МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи студентів і практичних робіт

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

розділ «Кратні та криволінійні інтеграли»

для студентів ІІІ курсу (інтегровані)

Напрям підготовки: комп'ютерні науки

Одеса 2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для самостійної роботи студентів
і практичних робіт з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

розділ «Кратні та криволінійні інтеграли»
для студентів ІІІ курсу (інтегровані)
Напрям підготовки - комп'ютерні науки

«Затверджено»
на заочному факультеті

Одеса-2014

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів та практичних робіт з розділу “ Кратні та криволінійні інтеграли ” для студентів ІІІ курсу (інтегровані) денної форми навчання, напряму підготовки - комп’ютерні науки

Укладачи: Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц., Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н., доц., Свинаренко А.А., д.ф.-м.н., проф. Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф. кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

Передмова

Кратні та криволінійні інтеграли відносяться до одного з основних розділів фундаментального циклу вищої математики, який базується на вивченні основних положень диференціального та інтегрального обчислення, та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення розділу - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу поданого розділу, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання розділу «Кратні та криволінійні інтеграли» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення розділу «Кратні та криволінійні інтеграли» базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально - освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даного розділу. Після вивчення розділу студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – основні визначення, положення та властивості розділу; вміти – використовувати теоретичні знання та навички при обчисленні кратних та криволінійних інтегралів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів розділу до розв'язання прикладних математичних задач.

У методичних вказівках наведено основні теоретичні питання розділу, та приклади виконання практичних задач. Типові завдання модульної контрольної роботи наведено у розділі 6.

1. Програма розділу «Кратні та криволінійні інтеграли »

Поняття та існування подвійного інтеграла, його геометричний та механічний зміст. Властивості та обчислення подвійного інтеграла. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Поняття і існування потрійного інтеграла, його геометричний і механічний зміст. Властивості та обчислення потрійного інтеграла. Обчислення потрійних інтегралів у різних системах координат. Застосування подвійних та потрійних інтегралів до задач механіки.

Криволінійний інтеграл першого роду, його геометричний і фізичний зміст. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду. Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його властивості та обчислення. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду. Формула Гріна.

2. Базові знання та вміння

Після вивчення розділу "Кратні та криволінійні інтеграли" студент повинен:

засвоїти базові знання - поняття та властивості подвійного інтеграла, потрійного інтеграла, криволінійних інтегралів першого та другого роду;

вміти використовувати базові знання та вміння при обчисленні кратних та криволінійних інтегралів.

3. Загальні рекомендації студенту по вивченню курсу.

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручниках, розв'язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною.

Останнім етапом завершення вивчення розділу «Кратні та криволінійні інтеграли» є написання модульної контрольної роботи, що оцінюється згідно з робочою програмою. Вся робота повинна виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що даний розділ є засвоєним студентом.

4. Методичні вказівки

4.1. Кратні інтеграли

Література: [2, гл.XII, п. 1-2], [3, гл. XIV, п.1-15], [5, гл.I, п.1-8]

4.1.1 Подвійний інтеграл, його геометричний та механічний зміст

Нехай межа області D складається зі скінченної кількості кривих, заданих рівняннями вигляду $y=f(x)$ або $x=\varphi(y)$, де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – неперервні функції. Такою областю, наприклад, є замкнений многокутник, границя якого складається зі скінченного числа відрізків, що представляють собою графіки неперервних функцій вигляду $y=kx+b$ або $x=a$.

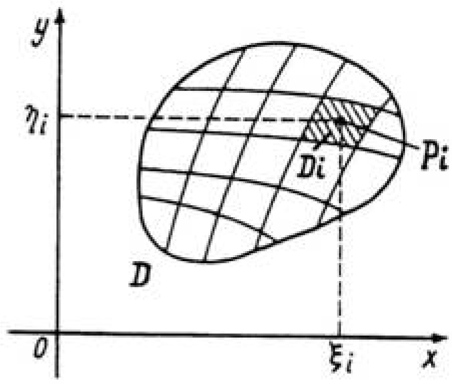


Рис. 1

Розіб'ємо область D довільним чином на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i=1,2,...,n$ (рис.1). У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i,\eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i\ , \qquad (1)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $z=f(x,y)$ по області D.

Означення. Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(D_i)\to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i, ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x,y)$ по області D. Таким чином, за означенням

$$I=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i \qquad (2)$$

У цьому випадку функція $f(x,y)$ називається інтегрованою в області D, D – областю інтегрування, x і y – змінними інтегрування,

dS (або $dx\,dy$) – елементом площі.

Геометричний зміст подвійного інтеграла. Якщо функція $f(x,y)>0$, то

$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

де V – об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z=f(x,y)\geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz.

