МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи студентів і практичних робіт

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

розділ «Аналіз функцій багатьох змінних»

для студентів ІІІ курсу (інтегровані)

Напрям підготовки: комп'ютерні науки

Одеса 2015

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів та практичних робіт з розділу “Аналіз функцій багатьох змінних” для студентів ІІІ курсу (інтегровані) денної форми навчання, напряму підготовки - комп’ютерні науки

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Свинаренко А.А., д.ф.-м.н., проф., Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц., Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н., доц. кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки, гідрологія, метеорологія, екологія тощо, яка спрямована на вивчення основних положень диференціального і інтегрального числення, функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики, теорії імовірності та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Вона відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

«Аналіз функцій багатьох змінних» – одна з важливих галузей математичного аналізу, яка використовується у фізиці, механіці, електротехніці та інших науках під час створення математичних моделей та при розв'язанні різноманітних задач.

Мета вивчення розділу - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу поданого розділу, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання розділу «Аналіз функцій багатьох змінних» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення цього розділу потребує від студентів знання таких розділів вищої математики, як диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної, а також лінійної алгебри.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даного розділу. Після вивчення розділу студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою; вміти – влучно і стисло виражати математичну думку під час розв'язання конкретних задач, самостійно розв'язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

1. Програма розділу «Аналіз функцій багатьох змінних»

Простір. Евклідів простір. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення та геометрична інтерпретація функції 2-х змінних. Границя функції. Неперервні функції. Частинні похідні функції. Диференційованість функції в точці. Повний диференціал функції. Диференційованість складної та неявної функцій. Частинні похідні та диференціали вищого порядку. Поняття скалярного поля. Лінії та поверхні рівня. Похідна за напрямком. Градієнт і його фізичний зміст. Формула Тейлора. Дотична площина та нормаль до поверхні. Екстремум функції багатьох змінних (необхідна і достатня умови).

2. Базові знання та вміння

Після вивчення розділу «Аналіз функцій багатьох змінних» студент повинен:

засвоїти базові знання: основних понять та властивостей функцій багатьох змінних, основних теорем диференціального числення функцій багатьох змінних, властивостей основних характеристик скалярного поля, застосування частинних похідних;

вміти: визначати та зображувати на рисунку область визначення функцій двох змінних, знаходити частинні похідні першого та вищих порядків, а також відповідні диференціали, похідну за напрямком та градієнт функції, складати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, знаходити екстремуми функції двох змінних; правильно аналізувати отримані результати математичних обчислень.

3. Загальні рекомендації студенту по вивченню курсу.

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручниках, розв’язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною.

Останнім етапом завершення вивчення розділу «Аналіз функцій багатьох змінних» є написання модульної контрольної роботи, що оцінюється згідно з робочою програмою. Вся робота повинна виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що даний розділ є засвоєним студентом.

4. Методичні вказівки

4.1. Основні поняття теорії функцій багатьох змінних

Література: [1, гл.8, п. 1-2], [2, розд. 4, п.1], [3, гл.8, п.1]

Якщо кожній парі (x, y) значень двох, незалежних один від одного змінних величин x і y, з деякої області їх зміни D, відповідає певне значення величини z, тоді $z = f(x, y)$ є *функція двох незалежних змінних* x і y, визначена в області D.

Область визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$ - це сукупність точок площини *xOy*, у яких функція має дійсне значення. Тобто, це уся площина або її частина (декілька частин), що обмежена лініями (межами), які можуть належати або не належати до області визначення.

Визначення функції двох змінних легко узагальнити на випадок трьох і більше змінних.

Якщо кожній парі розглянутої сукупності значень змінних x, y, z,…,t відповідає певне значення змінної u, то u називають *функцією незалежних змінних* x, y, z,…,t. Також як і для двох змінних, можна говорити про область визначення функції трьох і більше змінних. Так, наприклад, для функції трьох змінних областю визначення є деяка сукупність трійок чисел (x, y, z). Зауважимо тут же, що кожна трійка чисел задає деяку точку $M(x, y, z)$ в просторі *Oxyz*. Отже, областю визначення функції трьох змінних є деяка сукупність точок простору.

Приклад 1. Знайти і зобразити на рисунку область визначення функції $z = \sqrt{x} - \sqrt{x + y}$.

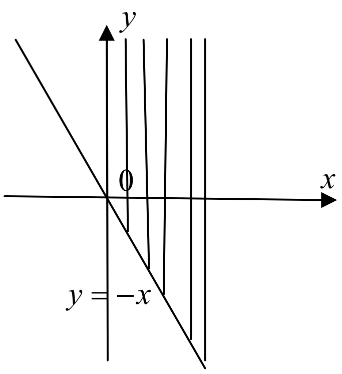

Рис.1

Функція z приймає дійсні значення за умовами:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge -x. \end{cases}$$

Межі області визначення визначаються рівняннями: x=0 та y=-x. Таким чином, шукана область - частина площини в середині кута, що утворений прямими x=0 та y=-x (див. рис.1).

Приклад 2. Знайти і зобразити на рисунку область визначення функції $z = \ln\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Функція z приймає дійсні значення за умовами:

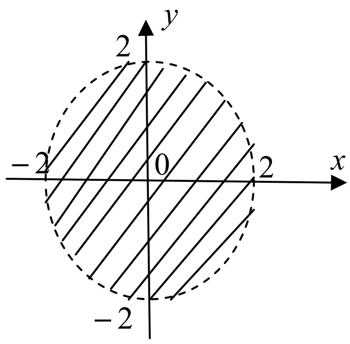

Рис.2

$4 - x^2 - y^2 > 0.$

Звідки отримаємо $x^2 + y^2 < 4$.

Межа області визначення визначається рівнянням: $x^2 + y^2 = 2^2$. Це є рівняння окружності з центром у точці $O(0,0)$ та радіусом $R = 2$. Таким чином, шукана область - круг, обмежений лінією $x^2 + y^2 = 2^2$, не включаючи саму лінію (див. рис.2).

Число A називається *границею функції* $z = f(x, y)$ при прагненні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $r > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, для яких виконується нерівність $\overrightarrow{MM_0} < r$, має місце нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Якщо число A э границею функції $z = f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$то пишуть:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функції $z = f(x, y)$. Функція $z = f(x, y)$ називається *неперервною в точці* $M_0(x_0, y_0)$, якщо має місце рівність:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{1}$$

причому точка $M(x, y)$ прагне до точки $M_0(x_0, y_0)$ довільним чином, залишаючись в області визначення функції.

Якщо позначимо $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$, тоді рівність (1) можна переписати так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{2}$$

Помічаючи, далі, що вираз, що стоїть у квадратних дужках у рівності (2), є повний приріст функції Δz, рівність можна переписати у формі:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Функція, безперервна у кожній точці деякої області, називається *неперервною в області*.

4.2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Література: [1, гл.8, п. 5-12,16], [2, розд. 4, п.1-4], [3, гл.8]

Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ по x до приросту Δx при прагненні Δx до нуля. Частинна похідна по x від функції $z = f(x, y)$ позначається одним з символів:

$$z'_x\ ,\ f'_x(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким чином, за визначенням,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно *частинна похідна по* y від функції $z = f(x, y)$ визначається як границя відношення частинного приросту $\Delta_y z$ по y до приросту Δy при прагненні Δy до нуля. Частинна похідна по y від функції $z = f(x, y)$ позначається одним з символів:

$$z'_y\ ,\ f'_y(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Зауважимо, що $\Delta_x z$ обчислюється при незмінному y, а $\Delta_y z$ при незмінному x. Тоді можна визначення частинних похідних сформулювати так: *частинною похідною по* x від функції $z = f(x, y)$ називається похідна по x, яка обчислюється у припущенні, що у – стала; *частинною похідною по* у від функції $z = f(x, y)$ називається похідна по у, яка обчислюється у припущенні, що x – стала.

З цього визначення ясно, що правила обчислення частинних похідних співпадають з правилами обчислення похідної від функції однієї змінної, і тільки потребує кожний раз пам'ятати, по якій змінній береться похідна.

Якщо функція $z = f(x, y)$ має безперервні частинні похідні в точці $M_0(x_0, y_0)$, то вона диференціальна в цій точці і має повний диференціал:

$$d\,z = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{3}$$

Тобто *повний диференціал* функції дорівнює сумі добутків частинних похідних на диференціали відповідних незалежних змінних.

Диференціалами незалежних змінних x і y називаються прирости цих змінних, тобто Δx і Δy.

Нехай задана деяка складна функція $z = f(u,v)$, де u і v є функціями незалежних змінних x і y:

$$u = \varphi(x,y), v = \phi(x,y).$$

Частинні похідні від такої функції можна обчислити за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4)$$

Підставляючи частинні похідні (4) в вираз (3), отримаємо повний диференціал для складної функції:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Зробимо наступні перетворення в правій частині:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right). \qquad (5)$$

Але

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du, \quad \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv.$$

Тобто маємо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \qquad (6)$$

Порівнюючи (3) та (6), можна сказати, що вираз повного диференціалу функції декількох змінних має той самий вигляд, тобто форма диференціалу інваріантна, чи є u і v незалежними змінними або функціями незалежних змінних.

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$, взагалі кажучи, є функціями змінних x і y. Тому від них можна знову знаходити частинні похідні. Частинних похідних другого порядку від функції двох змінних чотири, так як кожну з функцій $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна диференціювати як по x, так і по y. Частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ означає, що функція $z = f(x,y)$ диференціюється послідовно два рази по x. Частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ означає, що функція $z = f(x,y)$ диференціюється спочатку по x, а потім результат диференціюється по *y*. Частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ означає, що функція $z = f(x, y)$ диференціюється послідовно два рази по *y*. Частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ означає, що функція $z = f(x, y)$ диференціюється спочатку по *y*, а потім по *x*.

Якщо функція $z = f(x, y)$ і її частині похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ визначені і неперервні в точці в $M(x, y)$ і в деякій її околиці, то в цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = arctg\,\frac{x+y}{x-y}$.

Шукаємо частинні похідні першого порядку, при цьому частинна похідна по x береться у припущенні, що y=const, а частинна похідна по y береться у припущенні, що x=const. Функцію z диференціюємо за правилом диференціювання складної функції, а її внутрішню функцію – за правилом диференціювання частки двох функцій.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{(x+y)'_x(x-y)-(x+y)(x-y)'_x}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{(x+y)'_y(x-y)-(x+y)(x-y)'_y}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал другого порядку d^2z функції $z = \cos^2(3x+2y)$.

Шукаємо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(3x+2y)(-\sin(3x+2y)) \cdot 3 = -3\sin(6x+4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos(3x+2y)(-\sin(3x+2y)) \cdot 2 = -2\sin(6x+4y);$$

Для отримання похідних другого порядку диференціюємо першу рівність по x, а другу — по y.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -3\cos(6x+4y)\cdot 6 = -18\cos(6x+4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\cos(6x+4y)\cdot 4 = -8\cos(6x+4y).$$

Щоб одержати змішану похідну, потрібно знайти частинну похідну по y від частинної похідної першого порядку по x, або навпаки, знайти частинну похідну по x від частинної похідної першого порядку по y. Результати збігаються по теоремі про незалежність частинних похідних від порядку диференціювання.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\cos(6x+4y)\cdot 4 = -12\cos(6x+4y).$$

Повний диференціал другого порядку обчислюється за формулою:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Підставляючи отримані частинні похідні другого порядку у формулу, маємо:

$$d^2 z = -18\cos(6x+4y)dx^2 - 24\cos(6x+4y)dxdy - 8\cos(6x+4y)dy^2.$$

4.3. Скалярне поле та його характеристики

Література: [1, гл.8, п. 14,15], [2, гл. 8, п.1,2]

Нехай дане скалярне поле $f = f(M)$. Оберемо в просторі, де задане це поле, деяку точку $M(x, y, z)$ й проведемо через неї який-небудь напрямок $\vec{l}$. Нехай точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ також перебуває на напрямку $\vec{l}$. Знайдемо приріст функції f при переході із точки M в точку M_1:

$$\Delta f = f(M_1) - f(M).$$

Розглянемо

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta f}{MM_1} = \lim_{M_1 \to M} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1}.$$

Якщо ця границя існує, то вона називається *похідною від функції f за напрямком $\vec{l}$* й позначається $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$. Якщо $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} > 0$, то функція в напрямку $\vec{l}$ зростає, якщо $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} < 0$, то функція в напрямку $\vec{l}$ спадає. Величина $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|$

характеризує швидкість зміни функції f в напрямку $\vec{l}$; чим більше $\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|$, тем швидше змінюється функція f в напрямку $\vec{l}$.

Поняття похідної за напрямком є узагальненням поняття частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$. Ці частинні похідні можна розглядати, як похідні від функції f за напрямком відповідних осей координат.

Нехай $cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси напрямку $\vec{l}$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ деяка фіксована точка на цьому напрямку. Тоді похідна від функції f в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямком $\vec{l}$ обчислюється за формулою:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma. \tag{7}$$

Градієнтом функції $f = f(x, y, z)$ називається вектор, що має своїми координатами частинні похідні цієї функції, тобто вектор

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \tag{8}$$

Тоді, з векторної алгебри, модуль градієнта функції обчислюється за формулою:

$$|gradf| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Напрямні косинуси градієнта:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{|gradf|}; \ \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{|gradf|}; \ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{|gradf|}.$$

Отже, $gradf$ є векторною величиною. Говорять, що скалярним полем f породжується векторне поле градієнта f.

Приклад 5. Знайти похідну функції $u=xy^2z^3$ у точці M(3;2;1) за напрямком вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо N(5;4;2).

Похідна за напрямком вектора $\vec{l}$ функції u(x,y,z) обчислюється за формулою (7).

Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$ та його напрямні косинуси:

$$\overrightarrow{MN} = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k};$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}; \ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}; \ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Обчислимо тепер значення частинних похідних функції u(x,y,z) у точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3;\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3;\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=4;\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=12;\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=36.$$

Підставимо отримані результати у формулу похідної за напрямком:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}\Big|_M=4\cdot\frac{2}{3}+12\cdot\frac{2}{3}+36\cdot\frac{1}{3}=22\frac{2}{3}.$$

Приклад 6. Знайти величину та напрямок градієнта функції $u=tgx-x+3\sin y-\sin^3 y+z+ctgz$ у точці М($\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$).

Знайдемо частинні похідні у точці М:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3\cos y-3\sin^2 y\cos y;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=1-\frac{1}{\sin^2 z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=2-1=1;\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=3\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8};\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=1-1=0.$$

Координати вектора градієнта $\overrightarrow{grad\ u}\Big|_M(1;\frac{3}{8};0)$.

Модуль (величина) градієнта дорівнює :

$$\left|\overrightarrow{gradu}\right|_M=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{73}}{8}.$$

Його напрямок визначають напрямні косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\frac{\sqrt{73}}{8}}=\frac{8}{\sqrt{73}};\cos\beta=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{73}}{8}}=\frac{3}{\sqrt{73}}:\cos\gamma=\frac{0}{\frac{\sqrt{73}}{8}}=0.$$

4.4. Застосування частинних похідних

Література: [1, гл.8, п. 16-18], [2, розд. 4, п.5], [3, гл.8, п.2], [5, гл.9, п.3]

Приклад 7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2y(2-x-y)$ у трикутнику, обмеженому лініями $x=0;\ y=0;\ x+y=6.$

Знаходимо стаціонарні точки функції, дорівнюючи частинні похідні до нуля.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy(4-3x-2y)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2(2-x-2y)=0.$$

У середині області $x>0,\ y>0$ і на xy ми скорочуємо, тоді :

$$\begin{cases}4-3x-2y=0\\2-x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y=4\\x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$x=1;\ y=\frac{1}{2}$ — координати стаціонарної точки $P(1,\ 1/2)$.

Знайдемо значення функції в точці P:

$$z(1,\frac{1}{2})=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2-1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Для перебування найбільшого і найменшого значення функції в області потрібно досліджувати функцію на межах області. У нашому випадку на межах $x=0$, $y=0$ функція дорівнює нулю ($z=0$).

Знайдемо найбільше і найменше значення функції на стороні $x+y=6$. На цій стороні

$$y=6-x,\ 0\le x\le 6;$$

$$z=x^2(6-x)(2-x-6+x)=-4x^2(6-x).$$

На кінцях інтервалу $x=0$ і $x=6$ значення функції $z(0)=z(6)$. Знайдемо стаціонарні точки функції на цій лінії:

$$z'=-48x+12x^2=0;\ 12x(x-4)=0;\ x_1=0,\ x_2=4.$$

Залишається $x=4$, тому що $x=0$ - гранична точка нами вже розглянута. $z(4)=-4\cdot16\cdot(6-4)=-128;$ при $x=4;$ $y=2$, тобто $z(4;\ 2)=-128$.

Отже, щоб знайти найбільше і найменше значення функції, треба порівняти значення функції у стаціонарній точці, на сторонах трикутника та у його вершинах, тобто :

$z(1;\ 1/2)=1/4$ – значення в точці P;

$z=0$ – на сторонах $x=0$, $y=0$ та у вершинах трикутника;

$z=-128$ – у точці P_1 (4; 2) на стороні $x+y=6$.

Отже, найбільше значення $z=1/4$ функція має у середині області в точці P(1; $1/2$), а найменше значення $z=-128$ функція має в точці $P_1(4;\ 2)$, що лежить на лінії $x+y=6$.

Приклад 8. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, що є графіком функції $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, у точці $M(1;1;1)$.

Дотичною площиною до поверхні у її звичайній точці M називається площина, що містить у собі дотичні прямі до усіх кривих, які можуть бути проведені на поверхні через точку M.

Нормаллю до поверхні у точці M називається пряма лінія, що проходить через M перпендикулярно до дотичної площини у цій точці. Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, і у точці M частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ кінцеві та не дорівнюють нулю одночасно, то рівняння дотичної площини до поверхні у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ має вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0)=0;$$

а рівняння нормалі до поверхні у цієї ж точці має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{(y-y_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{(z-z_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

За умовою задачі складемо функцію F:

$$F(x,y,z)=x^2-2xy+y^2-x+2y-z=0.$$

Знайдемо частинні похідні у точці M:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M=(2x-2y-1)_M=-1;\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M=(-2x+2y+2)_M=2;\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M=-1.$$

Підставимо у рівняння дотичної площини та нормалі. Тоді рівняння дотичної площини буде

$$-1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)-1\cdot(z-1)=0 \quad \text{або} \quad x-2y+z=0.$$

Рівняння нормалі буде

$$\frac{(x-1)}{-1}=\frac{(y-1)}{2}=\frac{(z-1)}{-1}.$$

Приклад 9. Знайти екстремуми функції

$$z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right).$$

Якщо диференційована функція $z=f(x,y)$ досягає екстремуму у точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то її частинні похідні першого порядку у цій точці дорівнюють нулю (необхідна умова екстремуму):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M=0;\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M=0.$$

Точки, у яких частинні похідні дорівнюють нулю одночасно, називають *стаціонарними точками.* Нехай M_0– стаціонарна точка функції $z=f(x,y)$. Складемо визначник другого порядку з частинних похідних другого порядку функції $z=f(x,y)$, що обчислені у стаціонарній точці M_0.

$$\Delta=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}\right|_{M_0}.$$

Якщо $\Delta<0$, то екстремуму у цій точці немає; $\Delta=0$, то нічого сказати не можна, потрібне додаткове дослідження; $\Delta>0$, то екстремум є, при чому: якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ або $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$, то це мінімум; якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ або $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, то це максимум (достатня умова екстремуму).

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

За необхідною умовою екстремуму стаціонарні точки знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases}-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0;\\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0.\end{cases} \textit{або} \begin{cases}8x+y=188;\\ x+6y=141.\end{cases}$$

звідки x=21; y=20, тобто стаціонарна точка $M_0(21;20)$.

Знайдемо значення других похідних у точці M :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2}{3};\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{2};\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{12}.$$

Складемо визначник $\Delta|_M=\begin{vmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0.$

Згідно з достатньою умовою екстремуму екстремум у точці $M_0(20;21)$ є, при чому це максимум, оскільки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0;\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0; \quad z_{max}=282.$$

5. Питання для самоперевірки

1.Що називається функцією багатьох змінних?
2. Яка геометрична інтерпретація області визначення та графіка функції двох змінних?
3. Що називається границею функції двох змінних?
4. Яка функція є неперервною?
5. Які означення частинного та повного приросту функції?
6. Що називається частинними похідними функції багатьох змінних першого та другого порядку?
7. Що таке повний диференціал функції багатьох змінних першого та другого порядку, які його властивості?
8. Що є скалярним полем, які його приклади?
9. Що таке похідна за напрямком, її обчислення через частинні похідні та фізичний зміст?
10. Поняття градієнта скалярного поля, зміст його модуля та напрямку? Яка формула обчислення градієнта?
11. Який вигляд має формула Тейлора для функції двох змінних?
12. Що називається дотичною площини до поверхні у даній точці? Рівняння цієї площини.
13. Яке рівняння нормалі до поверхні у даній точці?
14. Які необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?

6. Типові завдання для модульного контролю

Варіант 1

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^3+3x^2y+5xy^2-y^3$.
4. $u=\mathrm{arctg}(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); N(1;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №2

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції: $z=\arcsin\frac{y}{x}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=5x^4-6x^2y+10xy^2-3$.
4. $u=\ln(x^2+3xy+4z^2x)$; M(-1;0;1); N(2;1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №3

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=x\cdot\sin(x+y)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=6x^5y-4x^2y^2+10xy$.
4. $u=xyz$; M(2;1;1); N(0;-1;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №4

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\frac{\cos x^2}{y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=6x^3y^2-4x\sin y+4$.
4. $u=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}$; M(-1;0;1); N(5;3;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M: $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №5

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції
   $z = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$.

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = y^{\ln x}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=6x^2y-3xy+10x^3y^3+5$.
4. $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$; M(1;1;1); N(3;2;3); Знайти похідну за напрямком у

точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №6

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції
   $z=\ln(-x-y)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \arcsin(xy)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^2y^{3-}3xy+10$.
4. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); N(3;6;5); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №7

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції
   $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = tg\,\frac{x^2}{y}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=5x^2y-6xy+10x^5y^2+4$.
4. $u=\ln(x^2+y^2+2xz^3)$; M(1;-1;2); N(0;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №8

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції
   $z = \arcsin\frac{y-1}{x}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \ln(x + y^2)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=6x^3y^2-5xy+10y^2$.
4. $u=\ln(x^3y+xy^2-4z^2y)$; M(0;1;-1); N(1;1;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №9

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=3y^4x-4y^2x^3+2xy-y$.

4. $u=arctg(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); N(1;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №10

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln xy$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\sin^2(ax+by)$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=x^3+12x^2y+3xy^2-2y^3x^3-8$.

4. $u=\ln(x^2+3xy+4z^2x)$; M(-1;0;1); N(2;1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №11

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x+y}{x}}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=14x^3-2x^2y^3+5xy^2-1$.

4. $u=xyz$; M(2;1;1); N(0;-1;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №12

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\arcsin\left(x^2+y^2-5\right)$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=xy+\dfrac{x}{y}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4y^2+3x^2y-5x^4y^2+2y^3$.

4. $u=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}$; M(-1;0;1); N(5;3;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №13

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = x + \arcsin y$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^5y^2+3xy^3+5x^4y^2-2y$.
4. $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; M(1;1;1); N(3;2;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №14

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln\left(x^2 + y\right)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=3x^2y+y^2-y^3x^5+x$.
4. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); N(3;6;5); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №15

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{4x - y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=2x+3y^2+3x^2y^2-2xy$.
4. $u=\ln(x^2+y^2+2xz^3)$; M(1;-1;2); N(0;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №16

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \arcsin(1 - y)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \sqrt{2xy + y^3}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=24x+3y-5xy^5-y^4$.
4. $u=\ln(x^3y+xy^2-4z^2y)$; M(0;1;-1); N(1;1;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$.

Варіант №17

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln\left(x - y\right)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \dfrac{x}{y^2}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=y^2+3x^2y^3+6xy^2-2y$.
4. $u=\mathrm{arctg}(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}u\big|_M$.

Варіант №18

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \arcsin\dfrac{x^2 + y^2}{4}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = e^{3x-y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x+2xy^5+x^3y^2-1$.
4. $u=\ln(x^2+3xy+4z^2x)$;M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M:$\mathrm{grad}u\big|_M$.

Варіант №19

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=3xy^3 -2x^4y^2 +2y^3 +3$.
4. $u=xyz$; M(2;1;1); Знайти градієнт функції у точці M : $\mathrm{grad}u\big|_M$.

Варіант №20

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{x^2 + y^2 -16}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = x^m y^n$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=24-2xy^6+5y^2-x^3$.
4. $u=\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}$; M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}u\big|_M$.

Варіант №21

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=12xy-3x^4y^5+7y^2-2xy+1$.
4. $u=\arcsin\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; M(1;1;1);Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}u\,|_M$

Варіант №22

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=x^2+2xy-5y^3x^2+8$.
4. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); Знайти градієнт функції у точці M : $\mathrm{grad}u\,|_M$.

Варіант №23

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції; $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=x\cdot\sin(x+y)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=2x\cos y-3y^2\sin x+5y^3$.
4. $u=\ln(x^2+y^2+2xz^3)$; M(1;-1;2); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}u\,|_{M.}$

Варіант №24

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=x^2+2y^3x-2+x^5y^7$.
4. $u=\ln(x^3y+xy^2-4z^2y)$;M(0;1;-1);Знайти градієнт функції у точці M:$\mathrm{grad}u\,|_M$.

Варіант №25

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=y^{\ln x}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^2y^2+2xy-5xy^3+1$.
4. $u=\mathrm{arctg}(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}u\,|_M$.

Варіант №26

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln(-x-y)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\arcsin(xy)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^3+2x^2y^6+5x^4y^2-2y^2$.
4. $u=\ln(x^2+3xy+4z^2x)$; M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}u\,|_{M.}$

Варіант №27

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=tg\,\dfrac{x^2}{y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=x^2y+3xy^7+2xy-3x$.
4. $u=xyz$; M(2;1;1); Знайти градієнт функції у точці M : $\mathrm{grad}\ u\,|_M$.

Варіант №28

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z=\ln\left(x+y^2\right)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=\cos x\cdot y^3-4y^2+7xy+5$.
4. $u=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}$; M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}\ u\,|_M$.

Перелік навчальної літератури

Основна література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1 М.: Наука, 1978.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1. – М.: “Высшая школа”, 1986.
3. Крепак В.М. Короткий курс вищої математики. К.: УМК ВО, 1990.
4. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій.Ч.1. –Одеса, 2013.

Додаткова література

5. Фихтенгольц В.М. Основы математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1964.
6. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Т.1. – М.: Наука, 1986.

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання модульних робот
з дисципліни “Вища математика“
розділ «Аналіз функцій багатьох змінних»
для студентів III курсу (інтегровані) очної форми навчання

Укладачі: Глушков О.В., проф.
Свинаренко А.А., д.ф.-м.н., проф.
Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц.,
Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н. доц.

Відп. ред: Глушков О.В., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета