙ СТІК

Мінімальний стік спостерігається на річках, коли поверхневий стік різко або повністю припиняється, а основним джерелом живлення є ґрунтові води. Періоди низького стоку на ріках СНД пов'язані із зимовою або літньо-осінньою меженню. Виключення складають річки Західного Закавказзя, Криму, Карпат і деяких інших районів, де в зимовий сезон межень може бути відсутньою, а також річки Далекого Сходу, на яких меженний стік часто відмічається навесні.

Загалом мінімальний стік підлеглий географічній зональності. Так у літньо-осінній період 30-денний модуль стоку 80%-ний забезпеченості закономірно меншає з 6 л/с км² на північному заході ЄТС і 15-20 л/с км² на Північному Уралі до 0.5 л/с км² і менше на південному сході. Набагато менше зимовий мінімальний стік. Він становить 2-4 л/с км² на півночі і 0-0.25 л/с км² на півдні і південному сході ЄТС, зростаючи до 10-15 л/с км² на Чорноморському узбережжі.

Відхилення на окремих водозборах розрахункових значень мінімального стоку від зональних пов'язані, головним чином, з неповнотою дренажу ґрунтових вод (малі річки), гідрогеологічними особливостями території, зарегульованістю стоку великими водоймищами (озера, водосховища) проточного типу. Тому географічна зональність в розподілі мінімального стоку характерна лише для водозборів певних розмірів у кожній природній зоні.

Основними розрахунковими характеристиками мінімального стоку, які використовуються на практиці, є середні місячні, або 30-денні, і середньо добові витрати води зимової й літньої межени.

Розрахункова щорічна ймовірність перевищення мінімальної 30-денної (або середньомісячної) витрати води при проектуванні зрошування – 85%, гідроелектричних – 90%, для господарсько-питних витрат у зоні надмірного зволоження – 95%, а в зоні недостатнього зволоження – 97%.

Опорною у відповідності зі СНіПом 2.01.14-83 прийнята забезпеченість $P=80\%$. Тоді

$$Q_p = \lambda_p Q_{80\%}, \quad (4.1)$$

де λ_p – перехідний коефіцієнт до інших ймовірностей

При коротких рядах спостережень або відсутності спостережень за стоком витрати $Q_{80\%}$ для великих і середніх рік потрібно визначати по річках-аналогах або інтерполяцією (окремо за літньо-осінній і зимовий період). При виборі річки-аналога насамперед звертається увага на

східність гідрогеологічних умов у басейнах річок, для чого використовуються гідрогеологічні описи та карти досліджуваного району, а також карти районів для визначення мінімального стоку річок, які наведені у СНіП 2.01.14-83.

До малих відносяться річки, площі водозборів яких не перевищують їх значення, вказані в табл.4.1

Таблиця 4.1. - Найбільші площі водозбору малих річок, км²

Район за картою[СНіП, дод.1, аркуші 19,20]	Період	
	Літньо-осінній	Зимовий
А	1200	1200
Б	1500	1500
В	2000	1800
Г	2500	2000
Д	5000	2500
Е	10000	5000

Річки, площі водозборів яких перевищують вказані у табл.4.1 межі, але становлять не більш 7500 км², відносять до середніх.

Короткими вважаються всі ряди, які не задовольняють принципу репрезентативності та точності ($\pm 15\%$).

За відсутності систематичних вимірювань стоку і відповідно часових рядів норма мінімального стоку визначається непрямыми методами. Найпоширеніші - карти норм мінімального стоку (модуля або шару). Будуються карти за даними вивчених річок з вимогами точності обчислювання норми стоку. Враховуючи суттєвий вплив на річковий стік місцевих та антропогенних факторів, при складанні карт використовуються тільки ті матеріали, які відносяться до середніх площ водозборів.

Для побудови карти мінімального стоку у СНіП 2.01.14-83 використані значення витрат фіксованої забезпеченості – мінімальні 30-денні витрати 80%-ої забезпеченості. Відповідно до СНіП 2.01.14-83, значення мінімального 30-добового модуля стоку щорічної ймовірності перевищення слід знімати з карт ізоліній мінімального 30-добового зимового [СНіП, аркуш 17] або ізоліній літньо-осіннього стоку річок ймовірністю перевищення 80% [СНіП, аркуш 18] для центрів тяжіння басейну шляхом інтерполяції між ізолініями стоку. Якщо водозбір

перетинає декілька ізоліній, то значення мінімального стоку визначаються як середні зважені за площею

$$\bar{Q}_{80\%N} = \frac{\bar{Q}_{80\%1}f_1 + \bar{Q}_{80\%2}f_2 + \dots + \bar{Q}_{80\%n}f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}, \quad (4.2)$$

де $\bar{Q}_{80\%1}, \bar{Q}_{80\%2}, \dots, \bar{Q}_{80\%n}$ - середні значення модулів мінімального стоку між сусудніми ізолініями;

f_1, f_2, \dots, f_n - площі між відповідними ізолініями стоку, які визначаються планіметруванням або за допомогою палетки.

Точність визначення мінімального стоку за картами ізоліній змінюється у середньому від $\pm 10\%$ у зволоженних районах до $\pm 20\%$ - у районах недостатнього зволоження та гірських областях.

Карти ізоліній не можливо використовувати для визначення мінімального стоку річок, у межах водозборів яких знаходяться озера, регулюючи значну частину стоку, а також річок, в басейнах яких є ділянки вираженого карсту. Перехідні коефіцієнти від 30-добових (середньомісячних) мінімальних витрат води щорічної ймовірності перевищення 80% до мінімальних витрат інших ймовірностей перевищення визначають за даними річок-аналогів. Значення коефіцієнтів для окремих районів наведені у табл.4.2.

Для малих річок з площею водозбору менше за 2000 км² нормативним документом рекомендується $Q_{80\%}$ визначати за формулою, розробленою А.М.Владимировим.

$$Q_{80\%} = 10^{-3} a \cdot (F \pm f)^n, \quad (4.3)$$

де f - середня по району площа з відсутністю стоку (-) або середня площа підземного басейну, який забезпечує додаткове живлення річок даного району (+) внаслідок карсту; a і n - параметри, які характеризують зволоженість даного району і інтенсивність зміни стоку із зростанням площі водозбору. Значення приведені в таблицях СніПа (додаток 2, табл.17).

Для районів Середньої Азії, Казахстану і деяких інших районів застосування регіональної формули допускається для літньо-осінньої межени при $F < 10000$ км² і зимової - при $F < 5000$ км².

Таблиця 4.2 – Перехідні коефіцієнти λ_p для визначення мінімальних 30-добових витрат води різної ймовірності перевищення

Район за картою [СНіП, додаток 1, аркуш 21]	Ймовірність перевищення, P%				
	75	80	90	95	97
1	1.05	1.00	0.95	0.87	0.83
2	1.05	1.00	0.87	0.80	0.75
3	1.06	1.00	0.86	0.78	0.70
4	1.06	1.00	0.83	0.71	0.62
5	1.09	1.00	0.80	0.63	0.54
6	1.14	1.00	0.73	0.56	0.44
Басейн р.Лени до впадіння р.Олекми* (F< 1000 км ²)	1.05	1.00	0.66	0.42	0.33
Епізодично пересихаючі та перемерзаючі річки	1.20	1.00	0.45	1.15	0.00
Басейни річок Іртиш, Ішим, Тобол.	1.20	1.00	0.56	0.35	0.00

* Для визначення мінімальної літньої витрати води.

Тривалість періодів перемерзання й пересихання визначається за регіональними залежностями мінімальної 30-денної (середньомісячної) витрати води. Для оцінки відсутності стоку протягом 30 діб може використовуватись формула (4.2). У зв'язку з цим виконують розрахунок $Q_{80\%}$ для деяких значень площі, і та із них, за якої витрата води, обчислена із формули (4.2), буде не вище $0.001\text{м}^3/\text{с}$, береться за площу пересихання або перемерзання.

Формулу (4.2) не можливо використовувати для розрахунку мінімального стоку річок зі значним озерним регулюванням, які протікають у районах локального впливу карсту, а також при значно виражених впливах господарської діяльності на стік річок.

Для окремих районів [СНіП, додаток 1, аркуші 19,20] рекомендовано визначати мінімальні 30-добові витрати щорічної ймовірності перевищення $P=80\%$ за формулою

$$q_{80\%} = a\bar{H}_B, \quad (4.4)$$

де $q_{80\%}$ - модуль мінімального стоку 80%-ної забезпеченості, \bar{H}_B - середня висота водозбору, .

Мінімальні витрати інших ймовірностей перевищення встановлюють відповідно до табл.4.2.

Для гірських територій значення мінімального стоку припускається визначати по залежності модуля мінімального стоку від середньої висоти басейну річки. Залежності будуються для однорідних за гідрогеологічними умовами районів.

Якщо треба оцінити мінімальну середньодобову витрату води Р%-ної забезпеченості, то її визначають по залежності з 30-денними (середньомісячними) витратами води:

$$Q_{p,c} = K_c Q_p = K_c \lambda_p Q_{80\%}, \quad (4.5)$$

де $Q_{p,c}$ - мінімальна середньодобова витрата води забезпеченістю Р%;

Q_p - мінімальна 30-денна витрата води тієї ж забезпеченості;

K_c – перехідний коефіцієнт з табл.4.3.

Таблиця 4.3 – Коефіцієнт K_c для визначення мінімальної середньодобової витрати води ймовірністю перевищення 80%

Номер району за картою[СНіП, дод.1, аркуш 22]	Період	
	Літньо-осінній	Зимовий
I (1)	0.90	0.90
II (2)	0.85	0.84
III (3)	0.80	0.74
IV (4)	0.74	0.64
V (5)	0.64	0.53
VI (6)	0.52	0.41
VII(7)	0.45	0.25
(8)	0.38	-

Примітка: Римськими цифрами позначені номери районів для зимового періоду, арабськими – для літньо-осіннього.

Приклад розрахунку 4.1

Визначити норму мінімального стоку та розрахунковий період для р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ

Дано: р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ. Площа водозбору $F=52400 \text{ км}^2$. Вихідні дані: середньомісячні витрати води мінімального зимового стоку за період з 1893 по 1988 рр. для р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ (табл.4.4).

1. Для наведеного ряду розраховується середньобагаторічне значення \bar{Q} та коефіцієнт варіації C_v за формулами (2.14) та (1.34):

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n} = \frac{2295}{77} = 29.8 \text{ м}^3/\text{с};$$

За методом моментів:

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{22.16}{76}} = 0.54$$

За формулою (2.11) оцінюється похибка середньобагаторічного значення \bar{Q} :

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \frac{100C_v}{\sqrt{n}} = \frac{100 \cdot 0.54}{\sqrt{77}} = 6.1\%$$

а формулою (2.13) обчислюється коефіцієнт автокореляції

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (Q_i - \bar{Q})(Q_{i+1} - \bar{Q})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2 \sum_{i=1}^{n-1} (Q_{i+1} - \bar{Q})^2}} = \frac{4514}{\sqrt{23227 \cdot 23197}} = 0.20$$

З урахуванням коефіцієнта автокореляції середньоквадратичне відхилення становить:

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \frac{6.1}{\sqrt{\frac{1-r_1}{1+r_1}}} = 6.1 / 0.82 = 7.5\%$$

Таким чином, похибка при розрахунку \bar{Q} укладається в рамки припустимих, і середньобагаторічне значення \bar{Q} можна вважати за норму мінімального місячного зимового стоку.

За даними табл.4.4 будується хронологічний графік коливань мінімального стоку (рис.4.1), на нього наноситься норма мінімального стоку $\bar{Q}_N=29.8 \text{ м}^3/\text{с}$.

2. За формулою (2.8) на підставі табл.4.4 зроблено ковзне осереднення, результати якого наведені в табл.4.5. Якщо ряд перерваний, то осереднення перед розривом робиться як для кінцевих членів ряду, а після розриву – як для перших членів ряду.

3. Значення згладжуваного ряду наносяться на хронологічний графік коливань мінімального стоку (рис.4.1).

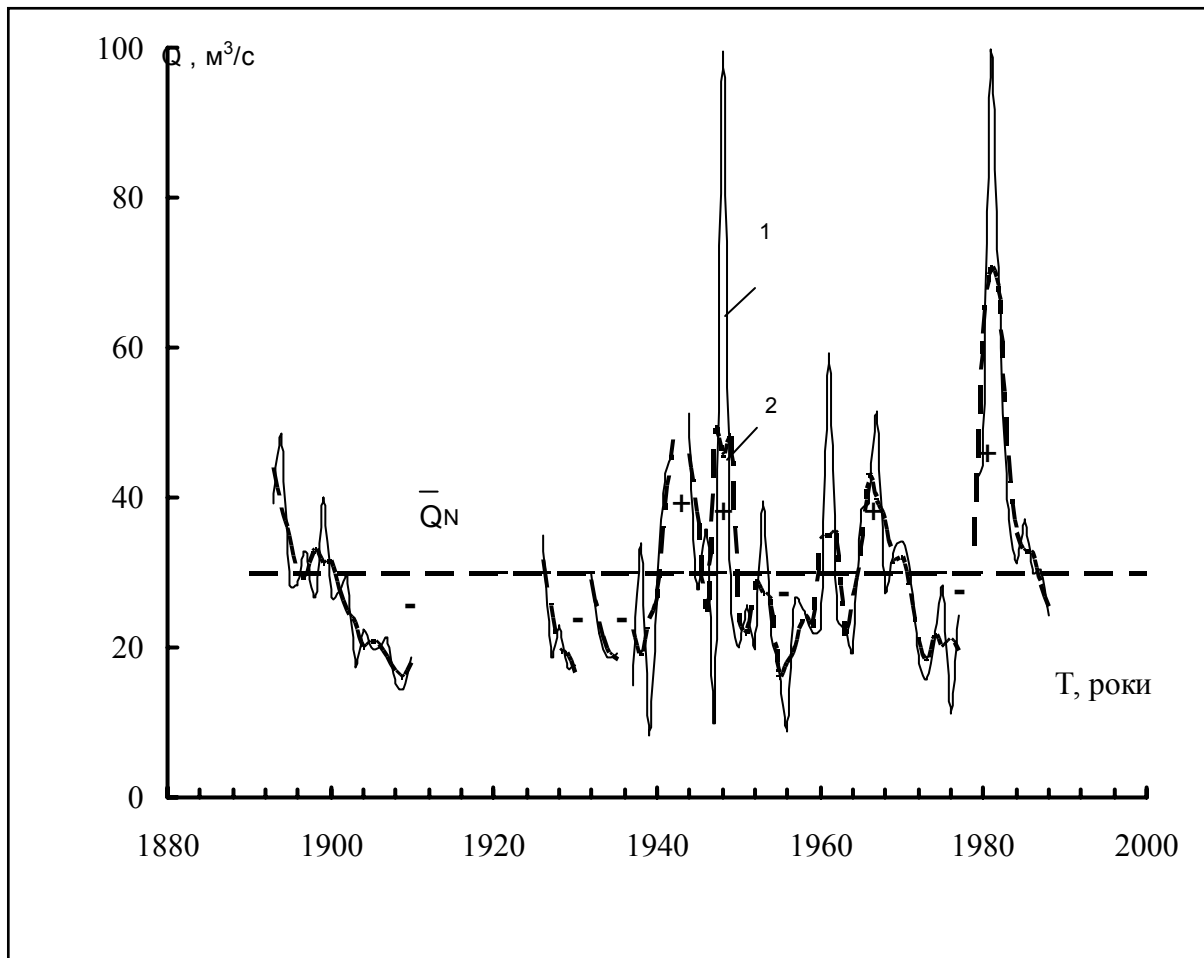


Рисунок 4.1 – Хронологічний графік коливань мінімального стоку (1) та графік середніх (2) р.сіверський Донець – м.Лисичвнськ

Таблиця 4.4. – Середньомісячні витрати води мінімального зимового стоку р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ

№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с	№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с
1	1893	39.2	31	1923	-
2	1894	48.4	32	1924	-
3	1895	28.3	33	1925	-
4	1896	28.3	34	1926	35
5	1897	32.7	35	1927	18.9
6	1898	26.8	36	1928	23
7	1899	39.9	37	1929	17.3
8	1900	26.8	38	1930	17.6
9	1901	27.4	39	1931	
10	1902	29.3	40	1932	29.9
11	1903	17.7	41	1933	21.9
12	1904	22.5	42	1934	18.6
13	1905	20	43	1935	19.1
14	1906	20	44	1936	
15	1907	21	45	1937	14.9
16	1908	15.3	46	1938	34
17	1909	14.4	47	1939	8.26
18	1910	18.7	48	1940	28.8
20	1912	-	49	1941	43.3
21	1913	-	50	1942	45.6
22	1914	-	51	1943	
23	1915	-	52	1944	51.1
24	1916	-	53	1945	27.9
25	1917	-	54	1946	35.4
26	1918	-	55	1947	12
27	1919	-	56	1948	99.6
28	1920	-	57	1949	24.6
29	1921	-	58	1950	20.1
30	1922	-	59	1951	25.6
60	1952	20.2	81	1973	15.7
61	1953	39.6	82	1974	21
62	1954	21.5	83	1975	27.9
63	1955	18	84	1976	11.1
64	1956	9.08	85	1977	24.4
65	1957	26.3	86	1978	-

Продовження таблиці 4.4

№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с	№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с
66	1958	24.6	87	1979	42.5
67	1959	22	88	1980	44.2
68	1960	22.3	89	1981	99.2
69	1961	59.1	90	1982	68.5
70	1962	23.8	100	1983	37.2
71	1963	22.7	101	1984	31.3
72	1964	19.4	102	1985	37
73	1965	38.4	103	1986	30
74	1966	39.2	104	1987	30.5
75	1967	51.2	105	1988	24.3
76	1968	27.7			Σ=2295
77	1969	32.6			Середнє 29.8
78	1970	34.2			
79	1971	29.5			
80	1972	17.9			

Аналіз рис.4.1 показує, що на хронологічному графіку коливань мінімального стоку, після згладжування по 3-річках, можна виділити декілька багатоводних та маловодних угруповань: з 1900р. до 1940р., з 1951р. до 1962р., та з 1965 р. до 1979р. спостерігались маловодні угруповання, а з 1941р. до 1950р., з 1962р. до 1964р., та з 1980р. до 1986р. – багатоводні.

Таким чином, за розрахунковий для визначення норми мінімального меженного зимового стоку на р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ можна прийняти період з 1926 до 1986рр.

4. Для визначення $Q_{80\%}$ необхідно розрахувати коефіцієнт асиметрії за формулою (1.40)

$$C_s = \frac{\sum_{i=1}^n (K_i - 1)^3}{C_v^3} \cdot \frac{n}{(n-1)(n-2)} = \frac{27.66}{0.16} \cdot \frac{77}{76 \cdot 75} = 2.33.$$

Використовуючи таблиці розподілу Персона III типу наведені у СНіП, знаходимо $\Phi_{80\%} = -0.73$

Таблиця 4.5- Ковзне осереднення хронологічного ряду мінімального місячного стоку зимової межени за трьохрічками, р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ

№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с	Згладжувані витрати, Q ₃ , м ³ /с	№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с	Згладжувані витрати, Q ₃ , м ³ /с
1	1893	39.2	44.1	12	1904	22.5	20.1
2	1894	48.4	38.6	13	1905	20	20.8
3	1895	28.3	35.0	14	1906	20	20.3
4	1896	28.3	29.8	15	1907	21	18.8
5	1897	32.7	29.3	16	1908	15.3	16.9
6	1898	26.8	33.1	17	1909	14.4	16.1
7	1899	39.9	31.2	18	1910	18.7	17.8
8	1900	26.8	31.4	19	1911	-	-
9	1901	27.4	27.8	20	1912	-	-
10	1902	29.3	24.8	21	1913	-	-
11	1903	17.7	23.2	22	1914	-	-
23	1915	-	-	65	1957	26.3	20.0
24	1916	-	-	66	1958	24.6	24.3
25	1917	-	-	67	1959	22	23.0
26	1918	-	-	68	1960	22.3	34.5
27	1919	-	-	69	1961	59.1	35.1
28	1920	-	-	70	1962	23.8	35.2
29	1921	-	-	71	1963	22.7	22.0
30	1922	-	-	72	1964	19.4	26.8
31	1923	-	-	73	1965	38.4	32.3
32	1924	-	-	74	1966	39.2	42.9
33	1925	-	-	75	1967	51.2	39.4
34	1926	35	31.6	76	1968	27.7	37.2
35	1927	18.9	25.6	77	1969	32.6	31.5
36	1928	23	19.7	78	1970	34.2	32.1
37	1929	17.3	19.3	79	1971	29.5	27.2
38	1930	17.6	16.6	80	1972	17.9	21.0
39	1931			81	1973	15.7	18.2
40	1932	29.9	29.1	82	1974	21	21.5
41	1933	21.9	23.5	83	1975	27.9	20.0
42	1934	18.6	19.9	84	1976	11.1	21.1
43	1935	19.1	18.5	85	1977	24.4	19.4
44	1936	-	-	86	1978	-	-

Продовження таблиці 4.5

№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с	Згладжувані витрати, Q ₃ , м ³ /с	№ п/п	Рік	Мінімальна витрата води Q, м ³ /с	Згладжувані витрати, Q ₃ , м ³ /с
45	1937	14.9	22.4	87	1979	42.5	33.6
46	1938	34	19.1	88	1980	44.2	62.0
47	1939	8.26	23.7	89	1981	99.2	70.6
48	1940	28.8	26.8	90	1982	68.5	68.3
49	1941	43.3	39.2	100	1983	37.2	45.7
50	1942	45.6	47.6	101	1984	31.3	35.2
51	1943	-	-	102	1985	37	32.8
52	1944	51.1	46.0	103	1986	30	32.5
53	1945	27.9	38.1	104	1987	30.5	28.3
54	1946	35.4	25.1	105	1988	24.3	25.4
55	1947	12	49.0				
56	1948	99.6	45.4				
57	1949	24.6	48.1				
58	1950	20.1	23.4				
59	1951	25.6	22.0				
60	1952	20.2	28.5				
61	1953	39.6	27.1				
62	1954	21.5	26.4				
63	1955	18	16.2				
64	1956	9.08	17.8				

Тоді

$$K_{80\%} = \Phi_{80\%} C_V + 1 = -0.73 \cdot 0.54 + 1 = 0.61.$$

Відповідно до (1.148)

$$Q_{80\%} = \bar{Q}_N \cdot K_{80\%} = 29.8 \cdot 0.61 = 18.2 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Якщо використовувати трипараметричний розподіл, то необхідно прийняти осереднене значення співвідношення C_S/C_V . У нашому випадку $C_S/C_V = 2.33/0.54 \approx 4.0$. Тоді, відповідно до таблиці ординат

трипараметричного розподілу [СНіП], знаходимо K_p як $f(C_v, C_s/C_v, P\%)$. При $C_v=0.54$, $C_s/C_v=4.0$ и $P=80\%$ він дорівнює 0.59.

Таким чином,

$$Q_{80\%} = \bar{Q}_N \cdot K_p = 29.8 \cdot 0.59 = 17.6 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Як видно із наведених розрахунків, обидві криві розподілу дають практично однакові результати. Отже, для розрахунку $Q_{80\%}$ можна використовувати як біноміальну, так і трипараметричну криву розподілу.

Приклад розрахунку 4.2

Виконати приведення статистичних параметрів мінімального місячного зимового стоку р.Сіверський Донець – Протопопівка до багаторічного періоду аналітичним та графічним способами і методом коефіцієнтів.

Дано:

1) р.Сіверський Донець –с. Протопопівка. Площа водозбору $F=19400 \text{ км}^2$.

2) р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ. Площа водозбору $F=52400 \text{ км}^2$.

Вихідні дані:

1) Середньомісячні мінімальні зимові витрати води р.Сіверський Донець –с.Протопопівка за період спостережень з 1969 по 1988 рр. (табл.4.6).

2) Середньомісячні мінімальні зимові витрати води р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ за період спостережень з 1893 по 1988 рр. Норма мінімального зимового стоку $\bar{Q}_N=29.8 \text{ м}^3/\text{с}$, коефіцієнт варіації $C_v=0.54$, відносна середньоквадратична похибка $\varepsilon_{\bar{Q}_a}=7.5\%$ (приклад 4.1).

Наведений аналог знаходиться у тих самих гідрогеологічних умовах, що й досліджуваний ряд та відповідає принципу репрезентативності.

Таблиця 4.6 – Середньомісячні мінімальні зимові витрати води р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ та р.Сіверський Донець – Протопопівка за період спільних спостережень (1969-1988рр).

№ п/п	Роки	Q, м ³ /с Сіверський Донець – м.Лисичанськ	Q, м ³ /с Сіверський Донець – Протопопівка
1	1969	32.6	15.4
2	1970	34.2	22.3
3	1971	29.5	19.6
4	1972	17.9	16.9
5	1973	15.7	16.5
6	1974	21	21.4
7	1975	27.9	24.2
8	1976	11.1	11
9	1977	24.4	19.3
10	1978	-	14.7
11	1979	42.5	31.8
12	1980	44.2	23.2
13	1981	99.2	61.6
14	1982	68.5	51.4
15	1983	37.2	37.8
16	1984	31.3	16.7
17	1985	37	19.3
18	1986	30	19.8
19	1987	30.5	19.4
20	1988	24.3	29.7

1.Для наведеного ряду з періодом 1969-1988рр розраховується середнє значення мінімального зимового стоку та коефіцієнт варіації:

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n} = \frac{492}{20} = 24.6 \text{ м}^3/\text{с};$$

За методом моментів:

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (K_i - 1)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{5.03}{19}} = 0.51.$$

За формулою (2.11) оцінюється відносна середньоквадратична похибка середнього значення \bar{Q} :

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \frac{100C_v}{\sqrt{n}} = \frac{0.51}{\sqrt{20}} = 11.4\%.$$

Відповідно до формули (2.13) розраховується коефіцієнт автокореляції r_1 , який для р.Сіверський Донець – с.Протопопівка дорівнює 0.49.

Тоді з урахуванням коефіцієнта автокореляції

$$\varepsilon_{\bar{Q}} = \pm 100 C_v \sqrt{(1 + r_1)/(1 - r_1)} / \sqrt{n} = 100 \times 0.51 \sqrt{(1 + 0.49)/(1 - 0.49)} / \sqrt{20} = 19.5\%, \text{ тобто } > 15\%$$

Значення $\varepsilon_{\bar{Q}}$ більше за допустиме і тому необхідне приведення ряду до багаторічного періоду.

1. *Приведення ряду до багаторічного періоду за допомогою рівняння лінійної регресії (аналітичний метод).*

Поперше, необхідно розрахувати коефіцієнт кореляції між значеннями вихідного ряду та ряду-аналога за період спільних спостережень. Для розрахунку r необхідно скласти таблицю 4.7.

Відповідно до (2.13) коефіцієнт кореляції дорівнює:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})(Q_{ai} - \bar{Q}_a)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2 \sum_{i=1}^n (Q_{ai} - \bar{Q}_a)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta Q \cdot \Delta Q_a}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta Q^2 \cdot \sum_{i=1}^n \Delta Q_a^2}} = \frac{4126}{\sqrt{2945 \cdot 7197}} = 0.89$$

Таблиця 4.7 – Розрахунок коефіцієнту кореляції між витратами мінімального зимового стоку р.Сіверський Донець – с.Протопопівка та р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ (1969-1988)

№ п/п	Роки	Q _{i min} М ³ /с	Q _{i min} ^a М ³ /с	ΔQ _{min}	ΔQ _{min} ^a	(ΔQ _{min}) ²	(ΔQ _{min} ^a)	ΔQ _{min} × ΔQ _{min} ^a
1	1969	15.4	32.6	-9.2	-2.1	84.6	4.41	19.3
2	1970	22.3	34.2	-2.3	-0.5	5.3	0.25	1.2
3	1971	19.6	29.5	-5	-5.2	25.0	27.0	26.0
4	1972	16.9	17.9	-7.7	-16.8	59.3	282.2	129.4
5	1973	16.5	15.7	-8.1	-19.0	65.6	361.0	153.9
6	1974	21.4	21	-3.2	-13.7	10.2	187.7	43.8
7	1975	24.2	27.9	-0.4	-6.8	0.2	46.24	2.7
8	1976	11	11.1	-13.6	-23.6	185.0	557	321.0
9	1977	19.3	24.4	-5.3	-10.3	28.1	106.1	54.6
10	1978	14.7						
11	1979	31.8	42.5	7.2	7.8	51.8	60.8	56.2
12	1980	23.2	44.2	-1.4	9.5	2.0	90.3	-13.3
13	1981	61.6	99.2	37	64.5	1369.0	4160	2386.5
14	1982	51.4	68.5	26.8	33.8	718.2	1142	905.8
15	1983	37.8	37.2	13.2	2.5	174.2	6.25	33.0
16	1984	16.7	31.3	-7.9	-3.4	62.4	11.56	26.9
17	1985	19.3	37	-5.3	2.3	28.1	5.29	-12.2
18	1986	19.8	30	-4.8	-4.7	23.0	22.09	22.6
19	1987	19.4	30.5	-5.2	-4.2	27.0	17.64	21.8
20	1988	29.7	24.3	5.1	-10.4	26.0	108.16	-53.0
Сума		492	659	-43.7	-0.3	2945	7197	4126
Середнє		24.6	34.7					

Далі необхідно визначити коефіцієнт регресії за формулою (2.16). Але для цього спочатку розраховуються середньоквадратичні відхилення короткого ряду та ряду-аналога (за період 1969-1988рр.) за допомогою табл.4.7 по формулам (2.19) та (2.20):

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2945}{18}} = 12.8.$$

$$\sigma_Q^a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i^a - \bar{Q}^a)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{7197}{18}} = 20.0.$$

Тоді коефіцієнт регресії становить

$$k = r \sigma_Q / \sigma_Q^a = 0.89 \cdot 12.8 / 20.0 = 0.57.$$

Похибка коефіцієнта регресії, відповідно до (2.17), складає:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_Q}{\sigma_Q^a} \cdot \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{12.8}{20.0} \cdot \frac{(1-0.89^2)}{\sqrt{18}} = 0.03.$$

Таким чином, умова $k/\sigma_k \geq 2$ виконується - $k/\sigma_k = 0.57/0.03 = 19 \geq 2$.

Наведені розрахунки зазначають дійсність аналога р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ для визначення норми розрахункового створу за рівнянням лінійної регресії.

Середні значення мінімальних витрат зимового стоку за період спільних спостережень (з 1969 по 1988рр.) становлять для р.Сіверський Донець – с.Протопоівка $\bar{Q} = 24.6 \text{ м}^3/\text{с}$, а для р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ - $\bar{Q}^a = 34.7 \text{ м}^3/\text{с}$, при нормі мінімального зимового стоку - $\bar{Q}^a_N = 29.8 \text{ м}^3/\text{с}$.

Приведене значення норми мінімального зимового стоку, згідно з (2.18), дорівнює

$$\begin{aligned} \bar{Q}_N &= \bar{Q}_n + r\sigma_Q(\bar{Q}^a_N - \bar{Q}^a_n) / \sigma_Q^a = \\ &= 24.6 + 0.89 \cdot 12.8(29.8 - 34.7) / 20.0 = 21.8 \text{ м}^3/\text{с} \end{aligned}$$

Коефіцієнт варіації за формулою (2.21) дорівнює:

$$C_v = \frac{\sigma_Q}{\bar{Q}_N} \sqrt{1 + r^2 \left(1 - \frac{\sigma_{Q_n}^a}{\sigma_{Q_N}^a} \right)},$$

де $\sigma_{Q_N}^a$ - середньоквадратичне відхилення ряду-аналога за багаторічний період (N років), розраховується за формулою (2.20):

$$\sigma_{Q_N}^a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i^a - \bar{Q}^a)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{19676}{76}} = 16.1.$$

Тоді

$$C_v = \frac{12.8}{21.8} \sqrt{1 + 0.89^2 \left(1 - \frac{20.0}{16.1}\right)} = 0.53.$$

Похибка приведенного значення норми мінімального стоку за рівнянням регресії (2.22) дорівнює:

$$\varepsilon_{\bar{Q}_N} = \frac{100\sigma_Q}{\bar{Q}_N \cdot \sqrt{n}} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{n}{N} \frac{\sigma_{Q_N}^a}{\sigma_{Q_n}^a} - 1 \right)} =$$

$$\frac{100 \cdot 12.8}{21.8 \sqrt{19}} \sqrt{1 + 0.89^2 \left(\frac{19}{77} \frac{16.1^2}{20.0^2} - 1 \right)} = 7.8\%$$

З урахуванням коефіцієнта автокореляції середньоквадратичне відхилення становить:

$$\varepsilon_{\bar{Q}_N} = \frac{7.81}{\sqrt{\frac{1-r_1}{1+r_1}}} = 7.81 / 0.585 = 13.3\% < 15\%.$$

тобто менше від вихідної на 6.2%

2. Приведення ряду до багаторічного періоду графічним методом.

Відповідно до графічного методу будується залежність середньорічних мінімальних зимових витрат розрахункової річки р.Сіверський Донець-с.Протопопівка та річки-аналога р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ за період спільних спостережень з 1969р. по 1988р. (рис.4.2).

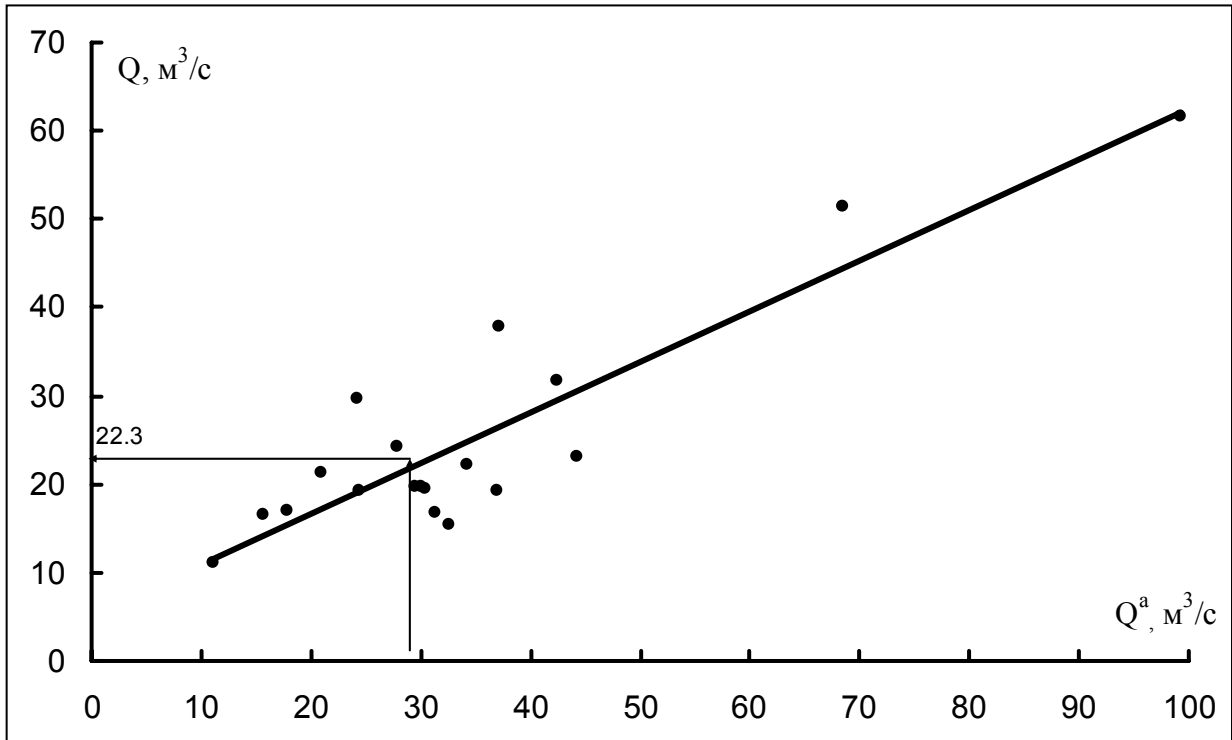


Рисунок 4.2 - Залежність середньомісячних мінімальних зимових витрат води р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ (Q^a) та р.Сіверський Донець – с.Протопопівка (Q) за період сумісних спостережень (1969-1988рр.)

Зв'язок прямолінійний, середнє відхилення точок від лінії зв'язку не перевищує 10%, тангенс кута нахилу лінії зв'язку до осі аналога складає 0.57.

Для підтвердження висновку про вибір аналогу розраховується коефіцієнт кореляції, як показано вище він дорівнює 0.89.Такий високий коефіцієнт кореляції ще раз підтверджує правильність вибору річки-аналога.

По графіку зв'язку (рис.4.2) при $\bar{Q}_N^a = 29.8 \text{ м}^3/\text{с}$ установлюємо норму мінімального зимового стоку р.Сіверський Донець – с.Протопопівка становить $\bar{Q}_N = 22.3 \text{ м}^3/\text{с}$.

Коефіцієнт варіації, відповідно до (2.23), дорівнює (при $A = \text{tg}\alpha = 0.57$)

$$C_v = A \frac{\bar{Q}_N^a}{\bar{Q}_N} C_v^a = 0.57 \frac{29.8}{22.3} 0.54 = 0.41.$$

Похибка норми мінімального зимового стоку приведенного ряду, розраховується за формулою (2.24):

$$\varepsilon_{\bar{Q}_N} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} = \sqrt{7.5^2 + 4.3^2} = 8.6\%,$$

де: $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\bar{Q}_N^a} = 7.5\%$;

$$\varepsilon_2 = \frac{C_v \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n}} \cdot 100\% = \frac{0.41 \sqrt{1-0.89^2}}{\sqrt{19}} 100\% = 4.3\%$$

З урахуванням коефіцієнта автокореляції відносно середньоквадратичне відхилення становить:

$$\varepsilon_{\bar{Q}_{\min N}} = \frac{8.6}{\sqrt{\frac{1-r_1}{1+r_1}}} = 8.6 / 0.585 = 14.7\% < 15\%$$

тобто менше від вихідної на 4.7%.

3. Приведення ряду до багаторічного періоду методом коефіцієнтів.

Для розрахунку за цим методом спочатку треба розрахувати коефіцієнт кореляції між значеннями стоку досліджуваного ряду та ряду-аналогу за період спільних спостережень. Як показано вище (аналітичний метод) цей коефіцієнт для періоду з 1969р. по 1988р. між значеннями мінімального зимового стоку р.Сіверський Донець – с.Протопопівка та р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ становить 0.89, тобто $r \geq 0.7$. Наступним етапом є побудування хронологічних графіків коливань мінімального зимового стоку (рис.4.3). Для того, щоб хронологічні графіки простіше було порівнювати між собою їх будують у модульних коефіцієнтах k_i . Як видно із рис.4.3, коливання мінімального зимового стоку за період з 1969 по 1988рр. досліджуваного ряду (р.Сіверський Донець-Протопопівка) та ряду-аналогу (р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ) повністю синхронні.

У такому випадку, відповідно до (2.29), можна записати

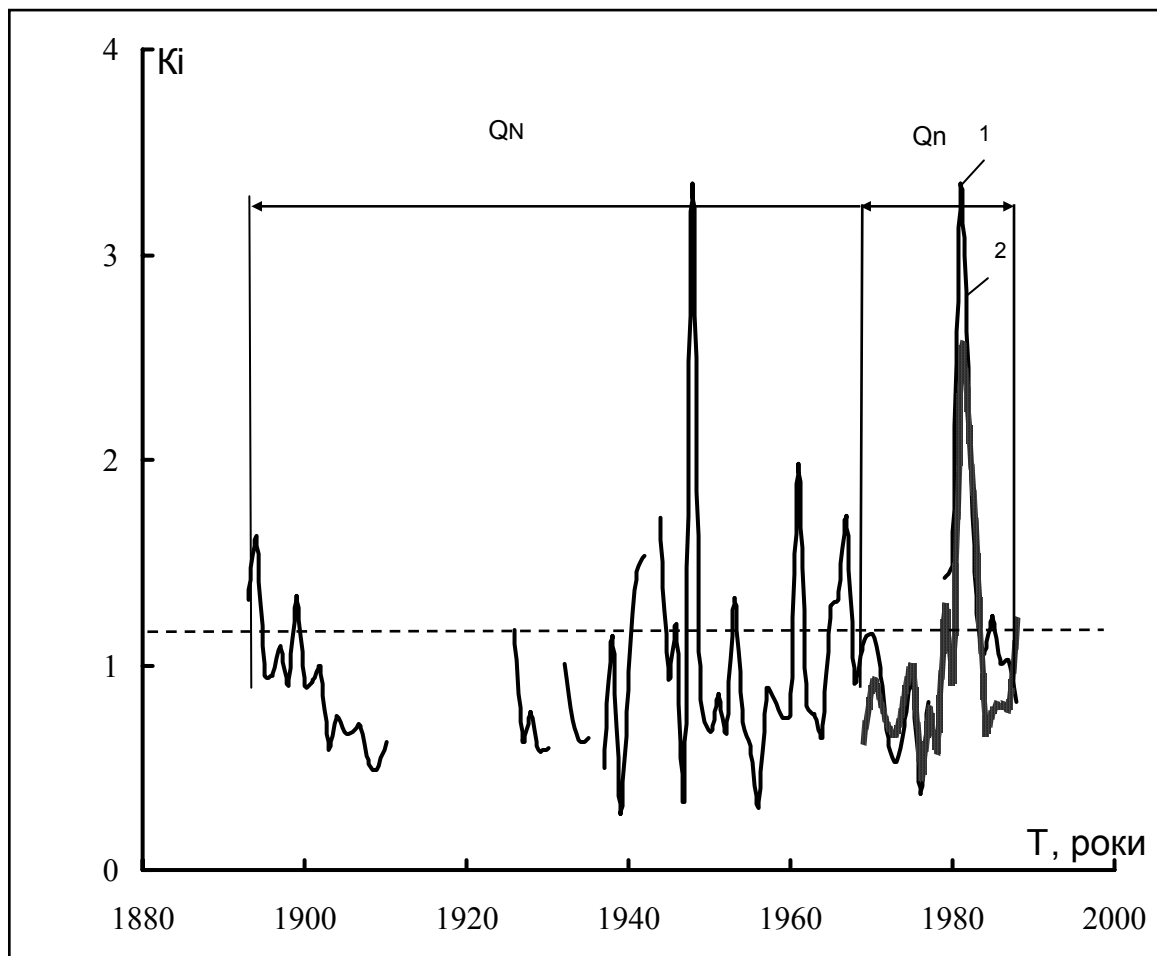


Рисунок 4.3 -Хронологічний графік коливань мінімального місячного зимового стоку р.Сіверський Донець -м.Лисичанськ (1) та р.Сіверський Донець - с.Протопопівка (2)

$$\frac{\bar{Q}_N^a}{\bar{Q}_n^a} = \frac{\bar{Q}_N}{\bar{Q}_n} ;$$

Обозначимо співвідношення $\frac{\bar{Q}_N^a}{\bar{Q}_n^a}$ через K_N .

Тоді $K_N=0.86$, а \bar{Q}_N дорівнює

$$\bar{Q}_N = K_N \bar{Q}_n = 0.86 \cdot 24.6 = 21.2 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Результати приведення статистичних параметрів мінімального стоку р.Сіверський Донець – с.Протопопівка до багаторічного періоду різними методами представлені в табл.4.8

Таблиця 4.8 –Статистичні параметри мінімального зимового стоку р.Сіверський Донець – Протопопівка, обчислені різними методами

Метод приведення	$\bar{Q}_{\min N}$, м ³ /с	$\varepsilon \bar{Q}_{\min N}$	C_v
Аналітичний	21.8	13.3	0.53
Графічний	22.3	14.7	0.41
Метод коефіцієнтів	21.2		

Приклад розрахунку 4.3

Визначити мінімальний зимовий 30-денний стік 80%-ої забезпеченості р.Сіверський Донець – м. Лисичанськ та р.Калитва – с.Кудинівка за допомогою карти ізоліній або за формулою (4.2) (для малих річок).

Дано: 1) р.Сіверський Донець – м. Лисичанськ, площа водозбору $F=52400$ км².

2) р.Калитва –с.Кудинівка., площа водозбору $F=1110$ км².

Вихідні дані:

1) Карта мінімального 30-денного зимового стоку забезпеченістю $P=80\%$ [СНіП, аркуш 17] масштабу 1:10 000 000, ізолінії стоку подані в модулях $q_{80\%}$, л/с км² (рис.4.4).

2) Карта районів для визначення мінімальної 30-денної витрати води 80%-ної забезпеченості на малих річках в зимовий період [СНіП, аркуш 19] масштабу 1:10 000 000 (рис.4.5).

Басейн р.Сіверський Донець – м.Лисичанськ знаходиться між чотирма ізолініями стоку. У цьому випадку стік визначається як середньозважене значення за формулою (4.1).

Як видно із рис.4.4, ізолінія 0.5 л/скм² перетинає водозбір утворюючи контур f_1 , а ізолінія 0.3 л/скм² утворює контури f_2 та f_3 . Площі між ізолініями визначаються за допомогою палетки: $f_1=3.0$, $f_2=4.5$, $f_3=8.5$ поділок палетки. Для розрахунку мінімального стоку за формулою (4.1) складено табл.4.9.

Використовуючи дані табл.4.9, отримаємо модуль мінімального зимового стоку 80%-ної забезпеченості

$$\bar{Q}_{80\%N} = \frac{5.75}{16.0} = 0.36 \text{ л/с км}^2.$$

Для визначення мінімальної витрати $Q_{80\%}$ домножимо отримане значення на площу водозбору, а для переходу к кубічним метрам розділемо на 1000:

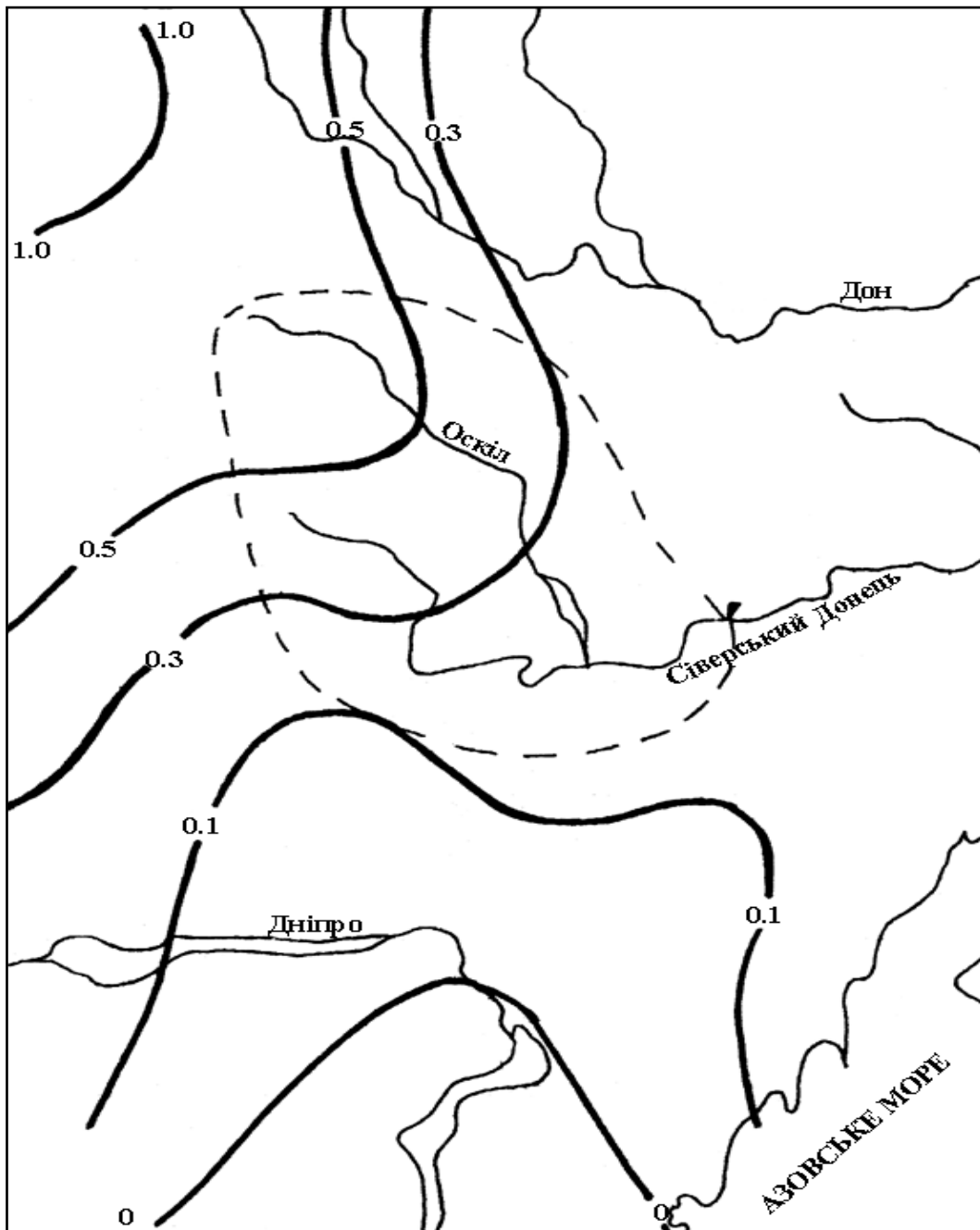


Рисунок 4.4 – Мінімальний 30-денний зимовий стік забезпеченістю $P=80\%$

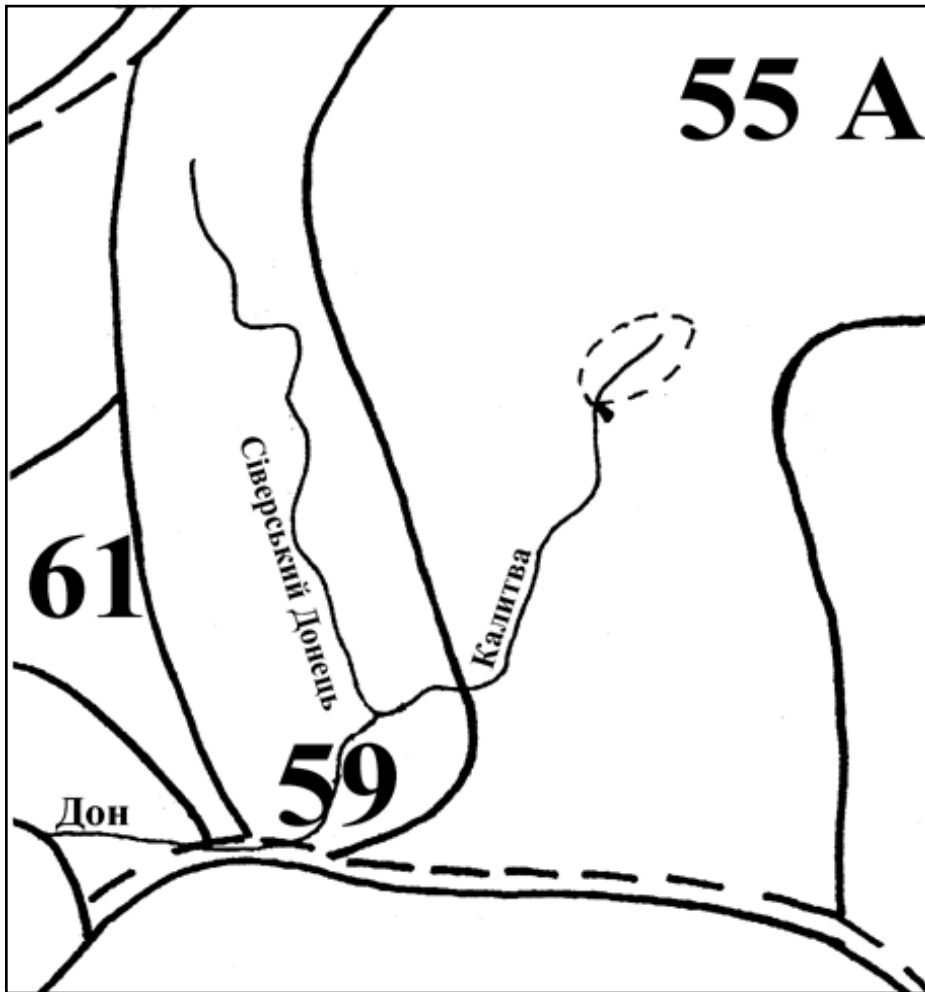


Рисунок 4.5 – Районування параметрів для визначення мінімальної 30-денної витрати води 80%-ної забезпеченості на малих річках в зимовий період

A - межа та індекс району для визначення параметра F за табл.4.1

55 - межа та номер району для визначення параметрів a, f_{03} , n за табл.17, дод.2 в СНП

Таблиця 4.9 – Розрахунок мінімального 30-денного зимового стоку за допомогою карти ізоліній р.Сіверський Донець-м.Лисичанськ, F=52400 км²

Значення ізоліній модуля зимового стоку $q_{\min 80\%}$, л/с км ²	Середнє значення модуля $q_{i \min 80\%}$, л/с км ²	Площа водозбору між ізолініями, f_i	$q_{i \min 80\%} \cdot f_i$
1.0-0.5	0.75	3.0	2.25
0.5-0.3	0.4	4.5	1.80
0.3-0.1	0.2	8.5	1.70
		$\Sigma=16.0$	$\Sigma=5.75$

$$Q_{80\%} = \frac{0.36 \cdot 52400}{1000} = 18.8 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Точність розрахунку мінімальної витрати за картою СНіП можна визначити як відносне середнє відхилення розрахункових значень від фактичних за формулою

$$\Delta = \frac{|Q_{80\%p} - Q_{80\%ф}|}{Q_{80\%ф}} \cdot 100\% = \frac{|18.8 - 18.2|}{18.2} \cdot 100\% = 3\%.$$

Таким чином, для р.Сіверський Донець-м.Лисичанськ точність розрахунку мінімального зимового стоку за допомогою карти становить 3%. Річку Калитва до замикального створу с.Кудинівка із площею водозбору F=1110 км² слід віднести до малих річок. Як видно із карти районів (рис.4.5), р.Калитва знаходиться у районі А, а в табл.4.1 показано, що для цього району річки із площею водозбору F≤1200 км² відносяться до категорії малих. Для розрахунку мінімального зимового стоку малих річок, відповідно з рекомендаціями СНіП 2.01.14-83, слід використовувати формулу (4.3)

Для визначення основних параметрів формули спочатку необхідно визначити номер району до якого віднесений досліджуваний водозбір. Як показано на рис.4.5 р.Калитва відноситься до району №55. Далі за даними СНіПу (табл.17, додаток 2) визначаються: a=0.044, n=1.17, f=0.

Тоді

$$Q_{80\%} = 10^{-3} a \cdot (F \pm f)^n = 10^{-3} \cdot 0.044 \cdot 1110^{1.17} = 0.16 \text{ м}^3/\text{с}$$

Таким чином мінімальна зимова витрата 80%-ної забезпеченості для р.Калитва –с.Кудинівка становить 0.16м³/с.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гопченко Є.Д., Гушля О.В. Гідрологія суші з основами меліорації., - К.УСДО, 1994.
2. Клибашев К.П., Горошков И.Ф. Гидрологические расчеты. – Л.:Гидрометеиздат, 1970.
3. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Гидрологические основы управления речным стоком.- М. Наука,1981. - 235с.
4. Международное руководство по методам расчета основных гидрологических характеристик.- Л.: Гидрометеиздат,1984. - 247 с.
5. Пособие по определению расчетных гидрологических характеристик. – Л.:Гидрометеиздат, 1984. – 448 с.
6. Раткович Д.Я. Гидрологические основы водообеспечения.- М.: РАН ИВП. - 1995. - 428с.
7. Рождественский А.В., Чеботарев А.И. Статистические методы в гидрологии.- Л.:Гидрометеиздат, 1974.
8. Соколовский Д.Л. Речной сток.-Л.:Гидрометеиздат,1968.
9. Шелутко В.А. Статистические модели и методы исследования многолетних колебаний годового стока. -Л.: Гидрометеиздат,1984.- 160 с.
- 10.Школьний Є.П., Лоева І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації: навчальний підручник. - К.: Міносвіти України, 1999. - 600 с.

Навчальне видання

**Лобода Наталя Степанівна,
Овчарук Валерія Анатоліївна**

ГІДРОЛОГІЧНІ РОЗРАХУНКИ

Конспект лекцій

Підп. до друку	Формат	Папір друк.№
Умовн. друк. арк.	Тираж	Зам. №

Надруковано з готового оригінал – макету

Одеський гідрометеорологічний інститут
65016, Одеса, вул.Львівська, 15