Механічний зміст подвійного інтеграла. Довільну функцію $f(x,y)$ можна тлумачити як густину. Якщо $f(x,y)>0$, то

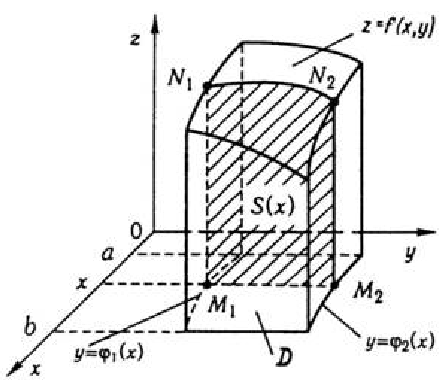
$$m=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

де m – маса пластинки з густиною $f(x,y)$ в точці $(x,y)\in D$.

Зауважимо, що якщо $f(x,y)$ набуває від'ємних значень, то можна сказати, наприклад, що $f(x,y)$ – густина електрики, розподіленої в області D, тобто ввести в розгляд від'ємні маси. Тоді у цьому випадку можливо доцільніше говорити не про "механічний", а про фізичний зміст інтеграла.

4.1.2 Обчислення подвійного інтеграла

Означення подвійного інтеграла одночасно дає і спосіб його обчислення. Однак цей спосіб досить складний, тому розглянемо інший, який зводиться до обчислення так званого повторного інтеграла двох визначених інтегралів.



Якщо $f(x,y)\geq 0$ для $(x,y)\in D$, то подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ виражає об'єм циліндричного тіла з основою D, обмеженого поверхнею $z=f(x,y)$ та циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною є межа області D (рис. 2). Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних

Рис.2 перерізів $V=\int_a^b S(x)dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, а $x=a$ та $x=b$ – рівняння площин, що обмежують задане тіло.

Спочатку розглянемо випадок, коли область D обмежена прямими $x=a$, $x=b$, де $a<b$, та неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причому $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $x\in[a;b]$ (рис. 3.).

Провівши через точку $(x;0;0)$ $(a<x<b)$, перпендикулярну до осі Ox площину, дістанемо у перерізі криволінійну трапецію $M_1N_1N_2M_2$, яка перетне область D по прямій M_1M_2. Точку M_1 називатимемо точкою входу в область D, а точку M_2 – точкою виходу з неї. Їх ординати позначимо відповідно $y_{вх}, y_{вих}$. Тоді $y_{вх}=\varphi_1(x)$, $y_{вих}=\varphi_2(x)$. Визначена таким чином область називається правильною в напрямі осі Oy.

Правильна область в напрямі осі Oy зображена на рис.3, а правильна область в напрямі осі Ox – на рис. 4.

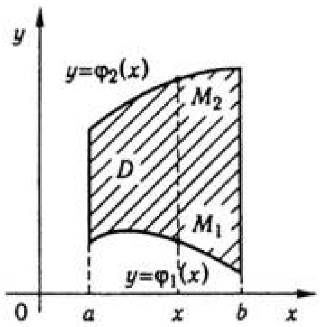


Рис. 3

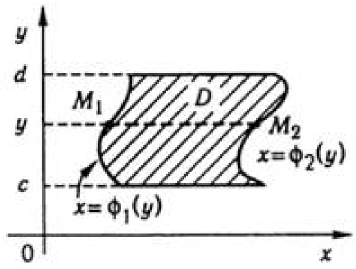


Рис. 4

Площа $S(x)$ трапеції $M_1N_1N_2M_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x)=\int_{y_{вх}}^{y_{вих}} f(x,y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Тоді отримаємо

$$V=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Оскільки об'єм V циліндричного тіла дорівнює подвійному інтегралу $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, то маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (3)$$

Праву частину формули (3) називають *повторним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області D. У повторному інтегралі (3) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла одержуємо певну функцію від однієї змінної x. Інтегруючи цю функцію в межах від a до b, тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число – значення подвійного інтеграла.

Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x=\phi_1(y),\, x=\phi_2(y)$ і двома прямими $y=c,\, y=d \quad (c<d)$, причому $\phi_1(y)\le\phi_2(y)$ для всіх $y\in[c;d]$, то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (4)$$

У формулі (4) внутрішнім є інтеграл по змінній x. Обчислюючи його в межах від $\phi_1(y)$ до $\phi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, одержимо значення подвійного інтеграла. Визначена таким чином область D є правильна в напрямі осі Ox.

Якщо область інтегрування D є прямокутником, обмеженим прямими $x=a,\, x=b,\, y=c,\, y=d \quad (a<b,\ c<d)$, то справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx\;. \qquad (5)$$

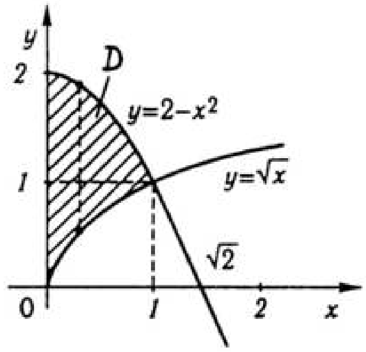
Для зведення подвійного інтеграла до повторного потрібно побудувати область інтегрування D, а потім визначити порядок інтегрування.

Приклад 1. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x,y)\,dy.$$

Розв'язання. Маємо повторний інтеграл, записаний за формулою (3). Будуємо область D, враховуючи межі інтегрування. Вона обмежена лініями: $y=\varphi_1\left(x\right)=\sqrt{x},\ y=\varphi_2\left(x\right)=2-x^2,\ x=0,\ x=1.$

Тому проекцією цієї області на вісь Ox є відрізок $\left[0;1\right]$ (рис. 5). Якщо функція неперервна у заданій області D, то можна змінити порядок інтегрування і записати повторний інтеграл за формулою (4). Проекцією області D на вісь Oy є відрізок $\left[0;2\right]$. Зліва область D обмежена прямою $\phi_1=0$, а справа – кривою



$$\phi_2\left(y\right)=\begin{cases} y^2, 0\le y\le 1, \\ \sqrt{2-y}, 1\le y\le 2. \end{cases}$$

Рис. 5

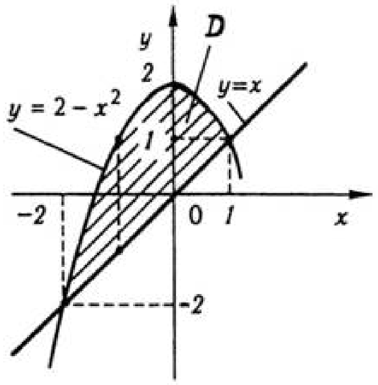
Тому маємо

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f\left(x,y\right)dy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f\left(x,y\right)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f\left(x,y\right)dx.$$

Отже, при зміні порядку інтегрування іноді область D доводиться розбивати на дві $\left(D_1\ i\ D_2\right)$ або більше областей.

Приклад 2. Обчислити $\iint\limits_D\left(1+x-y\right)dx\,dy$, якщо область D, обмежена лініями $y=x,\ y=2-x^2$.

Розв'язання. Побудуємо область D. Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь



$$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2. \end{cases}$$

Звідси $x_1=1,\ x_2=-2,\ y_1=1,\ y_2=-2$ (рис. 6). Оскільки область D правильна в напрямі осі Oy, то подвійний інтеграл обчислюється за формулою (3):

Рис. 6

$$\iint_D (1+x-y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (1+x-y)\,dy = \int_{-2}^{1} \left(y+xy-\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x}^{2-x^2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2-x^2+x\left(2-x^2\right) - \frac{\left(2-x^2\right)^2}{2} - x - x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(x - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{x^3}{2\cdot 3} \right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{4}{2} + \frac{16}{4} - \frac{32}{2\cdot 5} + \frac{8}{2\cdot 3} = \frac{9}{20}.$$

4.1.3 Подвійний інтеграл у полярних координатах

Перетворення подвійного інтеграла від прямокутних координат x, y до полярних координат ρ,φ, пов'язаним з прямокутними координатами співвідношеннями $x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi$,здійснюється за формулою

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Якщо область D обмежена лініями $\rho=\rho_1(\varphi), \rho=\rho_2(\varphi), \varphi=\alpha, \varphi=\beta$ (причому $\rho_1(\varphi)<\rho_2(\varphi)$), де $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ – неперервні функції на відрізку $[\alpha;\beta]$, тоді подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho, \qquad (6)$$

де спочатку обчислюється інтеграл $\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$, у якому φ вважається сталою.

Приклад 1. Обчислити $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо область D - I чверть кола $x^2+y^2 \le a^2$.

Розв'язання. Вважаючи $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$, маємо

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin\varphi}\,\rho\, d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3\Big|_0^a d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{a^3}{3}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{5}.$$

Приклад 2. Обчислити $\iint_D \ln\left(x^2 + y^2\right)dxdy$, якщо область D - кільце між колами $x^2 + y^2 = e^2$ и $x^2 + y^2 = e^4$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат:

$$\iint_D \ln\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint_D \ln\rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = 2\iint_D \rho\ln\rho d\rho d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} \rho\ln\rho d\rho =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \ln\rho, du = d\rho/\rho \\ dv = \rho d\rho, v = \rho^2/2 \end{bmatrix} = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho - \frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2} d\varphi = \pi e^2\left(3e^3 - 1\right).$$

4.1.4 Потрійний інтеграл

Нехай довільна функція $u = f(x, y, z)$ визначена і обмежена в замкненій обмеженій області G. Розіб'ємо область G довільним чином сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і об'єми яких дорівнюють $\Delta V_i, i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_i\right)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i, \zeta_i\right)\Delta V_i \qquad (7)$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по області G.

Нехай $d(G_i)$ – діаметр G_i.

Означення. Якщо інтегральна сума (7) при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i) \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від способу розбиття області

G на частини G_i, ні від вибору в них точок P_i, то ця границя називається *потрійним інтегралом від функції* $f(x,y,z)$ по області G.

Таким чином, за означенням

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i, \qquad (8)$$

де функція $f(x,y,z)$ називається інтегрованою в області G, G – область інтегрування, x,y,z – змінні інтегрування, dV (або $dxdydz$) – елемент об'єму. Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір.

Геометричний зміст потрійного інтеграла. Якщо $f(x,y,z)\equiv 1$, $(x;y;z)\in G$, то потрійний інтеграл дорівнює об'єму V тіла G:

$$V = \iiint_G dx\,dy\,dz.$$

Фізичний зміст потрійного інтеграла. Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ у точці $(x;y;z)\in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint_G \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Зауважимо, що якщо $f(x,y,z)$ набуває від'ємних значень, то $f(x,y,z)$ можна вважати густиною електрики, розподіленої на G тобто ввести і від'ємні маси.

4.1.5 Обчислення потрійного інтеграла

Як і у випадку подвійних інтегралів, обчислення потрійних інтегралів зводять до обчислення повторних, тобто до інтегрування по кожній змінній окремо.

Нехай замкнена область G обмежена знизу і зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, де функції $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ визначені і неперервні в області D, яка є проекцією області G на площину Oxy, причому $z_1(x,y) < z_2(x,y), (x,y) \in D$. Із боків область G обмежена циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Кожна пряма, паралельна осі Oz, перетинає границю області G не більше ніж у двох точках (рис. 7).

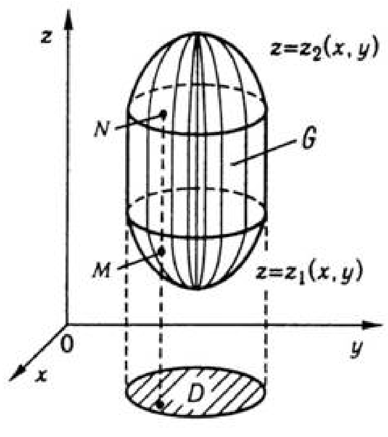


Рис.7

Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається *правильною в напрямі осі* Oz. Припустимо, що кожна пряма, яка проходить через кожну внутрішню точку $(x,y,0) \in D$ паралельно осі Oz, перетинає межу області G у точках M і N. Точку M назвемо *точкою входу в область* G, точку N – *точкою виходу з області* G, а їхні аплікати позначимо відповідно через $z_{вх}$ і $z_{вих}$. Тоді $z_{вх} = z_1(x,y), z_{вих} = z_2(x,y)$, і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ має місце формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (9)$$

Тут у внутрішньому інтегралі x, y вважають сталими. Після його обчислення отримаємо вираз, залежний тільки від x, y.

Якщо, крім цього, область D є правильною в напрямі осі Oy, тобто $D = \{(x,y) | a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, де $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a,b]$, то

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (10)$$

Якщо область D правильна в напрямі осі Ox, тобто $D = \{(x,y) | c \le y \le d, \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y)\}$, де $\phi_1(y), \phi_2(y)$ – неперервні функції на відрізку $[c,d]$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (11)$$

Приклад 1. Обчислити $\iiint\limits_G zdxdydz$, де область G визначається нерівностями $0 \le x \le 1/2$, $x \le y \le 2x$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Розв'язання.

$$\iiint\limits_G zdxdydz = \int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_x^{2x} \left(1-x^2-y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} \left[y - yx^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} \left(2x - 2x^3 - \frac{8}{3}x^3 - x + x^3 + \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} \left(x - \frac{10}{3}x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^4 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16} \right) = \frac{7}{192}.$$

Приклад 2. Обчислити $\iiint\limits_G x^2 yzdxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z - 2 = 0.$

Розв'язання. Область G обмежена зверху площиною $z = 2 - x - y$, а знизу площиною $z = 0$. Проекцією тіла на площину xOy служить трикутник, утворений прямими $x = 0,\ y = 0,\ y = 2 - x.$ Звідки,

$$\iiint\limits_G x^2 yzdxdydz = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{2-x} ydy \int\limits_0^{2-x-y} zdz = \int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{2-x} y\frac{\left(2-x-y\right)^2}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2 \left[\frac{\left(2-x\right)^4}{2} + \frac{\left(2-x\right)^4}{4} - \frac{2\left(2-x\right)^4}{3} \right] dx = \frac{1}{24}\int\limits_0^2 x^2\left(2-x\right)^4 dx = \frac{16}{315}.$$

4.2. Криволінійні інтеграли

Література: [2, гл.XII, п. 1-2], [3, гл. XV, п.1-4], [5, гл.II, п.1-4]

4.2.1 Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай на площині Oxy розміщена деяка крива AB, гладка або кусково-гладка (рис.8), і припустимо, що функція $z = f\left(x, y\right)$ визначена і обмежена на кривій AB.

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}\,A_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i\left(\xi_i;\eta_i\right),\quad i = 1,2,\ldots,n$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right)\Delta l_i, \qquad (12)$$

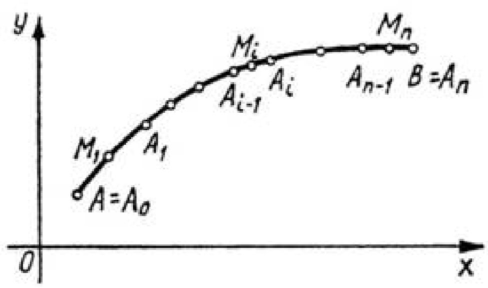


Рис. 8

де Δl_i - довжина дуги $A_{i-1}\,A_i$. Сума (12) називається *інтегральною сумою* для функції $f\left(x, y\right)$ по кривій AB.

Означення. Якщо інтегральна сума (12) при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f\left(x, y\right)$ по кривій AB і позначають $\int\limits_{AB} f\left(x, y\right)dl$.

Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{AB} f\left(x, y\right)dl = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right)\Delta l_i \ . \qquad (13)$$

Якщо границя (13) існує, то функція $f\left(x, y\right)$ називається інтегрованою на кривій AB, крива AB – контуром інтегрування, A – початковою, а B – кінцевою точками інтегрування.

Криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтеграла за формулою:

$$\int\limits_{AB} f\left(x, y\right)dl = \int\limits_{0}^{L} f\left(x\left(l\right), y\left(l\right)\right)dl\,, \qquad (14)$$

де L – довжина кривої AB. Формула (14) не тільки зводить криволінійний інтеграл до звичайного, але й доводить існування криволінійного інтеграла для функції $f(x,y)$, яка неперервна на кривій AB.

Хоча криволінійний інтеграл першого роду безпосередньо зводиться до визначеного, між цими поняттями існує наступна відмінність. В інтегральній сумі (12) величини Δl_i обов'язково додатні, незалежно від того, яку точку кривої AB ми рахуємо початковою, а яку – кінцевою, тобто

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{BA} f(x,y)\,dl,$$

у той час, як визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при перестановці меж інтегрування змінює знак.

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при $f(x) \geq 0$ представляє собою площу криволінійної трапеції , то криволінійний інтеграл $\int_{AB} f(x,y)\,dl$ при $f(x,y) \geq 0$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x,y)$ і паралельні осі Oz, а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy.

Якщо крива AB – матеріальна, тобто вздовж кривої розподілено з лінійною густиною $\gamma(x,y)$ деяку масу m, то

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i = \int_{AB} \gamma(x,y)\,dl,$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta]$, де $x(t)$ і $y(t)$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ функції, а $f(x,y)$ – функція неперервна вздовж цієї кривої, причому для визначеності будемо рахувати, що точці A відповідає значення $t = \alpha$, точці B – значення $t = \beta$. Тоді для будь-якої точки $M(x;y)$ кривої AB довжину l дуги AM можна розглядати як функцію параметра t, $l = l(t)$ і обчислити її за формулою:

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt,$$

звідки за правилом диференціювання інтеграла по верхній межі знаходимо

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt, \tag{15}$$

Здійснивши заміну змінної у визначеному інтегралі рівності (14), з урахуванням (15), одержимо

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \tag{16}$$

Зокрема, якщо крива AB явно задана одним із рівнянь $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, або $x = x(y)$, $y \in [c;d]$, і відповідно функція $y(x)$ або $x(y)$ разом із похідною $y'(x)$ або $x'(y)$ неперервні відповідно на відрізках $[a;b]$ або $[c;d]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{a}^{b} f\left(x, y(x)\right) \sqrt{1 + \left(y'(t)\right)^2}\, dx. \tag{17}$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{c}^{d} f\left(x(y), y\right) \sqrt{1 + \left(x'(t)\right)^2}\, dy. \tag{18}$$

Якщо крива AB задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi,$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi. \tag{19}$$

Поширимо поняття криволінійних інтегралів першого роду на просторові криві.

Розглянемо просторову криву AB, яку задано параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha;\beta]$, де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, а функція

$f(x,y,z)$ визначена і неперервна вздовж кривої AB. Внаслідок неперервності $x'(t), y'(t), z'(t)$ крива AB є гладкою і її нескінченно малі дуги еквівалентні до своїх хорд. Елементарну дугу dl з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами dx, dy, dz. Тоді

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

Таким чином, має місце повна аналогія з формулою (16). Тоді ясно, що

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \qquad (20)$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_{L}(x-y)dS$, де L- відрізок прямої від т.А(0,0) до т.В(4,3).

Розв'язання. Рівняння прямої має вигляд $y = kx + b$. Підставимо координати т.А і т.В в це рівняння. Отримаємо:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 0 + b \\ 3 = k \cdot 4 + b. \end{cases}$$

Звідки, рівняння прямої АВ має вигляд $y = \frac{3}{4}x$. Знаходимо $y' = \frac{3}{4}$. Тоді отримаємо

$$\int\limits_{L}(x-y)dS = \int\limits_{0}^{4}\left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1 + \frac{9}{16}}dx = \frac{5}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x^2}{8}\right]_0^4 = \frac{5}{4}(8-6) = \frac{5}{2}.$$

Приклад 2. Знайти масу M дуги кривої $x = t,\ y = t^2/2,\ z = t^3/3$, $(0 \le t \le 1)$, лінійна щільність якої змінюється по закону $\gamma = \sqrt{2y}$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $x' = 1,\ y' = t,\ z' = t^2$. Тоді маємо

$$M=\int_L \sqrt{2y}dS=\int_0^1 \sqrt{2\frac{1}{2}t^2}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}dt=\int_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\;d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=\ \frac{1}{2}[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)]\Big|_0^1=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Приклад 3. Обчислити $\int_L \frac{dS}{x^2+y^2}$, якщо крива L задається рівняннями $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$, де $0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання. Знаходимо похідні $x'=-a\sin t,\ y'=a\cos t$. Маємо

$$\int_L \frac{dS}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2}\cdot adt=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}dt=\frac{t}{a}\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{a}.$$

4.2.2 Криволінійний інтеграл другого роду

Нехай функція $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) визначена і обмежена на гладкій чи кусково-гладкій кривій AB у площині Oxy. На відміну від інтегралів першого роду крива AB розглядається як напрямна лінія. Нехай A – її початок, а B – кінець. Розіб'ємо AB точками $A=A_0,A_1,\dots,A_{i-1},A_i,\dots,A_n=B$ на n довільних частин в напрямі від A до B. Як і при означенні інтеграла першого роду, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо по точці $M_i(\xi_i;\eta_i)$, $i=1,2,\dots,n$, і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\quad\left(\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right),\tag{21}$$

де Δx_i (Δy_i) – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox (на вісь Oy) (рис. 9).

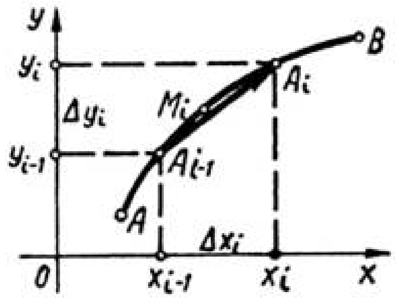


Рис. 9

Сума (21) називається інтегральною сумою для функції $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по координаті x (y) вздовж кривої AB.

Означення. Якщо інтегральна сума (21) при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i \to 0$ має скінченну границю I, яка не залежить ні від розбиття кривої AB, ні від вибору точок M_i, то цю границю називають *криволінійним інтегралом від функції* $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) *по координаті* x (y) вздовж кривої AB.

Таким чином,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

$$\left(\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right).$$

Суму

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$$

називають криволінійним інтегралом по координатах або *криволінійним інтегралом другого роду* від функцій P і Q по кривій AB.

Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла.

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t\in[\alpha;\beta],$$

де $x(t), y(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$ разом зі своїми похідними $x'(t), y'(t)$ функції, причому точці A кривої відповідає значення $t=\alpha$, точці B – значення $t=\beta$, $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \ne 0$. Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні вздовж кривої AB. Тоді маємо формули:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt,$$
$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt, \tag{22}$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)dt, \tag{23}$$

що зводять криволінійні інтеграли до визначених інтегралів.

Якщо криву AB явно задано рівнянням $y = y(x)$, де функція $y(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ разом із своєю похідною $y'(x)$, або рівнянням $x = x(y)$, де функція $x(y)$ неперервна на відрізку $[c,d]$ разом із своєю похідною $x'(y)$, і вздовж цієї кривої неперервна функція $f(x,y)$, то з формули (23) маємо

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx, \tag{24}$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$\int_{c}^{d} \big(P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)\big)dy, \tag{25}$$

що також зводять криволінійні інтеграли до визначених інтегралів.

Поширимо поняття криволінійних інтегралів другого роду на просторові криві. Розглянемо просторову криву AB, яку задано параметричними рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha;\beta],$$

де функції $x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому зміні параметра $t \in [\alpha;\beta]$ відповідає рух по кривій AB від A до B.

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначені і неперервні вздовж кривої AB. Тоді справедлива формула

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\Big)+ \\ +Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t))dt. \tag{26}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{L} xydx+\left(x^2+y\right)dy$, якщо L: 1) дуга параболи $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ між точками $A(0;1)$ і $B(2;3)$; 2) відрізок прямої AB.

Розв'язання. 1) Зведемо обчислення криволінійного інтеграла до визначеного, покладаючи $y=\dfrac{x^2}{2}+1$, $y'=x$, $0\le x\le 2$. Тоді за формулою (24) маємо

$$\int\limits_{L} xydx+\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_{0}^{2}\left(x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)+\left(x^2+\frac{x^2}{2}+1\right)x\right)dx=\int\limits_{0}^{2}\left(2x^3+2x\right)dx=12.$$

2) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

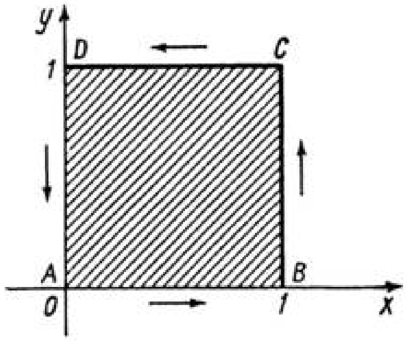
$\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, тобто $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}$ звідки $y=x+1$.

Таким чином, покладаючи $y=x+1$, $y'=1$, $0\le x\le 2$, за формулою (24) маємо

$$\int\limits_{L} xydx+\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_{0}^{2}\left(x(x+1)+x^2+x+1\right)dx=\int\limits_{0}^{2}\left(2x^2+2x+1\right)dx=\frac{34}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L}(x+y)dy$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x=0, y=0, x=1, y=1$ (рис.10).

Розв'язання. На рис.10 додатний напрям обходу контуру L позначений стрілками. Розбиваючи весь контур інтегрування на частини, маємо



$$\oint_L (x+y)dy = \int_{AB} (x+y)dy + \int_{BC} (x+y)dy +$$
$$+ \int_{CD} (x+y)dy + \int_{DA} (x+y)dy.$$

Інтеграли по AB і CD дорівнюють нулю, оскільки $dy = 0$. Тому обчислимо другий і четвертий інтеграли в останній рівності.

Рис. 10

$$\int_{BC} (x+y)\,dy = \int_0^1 (1+y)dy = \frac{3}{2}, \quad \int_{DA} (x+y)\,dy = \int_0^1 (0+y)dy = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, маємо

$$\oint_L (x+y)dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} (x+y)dx + 2zdy + xydz$, якщо AB – дуга кривої $x = t,\ y = t^2,\ z = 3 - t$, причому точці A відповідає $t = 1$, а точці B відповідає $t = 2$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $x' = 1,\ y' = 2t,\ z' = -1.$ За формулою (26) маємо

$$\int_{AB} (x+y)dx + 2zdy + xydz = \int_1^2 \left(t + t^2 + 2(3-t)2t - t^3\right)dt = 8\frac{3}{4}.$$

5. Питання для самоперевірки

1. Поняття подвійного інтеграла, його геометричний та механічний зміст.
2. Властивості подвійного інтеграла.
3. Формули обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах.
4. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.
5. Поняття потрійного інтеграла, його геометричний та механічний зміст.
6. Властивості потрійного інтеграла.
7. Обчислення потрійних інтегралів у різних системах координат.
8. Поняття криволінійного інтегралу I роду.
9. Геометричний і фізичний зміст криволінійного інтегралу I роду.
10. Властивості та обчислення криволінійного інтегралу I роду.
11. Поняття криволінійного інтегралу II роду.
12. Геометричний і фізичний зміст криволінійного інтегралу II роду.
13. Властивості та обчислення криволінійного інтегралу II роду.
14. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

6. Типові завдання для модульного контролю

Варіант №1

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_L \left(2y - 6xy^3\right)dx + \left(2x - 9x^2y^2\right)dy$; $\quad L: \quad x = \dfrac{1}{2}y^2$ від т.O (0; 0) до т.A (2; 2).

Варіант №2

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} \left(\dfrac{x}{y} - 2\right)dx - x^2y\,dy$, де AB – ломана ACB, A (2; 1), C (2; 4), B (3; 4).

Варіант №3

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} xy\,dx + \dfrac{y}{x}dy$, де AB – ломана ACB, A (1; 2), C (5; 2), B (5; 4).

Варіант №4

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f\,dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right) dx\,dy$; $\quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,y\,dx - x^2\,dy$; $y = \dfrac{1}{x}$ від т.A (1/2; 2) до т.B (1/3; 3).

Варіант №5

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\,dy$.

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(27\,x^2\,y^2 + 48\,x^3 y^3\right) dx\,dy$;

$D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} \left(x - 2\,y\right) dx - \dfrac{x}{y}\,dy$, де AB: $y = x^3$ від A (1; 1) до B (2;4).

Варіант №6

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f\,dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(18\,x^2\,y^2 + 32\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)^3 ds$; $L: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$.

Варіант №7

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(18\,x^2\,y^2 + 32\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,dy - \left(y - 1\right) dx$; $AB: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, від А (1; 0) до В(0;1).

Варіант №8

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(27\,x^2\,y^2 + 48\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D: x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити $\int\limits_L y\,ds$; $L:\ y^2 = 2\,p\,x$, відсічена параболою $x^2 = 2\,p\,y$.

Варіант №9

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(4\,x\,y + 3\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} (1+x)\,dy + y\,dx$; $AB:\ \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, від A(0; 2) до B(2; 0).

Варіант №10

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2-2}}^{0} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(12\,x\,y + 9\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити $\int\limits_{AB} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,ds$; $AB:\ y = 2\,x$, від A (0; 0) до B (1; 2).

Варіант №11

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\,dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(8\,x\,y + 9\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_L -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (π;2π).

Варіант №12

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(24\,x\,y + 18\,x^2 y^2\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_L x\,y\,dx + (y - x)\,dy$ вздовж відрізка, з'єднуючого точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №13

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\, dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\, dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(12\, x\, y + 27\, x^2 y^2\right) dx\, dy$; $D:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\, y\, dx + (y - x) dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №14

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\, dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\, dy$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(8\, x\, y + 18\, x^2 y^2\right) dx\, dy$; $D:\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\, y\, dx + (y - x) dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №15

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\, dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\, dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(\frac{4}{5} x\, y + \frac{9}{11} x^2 y^2\right) dx\, dy$; $D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж шляху L

$\int\limits_{L} x\, y\, dx + (y - x) dy$ вздовж дуги кубічної параболи $y = x^3$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №16

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\, dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\, dx$

2. Обчислити $\iint\limits_{D} \left(\frac{4}{5} x\, y + 9\, x^2 y^2\right) dx\, dy$; $D:\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L 2\,x\,y\,dx + x^2\,dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №17

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(24\,x\,y - 48\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2\,x + y)\,dx - x^3\,dy$ вздовж дуги параболи $y = x^2$, з'єднуючої точки (0; 0) та (1; 1).

Варіант №18

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} f\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f\,dx$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(6\,x\,y + 24\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$ вздовж еліпса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\quad 0 \le t \le 2\,\pi.$$

Варіант №19

1. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy$

2. Обчислити $\iint\limits_D \left(4\,x\,y + 16\,x^3 y^3\right) dx\,dy$; $D:\ x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y\,dx + x\,dy$ вздовж дуги кола

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Література

Основна:

1. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Техніка, 2000.- 592с.
2. Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим В.М. Вища математика. Спеціальні розділи. Кн. 1, 2 – К.: Либідь, 2003.- 368с.
3. Пискунов. Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. 2. М.: «Наука», 1976. -С.160-233

Додаткова:

4. Кононюк Ф.Ю. Вища математика: модульна технологія навчання. Кн. 2 -К.: «Вища школа»,2009.- 784с.
5. Данко П. Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. т.2. М.: «Высшая школа», 1986.-С. 6-66
6. Кудрявцев В. А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: «Наука»,1985.- 575с.

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання модульних робот
з дисципліни “Вища математика“
розділ «Кратні та криволінійні інтеграли»
для студентів III курсу (інтегровані) очної форми навчання

Укладачи: Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц.,
Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н. доц.
Свинаренко А.А., д.ф.-м.н., проф.
Глушков О.В., проф.

Відп. ред: Глушков О.В., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета