МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський державний екологічний університет

Гончарова Л.Д.,
Школьний Є.П.

МЕТОДИ ОБРОБКИ ТА АНАЛІЗУ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ (ЗБІРНИК ЗАДАЧ І ВПРАВ)

Навчальний посібник

Р е к о м е н д о в а н о
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
та аспірантів гідрометеорологічного
та екологічного напрямків навчання
(Лист № 1.4/18-Г-689 від 08.08.2006 р.)

Одеса
“Екологія”
2007

ББК 26.23
Г 65

УДК 551.501

Навчальний посібник є збірником задач і вправ, який містить основні розділи по статистичній обробці гідрометеорологічної інформації. Велика увага приділяється статистичному оцінюванню параметрів розподілу гідрометеорологічних величин, їх апроксимації відомими теоретичними законами; вирішуються задачі з використанням кореляційного та спектрального аналізів; наводяться алгоритми дослідження нестаціонарних часових рядів гідрометеорологічних величин за допомогою інтегрального перетворення Фур'є та застосування до них ковзного осереднення.

Навчальний посібник розрахований на студентів, магістрів, аспірантів гідрометеорологічних та екологічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також фахівців – гідрометеорологів.

Р е ц е н з е н т и:
д-р геогр. наук, проф. ***Світличний О. О.***
д-р геогр. наук, проф. ***Лоєва І. Д.***
канд. фіз.–мат. наук, доцент ***Семенцов О.В.***

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18-Г-689 від 08.08.2006 р.)

© Л.Д. Гончарова, Є.П. Школьний, 2007
© Одеський державний екологічний університет, 2007

ISBN

П Е Р Е Д М О В А

Вже на протязі декількох десятиріч науки про Землю розвиваються у напрямку широкого використання методів статистичної обробки експериментальних даних та сучасної комп'ютерної техніки.

Тому цей навчальний посібник, який є другим виданням, являє собою суттєво перероблене і доповнене видання 2000 року.

Його складено відповідно до програми з дисципліни «Методи обробки та аналізу гідрометеорологічної інформації» для підготовки фахівців гідрометеорологічного напрямку навчання.

Основною метою задач, які він утримує, є упорядкування та закріплення на конкретних вихідних даних основної частини розділів лекційного курсу. Більшість задач сформульовано таким чином, щоб підсумком їх рішення були не тільки чисельна відповідь, але й різносторонній аналіз його фізичного тлумачення. Останнє передбачає врахування особливостей географічного положення метеорологічних станцій, результати спостережень яких використовуються при обчисленні задач. В багатьох задачах крім вихідних даних пропонується ряд запитань для обміркування здобутої відповіді.

В основному, послідовність розділів в задачнику відповідає їх послідовності в підручнику «Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації », який вийшов з друку в 1999 році.

Кожен з десяти розділів, з яких складається задачник, починається з загальних теоретичних положень щодо теми, яка підлягає вивченню, і наведенням прикладу розв'язання типової задачі з поясненнями та запитаннями для самоперевірки. Далі по кожній темі наводяться обов'язкові задачі, для обчислення яких пропонується, враховуючи індивідуальну роботу студентів, більше 30 (а в деяких розділах і 60) варіантів вихідних даних. Завершують розділи задачі підвищеної складності (задачі*).

У порівнянні з першим виданням суттєво доповненим є 7-й розділ, в якому розглядаються задачі по дослідженню стаціонарних часових послідовностей за допомогою кореляційних та спектральних функцій.

Восьмий, дев'ятий та десятий розділи є новими й дають можливість студентам і аспірантам гідрометеорологічного напрямку навчання оволодіти алгоритмами взаємного спектрального аналізу для опису складних природних процесів та застосовувати до них інтегральне перетворення Фур'є, щоб визначити амплітуди, періоди та початкові фази гармонічних коливань, які містяться в вихідних нестаціонарних процесах. Також наводяться задачі, в яких вирішується проблема визначення

детермінованої складової випадкового процесу за допомогою тригонометричних «фільтрів».

В додатках наводяться допоміжні таблиці та вихідні дані, які будуть використовуватися при розв'язаннях задач. Ряди спостережень, що утримуються в додатках, можуть використовуватися також у якості вихідної інформації для наукової роботи студентів.

При підготовці задачника автори намагалися узагальнити багаторічний досвід проведення лекційних та практичних занять, накопичений авторами і їх колегами в Одеському державному екологічному університеті.

Задачник є навчальним посібником з дисципліни «Методи обробки та аналізу гідрометеорологічної інформації» для студентів спеціальностей: гідрологія, океанологія, метеорологія, агрометеорологія. Він також може використовуватися студентами екологічного факультету при вивченні дисципліни «Обробка та аналіз інформації».

Автори вдячні Барановській М. І. – співробітнику кафедри фізики атмосфери та кліматології університету за велику роботу по комп'ютерному набору й оформленню цієї книги при підготовці її до друку.

1. ФОРМА ЗОБРАЖЕННЯ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Основні теоретичні положення

Емпіричні дослідження в науках про Землю мають першорядне значення. На їх основі встановлюються закономірності, які притаманні певним характеристикам основних оболонок нашої планети, фізичні параметри котрих і складають ***гідрометеорологічну інформацію***.

Важливі особливості просторової чи часової мінливості ***випадкових величин***, якими є гідрометеорологічні величини, вивчаються на основі їх статистичних сукупностей.

Коли кажуть про *статистичні сукупності*, то мають на увазі дві категорії:

- *генеральна сукупність;*
- *статистичний ряд (вибірка).*

Термін *"генеральна сукупність"* визначає нескінченну множину незалежних значень випадкової величини, які підпорядковуються одному й тому ж закону розподілу. *Властивості випадкових величин, які представляються генеральною сукупністю, визначаються* ***параметрами*** цієї випадкової величини. Позначимо їх умовно θ. Параметрами генеральної сукупності є математичне сподівання m_x, дисперсія σ_x^2, середній квадратичний відхил σ_x та інші.

Статистичний ряд (вибірка) – обмежена кількість значень випадкової величини, добута випадковим чином із генеральної сукупності. Тому статистичні ряди називають вибірками із генеральної сукупності. Вибірки випадкові та число їх безмежне.

Статистичні ряди гідрометеорологічних величин будемо називати *випадковими величинами* і позначати великими літерами латинської абетки (X, Y, Z …).

Важливою ознакою ряду є його *об'єм*. Під терміном *"об'єм"* сукупності значень випадкової величини розуміють кількість членів, що складають цю сукупність. В гідрометеорологічних дослідженнях доводиться мати справу з рядами як великих, так і малих об'ємів, оскільки вони формуються шляхом безпосередніх спостережень або вимірювань, або шляхом деяких первинних узагальнень.

Вибірки характеризуються статистичними ***оцінками параметрів***.

Значення параметра генеральної сукупності, яке розраховують на основі вибірки, називають статистичною оцінкою $(\hat{\theta})$ цього параметра θ і позначають символом "^".

Оскільки до гідрометеорологічних рядів застосовуються статистичні методи обробки та аналізу, ці ряди повинні задовольняти вимогам, що випливають із умов, покладених в основу цих методів.

Перш за все, кожний статистичний *ряд повинний бути однорідним*. Це означає, що всі члени ряду на заданому рівні значущості повинні належати до однієї генеральної сукупності, тобто підпорядковуватися визначеному закону розподілу.

В дійсності, в деяких випадках в гідрометеорологічних рядах є значення, які не задовольняють вищезгаданій умові. Такі значення називають *«викидами»*. *«Викиди»*, як правило, виникають тоді, коли спостерігаються аномальні погодні або кліматичні умови.

Наступною вимогою до рядів гідрометеорологічних величин є *незв'язність* їх *членів*. Це означає, що статистична залежність між ними повинна бути відсутньою. Прийняття чи не прийняття цієї вимоги залежить від характеру задачі, що розв'язується. Якщо йдеться про статистичні оцінки моментів розподілу випадкових величин, то вихідні ряди повинні бути незв'язними, оскільки методи статистичного оцінювання параметрів базуються на теоремах теорії ймовірностей, які, як правило, потребують виконання вимоги незалежності випадкових величин, що складають вибірку.

Важливе значення при статистичному оцінюванні параметрів розподілу має об'єм сукупностей. Статистичний *ряд* повинен *володіти представництвом*, тобто бути дійсно вибіркою з генеральної сукупності й мати такий об'єм, який дозволяв би провести оцінку параметрів з заданою точністю, тобто отримати вірогідні статистичні оцінки. Зрозуміло, що такого результату можна досягти, коли об'єм вибірки (у згоді з так званим законом великих чисел) є досить великим. Але подібні сукупності випадкових величин не завжди можна сформувати. В гідрометеорології часто виникає потреба мати справу з малими по об'єму сукупностями. Це обумовлюється терміном, протягом якого проводилися спостереження за випадковою величиною. У такому випадку потрібно перевірити вірогідність отриманої статистичної оцінки параметра розподілу.

Первинною формою зображення гідрометеорологічної інформації є ***простий*** *статистичний ряд*, значення котрого розташовуються в хронологічній послідовності. Такий ряд випадкової величини X об'єму n має вигляд:

$$X : x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n \ , \qquad (1.1)$$

де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$ – конкретні значення випадкової величини X, тобто конкретні значення вибірки X.

Вихідні дані гідрометеорологічних величин подаються у вигляді *простого* статистичного ряду головним чином у тих випадках, коли задача дослідження полягає у вивченні особливостей їх часової мінливості. Якщо така задача не ставиться, то ряди випадкових величин можуть зображатися у більш компактній формі – у вигляді ***згрупованого*** *ряду*. Особливо це має сенс робити в тому випадку, коли об'єм вибірки є великим, а також при вирішенні задач по апроксимації емпіричних розподілів теоретичними законами.

Побудова згрупованого ряду на основі простого статистичного ряду проводиться таким чином:

- по-перше, визначають *область значень* випадкової величини X $[x_{min}; x_{max}]$, де x_{min} – найменше, x_{max} – найбільше значення із ряду (1.1);
- по-друге, всі члени вихідного ряду розташовують у новому порядку, а саме в напрямку їх збільшення (або зменшення) і така послідовність значень випадкової величини називається ***ранжованим*** рядом (табл. 1.2);
- по-третє, знаходять k – *кількість часткових інтервалів (градацій)*, на які треба поділити область значень випадкової величини X $[x_{min}; x_{max}]$. Для цього може використовуватися формула:

$$k = 5 \lg n \ , \tag{1.2}$$

де n – *об'єм ряду;* за k завжди беруть ***ціле*** *число*.
Для зазначеної мети можна також використовувати формулу:

$$k = 1 + 3.222 \lg n \ ; \tag{1.3}$$

- далі знаходять *довжину часткового інтервалу* c за формулою:

$$c = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} \ ; \tag{1.4}$$

- потім визначають *значення* випадкової величини X *на межах часткових інтервалів*. Для i-того часткового інтервалу, очевидно, значення величини X *на лівій межі* є $[x_{min} + (i-1)c]$, а *на правій* – $[x_{min} + ic]$. Умовно будемо позначати *ліву* межу часткового інтервалу як x_{i-1}, а *праву* – $x_{i+1} \left(i = \overline{1,k}\right)$.

Примітка: *кінець попередньої і початок наступної градацій будуть повторюватися. Тому треба визначити закриті й відкриті межі градацій, тобто встановити, яку з величин враховувати в даній градації, щоб виключити повторення одних і тих же значень випадкової величини X в різних градаціях;*

- також підраховують *кількість членів ряду*, що потрапляють до кожного i-того часткового інтервалу – m_i $\left(i = 1, 2, \ldots, k \right)$. Величини m_i називають *інтервальними емпіричними частотами*. Зрозуміло, що сума частот по всіх часткових інтервалах дорівнює об'єму вибірки *X*, тобто

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n; \tag{1.5}$$

- розраховують *інтервальні частості* $\hat{p}_i$ (*відносні інтервальні частоти*) за формулою:

$$\hat{p}_i = \frac{m_i}{n}. \tag{1.6}$$

Очевидно, сума частостей по всіх k градаціях дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{p}_i = 1; \tag{1.7}$$

- знаходять $\tilde{x}_i$ – значення випадкової величини X на *середині* кожного *часткового інтервалу* за формулою:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} \quad \left(i = \overline{1, k} \right). \tag{1.8}$$

Після останнього етапу всі ознаки згрупованого ряду є й можна дати його визначення.

Згрупованим називають такий *ранжований статистичний ряд,* який представляють сукупністю значень випадкової величини X на серединах часткових інтервалів $\tilde{x}_i$ і відповідних інтервальних частот m_i :

$$X : \begin{cases} \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_k \\ m_1, m_2, m_3, \ldots, m_i, \ldots, m_k \end{cases} \left(i = \overline{1, k} \right). \tag{1.9}$$

Згрупований статистичний ряд випадкової величини X можна представити і таким чином:

$$X:\begin{cases}\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_i, ..., \tilde{x}_k \\ \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, ..., \hat{p}_i, ..., \hat{p}_k\end{cases}\left(i=\overline{1,k}\right), \qquad (1.10)$$

де $\tilde{x}_i$ – середина, а $\hat{p}_i$ – інтервальна частість i-тої градації.

Згрупований ряд, по суті, є емпіричним розподілом інтервальних ймовірностей випадкової величини і може зображатися за допомогою діаграм: *гістограми* чи *полігону*. *Гістограма* – це система прямокутників, основи яких дорівнюють довжині часткового інтервалу, а висоти – відповідним інтервальним частотам (або частостям). Якщо точки з координатами $\left(\tilde{x}_i; m_i\right)$ або $\left(\tilde{x}_i; \hat{p}_i\right)$ з'єднати відрізками прямої, то отриману таким чином діаграму називають *полігоном*. Приклади полігона і гістограми наводяться у розв'язанні типової задачі.

Розв'язання типової задачі. ***Побудова та графічне представлення згрупованого ряду.***

Побудувати згрупований ряд випадкової величини X на основі середньої місячної температури повітря на ст. Одеса у січні в термін 1940–1974 рр., що визначається простим статистичним рядом (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Середня місячна температура повітря, ° С
(ст. Одеса, січень)

Рік	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1940	-6.4	-3.0	-1.2	-4.5	-0.4	-3.0	-3.2	-8.2	3.0	0.4
1950	-8.1	-1.2	2.1	-1.2	-9.0	1.2	-0.1	-1.8	-0.6	1.2
1960	0.0	-1.2	1.2	-9.4	-4.6	0.0	0.7	-4.0	-3.8	-4.4
1970	-0.3	1.3	-7.0	-3.7	-3.1					

Аналіз табл. 1.1 дає змогу отримати екстремуми цієї вибірки, а саме: x_{min} = –9.4°С та x_{max} = 3.0°С. Отже, область значень випадкової величини X (середньої місячної температури повітря у січні на ст. Одеса) є [–9.4; 3.0]°С.

Якщо всі члени вихідного ряду розташувати у новому порядку, а саме в напрямку збільшення його значень, то отримаємо ранжовану послідовність випадкової величини X. Вона наводиться у табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Ранжований ряд середньої місячної температури повітря, ºС (ст. Одеса, січень)

№ п/п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		- 9.4	- 9.0	- 8.2	-8.1	-7.0	-6.4	-4.6	-4.5	-4.4
10	-4.0	-3.8	-3.7	-3.2	-3.1	-3.0	-3.0	-1.8	-1.2	-1.2
20	-1.2	-1.2	-0.6	-0.4	-0.3	-0.1	0.0	0.0	0.4	0.7
30	1.2	1.2	1.2	1.3	2.1	3.0				

Число часткових інтервалів за формулою (1.2) дорівнює:

$$k = 5\lg 35 = 5 \cdot 1.5441 = 7.7205,$$

а за формулою (1.3) :

$$k = 1 + 3.222 \cdot 1.5441 = 5.9751.$$

Отже за k беремо число 7.

Довжина часткового інтервалу в нашому прикладі дорівнює:

$$c = \frac{3.0 - (-9.4)}{7} = \frac{12.4}{7} = 1.8°\text{C}.$$

З'ясуємо межі часткових інтервалів. Для i-того часткового інтервалу, очевидно, що значення величини X на лівій межі є $\left[x_{min} + (i-1) \cdot c\right]$, а на правій – $\left[x_{min} + i \cdot c\right[$. Будемо вважати відкритим інтервалом ліву межу, а праву – закритим. Тоді межі часткових інтервалів (а їх сім) визначаються так:

$$[-9.4 + (i-1)1.8; \quad -9.4 + i1.8[\quad (i = 1, 2, ..., 7).$$

Отримані часткові інтервали (градації) представлені у табл. 1.3, другий стовпчик.

Далі необхідно визначити кількість значень ряду середньої місячної температури повітря, яка потрапить до кожного з семи часткових інтервалів, тобто треба знайти інтервальні емпіричні частоти m_i. Як видно з табл.1.3, до першої градації потрапило 4 значення випадкової величини ($m_1 = 4$), до другої – 2 ($m_2 = 2$), ... , до сьомої – 2 значення ($m_7 = 2$) (третій стовпчик).

Необхідно також визначитися в кількості значень випадкової величини в декількох градаціях разом, тобто знайти *накопичені частоти* (m_i^*). Наприклад, в першій і другій градаціях разом знаходиться шість значень із вибірки X, в перших трьох градаціях – 9, в чотирьох – 16, ... , в семи градаціях разом – 35 значень випадкової величини, а це є об'єм вибірки (табл. 1.3, четвертий стовпчик).

Необхідно також у кожній градації розрахувати $\hat{p}_i$ – інтервальні частості (відносні частоти), використовуючи формулу (1.6). Частість у першій градації складає: $\hat{p}_1 = \frac{4}{35} = 0.11$; у другій – $\hat{p}_2 = \frac{2}{35} = 0.06$; … ; у сьомій – $\hat{p}_7 = \frac{2}{35} = 0.06$ (п'ятий стовпчик).

Далі визначимо *накопичені частості* ($\hat{p}_i^*$). Так, в перших двох градаціях вона дорівнює 0.17; в 1-й, 2-й та 3-й (разом) – 0.26 і т.п. Як бачимо, сума інтервальних частостей по всіх градаціях дорівнює одиниці (шостий стовпчик).

Необхідно розрахувати $\tilde{x}_i$ – значення випадкової величини X на середині кожного часткового інтервалу, оскільки вони є важливою характеристикою згрупованого ряду. Середина першої градації дорівнює $\tilde{x}_1 = \frac{-9.4 + (-7.6)}{2} = -8.5$, другої – $\tilde{x}_2 = \frac{-7.6 + (-5.8)}{2} = -6.7$; $\tilde{x}_2$ також можна розрахувати як: $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + c = -8.5 + 1.8 = -6.7$, середина третьої градації дорівнює: $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_2 + c = -6.7 + 1.8 = -4.9$ і т.п. (сьомий стовпчик).

Таким чином, після визначення відповідних характеристик згрупований ряд, що відповідає простому статистичному ряду середньої місячної температури повітря у січні на ст. Одеса (табл. 1.1), доцільно представити у вигляді табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Згрупований ряд середньої місячної температури повітря, ° С (ст. Одеса, січень)

i	Межі градацій температури повітря, °С		m_i	$\sum_{i=1}^{7} m_i$	$\hat{p}_i$	$\sum_{i=1}^{7} \hat{p}_i$	$\tilde{x}_i$, °С
	ліва (x_{i-1})	права (x_{i+1})					
1	**2**		**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	[-9.4 …	-7.6 [	4	4	0.11	0.11	-8.5
2	[-7.6 …	-5.8 [	2	6	0.06	0.17	-6.7
3	[-5.8 …	-4.0 [	3	9	0.09	0.26	-4.9
4	[-4.0 …	-2.2 [	7	16	0.20	0.46	-3.1
5	[-2.2 …	-0.4 [	6	22	0.17	0.63	-1.3
6	[-0.4 …	1.4 [	11	33	0.31	0.94	0.5
7	[1.4 …	3.2]	2	35	0.06	1.00	2.3

Гістограма (рис. 1.1 а) та полігон (рис. 1.1 б), що відповідають отриманому згрупованому ряду, наводяться нижче.

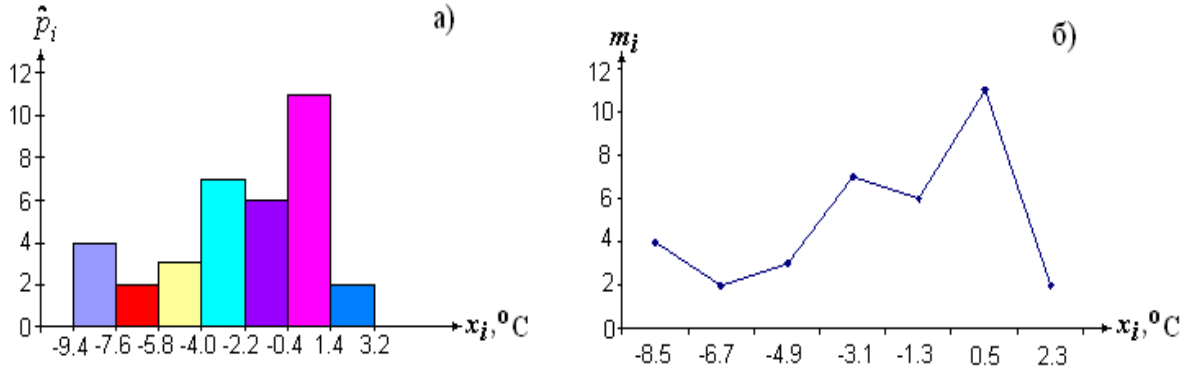


Рисунок 1.1 – Гістограма (а) і полігон (б) розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення генеральної сукупності, вибіркової сукупності.
2. Перелічити форми зображення статистичних рядів (вибірок).
3. Яким вимогам повинна задовольняти вибірка, по якій розраховуються статистичні оцінки параметрів?
4. Дати визначення простої статистичної сукупності? згрупованої?
5. Від яких величин залежить кількість градацій у згрупованій сукупності?
6. Від яких величин залежить розмір градації (довжина часткового інтервалу)?
7. Дати визначення інтервальної емпіричної частоти. Як за допомогою цієї величини знайти об’єм вибірки?
8. Дати визначення об’єму вибірки.
9. Дати визначення інтервальної частості. Чому дорівнює сума частостей по всіх градаціях?
10. Як графічно можна представити згруповані ряди?

Задачі

Згідно з номером варіанта (див. табл. 1.4) згрупувати та представити графічно вибірку випадкової величини *X*. Для розв'язання задач цього розділу використати прості статистичні ряди середньої місячної температури повітря на деяких станціях України за період з 1951 по 2000 рр., що утримуються в додатку А (таблиці А.1–А.5). Отриманий згрупований ряд необхідно представити графічно у вигляді гістограми, для побудови якої на осі ординат відкласти інтервальні частості, і полігону, який побудувати по серединах градацій та інтервальних емпіричних частотах $\left(\tilde{x}_i; m_i\right)$.

Таблиця 1.4 – Інформація до розв'язання задач

Варіант	**Станція**	**Місяць**	**Табл.**	**Варіант**	**Станція**	**Місяць**	**Табл.**
1	Одеса	01	А.1	**31**	Умань	07	А.3
2	Одеса	02	А.1	**32**	Умань	08	А.3
3	Одеса	03	А.1	**33**	Умань	09	А.3
4	Одеса	04	А.1	**34**	Умань	10	А.3
5	Одеса	05	А.1	**35**	Умань	11	А.3
6	Одеса	06	А.1	**36**	Умань	12	А.3
7	Одеса	07	А.1	**37**	Київ	01	А.4
8	Одеса	08	А.1	**38**	Київ	02	А.4
9	Одеса	09	А.1	**39**	Київ	03	А.4
10	Одеса	10	А.1	**40**	Київ	04	А.4
11	Одеса	11	А.1	**41**	Київ	05	А.4
12	Одеса	12	А.1	**42**	Київ	06	А.4
13	Полтава	01	А.2	**43**	Київ	07	А.4
14	Полтава	02	А.2	**44**	Київ	08	А.4
15	Полтава	03	А.2	**45**	Київ	09	А.4
16	Полтава	04	А.2	**46**	Київ	10	А.4
17	Полтава	05	А.2	**47**	Київ	11	А.4
18	Полтава	06	А.2	**48**	Київ	12	А.4
19	Полтава	07	А.2	**49**	Херсон	01	А.5
20	Полтава	08	А.2	**50**	Херсон	02	А.5
21	Полтава	09	А.2	**51**	Херсон	03	А.5
22	Полтава	10	А.2	**52**	Херсон	04	А.5
23	Полтава	11	А.2	**53**	Херсон	05	А.5
24	Полтава	12	А.2	**54**	Херсон	06	А.5
25	Умань	01	А.3	**55**	Херсон	07	А.5
26	Умань	02	А.3	**56**	Херсон	08	А.5
27	Умань	03	А.3	**57**	Херсон	09	А.5
28	Умань	04	А.3	**58**	Херсон	10	А.5
29	Умань	05	А.3	**59**	Херсон	11	А.5
30	Умань	06	А.3	**60**	Херсон	12	А.5

2. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ

Основні теоретичні положення

Основні властивості випадкових величин характеризуються *початковими* (ν), *центральними* (μ) та *основними* (r) моментами розподілу різних порядків (l). В гідрометеорологічних дослідженнях, як правило, використовуються перелічені моменти перших чотирьох порядків ($l = \overline{1,4}$). Початкові, центральні та основні моменти розподілу є параметрами генеральних сукупностей випадкових величин. На основі статистичної сукупності (вибірки) можна знайти *статистичні оцінки* цих параметрів, які повинні володіти властивостями *незсуненості*, *ефективності* та *умотивованості*. Будемо у подальшому позначати статистичні оцінки моментів розподілу l-того порядку таким чином: початкового – $\hat{\nu}_l$, центрального – $\hat{\mu}_l$, основного – $\hat{r}_l$. Вони можуть розраховуватися як по простих, так і по згрупованих статистичних сукупностях різних гідрометеорологічних величин (наприклад, температури повітря, місячної кількості опадів, атмосферного тиску, швидкості вітру і т.п.).

Початковим моментом розподілу випадкової величини X l-того порядку називається інтеграл вигляду:

$$\nu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Початковий момент розподілу 1-го порядку є математичним сподіванням цієї випадкової величини:

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = m_x. \tag{2.2}$$

Якщо для знаходження оцінок моментів розподілу, що відповідають переліченим вимогам, використовуються ***згруповані ряди*** вигляду (1.9) або (1.10), то *початковий момент l-того порядку* оцінюється за формулою:

$$\hat{\nu}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^l\, m_i \tag{2.3}$$

або

$$\hat{\nu}_l = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^l\, \hat{p}_i\ , \tag{2.4}$$

де n – об’єм вибірки;

k – кількість часткових інтервалів;

$\tilde{x}_i, m_i, \hat{p}_i$ – середина, інтервальна емпірична частота та інтервальна частість i-тої градації відповідно.

Очевидно, *оцінка першого початкового моменту розподілу* $(\hat{\nu}_1)$ *є оцінкою математичного сподівання* $(\hat{m}_x)$ і дорівнює *середньому значенню* $(\overline{x})$ випадкової величини X:

$$\hat{\nu}_1 = \hat{m}_x = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i m_i \tag{2.5}$$

або

$$\hat{\nu}_1 = \hat{m}_x = \overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \hat{p}_i \,. \tag{2.6}$$

Статистичні оцінки початкових моментів розподілу *другого*, *третього* та *четвертого* порядків $\left(\hat{\nu}_2, \hat{\nu}_3 \text{ та } \hat{\nu}_4\right)$ розраховуються за формулою (2.3) або (2.4) за умов, що у цих формулах показник степеня l приймає відповідно значення 2, 3 і 4:

$$\hat{\nu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^2 m_i = \overline{x^2}, \tag{2.7}$$

$$\hat{\nu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^3 m_i = \overline{x^3}, \tag{2.8}$$

$$\hat{\nu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^4 m_i = \overline{x^4}\,. \tag{2.9}$$

Якщо статистична оцінка l-го *початкового* моменту розподілу обчислюється на основі ***простих статистичних сукупностей*** вигляду (1.1), то використовується формула:

$$\hat{\nu}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^l \,. \tag{2.10}$$

Очевидно, *середнє значення* для таких сукупностей отримаємо за допомогою рівняння:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{\nu}_1 = \hat{m}_x, \tag{2.11}$$

а оцінки початкових моментів розподілу 2-го, 3-го та 4-го порядків – за формулами:

$$\hat{\nu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \overline{x^2}, \tag{2.12}$$

$$\hat{\nu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \overline{x^3}, \tag{2.13}$$

$$\hat{\nu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \overline{x^4}. \tag{2.14}$$

У рівняннях (2.10) – (2.14) n – об'єм вибірки; x_i – кожне конкретне значення випадкової величини X із ряду (1.1).

Центральним моментом розподілу l–того порядку випадкової величини X називається інтеграл вигляду:

$$\mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^l f(x)dx. \tag{2.15}$$

Статистична оцінка центрального моменту розподілу l*-того порядку,* якщо ряди є ***згрупованими,*** розраховується за формулою:

$$\hat{\mu}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - \overline{x}\right)^l m_i \tag{2.16}$$

при використанні інтервальних емпіричних частот m_i і за формулою

$$\hat{\mu}_l = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - \overline{x}\right)^l \hat{p}_i \tag{2.17}$$

при використанні інтервальних частостей $\hat{p}_i$.

Центральні моменти розподілу оцінюються, починаючи з другого моменту (l=2), тому, що *перший центральний момент завжди дорівнює нулю, як і його оцінка.* Центральний момент другого порядку має сенс дисперсії випадкової величини: $\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \sigma_x^2$.

Для розрахунку статистичної оцінки *центрального моменту розподілу другого* порядку на основі згрупованого ряду використовуються формули:

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - \overline{x}\right)^2 m_i, \tag{2.18}$$

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}_x^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{x}_i - \overline{x}\right)^2 \hat{p}_i. \tag{2.19}$$

Аналогічним чином на основі формули (2.16) або (2.17) знаходять статистичні оцінки *третього* (за умови l=3) і *четвертого* (за умови l=4) моментів розподілу випадкової величини X :

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_i - \bar{x}\right)^3 m_i \,, \tag{2.20}$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\tilde{x}_i - \bar{x}\right)^4 m_i \,. \tag{2.21}$$

Статистична оцінка другого центрального моменту розподілу, що розраховується за формулою (2.18) або (2.19), є *зсуненою оцінкою* дисперсії.

Незсунену, *ефективну* та *умотивовану* оцінку дисперсії випадкової величини X (це вимоги, яким повинні задовольняти статистичні оцінки параметрів) розраховують за формулою (2.22) і позначають S_x^2:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1}\,\hat{\mu}_2, \tag{2.22}$$

де $\left(\frac{n}{n-1}\right)$ – коефіцієнт Бесселя.

Щоб розрахувати незсунену, ефективну та умотивовану оцінку дисперсії випадкової величини X за умови згрупованих рядів використовують рівняння (2.23):

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \bar{x})^2 m_i \,. \tag{2.23}$$

Очевидно, статистична оцінка *середнього квадратичного відхилу* цієї величини є:

$$S_x = \sqrt{S_x^2} \,. \tag{2.24}$$

Статистичну оцінку *центрального моменту розподілу* l*-того* порядку у випадку ***простих статистичних сукупностей*** випадкової величини X отримаємо за допомогою формули:

$$\hat{\mu}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^l \,. \tag{2.25}$$

Тоді статистичні оцінки *центральних моментів другого, третього та четвертого* порядків розраховуються за формулами (2.26) – (2.28):

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \hat{\sigma}_x^2, \tag{2.26}$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^3, \tag{2.27}$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^4, \tag{2.28}$$

де – n – об'єм ряду,

$x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ – конкретне значення випадкової величини X,

$\bar{x}$ – середнє значення вибірки X.

Незсунена, ефективна та умотивована оцінка дисперсії випадкової величини X знаходиться за формулою:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2. \tag{2.29}$$

Центральні моменти розподілу 2-го, 3-го та 4-го порядків можна розрахувати і за формулами їх зв'язку з початковими моментами:

$$\hat{\mu}_2 = \hat{\nu}_2 - \hat{\nu}_1^2, \tag{2.30}$$

$$\hat{\mu}_3 = \hat{\nu}_3 - 3\hat{\nu}_2\hat{\nu}_1 + 2\hat{\nu}_1^3, \tag{2.31}$$

$$\hat{\mu}_4 = \hat{\nu}_4 - 4\hat{\nu}_1\hat{\nu}_3 + 6\hat{\nu}_1^2\hat{\nu}_2 - 3\hat{\nu}_1^4. \tag{2.32}$$

Основний *(нормований) момент розподілу l-того порядку* є часткою від ділення l-того центрального моменту на середній квадратичний відхил в l-тому степені:

$$r_l = \frac{\mu_l}{\sigma_x^l}. \tag{2.33}$$

Статистична оцінка основного моменту l-того порядку для випадкової величини X розраховується за формулою:

$$\hat{r}_l = \frac{\hat{\mu}_l}{S_x^l} \ . \qquad (2.34)$$

Очевидно, що $r_1 = 0$, а $r_2 = 1$.
Тому обчислюються тільки статистичні оцінки *третього* (за умови l =3):

$$\hat{r}_3 = \frac{\hat{\mu}_3}{S_x^3} \qquad (2.35)$$

та *четвертого* (за умови l =4):

$$\hat{r}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{S_x^4} \qquad (2.36)$$

порядків основних моментів розподілу.

Як відомо, оцінка третього основного моменту характеризує асиметрію кривої розподілу інтервальних частостей (або частот) і називається ***коефіцієнтом асиметрії***: $\hat{r}_3 = As$. Крива розподілу має *правосторонню асиметрію* за умови $As > 0$, і *лівосторонню* – за умови $As < 0$. Вона є *симетричною* відносно центру розподілу, якщо $As = 0$.

Крім асиметрії, крива розподілу, порівняно з кривою нормального розподілу, може бути *витягнутою* або *сплюснутою*. Мірою цього є ***коефіцієнт ексцесу E***:

$$E = \hat{r}_4 - 3. \qquad (2.37)$$

У першому випадку $E > 0$, у другому – $E < 0$.
За умов нормального розподілу $r_3 = 0$; $E = 0$.

Інколи при статистичних дослідженнях метеорологічних рядів необхідно визначити їх модальне значення Mo та медіану Me.

Мода – значення випадкової величини, що зустрічається частіше усього, тобто має максимальну ймовірність для дискретної величини або максимум функції щільності ймовірності в даній точці для безперервної випадкової величини. Одна й та ж випадкова величина може мати одну або декілька мод. Однак можливо, що випадкова величина і не матиме моди, якщо її значення мають однакову ймовірність (рівномірний розподіл) або, якщо ймовірність при зростанні значення випадкової величини безперервно зростає або зменшується.

Якщо ряд є *згрупованим* та *ранжування* проводилося *в бік зростання* значень випадкової величини, то моду визначають за такою формулою:

$$M_o = x_0 + c\frac{(m_i - m_{i-1})}{(2m_i - m_{i-1} - m_{i+1})}, \qquad (2.38)$$

де x_0, c, m_i – відповідно початок, довжина та емпірична частота модального інтервалу;

m_{i-1}, m_{i+1} – частоти попереднього і наступного за модальним часткових інтервалів.

Медіана – значення випадкової величини, яке розділяє область існування цієї величини на дві частини, для яких виконується рівність

$$P(X > Me) = P(X < Me),$$

тобто ймовірність того, що значення випадкової величини X більше медіани, дорівнює ймовірності того, що значення випадкової величини X менше медіани.

Медіану розраховують за такою формулою:

$$Me = x_e + \frac{c\left(\frac{n}{2} - m^*\right)}{m_e}, \qquad (2.39)$$

де

n – об'єм вибірки (за умови непарного значення об'єму береться $n+1$);

m^* – накопичена частота до медіанного інтервалу;

x_e, c, m_e – відповідно початок, довжина та частота медіанного інтервалу.

Розв'язання типової задачі. ***Розрахунок статистичних оцінок моментів розподілу випадкової величини.***

На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у січні на ст. Одеса за період з 1940 по 1974 рр. (табл. 1.3) знайти за формулами, зазначеними у розділі 2, статистичні оцінки початкових та центральних моментів розподілу цієї величини за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати коефіцієнти асиметрії та ексцесу, модальне значення випадкової величини і медіану.

1. Статистичне ***оцінювання початкових моментів*** розподілу випадкової величини (ν_l, $l=\overline{1,4}$) на основі згрупованого статистичного ряду.

Оцінка “ ^ “ *першого* початкового моменту ν_1 (за умови *l=1*) є оцінкою математичного сподівання m_x і дорівнює середньому значенню випадкової величини X ($\overline{x}$):

$$\hat{\nu}_1 = \hat{m}_x = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i m_i = -81.50/35 = -2.3.$$

Оцінка *другого* початкового моменту ν_2 (за умови *l=2*) є середній квадрат:

$$\hat{\nu}_2 = \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^2 m_i = 541.55/35 = 15.5.$$

Оцінка *третього* початкового моменту ν_3 (за умови *l=3*) є середній куб:

$$\hat{\nu}_3 = \overline{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^3 m_i = -3607.00/35 = -103.1.$$

Оцінка *четвертого* початкового моменту (за умови *l=4*) дорівнює:

$$\hat{\nu}_4 = \overline{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^4 m_i = 27360.16/35 = 781.7.$$

Приклад розрахунку статистичних оцінок початкових моментів, що проводиться на основі згрупованого ряду (табл. 1.3), наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Розрахунок статистичних оцінок початкових моментів розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

i	**Градація**	$\tilde{x}_i$	m_i	$\tilde{x}_i m_i$	$\tilde{x}_i^2 m_i$	$\tilde{x}_i^3 m_i$	$\tilde{x}_i^4 m_i$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	[- 9.4 ... - 7.6[	- 8.5	4	- 34.00	289.00	- 2456.50	20880.24
2	[- 7.6 ... - 5.8[	- 6.7	2	-13.40	89.78	-601.53	4030.22
3	[- 5.8 ... - 4.0[	- 4.9	3	-14.70	72.03	-352.95	1729.44
4	[- 4.0 ... - 2.2[	- 3.1	7	-21.70	67.27	-208.54	646.46
5	[- 2.2 ... - 0.4[	- 1.3	6	- 7.80	10.14	-13.18	17.14
6	[- 0.4 ... 1.4[	0.5	11	5.50	2.75	1.38	0.69
7	[1.4 ... 3.2]	2.3	2	4.60	10.58	24.33	55.97
	Сума	-	35	-81.50	541.55	- 3607.00	27360.16
	Оцінка	-	-	$\hat{\nu}_1 = -2.3$	$\hat{\nu}_2 = 15.5$	$\hat{\nu}_3 = -103.1$	$\hat{\nu}_4 = 781.7$

2. ***Розрахунок статистичних оцінок центральних моментів*** розподілу 2-го, 3-го та 4-го порядків (μ_l , $l=\overline{2.4}$) проводимо також на основі згрупованого ряду, який наведено в табл. 1.3.

Відомо, що центральний момент *першого порядку* дорівнює нулю. Центральний момент *2-го порядку* має сенс дисперсії випадкової величини, тобто $\mu_2 = \sigma_x^2$. А його статистична оцінка:

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \overline{x})^2 m_i = 351.80/35 = 10.05.$$

Статистична оцінка 3-го центрального моменту розраховується як:

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \overline{x})^3 m_i = -737.86/35 = -21.08.$$

Статистичну оцінку 4-го центрального моменту отримаємо наступним чином:

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \overline{x})^4 m_i = 8377.78/35 = 239.37.$$

В табл. 2.2 наведено приклад обчислення статистичних оцінок центральних моментів розподілу (табл. 1.3) через відхилення ($\tilde{x}_i - \overline{x}$).

Таблиця 2.2 – Розрахунок статистичних оцінок центральних моментів розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

i	Градація	$\tilde{x}_i$	m_i	$\tilde{x}_i m_i$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2 m_i$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^3 m_i$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^4 m_i$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	[-9.4...-7.6[	-8.5	4	- 34.00	-6.2	153.76	-953.32	5910.52
2	[-7.6…-5.8[	-6.7	2	-13.40	-4.4	38.72	-170.36	749.62
3	[-5.8…-4.0[	-4.9	3	-14.70	-2.6	20.28	- 52.74	137.10
4	[-4.0…-2.2[	-3.1	7	-21.70	-0.8	4.48	- 3.57	2.87
5	[-2.2…-0.4[	-1.3	6	- 7.80	1.0	6.00	6.00	6.00
6	[- 0.4…1.4[	0.5	11	5.50	2.8	86.24	241.45	676.17
7	[1.4 … 3.2]	2.3	2	4.60	4.6	42.32	194.68	895.50
	Сума	-	35	-81.50	-	351.80	-737.86	8377.78
	Оцінка	-	-	$\hat{v}_1 = \overline{x} = 2.3$	-	$\hat{\mu}_2 = 10.05$	$\hat{\mu}_3 =$ -21.08	$\hat{\mu}_4 = 239.37$

3. ***Розрахунок незсуненої, ефективної та умотивованої оцінки дисперсії*** по згрупованій сукупності.

Статистична оцінка 2-го центрального моменту є зсуненою оцінкою дисперсії (у нашому прикладі це значення $\hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}_x^2 = 10.05$). *Незсунена, ефективна* та *умотивована оцінка дисперсії випадкової величини X (S_x^2)* розраховується як:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \bar{x})^2 m_i = 351.80/34 = 10.35.$$

Незсунена, ефективна та умотивована оцінка середнього квадратичного відхилу в нашому прикладі дорівнює:

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{10.35} = 3.22.$$

4. ***Розрахунок статистичних оцінок основних моментів*** розподілу випадкової величини.

Відомо, що основний момент *l*-того порядку є часткою від ділення *l*-того центрального моменту розподілу на середній квадратичний відхил в *l*-тому степені. Зазвичай використовують основні моменти третього та четвертого порядків (r_1=0, r_2=1) тому, що вони дають важливу інформацію про характер розподілу випадкових величин. *Третій основний момент* відбиває *асиметрію* (його називають коефіцієнтом асиметрії $As=r_3$). За умови r_3=0 крива розподілу є *симетричною* відносно центру розподілу. Нормальний (Гаусса) розподіл є симетричним відносно математичного сподівання m_x. Статистична оцінка 3-го основного моменту розподілу в нашому прикладі дорівнює:

$$\hat{r}_3 = \frac{\hat{\mu}_3}{(S_x)^3} = -\frac{21.08}{3.22^3} = -0.63.$$

Це означає, що крива розподілу середньої місячної температури повітря на ст. Одеса у січні має *лівосторонню асиметрію* відносно нормального розподілу, оскільки A_S<0.

Четвертий основний момент оцінюється так:

$$\hat{r}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{(S_x)^4} = \frac{239.37}{3.22^4} = 2.23.$$

5. ***Розрахунок коефіцієнта ексцесу***: $E = \hat{r}_4 - 3 = 2.23 - 3 = -0.77$.

Таке значення коефіцієнта вказує на те, що крива розподілу є *сплюснутою* відносно кривої нормального розподілу, оскільки *E<0*.

6. ***Обчислення модального значення*** випадкової величини проводилося за формулою (2.38):

$$M_0 = x_0 + c\frac{(m_i - m_{i-1})}{2m_i - m_{i-1} - m_{i+1}} = -0.4 + 1.8\frac{(11-6)}{2\times 11 - 6 - 2} = 0.2 \ ,$$

де $x_0 = -0.4$, $c = 1.8$, $m_i = 11$, $m_{i-1} = 6$, $m_{i+1} = 2$.

7. ***Медіану*** випадкової величини отримали на основі рівняння (2.39):

$$M_e = x_e + \frac{c\left(\frac{n}{2} - m^*\right)}{m_e} = -2.2 + 1.8\frac{(18-16)}{6} = -1.6 \ ,$$

де $n = 36$, $m^* = 16$, $x_e = -2.2$, $c = 1.8$, $m_e = 6$.

Примітка. *Розрахунок медіани проводиться за умови парного значення* n. *Якщо об'єм вибірки є непарним, його значення збільшують на одиницю (*$n = 35$*; для розрахунків беремо* $n = 36$*).*

Після завершення всіх розрахунків статистичних оцінок початкових, центральних, основних моментів розподілу, моди та медіани випадкової величини, що досліджувалася, доцільно необхідні характеристики та отримані статистичні оцінки звести до підсумкової таблиці, приклад якої наводиться нижче (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Основні характеристики та значення статистичних оцінок моментів розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

n	k	x_{max}	x_{min}	c	$\hat{\nu}_1 = \bar{x}$	$\hat{\nu}_2$	$\hat{\nu}_3$	$\hat{\nu}_4$	$\hat{\mu}_2$	S_x^2	S_x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
35	7	3.0	-9.4	1.8	-2.3	15.5	-103.1	781.7	10.05	10.4	3.2

Продовження таблиці 2.3

$\hat{\mu}_3$	$\hat{\mu}_4$	$\hat{r}_3$	$\hat{r}_4$	E	M_0	M_e
13	14	15	16	17	18	19
-21.08	239.36	-0.63	2.23	-0.77	0.2	-1.6

Запитання для самоперевірки

1. Що називається статистичною оцінкою параметра генеральної сукупності?
2. Яким вимогам повинні відповідати статистичні оцінки, що розраховані на основі вибірок?
3. Як розрахувати середнє значення випадкової величини на основі простої сукупності? згрупованого ряду?
4. Статистичною оцінкою якого моменту розподілу є середнє значення випадкової величини (вибірки)?
5. Який сенс дисперсії випадкової величини та з яким моментом розподілу вона має зв'язок?
6. Як розрахувати незсунену, ефективну та умотивовану оцінку дисперсії на основі простої вибірки? згрупованого ряду?
7. Як розрахувати коефіцієнт асиметрії та в чому полягає його сенс?
8. Як називають криву розподілу за умови $A_S = 0$? $A_S > 0$? $A_S < 0$?
9. Як розрахувати коефіцієнт ексцесу та в чому полягає його сенс?
10. Який вид кривої розподілу відносно нормального закону будемо мати за умови $E = 0$? $E > 0$? $E < 0$?
11. Якщо крива розподілу має правосторонню (лівосторонню) асиметрію чи симетрична, яке співвідношення має місце між модальним та середнім значеннями випадкової величини?

Задачі

Згідно з номером варіанта (1–60) в задачах 2.1–2.60 провести розрахунки статистичних оцінок моментів розподілу випадкової величини з використанням згрупованих рядів середньої місячної температури повітря для однієї з 5-ти станцій України, отриманих в задачах 1.1–1.60 попереднього розділу, для яких вихідною інформацією послужили дані таблиць А.1–А.5. Враховуючи отримані статистичні оцінки, зробити висновок про характер розподілу середньої місячної температури повітря на станції, що розглядається.

Розрахунки статистичних оцінок моментів розподілу на основі простих статистичних рядів випадкових величин (задачі 2.61–2.92) провести, використовуючи вихідні дані місячної кількості опадів за період з 1951 по 1990 рр., які містяться в таблицях В.1–В.4 (для однієї з 8-ми станцій України).

В задачах 2.93–2.104 розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу, моду й медіану на основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря на ст. Одеса.

Задачі* (2.105–2.117)

Таблиця 2.4 – Інформація до розв’язання задач 2.1–2.60

Варіант	**Задача**	**Станція**	**Місяць**	**Варіант**	**Задача**	**Станція**	**Місяць**
1	2.1	Одеса	01	**31**	2.31	Умань	07
2	2.2	Одеса	02	**32**	2.32	Умань	08
3	2.3	Одеса	03	**33**	2.33	Умань	09
4	2.4	Одеса	04	**34**	2.34	Умань	10
5	2.5	Одеса	05	**35**	2.35	Умань	11
6	2.6	Одеса	06	**36**	2.36	Умань	12
7	2.7	Одеса	07	**37**	2.37	Київ	01
8	2.8	Одеса	08	**38**	2.38	Київ	02
9	2.9	Одеса	09	**39**	2.39	Київ	03
10	2.10	Одеса	10	**40**	2.40	Київ	04
11	2.11	Одеса	11	**41**	2.41	Київ	05
12	2.12	Одеса	12	**42**	2.42	Київ	06
13	2.13	Полтава	01	**43**	2.43	Київ	07
14	2.14	Полтава	02	**44**	2.44	Київ	08
15	2.15	Полтава	03	**45**	2.45	Київ	09
16	2.16	Полтава	04	**46**	2.46	Київ	10
17	2.17	Полтава	05	**47**	2.47	Київ	11
18	2.18	Полтава	06	**48**	2.48	Київ	12
19	2.19	Полтава	07	**49**	2.49	Херсон	01
20	2.20	Полтава	08	**50**	2.50	Херсон	02
21	2.21	Полтава	09	**51**	2.51	Херсон	03
22	2.22	Полтава	10	**52**	2.52	Херсон	04
23	2.23	Полтава	11	**53**	2.53	Херсон	05
24	2.24	Полтава	12	**54**	2.54	Херсон	06
25	2.25	Умань	01	**55**	2.55	Херсон	07
26	2.26	Умань	02	**56**	2.56	Херсон	08
27	2.27	Умань	03	**57**	2.57	Херсон	09
28	2.28	Умань	04	**58**	2.58	Херсон	10
29	2.29	Умань	05	**59**	2.59	Херсон	11
30	2.30	Умань	06	**60**	2.60	Херсон	12

В задачах 2.61–2.92 (згідно з номером варіанта) за даними таблиць В.1–В.4 (додаток В) розрахувати статистичні оцінки першого початкового $\left(\hat{\nu}_1 = \hat{m}_x = \bar{x}\right)$ і другого центрального $\left(\hat{\mu}_2 = \hat{\sigma}_x^2\right)$ моментів розподілу випадкової величини, що розглядається. Отримати незсунені, ефективні та умотивовані оцінки дисперсії (S_x^2) і середнього квадратичного відхилу (S_x) на основі рядів місячної кількості опадів.

Таблиця 2.5 – Інформація до розв'язання задач 2.61 – 2.92

Варіант	**Задача**	**Станція**	**Місяць**	**Таблиця**
1	2.61	Любашівка	Січень	В.1
2	2.62	Болград	Січень	В.1
3	2.63	Ізмаїл	Січень	В.1
4	2.64	Затишшя	Січень	В.1
5	2.65	Вилкове	Січень	В.1
6	2.66	Кілія	Січень	В.1
7	2.67	Сарата	Січень	В.1
8	2.68	Роздільна	Січень	В.1
9	2.69	Любашівка	Квітень	В.2
10	2.70	Болград	Квітень	В.2
11	2.71	Ізмаїл	Квітень	В.2
12	2.72	Затишшя	Квітень	В.2
13	2.73	Вилкове	Квітень	В.2
14	2.74	Кілія	Квітень	В.2
15	2.75	Сарата	Квітень	В.2
16	2.76	Роздільна	Квітень	В.2
17	2.77	Любашівка	Липень	В.3
18	2.78	Болград	Липень	В.3
19	2.79	Ізмаїл	Липень	В.3
20	2.80	Затишшя	Липень	В.3
21	2.81	Вилкове	Липень	В.3
22	2.82	Кілія	Липень	В.3
23	2.83	Сарата	Липень	В.3
24	2.84	Роздільна	Липень	В.3
25	2.85	Любашівка	Жовтень	В.4
26	2.86	Болград	Жовтень	В.4
27	2.87	Ізмаїл	Жовтень	В.4
28	2.88	Затишшя	Жовтень	В.4
29	2.89	Вилкове	Жовтень	В.4
30	2.90	Кілія	Жовтень	В.4
31	2.91	Сарата	Жовтень	В.4
32	2.92	Роздільна	Жовтень	В.4

2.93. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у січні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[- 9.4 … - 8.0)	5
2	[- 8.0 … - 6.6)	3
3	[- 6.6 … - 5.2)	5
4	[- 5.2 … - 3.8)	12
5	[- 3.8 … - 2.4)	14
6	[- 2.4 … - 1.0)	12
7	[- 1.0 … 0.4)	13
8	[0.4 … 1.8)	12
9	[1.8 … 3.2)	6
10	[3.2 … 4.6]	3

2.94. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у лютому (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[- 12.3 … - 10.6)	2
2	[- 10.6 … - 8.9)	0
3	[- 8.9 … - 7.2)	3
4	[- 7.2 … - 5.5)	4
5	[- 5.5 … - 3.8)	6
6	[- 3.8 … - 2.1)	13
7	[- 2.1 … - 0.4)	31
8	[- 0.4 … 1.3)	17
9	[1.3 … 3.0)	6
10	[3.0 … 4.7]	3

2.95. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у березні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[- 2.6 … - 1.8)	3
2	[- 1.8 … - 1.0)	0
3	[- 1.0 … - 0.2)	9
4	[- 0.2 … 0.6)	5
5	[0.6 … 1.4)	11
6	[1.4 … 2.2)	12
7	[2.2 … 3.0)	19
8	[3.0 … 3.8)	7
9	[3.8 … 4.6)	12
10	[4.6 … 5.4]	7

2.96. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у квітні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[4.3 … 5.1)	2
2	[5.1 … 5.9)	2
3	[5.9 … 6.7)	5
4	[6.7 … 7.5)	14
5	[7.5 … 8.3)	13
6	[8.3 … 9.1)	20
7	[9.1 … 9.9)	16
8	[9.9 … 10.7)	7
9	[10.7 … 11.5)	5
10	[11.5 … 12.3]	1

2.97. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у травні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[12.1 … 12.8)	6
2	[12.8 … 13.5)	7
3	[13.5 … 14.2)	15
4	[14.2 … 14.9)	13
5	[14.9 … 15.6)	12
6	[15.6 … 16.3)	13
7	[16.3 … 17.0)	6
8	[17.0 … 17.7)	9
9	[17.7 … 18.4)	2
10	[18.4 … 19.1]	2

2.98. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у червні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[16.8 … 17.5)	6
2	[17.5 … 18.2)	9
3	[18.2 … 18.9)	10
4	[18.9 … 19.6)	20
5	[19.6 … 20.3)	19
6	[20.3 … 21.0)	6
7	[21.0 … 21.7)	10
8	[21.7 … 22.4)	2
9	[22.4 … 23.1)	2
10	[23.1 … 23.8]	1

2.99. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у липні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[19.8 … 20.5)	13
2	[20.5 … 21.2)	8
3	[21.2 … 21.9)	17
4	[21.9 … 22.6)	17
5	[22.6 … 23.3)	17
6	[23.3 … 24.0)	5
7	[24.0 … 24.7)	6
8	[24.7 … 25.4)	0
9	[25.4 … 26.1)	1
10	[26.1 … 26.8]	1

2.100. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у серпні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[18.2 … 19.0)	1
2	[19.0 … 19.8)	8
3	[19.8 … 20.6)	17
4	[20.6 … 21.4)	15
5	[21.4 … 22.2)	22
6	[22.2 … 23.0)	16
7	[23.0 … 23.8)	4
8	[23.8 … 24.6)	1
9	[24.6 … 25.4)	0
10	[25.4 … 26.2]	1

2.101. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у вересні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[13.9 … 14.6)	3
2	[14.6 … 15.3)	8
3	[15.3 … 16.0)	14
4	[16.0 … 16.7)	16
5	[16.7 … 17.4)	12
6	[17.4 … 18.1)	12
7	[18.1 … 18.8)	8
8	[18.8 … 19.5)	6
9	[19.5 … 20.2)	5
10	[20.2 … 20.9]	1

2.102. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у жовтні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$.Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[5.8 … 6.9)	1
2	[6.9 … 8.0)	5
3	[8.0 … 9.1)	4
4	[9.1 … 10.2)	15
5	[10.2 … 11.3)	20
6	[11.3 … 12.4)	19
7	[12.4 … 13.5)	11
8	[13.5 … 14.6)	5
9	[14.6 … 15.7)	4
10	[15.7 … 16.8]	1

2.103. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у листопаді (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[- 0.8 … 0.5)	3
2	[0.5 … 1.8)	5
3	[1.8 … 3.1)	7
4	[3.1 … 4.4)	12
5	[4.4 … 5.7)	14
6	[5.7 … 7.0)	22
7	[7.0 … 8.3)	15
8	[8.3 … 9.6)	6
9	[9.6 … 10.9)	0
10	[10.9 … 12.2]	1

2.104. На основі згрупованого ряду середньої місячної температури повітря у грудні (ст. Одеса) розрахувати статистичні оцінки початкових, центральних та основних моментів розподілу за умови $l = \overline{1,4}$. Розрахувати моду й медіану цієї випадкової величини.

i	Градація	m_i
1	[- 5.3 … - 4.0)	4
2	[- 4.0 … - 2.7)	4
3	[- 2.7 … - 1.4)	9
4	[-1.4 … - 0.1)	12
5	[- 0.1 … 1.2)	19
6	[1.2 … 2.5)	16
7	[2.5 … 3.8)	16
8	[3.8 … 5.1)	4
9	[5.1 … 6.4)	0
10	[6.4 … 7.7]	1

2.105.* За даними таблиці А.6 (додаток А) розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря у січні на ст. Вінниця за період з 1939 по 2000 рр. по згрупованому ряду і простій статистичній сукупності. Зробити висновок про характер розподілу цієї метеорологічної величини та пояснити розбіжності між отриманими статистичними оцінками.

2.106.* За даними таблиці А.6 (додаток А) розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря у лютому на ст. Вінниця за період з 1939 по 2000 рр. по згрупованому ряду і простій статистичній сукупності. Зробити висновок про характер розподілу цієї метеорологічної величини та пояснити розбіжності між отриманими статистичними оцінками.

2.107.* За даними таблиці А.6 (додаток А) розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря у березні на ст. Вінниця за період з 1939 по 2000 рр. по згрупованому ряду і простій статистичній сукупності. Зробити висновок про характер розподілу цієї метеорологічної величини та пояснити розбіжності між отриманими статистичними оцінками.

2.108.* За даними таблиці А.6 (додаток А) розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря у квітні на ст. Вінниця за два різних періоди – 50 і 30 років (1951-2000 рр. та 1961-1990 рр.). Проаналізувати статистичні оцінки моментів розподілу випадкової величини за ці періоди.

2.109.* За даними таблиці А.6 (додаток А) розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря у травні на ст. Вінниця за два різних періоди – 50 і 30 років (1951-2000 рр. та 1961-1990 рр.). Проаналізувати статистичні оцінки моментів розподілу випадкової величини за ці періоди.

2.110.* За даними таблиці А.6 (додаток А) розрахувати статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря у червні на ст. Вінниця за два різних періоди – 50 і 30 років (1951-2000 рр. та 1961-1990 рр.). Проаналізувати статистичні оцінки моментів розподілу випадкової величини за ці періоди.

2.111.* Провести розрахунки статистичних оцінок центральних моментів розподілу за формулами їх зв'язку з початковими моментами на основі ряду середньої місячної температури повітря у липні на ст. Вінниця за період 1951-2000 рр. Вихідні дані містяться в таблиці А.6 (додаток А).

2.112.* Провести розрахунки статистичних оцінок центральних моментів розподілу за формулами їх зв'язку з початковими моментами на основі ряду середньої місячної температури повітря у серпні на ст. Вінниця за період 1951-2000 рр. Вихідні дані містяться в таблиці А.6 (додаток А).

2.113.* Провести розрахунки статистичних оцінок центральних моментів розподілу за формулами їх зв'язку з початковими моментами на основі ряду середньої місячної температури повітря у вересні на ст. Вінниця за період 1951-2000 рр. Вихідні дані містяться в таблиці А.6 (додаток А).

2.114.* В якому сезоні (на основі центрального місяця) на ст. Одеса за період з 1939 по 2000 рр. мінливість температури повітря вища: весною чи восени? Вихідні дані містяться в таблиці А.1 (додаток А).

2.115.* В якому сезоні (на основі центрального місяця) на ст. Полтава за період з 1939 по 2000 рр. мінливість температури повітря вища: весною чи восени? Вихідні дані містяться в таблиці А.2 (додаток А).

2.116.* В якому сезоні (на основі центрального місяця) на ст. Херсон за період з 1939 по 2000 рр. мінливість температури повітря вища: весною чи восени? Вихідні дані містяться в таблиці А.5 (додаток А).

2.117.* В якому сезоні (на основі центрального місяця) на ст. Ялта за період з 1939 по 2000 рр. мінливість температури повітря вища: весною чи восени? Вихідні дані містяться в таблиці А.7 (додаток А).

3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА АЛГОРИТМИ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яку відповідність між можливими значеннями випадкової величини та їх ймовірностями. Для випадкової величини закон розподілу є вичерпною характеристикою. Знання закону, якому підпорядковується та чи інша гідрометеорологічна величина, дає можливість методично правильно організувати дослідження статистичної структури цих величин, які є основними ознаками кліматичного чи гідрологічного режиму регіону, що досліджується. Підібравши закон розподілу до статистичного ряду (вибірки), можна розрахувати ймовірність того, що випадкова величина знаходиться у заданому інтервалі або ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше (більше) деякого конкретного числа із області значень цієї випадкової величини.

Закон розподілу випадкової величини X може визначатися у вигляді *функції розподілу* $F(x)$ або *щільності ймовірності* $f(x)$. Дуже часто його представляють сукупністю *інтервальних ймовірностей* p_i або *інтервальних теоретичних частот* $\tilde{m}_i$. Якщо область значень гідрометеорологічної величини розділяється на k часткових інтервалів довжиною c, то знаючи щільність ймовірності, яка притаманна цій випадковій величині, можна знайти, використовуючи відомі властивості цієї функції, ймовірність того, що випадкова величина належить до будь-якого i-того часткового інтервалу з його серединою $\tilde{x}_i$. Ця ймовірність визначається формулою:

$$p_i = P\left[\tilde{x}_i - \frac{c}{2} < x < \tilde{x}_i + \frac{c}{2}\right] = \int_{\tilde{x}_i - \frac{c}{2}}^{\tilde{x}_i + \frac{c}{2}} f(x)\,dx \qquad \left(i = \overline{1,k}\right). \qquad (3.1)$$

Розрахувавши ці ймовірності для кожного часткового інтервалу, отримаємо закон розподілу гідрометеорологічної величини, що досліджується, у вигляді сукупності значень цієї величини на серединах градацій $\tilde{x}_i$ та інтервальних ймовірностей p_i:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_k \\ p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_k \end{cases} \qquad \left(i = \overline{1,k}\right). \qquad (3.2)$$

Як випливає з виразу (3.2), даний закон розподілу має структуру, подібну до структури згрупованого ряду (1.10). Маючи це на увазі, а також пам’ятаючи, що *частість* $\hat{p}_i$ *є незсуненою, ефективною і*

умотивованою оцінкою ймовірності p_i, приходимо до висновку, що *згрупований ряд* (1.10) *можна розглядати як емпіричний розподіл цієї величини. Графічним аналогом емпіричного розподілу є гістограма або полігон,* що відповідає цьому згрупованому ряду.

За допомогою простої рівності

$$\tilde{m}_i = p_i \cdot n, \tag{3.3}$$

де n – об'єм вихідного статистичного ряду, до якого добирається теоретичний закон розподілу,

сукупність інтервальних імовірностей перетворюється у відповідну сукупність теоретичних інтервальних частот $\tilde{m}_i$:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1, \ \tilde{x}_2, ..., \ \tilde{x}_i, ..., \ \tilde{x}_k \\ \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, ..., \ \tilde{m}_i, ..., \ \tilde{m}_k \end{cases} \left(i = \overline{1,k}\right). \tag{3.4}$$

Таким чином, можна отримати закон розподілу випадкової величини X, який визначається сукупністю інтервальних теоретичних частот та значень випадкової величини на серединах градацій.

Процес дослідження закону розподілу складається з таких етапів:

- по-перше, від простої статистичної сукупності випадкової величини, що розглядається, необхідно перейти до згрупованого ряду (див. розділ 1) і на основі зовнішнього вигляду отриманого емпіричного розподілу, який зображається полігоном чи гістограмою, з урахуванням статистичних оцінок моментів розподілу та деяких (в залежності від закону) допоміжних статистик, з заданою ймовірністю сформулювати гіпотезу H_0 про закон розподілу, яким можна апроксимувати даний емпіричний розподіл (див. розділ 4);
- по-друге, на основі статистичних оцінок моментів розподілу гідрометеорологічної величини, що досліджується, знаходять оцінки параметрів вибраного теоретичного розподілу;
- на третьому етапі для кожної градації за відповідними формулами розраховують теоретичні інтервальні частоти $\tilde{m}_i$. Для з'ясування якісних розбіжностей між емпіричними m_i і теоретичними $\tilde{m}_i$ частотами в кожному інтервалі доцільно побудувати полігони даного емпіричного та отриманого теоретичного розподілів;
- на завершальному етапі за визначеною методикою, що буде розглядатися в підрозділі 4.1, роблять кількісну оцінку розбіжності між емпіричними та теоретичними інтервальними частотами, тобто треба на заданому рівні значущості α (див. розділ 4) за допомогою

відомих критеріїв з'ясувати статистично значущі чи незначущі ці розбіжності. Якщо розбіжності статистично незначущі, то вони пояснюються тільки випадковими обставинами, пов'язаними, наприклад, з обмеженою кількістю спостережень. Якщо розбіжності суттєві (статистично значущі), то пов'язані вони з тим, що теоретичний закон розподілу випадкової величини з заданою ймовірністю не відповідає емпіричному розподілу. Задачу апроксимації емпіричного розподілу теоретичним законом (за умови прийняття основної гіпотези H_0) слід завершувати аналітичним представленням отриманого теоретичного розподілу, використовуючи для цього або щільність ймовірності $f(x)$, або функцію розподілу $F(x)$, або інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ (для розподілів Пірсона), оскільки вони, як відомо, пов'язані з інтервальною ймовірністю співвідношенням (3.3).

Розглянемо більш детально властивості та методику розрахунків інтервальних теоретичних частот для тих законів, які найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях гідрометеорологічних величин.

3.1. Нормальний розподіл

Основні теоретичні положення

Щільність імовірності та функція розподілу нормального закону для випадкової величини X визначаються рівняннями:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}, \tag{3.5}$$

$$-\infty < x < \infty$$

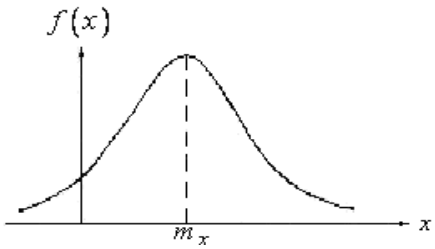
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx. \tag{3.6}$$

Параметрами цього закону є математичне сподівання m_x (*параметр масштабу*) і дисперсія σ_x^2 (*параметр форми*).

Цьому закону підпорядковуються, наприклад, температура повітря, парціальний тиск водяної пари, атмосферний тиск біля земної поверхні та у вільній атмосфері і деякі інші метеорологічні та гідрологічні ряди спостережень. Тому нормальний розподіл (закон Гаусса) часто використовується в статистичних дослідженнях атмосфери та гідросфери.

Визначимо ***основні властивості*** нормального розподілу.

1. *Графік кривої розподілу (щільності ймовірності)* для випадкової величини X має вигляд:



Вона симетрична відносно ординати, яка проходить через точку, що дорівнює *математичному сподіванню* m_x, а воно є *центром нормального розподілу.*

2. *Крива має один максимум* за умови $x = m_x$ (*розподіл одномодальний*). В точці максимуму щільність ймовірності дорівнює:

$$f(x)_{\max} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}. \tag{3.7}$$

3. За умови $|x| \to \infty$ вітки кривої асимптотично наближаються до осі ОХ.
4. Згідно з симетричністю кривої розподілу, *математичне сподівання, мода й медіана нормально розподіленої випадкової величини співпадають:* $m_x = M_o = Me$.
5. *Крива розподілу має дві точки перегину* з координатами:

$$\left[(m_x - \sigma_x); \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi e}}\right]; \left[(m_x + \sigma_x); \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi e}}\right]. \tag{3.8}$$

6. *Непарні центральні моменти нормального розподілу дорівнюють нулю*. За допомогою *рекурентного співвідношення*

$$\mu_l = (l-1)\sigma_x^2 \mu_{l-2}, \quad l = 2,3,4,... \tag{3.9}$$

є можливість знайти центральні моменти вищих порядків через моменти нижчих порядків. Крім того маємо:

$$\mu_2 = \sigma_x^2; \quad \mu_4 = 3\sigma_x^4; \quad \mu_6 = 15\sigma_x^6 \text{ і т.п.}$$

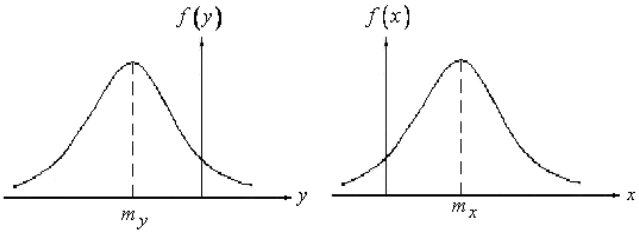
7. *Коефіцієнти асиметрії та ексцесу дорівнюють нулю*:

$$r_3 = As = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = 0; \tag{3.10}$$

$$E = r_4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{3\sigma_x^4}{\sigma_x^4} - 3 = 0. \tag{3.11}$$

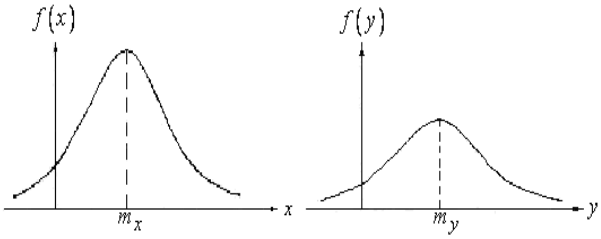
Стає зрозумілою важливість обчислювання цих коефіцієнтів для емпіричних рядів, оскільки один (*As*) є *мірою скосу*, а інший (*E*) – характеризує *сплющеність (чи витягнутість) кривої даного розподілу порівняно з кривою нормального розподілу*.

8. *Форма кривої нормального розподілу не змінюється зі зміною математичного сподівання* m_x *(параметра масштабу).*



При зменшенні (чи збільшенні) математичного сподівання графік щільності ймовірності зсувається ліворуч (праворуч) по осі OX.

9. *При змінюванні дисперсії* σ_x^2 *змінюється форма кривої розподілу випадкової величини X.* Зі збільшенням дисперсії максимальна ордината, що визначається рівністю (3.7), зменшується, а зі зменшенням σ_x^2 - збільшується. *Згідно з властивістю щільності ймовірності, площа, що обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.* Тому при зростанні дисперсії крива розподілу розтягується уздовж осі OX.



10. *Якщо випадкова величина X нормально розподілена, для неї справедливими є три співвідношення:*

$$P\left[m_x - \sigma_x < x < m_x + \sigma_x\right] = 0.6827; \qquad (3.12)$$

$$P\left[m_x - 2\sigma_x < x < m_x + 2\sigma_x\right] = 0.9545; \qquad (3.13)$$

$$P\left[m_x - 3\sigma_x < x < m_x + 3\sigma_x\right] = 0.9973. \qquad (3.14)$$

З рівності (3.14) та рис. 3.1 виходить, що практично розсіяння нормально розподіленої випадкової величини *X* укладається на інтервалі $m_x \pm 3\sigma_x$. Імовірність того, що значення випадкової величини *X* виходить за цей інтервал, дуже мала і дорівнює 0.0027. Така подія може вважатися практично неможливою. На проведеному міркуванні основується *правило трьох сигм* , яке формулюється таким чином:

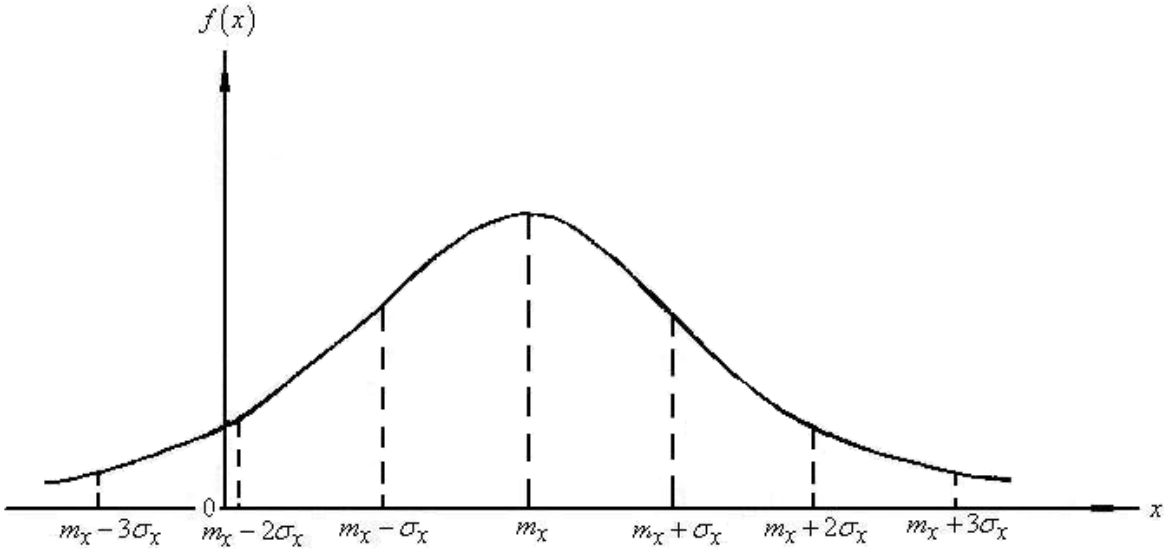


Рисунок 3.1 - Щільність ймовірності нормального розподілу

якщо випадкова величина має нормальний розподіл, то відхил цієї величини від математичного сподівання за абсолютною величиною не перебільшує трьох середніх квадратичних відхилів. Але, якщо остання властивість виконується, це *ще не означає*, що випадкова величина *X* підпорядковується нормальному розподілу.

Термін "*нормальний розподіл*" застосовується в умовному смислі як загально прийнятий в літературі термін. Так, твердження, що якась ознака підпорядковується нормальному закону розподілу, зовсім не означає наявність будь-яких непорушних норм, таких, що полягають в основі явища, відбиттям якого є ознака, яка розглядається. Підпорядкування іншим видам законів не означає аномальність цього явища. *Головна особливість нормального закону полягає у тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу.*

Нижче наводиться методика розрахунків інтервальних теоретичних частот нормального розподілу.

Розрахунок інтервальної теоретичної частоти для i-того часткового інтервалу можна проводити за двома методами. Але спочатку треба перейти від меж i-того часткового інтервалу вихідної гідрометеорологічної величини (x_{i-1} і x_{i+1}) до відповідних нових центрованих і нормованих величин для лівої межі (t_{i-1}) і правої межі (t_{i+1}) кожної градації. Для цього використовуються такі формули:

$$t_{i-1} = \frac{x_{i-1} - \overline{x}}{S_x} \qquad \left(i = \overline{1,k}\right); \qquad (3.15)$$

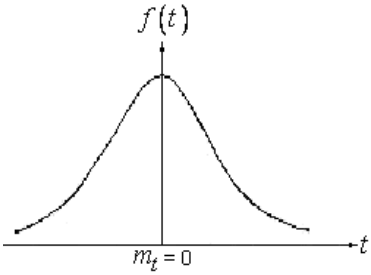
$$t_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}}{S_x} \qquad \left(i = \overline{1,k}\right), \tag{3.16}$$

де S_x – оцінка середнього квадратичного відхилу випадкової величини X;

$\overline{x}$ – середнє значення, яке є оцінкою математичного сподівання випадкової величини *X*.

Перший шлях обчислення інтервальних теоретичних частот нормального розподілу передбачає використання значень *щільності ймовірності нормованого нормального розділу* $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}. \tag{3.17}$$



Крива розподілу (3.17) *симетрична відносно математичного сподівання центрованої і нормованої випадкової величини, яке є центром цього розподілу* ($m_t = 0$). Дисперсія такої величини дорівнює одиниці $\left(\sigma_t^2 = 1\right)$.

Значення функції (3.17) затабульовані і наводяться в додатку Ж.

Для розрахунку теоретичної інтервальної частоти i-того часткового інтервалу використовується формула:

$$\tilde{m}_i = \frac{nc}{S_x} f(t_i) \qquad \left(i = \overline{1,k}\right), \tag{3.18}$$

де t_i – безрозмірне значення випадкової величини на середині i-того часткового інтервалу, що розраховується за формулою:

$$t_i = \frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{2}. \tag{3.19}$$

Функція $f(t)$ ***є функцією парною***: $f(-t) = f(t)$.

Другий шлях обчислення інтервальних теоретичних частот нормального розподілу полягає у використанні *інтеграла ймовірності* $\Phi(t)$, який має вигляд:

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt. \tag{3.20}$$

Значення цього інтеграла для різних t приводяться в додатку Е.

За допомогою інтеграла ймовірності інтервальна ймовірність для i -того часткового інтервалу розраховується так:

$$p_i = P\left(t_{i-1} < t < t_{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(t_{i+1}\right) - \Phi\left(t_{i-1}\right)\right] \quad \left(i = \overline{1,k}\right), \tag{3.21}$$

а теоретичні інтервальні частоти за формулою:

$$\tilde{m}_i = n\ p_i \quad \left(i = \overline{1,k}\right), \tag{3.22}$$

де, як і раніше, n – об'єм вибірки (статистичного ряду).

Треба мати на увазі, що ***інтеграл імовірності є непарною функцією***, тобто $\Phi(-t) = -\Phi(t)$.

Розрахунки теоретичних частот нормального розподілу наводяться у типовій задачі.

Розв'язання типової задачі. ***Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним законом. Розрахунок інтервальних теоретичних частот нормального розподілу.***

Відомо, що при дослідженнях законів розподілу випадкових величин, перш за все, необхідно від простої статистичної сукупності $X: x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ перейти до згрупованого ряду (див. розділ 1). Типова задача вирішується на основі вихідних даних, які представлені у вигляді вже згрупованого ряду.

Таблиця 3.1–Згрупований ряд середньодобової температури повітря, °С (ст. Одеса, 23 квітня)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	3.0	4.6	6.2	7.8	9.4	11.0	12.6	14.2	15.8	17.4
m_i	1	3	7	21	21	19	13	9	3	2

При реалізації алгоритму дослідження закону розподілу на ***першому етапі*** розрахуємо статистичні оцінки першого початкового $\left(\hat{\nu}_1 = \bar{x}\right)$, другого центрального $\left(\hat{\mu}_2\right)$ моментів розподілу, отримаємо незсунену, ефективну та умотивовану оцінку дисперсії $\left(S_x^2\right)$ та середнього квадратичного відхилу $\left(S_x\right)$, розрахуємо коефіцієнти асиметрії $\left(As = \hat{r}_3\right)$

та ексцесу (E), моду (M_0), медіану (Me) та статистику æ; графічно представимо даний емпіричний розподіл у вигляді полігону.

Після аналізу отриманих статистичних оцінок параметрів сформулюємо гіпотезу про можливість апроксимації емпіричного розподілу (табл. 3.1) теоретичним законом. Порядок обчислення перелічених статистичних оцінок моментів розподілу краще представити в таблиці, приклад якої наводиться нижче (табл. 3.2).

Розрахунки M_0 та M_e дають такі значення:

$$M_0 = x_0 + c\frac{(m_i - m_{i-1})}{2m_i - m_{i-1} - m_{i+1}} = 7.0 + 2\times 1.6\frac{(21-7)}{21\times 2 - 7 - 19} = 9.8;$$

$$M_e = x_e + c\frac{(n/2 - m^*)}{m_e} = 8.6 + 1.6\frac{(50-32)}{21} = 10.0.$$

Оскільки *нормальний розподіл є частинним випадком розподілів Пірсона*, тип якого залежить від статистики æ, тому необхідно розрахувати цю характеристику. Але спочатку отримаємо статистику *S*:

$$S = \frac{6(r_4 - r_3^2 - 1)}{3r_3^2 - 2r_4 + 6} = \frac{6(2.81 - 0.27^2 - 1)}{3\times 0.27^2 - 2\times 2.81 + 6} = 17.40;$$

$$æ = -\frac{r_3^2(S+2)^2}{16(S+1)} = -\frac{0.27^2(17.40+2)^2}{16(17.40+1)} = -0.0933.$$

Аналіз статистичних оцінок моментів розподілу, які отримані (табл. 3.2), свідчать про те, що, по-перше, майже збігаються середнє, модальне значення і медіана ($\bar{x} \approx M_o \approx M_e$) випадкової величини, що досліджується. Це є однією з властивостей нормального розподілу. По-друге, оцінка третього основного моменту та статистика æ близькі до нуля; четвертий основний момент близький до трьох. Саме такі значення мають ці основні моменти у випадку нормального розподілу. По-третє, розподіл емпіричних частот відносно середнього значення є майже симетричним (рис. 3.2). Усі ці факти дають підставу апроксимувати розподіл емпіричних частот нормальним розподілом теоретичних частот.

На ***другому етапі*** дослідження закону розподілу визначають оцінки параметрів теоретичного закону (в нашому випадку нормального розподілу), який добирається до емпіричного розподілу.

Таблиця 3.2 – Порядок розрахунків статистичних оцінок моментів розподілу на основі емпіричного ряду середньодобової температури повітря (ст. Одесса, 23 квітня)

i	Градація	$\tilde{x}_i$	m_i	$\sum_{i=1}^{10} m_i$	$\tilde{x}_i m_i$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2 m_i$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^3 m_i$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^4 m_i$
1	[2.2 ... 3.8)	3.0	1	1	3.0	-7.1	50.41	-357.91	2541.17
2	[3.8 ... 5.4)	4.6	3	4	13.8	-5.5	90.75	-499.13	2745.19
3	[5.4 ... 7.0)	6.2	7	11	43.4	-3.9	106.47	-415.23	1619.41
4	[7.0 ... 8.6)	7.8	21	32	163.8	-2.3	111.09	-255.51	587.67
5	[8.6 ... 10.2)	9.4	21	53	197.4	-0.7	10.29	-7.20	5.04
6	[10.2 ... 11.8)	11.0	19	72	209.0	0.9	15.39	13.85	12.47
7	[11.8 ... 13.4)	12.6	13	85	163.8	2.5	81.25	203.13	507.81
8	[13.4 ... 15.0)	14.2	9	94	127.8	4.1	151.29	620.29	2543.18
9	[15.0 ... 16.6)	15.8	3	97	47.4	5.7	97.47	555.58	3166.80
10	[16.6 ... 18.2]	17.4	2	99	34.8	7.3	106.58	778.03	5679.65
Сума					1004.2		820.99	635.90	19408.39
Оцінка					$\hat{v}_1 = \overline{x} = 10.1$		$\hat{\mu}_2 = 8.29$ $S_x^2 = 8.38$ $S_x = 2.89$	$\hat{\mu}_3 = 6.42$	$\hat{\mu}_4 = 196.04$

$$\hat{r}_3 = \frac{\hat{\mu}_3}{S_x^3} = \frac{6.42}{2.89^3} = 0.27; \qquad \hat{r}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{S_x^4} = \frac{196.04}{2.89^4} = 2.81; \qquad E = \hat{r}_4 - 3 = 2.81 - 3 = -0.19.$$

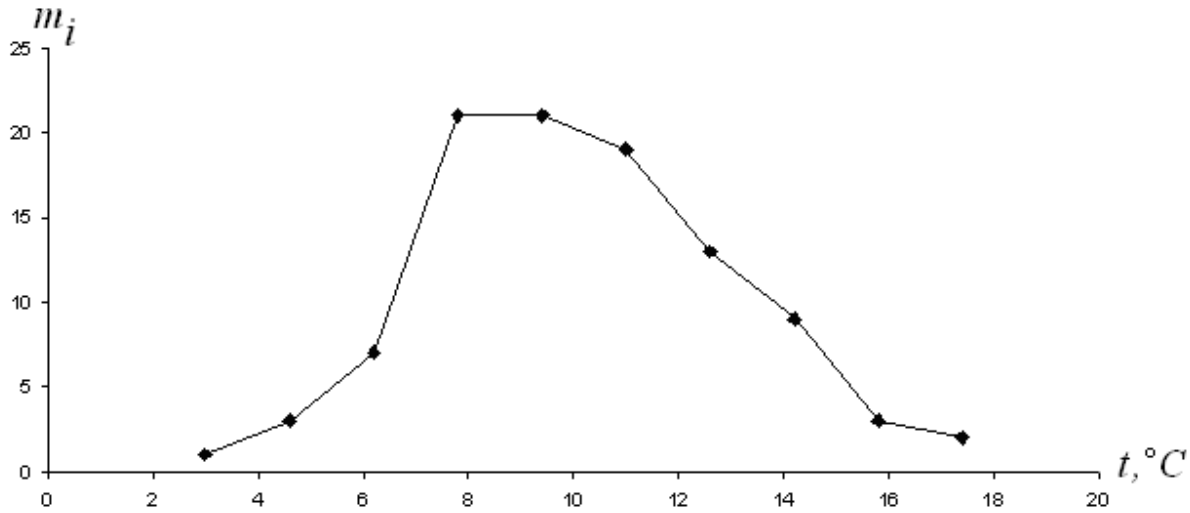


Рисунок 3.2 – Полігон розподілу середньодобової температури повітря, °С (ст. Одеса, 23 квітня)

На основі статистичної сукупності середньодобової температури повітря за 23 квітня на ст. Одеса були розраховані оцінки параметрів нормального розподілу – середнє значення (оцінка математичного сподівання) $\overline{x} = \hat{m}_x = 10.1°\text{C}$ і незсунена оцінка дисперсії $S_x^2 = 8.38\,(°\text{C})^2$.

На ***третьому етапі*** апроксимації проводимо обчислення інтервальних теоретичних частот для кожного часткового інтервалу за відповідними формулами, використовуючи один із двох відомих методів. Але спочатку перейдемо від меж i-того часткового інтервалу вихідної гідрометеорологічної величини (x_{i-1} і x_{i+1}) до відповідних нових центрованих і нормованих величин для лівої (t_{i-1}) і правої (t_{i+1}) меж кожного інтервалу.

Використовуючи формули (3.15) і (3.16) знайдемо нові межі. Наприклад, для першої градації ліва межа $t_{i-1} = \dfrac{2.2 - 10.1}{2.89} = -2.73$, права – $t_{i+1} = \dfrac{3.8 - 10.1}{2.89} = -2.18$; для другої градації межами будуть величини: $t_{i-1} = -2.18$ та $t_{i+1} = -1.63$ і т.п.

Спочатку *обчислення інтервальних теоретичних частот проведемо з використанням значень щільності ймовірності нормованого нормального розділу* $f(t)$ за формулою:

$$\tilde{m}_i = \frac{nc}{S_x} f(t_i) \qquad \left(i = \overline{1,k}\right),$$

де t_i – безрозмірні значення випадкової величини t на серединах кожного із 10 часткових інтервалів, що розраховуються за формулою (3.19); об’єм ряду n=99;

довжина градації c =1.6; незсунена ефективна та умотивована оцінка середнього квадратичного відхилу S_x= 2.89.

Функція $f(t)$ є функцією парною: $f(-t) = f(t)$.

В табл. 3.3 наводяться результати розрахунків безрозмірних меж часткових інтервалів (5-й і 6-й стовпчики), середин градацій для нової змінної (7-й стовпчик), значення щільності ймовірності нормованого нормального розподілу, які отримали по таблицях додатку Ж (8-й стовпчик), відповідні інтервальні теоретичні частоти (9-й стовпчик) та інтервальні ймовірності (10-й стовпчик). В 11-тому стовпчику наводяться значення функції розподілу отриманого теоретичного закону, а саме нормального закону розподілу.

Таблиця 3.3 - Приклад розрахунків інтервальних теоретичних частот нормального розподілу за допомогою щільності ймовірності $f(t_i)$ (ст. Одесса, 23 квітня)

i	Вихідна межа		m_i	Нова межа		t_i	$f(t_i)$	$\tilde{m}_i$	p_i	$P(X<x)$
	x_{i-1}	x_{i+1}		t_{i-1}	t_{i+1}					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	2.2	3.8	1	-2.73	-2.18	-2.46	0.0194	1.1	0.011	0.011
2	3.8	5.4	3	-2.18	-1.63	-1.91	0.0644	3.5	0.035	0.055
3	5.4	7.0	7	-1.63	-1.07	-1.35	0.1604	8.8	0.089	0.144
4	7.0	8.6	21	-1.07	-0.52	-0.80	0.2897	15.9	0.161	0.305
5	8.6	10.2	21	-0.52	0.04	-0.24	0.3876	21.2	0.214	0.519
6	10.2	11.8	19	0.04	0.59	0.32	0.3700	20.3	0.205	0.724
7	11.8	13.4	13	0.59	1.14	0.87	0.2732	15.0	0.152	0.876
8	13.4	15.0	9	1.14	1.70	1.42	0.1456	8.0	0.081	0.957
9	15.0	16.6	3	1.70	2.25	1.98	0.0562	3.1	0.031	0.988
10	16.6	18.2	2	2.25	2.80	2.53	0.0163	0.9	0.009	0.997

Проведемо також *обчислення інтервальних теоретичних частот з використанням інтеграла ймовірності* $\Phi(t)$.

В табл. 3.4 наводяться результати розрахунків інтервальних теоретичних частот $\tilde{m}_i$ з використанням інтеграла ймовірності для правої $\Phi(t_{i+1})$ та лівої $\Phi(t_{i-1})$ безрозмірних меж часткових інтервалів(7-й та 8-й стовпчики відповідно).

Як видно із 9-го стовпчика табл. 3.3 і 3.4, результати, що отримувалися за двома різними методами оцінювання інтервальних теоретичних частот нормального розподілу, незначно розрізняються. Крім

того, теоретичні інтервальні частоти є близькими до частот емпіричного розподілу (рис. 3.3).

Таблиця 3.4 – Приклад розрахунків інтервальних теоретичних частот нормального розподілу за допомогою інтеграла ймовірності $\Phi(t)$ (ст. Одесса, 23 квітня)

n=99; $\overline{x}$=10.1; $S_x = 2.89$; $c = 1.6$.

i	Вихідна межа		m_i	Нова межа		$\Phi(t_{i+1})$	$\Phi(t_{i-1})$	$\tilde{m}_i$	p_i	$P(X < x)$
	x_{i-1}	x_{i+1}		t_{i-1}	t_{i+1}					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	2.2	3.8	1	-2.73	-2.18	-0.97074	-0.99367	1.1	0.011	0.011
2	3.8	5.4	3	-2.18	-1.63	-0.89690	-0.97074	3.7	0.037	0.048
3	5.4	7.0	7	-1.63	-1.07	-0.71538	-0.89690	9.0	0.091	0.139
4	7.0	8.6	21	-1.07	-0.52	-0.39694	-0.71538	15.8	0.160	0.299
5	8.6	10.2	21	-0.52	0.04	0.03191	-0.39694	21.2	0.214	0.513
6	10.2	11.8	19	0.04	0.59	0.44481	0.03191	20.4	0.206	0.719
7	11.8	13.4	13	0.59	1.14	0.74571	0.44481	14.9	0.151	0.870
8	13.4	15.0	9	1.14	1.70	0.91087	0.74571	8.2	0.083	0.953
9	15.0	16.6	3	1.70	2.25	0.97555	0.91087	3.2	0.032	0.985
10	16.6	18.2	2	2.25	2.80	0.99489	0.97555	1.0	0.010	0.995

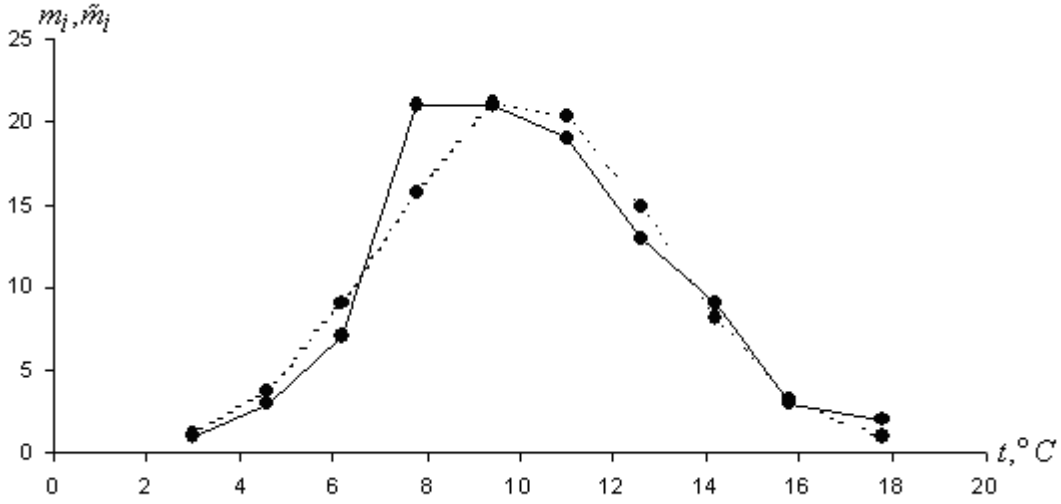


Рисунок 3.3 – Полігони розподілу емпіричних m_i (—) та теоретичних $\tilde{m}_i$ (---) частот нормального розподілу середньодобової температури повітря (ст. Одеса, 23 квітня)

Дослідження завершується (**четвертий етап**) перевіркою статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу нормальному закону (див. підрозділ 4.1).

Запитання для самоперевірки

1. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
2. З яких етапів складається дослідження закону розподілу випадкової величини?
3. Якими функціями можна представити теоретичний розподіл? Дати їм визначення та перелічити основні властивості.
4. Чому закон розподілу можливо представляти інтервальними теоретичними частотами?
5. Чим відрізняються прості статистичні сукупності від згрупованих?
6. Як розраховують межі часткових інтервалів, їх кількість та довжину?
7. Який сенс гістограми та полігону розподілу випадкової величини?
8. Перелічити основні властивості нормального розподілу.
9. Який параметр для кривої нормального розподілу є параметром форми? параметром масштабу?
10. Якщо випадкова величина нормально розподілена, з якою ймовірністю вона буде знаходитися в інтервалі $[m_x \pm \sigma_x]$? $[m_x \pm 2\sigma_x]$? $[m_x \pm 3\sigma_x]$?
11. Підкреслити основні умови, за яких дослідник може сформулювати гіпотезу про можливість апроксимації емпіричного розподілу нормальним законом.
12. Який зв'язок між випадковою величиною X та нормальною величиною t у випадку нормального розподілу?
13. Як розрахувати інтервальні теоретичні частоти нормального розподілу, використовуючи функцію $f(t)$? Якими властивостями вона володіє?
14. Як розрахувати інтервальні теоретичні частоти нормального розподілу, використовуючи інтеграл ймовірностей $\Phi(t)$? Якими властивостями ця функція володіє?

Задачі

В задачах цього підрозділу (3.1.1–3.1.30) на основі заданого емпіричного розподілу треба розрахувати інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) та інтервальні ймовірності (p_i) нормального розподілу, використовуючи ту чи іншу методику. Щоб удосконалитися у виборі теоретичного розподілу, розв'язання задач треба почати з побудови полігону (чи гістограми), розрахунків необхідних статистичних оцінок моментів розподілу випадкової величини, що досліджується, та проведення аналізу отриманих оцінок. На основі графічного зображення теоретичного та емпіричного розподілів (полігонів) зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами нормального розподілу.

3.1.1. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	23.8	24.3	24.8	25.3	25.8	26.3	26.8	27.3	27.8	28.3
m_i	1	3	7	11	18	17	10	8	3	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.09; r_4 = 2.72.

3.1.2. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	4.1	6.1	8.1	10.1	12.1	14.1	16.1	18.1	20.1
m_i	1	4	8	16	14	11	5	0	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.12; r_4 = 3.00.

3.1.3. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	14.1	16.1	18.1	20.1	22.1	24.1	26.1	28.1	30.1
m_i	1	1	3	10	18	12	8	3	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.02; r_4 = 3.27.

3.1.4. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	5.0	7.0	9.0	11.0	13.0	15.0	17.0	19.0	21.0
m_i	3	8	10	9	17	13	11	3	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.14; r_4 = 2.21.

3.1.5. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3	27.8	29.3	30.8
m_i	1	3	12	15	15	14	9	4	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.17; r_4 = 2.47.

3.1.6. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	23.0	23.6	24.2	24.8	25.4	26.0	26.6	27.2	27.8
m_i	2	0	6	11	18	13	7	2	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.19; r_4 = 3.40.

3.1.7. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	3.8	5.3	6.8	8.3	9.8	11.3	12.8	14.3	15.8	17.3
m_i	4	2	7	16	20	18	11	8	3	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.09; r_4 = 2.88.

3.1.8. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 5 червня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.7	14.2	15.7	17.2	18.7	20.2	21.7	23.2	24.7	26.2
m_i	3	3	7	29	19	20	13	3	2	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.13; r_4 = 3.25.

3.1.9. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 1 березня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-9.6	-7.8	-6.0	-4.2	-2.4	-0.6	1.2	3.0	4.8	6.6
m_i	3	3	6	9	13	18	16	13	11	7

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.32; r_4 = 2.49.

3.1.10. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 19 липня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	18.1	19.2	20.3	21.4	22.5	23.6	24.7	25.8	26.9	28.0
m_i	5	8	10	19	19	16	17	3	2	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.06; r_4 = 2.68.

3.1.11. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3	25.8	27.3
m_i	4	8	11	14	16	15	12	8	5	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.08; r_4 = 2.28.

3.1.12. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	20.9	21.4	21.9	22.4	22.9	23.4	23.9	24.4	24.9	25.4
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.16; r_4 = 2.57.

3.1.13. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 12 серпня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	15.3	16.7	18.1	19.5	20.9	22.3	23.7	25.1	26.5	27.9
m_i	1	2	7	11	17	26	21	5	5	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.09; r_4 = 3.06.

3.1.14. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
m_i	2	5	9	14	16	15	13	10	4	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.01; r_4 = 2.38.

3.1.15. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.6	11.1	11.6	12.1	12.6	13.1	13.6	14.1	14.6	15.1
m_i	4	8	9	12	15	14	13	10	6	3

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.03; r_4 = 2.18.

3.1.16. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 26 серпня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.3	14.8	16.3	17.8	19.3	20.8	22.3	23.8	25.3	26.8
m_i	2	2	5	12	22	23	20	8	5	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.24; r_4 = 3.14.

3.1.17. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 20 березня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-5.5	-3.5	-1.5	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5
m_i	1	5	8	20	23	18	16	3	3	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.24; r_4 = 3.04.

3.1.18. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 10 жовтня на ст. Одеса::

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	5.6	7.1	8.6	10.1	11.6	13.1	14.6	16.1	17.6	19.1
m_i	3	7	9	10	16	16	20	14	4	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.33; r_4 = 2.30.

3.1.19. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	21.6	22.1	22.6	23.1	23.6	24.1	24.6	25.1	25.6	26.1
m_i	1	3	7	11	18	17	10	8	3	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.09; r_4 = 2.72.

3.1.20. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	22.7	23.2	23.7	24.2	24.7	25.2	25.7	26.2	26.7	27.2
m_i	2	5	8	10	12	13	11	9	7	3

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.05; r_4 = 2.17.

3.1.21. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 11 вересня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.5	13.7	14.9	16.1	17.3	18.5	19.7	20.9	22.1	23.3
m_i	4	6	9	11	21	13	12	14	6	5

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.05; r_4 = 2.27.

3.1.22. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	19.8	20.3	20.8	21.3	21.8	22.3	22.8	23.3	23.8	24.3
m_i	2	6	10	13	16	15	12	9	5	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.01; r_4 = 2.28.

3.1.23. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 18 червня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.7	15.0	16.3	17.6	18.9	20.2	21.5	22.8	24.1	25.4
m_i	3	5	12	18	15	12	14	11	8	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.06; r_4 = 2.13.

3.1.24. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.3	8.8	9.3	9.8	10.3	10.8	11.3	11.8	12.3	12.8
m_i	1	3	7	11	18	17	10	8	3	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.09; r_4 = 2.72.

3.1.25. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 27 липня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	17.2	18.5	19.8	21.1	22.4	23.7	25.0	26.3	27.6	28.9
m_i	2	8	15	16	14	27	8	6	3	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.20; r_4 = 2.62.

3.1.26. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 2 серпня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	17.1	18.4	19.7	21.0	22.3	23.6	24.9	26.2	27.5	28.8
m_i	4	3	10	21	25	23	8	3	2	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.05; r_4 = 3.45.

3.1.27. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 22 червня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	14.2	15.5	16.8	18.1	19.4	20.7	22.0	23.3	24.6	25.9
m_i	1	3	9	17	17	22	17	8	4	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.06; r_4 = 2.65.

3.1.28. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	11.7	12.2	12.7	13.2	13.7	14.2	14.7	15.2	15.7	16.2
m_i	2	5	9	10	12	13	11	9	6	3

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = - 0.01; r_4 = 2.18.

3.1.29. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	15.4	15.9	16.4	16.9	17.4	17.9	18.4	18.9	19.4	19.9
m_i	1	6	12	16	19	18	14	11	4	1

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.05; r_4 = 2.30.

3.1.30. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності нормального закону на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.8	12.3	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2

Статистичні оцінки основних моментів дорівнюють: r_3 = 0.16; r_4 = 2.57.

3.2. Перший тип розподілів Пірсона

Основні теоретичні положення

У відповідності до загальної теорії розподілів Пірсона *перший тип спостерігається за умови від'ємного значення статистики капа* $(æ < 0)$. Вона розраховується за такою формулою:

$$æ = -\frac{r_3^2 (S+2)^2}{16(S+1)}. \qquad (3.23)$$

Статистику S отримаємо як:

$$S = \frac{6\left(r_4 - r_3^2 - 1\right)}{3r_3^2 - 2r_4 + 6}, \tag{3.24}$$

де r_3 та r_4 – третій та четвертий основні моменти розподілу.

Для першого типу розподілів Пірсона основне рівняння має вигляд:

$$\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 \left(1 + \frac{z_i}{l_1}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{z_i}{l_2}\right)^{q_2}. \tag{3.25}$$

У рівнянні (3.25) q_1, q_2, l_1, l_2, $\tilde{m}_0$ – параметри цього розподілу, а змінна z_i – безрозмірна величина, яка розраховується за формулою:

$$z_i = \frac{\tilde{x}_i - \hat{x}}{c}, \tag{3.26}$$

де

$$\hat{x} = \overline{x} - \frac{S_x \cdot r_3 (S+2)}{2(S-2)}. \tag{3.27}$$

Параметри форми (q_1, q_2) визначаються як:

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[(S-2) \mp S(S+2)\frac{r_3}{t}\right], \tag{3.28}$$

де t – статистика, що розраховується за допомогою рівняння:

$$t = 4\sqrt{(S+1)(1-æ)}, \tag{3.29}$$

Справедлива рівність(3.30):

$$q_1 + q_2 = S - 2. \tag{3.30}$$

Параметри масштабу (l_1, l_2) розраховуються за формулами (3.31) та (3.32):

$$l_1 = \frac{q_1 l}{S-2} \tag{3. 31}$$

$$l_2 = \frac{q_2 l}{S-2}, \tag{3.32}$$

де l_1 – є ліва межа, а l_2 – права межа визначення функції (3.25).

Область існування функції (3.25) можна визначити також рівняннями:

$$l = l_1 + l_2 \quad (3.33); \qquad l = \frac{\sigma t}{2} \quad (3.34), \text{ де } \sigma = \frac{S_x}{c}. \quad (3.35)$$

Формула (3.35) свідчить про те, що σ є безрозмірний середній квадратичний відхил, оскільки c – довжина часткового інтервалу.

Параметр $\tilde{m}_0$ *є теоретичною частотою за умови* $z_i = 0$ і розраховується за допомогою рівняння (3.36):

$$\tilde{m}_0 = \frac{n\, q_1^{q_1} q_2^{q_2}}{l(S-2)^{S-2}} \frac{\Gamma(q_1+q_2+2)}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)}, \quad (3.36)$$

де

n – загальний об'єм вибірки;

$\Gamma(x)$ – гамма-функція відповідного аргументу.

Її значення для заданого x знаходяться в додатку К .

Вигляд кривих розподілу Пірсона першого типу (рис. 3.4) залежить від *параметрів форми* q_1 і q_2 , а *параметри* l_1 та l_2 *визначають границі області визначення функції* (3.25). У відповідності з цим, *виділяють 9 кривих,* які необхідно враховувати при апроксимації емпіричних розподілів першим типом розподілів Пірсона.

Алгоритм *апроксимації емпіричного розподілу I типом розподілів Пірсона* складається з 4-х основних етапів.

Відомо, що при дослідженнях законів розподілу випадкових величин, ***перш за все,*** необхідно від простої статистичної сукупності $X: x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ перейти до згрупованого ряду. Розрахувати статистичні оцінки першого початкового $(\hat{\nu}_1 = \bar{x})$, другого центрального моментів розподілу $(\hat{\mu}_2)$, отримати незсунену, ефективну і умотивовану оцінку дисперсії $\left(S_x^2\right)$ та середнього квадратичного відхилу (S_x) випадкової величини, що досліджується. Розрахувати коефіцієнти асиметрії $(As = \hat{r}_3)$ та ексцесу (E), графічно представити отриманий емпіричний розподіл .

Також розрахувати статистики $S, æ, t$ і, якщо для æ виконується невірність æ < 0, то формулюють гіпотезу на заданому рівні значущості (розділ 4) про можливість апроксимації емпіричного розділу I типом розподілів Пірсона.

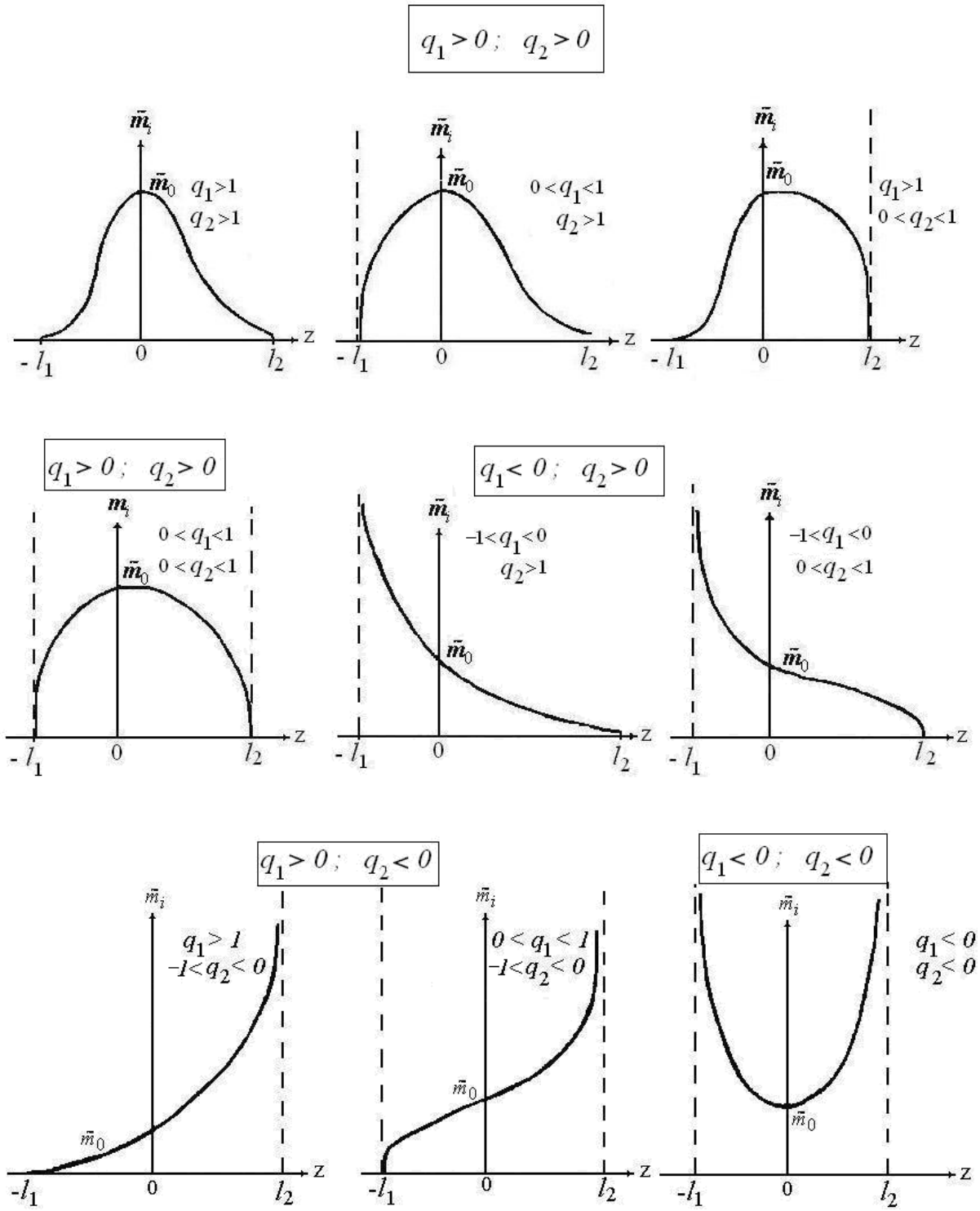


Рисунок 3.4 – Криві розподілу першого типу Пірсона за умов різних значень параметрів форми $(q_1,\ q_2)$ та параметрів масштабу $(l_1,\ l_2)$

На ***другому етапі*** оцінюють параметри цього розподілу, а саме q_1, q_2, l_1, l_2, $\tilde{m}_0$ та необхідні для цього статистики за відповідними формулами.

На ***третьому етапі*** розраховують інтервальні теоретичні частоти за допомогою основного рівняння I типу (3.25). Але спочатку треба отримати статистику $\hat{x}$, використовуючи рівняння (3.27) і за допомогою формули (3.26) перейти від розмірних значень середин часткових інтервалів $\tilde{x}_i$ до безрозмірних величин z_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$.

Розраховані для кожної градації інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ порівнюють з відповідними емпіричними частотами m_i і на основі отриманих характеристик (вираз (3.37)) будують полігони цих розподілів та з'ясовують спочатку якісні розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$:

$$\begin{matrix} \tilde{x}_1, & \tilde{x}_2, & \ldots, & \tilde{x}_i, & \ldots, & \tilde{x}_k \\ m_1, & m_2, & \ldots, & m_i, & \ldots, & m_k \\ \tilde{m}_1, & \tilde{m}_2, & \ldots, & \tilde{m}_i, & \ldots, & \tilde{m}_k \end{matrix} . \qquad (3.37)$$

Метод порівняння емпіричних та теоретичних частот за допомогою відомих критеріїв (див. підрозділ 4.1) дає змогу отримати остаточну відповідь на можливість апроксимації (з заданою ймовірністю) емпіричного розподілу першим типом розподілів Пірсона. Тому на ***четвертому етапі*** треба перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного та теоретичного розподілів. Оскільки перевірка цієї гіпотези відносно типу розподілу є самостійною задачею, алгоритм її рішення буде розглядатися окремо (розділ 4).

Розв'язання типової задачі. ***Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним законом. Розрахунок інтервальних теоретичних частот I типу розподілів Пірсона.***

За даними метеорологічних спостережень протягом 85 років було отримано статистичний ряд середніх місячних температур повітря у січні на ст. Одеса. На його основі збудовано згрупований ряд та розраховані статистичні оцінки моментів розподілу: середнє значення ($\overline{x}$); середній квадратичний відхил температури повітря (S_x); третій (r_3) і четвертий (r_4) основні моменти розподілу. Їх значення наводяться в табл. 3.5.

Як відомо, згрупований ряд має сенс емпіричного розподілу інтервальних частот і тому необхідно цей ряд представити графічно (рис. 3.5).

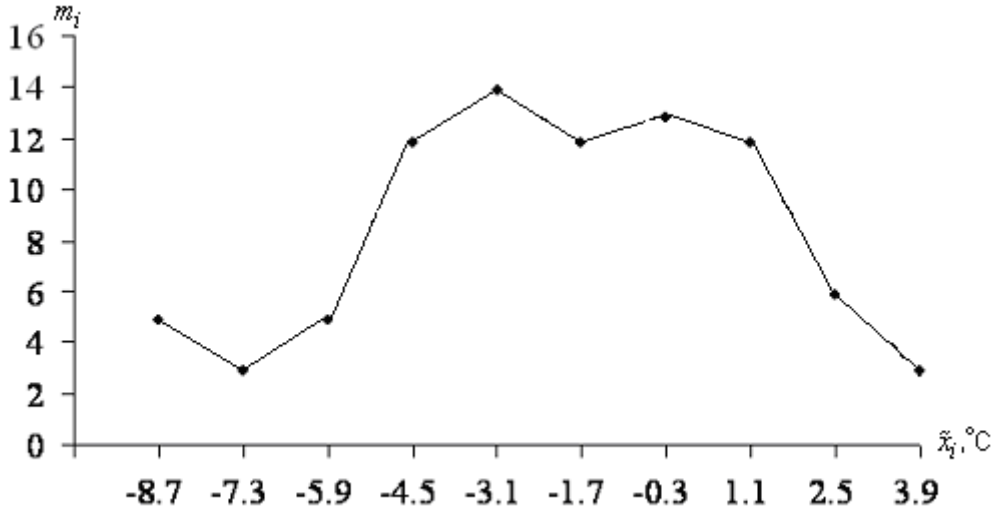


Рисунок 3.5 – Полігон розподілу емпіричних m_i частот середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

З рис. 3.5 видно, що розподіл емпіричних частот не є симетричним. Тому будемо шукати підстави для апроксимації емпіричного розподілу розподілами Пірсона. Для цього знайдемо статистику æ і визначимося в типі розподілів Пірсона, яким можна буде апроксимувати емпіричний розподіл. Використовуючи формули (3.24) та (3.23) отримали значення статистики капа: æ = – 0.0325.

Як видно з табл. 3.5, $æ < 0$, що є ознакою I типу розподілів Пірсона. На цій підставі за формулами (3.28), (3.31), (3.32) та (3.36) розраховані параметри q_1, q_2, l_1, l_2, $\tilde{m}_0$ та відповідні статистики. Їх значення наводяться у верхній частині табл. 3.5. Оскільки $q_1 > 1$ та $q_2 > 1$ (рис. 3.4), крива розподілу має дві точки перегину, тобто горизонтальний дотик до осі абсцис в початку ($z_i = -l_1$) та в кінці ($z_i = l_2$) області існування розподілу $[-l_1; l_2]$. Крім того, точка $x = \hat{x}$ є модою кривої розподілу. Вона розраховується за формулою (3.27). Як випливає з табл. 3.5, модальне значення середньої місячної температури повітря у січні дорівнює: $\hat{x}$ = – 1.3 °C, а модальна інтервальна частота $\tilde{m}_0$ = 13.39.

Тепер за формулою (3.26) розраховуються нові змінні – безрозмірні значення середин часткових інтервалів z_i (табл. 3.5, 4-й стовпчик) і, використовуючи основне рівняння I типу розподілів Пірсона (3.25), інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ (9-й стовпчик) та інтервальні ймовірності p_i (10-й стовпчик). В 11-му стовпчику табл. 3.5 наведені значення функції розподілу отриманого теоретичного закону, тобто I типу розподілів Пірсона, для випадкової величини, що досліджується.

Таблиця 3.5 – Результати розрахунків інтервальних теоретичних частот та інтервальних ймовірностей I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

Статистики ряду та оцінки параметрів

n	c	$\bar{x}$	S_x	$\hat{r}_3$	$\hat{r}_4$	σ	S	æ	t	q_1	q_2	l	l_1	l_2	$\hat{x}$	$\tilde{m}_0$
85	1.4	-2.1	3.2	-0.24	2.40	2.28	5.82	-0.0325	10.61	2.42	1.39	12.10	7.69	4.41	-1.3	13.39

Розрахунки інтервальних теоретичних частот $\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 \left(1 + \frac{z_i}{l_1}\right)^{q_1} \cdot \left(1 - \frac{z_i}{l_2}\right)^{q_2}$

i	$\tilde{x}_i$, °C	m_i	z_i	$\left(1 + z_i/l_1\right)$	$\left(1 + z_i/l_1\right)^{q_1}$	$\left(1 - z_i/l_2\right)$	$\left(1 - z_i/l_2\right)^{q_2}$	$\tilde{m}_i$	p_i	$P(X < x)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	-8.7	5	-5.29	0.31	0.0591	2.20	3.00	2.37	0.028	0.028
2	-7.3	3	-4.29	0.44	0.1378	1.97	2.57	4.75	0.056	0.084
3	-5.9	5	-3.29	0.57	0.2577	1.75	2.17	7.50	0.088	0.172
4	-4.5	12	-2.29	0.70	0.4238	1.52	1.79	10.16	0.120	0.292
5	-3.1	14	-1.29	0.83	0.6401	1.29	1.43	12.26	0.144	0.436
6	-1.7	12	-0.29	0.96	0.9104	1.07	1.09	13.33	0.157	0.593
7	-0.3	13	0.71	1.09	1.24	0.84	0.7838	13.00	0.153	0.746
8	1.1	12	1.71	1.22	1.63	0.61	0.5059	11.02	0.130	0.876
9	2.5	6	2.71	1.35	2.08	0.39	0.2661	7.41	0.087	0.963
10	3.9	3	3.71	1.48	2.60	0.16	0.0779	2.71	0.032	0.995

Із табл. 3.5. та рис.3.6 випливає, що отримані інтервальні теоретичні частоти І-го типу розподілів Пірсона добре збігаються з відповідними емпіричними частотами.

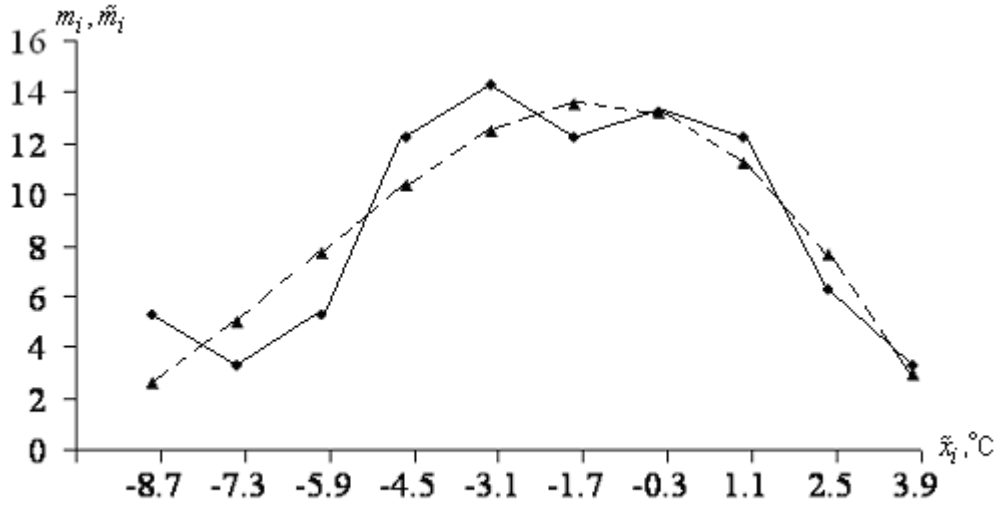


Рисунок 3.6 – Полігони розполіду емпіричних m_i (—) та теоретичних $\tilde{m}_i$ (---) частот першого типу розподілів Пірсона середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

Метод порівняння емпіричних m_i та теоретичних $\tilde{m}_i$ частот за допомогою критерію Пірсона χ^2 дає змогу отримати остаточну відповідь на можливість апроксимації (з заданою ймовірністю) емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у січні на ст. Одеса першим типом розподілів Пірсона. Він наводиться у підрозділі 4.1.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
2. З яких етапів складається дослідження закону розподілу випадкової величини?
3. Якими функціями можна представити теоретичний розподіл? Дати їм визначення та перелічити основні властивості.
4. Чому закон розподілу можливо представляти інтервальними теоретичними частотами?
5. Чим відрізняються прості статистичні сукупності від згрупованих?
6. Який сенс гістограми та полігону розподілу випадкової величини?

7. Від яких статистичних оцінок основних моментів розподілу залежить статистика æ?
8. Підкреслити основні умови, за яких дослідник може сформулювати гіпотезу про можливість апроксимації емпіричного розподілу I типом розподілів Пірсона.
9. Які параметри для кривої I типу розподілів Пірсона є параметрами форми? параметрами масштабу?
10. Який зв'язок між випадковою величиною x та безрозмірною величиною z?
11. За якою формулою розраховуються інтервальні теоретичні частоти I типу розподілів Пірсона?

Задачі

В задачах 3.2.1-3.2.30 на основі заданого емпіричного розподілу треба розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) I типу розподілів Пірсона, тобто побудувати теоретичний розподіл в координатах $(\tilde{x}_i; \tilde{m}_i)$. Щоб удосконалитися у виборі теоретичного розподілу, проаналізувати статистичні оцінки моментів розподілу та побудувати полігон випадкової величини, що досліджується. На основі графічного зображення теоретичного $(\tilde{x}_i; \tilde{m}_i \ \forall\, i = \overline{1,k})$ та емпіричного $(\tilde{x}_i; m_i \ \forall\, i = \overline{1,k})$ розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами I типу розподілів Пірсона. Перевірку статистичної гіпотези на заданому рівні значущості про наявність суттєвих чи статистично незначущих розбіжностей між ними дивись у підрозділі 4.1.

3.2.1. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів у грудні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105
m_i	16	16	15	13	12	8	6	0	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\bar{x}$ =35.6; S_x = 24.0; r_3 =0.70; r_4 =2.91.

3.2.2. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у березні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-2.2	-1.4	-0.6	0.2	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0
m_i	3	1	9	5	11	12	19	7	12	6

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =2.0; S_x= 1.8; r_3= - 0.35; r_4=2.41.

3.2.3. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у квітні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	4.7	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5	10.3	11.1	11.9
m_i	2	2	5	14	13	20	16	7	5	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =8.5; S_x= 1.5; r_3=- 0.19; r_4=2.81.

3.2.4. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у травні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1	18.8
m_i	6	7	15	13	12	13	6	9	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =15.1; S_x= 1.6; r_3=0.21; r_4=2.20.

3.2.5. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у вересні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	14.3	15.0	15.7	16.4	17.1	17.8	18.5	19.2	19.9	20.6
m_i	3	8	14	16	12	12	8	6	5	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =17.0; S_x= 1.5; r_3=0.32; r_4=2.29.

3.2.6. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13
m_i	13	13	25	25	28	24	32	23	16	11	10	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =6.8; S_x = 2.7; r_3 = 0.10; r_4 =2.20.

3.2.7. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у листопаді (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-0.1	1.2	2.5	3.8	5.1	6.4	7.7	9.0	10.3	11.6
m_i	3	5	7	12	14	22	15	6	0	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =5.4; S_x = 2.4; r_3 = - 0.35; r_4 =2.75.

3.2.8. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у грудні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-4.7	-3.4	-2.1	-0.8	0.5	1.8	3.1	4.4	5.7	7.0
m_i	4	4	9	12	19	16	16	4	0	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =0.6; S_x = 2.4; r_3 = - 0.26; r_4 =2.75.

3.2.9. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 11 травня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.9	10.3	11.7	13.1	14.5	15.9	17.3	18.7	20.1	21.5
m_i	6	3	18	16	21	9	10	11	3	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =14.5; S_x = 3.0; r_3 = 0.22; r_4 =2.40.

3.2.10. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 40 км:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-30.2	-24.2	-18.2	-12.2	-6.2	-0.2	5.8	11.8	17.8	23.8	29.8
m_i	12	20	18	17	16	24	19	25	14	13	12

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 0.9; S_x = 17.6; r_3 = 0.01; r_4 = 1.92.

3.2.11. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру середньодобової температури повітря за 7 листопада на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-0.4	1.3	3.0	4.7	6.4	8.1	9.8	11.5	13.2	14.9
m_i	5	2	4	13	12	12	12	13	4	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =7.7; S_x = 3.8; r_3 = - 0.27; r_4 =2.48.

3.2.12. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 0.1 км :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	25	28	24	38	23	16	11	10	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =6.8; S_x =2.7; r_3 =0.06; r_4 =2.23.

3.2.13. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 0.1 км :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
m_i	10	9	20	19	26	22	32	23	16	11	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =6.8; S_x = 2.5; r_3 = - 0.13; r_4 =2.19.

3.2.14. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 3 жовтня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6.6	8.1	9.6	11.1	12.6	14.1	15.6	17.1	18.6	20.1
m_i	1	5	12	12	11	11	18	20	6	5

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 14.1; S_x = 3.4; r_3 = - 0.19; r_4 =2.02.

3.2.15. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 45 км:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-35.6	-30.9	-26.2	-21.5	-16.8	-12.1	-7.4	-2.7	2.0	6.7	11.4
m_i	7	12	21	18	22	23	18	14	20	17	10

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 11.6; S_x = 13.2; r_3 = 0.04; r_4 =1.93.

3.2.16. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 10 км:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	2.4	7.3	12.2	17.1	22.0	26.9	31.8	36.7	41.6
m_i	8	8	11	12	14	10	8	3	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 19.6; S_x = 10.7; r_3 = 0.18; r_4 =2.24.

3.2.17. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів у серпні (ст. Сарата):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117
m_i	13	15	16	14	14	8	3	2	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 42.7; S_x = 25.8; r_3 = 0.71; r_4 =3.05.

3.2.18. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у січні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-8.6	-7.1	-5.6	-4.1	-2.6	-1.1	0.4	1.9	3.4
m_i	4	3	4	9	15	12	14	8	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = -1.9; S_x = 3.0; r_3 = - 0.44; r_4 = 2.62.

3.2.19. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря у січні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-19.7	-17.0	-14.3	-11.6	-8.9	-6.2	-3.5	-0.8	1.9	4.6
m_i	1	0	4	5	6	7	21	29	18	12

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = -2.3; S_x = 5.1; r_3 = - 0.93; r_4 =3.66.

3.2.20. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у березні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-2.1	-1.2	-0.3	0.6	1.5	2.4	3.3	4.2	5.1
m_i	3	0	8	6	14	10	11	13	7

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 2.3; S_x = 1.9; r_3 = - 0.39; r_4 =2.40.

3.2.21. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-7.6	-2.9	1.8	6.5	11.2	15.9	20.6	25.3	30.0	34.7	39.4
m_i	6	14	20	15	23	20	14	23	18	16	8

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 16.4; S_x = 13.1; r_3 = - 0.02; r_4 =1.90.

3.2.22. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у травні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1
m_i	4	8	11	15	11	13	5	8	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 15.2; S_x = 1.5; r_3 = 0.18; r_4 =2.16.

3.2.23. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 8 грудня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-9.2	-7.1	-5.0	-2.9	-0.8	1.3	3.4	5.5	7.6	9.7
m_i	3	4	7	5	10	15	12	8	12	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 1.5; S_x = 5.0; r_3 = - 0.32; r_4 =2.26.

3.2.24. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у вересні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5	18.3	19.1	19.9	20.7
m_i	3	8	17	17	13	9	7	4	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 17.0; S_x = 1.5; r_3 = 0.36; r_4 =2.46.

3.2.25. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 3 березня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-11.8	-9.3	-6.8	-4.3	-1.8	0.7	3.2	5.7	8.2	10.7
m_i	1	3	4	10	13	22	31	10	5	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 1.0; S_x = 4.4; r_3 = - 0.46; r_4 =3.22.

3.2.26. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0	30.0	33.0	36.0
m_i	20	27	54	46	27	16	12	8	6	5	2	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 12.7; S_x = 7.0; r_3 = 1.03; r_4 =3.89.

3.2.27. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	12	12	25	23	27	24	32	23	16	11	11	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 6.9; S_x = 2.7; r_3 = 0.10; r_4 =2.21.

3.2.28. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 1 травня (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.2	9.3	10.4	11.5	12.6	13.7	14.8	15.9	17.0	18.1
m_i	5	10	10	13	16	7	13	9	7	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 12.8; S_x = 2.6; r_3 = 0.09; r_4 =2.01.

3.2.29. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
m_i	8	27	36	29	21	15	10	5	2	2	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 3.8; S_x = 2.1; r_3 = 0.88; r_4 =3.71.

3.2.30. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності I типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 30 травня (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.6	13.8	15.0	16.2	17.4	18.6	19.8	21.0	22.2	23.4
m_i	8	6	12	14	15	19	8	9	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\bar{x}$ = 17.4; S_x = 2.7; r_3 = 0.04; r_4 =2.33.

3.3. Другий тип розподілів Пірсона

Основні теоретичні положення

У відповідності до загальної теорії розподілів Пірсона, *другий тип спостерігається за умови значення статистики капа, яка дорівнює нулю* ($æ = 0$). Вона розраховується за формулою (3.23). При цьому $r_3 = 0$ (*розподіл є симетричним відносно центру розподілу)*, а $r_4 < 3$.

Основне рівняння для інтервальних теоретичних частот цього розподілу має вигляд:

$$\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 \left[1 - \frac{z_i^2}{\tilde{l}^2} \right]^q , \qquad (3.38)$$

де q, $\tilde{l}$, $\tilde{m}_0$ – параметри II типу розподілів Пірсона.

Параметр форми q визначається рівнянням (3.39):

$$q = \frac{5\,r_4 - 9}{2(3 - r_4)} . \qquad (3.39)$$

Параметр масштабу $\tilde{l}$ розраховується за формулою (3.40):

$$\tilde{l} = \sigma \sqrt{\frac{2r_4}{3 - r_4}} . \qquad (3.40)$$

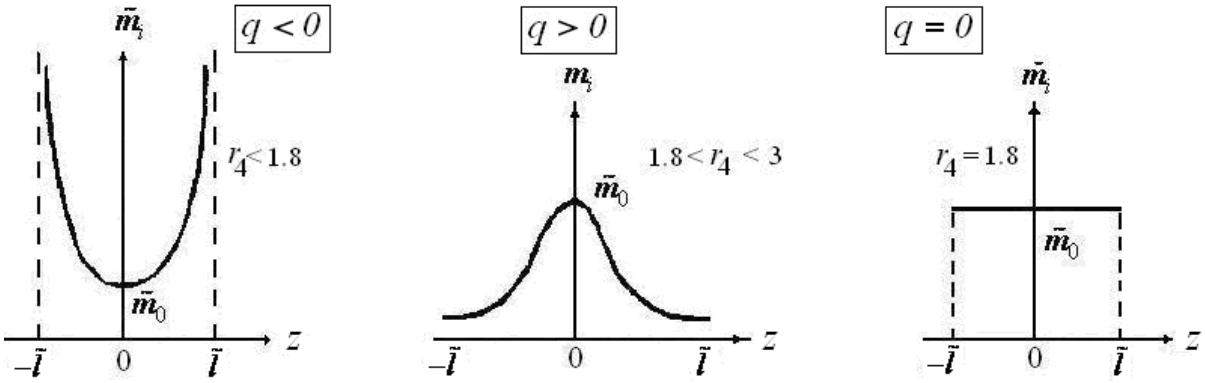
Параметр $\tilde{m}_0$ *це теоретична частота за умови* $z_i = 0$ і її можна отримати за допомогою рівняння (3.41):

$$\tilde{m}_0 = \frac{n\Gamma(2q+2)}{\tilde{l}\ 2^{2q+1}\{\Gamma(q+1)\}^2}, \tag{3.41}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма функція відповідного аргументу. Її значення для заданого x знаходяться в додатку К.

Якщо порівняти рівняння (3.25) та (3.38), то видно, що другий тип за певних умов, а саме $q_1 = q_2 = q$ та $l_1 = l_2 = \tilde{l}$ отримаємо з першого типу розподілів Пірсона.

Другий тип розподілів Пірсона об'єднує три типи кривих (рис. 3.7*)*. Оскільки цьому типу відповідає значення $r_3 = 0$, то характер кривих визначається виключно величиною r_4. Область значень $r_4 < 3$ розподіляється на три підобласті, для кожної з яких криві розподілу приймають визначений вигляд.



а) б) в)

Рисунок 3.7 – Криві розподілу другого типу Пірсона

Якщо $r_4 < 1.8$, то $q < 0$ і маємо симетричний $\cup$ – подібний розподіл (рис. 3.7 а).

За умови $1.8 < r_4 < 3$, $q > 0$, що відповідає дзвонеподібному розподілу (рис. 3.7 б). Крива розподілу Пірсона II типу суттєво відрізняється від кривої нормального розподілу. По-перше, область існування другого типу Пірсона є обмеженою: $-\tilde{l} \le z \le \tilde{l}$, а нормального розподілу – необмеженою: $-\infty < x < \infty$. По-друге, вона є більш стислою $(E < 0)$, ніж крива нормального розподілу.

Нарешті, за умови $r_4 = 1.8$, $q = 0$ та $\tilde{m}_i = \tilde{m}_0$ для всіх значень z_i отримаємо рівномірний розподіл (рис. 3.7 в).

Види кривих розподілів Пірсона II типу, що зображені на рис.3.7, необхідно враховувати при апроксимації емпіричних розподілів випадкових величин другим типом розподілів Пірсона.

Алгоритм *апроксимації емпіричного розподілу другим типом розподілів Пірсона* складається з 4-х основних етапів.

Відомо, що при дослідженнях законів розподілу випадкових величин, ***перш за все,*** необхідно від простої статистичної сукупності $X: x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ перейти до згрупованого ряду $(\tilde{x}_i; m_i)$ або $(\tilde{x}_i; \hat{p}_i)$. Статистично оцінити перший початковий $(\hat{\nu}_1 = \bar{x})$, другий центральний моменти розподілу $(\hat{\mu}_2)$, отримати незсунену, ефективну і умотивовану оцінку дисперсії $\left(S_x^2\right)$ та середнього квадратичного відхилу (S_x) випадкової величини, що досліджується. Розрахувати коефіцієнти асиметрії $(As = \hat{r}_3)$ та ексцесу (E). Графічно представити отриманий емпіричний розподіл . Оцінити статистики S, æ і, якщо для æ виконується рівність æ = 0 та умови $r_3 \approx 0$, $r_4 < 3$, формулюють гіпотезу на заданому рівні значущості (розділ 4) про можливість апроксимації емпіричного розділу II типом розподілів Пірсона.

На ***другому етапі*** оцінюють параметри теоретичного розподілу, а саме для другого типу Пірсона це – q, $\tilde{l}$, $\tilde{m}_0$ та необхідні статистики за відповідними формулами.

На ***третьому етапі*** розраховують інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ за допомогою основного рівняння II типу (3.38), перейшовши спочатку від розмірних значень середин часткових інтервалів $\tilde{x}_i$ до безрозмірних величин z_i $\left(i = \overline{1,k}\right)$. Використовуючи рівняння (3.26) та умови $r_3 = 0$, $\hat{x} = \bar{x}$ маємо :

$$z_i = \frac{\tilde{x}_i - \bar{x}}{c}. \tag{3.42}$$

Розраховані для кожної градації інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ необхідно порівняти з відповідними емпіричними частотами m_i і на основі отриманих характеристик (вираз (3.43)) побудувати полігони цих розподілів та з'ясувати спочатку якісні розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$:

$$\begin{matrix} \tilde{x}_1, & \tilde{x}_2, & \ldots, & \tilde{x}_i, & \ldots, & \tilde{x}_k \\ m_1, & m_2, & \ldots, & m_i, & \ldots, & m_k \\ \tilde{m}_1, & \tilde{m}_2, & \ldots, & \tilde{m}_i, & \ldots, & \tilde{m}_k \end{matrix}. \tag{3.43}$$

Метод порівняння емпіричних та розрахованих теоретичних частот II типу Пірсона за допомогою відомих критеріїв (див. підрозділ 4.1) дає змогу отримати остаточну відповідь на можливість апроксимації (з заданою ймовірністю) емпіричного розподілу другим типом розподілів Пірсона. Тому на ***четвертому етапі*** треба перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного і теоретичного розподілів. Оскільки перевірка цієї гіпотези відносно типу розподілу є самостійною задачею, алгоритм її рішення буде розглядатися окремо (розділ 4).

Розв'язання типової задачі. ***Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним законом. Розрахунок інтервальних теоретичних частот II типу розподілів Пірсона.***

Осереднення по добових інтервалах часу вимірювань температури повітря у жовтні протягом 101 року на ст. Одеса та перетворення відповідного статистичного ряду середніх добових температур у згрупований ряд призвели до емпіричного розподілу цієї метеорологічної величини ($\tilde{x}_i; m_i \forall \quad i = \overline{1,10}$), який утримується в табл. 3.6 (2-й та 3-й стовпчики), а його графічне представлення – на рис. 3.8.

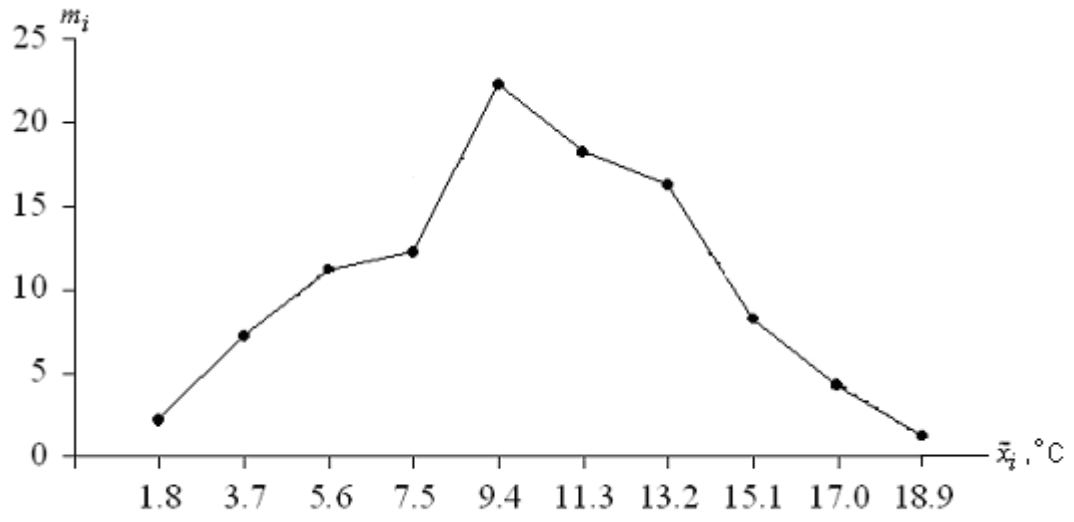


Рисунок 3.8 – Полігон розподілу емпіричних частот m_i середньодобової температури повітря (ст. Одеса, 23 жовтня)

Таблиця 3.6 – Результати розрахунків інтервальних теоретичних частот та інтервальних ймовірностей II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря (ст. Одеса, 23 жовтня)

Статистики ряду та оцінки параметрів

n	c	$\bar{x}$	S_x^2	S_x	$\hat{r}_3$	$\hat{r}_4$	Mo	Me	S	æ	σ	q	$\tilde{l}$	$\tilde{m}_0$
101	1.9	10.0	13.86	3.72	-0.05	2.47	9.8	9.8	8.25	-0.0018	1.96	3.16	5.98	18.87

Розрахунки інтервальних теоретичних частот $\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 \left[1 - \left(z_i / \tilde{l} \right)^2 \right]^q$

i	$\tilde{x}_i$, °C	m_i	z_i	$\left(z_i / \tilde{l} \right)^2$	$1 - z_i^2 / \tilde{l}^2$	$\left(1 - z_i^2 / \tilde{l}^2 \right)^q$	$\tilde{m}_i$	p_i	$P(X < x)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1.8	2	-4.32	0.522	0.478	0.097	1.8	0.018	0.018
2	3.7	7	-3.32	0.308	0.692	0.312	5.9	0.058	0.076
3	5.6	11	-2.32	0.151	0.849	0.596	11.2	0.111	0.187
4	7.5	12	-1.32	0.049	0.951	0.853	16.1	0.159	0.346
5	9.4	22	-0.32	0.003	0.997	0.991	18.7	0.185	0.531
6	11.3	18	0.68	0.013	0.987	0.959	18.1	0.179	0.710
7	13.2	16	1.68	0.079	0.921	0.771	14.5	0.144	0.854
8	15.1	8	2.68	0.200	0.800	0.494	9.3	0.092	0.946
9	17.0	4	3.68	0.379	0.621	0.222	4.2	0.042	0.988
10	18.9	1	4.68	0.612	0.388	0.050	0.9	0.009	0.997

Статистичні оцінки необхідних моментів розподілу випадкової величини X $\left(\bar{x},\ S_x^2\ ,r_3\ ,r_4\right)$, що використовуються при апроксимації емпіричних розподілів розподілами Пірсона, а також статистики S і æ , свідчать про те, що, оскільки $\hat{r}_3 \approx 0$; æ ≈ 0 ; $\hat{r}_4 < 3$, є підстави зробити спробу апроксимувати емпіричний розподіл другим типом розподілів Пірсона.

Отже, за формулами (3.39) – (3.41) розраховані параметр форми q, параметр масштабу $\tilde{l}$, а також теоретична частота початкового інтервалу $\tilde{m}_0$. Вони наводяться у першій частині табл. 3.6.

Оскільки за умови другого типу $\hat{x} = \bar{x}$, безрозмірні значення змінної z_i на серединах інтервалів розраховувалися за формулою (3.42). Ці значення представлені у другій частині табл. 3.6 (4-й стовпчик). Нарешті, за формулою (3.38) для кожного часткового інтервалу отримані теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ другого типу розподілів Пірсона (8-й стовпчик), а також інтервальні ймовірності p_i (9-й стовпчик). В 10-му стовпчику цієї таблиці розраховані значення функції розподілу II типу розподілів Пірсона.

Порівняння емпіричних та теоретичних інтервальних частот (рис.3.9) свідчить про те, що якісні різниці між ними є несуттєвими.

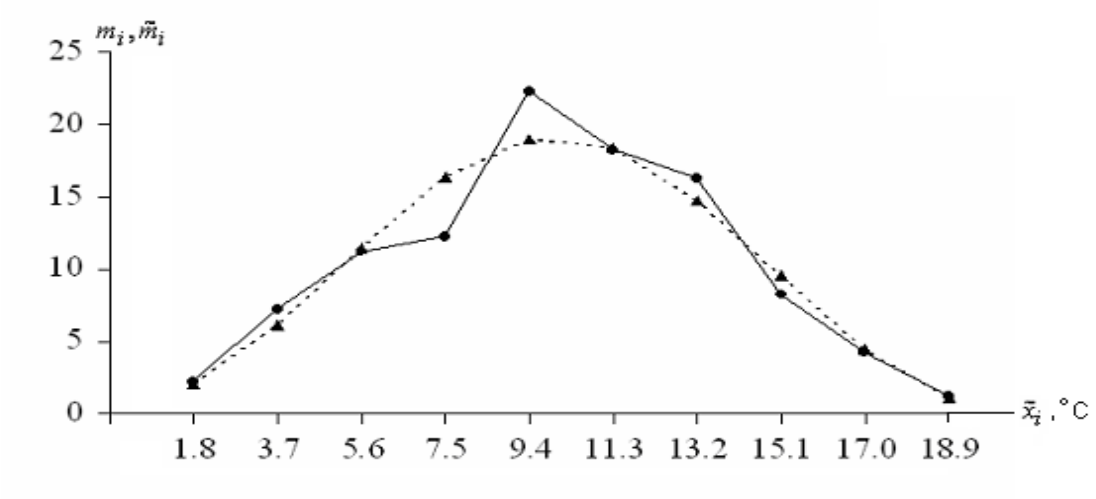


Рисунок 3.9 – Полігони розподілу емпіричних m_i (—) та теоретичних $\tilde{m}_i$ (-----) частот II типу розподілів Пірсона середньодобової температури повітря (ст. Одеса, 23 жовтня)

Метод кількісного порівняння різниць між емпіричними m_i та теоретичними $\tilde{m}_i$ частотами за допомогою критерію Пірсона χ^2 дає змогу отримати остаточну відповідь про можливість апроксимації (з заданою ймовірністю) емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 23 жовтня на ст. Одеса другим типом розподілів Пірсона. Він наводиться у підрозділі 4.1.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
2. З яких етапів складається дослідження закону розподілу випадкової величини?
3. Якими функціями можна представити теоретичний розподіл? Дати їм визначення та перелічити основні властивості.
4. Чому закон розподілу можливо представляти інтервальними теоретичними частотами?
5. Чим відрізняються прості статистичні сукупності від згрупованих?
6. Який сенс гістограми та полігону розподілу випадкової величини?
7. Від яких статистичних оцінок основних моментів розподілу залежить статистика æ?
8. Підкреслити основні умови за яких дослідник може сформулювати гіпотезу про можливість апроксимації емпіричного розподілу II типом розподілів Пірсона.
9. Які параметри для кривої II типу розподілів Пірсона є параметрами форми? параметрами масштабу?
10. Який зв'язок між випадковою величиною x та безрозмірною величиною z?
11. За якою формулою розраховуються інтервальні теоретичні частоти II типу розподілів Пірсона?
12. Чим відрізняється крива нормального розподілу від кривої II типу розподілів Пірсона?

Задачі

В задачах 3.3.1–3.3.30 на основі заданого емпіричного розподілу треба розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) II типу розподілів Пірсона, тобто побудувати теоретичний розподіл в координатах ($\tilde{x}_i; \tilde{m}_i \ \forall i=\overline{1,k}$) або $\left(\tilde{x}_i; p_i \ \forall \ i=\overline{1,k}\right)$. Щоб удосконалитися у виборі теоретичного розподілу, треба проаналізувати статистичні оцінки моментів розподілу та побудувати полігон розподілу випадкової величини, що досліджується. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i; \tilde{m}_i, \ i=\overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i; m_i, \ i=\overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами II типу розподілів Пірсона. Перевірку статистичної гіпотези про наявність на заданому рівні значущості суттєвих чи статистично незначущих розбіжностей між ними дивись у підрозділі 4.1.

3.3.1. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3	25.8	27.3
m_i	4	8	11	14	16	15	12	8	5	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =20.1; S_x=3.3; r_3=0.08; r_4=2.28.

3.3.2. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	5.0	7.0	9.0	11.0	13.0	15.0	17.0	19.0	21.0
m_i	3	8	10	9	17	13	11	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =12.6; S_x=3.8; r_3= - 0.14; r_4=2.21.

3.3.3. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3	27.8	29.3	30.8
m_i	1	3	12	15	15	14	9	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =24.8; S_x=2.6; r_3= 0.17; r_4=2.47.

3.3.4. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	22.9	23.4	23.9	24.4	24.9	25.4	25.9	26.4	26.9
m_i	3	5	5	7	9	8	7	5	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =25.0; S_x=1.1; r_3= - 0.10; r_4=2.07.

3.3.5. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
m_i	2	5	9	14	16	15	13	10	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =10.2; S_x=1.0; r_3= 0.01; r_4= 2.38.

3.3.6. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.6	11.1	11.6	12.1	12.6	13.1	13.6	14.1	14.6	15.1
m_i	4	8	9	12	15	14	13	10	6	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =12.8; S_x=1.2; r_3= - 0.03; r_4=2.18.

3.3.7. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	14.7	15.7	16.7	17.7	18.7	19.7	20.7	21.7	22.7	23.7
m_i	1	3	5	8	10	11	9	6	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =19.4; S_x=2.1; r_3= - 0.02; r_4=2.38.

3.3.8. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3	27.8	29.3	30.8
m_i	3	5	8	10	11	12	9	6	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =25.0; S_x=3.2; r_3= - 0.07; r_4=2.18.

3.3.9. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.6	13.1	13.6	14.1	14.6	15.1	15.6	16.1	16.6
m_i	2	3	5	8	10	11	9	6	6

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =14.9; S_x=1.1; r_3= - 0.20; r_4=2.29.

3.3.10. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-30.2	-24.2	-18.2	-12.2	-6.2	-0.2	5.8	11.8	17.8	23.8	29.8
m_i	12	20	18	17	16	24	19	25	14	13	12

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 0.9; S_x=17.6; r_3=0.01; r_4=1.92.

3.3.11. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.8	14.3	15.8	17.3	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3
m_i	4	8	12	16	15	11	9	5	3	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =18.6; S_x=3.2; r_3=0.32; r_4=2.52.

3.3.12. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	19.8	20.3	20.8	21.3	21.8	22.3	22.8	23.3	23.8	24.3
m_i	2	6	10	13	16	15	12	9	5	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =22.0; S_x=1.0; r_3= 0.01; r_4=2.28.

3.3.13. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	17.8	19.3	20.8	22.3	23.8	25.3	26.8	28.3	29.8
m_i	2	5	7	10	12	11	9	6	5

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =24.3; S_x=3.1; r_3= - 0.04; r_4=2.19.

3.3.14. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	14.9	15.9	16.9	17.9	18.9	19.9	20.9	21.9	22.9
m_i	2	3	5	8	10	11	9	6	6

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =19.5; S_x=2.1; r_3= - 0.20; r_4=2.29.

3.3.15. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	10.1	11.6	13.1	14.6	16.1	17.6	19.1	20.6	22.1
m_i	2	4	6	8	10	9	7	5	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 16.5; S_x=3.2; r_3= - 0.04; r_4=2.18.

3.3.16. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	11.7	12.2	12.7	13.2	13.7	14.2	14.7	15.2	15.7	16.2
m_i	2	5	9	10	12	13	11	9	6	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 14.0; S_x=1.1; r_3= - 0.01; r_4=2.18.

3.3.17. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	15.4	15.9	16.4	16.9	17.4	17.9	18.4	18.9	19.4	19.9
m_i	1	6	12	16	19	18	14	11	4	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =17.6; S_x=1.0; r_3= 0.05; r_4=2.30.

3.3.18. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	25	28	24	32	23	16	11	10	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =6.8; S_x=2.7; r_3= 0.10; r_4=2.20.

3.3.19. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-7.6	-2.9	1.8	6.5	11.2	15.9	20.6	25.3	30.0	34.7	39.4
m_i	6	14	20	15	23	20	14	23	18	16	8

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =16.4; S_x=13.1; r_3= -0.02; r_4=1.90.

3.3.20. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 0.1 км:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	20	25	24	32	23	16	9	6	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =6.8; S_x=2.73; r_3= 0.10; r_4=2.28.

3.3.21. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 45 км:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-35.6	-30.9	-26.2	-21.5	-16.8	-12.1	-7.4	-2.7	2.0	6.7	11.4
m_i	7	12	21	18	22	23	18	14	20	17	10

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 11.6; S_x=13.2; r_3= 0.04; r_4= 1.93.

3.3.22. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	2.4	7.3	12.2	17.1	22.0	26.9	31.8	36.7	41.6
m_i	8	8	11	12	14	10	8	3	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =19.6; S_x=10.7; r_3= 0.18; r_4=2.24.

3.3.23. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-8.6	-7.1	-5.6	-4.1	-2.6	-1.1	0.4	1.9	3.4
m_i	4	3	7	11	16	12	15	9	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = -2.1; S_x=3.0; r_3=- 0.35; r_4=2.44.

3.3.24. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-7.6	-2.9	1.8	6.5	11.2	15.9	20.6	25.3	30.0	34.7	39.4
m_i	6	14	20	15	23	20	14	23	18	16	8

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 16.4; S_x=13.1; r_3= - 0.02; r_4=1.90.

3.3.25. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, травень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1
m_i	4	8	11	15	11	13	5	8	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 14.4; S_x=1.1; r_3= 0.17; r_4=2.17.

3.3.26. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, травень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1
m_i	4	7	11	15	9	10	4	8	4

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 15.1; S_x=1.5; r_3= 0.26; r_4=2.12.

3.3.27. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.6	13.8	15.0	16.2	17.4	18.6	19.8	21.0	22.2	23.4
m_i	8	6	12	14	15	19	8	9	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 17.4; S_x=2.7; r_3= 0.04; r_4=2.33.

3.3.28. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	3.8	5.3	6.8	8.3	9.8	11.3	12.8	14.3	15.8
m_i	3	5	5	8	9	17	10	11	6

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =10.8; S_x=3.2; r_3= - 0.40; r_4=2.32.

3.3.29. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	20.9	21.4	21.9	22.4	22.9	23.4	23.9	24.4	24.9	25.4
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =23.1; S_x=1.0; r_3= 0.16; r_4=2.57.

3.3.30. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти та інтервальні ймовірності II типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.8	12.3	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ =17.3; S_x=2.9; r_3= 0.16; r_4=2.57.

3.4. Третій тип розподілів Пірсона

Основні теоретичні положення

У відповідності до загальної теорії розподілів Пірсона, третій тип *спостерігається при будь-яких значеннях статистики капа* $\left(-\infty < æ < \infty\right)$, яка розраховується за формулою (3.23).

Основне рівняння для інтервальних теоретичних частот III типу Пірсона має вигляд:

$$\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 \left(1 + \frac{z_i}{l'}\right)^p e^{-pz_i/l'}, \qquad (3.44)$$

де $p,\ l',\ \tilde{m}_0$ параметри цього розподілу;

z_i – змінна, яка розраховуються так:

$$z_i = \frac{\tilde{x}_i - \hat{x}}{c}, \qquad (3.45)$$

де

$$\hat{x} = \overline{x} - \frac{r_3 \sigma_x}{2}. \qquad (3.46)$$

Параметр форми p визначається рівнянням (3.47):

$$p = \frac{4}{r_3^2} - 1. \qquad (3.47)$$

Параметр масштабу l' розраховується за формулою (3.48):

$$l' = \sigma\left(\frac{2}{r_3} - \frac{r_3}{2}\right). \qquad (3.48)$$

Параметр $\tilde{m}_0$ *– це теоретична частота за умови* $z_i = 0$, яку можна отримати за допомогою рівняння (3.49):

$$\tilde{m}_0 = \frac{n}{|l'|} \frac{p^{p+1}}{e^p \Gamma\left(p+1\right)}, \qquad (3.49)$$

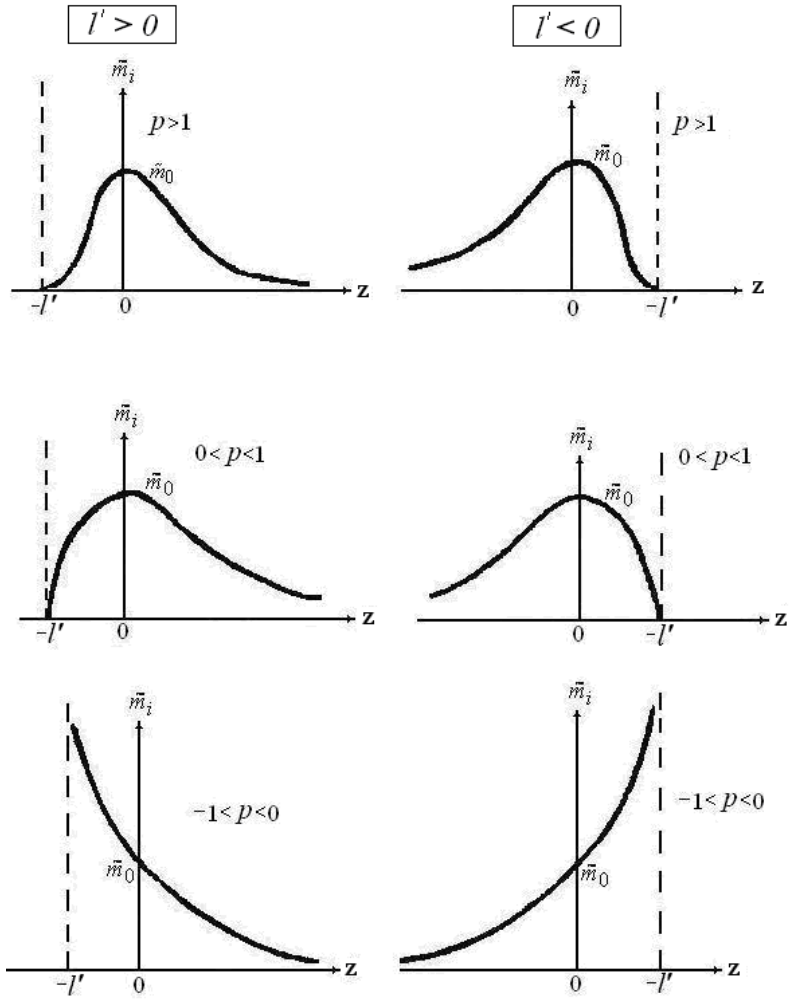
в якому $\Gamma\left(x\right)$ – гамма функція відповідного аргументу. Її значення для заданого x знаходяться в додатку К.

Як випливає з рівняння (3.44), *III тип розподілів Пірсона об'єднує 6 типів кривих* (рис. 3.10). Криві, що відносяться до цього типу розподілів Пірсона можна об'єднати у дві групи.

1) $l' > 0$. За умови додатних значень параметра масштабу l' спостерігається *три* різновиди кривих розподілу. Загальним для них є дві властивості: за умови $z_i \to \infty$, $\tilde{m}_i \to 0$ (експоненціальна функція спадає швидше, ніж зростає степенева функція); за умови $z_i = -l'$, $\tilde{m}_i = 0$, тобто точка $z_i = -l'$ визначає початок розподілу.

2) $l' < 0$. Від'ємним значенням параметра масштабу теж відповідає *три* різновиди кривих розподілу, які відрізняються від попередніх кривих протилежною асиметрією.

За умови $l' > 0$ розподіли мають правосторонню асиметрію (рис. 3.10 а), а за умови $l' < 0$ – лівосторонню асиметрію (рис. 3.10 б).



а) б)

Рисунок 3.10 – Криві розподілу третього типу Пірсона

Таким чином, III тип розподілів Пірсона в залежності від параметра масштабу l' включає 6 видів кривих, які необхідно врахувати при апроксимації емпіричних розподілів III типом розподілів Пірсона.

Алгоритм *апроксимації емпіричного розподілу III типом розподілів Пірсона складається, як і для інших теоретичних розподілів, із 4-х основних етапів.*

Перш за все необхідно від простої статистичної сукупності $X: x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ (де n – об'єм вибірки) перейти до згрупованого ряду вигляду $(\tilde{x}_i; m_i)$ або $(\tilde{x}_i; \hat{p}_i)$ $\forall\, i = \overline{1,k}$. Статистично оцінити перший початковий $(\hat{\nu}_1 = \bar{x})$ та другий центральний $(\hat{\mu}_2)$ моменти розподілу; отримати незсунені, ефективні та умотивовані оцінки дисперсії $\left(S_x^2\right)$ і середнього квадратичного відхилу (S_x). Розрахувати коефіцієнти асиметрії $(As = \hat{r}_3)$ та ексцесу (E). Графічно представити отриманий емпіричний розподіл частот. Оцінити статистики S, æ і, якщо з заданою ймовірністю немає можливості апроксимувати I чи II типом розподілів Пірсона (чи нормальним розподілом), то треба зробити спробу апроксимувати емпіричний розподіл III-м типом розподілів Пірсона.

На ***другому етапі*** оцінюють параметри теоретичного розподілу, а саме q, l', $\tilde{m}_0$ за формулами (3.47)–(3.49) та необхідні для цього статистики.

На ***третьому етапі*** розраховують інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ за допомогою основного рівняння III типу розподілів Пірсона (3.44). Але спочатку треба перейти від розмірних значень середин часткових інтервалів $\tilde{x}_i$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$ до безрозмірних величин z_i $\left(i = \overline{1,k}\right)$, використовуючи формули (3.46) та (3.45).

Розраховані для кожної градації $\left(i = \overline{1,k}\right)$ інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ треба порівняти з відповідними емпіричними частотами m_i і на основі отриманих характеристик (вираз (3.50)) побудувати полігони емпіричних та теоретичних частот за даними:

$$\begin{array}{lllll} \tilde{x}_1, & \tilde{x}_2, & \ldots, & \tilde{x}_i, & \ldots, \ \tilde{x}_k \\ m_1, & m_2, & \ldots, & m_i, & \ldots, \ m_k \\ \tilde{m}_1, & \tilde{m}_2, & \ldots, & \tilde{m}_i, & \ldots, \ \tilde{m}_k \end{array} . \qquad (3.50)$$

Побудова полігонів цих розподілів допоможе з'ясувати наявність чи відсутність якісних розбіжностей між m_i та $\tilde{m}_i$.

Метод порівняння емпіричних та розрахованих на основі рівняння (3.44) теоретичних частот III типу розподілів Пірсона за допомогою відомих критеріїв (див. підрозділ 4.1) допоможе отримати остаточну відповідь про можливість апроксимації (з заданою ймовірністю) емпіричного розподілу III типом розподілів Пірсона. Тому дослідження завершується ***на четвертому етапі*** перевіркою статистичної гіпотези про відповідність емпіричного і підібраного теоретичного розподілів, тобто з'ясовується статистично значущі чи випадкові розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$. Оскільки перевірка статистичних гіпотез відносно типу розподілу є самостійною задачею, алгоритм її рішення буде розглядатися окремо (розділ 4).

Розв'язання типової задачі. ***Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним законом. Розрахунок інтервальних теоретичних частот III типу розподілів Пірсона.***

Метеорологічні спостереження на станціях Одеса та Миколаїв у листопаді за період з 1900 по 1990 рр. дали змогу отримати прості статистичні сукупності рядів місячної кількості опадів.

Відомо, що важливе значення при дослідженнях властивостей випадкової величини має об'єм сукупності, до якої добирається теоретичний закон. Цей ряд обов'язково повинен володіти представництвом, тобто бути дійсно вибіркою з генеральної сукупності і мати такий об'єм, який дозволяв би провести оцінку параметрів з заданою точністю, тобто отримати вірогідні характеристики.

Шляхом перевірки відповідної гіпотези (методи перевірки таких гіпотез розглядаються в 4-тому розділі) були отримані підстави для того, щоб вважати ряди місячної кількості опадів на станціях Одеса та Миколаїв однорідними, тобто такими, що належать до однієї генеральної сукупності. А це дає змогу об'єднати ряди місячної кількості опадів у листопаді на перелічених станціях в одну статистичну сукупність.

На основі такої об'єднаної сукупності був отриманий згрупований ряд, тобто емпіричний розподіл частот (рис. 3.11) та розраховані статистичні оцінки моментів розподілу: $\bar{x}$, S_x^2, $\hat{r}_3$, $\hat{r}_4$, а також статистики $\sigma, S, æ, \hat{x}$.

З рис. 3.11 випливає, що розподіл емпіричних частот не є симетричним. Аналіз статистичних оцінок моментів розподілу також дає можливість вважати, що емпіричний розподіл частот доцільно апроксимувати третім типом розподілів Пірсона. Статистичні оцінки параметрів цього розподілу, що отримані за формулами (3.47)-(3.49), як і оцінки зазначених вище статистик, знаходяться в табл. 3.7.

Таблиця 3.7 – Результати розрахунків інтервальних теоретичних частот та інтервальних ймовірностей III типу Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст.ст. Одеса – Миколаїв, листопад)

Статистики ряду та оцінки параметрів

n	c, мм	$\bar{x}$, мм	S_x, мм	$\hat{r}_3$	$\hat{r}_4$	σ	S	æ	P	l'	$\hat{x}$	$\tilde{m}_0$
172	14	37	28.8	1.38	5.03	2.06	7.71	-1.288	1.1	1.56	17.13	42.84

Розрахунки інтервальних теоретичних частот $\tilde{m}_i = \tilde{m}_0 \left(1 + z_i / l'\right)^p \cdot e^{-\frac{pz_i}{l'}}$

i	$\tilde{x}_i$	m_i	z_i	$1 + z_i / l'$	$\left(1 + z_i / l'\right)^p$	$-pz_i / l'$	$e^{-pz_i / l'}$	$\tilde{m}_i$	p_i	$P(X < x)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	7	39	-0.72	0.54	0.51	0.51	1.67	36.5	0.2122	0.2122
2	21	37	0.28	1.18	1.20	-0.20	0.82	42.2	0.2453	0.4575
3	35	35	1.28	1.82	1.93	-0.90	0.41	33.9	0.1971	0.6546
4	49	32	2.28	2.46	2.69	-1.61	0.20	23.1	0.1343	0.7889
5	63	11	3.28	3.10	3.47	-2.31	0.10	14.9	0.0866	0.8755
6	77	4	4.28	3.74	4.27	-3.02	0.05	9.1	0.0529	0.9284
7	91	5	5.28	4.38	5.08	-3.72	0.02	4.4	0.0256	0.9540
8	105	2	6.28	5.03	5.91	-4.43	0.01	2.5	0.0145	0.9685
9	119	5	7.28	5.67	6.74	-5.13	0.006	1.7	0.0099	0.9784
10	133	1	8.28	6.31	7.59	-5.84	0.003	1.0	0.0058	0.9842
11	147	1	9.28	6.95	8.44	-6.54	0.001	0.4	0.0023	0.9865

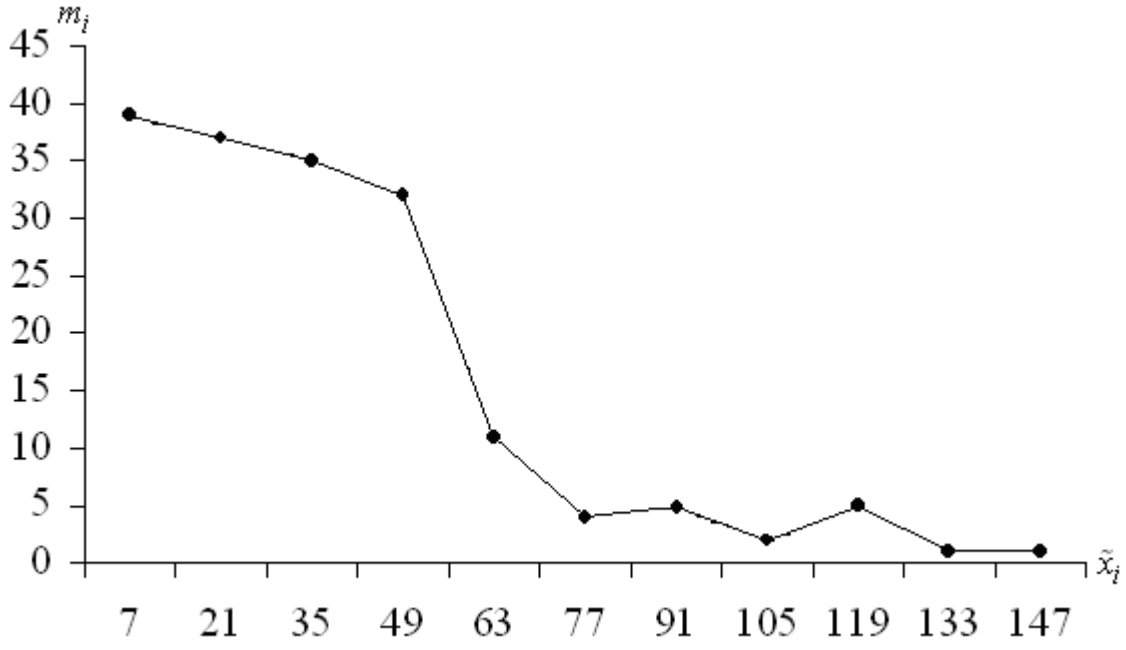


Рисунок 3.11–Полігон розподілу емпіричних m_i частот місячної кількості опадів (ст.ст. Одеса - Миколаїв, листопад)

За формулою (3.45) розраховані нові змінні – безрозмірні значення часткових інтервалів z_i (табл. 3.7, 4-й стовпчик). За допомогою основного рівняння III типу розподілів Пірсона (3.44) були отримані інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ (9-й стовпчик) та інтервальні ймовірності p_i (10-й стовпчик). В 11-ому стовпчику цієї таблиці наведені значення функції розподілу отриманого теоретичного закону, тобто III типу розподілів Пірсона для випадкової величини, що досліджується.

Із табл.3.7 та рис. 3.12 випливає, що отримані інтервальні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ добре збігаються з відповідними емпіричними частотами m_i.

Кількісне порівняння емпіричних m_i та інтервальних теоретичних $\tilde{m}_i$ частот за допомогою критерію Пірсона χ^2 дає змогу отримати остаточну відповідь про можливість апроксимації на рівні значущості $\alpha = 0.05$ емпіричного розподілу місячної кількості опадів на ст.ст.Одеса – Миколаїв III типом розподілів Пірсона.

Продовження дослідження див. у підрозділі 4.1.

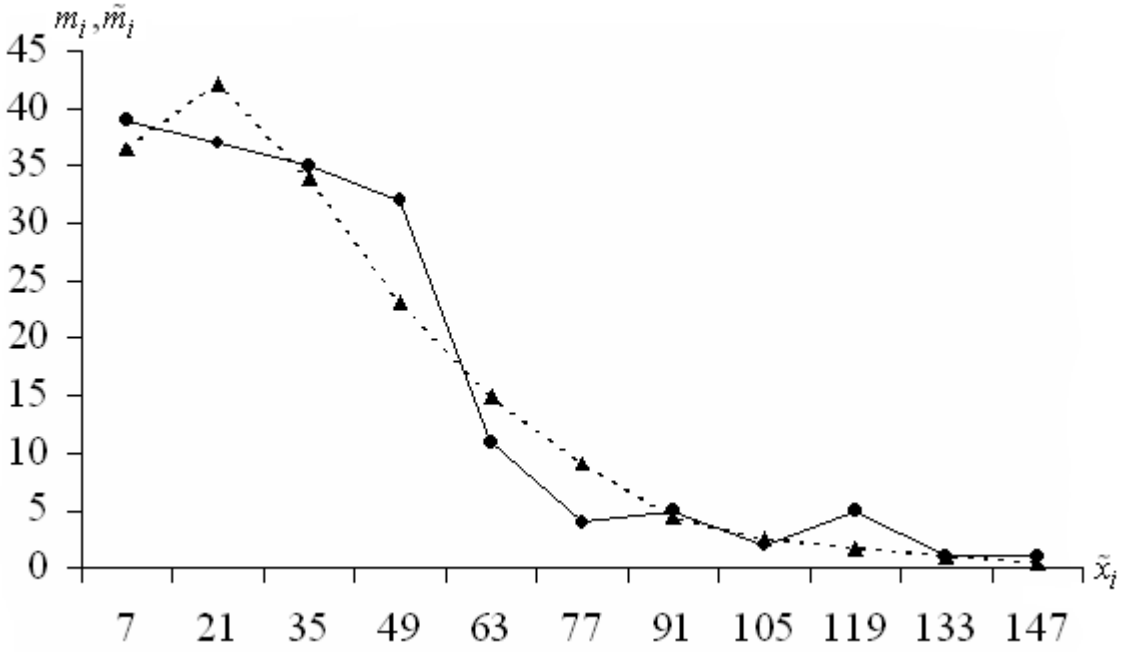


Рисунок 3.12 – Полігони розподілу емпіричних m_i (—) та теоретичних $\tilde{m}_i$ (----) частот III типу розподілів Пірсона місячної кількості опадів (ст.ст. Одеса - Миколаїв, листопад)

Запитання для самоперевірки

1. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
2. З яких етапів складається дослідження закону розподілу випадкової величини?
3. Якими функціями можна представити теоретичний розподіл? Дати їм визначення та перелічити основні властивості.
4. Чому закон розподілу можливо представляти інтервальними теоретичними частотами?
5. Чим відрізняються прості статистичні сукупності від згрупованих?
6. Який сенс гістограми та полігону розподілу випадкової величини?
7. Від яких статистичних оцінок основних моментів розподілу залежить статистика æ?
8. Підкреслити основні умови за яких дослідник може сформулювати гіпотезу про можливість апроксимації емпіричного розподілу III типом розподілів Пірсона.

9. Які параметри для кривої III типу розподілів Пірсона є параметрами форми? параметрами масштабу?
10. Який зв'язок між випадковою величиною x та безрозмірною величиною z?
11. За якою формулою розраховуються інтервальні теоретичні частоти III типу розподілів Пірсона?

Задачі

В задачах 3.4.1–3.4.30 на основі заданого емпіричного розподілу частот треба розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона, тобто побудувати теоретичний розподіл в координатах $(\tilde{x}_i; \tilde{m}_i, i = \overline{1,k})$. На основі графічного представлення емпіричного та теоретичного розподілів (полігонів) зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними (m_i) та теоретичними $(\tilde{m}_i)$ частотами III типу розподілів Пірсона.

Провести перевірку статистичної гіпотези на заданому рівні значущості α про наявність суттєвих чи несуттєвих розбіжностей між ними (дивись підрозділ 4.1).

3.4.1. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Любешів, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	20	28	24	14	6	3	2	1	1	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\bar{x}$ = 4.5; S_x = 3.8; r_3 = 1.58; r_4 = 5.93.

3.4.2. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 1 лютого на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-17.0	-14.6	-12.2	-9.8	-7.4	-5.0	-2.6	-0.2	2.2	4.6
m_i	2	3	5	4	5	12	12	24	22	10

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\bar{x}$ = -2.19; S_x = 5.39; r_3 = -0.96; r_4 = 3.18.

3.4.3. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 26 квітня на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6.0	7.3	8.6	9.9	11.2	12.5	13.8	15.1	16.4	17.7
m_i	3	9	25	21	10	15	6	6	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 10.6; S_x = 2.6; r_3 = 0.59; r_4 = 2.68.

3.4.4. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 9 лютого на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-15.9	-13.4	-10.9	-8.4	-5.9	-3.4	-0.9	1.6	4.1	6.6
m_i	3	2	5	4	10	14	19	24	13	5

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 1.6; S_x = 5.3; r_3 = - 0.81; r_4 = 3.21.

3.4.5. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 19 січня на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-15.1	-12.8	-10.5	-8.2	-5.9	-3.6	-1.3	1.0	3.3	5.6
m_i	2	0	5	10	11	14	15	21	14	7

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = -2.0; S_x = 4.8; r_3 = - 0.47; r_4 = 2.59.

3.4.6. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 4 березня на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-11.6	-9.2	-6.9	-4.6	-2.3	0.0	2.3	4.6	6.9	9.2
m_i	2	2	3	6	16	24	33	11	0	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 0.2; S_x = 3.7; r_3 = - 0.80; r_4 = 4.30.

3.4.7. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 1.0 км:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.4	4.4	6.4	8.4	10.4	12.4	14.4	16.4	18.4	20.4	22.4	24.4
m_i	14	20	33	39	29	32	18	18	7	5	5	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 10.3; S_x = 4.9; r_3 = 0.49; r_4 = 2.77.

3.4.8. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 3 березня на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-11.8	-9.3	-6.8	-4.3	-1.8	0.7	3.2	5.7	8.2	10.7
m_i	1	3	4	10	13	22	31	10	3	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 0.9; S_x = 4.3; r_3 = - 0.49; r_4 = 3.30.

3.4.9. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Рівне, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	14	20	21	16	11	6	5	3	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 5.9; S_x = 4.3; r_3 = 0.87; r_4 = 3.18.

3.4.10. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу кількості опадів у грудні (ст. Одеса):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105
m_i	16	16	15	13	12	8	6	0	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 35.6; S_x = 24.0; r_3 = 0.70; r_4 = 2.91.

3.4.11. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 12 січня на ст.Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-19.2	-16.5	-13.8	-11.1	-8.4	-5.7	-3.0	-0.3	2.4	5.1
m_i	1	0	4	2	6	7	21	29	18	12

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 1.5; S_x = 4.9; r_3 = - 1.04; r_4 = 4.22.

3.4.12. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Броди, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	29	32	18	10	4	2	1	1	2	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 3.7; S_x = 3.7; r_3 = 1.87; r_4 = 6.90.

3.4.13. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	20.2	20.9	21.6	22.3	23.0	23.7	24.4	25.1	25.8	26.5
m_i	13	8	17	17	17	5	6	0	1	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 22.2; S_x = 1.4; r_3 = 0.50; r_4 = 3.23.

3.4.14. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Одеса, серпень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8	23	38	53	68	83	98	113	128	143
m_i	31	28	17	9	2	5	2	0	2	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 33.6; S_x = 31.1; r_3 = 1.74; r_4 = 5.88.

3.4.15. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст.ст. Одеса – Миколаїв, жовтень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189
m_i	65	46	29	19	10	2	2	0	0	0	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 33.1; S_x = 27.5; r_3 = 1.74; r_4 = 8.25.

3.4.16. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 25 січня на ст. Одеса:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-17.1	-14.5	-11.9	-9.3	-6.7	-4.1	-1.5	1.1	3.7	6.3
m_i	2	4	4	7	10	17	12	26	12	6

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 2.5; S_x = 5.7; r_3 = - 0.63; r_4 = 2.74.

3.4.17. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-8.6	-7.1	-5.6	-4.1	-2.6	-1.1	0.4	1.9	3.4
m_i	4	3	4	9	15	12	14	8	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = - 1.9; S_x = 3.0; r_3 = - 0.44; r_4 = 2.62.

3.4.18. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Одеса, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8	22	36	50	64	78	92	106	120	134
m_i	26	22	16	13	9	1	0	1	0	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x}$ = 31.6; S_x = 23.6; r_3 = 1.39; r_4 = 6.02.

3.4.19. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Миколаїв, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
m_i	16	21	15	11	7	4	3	2	1	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 29.4$; $S_x = 20.6$; $r_3 = 1.12$; $r_4 = 3.85$.

3.4.20. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Львів, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	23	21	22	16	7	3	3	1	3	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 4.8$; $S_x = 4.1$; $r_3 = 1.28$; $r_4 = 4.50$.

3.4.21. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Чернівці, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	31	27	21	10	5	3	2	1	2	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 4.1$; $S_x = 4.1$; $r_3 = 1.64$; $r_4 = 5.63$.

3.4.22. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Артемівськ, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	25	25	25	12	6	3	2	1	1	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 4.6$; $S_x = 4.2$; $r_3 = 1.48$; $r_4 = 5.10$.

3.4.23. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
m_i	8	20	36	29	21	15	10	5	2	2	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 3.8$; $S_x = 2.1$; $r_3 = 0.88$; $r_4 = 3.71$.

3.4.24. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Харків, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	14	20	22	18	12	6	5	2	2	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 5.7$; $S_x = 4.0$; $r_3 = 0.87$; $r_4 = 3.45$.

3.4.25. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Харків, липень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	27	22	17	14	9	6	1	1	1	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 4.6$; $S_x = 4.1$; $r_3 = 1.27$; $r_4 = 4.66$.

3.4.26. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Дніпропетровськ, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	18	26	17	13	12	5	5	1	1	2

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 5.2$; $S_x = 4.2$; $r_3 = 1.06$; $r_4 = 3.83$.

3.4.27. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Дніпропетровськ, лютий):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	18	25	23	14	12	4	2	0	1	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 4.7$; $S_x = 3.5$; $r_3 = 1.15$; $r_4 = 4.84$.

3.4.28. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Одеса, січень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	8	30	28	17	8	5	2	1	0	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 4.9$; $S_x = 3.2$; $r_3 = 1.31$; $r_4 = 5.47$.

3.4.29. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Одеса, березень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	9	30	28	15	7	5	1	1	1	3

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 5.1$; $S_x = 3.8$; $r_3 = 1.65$; $r_4 = 6.05$.

3.4.30. Розрахувати інтервальні теоретичні частоти $(\tilde{m}_i)$ та інтервальні ймовірності (p_i) III типу розподілів Пірсона на основі емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Вилкове, жовтень):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	39	21	16	9	6	2	4	1	1	1

Статистичні оцінки моментів цього розподілу дорівнюють:
$\overline{x} = 3.7$; $S_x = 4.0$; $r_3 = 1.50$; $r_4 = 5.02$.

3.5. Гамма-розподіл

Основні теоретичні положення

Щільність імовірності гамма-розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \frac{\psi^{\lambda}\, x^{\lambda-1}\, e^{-\psi x}}{\Gamma(\lambda)}, \tag{3.51}$$

де

λ – *параметр форми*; ψ – *параметр масштабу*; $\Gamma(\lambda)$ – *гамма-функція*.

Якщо запровадити нову змінну U за формулою:

$$U = \psi x, \tag{3.52}$$

то гамма-розподіл набуває вигляду:

$$f(U) = \frac{U^{\lambda-1}\, e^{-U}}{\Gamma(\lambda)} \ . \tag{3.53}$$

Статистичні оцінки параметрів гамма-розподілу визначаються за допомогою рівностей:

$$\hat{\lambda} = \frac{(\overline{x})^2}{S_x^2} \ , \tag{3.54}$$

$$\hat{\psi} = \frac{\overline{x}}{S_x^2} \ . \tag{3.55}$$

Інтервальні теоретичні частоти гамма-розподілу можна розрахувати таким чином.

Як відомо

$$\tilde{m}_i = n\, p_i = n P\left[U_{i-1} < U < U_{i+1}\right].$$

З іншого боку, за загальними властивостями щільності ймовірностей

$$P\left[U_{i-1} < U < U_{i+1}\right] = \int_{U_{i-1}}^{U_{i+1}} \frac{U^{\lambda-1} e^{-U}}{\Gamma(\lambda)} dU =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{U_{i+1}} U^{\lambda-1} e^{-U} dU - \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{U_{i-1}} U^{\lambda-1} e^{-U} dU. \quad (3.56)$$

Функція

$$\gamma(t,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{t} U^{\lambda-1} e^{-U} dU \quad (3.57)$$

називається *неповною гамма-функцією*.
Отже

$$\tilde{m}_i = n\, P\left[U_{i-1} < U < U_{i+1}\right] = \gamma\left(U_{i+1}\right) - \gamma\left(U_{i-1}\right). \quad (3.58)$$

Межі i-того часткового інтервалу випадкової величини U, тобто ліва U_{i-1} і права U_{i+1}, відповідають межам x_{i-1} та x_{i+1} випадкової величини X і визначаються за формулою (3.52). Але спочатку треба оцінити параметр масштабу ψ за формулою (3.55).

Розрахунки інтервальних теоретичних частот можна виконати за допомогою таблиць Є. Є. Слуцького [15]. Таблиці складено за таких умов.

Неповна гамма-функція

$$\gamma(\lambda,U) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{U} x^{\lambda-1} e^{-x} dx \quad (3.59)$$

має зв'язок з функцією

$$P\left(\chi^2, N\right) = \frac{1}{2^{N-2/2}\Gamma\left(N/2\right)} \int_{\chi^2}^{\infty} x^{N-1} e^{-1/2 x^2} dx, \quad (3.60)$$

яка відбивається рівністю:

$$\gamma(\lambda,U) = 1 - P\left(\chi^2, N\right) \quad (3.61)$$

за умов

$$N = 2\hat{\lambda}, \qquad \chi^2 = 2U\ . \quad (3.62)$$

Треба пам'ятати, що:

$$U = \hat{\psi}\, x \;; \qquad \hat{\psi} = \frac{\overline{x}}{S_x^2} \;; \qquad \hat{\lambda} = \frac{\overline{x}^2}{S_x^2} = \hat{\psi}\, \overline{x} \;. \tag{3.63}$$

Для кожного U, яке розглядається як права межа часткового інтервалу, отримують відповідні значення χ^2. Потім по таблицях додатку Н визначають функцію $P\left(\chi^2, N\right)$ та розраховують функцію розподілу:

$$F\left(\chi^2, N\right) = 1 - P\left(\chi^2, N\right) . \tag{3.64}$$

Остання дає можливість отримати інтервальні ймовірності шляхом послідовного віднімання значень функції розподілу, тобто:

$$p_i = F\left(\chi_i^2, N\right) - F\left(\chi_{i-1}^2, N\right). \tag{3.65}$$

Використовуючи відоме співвідношення

$$\tilde{m}_i = p_i \cdot n,$$

де

n - об'єм вибірки, розраховують інтервальні теоретичні частоти гамма-розподілу.

Розв'язання типової задачі. ***Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним законом. Розрахунок інтервальних теоретичних частот гамма–розподілу.***

На основі емпіричного ряду місячної кількості опадів на ст. Ужгород були розраховані статистичні оцінки першого початкового і другого центрального моментів розподілу.

Статистичні оцінки моментів розподілу даної вибірки дорівнюють:

$\overline{x}$=4.7 мм; S_x^2=12.96 (мм)^2. Об'єм вибірки: n=107.

Порядок розрахунків інтервальних теоретичних частот гамма–розподілу та необхідні статистики наводяться в табл. 3.8.

Таблиця 3.8 – Порядок обчислення інтервальних ймовірностей та інтервальних теоретичних частот гамма-розподілу на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Ужгород, січень)

i	Градація	m_i	$U = \hat{\psi}\, x$	$\chi^2 = 2U$	$P\left(\chi^2, n\right)$	$F\left(\chi^2, n\right)$	p_i	$\tilde{m}_i$	$P\left(X < x\right)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	[0 … 2)	25	0.72	1.4	0.77	0.23	0.23	24.6	0.23
2	[2 … 4)	34	1.44	2.9	0.48	0.52	0.29	31.0	0.52
3	[4 … 6)	18	2.16	4.3	0.28	0.72	0.20	21.4	0.72
4	[6 … 8)	10	2.88	5.8	0.16	0.84	0.12	12.8	0.84
5	[8 …10)	8	3.60	7.2	0.09	0.91	0.07	7.5	0.91
6	[10…12)	6	4.32	8.6	0.05	0.95	0.04	4.3	0.95
7	[12…14)	5	5.04	10.1	0.02	0.98	0.03	3.2	0.98
8	[14…16)	0	5.76	11.5	0.01	0.99	0.01	1.1	0.99
9	[16…18]	1	6.48	13.0	0.006	0.994	0.004	0.4	0.994

$$\hat{\psi} = \frac{\overline{x}}{S_x^2} = 0.36; \qquad \hat{\lambda} = \hat{\psi} \cdot \overline{x} = 1.70; \qquad N = 2\hat{\lambda} = 3.40.$$

Якісне порівняння емпіричних та інтервальних теоретичних частот (рис. 3.13) вказує на те, що емпіричний розподіл місячної кількості опадів можна апроксимувати гамма-розподілом.

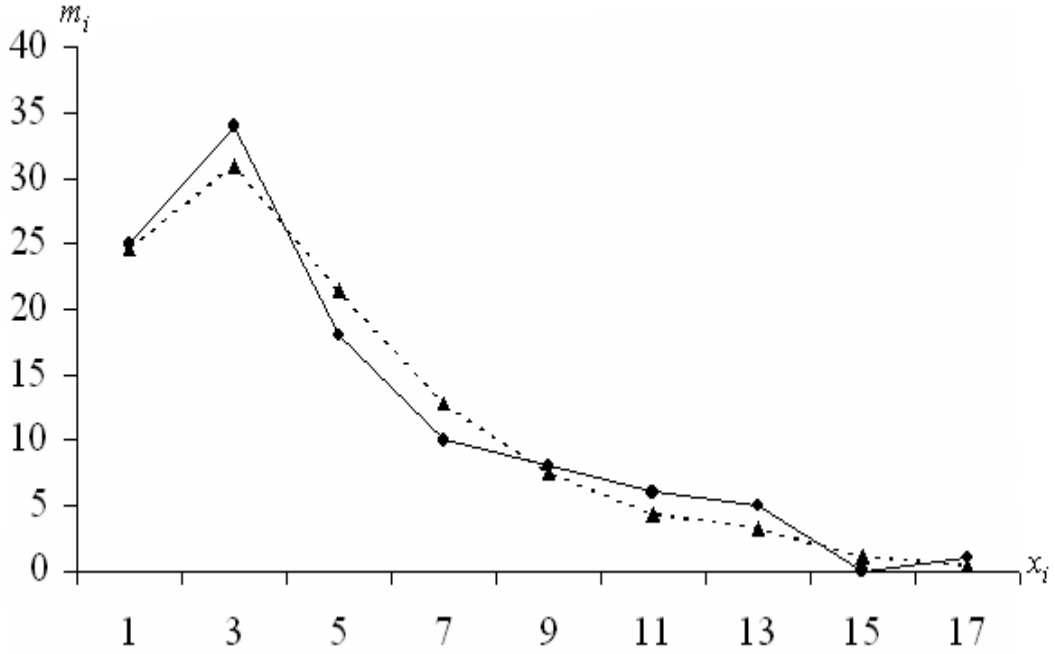


Рисунок 3.13 – Полігони розподілу емпіричних m_i(—) та теоретичних $\tilde{m}_i$(---) частот гамма – розподілу місячної кількості опадів (ст. Ужгород, січень)

Запитання для самоперевірки

1. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
2. З яких етапів складається дослідження закону розподілу випадкової величини?
3. Якими функціями можна представити теоретичний розподіл? Дати їм визначення та перелічити основні властивості.
4. Чому закон розподілу можливо представляти інтервальними теоретичними частотами?
5. Чим відрізняються прості статистичні сукупності від згрупованих?
6. Як розраховуються межі часткових інтервалів при апроксимації емпіричного розподілу гамма – розподілом?
7. Який сенс гістограми та полігону розподілу випадкової величини?
8. Якими параметрами характеризується гамма – розподіл та як отримати їх статистичні оцінки?
9. Як розрахувати інтервальні теоретичні частоти гамма – розподілу?
10. З яким із типів розподілів Пірсона має зв'язок гамма – розподіл?

Задачі

Використовуючи заданий емпіричний розподіл (задачі 3.5.1–3.5.16) розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу.

Перевірку статистичної гіпотези про відповідність емпіричного та теоретичного розподілів див. у підрозділі 4.1.

Задача 3.5.1

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 5.3]	43
2	] 5.3 … 10.6]	14
3	] 10.6 … 15.9]	12
4	] 15.9 … 21.2]	8
5	] 21.2 … 26.5]	6
6	] 26.5 … 31.8]	4
7	] 31.8 … 37.1]	3
8	] 37.1 … 42.4]	2
9	] 42.4 … 47.7]	1
10	] 47.7 … 53.0]	1

Задача 3.5.2

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 2.0]	25
2	] 2.0 … 4.0]	16
3	] 4.0 … 6.0]	10
4	] 6.0 … 8.0]	9
5	]8.0 … 10.0]	7
6	]10.0…12.0]	8
7	]12.0…14.0]	6
8	]14.0…16.0]	5
9	]16.0…18.0]	3
10	]18.0…20.0]	1

Задача 3.5.3

i	Градація	m_i
1	[0.0 …2.0]	25
2	] 2.0 … 4.0]	16
3	] 4.0 … 6.0]	12
4	] 6.0 … 8.0]	10
5	] 8.0 …10.0]	8
6	]10.0…12.0]	0
7	]12.0…14.0]	4
8	]14.0…16.0]	2
9	]16.0…18.0]	2
10	]18.0…20.0]	1

Задача 3.5.4

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 4.0]	32
2	] 4.0 … 8.0]	15
3	]8.0 … 12.0]	12
4	]12.0…16.0]	10
5	]16.0…20.0]	8
6	]20.0…24.0]	6
7	]24.0…28.0]	3
8	]28.0…32.0]	2
9	]32.0…36.0]	1

Задача 3.5.5

i	Градація	m_i
1	[0.0 …2.0]	35
2	] 2.0 …4.0]	16
3	] 4.0 …6.0]	9
4	] 6.0 …8.0]	6
5	]8.0 …10.0]	5
6	]10.0…12.0]	4
7	]12.0…14.0]	3
8	]14.0…16.0]	1
9	]16.0…18.0]	1

Задача 3.5.6

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 4.0]	40
2	]4.0 … 8.0]	21
3	]8.0 …12.0]	13
4	]12.0…16.0]	8
5	]16.0…20.0]	5
6	]20.0…24.0]	3
7	]24.0…28.0]	2
8	]28.0…32.0]	2
9	]32.0…36.0]	1

Задача 3.5.7

i	Градація	m_i
1	[0.0…2.0]	25
2	] 2.0…4.0]	34
3	] 4.0…6.0]	18
4	] 6.0…8.0]	10
5	]8.0…10.0]	8
6	]10.0…12.0]	6
7	]12.0…14.0]	5
8	]14.0…16.0]	0
9	]16.0…18.0]	1

Задача 3.5.8

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 3.0]	50
2	] 3.0 … 6.0]	15
3	] 6.0 … 9.0]	8
4	]9.0 … 12.0]	6
5	]12.0…15.0]	4
6	]15.0…18.0]	3
7	]18.0…21.0]	3
8	]21.0…24.0]	2
9	]24.0…27.0]	1

Задача 3.5.9

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 3.0]	40
2	] 3.0 … 6.0]	21
3	] 6.0 … 9.0]	15
4	]9.0 … 12.0]	8
5	]12.0…15.0]	6
6	]15.0…18.0]	4
7	]18.0…21.0]	2
8	]21.0…24.0]	1
9	]24.0…27.0]	1

Задача 3.5.10

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 5.0]	44
2	] 5.0 …10.0]	25
3	]10.0…15.0]	16
4	]15.0…20.0]	9
5	]20.0…25.0]	6
6	]25.0…30.0]	4
7	]30.0…35.0]	2
8	]35.0…40.0]	1
9	]40.0…45.0]	1

Задача 3.5.11

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 2.5]	10
2	] 2.5 … 5.0]	22
3	] 5.0 … 7.5]	14
4	]7.5 … 10.0]	12
5	]10.0…12.5]	10
6	]12.5…15.0]	8
7	]15.0…17.5]	6
8	]17.5…20.0]	2

Задача 3.5.12

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 1.0]	30
2	] 1.0 … 2.0]	19
3	] 2.0 … 3.0]	12
4	] 3.0 … 4.0]	7
5	] 4.0 … 5.0]	6
6	] 5.0 … 6.0]	4
7	] 6.0 … 7.0]	3
8	] 7.0 … 8.0]	1

Задача 3.6.13

i	Градація	m_i
1	[0 … 16]	17
2	] 16…32]	17
3	] 32…48]	12
4	] 48…64]	6
5	] 64…80]	0
6	] 80…96]	1
7	] 96…112]	1
8	] 112…128]	1

Задача 3.6.14

i	Градація	m_i
1	[0 … 14]	11
2	] 14 …28]	14
3	] 28 … 42]	9
4	] 42 … 56]	10
5	] 56 …70]	6
6	] 70 …84]	1
7	] 84 … 98]	1
8	] 98 …112]	1

Задача 3.5.15

i	Градація	m_i
1	[0 … 15]	5
2	] 15 … 30]	16
3	] 30 …45]	18
4	] 45 …60]	4
5	] 60 …75]	6
6	] 75 …90]	1
7	] 90 …105]	3
8	] 105…120]	2

Задача 3.5.16

i	Градація	m_i
1	[0.0 … 3.0]	11
2	] 3.0 … 6.0]	18
3	] 6.0 … 9.0]	13
4	] 9.0 …12.0]	7
5	]12.0…15.0]	4
6	]15.0…18.0]	3
7	]18.0…21.0]	

3.5.17. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у лютому (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.18. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у березні (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.19. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у квітні (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.20. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у червні (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.21. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у серпні (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.22. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у вересні (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i = \overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i = \overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.23. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у листопаді (ст. Одеса–обсерваторія, таблиця В.6), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i=\overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i=\overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.24. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у січні (ст. Миколаїв, таблиця В.5), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i=\overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i=\overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.25. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у лютому (ст. Миколаїв, таблиця В.5), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i=\overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i=\overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.5.26. Використовуючи просту статистичну сукупність місячної кількості опадів у березні (ст. Миколаїв, таблиця В.5), розрахувати інтервальні ймовірності (p_i) та інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) гамма-розподілу. На основі графічного зображення теоретичного ($\tilde{x}_i, \tilde{m}_i; i=\overline{1,k}$) та емпіричного ($\tilde{x}_i, m_i; i=\overline{1,k}$) розподілів зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними та теоретичними частотами гамма-розподілу. За допомогою критерію Пірсона χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про статистично значущі (незначущі) розбіжності між m_i та $\tilde{m}_i$ (див. підрозділ 4.1).

3.6. Розподіл Пуассона

Основні теоретичні положення

У багатьох випадках, коли мають діло з явищами, що рідко реалізуються у природі, ці події розглядаються як випадкові і можуть підпорядковуються розподілу Пуассона. У метеорологічній практиці такими величинами є кількість днів з грозою, хуртовиною, ожеледдю тощо. *Ці дискретні випадкові величини (X) можуть приймати тільки значення із множини цілих натуральних чисел 0, 1, 2, ...*

За законом Пуассона ймовірність того, що $X = i$, визначається формулою:

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \qquad (i = 0,1,2,...). \qquad (3.66)$$

де λ *- параметр даного розподілу.*

Основна властивість закону Пуассона визначається рівняннями:

$$\lambda = m_x = \sigma_x^2. \qquad (3.67)$$

Очевидно, для статистичної оцінки цього параметра повинні виконуватися співвідношення:

$$\hat{\lambda} = \hat{m}_x = \hat{\sigma}_x^2. \qquad (3.68)$$

А це означає, що

$$\hat{\lambda} = \overline{x} \approx S_x^2. \qquad (3.69)$$

Після визначення оцінки параметра λ на основі згрупованого ряду по додатку Л знаходять ймовірності $P(X = i)$ за умови $i = 0, 1, 2, 3\ldots$ Для розрахунків інтервальних теоретичних частот використовується таке співвідношення:

$$\tilde{m}_i = n\,P(X = i). \qquad (3.70)$$

Як і у попередніх випадках, дослідження закінчується порівнянням емпіричних (m_i) та отриманих за формулою (3.70) теоретичних ($\tilde{m}_i$) частот. Якісне порівняння частот проводиться на основі полігонів, а кількісне – з використанням відомих критеріїв (див. підрозділ 4.1). Тому далі треба перевірити статистичну гіпотезу про відповідність на заданому рівні значущості емпіричного та теоретичного розподілів. Оскільки перевірка цієї гіпотези відносно типу розподілу є самостійною задачею, алгоритм її рішення буде розглядатися окремо (розділ 4).

Розв'язання типової задачі. ***Апроксимація емпіричного розподілу теоретичним законом. Розрахунок інтервальних теоретичних частот розподілу Пуассона.***

Як показали метеорологічні спостереження, в теплий період року (квітень-жовтень) на ст. Херсон спостерігалася така кількість днів (к.д.) зі зливами:

Рік	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
к.д.	0	0	3	4	5	3	3	1
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965
к.д	1	4	7	2	3	1	5	2
Рік	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
к.д.	2	1	4	3	2	2	2	3
Рік	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
к.д	4	5	4	6	6	5	3	1
Рік	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
к.д	4	4	2	3	0	3	4	3

Аналіз цих даних свідчить про те, що зливи у південному регіоні України є рідкісним явищем. Тому доцільно емпіричний розподіл (рис. 3.14) апроксимувати розподілом Пуассона.

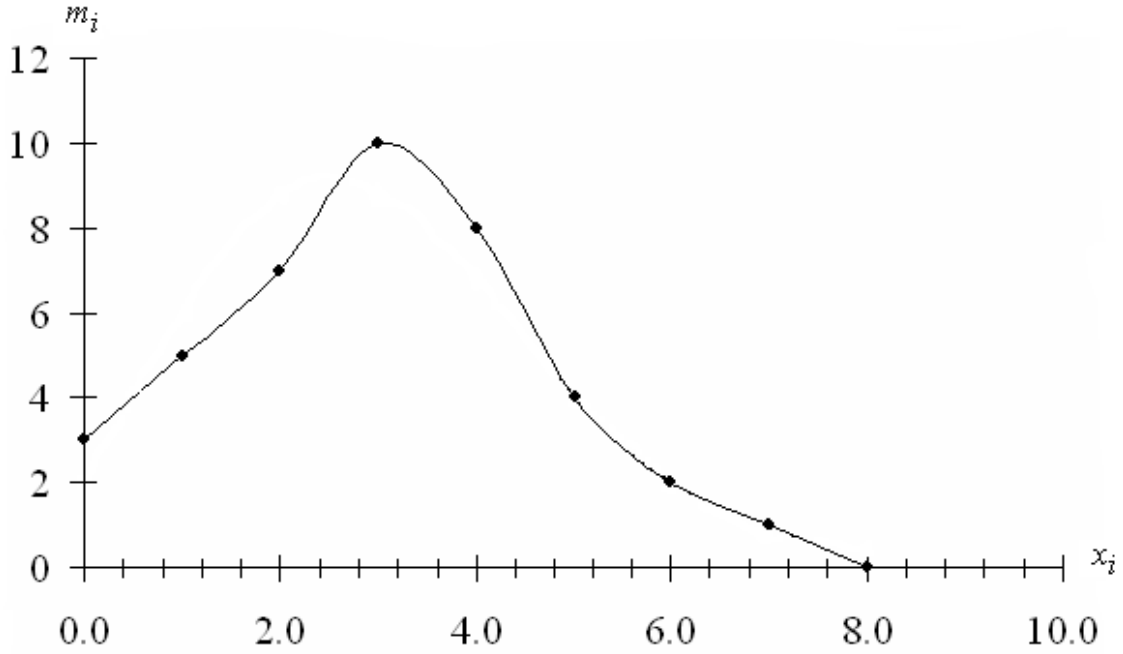


Рисунок 3.14 – Полігон розподілу емпіричних частот кількості днів зі зливами (ст. Херсон, квітень–жовтень)

Позначимо кількість днів зі зливою через x_i, а відповідні інтервальні емпіричні частоти через m_i.

Ці характеристики (які, по-суті, є емпіричним розподілом), а також відповідні розрахунки зведемо в табл. 3.9.

На основі третього стовпчика табл. 3.9, а також її другого стовпчика $\left(\sum_{i=1}^{8} m_i = n\right)$, розрахували середнє значення кількості днів зі зливою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} x_i\, m_i = \frac{120}{40} = 3.$$

Щоб отримати незсунену, ефективну та умотивовану оцінку дисперсії, використали формулу (2.23). Тоді:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i = \frac{112}{39} = 2.9.$$

Якщо випадкова величина підпорядковується розподілу Пуассона, середнє значення і оцінка дисперсії співпадають. Саме це й має місце: $\bar{x} = 3$ мм; $S_x^2 = 2.9 мм^2 \approx 3 мм^2$.

Таблиця 3.9 – Розрахунок статистичних оцінок, інтервальних теоретичних частот та інтервальних ймовірностей на основі ряду кількості днів зі зливами в теплий період року (ст. Херсон, квітень-жовтень)

x_i	m_i	$x_i\, m_i$	$(x_i - \bar{x})^2 m_i$	p_i	$\tilde{m}_i$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	3	0	27	0.0498	2.0
1	5	5	20	0.1494	6.0
2	7	14	7	0.2240	8.8
3	10	30	0	0.2240	8.8
4	8	32	8	0.1680	6.8
5	4	20	16	0.1008	4.0
6	2	12	18	0.0504	2.0
7	1	7	16	0.0216	0.8
8	0	0	0	0.0081	0.4
Сума	40	120	112	0.9961	

За допомогою додатку Л були визначені інтервальні теоретичні ймовірності p_i. Використовуючи відому рівність $\tilde{m}_i = n\,p_i$, маємо для кожного значення (x_i) випадкової величини X відповідне значення теоретичної частоти $\tilde{m}_i$. Останні характеристики теоретичного розподілу розташовані в 5 та 6 стовпчиках табл. 3.9. Як видно з табл. 3.9 та рис.3.15, теоретичні частоти незначно відрізняються від емпіричних. Але якісного порівняння цих частот недостатньо. Необхідно дослідження продовжити, щоб отримати остаточну відповідь про те, що кількість днів зі зливами в теплий період року на ст. Херсон можна описати розподілом Пуассона (див. підрозділ 4.1).

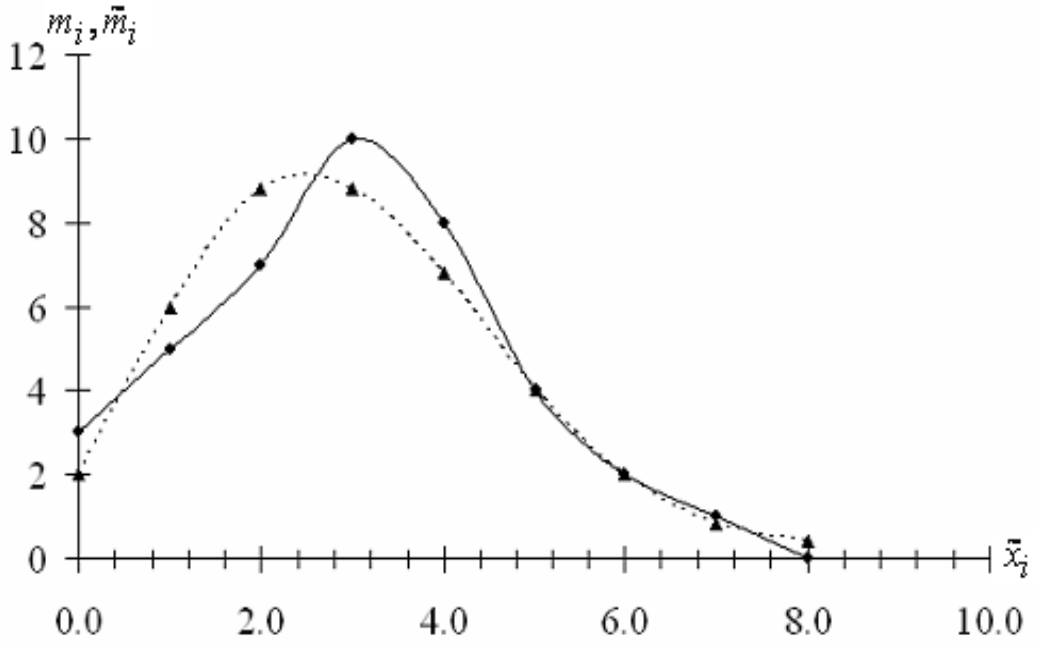


Рисунок 3.15 – Полігони розподілу емпіричних m_i (—) та теоретичних $\tilde{m}_i$ (---) частот розподілу Пуассона, якому підпорядковується кількість днів зі зливами (ст. Херсон, квітень-жовтень).

Запитання для самоперевірки

1. Що називається законом розподілу та які з них найчастіше використовуються при статистичних дослідженнях властивостей випадкових величин?
2. З яких етапів складається дослідження закону розподілу випадкової величини?
3. Якими функціями можна представити теоретичний розподіл? Дати їм визначення та перелічити основні властивості.
4. Чому закон розподілу випадкової величини можливо представляти інтервальними теоретичними частотами?
5. Чим відрізняються прості статистичні сукупності від згрупованих?
6. Як розраховуються часткові інтервали, їх кількість, інтервальні емпіричні та теоретичні частоти при апроксимації емпіричного розподілу розподілом Пуассона?
7. Який сенс гістограми та полігону розподілу випадкової величини?
8. Якщо випадкова величина підпорядковується розподілу Пуассона, яке співвідношення між першим початковим та другим центральним моментами розподілу?
9. За допомогою якого рівняння розраховуються інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона?
10. В якому випадку використовується розподіл Пуассона при апроксимації емпіричного розподілу?

Задачі

В задачах 3.6.1–3.6.30 на основі рядів метеорологічних спостережень за природними явищами побудувати емпіричний розподіл та розрахувати інтервальні теоретичні частоти ($\tilde{m}_i$) розподілу Пуассона. Графічно представити емпіричний ($\tilde{x}_i; m_i, i=\overline{1,k}$) та теоретичний ($\tilde{x}_i; \tilde{m}_i, i=\overline{1,k}$) розподіли (зобразити полігони частот), і зробити висновок про якісні розбіжності між емпіричними (m_i) та теоретичними ($\tilde{m}_i$) частотами розподілу Пуассона. Перевірку статистичної гіпотези про відповідність отриманих розподілів див. у підрозділі 4.1.

3.6.1. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у січні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.2. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у лютому (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.3. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у березні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,…

3.6.4. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у квітні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.5. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у травні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.6. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у червні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.7. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у липні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.8 Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у серпні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.9 Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у вересні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.10. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у жовтні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.11. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у травні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.12. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у червні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.13. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у липні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.14. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у серпні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.15. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у вересні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.16. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Одеса, порт у жовтні (таблиця Д.1) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.17. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у січні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.18. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у лютому (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.19. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у березні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.20. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Біла Церква у квітні (таблиця Д.2) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.21. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у січні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.22. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у лютому (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.23. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у березні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.24. Для числа днів з опадами $\geq$ 5 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у квітні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.25. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у травні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.26. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у червні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.27. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у липні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.28. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у серпні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.29. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у вересні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

3.6.30. Для числа днів з опадами $\geq$ 10 мм за добу за даними метеорологічної станції Харків у жовтні (таблиця Д.3) розрахувати інтервальні теоретичні частоти розподілу Пуассона для числа днів 0,1,2,3,...

4 ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Загальні теоретичні положення щодо перевірки статистичних гіпотез

Перевірка статистичних гіпотез тісно поєднується з теорією оцінювання параметрів. У природознавстві, різних галузях техніки та економіки часто для з'ясування того чи іншого випадкового факту звертаються до висловлювання гіпотез, які можна перевірити статистично, тобто опираючись на результати спостережень у випадкових вибірках. Під *статистичними гіпотезами* розуміють такі гіпотези, котрі відносяться або до виду, або до окремих параметрів розподілу випадкової величини. Наприклад, статистичною є гіпотеза про те, що середня добова температура повітря має нормальний закон розподілу. Статистичною буде також гіпотеза про те, що ряди місячної кількісті опадів на сусідніх метеорологічних станціях суттєво не відрізняються.

Сформулюємо задачу статистичної перевірки гіпотези у загальному вигляді. Нехай $f(x,\Phi)$ – закон розподілу випадкової величини X, який залежить від одного параметра Φ. Припустимо, що необхідно перевірити гіпотезу про те, що $\Phi = \Phi_0$. Будемо називати цю *гіпотезу нульовою* і позначати її через H_0. Гіпотезу про те, що $\Phi = \Phi_1$ будемо називати *конкуруючою* і позначати її через H_1. Гіпотезу H_0 іноді називають *основною*, а гіпотезу H_1 – *альтернативною.* Отже, треба перевірити гіпотезу H_0 відносно конкуруючої гіпотези H_1 на основі вибірки, що складається з n незалежних спостережень над випадковою величиною X : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Статистична сукупність розглядається як випадкова вибірка з генеральної сукупності. Отже, всю можливу множину (N) вибірок об'ємом n можна розділити на дві неперетинних підмножини (позначимо їх через U_1 і U_2), таких, що гіпотеза H_0 повинна бути відкинутою, якщо вибірка, яка розглядається, потрапляє до підмножини U_1, і прийнятою, якщо вибірка належить до підмножини U_2.

Зручніше мати діло не з вибірками, а з деякими статистичними параметрами, позначимо їх умовно q, що розраховуються на основі вибірок за визначеними правилами. Оскільки ці параметри є числами, а останні зображаються точками на числовій осі, підмножини U_1 та U_2 вибірок зводяться до двох підмножин точок числової осі або до двох одномірних областей W_1 і W_2. Область W_1 параметрів q називають *критичною областю*, а область W_2 – *областю припустимих значень*.

Оскільки область W_2 складається з точок, які не увійшли до області W_1, то область W_1 однозначно визначає область W_2 , і навпаки.

Виникає *питання* про те, *якими принципами треба керуватися при побудові критичної області* W_1. Ці принципи полягають у тому, що приймаючи чи відкидаючи гіпотезу H_0 можна припустити помилки двох видів.

Помилка першого роду полягає у тому, що нульова гіпотеза H_0 відкидається, тобто приймається гіпотеза H_1 тоді, коли в дійсності все ж таки вірною є гіпотеза H_0.

Помилка другого роду допускається тоді, коли приймається гіпотеза H_0 , у той час, коли вірною є гіпотеза H_1.

Імовірності помилок першого і другого роду однозначно визначаються вибором критичної області W_1. Умовимося для будь-якої критичної області W_1 позначати через α *імовірність помилки першого роду.* Її називають *рівнем значущості*. Критичну область W_1 відокремлює від області прийняття гіпотези H_0 критична точка $q_{кр}$. Можуть розглядатися *правостороння, лівостороння, двостороння і симетрична двостороння критичні області.* Вони позначені на рис. 4.1.

Критичне значення параметра ($q_{кр}$) знаходиться за такої умови. Припустимо йдеться про *правосторонню критичну область* (рис. 4.1а). Нехай гіпотеза H_0 є вірною. Тоді ймовірність того, що гіпотеза H_0 відкидається тобто, що робиться помилка I роду, дорівнює:

$$P\left(q > q_{кр}\right) = \alpha . \tag{4.1}$$

Для *лівосторонньої критичної області* (рис. 4.1б):

$$P\left(q < q_{кр}\right) = \alpha . \tag{4.2}$$

Для *двосторонньої критичної області* (рис. 4.1в):

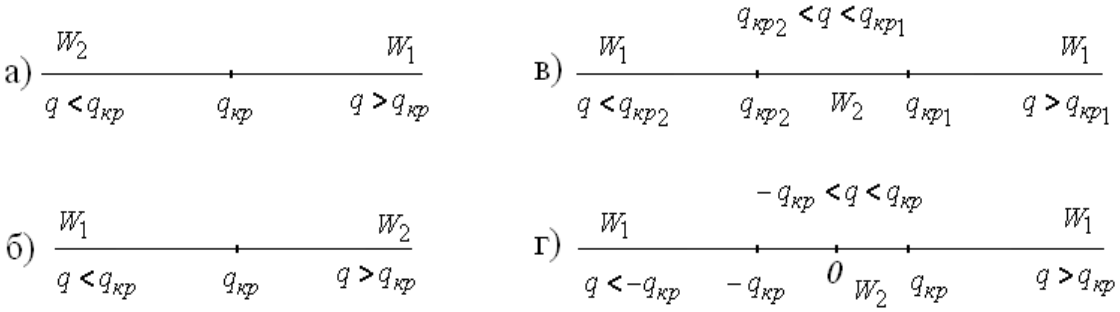
$$P\left(q < q_{кр2}\right) + P\left(q > q_{кр1}\right) = \alpha \tag{4.3}$$

і для *двосторонньої симетричної області* (рис. 4.1г):

$$P\left(q < -q_{кр}\right) + P\left(q > q_{кр}\right) = \alpha \tag{4.4}$$

або

$$P\left(q > q_{кр}\right) = \frac{\alpha}{2}. \tag{4.5}$$



а) правостороння; б) лівостороння; в) двостороння несиметрична; г) двостороння симетрична.

Рисунок 4.1 – Види критичних областей

Отже, можна сказати, що *при великій кількості вибірок доля помилкових рішень дорівнює* α *, якщо гіпотеза* H_0 *є вірною.*

Як вже підкреслювалося, параметр q формується за визначеними правилами в залежності від характеру задачі, яка розв'язується, та властивостей випадкових величин.

Для знаходження *фактичного значення параметра* q використовуються такі теореми:

Теорема 1. Нехай незалежні величини z_i : $z_1, z_2, \ldots, z_n$ підпорядковуються нормальному закону розподілу. Тоді сума квадратів цих величин

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \chi^2 \tag{4.6}$$

підпорядковується закону розподілу, який визначається щільністю ймовірності

$$f\left(\chi^2\right) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\chi^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\chi^2/2}, \qquad \text{за умови } \chi^2 \geq 0 \tag{4.7}$$

з ν *– числом степенів вільності.*

Число степенів вільності є параметром цього розподілу. Число степенів вільності – це кількість значень, функціонально не зв'язаних один з одним. Закон розподілу (4.7) називають χ^2 *- розподілом.*

Теорема 2. Нехай ми маємо дві незалежні випадкові величини U і V, які підпорядковуються χ^2 – розподілу з числами степенів вільності ν_1 і ν_2 відповідно. Тоді випадкова величина вигляду

$$\frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} = F \tag{4.8}$$

підпорядковується розподілу, який описується щільністю ймовірності (4.9) і називається *законом Фішера – Снедекора:*

$$f(F) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2}\frac{F^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}F\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, \quad \textit{за умови } F \geq 0. \tag{4.9}$$

Цей розподіл є двопараметричним з параметрами ν_1 і ν_2.

Теорема 3. Нехай маємо дві незалежні випадкові величини U і V такі, що U - підпорядковується нормальному закону, а V – χ^2 – розподілу з числом степенів вільності ν.

Тоді випадкова величина t

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} \tag{4.10}$$

підпорядковується розподілу з щільністю ймовірності (4.11):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{4.11}$$

Рівняння (4.11) називається *розподілом Стьюдента*, який *має один параметр* ν.

Розглянемо ряд конкретних задач по перевірках статистичних гіпотез, що часто реалізуються в гідрометеорологічних дослідженнях.

4.1. Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу до теоретичного

4.1.1. Основні теоретичні положення

Реалізація алгоритму апроксимації емпіричного розподілу визначеним теоретичним законом приводить до отримання інтервальних теоретичних частот, методи розрахунків яких розглядалися у попередньому розділі.

Отже, для кожної i -тої середини градації можна записати:

$$\begin{array}{ll} \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3, \ldots,\ \tilde{x}_i, \ldots,\ \tilde{x}_k & \\ m_1, m_2, m_3, \ldots, m_i, \ldots,\ m_k & i = \overline{1,k}, \\ \tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3, \ldots, \tilde{m}_i, \ldots, \tilde{m}_k & \end{array} \qquad (4.12)$$

де m_i та $\tilde{m}_i$ – емпірична та інтервальна теоретична частоти відповідно.

Виникає питання, яка міра розбіжності між емпіричними і теоретичними інтервальними частотами нас задовольняє?

Дійсно, як би добре не була б підібрана теоретична крива, між нею та статистичним розподілом завжди будуть деякі розбіжності. Задача дослідника полягає в тому, щоб з'ясувати статистично значущі чи незначущі ці розбіжності. *Якщо розбіжності статистично незначущі,* то вони пояснюються тільки випадковими обставинами, пов'язаними, наприклад, з обмеженою кількістю спостережень. *Якщо розбіжності суттєві (статистично значущі),* то пов'язані вони з тим, що теоретичний закон розподілу випадкової величини не відповідає емпіричному розподілу.

Відповіді на ці запитання отримаємо після перевірки статистичної гіпотези. Для цього, перш за все, треба визначити критерій, за допомогою якого втілюється перевірка гіпотези H_0 відносно альтернативної гіпотези H_1. Гіпотеза H_0 формулюється таким чином: розбіжності між емпіричними m_i і теоретичними $\tilde{m}_i$ частотами є несуттєвими на рівні значущості α.

Для її перевірки використовують так звані *«критерії згоди»*. Одним з них є *критерій Пірсона* χ^2, який вважається досить зручним. Він визначається формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k'} \frac{\left(m_i - \tilde{m}_i\right)^2}{\tilde{m}_i} \ . \qquad (4.13)$$

Застосування цього критерію для перевірки узгодженості між емпіричними та теоретичними частотами є досить простим, тому що, як випливає з рівності (4.13), він складається із різниць між цими частотами, що й визначає міру розбіжності між ними.

Далі отримане за формулою (4.13) значення критерію Пірсона χ^2 порівнюють з критичним – $\chi^2_{кр}(\alpha,\nu)$. Останнє залежить від рівня значущості α та числа степенів вільності ν. Рівень значущості α визначає дослідник. Число степенів вільності залежить від типу розподілу і визначається рівнянням:

$$\nu = k' - l, \tag{4.14}$$

де

k' – кількість часткових інтервалів, для яких $m_i \geq 5$;

l – кількість лінійних зв'язків відносно інтервальних частот m_i, що використовуються при статистичному оцінюванні моментів розподілу, на основі яких розраховуються оцінки параметрів того чи іншого теоретичного закону.

Нагадаємо *числа степенів вільності для визначення* $\chi^2_{кр}(\alpha,\nu)$ при перевірках гіпотез для тих законів розподілу, які розглядалися у третьому розділі:

- *Нормальний розподіл:* $\nu = k' - 3$.
- *I тип розподілів Пірсона:* $\nu = k' - 5$.
- *II тип розподілів Пірсона:* $\nu = k' - 4$.
- *III тип розподілів Пірсона:* $\nu = k' - 4$.
- *Гамма-розподіл:* $\nu = k' - 3$.
- *Розподіл Пуассона:* $\nu = k' - 2$.

Рішення відносно прийняття гіпотези H_0 або альтернативної гіпотези H_1 залежить від того, в яку область попаде χ^2.

Для *правосторонньої критичної області* (4.1)

$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha,\nu)\right] = \alpha. \tag{4.15}$$

Тому нерівність

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha,\nu) \tag{4.16}$$

визначає область прийняття гіпотези H_0, а критична область визначається нерівністю:

$$\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha,\nu). \tag{4.17}$$

У першому випадку, якщо отримаємо нерівність (4.16), гіпотеза H_0 про незначущість розбіжностей між емпіричними (m_i) та теоретичними ($\tilde{m}_i$) частотами і, таким чином, про відповідність емпіричного розподілу теоретичному, не відкидається. За умови нерівності (4.17) – приймається гіпотеза H_1 й це означає, що теоретичний розподіл, який вибрано для апроксимації емпіричного розподілу, з заданою ймовірністю не відповідає останньому.

Запитання для самоперевірки.

1. Що розуміють під терміном «статистична гіпотеза»?
2. Які критичні області використовуються при статистичних дослідженнях?
3. Якими принципами треба керуватися при побудові тієї чи іншої критичної області?
4. Який сенс рівня значущості?
5. Як називається ймовірність помилки І-го роду?
6. Що розуміють під терміном «довірча ймовірність»?
7. За якими правилами та теоремами формується фактичний критерій (q) до перевірки тієї чи іншої статистичної гіпотези?
8. На якому принципі втілюється перевірка статистичної гіпотези?
9. З якою метою використовуються так звані «критерії згоди»?
10. Як розрахувати фактичне значення критерію Пірсона χ^2?
11. Як отримати числа степенів вільності для визначення $\chi^2_{кр}$ при апроксимації емпіричних розподілів відомими теоретичними законами?
12. Яке співвідношення повинно виконуватися між χ^2 і $\chi^2_{кр}$, щоб гіпотеза H_0 про відповідність емпіричного і теоретичного розподілів була прийнятою (відкинутою)?

4.1.2. Розв'язання типових задач

1. Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу нормальному закону.

У підрозділі 3.1 (див. табл. 3.4) для емпіричних інтервальних частот m_i були отримані відповідні теоретичні частоти нормального розподілу $\tilde{m}_i$ $\left(i=\overline{1.10}\right)$. Треба на рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотезу H_0 про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря на ст. Одеса за 23 квітня нормальному закону. Для перевірки гіпотези H_0 використати критерій Пірсона χ^2. Якщо гіпотеза H_0 є вірною, записати в аналітичному вигляді отриманий теоретичний розподіл, враховуючи статистичні оцінки його параметрів.

Розрахунки критерію Пірсона χ^2 наводяться в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Порядок обчислення критерію Пірсона χ^2 на основі статистичного ряду середньодобової температури повітря (ст. Одеса, 23 квітня)

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{\left(m_i-\tilde{m}_i\right)^2}{\tilde{m}_i}$
1 2 3	1 3 } 11 7	1.1 3.7 } 13.8 9.0	0.57
4	21	15.8	1.71
5	21	21.2	0.00
6	19	20.4	0.10
7	13	14.9	0.24
8	9	8.2	0.08
9 10	3 2 } 5	3.2 1.0 } 4.2	0.15
χ^2			2.85

За умови нормального розподілу число степенів вільності розраховується за допомогою рівняння:

$$\nu = k' - 3.$$

Оскільки після об'єднання інтервальних частот на краях розподілу кількість статистично забезпечених часткових інтервалів зменшилася до 7, то маємо:

$$\nu = 7\text{-}3=4.$$

По додатку М знаходимо критичне значення параметра χ^2, яке залежить від рівня значущості (в нашому прикладі $\alpha = 0.05$) й числа степенів вільності ν, яке дорівнює 4.

Таким чином,

$$\chi^2_{кр}(0.05;\ 4)=9.49.$$

Отже

$$\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, \nu)$$

і гіпотеза H_0 про відповідність емпіричного розподілу нормальному закону не відкидається, а це означає, що з ймовірністю 95% середньодобова температура повітря на ст. Одеса за 23 квітня апроксимується нормальним законом. Отриманий для даного емпіричного розподілу теоретичний закон описується:

щільністю ймовірності $f(x)$ *нормального розподілу:*

$$f(x) = \frac{1}{2.9\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-10.1)^2}{16.82}\right\}$$

та *функцією розподілу* $F(x)$ цього закону:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{2.9\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(x-10.1)^2}{16.82}\right\} \cdot dx.$$

Статистичні оцінки *параметрів масштабу* та *форми нормального розподілу* відповідно дорівнюють:

$$\hat{m}_x = \bar{x} = 10.1^\circ\text{C};$$

$$\hat{\sigma}_x \Rightarrow S_x = 2.9^\circ\text{C}.$$

2. *Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу першому типу розподілів Пірсона.*

При розв'язанні типової задачі в підрозділі 3.2 для емпіричних інтервальних частот m_i $\left(i=\overline{1.10}\right)$ були отримані відповідні теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ I типу розподілів Пірсона. Вони утримуються в табл. 3.5 (3-й і 9-й стовпчики) та в табл. 4.2.

Треба за допомогою критерію Пірсона χ^2 на рівні значущості $\alpha=0.05$ перевірити гіпотезу H_0 про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у січні на ст. Одеса першому типу розподілів Пірсона. Якщо гіпотеза H_0 є вірною, записати основне рівняння I типу розподілів Пірсона, враховуючи статистичні оцінки параметрів цього закону.

Використовуючи загальні теоретичні положення щодо перевірки статистичних гіпотез, розрахуємо «критерій згоди» Пірсона χ^2 за допомогою формули (4.13), а потім порівняємо його з критичним значенням цього критерію.

Розрахунки критерію Пірсона χ^2 наводяться в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Порядок обчислення критерію Пірсона χ^2 на основі статистичного ряду середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень)

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{\left(m_i-\tilde{m}_i\right)^2}{\tilde{m}_i}$
1	5 } 8	2.4 } 7.2	
2	3	4.8	0.09
3	5	7.5	0.83
4	12	10.2	0.32
5	14	12.3	0.23
6	12	13.3	0.13
7	13	13.0	0.00
8	12	11.0	0.09
9	6 } 9	7.4 } 10.1	
10	3	2.7	0.12
χ^2			1.81

Як випливає з табл. 4.2, не всі 10 градацій вибірки є статистично забезпеченими. Тому необхідно ліквідувати цей недолік і об'єднати інтервальні частоти в тих градаціях, де $m_i < 5$. А саме першу з 2-ою та 9-ту з десятою. Це приводить до зменшення кількості часткових інтервалів до 8. Число степенів вільності в нашому прикладі отримаємо таким чином:

$$\nu = k' - 5 = 8 - 5 = 3.$$

З додатку М маємо:

$$\chi^2_{кр}(\alpha, \nu) = \chi^2_{кр}(0.05; 3) = 7.81.$$

Оскільки $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, гіпотеза H_0 про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у січні (ст. Одеса) першому типу розподілів Пірсона не відхиляється на рівні значущості $\alpha = 0.05$. Таким чином, середню місячну температуру повітря у січні на ст. Одеса з ймовірністю 95% можна апроксимувати I типом розподілів Пірсона. Статистичні оцінки параметрів I типу Пірсона дорівнюють:

$$\tilde{m}_0 = 13.39, \quad q_1 = 2.42, \quad q_2 = 1.39, \quad l_1 = 7.69, \quad l_2 = 4.41.$$

Відповідно отриманих оцінок параметрів основне рівняння I типу розподілів Пірсона для середньої місячної температури повітря у січні (ст. Одеса) має вигляд:

$$\tilde{m}_i = 13.39\left(1 + \frac{z_i}{7.69}\right)^{2.42} \cdot \left(1 - \frac{z_i}{4.41}\right)^{1.39}.$$

3. *Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу II типу розподілів Пірсона.*

На рівні значущості $\alpha = 0.10$ перевірити статистичну гіпотезу H_0 про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 23 жовтня на ст. Одеса даному теоретичному розподілу.

Якщо гіпотеза H_0 не відхиляється, записати основне рівняння II типу Пірсона, враховуючи статистичні оцінки параметрів цього розподілу. Емпіричні m_i та теоретичні $\tilde{m}_i$ $\left(i = \overline{1.10}\right)$ інтервальні частоти наводяться в табл. 3.6 (див. підрозділ 3.3).

Використовуючи загальні теоретичні положення щодо перевірки статистичних гіпотез, розрахуємо «критерій згоди» Пірсона χ^2 за допомогою рівняння (4.13), а потім порівняємо його з критичним значенням цього критерію.

Розрахунки критерію Пірсона χ^2 наводяться в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Порядок обчислення критерію Пірсона χ^2 на основі емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 23 жовтня (ст. Одеса)

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{(m_i-\tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
1	2 } 9	1.8 } 7.7	
2	7	5.9	0.22
3	11	11.2	0.00
4	12	16.1	1.04
5	22	18.7	0.58
6	18	18.1	0.00
7	16	14.5	0.16
8	8	9.3	0.18
9	4 } 5	4.2 } 5.1	
10	1	0.9	0.00
χ^2			2.18

Як випливає з табл. 4.3, не всі 10 градацій є статистично забезпеченими. Тому необхідно об'єднати інтервальні частоти в тих градаціях, де $m_i < 5$. Це приводить до зменшення кількості частинних інтервалів і $k' = 8$. Тоді число степенів вільності в нашому прикладі отримаємо таким чином:

$$\nu = 8 - 4 = 4.$$

Якщо рівень значущості $\alpha = 0.10$, то використовуючи додаток М будемо мати:

$$\chi^2_{кр}\ (0.10;\ 4) = 7.78.$$

Отже, $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, \nu)$ і гіпотеза H_0 з ймовірністю 90% не відкидається й емпіричний розподіл середньодобової температури повітря за 23 жовтня на ст. Одеса можна апроксимувати II типом розподілів Пірсона. Таким чином, заданий емпіричний розподіл описується основним рівнянням II-ого типу:

$$\tilde{m}_i = 18.87\left[1 - \left(z_i / 5.98\right)^2\right]^{3.16}$$

з оцінками параметрів:

$$\tilde{m}_0 = 18.87; \qquad \tilde{l} = 5.98; \qquad q = 3.16.$$

4. Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу III типу розподілів Пірсона.

Для перевірки даної статистичної гіпотези скористаємося вже розрахованими інтервальними теоретичними частотами III типу розподілів Пірсона на основі ряду місячної кількості опадів (табл. 3.7, 3-й та 9-й стовпчики). Відповідні інтервальні емпіричні та теоретичні частоти також наводяться в табл. 4.4. Перевірку гіпотези H_0 про можливість апроксимації даного емпіричного розподілу III типом розподілів Пірсона будемо здійснювати на рівні значущості α=0.025, використовуючи критерій Пірсона χ^2. Якщо гіпотеза H_0 не відхиляється, записати основне рівняння III типу Пірсона, враховуючи отримані статистичні оцінки параметрів цього розподілу.

Розрахунки критерію Пірсона χ^2 наводяться в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Розрахунки критерію Пірсона χ^2 на основі вибірки місячної кількості опадів

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{(m_i-\tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
1	39	36.5	0.17
2	37	42.2	0.64
3	35	33.9	0.04
4	32	23.1	3.43
5	11	14.9	1.02
6	4	9.1	
7	5	4.4	
8	2	2.5	
9	5	1.7	0.06
10	1	1.0	
11	1	0.4	
	18	19.1	
χ^2			5.36

З табл. 4.4 випливає, що виникла потреба об’єднати частоти в останніх 6-ти часткових інтервалах. Нагадаємо, що при використанні критерію Пірсона χ^2 необхідно, щоб інтервальна (емпірична) частота

була не менша за 5. Таким чином, ми маємо k'=6. Для третього типу розподілів Пірсона $\nu = k' - 4 = 6 - 4 = 2$.

Отже

$$\chi^2_{кр}(\alpha,\nu) = \chi^2_{кр}(0.025;2) = 7.38;$$

$$\chi^2 = 5.36.$$

Оскільки, $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha,\nu)$ і гіпотеза H_0 з ймовірністю 97.5% не відкидається, то емпіричний розподіл місячної кількості опадів можна апроксимувати III типом розподілів Пірсона. Основне рівняння отриманого теоретичного закону має вигляд:

$$\tilde{m}_i = 42.84\left(1 + \frac{z_i}{1.56}\right)^{1.1} \cdot e^{-0.71 z_i}.$$

Нижче наводяться статистичні оцінки параметрів III типу розподілів Пірсона, які отримали на основі вибірки місячної кількості опадів, до якої добирався теоретичний розподіл:

$$\tilde{m}_0 = 42.84; \qquad l' = 1.56; \qquad p = 1.1.$$

5. Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу гамма - розподілу.

У підрозділі 3.5 при розв’язанні типової задачі були розраховані на основі емпіричного ряду місячної кількості опадів у січні інтервальні теоретичні частоти гамма-розподілу, які представлені в табл. 3.8 та 4.5. Треба перевірити гіпотезу H_0 на рівні значущості $\alpha = 0.05$ про відповідність даного емпіричного розподілу гамма-розподілу за допомогою критерію Пірсона χ^2. Якщо гіпотеза H_0 не відхиляється, представити отриманий теоретичний розподіл в аналітичному вигляді, враховуючи отримані на основі емпіричного ряду статистичні оцінки параметрів гамма – розподілу.

Розрахунки «критерію згоди» Пірсона χ^2 наводяться в табл. 4.5.

Як випливає з табл. 4.5, не всі 9 градацій є статистично забезпеченими. Тому необхідно було об’єднати частоти в останніх трьох градаціях.

Таблиця 4.5 – Порядок розрахунків критерію Пірсона χ^2 на основі емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Ужгород, січень)

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
1	25	24.6	0.01
2	34	31.0	0.29
3	18	21.4	0.54
4	10	12.8	0.61
5	8	7.5	0.03
6	6	4.3	0.67
7	5	3.2	0.36
8	0 } 6	1.1 } 4.7	
9	1	0.4	
χ^2			2.51

Розрахувавши за допомогою формули (4.13) критерій Пірсона χ^2, необхідно знайти $\chi^2_{кр}$ по таблицях додатку М.

Для рівня значущості α =0.05 та ν = 6 – 3 = 3 маємо:

$$\chi^2_{кр}(0.05;\ 3) = 7.81.$$

Таким чином, $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, \nu)$ і гіпотеза H_0 з ймовірністю 95% не відхиляється й емпіричний розподіл місячної кількості опадів у січні (ст. Ужгород) можна апроксимувати гамма-розподілом з оцінками параметрів:

$$\hat{\lambda} = 1.70; \qquad \hat{\psi} = 0.36\ .$$

Щільність ймовірності отриманого теоретичного закону має вигляд:

$$f(x) = \frac{0.36^{1.7} x^{0.7} e^{-0.36x}}{\Gamma(1.70)} = 0.19 x^{0.70} e^{-0.36x}.$$

6. Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу закону Пуассона.

У підрозділі 3.6 при розв'язанні типової задачі були розраховані на основі емпіричного ряду кількості днів зі зливами у теплий період року (ст. Херсон) теоретичні інтервальні частоти розподілу Пуассона, які представлені в табл. 3.9 та табл. 4.6. Треба перевірити на рівні значущості $\alpha = 0.20$ гіпотезу H_0 про відповідність даного емпіричного розподілу закону Пуассона. Якщо гіпотеза H_0 не відхиляється на рівні значущості $\alpha = 0.20$, записати основне рівняння розподілу Пуассона, враховуючи отримані статистичні оцінки цього закону.

Порядок обчислення критерію Пірсона χ^2, який використовується в якості «критерію згоди» між емпіричними та інтервальними теоретичними частотами розподілу Пуассона, наводиться в табл. 4.6.

Таблиця 4.6 – Розрахунки критерію χ^2 на основі вибірки кількості днів зі зливами в теплий період року (ст. Херсон)

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
0	3 } 8	2.0 } 8.0	
1	5	6.0	0
2	7	8.8	0.37
3	10	8.8	0.16
4	8	6.8	0.21
5	4 } 7	4.0 } 7.2	
6	2	2.0	0.01
7	1	0.8	
8	0	0.4	
χ^2			0.75

Як випливає з табл. 4.6, не всі 8 градацій є статистично забезпеченими. Тому необхідно об'єднати інтервальні частоти в тих градаціях, де $m_i < 5$. Це призводить до зменшення кількості часткових інтервалів. Тому $k' = 5$.

Оскільки закон Пуассона є *однопараметричним,* $\nu = k' - 2$. Отже ν = 5–2 =3 . Для рівня значущості α = 0.20 маємо: $\chi^2_{кр}$(0.20; 3)=4.64.

Таким чином, $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha,\nu)$ і гіпотеза H_0 про незначущість розбіжностей між емпіричними інтервальними частотами і відповідними частотами закону Пуассона з ймовірністю 80% не відхиляється й емпіричний розподіл (кількість днів зі зливами в теплий період року на ст. Херсон) можна апроксимувати законом Пуассона з оцінкою параметра:

$$\hat{\lambda} = \overline{x} = 3.$$

4.1.3. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу нормальному закону

В задачах цього розділу на заданому рівні значущості α здійснити перевірку статистичної гіпотези про відповідність даного емпіричного розподілу нормальному закону. Враховуючи результат цієї апроксимації (прийняття гіпотези H_0 чи H_1), відобразити підібраний теоретичний розподіл його основним рівнянням та графічно. Побудувати функцію розподілу, розрахувавши інтервальні ймовірності p_i. Використовуючи отриману функцію нормального розподілу, властивості цього закону та додаток И відповісти на ряд запитань.

1. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 26.1 °C; S_x = 1.0 °C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	23.8	24.3	24.8	25.3	25.8	26.3	26.8	27.3	27.8	28.3
m_i	1	3	7	11	18	17	10	8	3	2
$\tilde{m}_i$	0.9	2.9	6.8	12.0	16.1	16.4	12.6	7.4	3.2	1.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 25.0 °C, вище 25.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 80% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 25.1°C до 27.1°C?

2. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 11.3°C; S_x = 3.1°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	4.1	6.1	8.1	10.1	12.1	14.1	16.1	18.1	20.1
m_i	1	4	8	16	14	11	5	0	1
$\tilde{m}_i$	1.0	3.6	9.0	14.4	15.2	10.4	4.7	1.4	0.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 10.0°C, вище 15.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 50% і 80%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 5.1°C до 17.5°C?

3. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 22.9°C; S_x = 3.2°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	14.1	16.1	18.1	20.1	22.1	24.1	26.1	28.1	30.1
m_i	1	1	3	10	18	12	8	3	2
$\tilde{m}_i$	0.3	1.5	4.7	10.0	14.3	13.6	8.7	3.7	1.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 15.0 ^{0}C, вище 25.0 ^{0}C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 13.3°C до 32.5°C?

4. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 12.6°C; S_x = 3.8°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	5.0	7.0	9.0	11.0	13.0	15.0	17.0	19.0	21.0
m_i	3	8	10	9	17	13	11	3	1
$\tilde{m}_i$	2.2	5.4	10.2	14.5	15.7	12.8	7.9	3.7	1.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 10.0°C, вище 15.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 8.8°C до 16.4°C?

5. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 24.8°C; S_x = 2.6°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3	27.8	29.3	30.8
m_i	1	3	12	15	15	14	9	4	2
$\tilde{m}_i$	1.2	3.9	8.9	14.6	17.2	14.6	8.9	3.9	1.2

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 20.0°C, вище 25.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 99%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 19.6°C до 30.0°C?

6. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 25.5°C; S_x = 0.9°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	23.0	23.6	24.2	24.8	25.4	26.0	26.6	27.2	27.8
m_i	2	0	6	11	18	13	7	2	1
$\tilde{m}_i$	0.5	2.1	6.2	12.0	15.4	13.1	7.3	2.7	0.6

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 25.0°C, вище 27.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 80% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 22.8°C до 28.2°C?

7. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 10.3°C; S_x = 2.9°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	3.8	5.3	6.8	8.3	9.8	11.3	12.8	14.3	15.8	17.3
m_i	4	2	7	16	20	18	11	8	3	1
$\tilde{m}_i$	1.4	4.1	9.0	14.8	18.6	17.7	12.8	7.0	2.9	0.9

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 5.0°C, вище 10.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 60% і 99%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 7.4°C до 13.2°C?

8. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 5 червня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 18.8°C; S_x=2.6°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.7	14.2	15.7	17.2	18.7	20.2	21.7	23.2	24.7	26.2
m_i	3	3	7	29	19	20	13	3	2	1
$\tilde{m}_i$	1.4	4.8	11.4	19.4	23.4	20.0	12.1	5.2	1.6	0.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 15.0°C, вище 20.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 16.2°C до 21.4°C?

9. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 1 березня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = - 0.1°C; S_x = 4.1°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-9.6	-7.8	-6.0	-4.2	-2.4	-0.6	1.2	3.0	4.8	6.6
m_i	3	3	6	9	13	18	16	13	11	7
$\tilde{m}_i$	1.1	2.9	6.1	10.5	14.9	17.4	16.6	13.1	8.4	4.5

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче -5.0°С, вище 0.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 80% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від -4.2°С до 4.0°С?

10. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 19 липня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 22.4°С; S_x= 2.2°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	18.1	19.2	20.3	21.4	22.5	23.6	24.7	25.8	26.9	28.0
m_i	5	8	10	19	19	16	17	3	2	2
$\tilde{m}_i$	2.9	6.9	12.6	18.0	20.0	17.5	11.9	6.3	2.6	0.8

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 20.0°С, вище 25.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 50% і 99%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі 18.0°С до 26.8°С?

11. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 20.1°С; S_x= 3.3°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3	25.8	27.3
m_i	4	8	11	14	16	15	12	8	5	2
$\tilde{m}_i$	2.8	6.1	10.5	14.9	17.2	16.1	12.2	7.6	3.8	1.6

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 15.0°С, вище 25.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 13.5°С до 26.7°С?

12. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 23.1°C; S_x = 1.0°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	20.9	21.4	21.9	22.4	22.9	23.4	23.9	24.4	24.9	25.4
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2
$\tilde{m}_i$	1.7	4.6	9.9	16.2	20.3	19.5	14.3	8.0	3.4	1.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 22.0°C, вище 25.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 20.1°C до 26.1°C?

13. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 12 серпня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 22.0°C; S_x = 2.5°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	15.3	16.7	18.1	19.5	20.9	22.3	23.7	25.1	26.5	27.9
m_i	1	2	7	11	17	26	21	5	5	2
$\tilde{m}_i$	0.5	2.1	6.1	13.0	19.9	21.9	17.5	10.1	4.2	1.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 20.0°C, вище 25.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 80% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 19.5°C до 24.5°C?

14. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 10.2°C; S_x = 1.0°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
m_i	2	5	9	14	16	15	13	10	4	2
$\tilde{m}_i$	1.7	4.2	8.5	13.5	17.0	16.8	13.2	8.2	4.0	1.6

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 10.0°C , вище 12.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 8.2°C до 12.2°C?

15. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 12.8°C; S_x = 1.2°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.6	11.1	11.6	12.1	12.6	13.1	13.6	14.1	14.6	15.1
m_i	4	8	9	12	15	14	13	10	6	3
$\tilde{m}_i$	2.6	5.4	9.4	13.5	16.0	15.7	12.8	8.7	4.9	2.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 12.0°C, вище 14.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 80% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 9.2°C до 16.4°C?

16. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 26 серпня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 20.4°C; S_x = 2.6°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.3	14.8	16.3	17.8	19.3	20.8	22.3	23.8	25.3	26.8
m_i	2	2	5	12	22	23	20	8	5	1
$\tilde{m}_i$	0.6	2.3	6.6	13.7	20.7	22.5	17.7	10.1	4.1	1.2

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 20.0°C, вище 20.0 °C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 15.2°C до 25.6°C?

17. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 20 березня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 3.0°C; S_x = 3.6°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-5.5	-3.5	-1.5	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5
m_i	1	5	8	20	23	18	16	3	3	2
$\tilde{m}_i$	1.3	4.2	9.9	17.2	21.9	20.3	13.8	6.8	2.5	0.7

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 0.0°C, вище 10.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 60% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від -4.2°C до 10.2°C?

18. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 10 жовтня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 12.5°C; S_x = 3.1°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	5.6	7.1	8.6	10.1	11.6	13.1	14.6	16.1	17.6	19.1
m_i	3	7	9	10	16	16	20	14	4	1
$\tilde{m}_i$	1.7	4.4	8.9	14.3	18.3	18.7	15.1	9.8	5.0	2.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 10.0°C, вище 16.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 9.4°C до 15.6°C?

19. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 23.9°C; S_x = 1.0°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	21.6	22.1	22.6	23.1	23.6	24.1	24.6	25.1	25.6	26.1
m_i	1	3	7	11	18	17	10	8	3	2
$\tilde{m}_i$	0.9	2.9	6.8	12.0	16.1	16.4	12.6	7.4	3.2	1.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 23.0°С, вище 25.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 85% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 22.9°С до 24.9°С?

20. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\bar{x}$ = 25.1°С; S_x = 1.1°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	22.7	23.2	23.7	24.2	24.7	25.2	25.7	26.2	26.7	27.2
m_i	2	5	8	10	12	13	11	9	7	3
$\tilde{m}_i$	1.6	3.7	6.9	10.6	13.4	14.0	12.0	8.4	4.9	2.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 25.0°С, вище 27.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 77% і 97%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 21.8°С до 28.4°С?

21. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 11 вересня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\bar{x}$ = 18.1°С; S_x = 2.8°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.5	13.7	14.9	16.1	17.3	18.5	19.7	20.9	22.1	23.3
m_i	4	6	9	11	21	13	12	14	6	5
$\tilde{m}_i$	2.3	5.0	9.1	13.6	16.8	17.3	14.7	10.4	6.1	2.9

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 15.0°С, вище 20.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 15.3°С до 20.9°С?

22. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 22.0 °C; S_x = 1.0°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	19.8	20.3	20.8	21.3	21.8	22.3	22.8	23.3	23.8	24.3
m_i	2	6	10	13	16	15	12	9	5	1
$\tilde{m}_i$	1.9	4.6	9.0	13.8	16.9	16.4	12.5	7.6	3.6	1.4

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 20.0°C, вище 23.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 85% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 19.0°C до 25.0°C?

23. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 18 червня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 19.5°C; S_x = 2.9°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.7	15.0	16.3	17.6	18.9	20.2	21.5	22.8	24.1	25.4
m_i	3	5	12	18	15	12	14	11	8	2
$\tilde{m}_i$	2.4	5.3	9.7	14.5	17.7	17.5	14.2	9.3	5.0	2.2

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 18.0°C, вище 22.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 85%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 16.6°C до 22.4°C?

24. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 10.6°C; S_x = 1.0°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.3	8.8	9.3	9.8	10.3	10.8	11.3	11.8	12.3	12.8
m_i	1	3	7	11	18	17	10	8	3	2
$\tilde{m}_i$	0.9	2.9	6.8	12.0	16.1	16.4	12.6	7.4	3.2	1.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 8.5°С, вище 10.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 80% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 8.6°С до 12.6°С?

25. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 27 липня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 22.5°С; S_x = 2.6°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	17.2	18.5	19.8	21.1	22.4	23.7	25.0	26.3	27.6	28.9
m_i	2	8	15	16	14	27	8	6	3	2
$\tilde{m}_i$	2.5	6.2	11.9	17.7	20.4	18.2	12.5	6.7	2.8	0.9

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 18.5 ^{0}С, вище 26.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 87% і 97%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 19.9°С до 25.1°С?

26. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 2 серпня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 22.2°С; S_x = 2.2°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	17.1	18.4	19.7	21.0	22.3	23.6	24.9	26.2	27.5	28.8
m_i	4	3	10	21	25	23	8	3	2	1
$\tilde{m}_i$	1.6	5.3	12.2	20.0	23.3	19.3	11.4	4.8	1.4	0.3

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 20.0°С, вище 25.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 85%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 17.8°С до 26.6°С?

27. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 22 червня на ст. Одеса нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 20.2 °C; S_x = 2.4 °C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	14.2	15.5	16.8	18.1	19.4	20.7	22.0	23.3	24.6	25.9
m_i	1	3	9	17	17	22	17	8	4	2
$\tilde{m}_i$	1.0	3.3	8.1	15.0	20.5	21.0	16.1	9.2	3.9	1.2

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 15.0°C, вище 20.5°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 70% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цей день в інтервалі від 13.0°C до 27.4°C?

28. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 14.0 °C; S_x = 1.1 °C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	11.7	12.2	12.7	13.2	13.7	14.2	14.7	15.2	15.7	16.2
m_i	2	5	9	10	12	13	11	9	6	3
$\tilde{m}_i$	1.7	3.9	7.2	10.9	13.6	14.0	11.8	8.1	4.6	2.1

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 12.5°C, вище 15.0°C?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 12.9°C до 15.1°C?

29. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 17.6°C; S_x = 1.0°C

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	15.4	15.9	16.4	16.9	17.4	17.9	18.4	18.9	19.4	19.9
m_i	1	6	12	16	19	18	14	11	4	1
$\tilde{m}_i$	1.7	4.6	9.9	16.3	20.5	19.9	14.7	8.4	3.7	1.2

і відповісти на такі запитання:

1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 17.0°С, вище 19.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 77% і 95%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 15.6°С до 19.6°С?

30. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря нормальному розподілу, якщо відомо: $\overline{x}$ = 17.3°С; S_x = 2.9°С

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.8	12.3	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2
$\tilde{m}_i$	1.7	4.6	9.9	16.2	20.3	19.5	14.3	8.0	3.4	1.1

і відповісти на такі запитання:
1) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря нижче 12.0 °С, вище 20.0°С?
2) Нижче (вище) якого значення слід очікувати температуру повітря з ймовірністю 75% і 90%?
3) З якою ймовірністю слід очікувати температуру повітря у цьому місяці в інтервалі від 8.6°С до 26.0°С?

4.1.4. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу І типу розподілів Пірсона

В задачах цього підрозділу на заданому рівні значущості α провести перевірку статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу даному теоретичному закону за допомогою критерію Пірсона χ^2. Враховуючи результат цієї апроксимації відобразити підібраний теоретичний закон його основним рівнянням та графічно. Побудувати функцію розподілу, розрахувавши спочатку інтервальні ймовірності p_i та відповісти на ряд запитань викладача.

1. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількості опадів у грудні (ст. Одеса) І типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6	17	28	39	50	61	17	83	94	105
m_i	16	16	15	13	12	8	6	0	3	1
$\tilde{m}_i$	14.8	17.1	15.9	13.4	10.5	7.7	5.2	3.2	1.7	0.7

2. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у березні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-2.2	-1.4	-0.6	0.2	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0
m_i	3	1	9	5	11	12	19	7	12	6
$\tilde{m}_i$	1.6	3.5	5.8	8.3	10.6	12.4	13.3	12.9	10.7	6.0

3. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у квітні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	4.7	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7	9.5	10.3	11.1	11.9
m_i	2	2	5	14	13	20	16	7	5	1
$\tilde{m}_i$	0.9	2.8	6.4	11.3	15.9	17.6	15.1	9.6	4.1	0.9

4. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у травні (ст. Одеса – обсерваторія) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1	18.8
m_i	6	7	15	13	12	13	6	9	3	1
$\tilde{m}_i$	5.6	10.2	12.4	13.1	12.6	11.3	9.3	6.7	3.8	1.0

5. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у вересні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	14.3	15.0	15.7	16.4	17.1	17.8	18.5	19.2	19.9	20.6
m_i	3	8	14	16	12	12	8	6	5	1
$\tilde{m}_i$	2.2	10.4	13.2	13.9	13.1	11.5	9.2	6.5	3.8	1.4

6. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	25	28	24	32	23	16	11	10	1
$\tilde{m}_i$	9.7	17.1	22.6	26.1	27.8	27.8	26.0	22.9	18.5	13.2	7.4	1.8

7. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у листопаді (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-0.1	1.2	2.5	3.8	5.1	6.4	7.7	9.0	10.3	11.6
m_i	3	5	7	12	14	22	15	6	0	1
$\tilde{m}_i$	1.8	4.3	8.3	12.8	16.5	17.4	14.1	7.6	1.6	0.0

8. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у грудні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-4.7	-3.4	-2.1	-0.8	0.5	1.8	3.1	4.4	5.7	7.0
m_i	4	4	9	12	19	16	16	4	0	1
$\tilde{m}_i$	2.0	4.9	9.3	14.1	17.3	16.8	12.4	6.1	1.5	0.0

9. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 11 травня на ст. Одеса I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.9	10.3	11.7	13.1	14.5	15.9	17.3	18.7	20.1	21.5
m_i	6	3	18	16	21	9	10	11	3	2
$\tilde{m}_i$	3.8	9.5	13.9	16.2	16.3	14.5	11.4	7.7	4.2	1.6

10. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 40 км I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-30.2	-24.2	-18.2	-12.2	-6.2	-0.2	5.8	11.8	17.8	23.8	29.8
m_i	12	20	18	17	16	24	19	25	14	13	12
$\tilde{m}_i$	13.5	17.0	18.8	19.7	20.2	20.3	20.0	19.4	18.2	16.2	11.9

11. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 7 листопада на ст. Одеса I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-0.4	1.3	3.0	4.7	6.4	8.1	9.8	11.5	13.2	14.9
m_i	5	2	4	13	12	12	12	13	4	3
$\tilde{m}_i$	2.1	4.2	6.9	9.6	11.8	12.9	12.6	10.5	6.7	2.3

12. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 0.1 км I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	25	28	24	38	23	16	11	10	1
$\tilde{m}_i$	9.1	16.5	22.5	26.7	29.0	29.2	27.5	24.1	19.3	13.4	7.2	1.7

13. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 0.1 км I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
m_i	10	9	20	19	26	22	32	23	16	11	2
$\tilde{m}_i$	6.7	12.3	17.5	21.7	24.7	26.1	25.7	23.3	18.7	11.4	0.5

14. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 3 жовтня на ст. Одеса I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6.6	8.1	9.6	11.1	12.6	14.1	15.6	17.1	18.6	20.1
m_i	1	5	12	12	11	11	18	20	6	5
$\tilde{m}_i$	1.1	6.5	9.6	11.8	13.3	14.4	14.8	14.6	13.0	7.2

15. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 45 км I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-35.6	-30.9	-26.2	-21.5	-16.8	-12.1	-7.4	-2.7	2.0	6.7	11.4
m_i	7	12	21	18	22	23	18	14	20	17	10
$\tilde{m}_i$	8.4	16.1	18.5	19.8	20.3	20.4	20.0	19.2	17.9	15.6	11.5

16. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 10 км I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	2.4	7.3	12.2	17.1	22.0	26.9	31.8	36.7	41.6
m_i	8	8	11	12	14	10	8	3	4
$\tilde{m}_i$	6.0	9.7	11.7	12.3	11.8	10.2	7.9	5.2	2.5

17. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількості опадів у серпні (ст. Сарата) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	9	21	33	45	57	69	81	93	105	117
m_i	13	15	16	14	14	8	3	2	3	1
$\tilde{m}_i$	12.2	16.8	16.5	14.1	11.0	7.9	5.2	3.1	1.6	0.7

18. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у січні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-8.6	-7.1	-5.6	-4.1	-2.6	-1.1	0.4	1.9	3.4
m_i	4	3	4	9	15	12	14	8	3
$\tilde{m}_i$	1.8	3.8	6.4	9.2	11.8	13.3	12.9	9.6	2.9

19. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря у січні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-19.7	-17.0	-14.3	-11.3	-8.9	-6.2	-3.5	-0.8	1.9	4.6
m_i	1	0	4	5	6	7	21	29	18	12
$\tilde{m}_i$	0.5	1.1	2.4	4.4	7.6	11.9	17.1	22.3	24.7	14.2

20. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у березні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-2.1	-1.2	-0.3	0.6	1.5	2.4	3.3	4.2	5.1
m_i	3	0	8	6	14	10	11	13	7
$\tilde{m}_i$	1.4	3.4	5.7	8.1	10.3	11.9	12.5	11.5	7.7

21. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-7.6	-2.9	1.8	6.5	11.2	15.9	20.6	25.3	30.0	34.7	39.4
m_i	6	14	20	15	23	20	14	23	18	16	8
$\tilde{m}_i$	9.1	15.5	17.6	18.9	19.5	19.8	19.8	19.3	18.4	16.6	11.7

22. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у травні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1
m_i	4	8	11	15	11	13	5	8	4
$\tilde{m}_i$	4.4	9.3	11.6	12.4	12.1	10.9	9.0	6.5	3.5

23. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 8 грудня на ст. Одеса I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-9.2	-7.1	-5.0	-2.9	-0.8	1.3	3.4	5.5	7.6	9.7
m_i	3	4	7	5	10	15	12	8	12	4
$\tilde{m}_i$	2.2	4.2	6.3	8.3	9.9	11.2	11.8	11.6	10.0	5.6

24. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря у вересні (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	14.3	15.1	15.9	16.7	17.5	18.3	19.1	19.9	20.7
m_i	3	8	17	17	13	9	7	4	1
$\tilde{m}_i$	2.4	10.9	14.9	15.5	13.7	10.4	6.8	3.5	1.1

25. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 3 березня на ст. Одеса I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-11.8	-9.3	-6.8	-4.3	-1.8	0.7	3.2	5.7	8.2	10.7
m_i	1	3	4	10	13	22	31	10	5	2
$\tilde{m}_i$	0.7	2.0	4.8	9.7	16.4	22.1	22.5	15.5	6.1	0.9

26. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0	30.0	33.0	36.0
m_i	20	27	54	46	27	16	12	8	6	5	2	2
$\tilde{m}_i$	14.6	46.7	44.0	36.3	27.9	20.4	14.2	9.4	6.0	3.6	2.0	1.0

27. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m_i	12	12	25	23	27	24	32	23	16	11	11	2
$\tilde{m}_i$	8.9	16.1	21.6	25.3	27.1	27.2	25.7	22.8	18.7	13.6	8.1	2.8

28. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 1 травня (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.2	9.3	10.4	11.5	12.6	13.7	14.8	15.9	17.0	18.1
m_i	5	10	10	13	16	7	13	9	7	2
$\tilde{m}_i$	6.2	10.0	11.6	12.3	12.4	11.9	11.0	9.4	7.0	2.8

29. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
m_i	8	20	36	29	21	15	10	5	2	2	2
$\tilde{m}_i$	6.7	26.2	31.2	28.0	21.7	15.2	9.8	5.8	3.2	1.6	0.8

30. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 30 травня (ст. Одеса) I типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.6	13.8	15.0	16.2	17.4	18.6	19.8	21.0	22.2	23.4
m_i	8	6	12	14	15	19	8	9	4	2
$\tilde{m}_i$	4.7	8.7	12.3	14.5	15.2	14.2	11.8	8.4	4.7	1.5

4.1.5. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу II типу розподілів Пірсона

Здійснити перевірку статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу даному теоретичному закону, використовуючи критерій Пірсона χ^2. Враховуючи результат цієї перевірки (прийняття гіпотези H_0 чи H_1), відобразити підібраний теоретичний розподіл його основним рівнянням та графічно. Побудувати функцію розподілу, розрахувавши інтервальні ймовірності p_i, та відповісти на ряд запитань викладача.

1. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3	25.8	27.3
m_i	4	8	11	14	16	15	12	8	5	2
$\tilde{m}_i$	3.8	7.8	11.4	13.9	15.0	14.5	12.4	9.2	5.3	1.5

2. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	5.0	7.0	9.0	11.0	13.0	15.0	17.0	19.0	21.0
m_i	3	8	10	9	17	13	11	3	1
$\tilde{m}_i$	3.1	7.5	10.8	12.8	13.2	12.1	9.5	5.6	1.0

3. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3	27.8	29.3	30.8
m_i	1	3	12	15	15	14	9	4	2
$\tilde{m}_i$	1.5	5.1	9.8	13.6	15.0	13.6	9.8	5.1	1.5

4. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	22.9	23.4	23.9	24.4	24.9	25.4	25.9	26.4	26.9
m_i	3	5	5	7	9	8	7	5	3
$\tilde{m}_i$	2.8	5.1	6.6	7.4	7.7	7.5	6.8	5.5	3.3

5. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5
m_i	2	5	9	14	16	15	13	10	4	2
$\tilde{m}_i$	1.7	5.4	9.7	13.4	15.4	15.3	13.2	9.4	5.1	1.5

6. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.6	11.1	11.6	12.1	12.6	13.1	13.6	14.1	14.6	15.1
m_i	4	8	9	12	15	14	13	10	6	3
$\tilde{m}_i$	3.6	7.5	10.6	12.8	13.8	13.7	12.5	10.2	6.9	2.9

7. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	14.7	15.7	16.7	17.7	18.7	19.7	20.7	21.7	22.7	23.7
m_i	1	3	5	8	10	11	9	6	4	2
$\tilde{m}_i$	0.8	3.0	5.7	8.2	9.7	10.0	9.0	6.8	4.1	1.6

8. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3	27.8	29.3	30.8
m_i	3	5	8	10	11	12	9	6	4
$\tilde{m}_i$	2.5	5.9	8.5	10.2	10.9	10.5	9.2	6.8	3.6

9. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.6	13.1	13.6	14.1	14.6	15.1	15.6	16.1	16.6
m_i	2	3	5	8	10	11	9	6	6
$\tilde{m}_i$	1.4	4.0	6.4	8.2	9.2	9.3	8.5	6.8	4.5

10. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-30.2	-24.2	-18.2	-12.2	-6.2	-0.2	5.8	11.8	17.8	23.8	29.8
m_i	12	20	18	17	16	24	19	25	14	13	12
$\tilde{m}_i$	13.4	16.9	18.6	19.6	20.2	20.3	20.1	19.5	18.3	16.3	11.9

11. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.8	14.3	15.8	17.3	18.8	20.3	21.8	23.3	24.8	26.3
m_i	4	8	12	16	15	11	9	5	3	2
$\tilde{m}_i$	5.2	7.9	10.3	11.8	12.2	11.4	9.6	7.0	4.3	1.8

12. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	19.8	20.3	20.8	21.3	21.8	22.3	22.8	23.3	23.8	24.3
m_i	2	6	10	13	16	15	12	9	5	1
$\tilde{m}_i$	2.0	6.2	10.3	13.4	14.9	14.7	12.7	9.2	4.9	1.1

13. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	17.8	19.3	20.8	22.3	23.8	25.3	26.8	28.3	29.8
m_i	2	5	7	10	12	11	9	6	5
$\tilde{m}_i$	1.8	5.2	8.1	10.0	10.9	10.6	9.3	7.0	3.9

14. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	14.9	15.9	16.9	17.9	18.9	19.9	20.9	21.9	22.9
m_i	2	3	5	8	10	11	9	6	6
$\tilde{m}_i$	1.4	4.0	6.4	8.2	9.2	9.3	8.5	6.8	4.5

15. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	10.1	11.6	13.1	14.6	16.1	17.6	19.1	20.6	22.1
m_i	2	4	6	8	10	9	7	5	4
$\tilde{m}_i$	1.7	4.5	6.7	8.2	8.8	8.6	7.5	5.7	3.2

16. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	11.7	12.2	12.7	13.2	13.7	14.2	14.7	15.2	15.7	16.2
m_i	2	5	9	10	12	13	11	9	6	3
$\tilde{m}_i$	2.0	5.6	8.6	10.7	11.9	12.0	11.1	9.2	6.4	2.9

17. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	15.4	15.9	16.4	16.9	17.4	17.9	18.4	18.9	19.4	19.9
m_i	1	6	12	16	19	18	14	11	4	1
$\tilde{m}_i$	1.4	6.2	11.7	16.0	18.2	17.9	15.1	10.3	4.9	0.6

18. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	25	28	24	32	23	16	11	10	1
$\tilde{m}_i$	10.0	16.3	21.3	25.0	27.1	27.6	26.5	23.7	19.5	13.9	7.3	0.6

19. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-7.6	-2.9	1.8	6.5	11.2	15.9	20.6	25.3	30.0	34.7	39.4
m_i	6	14	20	15	23	20	14	23	18	16	8
$\tilde{m}_i$	8.5	15.7	17.9	19.0	19.6	19.8	19.7	19.2	18.2	16.3	11.7

20. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 0.1 км II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0	13.0
m_i	13	13	25	20	25	24	32	23	16	9	6	4
$\tilde{m}_i$	9.1	14.8	19.8	23.7	25.9	26.5	25.2	22.3	18.0	12.6	6.9	1.9

21. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру на висоті 45 км II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-35.6	-30.9	-26.2	-21.5	-16.8	-12.1	-7.4	-2.7	2.0	6.7	11.4
m_i	7	12	21	18	22	23	18	14	20	17	10
$\tilde{m}_i$	9.6	15.5	18.0	19.3	20.1	20.4	20.2	19.6	18.3	16.2	11.7

22. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	2.4	7.3	12.2	17.1	22.0	26.9	31.8	36.7	41.6
m_i	8	8	11	12	14	10	8	3	4
$\tilde{m}_i$	5.8	8.6	10.6	11.6	11.6	10.6	8.6	5.8	2.5

23. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень) II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-8.6	-7.1	-5.6	-4.1	-2.6	-1.1	0.4	1.9	3.4
m_i	4	3	7	11	16	12	15	9	2
$\tilde{m}_i$	3.2	6.2	8.9	10.8	11.8	11.6	10.3	8.1	5.3

24. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу зональної складової швидкості вітру II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	-7.6	-2.9	1.8	6.5	11.2	15.9	20.6	25.3	30.0	34.7	39.4
m_i	6	14	20	15	23	20	14	23	18	16	8
$\tilde{m}_i$	8.5	15.7	17.9	19.0	19.6	19.8	19.7	19.2	18.2	16.3	11.7

25. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, травень) II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5
m_i	4	8	11	15	11	13	5	8	3
$\tilde{m}_i$	4.9	8.2	10.5	11.7	12.0	11.3	9.6	6.8	3.0

26. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, травень) II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	12.5	13.2	13.9	14.6	15.3	16.0	16.7	17.4	18.1
m_i	4	7	11	15	9	10	4	8	4
$\tilde{m}_i$	5.6	7.8	9.1	9.9	10.0	9.6	8.6	6.9	4.1

27. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	12.6	13.8	15.0	16.2	17.4	18.6	19.8	21.0	22.2	23.4
m_i	8	6	12	14	15	19	8	9	4	2
$\tilde{m}_i$	4.7	8.6	12.0	14.4	15.2	14.4	12.0	8.6	4.7	1.4

28. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	3.8	5.3	6.8	8.3	9.8	11.3	12.8	14.3	15.8
m_i	3	5	5	8	9	17	10	11	6
$\tilde{m}_i$	3.4	5.9	7.7	8.9	9.5	9.6	9.1	8.1	6.5

29. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	20.9	21.4	21.9	22.4	22.9	23.4	23.9	24.4	24.9	25.4
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2
$\tilde{m}_i$	2.1	5.9	10.9	15.6	18.2	17.6	14.2	9.3	4.5	1.3

30. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря II типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	10.8	12.3	13.8	15.3	16.8	18.3	19.8	21.3	22.8	24.3
m_i	1	6	11	16	20	19	14	7	4	2
$\tilde{m}_i$	2.1	5.9	10.9	15.6	18.2	17.6	14.2	9.3	4.5	1.3

4.1.6. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу III типу розподілів Пірсона

В задачах цього підрозділу на заданому рівні значущості α здійснити перевірку статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу даному теоретичному закону за допомогою критерію Пірсона χ^2. Враховуючи результат цієї перевірки (прийняття гіпотези H_0 чи H_1) відобразити підібраний теоретичний закон його основним рівнянням та графічно. Побудувати функцію розподілу, розрахувавши інтервальні ймовірності p_i, та відповісти на ряд запитань викладача.

1. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Любешів, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	20	28	24	14	6	3	2	1	1	2
$\tilde{m}_i$	26.4	28.4	20.2	12.8	7.7	4.5	2.6	1.4	0.8	0.4

2. На рівні значущості α=0.010 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 1 лютого на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-17.0	-14.6	-12.2	-9.8	-7.4	-5.0	-2.6	-0.2	2.2	4.6
m_i	2	3	5	4	5	12	12	24	22	10
$\tilde{m}_i$	0.9	1.7	3.0	5.1	8.2	12.3	16.6	19.4	18.0	10.7

3. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 26 квітня на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6.0	7.3	8.6	9.9	11.2	12.5	13.8	15.1	16.4	17.7
m_i	3	9	25	21	10	15	6	6	3	1
$\tilde{m}_i$	3.6	10.8	18.0	20.5	17.8	12.6	7.7	4.2	2.0	0.9

4. На рівні значущості α=0.001 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 9 лютого на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-15.9	-13.4	-10.9	-8.4	-5.9	-3.4	-0.9	1.6	4.1	6.6
m_i	3	2	5	4	10	14	19	24	13	5
$\tilde{m}_i$	1.0	2.0	3.8	6.6	10.6	15.4	19.3	19.5	14.1	5.4

5. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 19 січня на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-15.1	-12.8	-10.5	-8.2	-5.9	-3.6	-1.3	1.0	3.3	5.6
m_i	2	0	5	10	11	14	15	21	14	7
$\tilde{m}_i$	0.8	1.9	3.9	7.1	11.7	16.4	19.2	17.8	12.3	5.7

6. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 4 березня на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-11.5	-9.2	-6.9	-4.6	-2.3	0.0	2.3	4.6	6.9	9.2
m_i	2	2	3	6	16	24	33	11	0	2
$\tilde{m}_i$	0.7	1.7	4.0	8.6	15.7	23.6	25.7	16.0	2.7	0.0

7. На рівні значущості α=0.010 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру на висоті 1.0 км III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{x}_i$	2.4	4.4	6.4	8.4	10.4	12.4	14.4	16.4	18.4	20.4	22.4	24.4
m_i	14	20	33	39	29	32	18	18	7	5	5	1
$\tilde{m}_i$	9.6	20.3	30.9	36.7	35.9	29.9	21.9	14.4	8.6	4.8	2.5	1.2

8. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 3 березня на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-11.8	-9.3	-6.8	-4.3	-1.8	0.7	3.2	5.7	8.2	10.7
m_i	1	3	4	10	13	22	31	10	3	2
$\tilde{m}_i$	0.7	1.9	4.7	9.7	16.7	22.6	22.4	14.5	5.0	0.7

9. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Рівне, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	14	20	21	16	11	6	5	3	3	1
$\tilde{m}_i$	11.2	18.6	20.1	17.0	12.3	8.0	4.7	2.7	1.4	0.7

10. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількості опадів у грудні (ст. Одеса) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	6	17	28	39	50	61	72	83	94	105
m_i	16	16	15	13	12	8	6	0	3	1
$\tilde{m}_i$	9.7	15.5	17.4	15.4	11.5	7.6	4.5	2.5	1.3	0.6

11. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 12 січня на ст. Одеса III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-19.2	-16.5	-13.8	-11.1	-8.4	-5.7	-3.0	-0.3	2.4	5.1
m_i	1	0	4	2	6	7	21	29	18	12
$\tilde{m}_i$	0.4	0.8	1.7	3.4	6.4	11.3	17.8	23.8	23.4	11.0

12. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Броди, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	29	32	18	10	4	2	1	1	2	1
$\tilde{m}_i$	40.6	27.6	16.8	9.9	5.8	3.3	1.9	1.1	0.6	0.4

13. На рівні значущості α=0.001 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу температури повітря III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	20.2	20.9	21.6	22.3	23.0	23.7	24.4	25.1	25.8	26.5
m_i	13	8	17	17	17	5	6	0	1	1
$\tilde{m}_i$	6.7	13.5	17.7	16.9	12.8	7.9	4.2	2.0	0.8	0.3

14. На рівні значущості α=0.010 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Одеса, серпень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8	23	38	53	68	83	98	113	128	143
m_i	31	28	15	9	2	5	2	0	2	2
$\tilde{m}_i$	30.2	23.2	15.5	9.8	6.1	3.7	2.3	1.4	0.8	0.5

15. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст.ст. Одеса – Миколаїв, жовтень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189
m_i	65	46	29	19	10	2	2	0	0	0	1
$\tilde{m}_i$	74.4	52.0	29.1	15.3	7.8	3.9	2.0	1.0	0.5	0.2	0.1

16. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньодобової температури повітря за 25 січня (ст. Одеса) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	-17.1	-14.5	-11.9	-9.3	-6.7	-4.1	-1.5	1.1	3.7	6.3
m_i	2	4	4	7	10	17	12	26	12	6
$\tilde{m}_i$	1.1	2.3	4.3	7.4	11.6	16.1	18.9	18.0	12.7	5.7

17. На рівні значущості α=0.010 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\tilde{x}_i$	-8.6	-7.1	-5.6	-4.1	-2.6	-1.1	0.4	1.9	3.4
m_i	4	3	4	9	15	12	14	8	3
$\tilde{m}_i$	1.5	3.1	5.9	9.6	13.2	14.6	12.3	7.4	2.8

18. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількість опадів (ст. Одеса, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	8	22	36	50	64	78	92	106	120	134
m_i	26	22	16	13	9	1	0	1	0	1
$\tilde{m}_i$	23.9	25.6	17.7	10.5	5.8	3.0	1.5	0.8	0.4	0.2

19. На рівні значущості α=0.001 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу місячної кількості опадів (ст. Миколаїв, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
m_i	16	21	15	11	7	4	3	2	1	1
$\tilde{m}_i$	13.7	18.2	16.3	11.9	7.8	4.8	2.7	1.5	0.8	0.4

20. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Львів, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	23	21	22	16	7	3	3	1	3	1
$\tilde{m}_i$	19.6	23.9	19.8	13.8	8.9	5.3	3.1	1.7	1.0	0.5

21. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Чернівці, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	31	25	21	10	5	3	2	1	2	2
$\tilde{m}_i$	29.6	25.2	17.4	11.2	7.0	4.3	2.6	1.5	0.9	0.5

22. На рівні значущості α=0.010 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Артемівськ, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	25	25	20	12	6	5	2	1	1	3
$\tilde{m}_i$	23.7	24.1	18.3	12.4	8.0	4.9	3.0	1.8	1.0	0.6

23. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\tilde{x}_i$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
m_i	8	20	36	29	21	15	10	5	2	2	2
$\tilde{m}_i$	8.0	22.5	30.8	29.5	23.0	15.5	9.5	5.4	2.9	1.5	0.7

24. На рівні значущості α=0.001 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Харків, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	14	20	22	18	12	6	5	2	2	1
$\tilde{m}_i$	11.4	20.1	21.8	17.9	12.5	7.7	4.3	2.3	1.2	0.6

25. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Харків, липень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	27	22	17	14	9	6	1	1	1	2
$\tilde{m}_i$	20.7	23.8	19.2	13.3	8.4	5.0	2.9	1.6	0.9	0.5

26. На рівні значущості α=0.025 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Дніпропетровськ, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	18	26	17	13	12	5	5	1	1	2
$\tilde{m}_i$	15.3	21.7	20.2	15.4	10.3	6.4	3.7	2.1	1.1	0.6

27. На рівні значущості α=0.010 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Дніпропетровськ, лютий) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	18	25	23	14	12	4	2	0	1	1
$\tilde{m}_i$	17.0	26.4	22.6	15.2	9.0	4.9	2.5	1.2	0.6	0.3

28. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Одеса, січень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	8	30	28	17	8	5	2	1	0	1
$\tilde{m}_i$	9.0	30.5	26.0	16.5	9.2	4.7	2.3	1.1	0.5	0.2

29. На рівні значущості α=0.001 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Одеса, березень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	9	30	28	15	7	5	1	1	1	3
$\tilde{m}_i$	8.1	30.6	22.5	14.5	8.8	5.2	3.0	1.7	1.0	0.6

30. На рівні значущості α=0.005 перевірити статистичну гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу швидкості вітру (ст. Вилкове, жовтень) III типу розподілів Пірсона, якщо відомо:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{x}_i$	0.5	2.5	4.5	6.5	8.5	10.5	12.5	14.5	16.5	18.5
m_i	39	21	16	9	6	2	4	1	1	1
$\tilde{m}_i$	27.5	23.8	16.6	10.6	6.4	3.8	2.2	1.2	0.7	0.4

4.1.7. Задачі*

В задачах цього підрозділу, враховуючи алгоритм дослідження закону розподілу випадкової величини, апроксимувати ряд швидкості вітру по одній із станцій України відомим теоретичним розподілом. Перевірку гіпотези про відповідність емпіричних і теоретичних частот провести на рівні значущості α=0.005 за допомогою критерію Пірсона χ^2.

Вихідні дані містяться в табл. Г. 6, Г. 7 (додаток Г).

Задача	Місяць	Станція	Задача	Місяць	Станція
1	Лютий	Одеса	**11**	Січень	Ізмаїл
2	Квітень	Одеса	**12**	Лютий	Ізмаїл
3	Травень	Одеса	**13**	Березень	Ізмаїл
4	Червень	Одеса	**14**	Квітень	Ізмаїл
5	Липень	Одеса	**15**	Травень	Ізмаїл
6	Серпень	Одеса	**16**	Червень	Ізмаїл
7	Вересень	Одеса	**17**	Липень	Ізмаїл
8	Жовтень	Одеса	**18**	Серпень	Ізмаїл
9	Листопад	Одеса	**19**	Вересень	Ізмаїл
10	Грудень	Одеса	**20**	Жовтень	Ізмаїл

4.2. Задача перевірки гіпотези про однорідність членів статистичної сукупності

Основні теоретичні положення

Відомо, що ряди спостережень, на основі яких розраховуються статистичні оцінки моментів розподілу, повинні володіти деякими властивостями (див. 1-й розділ).

Однією з вимог, яким повинна відповідати статистична сукупність, є *вимога однорідності її членів. Це означає, що всі члени вибірки з заданою ймовірністю повинні належати до однієї генеральної сукупності.* Однак, завдяки великій мінливості гідрометеорологічних процесів, фізичні параметри, що відбивають їх стан, можуть інколи змінюватися у дуже великих межах на фоні порівняно невеликих природних коливань. Ці різкі зміни фізичних параметрів обумовлюються аномальними гідрометеорологічними процесами. Значення фізичних параметрів, що відрізняються від їх середнього рівня (норми) отримали назву ”*викидів*”. ”*Викиди*” спричиняють похибки при статистичному оцінюванні моментів розподілу випадкових величин, особливо центральних моментів. Щоб цього уникнути, треба ”*викиди*” вилучити з вибірки, але тільки після перевірки статистичної гіпотези. Гіпотеза H_0 перевіряється на заданому рівні значущості α і формулюється таким чином: максимальні і

мінімальні значення членів вибірки ($x_{екстр}$) належать до тієї ж генеральної сукупності, що і всі інші її члени.

Зрозуміло, якщо екстремальні значення статистичного ряду є однорідними, то й інші члени цієї вибірки також будуть підпорядковуватися одному закону розподілу.

Для перевірки даної гіпотези використовують *критерій Стьюдента* t у вигляді:

$$t = \frac{\left| x_{екстр} - \bar{x} \right|}{S_x}, \tag{4.18}$$

який формується на основі відомих теорем (див. 4-й розділ).

Отримане за формулою (4.18) значення цього критерію (t) порівнюється з його критичним значенням – $t_{кр}(\alpha, \nu)$. Останнє отримують по таблицях (додаток П) для визначеного дослідником рівня значущості (наприклад, α=0.05) і числа степенів вільності $\nu = n - 1$, де n – об'єм вибірки.

Якщо

$$t < t_{кр}(\alpha, \nu), \tag{4.19}$$

то гіпотеза H_0 не відкидається. Це означає, що екстремальний член сукупності, відносно котрого є підозра, у дійсності "викидом" не виявляється, тобто його треба у вибірці залишити. Навпаки, якщо

$$t > t_{кр}(\alpha, \nu), \tag{4.20}$$

то гіпотеза H_0 відхиляється й приймається альтернативна гіпотеза H_1, про те, що $x_{екстр}$ на рівні значущості α не належить до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени вибірки, тобто є "викидом". У такому разі його слід вилучити з ряду значень перед розрахунками статистичних оцінок моментів розподілу випадкової величини.

Перевірку гіпотези H_0 *треба повторювати до тих пір, поки на заданому рівні значущості члени статистичного ряду, що складають вибірку, будуть однорідними.*

Розв'язання типової задачі. ***Перевірка гіпотези про однорідність членів статистичної сукупності.***

За даними метеорологічних вимірювань температури повітря у квітні на метеорологічній станції Одеса в період 1931-1980 рр. було сформовано ряд середніх місячних температур цього місяця. Аналіз значень отриманого ряду дає можливість визначити максимальну середню місячну температуру квітня і мінімальне її значення: $x_{\max}$ = 11.2°C, $x_{\min}$ = 5.0°C. Ці екстремальні значення даної вибірки різко відрізняються від інших членів ряду і кліматичної норми – + 9°C. Тому треба перевірити гіпотезу H_0 про те, належать чи не належать $x_{\max}$ = 11.2°C та $x_{\min}$ = 5.0°C до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени ряду, тобто чи є вони однорідними?

Враховуючи формулу (4.18), насамперед, треба знайти середнє значення і середній квадратичний відхил даної величини. В нашому прикладі вони дорівнюють відповідно: $\overline{x}$ = 8.6°C; S_x = 1.5°C . Почнемо перевіряти гіпотезу H_0 на рівні значущості α=0.05 щодо $x_{\max}$. Розрахуємо критерій t:

$$t = \frac{x_{\max} - \overline{x}}{S_x} = \frac{11.2 - 8.6}{1.5} = 1.72.$$

Отримане значення критерію Стьюдента t необхідно порівняти з $t_{кр}(\alpha, \nu)$.

З таблиці додатку П отримаємо для α=0.05 і $\nu = n - 1$=50–1=49, $t_{кр}(0.05; 49) = 2.01$.

Отже $t < t_{кр}(\alpha, \nu)$ і гіпотеза про однорідність максимального значення ряду не відхиляється, тобто $x_{\max}$=11.2°C належить до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени ряду середньої місячної температури повітря у квітні.

Тепер треба перевірити гіпотезу H_0 про однорідність мінімального значення ряду $x_{\min}$=5.0°C. Розрахуємо на основі вибірки критерій Стьюдента t:

$$t = \frac{\overline{x} - x_{\min}}{S_x} = \frac{8.6 - 5.0}{1.5} = 2.40.$$

Отримане значення критерію Стьюдента t=2.40 порівнюємо з $t_{кр}(\alpha, \nu)$=2.01.

Отже $t > t_{кр}$ і гіпотеза H_0 відкидається. Приймається альтернативна гіпотеза H_1 : член ряду середньої місячної температури повітря у квітні $x_{\min}$ =5.0°C на рівні значущості α =0.05 не належить до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени вибірки. Таким чином, його треба вилучити з вибірки і перерахувати необхідні статистичні оцінки моментів розподілу ($\bar{x}$ і S_x). Розрахунки дали такі величини: $\bar{x}$ = 8.7°C та S_x=1.5°C.

Із значень вибірки, яких залишилося 49, визначаємо новий мінімум і це температура повітря 5.4°C. Знову треба перевірити гіпотезу H_0 про однорідність відносно нового мінімального значення вибірки. Для нього фактичне значення критерію Стьюдента дорівнює:

$$t = \frac{8.7 - 5.4}{1.5} = 2.20.$$

Знову $t > t_{кр}(\alpha, \nu)$, оскільки для α =0.05 і ν =49-1=48 $t_{кр}(0.05;48) = 2.01$. Отже, член вибірки $x_{\min}$ =5.4°C є теж ”викидом” і його треба вилучити зі статистичного ряду, перераховуючи ще раз $\bar{x}$ і S_x. Вони змінилися і дорівнюють тепер: $\bar{x}$ =8.8°C; S_x=1.4°C.

Наступним мінімальним значенням температури є величина x =6.1°C, тобто серед тих, що залишилися (а саме 48 значень) він є тепер мінімальним. Для нього фактичне значення критерію Стьюдента дорівнює:

$$t = \frac{8.8 - 6.1}{1.4} = 1.93.$$

Порівняємо отримане на основі вибірки значення критерію Стьюдента (t) з критичним ($t_{кр}$), яке визначили по таблицях додатку П.

За умов рівня значущості α =0.05 та числа степенів вільності ν = 48–1=47, $t_{кр}(0.05;47) = 2.00$. Тепер $t < t_{кр}(\alpha, \nu)$ і гіпотеза H_0 не відхиляється. А це означає, що член вибірки $x_{\min}$ =6.1°C з ймовірністю 95% належить до тієї ж генеральної сукупності, що й інші члени вибірки.

Всі розрахунки і міркування доцільно об’єднати в таблицю, приклад якої наводиться нижче.

Таким чином, на рівні значущості α =0.05 вибірка середньої місячної температури повітря у квітні (ст. Одеса) за період з 1931 по 1980 рр. утримує два ”викиди”, які треба перед розрахунками статистичних оцінок моментів розподілу з неї вилучити. Це значення температури 5.0°C та 5.4°C, але всі останні, що залишилися, а їх 48, є однорідними, тобто такими, що підпорядковуються одному й тому ж закону розподілу.

Таблиця 4.7 – Перевірка гіпотези про однорідність членів ряду середньої місячної температури повітря (ст. Одеса, квітень)

n	50	49	48
$\overline{x}$	8.6	8.7	8.8
S_x	1.5	1.5	1.4
$x_{\max}$	11.2		
$t = \dfrac{x_{\max} - \overline{x}}{S_x}$	1.72		
$t_{кр}(\alpha, \nu)$	2.01		
Висновок	H_0		
$x_{\min}$	5.0	5.4	6.1
$t = \dfrac{\overline{x} - x_{\min}}{S_x}$	2.40	2.20	1.93
$t_{кр}(\alpha, \nu)$	2.01	2.01	2.0
Висновок	H_1	H_1	H_0

Запитання для самоперевірки

1. Які критичні області використовуються при статистичних дослідженнях?
2. Якими принципами треба керуватися при побудові тієї чи іншої критичної області?
3. Який сенс рівня значущості?
4. Як називається ймовірність помилки І-го роду?
5. Що розуміють під терміном «довірча ймовірність»?
6. За якими правилами та теоремами формується фактичний критерій (q) до перевірки тієї чи іншої статистичної гіпотези?
7. На якому принципі втілюється перевірка статистичної гіпотези?
8. Яким вимогам повинні відповідати вибірки, по яких розраховуються статистичні оцінки параметрів розподілу?
9. Які члени статистичного ряду називаються однорідними?
10. Що називається статистичною гіпотезою та як формулюється основна гіпотеза по перевірці членів статистичного ряду на однорідність?
11. Від чого залежить формування фактичного критерію Стьюдента для перевірки членів статистичного ряду на однорідність?

12. Які статистичні оцінки моментів розподілу випадкової величини необхідно розрахувати, щоб отримати фактичний критерій Стьюдента для знаходження «викидів» у статистичній сукупності?
13. Від яких величин залежить критичне значення критерію Стьюдента для перевірки членів статистичного ряду на однорідність?
14. Дати визначення рівня значущості для правосторонньої критичної області?
15. Які випадкові величини в статистичній сукупності називаються «викидами»?
16. Якщо вибірка має «викиди», як необхідно діяти, щоб розрахувати статистичні оцінки параметрів розподілу випадкової величини?

Задачі до розділу 4.2

На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про однорідність членів ряду середньої місячної температури повітря.

Вихідні дані містяться в додатку А.

Задача	Місяць	№ таб.	Станція	Задача	Місяць	№ таб.	Станція
1	Січень	1	Одеса	**19**	Липень	1	Одеса
2	Січень	2	Полтава	**20**	Липень	2	Полтава
3	Січень	5	Херсон	**21**	Липень	5	Херсон
4	Лютий	1	Одеса	**22**	серпень	1	Одеса
5	Лютий	2	Полтава	**23**	Серпень	2	Полтава
6	Лютий	5	Херсон	**24**	Серпень	5	Херсон
7	Березень	1	Одеса	**25**	Вересень	1	Одеса
8	Березень	2	Полтава	**26**	Вересень	2	Полтава
9	Березень	5	Херсон	**27**	Вересень	5	Херсон
10	Квітень	1	Одеса	**28**	Жовтень	1	Одеса
11	Квітень	2	Полтава	**29**	Жовтень	2	Полтава
12	Квітень	5	Херсон	**30**	Жовтень	5	Херсон
13	Травень	1	Одеса	**31**	Листопад	1	Одеса
14	Травень	2	Полтава	**32**	Листопад	2	Полтава
15	Травень	5	Херсон	**33**	Листопад	5	Херсон
16	Червень	1	Одеса	**34**	Грудень	1	Одеса
17	Червень	2	Полтава	**35**	Грудень	2	Полтава
18	Червень	5	Херсон	**36**	Грудень	5	Херсон

4.3. Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів

Основні теоретичні положення

Два ряди випадкових величин називають статистично однорідними, якщо вони на рівні значущості α належать до однієї генеральної сукупності (підпорядковуються одному закону розподілу).

Будемо вважати, що ряди

$$X: \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_i, \quad x_n \tag{4.21}$$

і

$$Y: \quad y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_i, \quad y_m \tag{4.22}$$

з об'ємами відповідно n та m підпорядковуються нормальному закону. Нагадаємо, що щільність ймовірності для випадкової величини X дорівнює:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right], \tag{4.23}$$

а рівняння (4.24) визначає щільність ймовірності випадкової величини Y:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2} \right]. \tag{4.24}$$

Для цих випадкових величин *закони розподілу будуть однаковими, якщо їх відповідні параметри (масштабу та форми) будуть дорівнювати один одному:* $m_x = m_y$; $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

Але дослідник має діло з окремими вибірками величин X і Y, а на їх основі можливо отримати лише статистичні оцінки параметрів розподілу, а саме $\hat{m}_x = \bar{x}$, $\hat{m}_y = \bar{y}$, $\hat{\sigma}_x^2 \Rightarrow S_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2 \Rightarrow S_y^2$.

В такому *разі ряди випадкових величин X і Y будуть однорідними*, тобто будуть на рівні значущості α належати до однієї генеральної сукупності, *якщо різниці між статистичними оцінками параметрів їх розподілів*, тобто S_x^2 і S_y^2 з одного боку та $\bar{x}$ і $\bar{y}$ *– з іншого, носитимуть випадковий характер* або, інакше кажучи, *не будуть значущими*.

Як випливає з розглянутих вище умов, основна гіпотеза H_0 є складною і дослідження однорідності випадкових рядів полягає у

перевірці двох статистичних гіпотез на заданому рівні значущості: гіпотези H_0' про незначущість різниць статистичних оцінок дисперсій та гіпотези H_0'' про незначущість розбіжностей між середніми значеннями випадкових величин X та Y.

а) Перевірка гіпотези H_0' про незначущість різниць між статистичними оцінками дисперсій.

Для перевірки гіпотези H_0' використовується критерій Фішера-Снедекора, який сформовано на основі відомих теорем (див. 4-й розділ). Він визначається формулою:

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \quad \text{за умови} \quad S_x^2 > S_y^2 \tag{4.25}$$

(у чисельник рівності (4.25) треба поставити більшу з цих статистичних оцінок дисперсій).

Оскільки закон розподілу випадкової величини F є двопараметричним з параметрами – числами степенів вільності $\nu_1 = n-1$ і $\nu_2 = m-1$, α – задає дослідник, то критичне значення критерію Фішера-Снедекора є функцією трьох величин: ν_1, ν_2 та α, тобто $F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$. Його можна отримати по додатку Р.

Якщо статистична оцінка дисперсії випадкової величини Y (S_y^2) більша за S_x^2, фактичне значення критерію F формують таким чином:

$$F = \frac{S_y^2}{S_x^2}. \tag{4.26}$$

Відповідно з цим $\nu_1 = m-1$ і $\nu_2 = n-1$. *Завжди число степенів вільності ν_1 розраховується по об'єму тієї вибірки, статистична оцінка дисперсії котрої більша.*

Критичне значення критерію Фішера – $F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ порівнюють зі значенням, отриманим за формулою (4.25) або (4.26).

Якщо

$$F < F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2), \tag{4.27}$$

то гіпотеза H_0' про незначущість розбіжностей між статистичними оцінками дисперсій S_x^2 і S_y^2 не відхиляється.

Якщо виявиться навпаки:

$$F > F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2), \tag{4.28}$$

то гіпотеза H_0' відхиляється й приймається альтернативна гіпотеза H_1' про те, що статистичні оцінки дисперсій рядів X і Y розрізняються статистично значуще. Відхилення гіпотези H_0' призводить і до відхилення основної гіпотези H_0.

Якщо гіпотеза H_0' не відхиляється, ще не означає, що ряди X і Y – однорідні. Треба перевірити другу гіпотезу – H_0''.

б) Перевірка статистичної гіпотези H_0'' про незначущість розбіжностей між середніми значеннями двох вибірок.

Гіпотеза H_0'' формулюється так: на рівні значущості α середні значення випадкових величин X і Y розрізняються статистично незначуще. Перевірка цієї гіпотези проводиться за допомогою критерію Стьюдента, який задовольняє ряду теорем (див. 4-й розділ) і визначається рівнянням:

$$t = \frac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{\frac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{n+m-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}. \tag{4.29}$$

У формулі (4.29) модуль у чисельнику застосовується для того щоб мати діло лише з додатними значеннями параметра t. Крім того, під знаком радикалу вводиться нормуючий множник $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$.

Розподіл випадкової величини t є *однопараметричним*. Це число степенів вільності ν, яке знаходять за формулою:

$$\nu = n + m - 2. \tag{4.30}$$

Як і раніше, n та m – об'єми вибірок випадкових величин X та Y. Критичні значення параметра Стьюдента – $t_{кр}(\alpha, \nu)$ для рівня значущості α і числа степенів вільності ν знаходяться у додатку П.

Якщо виконується нерівність

$$t < t_{кр}(\alpha, \nu), \tag{4.31}$$

то гіпотеза H_0'' не відхиляється.

У протилежному випадку, за умови

$$t > t_{кр}(\alpha, \nu), \tag{4.32}$$

приймається гіпотеза H_1'' про статистичну значущість розбіжностей між середніми значеннями рядів X та Y ($\bar{x}$ і $\bar{y}$).

Гіпотеза H_0 про однорідність двох рядів випадкових величин не відхиляється лише у тому випадку, коли не відхиляються гіпотези і H_0', і H_0''. Якщо будь-яка з них відхиляється, то відхиляється й основна гіпотеза H_0.

Розв'язання типової задачі. ***Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів. Застосування параметричних критеріїв.***

В задачі розглядаються два ряди середньої місячної температури повітря у липні за різні періоди вимірювань на ст. Одеса, які підпорядковуються нормальному розподілу.

Відомо, що основна гіпотеза H_0 про однорідність нормально розподілених рядів X і Y складається з двох гіпотез: H_0' – гіпотези про незначущість різниць між статистичними оцінками дисперсій цих рядів, а саме S_x^2 і S_y^2, та H_0'' – гіпотези про незначущість розбіжностей між їх середніми значеннями, тобто $\bar{x}$ і $\bar{y}$. Для перевірки гіпотези H_0 треба знайти статистичні оцінки деяких параметрів розподілу випадкових величин X та Y. Вони розраховані заздалегідь і наведені в табл. 4.8.

Таблиця 4.8 – Статистичні оцінки моментів розподілу середньої місячної температури повітря за різні періоди спостережень (ст. Одеса, липень)

n	$\bar{x}$	S_x^2	m	$\bar{y}$	S_y^2
32	22.4 °C	0.78(°C)^2	45	21.8 °C	1.32(°C)^2

Перевірку гіпотези H_0 про однорідність рядів середньої місячної температури повітря за різні періоди вимірювань на ст. Одеса у липні будемо проводити на рівні значущості $\alpha = 0.05$.

а) Перевірка гіпотези H_0'.

Для перевірки цієї гіпотези потрібно за допомогою формули (4.26) знайти на основі вибірок випадкових величин X і Y значення критерію Фішера-Снедекора.

Очевидно,

$$F = \frac{S_y^2}{S_x^2} = \frac{1.32}{0.78} = 1.69.$$

За умови α=0.05 та числа степенів вільності ν_1=45–1=44 і ν_2= 32–1=31 критичне значення критерію Фішера, як випливає з додатку Р, дорівнює: $F_{кр}$(0.05; 44; 31)=1.78. Оскільки $F < F_{кр}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$, то з ймовірністю p=1-α=1–0.05=0.95 *гіпотеза* H_0' *не відхиляється*. Це означає, що розбіжності між статистичними оцінками дисперсій є випадковими і треба перейти до другого етапу.

б) ***Перевірка гіпотези*** H_0''.

Гіпотеза H_0'' перевіряється шляхом порівняння критерію Стьюдента (t) з його критичним значенням – ($t_{кр}$). Для розрахунків фактичного критерію Стьюдента використовуємо рівняння (4.29):

$$t = \frac{|22.4 - 21.8|}{\sqrt{\frac{31 \cdot 0.78 + 44 \cdot 1.32}{32 + 45 - 2}\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{45}\right)}} = 2.61.$$

Отримане значення критерію t=2.61 треба порівняти з його критичним значенням – $t_{кр}$.

З додатку П випливає, що за умов рівня значущості α=0.05 і числа степенів вільності $\nu = n + m - 2 = 32 + 45 - 2 = 75$ критичне значення критерію Стьюдента дорівнює:

$$t_{кр}(\alpha, \nu) = t_{кр}(0.05; 75) = 1.99.$$

Отже виходить, що $t > t_{кр}(\alpha, \nu)$ і *гіпотеза* H_0'' *відхиляється.*

Цей висновок означає те, що середні значення двох вибірок середньої місячної температури повітря на ст. Одеса у липні за різні періоди спостережень розрізняються статистично значуще, тобто приймається альтернативна гіпотеза – H_1''.

Остаточний висновок полягає у тому, що *ряди середньої місячної температури повітря у липні на ст. Одеса за різні періоди спостережень з ймовірністю* $p = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95(95\%)$ *є неоднорідними*, оскільки гіпотеза H_0 про їх однорідність відхиляється.

Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під терміном «статистична гіпотеза»?
2. Які критичні області використовуються при статистичних дослідженнях?
3. Якими принципами треба керуватися при побудові тієї чи іншої критичної області?
4. Який сенс рівня значущості?
5. Як називається ймовірність помилки I-го роду?
6. Що розуміють під терміном «довірча ймовірність»?
7. За якими правилами та теоремами формується фактичний критерій (q) до перевірки тієї чи іншої статистичної гіпотези?
8. На якому принципі втілюється перевірка статистичної гіпотези?
9. Які статистичні сукупності називаються однорідними та які критерії використовуються для перевірки статистичної гіпотези про однорідність двох рядів випадкових величин?
10. Чому статистична гіпотеза перевірки двох рядів на однорідність за допомогою параметричних критеріїв є складною?
11. Яким чином формується критерій для перевірки статистичної гіпотези про незначущість різниць оцінок дисперсії, отриманих по двох сукупностях однієї і тієї ж метеорологічної величини?
12. Яким чином формулюється критерій для перевірки статистичної гіпотези про незначущість розбіжностей між середніми значеннями, що розраховані по двох рядах однієї і тієї ж метеорологічної величини?
13. Як визначаються критичні точки критерію Фішера для перевірки статистичної гіпотези про незначущість розбіжностей між оцінками дисперсій двох рядів?
14. Як визначаються критичні точки критерію Стьюдента для перевірки статистичної гіпотези про незначущість розбіжностей між середніми значеннями двох рядів?
15. В якому випадку дві статистичні сукупності випадкових величин, що підпорядковуються нормальному закону, будуть однорідними?

Задачі

Використовуючи розраховані заздалегідь статистичні оцінки параметрів розподілу двох рядів середньої місячної температури повітря на ст. Одеса (за різні періоди спостережень), на рівні значущості α =0.05 перевірити статистичну гіпотезу про їх однорідність. Відомо, що ці вибірки підпорядковуються нормальному розподілу.

Задача	**Вибірка (X)**				**Вибірка (Y)**			
	Місяць	n	$\overline{x}$,°C	S_x^2,(°C)^2	Місяць	m	$\overline{y}$,°C	S_y^2,(°C)^2
1	I	33	-0.3	8.22	I	43	-1.3	5.05
2	II	33	-1.4	6.07	II	45	-0.7	3.05
3	III	33	2.6	2.90	III	49	2.2	2.63
4	IV	31	8.5	0.93	IV	48	8.8	1.98
5	V	34	15.3	2.23	V	49	15.0	2.16
6	VI	33	19.3	1.04	VI	46	19.2	1.43
7	VII	32	22.4	0.78	VII	45	21.8	1.32
8	VIII	34	21.4	1.46	VIII	47	21.4	1.18
9	IX	27	16.2	0.95	IX	46	17.0	1.51
10	X	31	11.4	2.36	X	49	11.2	3.55
11	VII	32	22.4	0.78	VIII	47	21.4	1.18
12	VII	32	22.4	0.78	VIII	34	21.4	1.46
13	VII	45	21.8	1.32	VIII	34	21.4	1.46
14	I	33	-0.3	8.22	II	45	-0.7	3.05
15	I	33	-0.3	8.22	II	33	-1.4	6.07
16	I	43	-1.3	5.05	II	45	-0.7	3.05
17	IV	31	8.5	0.93	V	49	15.0	2.16
18	IV	31	8.5	0.93	V	34	15.3	2.23
19	IV	48	8.8	1.98	V	49	15.0	2.16
20	IV	48	8.8	1.98	V	34	15.3	2.23
21	VI	33	19.3	1.04	VII	45	21.8	1.32
22	VI	33	19.3	1.04	VII	32	22.4	0.78
23	VI	46	19.2	1.43	VII	32	22.4	0.78
24	VI	46	19.2	1.43	VII	45	21.8	1.32
25	VII	45	21.8	1.32	VIII	47	21.4	1.18
26	IX	27	16.2	0.95	X	49	11.2	3.55
27	IX	27	16.2	0.95	X	31	11.4	2.36
28	IX	46	17.0	1.51	X	31	11.4	2.36
29	IX	46	17.0	1.51	X	49	11.2	3.55
30	III	49	2.2	2.63	IV	48	8.8	1.98

Задачі* На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про однорідність двох нормально розподілених рядів середньої місячної температури повітря.

Вихідні дані містяться в додатку А.

Задача	Станція	Ряд	Місяць	Таблиця
1	Вінниця	X	січень	6
		Y	лютий	
2	Вінниця	X	січень	6
		Y	грудень	
3	Вінниця	X	грудень	6
		Y	лютий	
4	Вінниця	X	квітень	6
		Y	травень	
5	Вінниця	X	травень	6
		Y	червень	
6	Вінниця	X	липень	6
		Y	серпень	
7	Ялта	X	січень	7
		Y	лютий	
8	Ялта	X	грудень	7
		Y	січень	
9	Ялта	X	травень	7
		Y	червень	
10	Ялта	X	червень	7
		Y	липень	

4.4. Перевірка гіпотези про однорідність двох рядів випадкових величин за допомогою непараметричного критерію Вілкоксона

Загальні теоретичні положення

Критерії Фішера-Снедекора (F) і *Стьюдента* (t) називають *параметричними*. Вони використовуються тоді, коли відомо, що випадкові величини X і Y є нормально розподіленими. У гідрометеорологічних дослідженнях ця умова не завжди виконується. Дуже часто ряди випадкових величин підпорядковуються законам розподілу, що

відрізняються від нормального закону. В такому випадку для перевірки гіпотези H_0 про однорідність рядів таких випадкових величин застосовують *непараметричні критерії*. Ці критерії *треба використовувати і тоді, коли інформація про закон розподілу випадкових величин X та Y відсутня.*

Одним із *непараметричних критеріїв* є *критерій Вілкоксона*. Цей критерій використовується в *двох варіантах*: перший базується на підрахунках *числа інверсій*, другий – *ранговий*.

4.4.1. Інверсійний критерій Вілкоксона

Основні теоретичні положення

Якщо ми маємо прості статистичні ряди випадкових величин у вигляді (4.21) і (4.22), то дослідження однорідності таких вибірок треба починати з *операції ранжування*. Тобто випадкові величини, що належать до цих вибірок, розташовують у загальну послідовність у порядку збільшення (або зменшення) їх значень.

Якщо якому-небудь значенню x у загальній послідовності передує деяке значення y, то кажуть, що ця пара утворює інверсію. Позначимо сумарну кількість інверсій через U.

Відомо, що в однорідних рядах, кожний з котрих має не менше 10 членів, число інверсій розподіляється приблизно за нормальним законом з параметрами:

$$m_U = \frac{m \cdot n}{2} \tag{4.33}$$

і

$$\sigma_U^2 = \frac{m \cdot n}{12}\left(m + n + 1\right), \tag{4.34}$$

де

n і m - кількість членів у першій та другій вибірках.

Нульову гіпотезу H_0 сформулюємо так: ряди випадкових величин X і Y належать до однієї генеральної сукупності на рівні значущості α.

Для перевірки цієї гіпотези необхідно знайти межі допустимих значень U, що відділяють область прийняття гіпотези H_0 від критичної області, яка, як зрозуміло, є двосторонньою. Якщо значення критерію, що отримане за даними спостережень, попаде до області прийняття гіпотези, то гіпотеза H_0 на цьому рівні значущості не відхиляється. У протилежному випадку приймається альтернативна гіпотеза H_1.

Область прийняття гіпотези H_0 визначається виразом:

$$m_U - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_U \le U \le m_U + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_U, \qquad (4.35)$$

а *критична* – нерівностями:

$$U_{кр1} < m_U - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_U, \qquad (4.36)$$

$$U_{кр2} > m_U + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_U. \qquad (4.37)$$

У нерівностях (4.35 - 4.37) $\sigma_U = \sqrt{\sigma_U^2}$ – середній квадратичний відхил числа інверсій; $t_{кр}(\alpha,\nu)$ – критерій Стьюдента для рівня значущості α і числа степенів вільності $\nu = m + n - 2$.

Розв'язання типової задачі. ***Перевірка гіпотези про однорідність двох вибірок за допомогою інверсійного критерію Вілкоксона.***

На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про однорідність двох рядів середньодобової температури повітря за 23 (ряд X) і 28 липня (ряд Y) на ст. Одеса.

Ряд X, °C : 11.1; 12.2; 13.7; 21.0; 18.1; 14.3; 11.4; 11.3; 10.8; 11.6;10.0.
Ряд Y, °C : 11.4; 12.6; 18.2; 20.6; 9.1; 11.5; 13.6; 19.1; 12.3; 11.7; 10.1; 9.0.

Об'єми сукупностей склали: $n = 11$; $m = 12$.

Створимо на основі цих рядів *об'єднаний ранжований ряд* (члени ряду Y підкреслені):

<u>9.0</u>; <u>9.1</u>; 10.0; <u>10.1</u>; 10.8; 11.1; 11.3; <u>11.4</u>; 11.4; <u>11.5</u>; 11.6; <u>11.7</u>; 12.2; <u>12.3</u>; <u>12.6</u>; <u>13.6</u>; 13.7; 14.3; 18.1; <u>18.2</u>; <u>19.1</u>; <u>20.6</u>; 21.0.

У новій послідовності члени рядів X і Y розташувалися у такому порядку:
$y_1; y_2; x_1; y_3; x_2; x_3; x_4; y_4; x_5; y_5; x_6; y_6; x_7; y_7; y_8; y_9; x_8; x_9; x_{10}; y_{10}; y_{11}; y_{12}; x_{11}$.
Підрахуємо число інверсій

по X : U_x = 2+3+3+3+4+5+6+9+9+9+12 = 65;
по Y : U_y = 0+0+1+4+5+6+7+7+7+10+10+10 = 67.

Очевидно, що ці результати дуже близькі. Тому нема різниці по якій змінній підраховувати число інверсій.

Далі за формулами (4.33) і (4.34) знайдемо m_U та σ_U^2:

$$m_U = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66; \qquad \sigma_U^2 = \frac{11 \cdot 12}{12}(11+12+1) = 264; \quad \text{отже} \quad \sigma_U = 16.2.$$

Критичну точку критерію Стьюдента – $t_{кр}(\alpha, \nu)$ будемо шукати по додатку П за умов α = 0.05 та ν = 12+11–2 = 21. Вона дорівнює: $t_{кр}(0.05; 21) = 2.08$. Межами критичної області є:

$$U_{кр1} = 66 - 2.08 \cdot 16.2 = 32.3; \quad U_{кр2} = 99.7.$$

І число інверсій попадає в область прийняття гіпотези H_0:

$$U_{кр1} < U < U_{кр2}.$$

Таким чином, ряди середньодобової температури повітря за 23 та 28 липня на ст. Одеса є однорідними на рівні значущості $\alpha = 0.05$.

Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під терміном «статистична гіпотеза»?
2. Які критичні області використовуються при статистичних дослідженнях?
3. Якими принципами треба керуватися при побудові тієї чи іншої критичної області?
4. Який сенс рівня значущості?
5. Як називається ймовірність помилки І-го роду?
6. Що розуміють під терміном «довірча ймовірність»?
7. За якими правилами та теоремами формується фактичний критерій (q) до перевірки тієї чи іншої статистичної гіпотези?
8. На якому принципі втілюється перевірка статистичної гіпотези?
9. Які ряди називаються однорідними? Які критерії використовуються для перевірки статистичних гіпотез про однорідність двох рядів випадкових величин та умови їх застосування?
10. В яких випадках використовується інверсійний критерій Вілкоксона?
11. Що таке число інверсій?
12. Який ряд значень випадкової величини X називають ранжованим?
13. Як визначається область прийняття гіпотези H_0 при використанні критерію Вілкоксона?
14. Якими нерівностями визначаються критичні області при застосуванні критерію Вілкоксона?
15. За яких умов при використанні інверсійного критерію Вілкоксона два ряди випадкових величин будуть однорідними?

Задачі

За допомогою інверсійного критерію Вілкоксона на рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про однорідність рядів місячної кількості опадів на двох станціях України за період 1951-1990 рр.

Вихідні дані для всіх варіантів містяться в додатку В.

Задача	**Місяць**	**С т а н ц і я**		**Табл.**
		X	*Y*	
1	Січень	Любашівка	Затишшя	1
2	Квітень	Любашівка	Затишшя	2
3	Липень	Любашівка	Затишшя	3
4	Жовтень	Любашівка	Затишшя	4
5	Січень	Болград	Ізмаїл	1
6	Квітень	Болград	Ізмаїл	2
7	Липень	Болград	Ізмаїл	3
8	Жовтень	Болград	Ізмаїл	4
9	Січень	Болград	Сарата	1
10	Квітень	Болград	Сарата	2
11	Липень	Болград	Сарата	3
12	Жовтень	Болград	Сарата	4
13	Січень	Ізмаїл	Вилкове	1
14	Квітень	Ізмаїл	Вилкове	2
15	Липень	Ізмаїл	Вилкове	3
16	Жовтень	Ізмаїл	Вилкове	4
17	Січень	Затишшя	Роздільна	1
18	Квітень	Затишшя	Роздільна	2
19	Липень	Затишшя	Роздільна	3
20	Жовтень	Затишшя	Роздільна	4
21	Січень	Роздільна	Сарата	1
22	Квітень	Роздільна	Сарата	2
23	Липень	Роздільна	Сарата	3
24	Жовтень	Роздільна	Сарата	4
25	Січень	Сарата	Вилкове	1
26	Квітень	Сарата	Вилкове	2
27	Липень	Сарата	Вилкове	3
28	Жовтень	Сарата	Вилкове	4
29	Січень	Любашівка	Вилкове	1
30	Квітень	Любашівка	Вилкове	2
31	Липень	Любашівка	Вилкове	3
32	Жовтень	Любашівка	Вилкове	4

4.4.2. Ранговий варіант критерію Вілкоксона

Основні теоретичні положення

Будемо вважати, що хоча б одна з вибірок (X чи Y) складає більше 25 членів.

За допомогою рангового критерію Вілкоксона перевірка статистичної гіпотези H_0 про однорідність двох рядів випадкових величин починається з того, що:

- розташовують члени обох вибірок в один об'єднаний ряд (в порядку збільшення їх значень);
- далі знаходять в об'єднаному ряду суму порядкових номерів (рангів) членів вибірки, об'єм якої менший. Позначимо її через $W_{виб.}$;
- потім визначають нижню критичну точку за формулою:

$$W_{кр.н}\left(m,n,\alpha/2\right)=\frac{(m+n+1)\cdot m-1}{2}-Z_{кр}\sqrt{\frac{m\cdot n\cdot(m+n+1)}{12}}, \quad (4.38)$$

де m і n – об'єми вибірок випадкових величин X і Y ;

α – рівень значущості;

$Z_{кр}$ – визначається по таблицях функції Лапласа (використовуємо додаток Е) за правилом:

$$\Phi\left(Z_{кр}\right)=\frac{1-\alpha}{2}. \quad (4.39)$$

Верхня критична точка розраховується за формулою:

$$W_{кр.в}=(m+n+1)\cdot m-W_{кр.н}. \quad (4.40)$$

Гіпотеза H_0 на заданому рівні значущості α не відкидається, якщо

$$W_{кр.н}<W_{виб.}<W_{кр.в}. \quad (4.41)$$

За умов $W_{виб.}<W_{кр.н}$ або $W_{виб.}>W_{кр.в}$ приймається альтернативна гіпотеза H_1 про те, що ряди X та Y є неоднорідними.

Розв'язання типової задачі. ***Перевірка гіпотези про однорідність двох вибірок за допомогою рангового критерію Вілкоксона.***

За допомогою рангового критерію Вілкоксона на заданому рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити статистичну гіпотезу про однорідність рядів місячної кількості опадів у листопаді на станціях Одеса та Миколаїв. Ряд місячної кількості опадів на ст. Одеса (ряд X) має об'єм n= 90, а ряд місячної кількості опадів на ст. Миколаїв (ряд Y) має об'єм m=82. Значення цих випадкових величин наводяться в табл. 4.9.

По-перше, з цих рядів треба побудувати ранжований ряд. Він наводиться в табл. 4.10.

Після цього розраховуємо кількість рангів у загальному ряду (табл. 4.11). ***Якщо однакові значення належать різним вибіркам, то їм присвоюють один і той же ранг (середній).***

Сума рангів членів вибірки Y (оскільки її об'єм є меншим)дорівнює:

$$W_{виб.} = 7025.5.$$

Далі знаходимо значення нижньої $(W_{кр.н})$ та верхньої $(W_{кр.в})$ критичних точок. Нижня критична точка розраховується за формулою (4.38). За умови α=0.05, функція Лапласа $\Phi\left(Z_{кр}\right) = \frac{1-\alpha}{2} = 0.475$ і згідно з таблицею додатку Е, $Z_{кр} = 1.96$.

Отже:

$$W_{кр.н} = \frac{(82+90+1)\cdot 82 - 1}{2} - 1.96\sqrt{\frac{82\cdot 90\cdot(82+90+1)}{12}} = 6453.18\cdot$$

Права критична точка $(W_{кр.в})$ визначається за формулою (4.35):

$$W_{кр.в} = (82+90+1)\cdot 82 - 6453.18 = 7732.82\cdot$$

Отже виходить, що виконується нерівність :

$$6453.18 < W_{виб.} < 7732.82$$

і гіпотеза про однорідність рядів місячної кількості опадів на станціях Одеса та Миколаїв з ймовірністю 95 % не відхиляється.

Таблиця 4.9 – Місячна кількість опадів на ст. Одеса (ряд X) і ст. Миколаїв (ряд Y) (листопад)

Рік	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
1900	9	**2**	0	**1**	0	**1**	43	**48**	33	**35**	28	**32**	13	**17**	30	**47**	20	**33**	39	**55**
1910	22	**35**	13	**13**	29	**19**	14	**45**	39	**24**	38	**59**	19	**27**	42	**37**	59	**–**	52	**–**
1920	2	**–**	57	**–**	60	**–**	7	**11**	20	**22**	47	**47**	5	**2**	27	**28**	37	**27**	30	**16**
1930	26	**53**	36	**29**	16	**31**	36	**27**	53	**49**	49	**24**	44	**41**	27	**44**	32	**15**	4	**8**
1940	12	**20**	–	**–**	67	**–**	42	**–**	99	**110**	15	**13**	20	**31**	44	**64**	4	**9**	22	**22**
1950	24	**33**	37	**45**	150	**127**	9	**11**	110	**104**	34	**49**	5	**12**	49	**48**	24	**8**	75	**46**
1960	87	**27**	29	**34**	68	**43**	4	**6**	8	**23**	89	**92**	91	**43**	24	**30**	31	**22**	15	**20**
1970	36	**44**	41	**28**	38	**39**	44	**36**	89	**33**	35	**61**	19	**14**	42	**30**	12	**14**	111	**55**
1980	80	**70**	115	**110**	6	**8**	7	**6**	50	**73**	46	**53**	8	**4**	58	**43**	29	**–**	7	**6**
1990	6	**13**	–	**–**	–	**–**	–	**–**	–	**–**	–	**–**	–	**–**	–	**–**	–	**-**	–	**–**

Таблиця 4.10 – Об’єднаний ранжований ряд місячної кількості опадів (ст. ст. Одеса - Миколаїв).

п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	**1**	**1**	**2**	**2**	2	**4**	4	4
10	4	5	5	**6**	**6**	**6**	6	6	7	7
20	7	**8**	**8**	**8**	8	8	**9**	9	9	**11**
30	**11**	**12**	12	12	**13**	**13**	**13**	13	13	**14**
40	**14**	14	**15**	15	15	**16**	16	**17**	**19**	19
50	19	**20**	**20**	20	20	20	**22**	**22**	**22**	22
60	22	**23**	**24**	**24**	24	24	24	26	**27**	**27**
70	**27**	**27**	27	27	**28**	**28**	28	**29**	29	29
80	29	**30**	**30**	30	30	**31**	**31**	31	**32**	32
90	**33**	**33**	**33**	33	**34**	34	**35**	**35**	35	**36**
100	36	36	36	**37**	37	37	38	38	**39**	39
110	39	**41**	41	42	42	42	**43**	**43**	**43**	43
120	**44**	**44**	44	44	44	**45**	**45**	**46**	46	**47**
130	**47**	47	**48**	**48**	**49**	**49**	49	49	50	52
140	**53**	**53**	53	**55**	**55**	57	58	**59**	59	60
150	**61**	**64**	67	68	**70**	**73**	75	80	87	89
160	89	91	**92**	99	**104**	**110**	**110**	110	111	115
170	**127**	150								

Таблиця 4.11 – Ранги ранжованого ряду місячної кількості опадів (ст.ст. Одеса - Миколаїв, листопад)

п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	**3**	**4**	**6**	**6**	6	**9.5**	9.5	9.5
10	9.5	12	13	**16**	**16**	**16**	16	16	19	20
20	21	**24**	**24**	**24**	24	24	**28**	28	28	**30**
30	**31**	**33**	33	33	**37**	**37**	**37**	37	37	**41**
40	**41**	**41**	44	44	44	**46.5**	46.5	**48**	**50**	50
50	50	**54**	**54**	54	54	54	**59**	**59**	**59**	59
60	59	**62**	**65**	**65**	65	65	65	68	**71.5**	**71.5**
70	**71.5**	**71.5**	71.5	71.5	**76**	**76**	76	**79.5**	79.5	79.5
80	79.5	**83.5**	**83.5**	83.5	83.5	**87**	**87**	87	**89.5**	89.5
90	**92.5**	**92.5**	**92.5**	92.5	**95.5**	95.5	**98**	**98**	98	**101.5**
100	101.5	101.5	101.5	**105**	105	105	107	108	**110**	110
110	110	**112.5**	112.5	114	115	116	**118.5**	**118.5**	**118.5**	118.5
120	**123**	**123**	123	123	123	**126**	**127**	**128.5**	128.5	**131**
130	**131**	131	**133**	**134**	**136.5**	**136.5**	136.5	136.5	139	140
140	**142**	**142**	142	**144**	**145**	146	147	**148.5**	148.5	150
150	**151**	**152**	153	154	**155**	**156**	157	158	159	160
160	161	162	**163**	164	**165**	**167**	**167**	167	169	170
170	**171**	172								

Запитання для самоперевірки

1. Що розуміють під терміном «статистична гіпотеза»?
2. Які критичні області використовуються при статистичних дослідженнях?
3. Якими принципами треба керуватися при побудові тієї чи іншої критичної області?
4. Який сенс рівня значущості?
5. Як називається ймовірність помилки I-го роду?
6. Що розуміють під терміном «довірча ймовірність»?
7. За якими правилами та теоремами формується фактичний критерій (q) до перевірки тієї чи іншої статистичної гіпотези?
8. На якому принципі втілюється перевірка статистичної гіпотези?
9. За яких умов застосовується ранговий критерій Вілкоксона для перевірки на однорідність двох рядів випадкових величин?
10. Які ряди називають однорідними? При вирішенні яких задач необхідно, щоб ряди підпорядковувалися одному й тому ж закону розподілу?
11. Що таке сума рангів?
12. Як розраховується ранг, якщо однакові значення належать різним вибіркам?
13. За яких умов при використанні рангового критерію Вілкоксона два ряди випадкових величин будуть однорідними?

Задачі

За допомогою рангового критерію Вілкоксона на рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити статистичну гіпотезу про однорідність рядів місячної кількості опадів на двох станціях України за період 1951–1990 рр.

Вихідні дані для всіх варіантів містяться в додатку В.

Варіант	**Місяць**	**С т а н ц і я**		**Таблиця**
		X	*Y*	
1	Січень	Болград	Любашівка	1
2	Квітень	Болград	Любашівка	2
3	Липень	Болград	Любашівка	3
4	Жовтень	Болград	Любашівка	4
5	Січень	Ізмаїл	Любашівка	1
6	Квітень	Ізмаїл	Любашівка	2
7	Липень	Ізмаїл	Любашівка	3
8	Жовтень	Ізмаїл	Любашівка	4
9	Січень	Любашівка	Роздільна	1
10	Квітень	Любашівка	Роздільна	2
11	Липень	Любашівка	Роздільна	3
12	Жовтень	Любашівка	Роздільна	4
13	Січень	Сарата	Ізмаїл	1
14	Квітень	Сарата	Ізмаїл	2
15	Липень	Сарата	Ізмаїл	3
16	Жовтень	Сарата	Ізмаїл	4
17	Січень	Сарата	Затишшя	1
18	Квітень	Сарата	Затишшя	2
19	Липень	Сарата	Затишшя	3
20	Жовтень	Сарата	Затишшя	4
21	Січень	Кілія	Болград	1
22	Квітень	Кілія	Болград	2
23	Липень	Кілія	Болград	3
24	Жовтень	Кілія	Болград	4
25	Січень	Ізмаїл	Кілія	1
26	Квітень	Ізмаїл	Кілія	2
27	Липень	Ізмаїл	Кілія	3
28	Жовтень	Ізмаїл	Кілія	4
29	Січень	Кілія	Сарата	1
30	Квітень	Кілія	Сарата	2
31	Липень	Кілія	Сарата	3
32	Жовтень	Кілія	Сарата	4

5. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ЗВ'ЯЗОК МІЖ ДВОМА ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ

5.1. Поняття про форму та тісноту кореляційного зв'язку

Основні теоретичні положення

Дослідник має всі підстави розглядати гідрометеорологічні величини як випадкові величини, незважаючи на те, що їх зміни обумовлені певними фізичними закономірностями. Така їх властивість пов'язана з тим, що зв'язки між випадковими величинами спричиняються взаємодією багатьох факторів, і у нас немає, як правило, достатніх знань про те, який саме зв'язок, або зв'язки, обумовили змінювання цієї величини у термін її вимірювання. Більше того, у деяких випадках ще є відсутніми повні уявлення про причинно-наслідкові залежності у природних явищах, що спричиняють гідрометеорологічні процеси. Деяка міра невизначеності має місце, коли йдеться про майбутній стан атмосфери чи об'єктів гідросфери, тобто про гідрометеорологічне прогнозування.

У природі досить часто виникають ситуації, коли між деякими двома випадковими величинами проявляються статистичні зв'язки. Вони можуть бути *функціональними* або *стохастичними*.

Функціональною залежністю між двома випадковими величинами називається така залежність, коли можливому значенню однієї випадкової величини відповідає тільке одне значення іншої.

Стохастичним називають такий *зв'язок* між випадковими величинами, коли зміна однієї з них приводить до зміни закону розподілу іншої. Стохастичний зв'язок між двома випадковими величинами спостерігається, наприклад, коли існують загальні випадкові фактори, впливаючи як на одну, так і на другу величину поряд з іншими неоднаковими для обох величин випадковими факторами. Наприклад, якщо Y є деяка функція від випадкових величин $z_1,\ z_2, ...,\ z_m,\ \upsilon_1,\ \upsilon_2, ...,\ \upsilon_к$:

$$Y = f\ (z_1,\ z_2, ...,\ z_m,\ \upsilon_1,\ \upsilon_2, ...,\ \upsilon_к),$$

а X – функція від тих же випадкових величин $z_1,\ z_2, ...,\ z_m$ і деякої сукупності інших випадкових величин $u_1,\ u_2, ...,\ u_к$:

$$X = \varphi\left(z_1,\ z_2, ...,\ z_m,\ u_1,\ u_2, ...,\ u_к\right),$$

то залежність між випадковими величинами X і Y буде стохастичною.

Найбільш важливі особливості стохастичного зв'язку виявляються у тих змінюваннях, які зазнає центр умовного розподілу однієї величини при змінюванні іншої. Якщо припустити, що *умовний розподіл* є нормальним з щільністю ймовірності

$$f\left(y/x\right)=\frac{1}{\sigma_{y/x}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(y-m_{y/x}\right)^2}{2\sigma_{y/x}^2}\right], \tag{5.1}$$

де

$m_{y/x}=M\left[Y/X=x\right]$ – *умовне математичне сподівання*, а $\sigma_{y/x}^2=M\left\{\left[y-m_{y/x}\right]^2\right\}$ – *умовна дисперсія*, то центром розподілу є умовне математичне сподівання.

Отже, *якщо при змінюванні однієї з випадкових величин змінюється умовне математичне сподівання іншої, то такий зв'язок між цими випадковими величинами називається кореляційним*.

Кореляційну залежність можна трактувати як функціональну залежність умовного математичного сподівання однієї випадкової величини від значення іншої:

$$m_{y/x}=f\left(x\right). \tag{5.2}$$

Функцію $f\left(x\right)$ називають *функцією регресії* величини Y на (по) X. Рівняння (5.2) називається *рівнянням регресії*. Можна розглядати і кореляційний зв'язок між величинами X та Y, а саме:

$$m_{x/y}=\varphi\left(y\right). \tag{5.3}$$

Треба мати на увазі, що на основі вибірок випадкових величин:

$$X:\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n$$

та (5.4)

$$Y:\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_i,\ \ldots,\ y_n$$

ми можемо отримати лише *оцінки* відповідних *умовних математичних сподівань*, якими є *умовні середні значення*:

$$\hat{m}_{y/x}=\bar{Y}/X=x=\bar{y}\left(x\right);\qquad \hat{m}_{x/y}=\bar{X}/Y=y=\bar{x}\left(y\right). \tag{5.5}$$

Їм відповідають *оціночні рівняння регресії*:

$$\bar{y}(x) = \hat{f}(x); \tag{5.6}$$

$$\bar{x}(y) = \hat{\varphi}(y). \tag{5.7}$$

Кореляційні зв'язки між випадковими величинами *характеризуються формою* та *тіснотою*. Що стосується ***форми*** *кореляційного зв'язку* між двома випадковими величинами, то дуже часто реалізуються зв'язки, що описуються:

– ***лінійним*** *рівнянням регресії*:

$$\bar{y}(x) = ax + b, \tag{5.8}$$

де a і b – коефіцієнти цього рівняння.

Крім лінійної кореляційної залежності (*прямої* чи *оберненої*) зустрічаються ***нелінійні*** *кореляційні зв'язки*, які відбиваються відповідними рівняннями регресії:

– ***параболічним***:

$$\bar{y}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2; \tag{5.9}$$

– ***показниковим***:

$$\bar{y}(x) = ab^{cx}, \tag{5.10}$$

частинним випадком якого є ***експоненціальне*** *рівняння регресії*:

$$\bar{y}(x) = ae^{bx}; \tag{5.11}$$

– ***гіперболічним***:

$$\bar{y}(x) = \frac{a}{x^b}. \tag{5.12}$$

Кореляційний зв'язок може бути *прямим* і *оберненим*. Якщо при збільшенні (зменшенні) однієї випадкової величини відбувається збільшення (зменшення) іншої, то такий *зв'язок* називають *прямим*. Коли збільшенню (зменшенню) однієї випадкової величини відповідає

зменшення (збільшення) іншої, то це свідчить про *обернений зв'язок* між цими випадковими величинами.

Якісне *уявлення про тісноту та форму кореляційного зв'язку* між величинами X і Y можна отримати, побудувавши ***кореляційний графік*** *(діаграму розсіювання точок або поле кореляції)* на площині в координатах $(x;y)$. Якщо точки з координатами $(x_i;y_i)$ тісно групуються біля деякої осередненої лінії, то це свідчить про те, що кореляційний *зв'язок є тісним*. Чим більшим є розкид точок на графіку, тим слабкішим є кореляційний зв'язок. Щоб мати уявлення про ***кількісну*** *міру тісноти кореляційного зв'язку використовують* ***кореляційне відношення.***

Якщо розглядати у загальному плані змінювання випадкової величини Y, то на величину Y крім величини X можуть діяти й інші випадкові величини. Тому дисперсія випадкової величини Y, яку називають *повною дисперсією* (σ_y^2), складається з двох частин:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y/x}^2 + \delta_{y/x}^2 \ . \tag{5.13}$$

Член

$$\sigma_{y/x}^2 = M\left\{\left[y - \bar{y}(x)\right]^2\right\} \tag{5.14}$$

характеризує розсіювання точок на кореляційному графіку відносно лінії регресії, тобто відбиває вплив інших діючих факторів на випадкову величину Y.

Другий член рівняння (5.13)

$$\delta_{y/x}^2 = M\left\{\left[\bar{y}(x) - m_{y/x}\right]^2\right\} \tag{5.15}$$

є мірою розсіювання вибіркових ліній регресії $\bar{y}(x) = \hat{f}(x)$ відносно генеральної лінії регресії $m_{y/x} = f(x)$ і характеризує саме вплив випадкової величини X на випадкову величину Y.

Параметр

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{\delta_{y/x}^2}{\sigma_y^2} \tag{5.16}$$

є показником тісноти кореляційного зв'язку між випадковими величинами Y та X. Він носить назву *кореляційного відношення*. Всі можливі значення кореляційного відношення визначаються виразом:

$$0 \le \eta^2_{y/x} \le 1. \qquad (5.17)$$

Чим ближчим є значення кореляційного відношення до одиниці, тим тіснішим є кореляційний зв'язок між випадковими величинами X та Y, і навпаки.

Статистична оцінка кореляційного відношення знаходиться на основі оцінок розглянутих вище складових повної дисперсії:

$$S^2_{y/x} = \hat{\sigma}^2_{y/x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \bar{y}(x_i)\right]^2; \qquad (5.18)$$

$$\hat{\delta}^2_{y/x} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left[\bar{y}_j(x) - \bar{y}\right]^2; \qquad (5.19)$$

$$\hat{\eta}^2_{y/x} = \frac{\hat{\sigma}^2_{y/x}}{S^2_y}, \qquad (5.20)$$

де

$$S^2_y = S^2_{y/x} + \hat{\delta}^2_{y/x}\ . \qquad (5.21)$$

Якщо кореляційний зв'язок між величинами Y та X є лінійним, то кореляційне відношення вироджується у *параметр* r^2_{xy}, який називається ***коефіцієнтом детермінації***.

Параметр

$$r_{xy} = \sqrt{r^2_{xy}} \qquad (5.22)$$

називається ***коефіцієнтом кореляції*** і розраховується на основі статистичних сукупностей (5.4) за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot S_x \cdot S_y}. \qquad (5.23)$$

Він може приймати значення із множини

$$-1 \le r_{xy} \le 1. \qquad (5.24)$$

Коефіцієнт кореляції характеризує степінь наближення кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y до лінійної функціональної залежності.

Додатні значення коефіцієнта кореляції $\left(r_{xy} > 0\right)$ позначають наявність ***прямого*** *лінійного зв'язку* між випадковими величинами X і Y. ***Обернений*** *лінійний кореляційний зв'язок* характеризується ***від'ємними*** значеннями коефіцієнта кореляції $\left(r_{xy} < 0\right)$. *Чим більшим за модулем є коефіцієнт кореляції* $\left|r_{xy}\right|$, *тим тіснішим буде лінійний кореляційний зв'язок* між випадковими величинами, і навпаки. Якщо $r_{xy} = 0$, то це означає, що *лінійний кореляційний зв'язок між величинами* X і Y *відсутній*, але це не означає, що відсутнім є кореляційний зв'язок іншої форми.

Таким чином, задача дослідника полягає у тому, щоб отримати рівняння регресії, яке б із заданою ймовірністю описувало кореляційну залежність між випадковими величинами, що розглядаються. І починати дослідження треба з побудови кореляційного графіка.

Розв'язання типової задачі. ***Побудова кореляційного графіка та розрахунки коефіцієнта кореляції.***

На основі рядів місячної кількості опадів у жовтні на ст. Роздільна (ряд X) та на ст. Любашівка (ряд Y) за період з 1948 по 1990 рр. (табл. 5.1) побудувати кореляційний графік на площині в координатах $\left(x_i; y_i\right)$ і на його основі якісно визначити форму та тісноту кореляційного зв'язку між цими метеорологічними величинами.

Побудований кореляційний графік (рис. 5.1) свідчить про те, що є підстави вважати статистичний зв'язок між двома рядами місячної кількості опадів на визначених станціях України *прямим, тісним* і *лінійним*.

Щоб удосконалитися в цьому, треба розрахувати коефіцієнт кореляції, який є кількісною мірою лінійного кореляційного зв'язку. Порядок розрахунків статистичних оцінок моментів розподілу, необхідних для находження коефіцієнта кореляції, наводиться в табл. 5.1. Отримані статистичні оцінки моментів розподілу місячної кількості опадів на ст. Роздільна складають: $\overline{x}$=27 мм; S_x=20 мм; на ст. Любашівка: $\overline{y}$=27мм; S_y = 22 мм. Коефіцієнт кореляції розраховувався за формулою (5.23):

$$r_{xy} = \frac{13275}{43 \cdot 20 \cdot 22} = 0.70 \cdot$$

Отримане значення коефіцієнта кореляції $r_{xy} = 0.70$ свідчить про тісну, пряму, лінійну статистичну залежність між місячною кількістю опадів у жовтні на станціях Любашівка та Роздільна. Тому слід будувати саме лінійне рівняння регресії між цими метеорологічними величинами.

Таблиця 5.1 – Розрахунки точкових статистичних оцінок моментів розподілу на основі рядів місячної кількості опадів (ст. ст. Роздільна – Любашівка, жовтень)

№ п/п	Рік	x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1948	15	37	-12	10	144	100	-120
2	1949	1	0	-26	-27	676	729	702
3	1950	58	61	31	34	961	1156	1054
4	1951	4	12	-23	-15	529	225	345
5	1952	79	36	52	9	2704	81	468
6	1953	9	2	-18	-25	324	625	450
7	1954	16	27	-11	0	121	0	0
8	1955	8	18	-17	-9	289	81	153
9	1956	12	11	-15	-16	225	256	240
10	1957	12	10	-15	-17	225	289	255
11	1958	47	54	20	27	400	729	540
12	1959	1	1	-26	-26	676	676	676
13	1960	46	59	19	32	361	1024	608
14	1961	17	10	-10	-17	100	289	170
15	1962	32	2	5	-25	25	625	-125
16	1963	2	2	-25	-25	625	625	625
17	1964	33	41	6	14	36	196	84
18	1965	6	4	-21	-23	441	529	483
19	1966	26	67	-1	40	1	1600	-40
20	1967	30	31	3	4	9	16	12
21	1968	65	27	38	0	1444	0	0
22	1969	6	6	-21	-21	441	441	441
23	1970	12	24	-15	-3	225	9	45

Продовження таблиці 5.1

№ п/п	Рік	x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
24	1971	7	6	-20	-21	400	441	420
25	1972	40	61	13	34	169	1156	442
26	1973	21	28	-6	1	36	1	-6
27	1974	20	16	-7	-11	49	121	77
28	1975	15	22	-12	-5	144	25	60
29	1976	23	6	-4	-21	16	441	84
30	1977	11	13	-16	-14	256	196	224
31	1978	35	14	8	-13	64	169	-104
32	1979	24	44	-3	17	9	289	-51
33	1980	51	51	24	24	576	576	576
34	1981	77	93	50	66	2500	4356	3300
35	1982	29	32	2	5	4	25	10
36	1983	7	6	-20	-21	400	441	420
37	1984	12	21	-15	-6	225	36	90
38	1985	47	44	20	17	400	289	340
39	1986	42	18	15	-9	225	81	-135
40	1987	42	26	15	-1	225	1	-15
41	1988	31	33	4	6	16	36	24
42	1989	51	47	24	20	576	400	480
43	1990	24	36	-3	9	9	81	-27
Сума:		1146	1159			17281	19462	13275
Середнє:		27	27	Дисперсія:		412	463	
Середній квадратичний відхил						20	22	

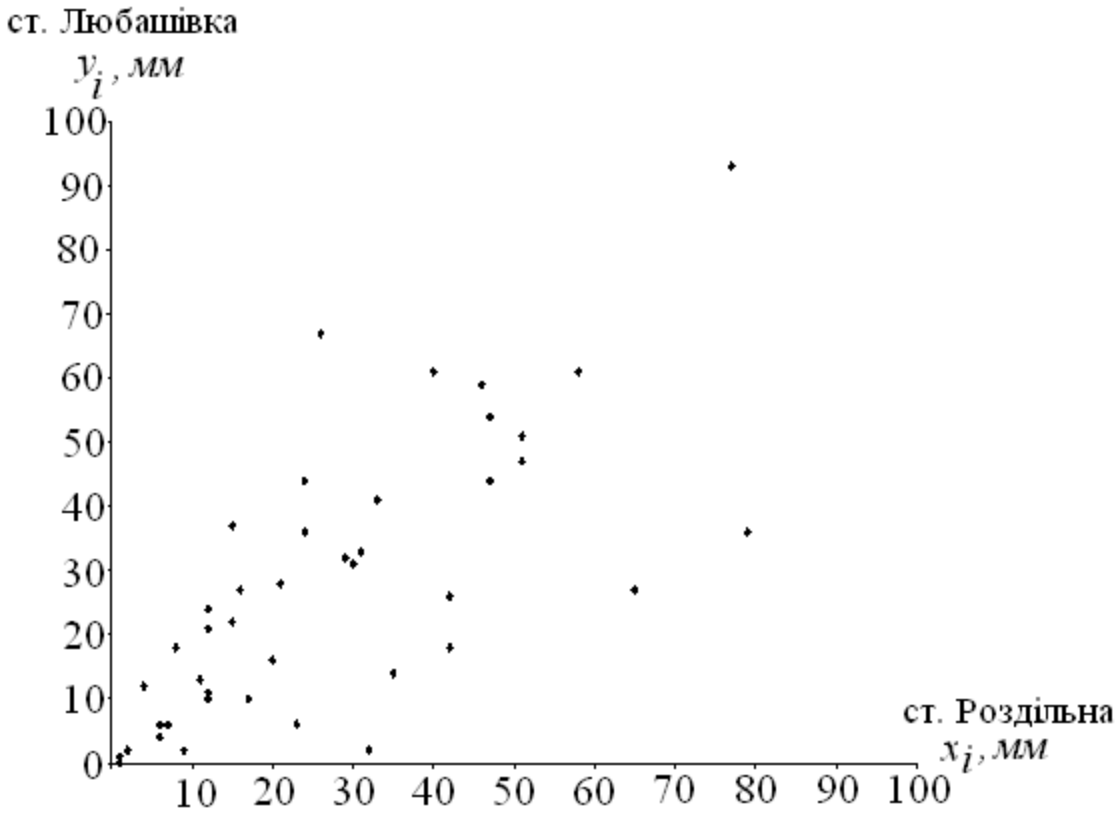


Рисунок 5.1 – Поле кореляції місячної кількості опадів (жовтень)

Запитання для самоперевірки

1. Які види зв’язків можуть спостерігатися між двома випадковими величинами?
2. Яка залежність між випадковими величинами називається функціональною? стохастичною?
3. Дайте визначення кореляційної залежності між двома випадковими величинами.
4. В якому випадку кореляційна залежність між випадковими величинами буде функціональною?
5. Який розподіл називається умовним? Що є умовним математичним сподіванням? умовною дисперсією?
6. Що є якісною характеристикою тісноти та форми кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами ?
7. Які форми кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами Вам відомі?
8. Який вигляд має рівняння лінійної регресії та який сенс його коефіцієнтів?
9. Які види нелінійних рівнянь регресії між випадковими величинами Вам відомі?

10. Що є кількісною мірою лінійного кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами ?
11. Які статистичні оцінки і яких моментів розподілу випадкових величин використовуються, при розрахунках коефіцієнта кореляції?
12. У яких межах змінюється коефіцієнт кореляції?
13. Зобразити графік прямого, тісного, лінійного кореляційного зв’язку.
14. У якому випадку лінійний кореляційний зв'язок буде тіснішим: за умови $r_{xy} = -0.82$ чи $r_{xy} = 0.82$?
15. Який буде зв'язок між двома випадковими величинами за умови $r_{xy} = 0$?
16. Який буде зв'язок між двома випадковими величинами за умови $|r_{xy}| = 1$?

Задачі

Побудувати графік кореляційної залежності між двома рядами місячної кількості опадів (X і Y) за період вимірювань з 1951 по 1990 рр. та сформулювати гіпотезу H_0 про форму та тісноту статистичної залежності. Розрахувати коефіцієнт кореляції між цими кліматичними характеристиками і проаналізувати отримані результати. Вихідні дані для всіх задач містяться в додатку В. Умови до розв’язання конкретної задачі наводяться в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Інформація до розв’язання задач

Задача	**Місяць**	**С т а н ц і я**		**Таблиця**
		X	Y	
1	Січень	Любашівка	Ізмаїл	1
2	Січень	Любашівка	Вилкове	1
3	Січень	Любашівка	Кілія	1
4	Січень	Болград	Вилкове	1
5	Січень	Ізмаїл	Затишшя	1
6	Січень	Ізмаїл	Вилкове	1
7	Січень	Затишшя	Вилкове	1
8	Січень	Роздільна	Вилкове	1
9	Квітень	Любашівка	Болград	2
10	Квітень	Любашівка	Ізмаїл	2

Продовження таблиці 5.2

Задача	**Місяць**	**С т а н ц і я**		**Таблиця**
		X	*Y*	
11	Квітень	Любашівка	Роздільна	2
12	Квітень	Любашівка	Сарата	2
13	Квітень	Любашівка	Вилкове	2
14	Квітень	Любашівка	Кілія	2
15	Квітень	Болград	Затишшя	2
16	Квітень	Болград	Роздільна	2
17	Квітень	Болград	Сарата	2
18	Квітень	Болград	Вилкове	2
19	Квітень	Болград	Кілія	2
20	Квітень	Ізмаїл	Затишшя	2
21	Квітень	Ізмаїл	Роздільна	2
22	Квітень	Ізмаїл	Сарата	2
23	Квітень	Ізмаїл	Вилкове	2
24	Квітень	Затишшя	Роздільна	2
25	Квітень	Затишшя	Сарата	2
26	Квітень	Затишшя	Вилкове	2
27	Квітень	Затишшя	Кілія	2
28	Квітень	Роздільна	Сарата	2
29	Квітень	Роздільна	Вилкове	2
30	Квітень	Роздільна	Кілія	2
31	Квітень	Сарата	Вилкове	2
32	Квітень	Сарата	Кілія	2
33	Липень	Любашівка	Затишшя	3
34	Липень	Любашівка	Роздільна	3
35	Жовтень	Затишшя	Сарата	4
36	Жовтень	Любашівка	Болград	4
37	Жовтень	Любашівка	Роздільна	4
38	Жовтень	Любашівка	Сарата	4
39	Жовтень	Любашівка	Кілія	4
40	Жовтень	Любашівка	Ізмаїл	4
41	Жовтень	Болград	Ізмаїл	4
42	Жовтень	Болград	Затишшя	4
43	Жовтень	Болград	Роздільна	4
44	Жовтень	Болград	Сарата	4
45	Жовтень	Болград	Вилкове	4

Продовження таблиці 5.2

Задача	**Місяць**	**С т а н ц і я**		**Таблиця**
		X	*Y*	
46	Жовтень	Болград	Кілія	4
47	Жовтень	Ізмаїл	Затишшя	4
48	Жовтень	Ізмаїл	Роздільна	4
49	Жовтень	Затишшя	Роздільна	4
50	Жовтень	Затишшя	Сарата	4
51	Жовтень	Затишшя	Вилкове	4
52	Жовтень	Затишшя	Кілія	4
53	Жовтень	Роздільна	Сарата	4
54	Жовтень	Роздільна	Вилкове	4
55	Жовтень	Роздільна	Кілія	4
56	Жовтень	Сарата	Вилкове	4
57	Жовтень	Сарата	Кілія	4
58	Жовтень	Вилкове	Кілія	4
59	Жовтень	Ізмаїл	Сарата	4
60	Жовтень	Любашівка	Вилкове	4

5.61. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	84	92	81	83	81	84	86	82	78	84
Вилкове	86	89	84	84	82	86	87	84	84	86

5.62. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	71	69	71	77	73	70	70	73	72	72
Очаков	66	66	64	70	71	62	67	77	68	71

5.63. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	76	75	82	72	79	74	84	77	80	78
Очаков	78	74	78	68	80	68	77	75	77	73

5.64. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	86	93	85	86	79	86	87	80	79	82
Одеса	84	92	81	83	81	84	86	82	78	84

5.65. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	83	80	70	66	76	75	65	72	74	72
Одеса	82	83	72	67	76	76	66	76	76	74

5.66. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	64	64	57	66	72	66	66	64	70	71
Одеса	69	65	57	61	69	68	67	65	74	72

5.67. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	72	81	84	84	65	78	74	78	68	80
Одеса	69	84	82	80	62	75	73	77	65	76

5.68. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	80	82	70	67	74	74	70	76	76	77
Одеса	82	83	72	67	76	76	66	76	76	74

5.69. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	71	70	65	68	73	71	69	71	77	73
Одеса	69	65	57	61	69	68	67	65	74	72

5.70. Розрахувати коефіцієнт кореляції між двома рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	72	83	84	81	73	76	75	82	72	79
Одеса	69	84	82	80	62	75	73	77	65	76

5.2. Перевірка гіпотези про статистичну значущість коефіцієнта кореляції

Основні теоретичні положення

Після отримання точкової статистичної оцінки коефіцієнта кореляції r_{xy} необхідно оцінити вірогідність лінійного кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y.

І перш ніж приступати до побудови лінійного рівняння регресії треба перевірити гіпотезу про статистичну значущість отриманого коефіцієнта кореляції.

Перевірку цієї гіпотези необхідно провести після того, як на основі вибірок випадкових величин X і Y отримана статистична оцінка коефіцієнта кореляції визиває сумнів. В такому разі треба удосконалитися в тому, що отримана статистична оцінка $r_{xy} = \hat{\rho}_{xy}$ не є випадковою.

Висновок про це можна зробити тільки після перевірки гіпотези про статистичну значущість оцінки коефіцієнта кореляції, що отримана на основі випадкових вибірок. Нульову гіпотезу формулюють так:

H_0: На рівні значущості α коефіцієнт кореляції є статистично незначущим як і його оцінка:

$$\rho_{xy} = 0; \qquad \hat{\rho}_{xy} = r_{xy} = 0.$$

Альтернативна гіпотеза H_1, очевидно, є такою:

H_1: На рівні значущості α коефіцієнт кореляції є статистично значущим як і його оцінка:

$$\rho_{xy} \neq 0; \qquad \hat{\rho}_{xy} = r_{xy} \neq 0.$$

Перевірка гіпотези H_0 відносно H_1 втілюється за допомогою критерію Стьюдента. У загальному випадку, за умови ***малих об'ємів*** вибірок $(n < 50)$, критерій Стьюдента визначається таким чином:

$$t = \frac{|\hat{z}|}{\sigma_z}, \tag{5.25}$$

де

$$\hat{z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}}, \tag{5.26}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \tag{5.27}$$

Якщо ***ряди володіють представництвом*** $(n > 50)$, для побудови критерію Стьюдента можна використовувати безпосередньо отриману оцінку коефіцієнта кореляції r_{xy}.

Тоді:

$$t = \frac{|r_{xy}|}{\sigma_r}, \tag{5.28}$$

де

$$\sigma_r = \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n-1}}. \tag{5.29}$$

Розраховане за формулою (5.25) або (5.28) (в залежності від об'єму вибірки) значення критерію Стьюдента порівнюють з $t_{кр}(\alpha, \nu)$, яке наводиться в таблицях. Рівень значущості α задає дослідник та розраховує число степенів вільності за формулою $\nu = n - 1$.

Якщо

$$t < t_{кр}(\alpha, \nu), \tag{5.30}$$

то приймається гіпотеза H_0 про статистичну незначущість, тобто про випадковість отриманої статистичної оцінки коефіцієнта кореляції.

У протилежному випадку, якщо

$$t > t_{кр}(\alpha, \nu), \tag{5.31}$$

гіпотеза H_0 відкидається й приймається альтернативна гіпотеза H_1 про те, що коефіцієнт кореляції є статистично значущим. А це означає, що він дійсно виражає характер лінійного кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y і є підстави виразити цей статистичний зв'язок генеральним лінійним рівнянням регресії:

$$m_{y/x} = Ax + B, \tag{5.32}$$

де $m_{y/x}$ – умовне математичне сподівання;

A і B – коефіцієнти генерального рівняння лінійної регресії.

Статистичною оцінкою генерального рівняння регресії є рівняння:

$$\bar{y}(x) = ax + b.$$

Розв'язання типових задач

1. Перевірка статистичної гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції за умови невеликих об'ємів вибірок.

За даними метеорологічних вимірювань опадів у липні (1946 - 1990 рр.) на ст. ст. Вилкове та Ізмаїл отримані ряди місячної кількості опадів (відповідно ряд X та ряд Y).

По цих даних за формулою (5.23) розрахували коефіцієнт кореляції. Він дорівнює 0.42 . При такому значенні r_{xy} треба на рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотезу H_0 про те, що оцінка r_{xy} *генерального коефіцієнта кореляції* ρ_{xy} статистично значуща, тобто є вірогідною. Отже гіпотеза H_0 формулюється так: ρ_{xy}=0; $\hat{\rho}_{xy} = r_{xy} = 0$. Це означає, що лінійний кореляційний зв'язок відсутній і оцінка коефіцієнта кореляції статистично незначуща. Альтернативна гіпотеза H_1: $\rho_{xy} \neq 0$ та $r_{xy} = \hat{\rho}_{xy} \neq 0$ є статистично значущим. Оскільки об'єми вибірок $n = m = 44$, тобто є відносно невеликими, критерій Стьюдента розраховується саме за формулою (5.25). Для його визначення треба знайти:

$$\hat{z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0.42}{1-0.42} = \frac{1}{2}\ln\frac{1.42}{0.58} = 0.45$$

та

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{44-3}} = 0.16 \cdot$$

Фактичне значення критерію Стьюдента за отриманих вище умов розраховується так:

$$t = \frac{0.45}{0.16} = 2.81 \cdot$$

На рівні значущості α=0.05 та числа степенів вільності $\nu = n - 1$= 44–1= 43, $t_{кр}$(0.05; 43) = 2.02 (додаток П).

Таким чином, виходить, що $t > t_{кр}(\alpha, \nu)$ і гіпотеза H_0 про незначущість коефіцієнта кореляції $r_{xy} = 0.42$ відхиляється та з імовірністю $p = 1 - 0.05 = 0.95$ приймається альтернативна гіпотеза про те, що коефіцієнт кореляції r_{xy}=0.42 є статистично значущим.

2. Перевірка статистичної гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції за умови великих об'ємів вибірок.

За даними вимірювань місячної кількості опадів у травні на ст. Одеса (ряд X) та ст. Миколаїв (ряд Y) за період з 1894 по 1990 рр. (n = 89) був розрахований заздалегідь коефіцієнт кореляції. Його значення дорівнює 0.59. Оскільки об'єми вибірок великі, є підстави для перевірки гіпотези про статистичну значущість (вірогідність) коефіцієнт кореляції r_{xy} = 0.59 провести за допомогою фактичного критерію Стьюдента, який визначається формулою (5.28).

Для цього розрахуємо σ_r за формулою (5.29):

$$\sigma_r = \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{1 - 0.35}{\sqrt{88}} = 0.07.$$

Отже фактичне значення критерію Стьюдента дорівнює:

$$t = \frac{|r_{xy}|}{\sigma_r} = \frac{0.59}{0.07} = 8.43 \ .$$

За умов α =0.05 та $\nu = n - 1$=89–1=88, $t_{кр}$(0.05;88)=1.99 (додаток П).

Таким чином, $t > t_{кр}(\alpha, \nu)$ і гіпотеза H_0 про незначущість коефіцієнта кореляції відхиляється й приймається альтернативна гіпотеза H_1: коефіцієнт кореляції r_{xy}=0.59 є статистично значущим.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається статистичною гіпотезою та в чому полягає основний принцип її перевірки?
2. Що називається кореляційною залежністю між двома випадковими величинами?
3. Що є якісною характеристикою тісноти та форми кореляційного зв'язку між випадковими величинами?
4. Що є кількісною мірою тісноти та форми лінійної кореляційної залежності між двома випадковими величинами ?
5. За допомогою якого критерію перевіряється гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта кореляції?
6. Як розрахувати фактичне значення критерію Стьюдента для перевірки гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції за умови великих (малих) об'ємів вибірок? У якому випадку коефіцієнт кореляції буде статистично значущим?

7. В якому випадку слід будувати лінійне рівняння регресії, що відбиває кореляційну залежність між двома випадковими величинами?
8. Будувати чи ні лінійне рівняння регресії між випадковими величинами X та Y, якщо коефіцієнт кореляції r_{xy} дорівнює 0.26?
9. Які форми кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами Вам відомі?
10. Який вигляд має рівняння регресії, що характеризує лінійний кореляційний зв'язок між двома випадковими величинами?
11. Які статистичні оцінки і яких моментів розподілу випадкових величин необхідно знайти, щоб розрахувати коефіцієнт кореляції?
12. У яких межах змінюється коефіцієнт кореляції?
13. Який сенс рівня значущості та як визначається ця величина?
14. Дати визначення довірчої ймовірності та який вона має зв’язок з помилкою першого роду?
15. Як визначаються критичні області та області прийняття статистичних гіпотез?

Задачі

5.71. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.63, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об’ємами $n = m = 14$.

5.72. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.68, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об’ємами $n = m = 25$.

5.73. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.57, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об’ємами $n = m = 30$.

5.74. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.60, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об’ємами $n = m = 45$.

5.75. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.61, розрахованого на основі двох рядів середньодобової температури повітря з об'ємами $n = m = 40$.

5.76. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.55, розрахованого на основі двох рядів середньодобової температури повітря з об'ємами $n = m = 35$.

5.77. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.58, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної температури повітря з об'ємами $n = m = 28$.

5.78. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.49, розрахованого на основі двох рядів середньодобової температури повітря з об'ємами $n = m = 48$.

5.79. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.47, розрахованого на основі двох рядів місячної кількості опадів з об'ємами $n = m = 37$.

5.80. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.50, розрахованого на основі двох рядів відносної вологості повітря з об'ємами $n = m = 29$.

5.81. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.68, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об'ємами $n = m = 54$.

5.82. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.63, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об'ємами $n = m = 75$.

5.83. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.57, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об'ємами $n = m = 80$.

5.84. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.60, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об'ємами $n = m = 95$.

5.85. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.61, розрахованого на основі двох рядів середньодобової температури повітря з об'ємами $n = m = 90$.

5.86. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.54, розрахованого на основі двох рядів середньодобової температури повітря з об'ємами $n = m = 85$.

5.87. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.58, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної температури повітря з об'ємами $n = m = 78$.

5.88. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.49, розрахованого на основі двох рядів середньодобової температури повітря з об'ємами $n = m = 88$.

5.89. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.50, розрахованого на основі двох рядів місячної кількості опадів з об'ємами $n = m = 60$.

5.90. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність коефіцієнта кореляції r_{xy}=0.62, розрахованого на основі двох рядів середньої місячної відносної вологості повітря з об'ємами $n = m = 65$.

5.3. Побудова лінійного рівняння регресії та перевірка гіпотези про статистичну значущість його коефіцієнтів

Основні теоретичні положення

Якщо статистична оцінка коефіцієнта кореляції не є випадковою, приступають до побудови *лінійної регресійної моделі* вигляду (5.32) на основі статистичних сукупностей (5.4). А це означає, що треба знайти *оцінку рівняння* (5.32), тобто $\bar{y}(x) = ax + b$. Причому, коефіцієнти регресії a і b є статистичними оцінками коефіцієнтів *генерального рівняння регресії*: $\hat{A} = a$ і $\hat{B} = b$.

Зрозуміло, що отримана модель взаємозв'язку між випадковими величинами X та Y повинна бути адекватною тому процесу, який моделюється.

Можуть бути різні степені адекватності прогностичних моделей. Тому при моделюванні треба визначити кількісну міру адекватності. Таку *кількісну міру називають критерієм якості або функцією цілі.*

Критерій якості вибирають у залежності від характеру задачі, яка вирішується. При побудові статистичних моделей найчастіше використовують такий критерій:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 = min, \qquad (5.33)$$

де

y_i – ординати точок кореляційного поля;

$f(x_i)$ – ординати точок на лінії регресії при значенні незалежної змінної x_i.

Смисл критерію Δ^2 полягає у тому, що для опису взаємозв'язку між випадковими величинами X та Y вибирають такі параметри рівняння регресії $\bar{y}(x)$, які дають мінімум суми квадратів різниць між ординатами експериментальних точок і точок лінії регресії при відповідних значеннях змінної x. Тому метод, основою якого є критерій якості у вигляді (5.33), носить назву *метода найменших квадратів.* Рівняння (5.33) є функцією параметрів моделі, які підлягають визначенню.

Як відомо, умовний екстремум функції декількох змінних визначається шляхом зрівнювання до нуля частинних похідних цієї функції по незалежних змінних. Нехай, наприклад,

$$\bar{y}(x) = f(a, b, x), \qquad (5.34)$$

тобто функція регресії має два невідомих параметра a і b. Умови екстремуму визначаються відомими рівняннями:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = 0. \tag{5.35}$$

Розраховані за допомогою умов (5.35) параметри a і b надають дійсно мінімум критерію якості Δ^2. Як буде показано далі, операції (5.35) приводять до системи алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої дає шукані значення параметрів моделі. Ці *алгебраїчні рівняння називають нормальними*, а відповідну систему *системою нормальних рівнянь.*

Параметри вибраної регресійної моделі знаходять на основі вибірок випадкових величин X та Y. Тому вони є оцінками параметрів генерального рівняння регресії. Якщо вони отримані за методом найменших квадратів, то їх називають оцінками метода найменших квадратів.

Як відомо, лінійне рівняння регресії має вигляд:

$$\bar{y}(x) = ax + b, \tag{5.36}$$

де a і b – коефіцієнти регресії, які треба визначити на основі вибірок випадкових величин X та Y.

Для їх знаходження застосуємо метод найменших квадратів. Відповідний критерій якості має таку форму:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min. \tag{5.37}$$

Щоб отримати систему нормальних рівнянь, прирівняємо до нуля частинні похідні по a і b від критерію Δ^2:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0; \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \tag{5.39}$$

Після простих перетворень ми приходимо до системи алгебраїчних рівнянь:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \tag{5.40}$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \tag{5.41}$$

які дозволяють отримати спочатку значення коефіцієнта a:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{5.42}$$

Індекси сумування в рівнянні (5.42) тимчасово опущені.

Поділимо чисельник і знаменник рівняння (5.42) на n^2. Будемо мати :

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \frac{1}{n}\sum y_i}{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

або

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}. \tag{5.43}$$

Виконуючи ряд перетворень отримаємо такі рівняння:

$$\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = K_{xy}\,, \tag{5.44}$$

$$\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = S_x^2. \tag{5.45}$$

K_{xy} *– носить назву коваріації випадкових величин* X і Y.

Відомо, що

$$K_{xy} = r_{xy} S_x S_y\,, \tag{5.46}$$

де r_{xy} *– статистичний параметр, який має назву* ***коефіцієнта кореляції*** (див. підрозділ 5.1).

Враховуючи рівності (5.44)–(5.46), отримаємо формулу для обчислення кутового коефіцієнта лінійного рівняння регресії:

$$a = r_{xy}\frac{S_y}{S_x}\ . \tag{5.47}$$

Аналогічно, для коефіцієнта регресії b маємо:

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\ . \tag{5.48}$$

Формулу (5.48) можна переписати таким чином:

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \frac{\sum y_i}{n} - \frac{\sum x_i}{n} n\sum x_i y_i + \frac{1}{n}(\sum x_i)^2 \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} - \frac{\frac{1}{n}(\sum x_i)^2 \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} =$$

$$= \bar{y}\frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} - \bar{x}\frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

або, після врахування формули (5.42) та скорочень, маємо:

$$b = \bar{y} - a\bar{x}\,. \tag{5.49}$$

Після знаходження коефіцієнтів лінійної регресії на основі випадкових вибірок необхідно перевірити гіпотези про статистичну значущість a і b.

Гіпотеза основна та альтернативна формулюються так:

H_0: На заданому рівні значущості α $A = 0;\ \ B = 0;$

відповідно $\hat{A} = a = 0;\ \ \hat{B} = b = 0.$

H_1: На заданому рівні значущості α $A \neq 0;\ \ B \neq 0;$

відповідно $\hat{A} = a \neq 0;\ \ \hat{B} = b \neq 0.$

Гіпотези про статистичну значущість коефіцієнтів лінійної регресійної моделі перевіряють на рівні значущості α за допомогою критерію Стьюдента, аналогічно тому, як це проводилося для коефіцієнта кореляції (див. підрозділ 5.2). При цьому:

$$t = \frac{|a|}{\sigma_a}, \tag{5.50}$$

$$t = \frac{|b|}{\sigma_b} \ . \tag{5.51}$$

Стандартні відхили коефіцієнтів регресії σ_a та σ_b дорівнюють:

$$\sigma_a = \frac{S_y}{S_x\sqrt{n}} \ , \tag{5.52}$$

$$\sigma_b = \frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{1}{C_{V_x}^2}\right]^{1/2}, \tag{5.53}$$

де

$$C_{V_x} = \frac{S_x}{|\bar{x}|} \ - \textbf{\textit{коефіцієнт варіації.}} \tag{5.54}$$

Висновок про статистичну незначущість того чи іншого коефіцієнта регресії роблять у тому випадку, коли виявляється, що $t < t_{кр}(\alpha, \nu)$. У протилежному випадку, тобто, якщо $t > t_{кр}(\alpha, \nu)$, відповідний коефіцієнт регресії на рівні значущості α є статистично значущим. А це дає підстави виразити кореляційний зв'язок між двома випадковими величинами X та Y лінійним рівнянням регресії $\bar{y}(x) = ax + b$.

Розв'язання типової задачі. ***Побудова лінійного рівняння регресії між двома випадковими величинами.***

Провести дослідження кореляційної залежності між двома рядами місячної кількості опадів у травні на ст. Роздільна (ряд X) та ст. Любашівка (ряд Y) і побудувати регресійну модель, яка б вірогідно характеризувала статистичний зв'язок між цими величинами.

Почнемо дослідження з кореляційного графіка, який дає змогу якісно оцінити тісноту та форму кореляційної залежності. Кореляційне поле представлено на рис. 5.2. Як випливає з рис. 5.2, кореляційна залежність між рядами опадів є й вона тісна, пряма та лінійна. Далі на основі

статистичних сукупностей заздалегідь був розрахований коефіцієнт кореляції r_{xy}. Він в нашому прикладі дорівнює 0.63. Крім того, провели перевірку гіпотези про статистичну значущість отриманого коефіцієнта кореляції. Результат цієї перевірки дозволяє стверджувати, що з ймовірністю 95% значення r_{xy}=0.63 не є випадковою величиною.

Тому маємо всі підстави вважати статистичну залежність між двома рядами місячної кількості опадів у травні на зазначених станціях лінійною й описати її рівнянням регресії вигляду $\bar{y}(x) = ax + b$.

Статистичні оцінки моментів розподілу місячної кількості опадів на ст. Роздільна складають: $\bar{x}$ = 49 мм, S_x = 25.5 мм;

на ст. Любашівка: $\bar{y}$ = 49 мм, S_y = 26.0 мм. Об'єми рядів $n = m = 43$.

Враховуючи значення статистичних оцінок моментів розподілу, необхідних для отримання коефіцієнтів a і b за формулами (5.47) та (5.49), будемо мати:

$$a = 0.63\frac{26.0}{25.5} = 0.64\ ;$$

$$b = 49 - 0.64 \cdot 49 = 17.64.$$

Отже, рівняння регресії, яке відбиває статистичну залежність між рядами місячної кількості опадів у травні на ст. Роздільна та ст. Любашівка має вигляд:

$$\bar{y}(x) = 0.64x + 17.64.$$

Щоб удосконалитися у вірогідності побудованої регресійної моделі треба перевірити гіпотези про статистичну значущість отриманих коефіцієнтів: $a = 0.64$ та $b = 17.64$.

Як відомо, для перевірки цих гіпотез використовується критерій Стьюдента у вигляді (5.50) та (5.51). Щоб його розрахувати, треба знайти значення σ_a і σ_b за формулами (5.52) та (5.53) відповідно.

Маємо:

$$\sigma_a = \frac{S_y}{S_x\sqrt{n}} = \frac{26}{25.5\sqrt{43}} = \frac{26}{167.2} = 0.16;$$

$$\sigma_b = \frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{\bar{x}^2}{S_x^2}\right]^{1/2} = \frac{26}{\sqrt{43}}\left[1 + \frac{49^2}{650}\right]^{1/2} = \frac{56.32}{6.56} = 8.58.$$

Отже

$$t_a = \frac{|a|}{\sigma_a} = \frac{0.64}{0.16} = 4.0 \ ; \qquad t_b = \frac{|b|}{\sigma_b} = \frac{17.64}{8.58} = 2.06 .$$

За умов рівня значущості α=0.05 та числа степенів вільності $\nu = n - 1$=42, $t_{кр}(0.05;42)$=2.02 (додаток П). Виходить, що:

$$t_a > t_{кр}(\alpha,\nu) \quad \text{і} \quad t_b > t_{кр}(\alpha,\nu).$$

Таким чином, гіпотеза H_0 про незначущість статистичних оцінок коефіцієнтів регресії a і b відхиляється й приймається альтернативна гіпотеза H_1: коефіцієнти a=0.64 та b=17.64 статистично значущі.

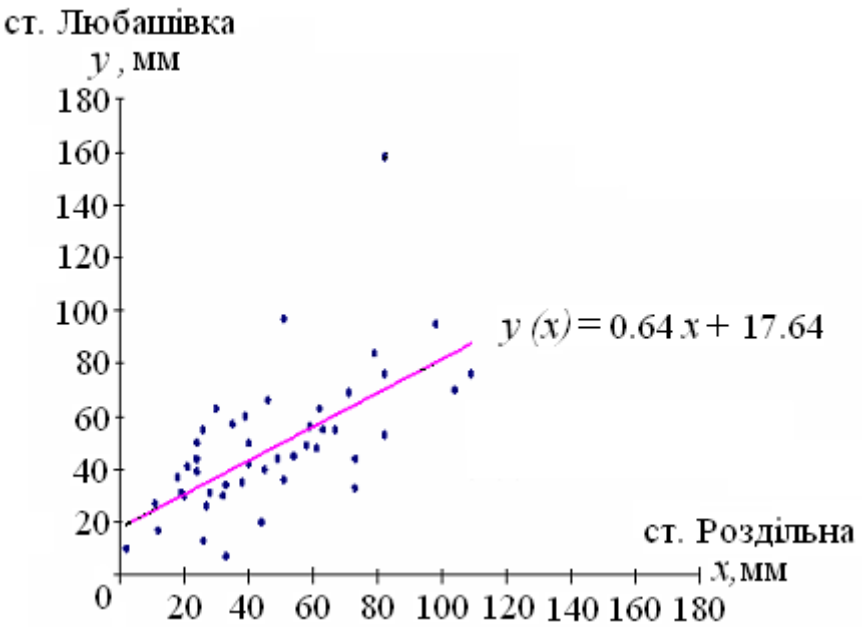


Рисунок 5.2 – Графік кореляційного зв’язку та рівняння регресії між рядами місячної кількості опадів (травень)

На рис. 5.2 представлені діаграма розсіювання точок (поле кореляції) між двома рядами місячної кількості опадів у травні та побудоване лінійне рівняння регресії, що виражає тісний, прямий, лінійний кореляційний зв'язок між випадковими величинами, що досліджувалися.

Запитання для самоперевірки

1. Які види зв’язків можуть спостерігатися між двома випадковими величинами?
2. Яка залежність між двома випадковими величинами називається функціональною? стохастичною?
3. Дайте визначення кореляційної залежності між двома випадковими величинами.
4. В якому випадку кореляційна залежність між двома випадковими величинами буде функціональною?
5. Який розподіл називається умовним? Що є умовним математичним сподіванням? умовною дисперсією?
6. Що є якісною характеристикою тісноти та форми кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами?
7. Які форми кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами Вам відомі?
8. Який вигляд має рівняння лінійної регресії та який сенс його коефіцієнтів?
9. За яких умов слід будувати лінійне рівняння регресії, що відбиває кореляційну залежність між двома випадковими величинами?
10. Який вигляд має рівняння регресії, що характеризує лінійний кореляційний зв'язок між двома випадковими величинами?
11. Які статистичні оцінки і яких моментів розподілу випадкових величин використовуються при розрахунках коефіцієнта кореляції?
12. Який метод використовується при розрахунках коефіцієнтів рівнянь регресії? Що є критерієм якості регресійної моделі?
13. Записати рівняння, що характеризує метод найменших квадратів та пояснити його сенс.
14. Як розрахувати кутовий коефіцієнт лінійного рівняння регресії та його вільний член?
15. Що називається статистичною гіпотезою та в чому полягає основний принцип її перевірки?
16. За допомогою якого критерію перевіряється статистична гіпотеза про значущість коефіцієнтів лінійного рівняння регресії?
17. Від яких величин залежить критичне значення критерію Стьюдента при перевірках статистичних гіпотез про значущість коефіцієнтів лінійного рівняння регресії?
18. За яких умов статистичні оцінки коефіцієнтів лінійного рівняння регресії будуть значущими та з якою ймовірністю можна це стверджувати?

Задачі

Скласти рівняння регресії між двома рядами випадкових величин X та Y вигляду $\bar{y}(x) = ax + b$ та на рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотези про статистичну значущість отриманих коефіцієнтів лінійного рівняння регресії, якщо відомо:

5.91. $\bar{y} = 1.9$; $S_y = 1.45$; $n = 35$;
$\bar{x} = 2.8$; $S_x = 1.87$; $r_{xy} = 0.87$.

5.92. $\bar{y} = 18.0$; $S_y = 3.0$; $n = 60$;
$\bar{x} = 15.0$; $S_x = 2.5$; $r_{xy} = 0.70$.

5.93. $\bar{y} = 8.0$; $S_y = 1.0$; $n = 40$;
$\bar{x} = 10.0$; $S_x = 1.5$; $r_{xy} = 0.80$.

5.94. $\bar{x} = 27$; $S_x = 21$; $n = 39$;
$\bar{y} = 26$; $S_y = 18$; $r_{xy} = 0.89$.

5.95. $\bar{x} = 26$; $S_x = 25$; $n = 38$;
$\bar{y} = 26$; $S_y = 20$; $r_{xy} = 0.88$.

5.96. $\bar{x} = 26$; $S_x = 25$; $n = 39$;
$\bar{y} = 24$; $S_y = 20$; $r_{xy} = 0.92$.

5.97. $\bar{y} = 27$; $S_y = 20$; $n = 39$;
$\bar{x} = 27$; $S_x = 20$; $r_{xy} = 0.68$.

5.98. $\bar{x} = 85$; $S_x = 2.1$; $n = 45$;
$\bar{y} = 83$; $S_y = 3.4$; $r_{xy} = 0.85$.

5.99. $\bar{x} = 76$; $S_x = 5.7$; $n = 30$;
$\bar{y} = 74$; $S_y = 6.2$; $r_{xy} = 0.99$.

5.100. $\bar{x} = 26$; $S_x = 24.9$; $n = 38$;
$\bar{y} = 23$; $S_y = 19.6$; $r_{xy} = 0.93$.

5.101. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	84	86	82	78	84	80	79	84	81	86
Вилкове	86	87	84	84	86	84	81	86	82	85

5.102. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	76	66	76	76	74	73	75	83	79	79
Вилкове	74	70	76	76	77	73	77	79	77	75

5.103. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	68	67	65	74	72	63	66	76	72	69
Вилкове	71	69	71	77	73	70	70	73	72	72

5.104. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	75	73	77	65	76	69	80	72	77	74
Вилкове	76	75	82	72	79	74	84	77	80	78

5.105. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	84	86	82	78	84	80	79	84	81	86
Очаков	86	87	80	79	82	85	81	81	83	87

5.106. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	76	66	76	76	74	73	75	83	79	79
Очаков	75	65	72	74	72	74	75	82	76	77

5.107. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	68	67	65	74	72	63	66	76	72	69
Очаков	66	66	64	70	71	62	67	77	68	71

5.108. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Одеса	75	73	77	65	76	69	80	72	77	74
Очаков	78	74	78	68	80	68	77	75	77	73

5.109. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	86	87	84	84	86	84	81	86	82	85
Очаков	86	87	80	79	82	85	81	81	83	87

5.110. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	74	70	76	76	77	73	77	79	77	75
Очаков	75	65	72	74	72	74	75	82	76	77

5.111. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	71	69	71	77	73	70	70	73	72	72
Очаков	66	66	64	70	71	62	67	77	68	71

5.112. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	76	75	82	72	79	74	84	77	80	78
Очаков	78	74	78	68	80	68	77	75	77	73

5.113. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	86	93	85	86	79	86	87	80	79	82
Одеса	84	92	81	83	81	84	86	82	78	84

5.114. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	83	80	70	66	76	75	65	72	74	72
Одеса	82	83	72	67	76	76	66	76	76	74

5.115. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	64	64	57	66	72	66	66	64	70	71
Одеса	69	65	57	61	69	68	67	65	74	72

5.116. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Очаков	72	81	84	84	65	78	74	78	68	80
Одеса	69	84	82	80	62	75	73	77	65	76

5.117. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у січні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	86	89	84	84	82	86	87	84	84	86
Одеса	84	92	81	83	81	84	86	82	78	84

5.118. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у квітні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	80	82	70	67	74	74	70	76	76	77
Одеса	82	83	72	67	76	76	66	76	76	74

5.119. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у липні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	71	70	65	68	73	71	69	71	77	73
Одеса	69	65	57	61	69	68	67	65	74	72

5.120. Розрахувати статистичні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, яке відбиває лінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної відносної вологості повітря у жовтні:

Станція	Відносна вологість повітря, %									
Вилкове	72	83	84	81	73	76	75	82	72	79
Одеса	69	84	82	80	62	75	73	77	65	76

5.121. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Болград у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.50x + 10.90$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=40.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.122. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Ізмаїл у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.51x + 12.23$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=39.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=25 мм;

5.123. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Роздільна у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.67x + 9.10$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=40.

$\bar{y}$=27 мм; S_y=20 мм;

5.124. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Сарата у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.52x + 10.41$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=40.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=23 мм;

5.125. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Вилкове у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.42x + 14.96$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.126. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.60x + 8.72$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=39.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.127. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Болград - Ізмаїл у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.97x + 2.90$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=20 мм; n=39.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=25 мм;

5.128. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Болград - Затишшя у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.53x + 13.23$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=20 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=18 мм;

5.129. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Болград - Роздільна у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.54x + 13.84$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=20 мм; n=40.

$\bar{y}$=27 мм; S_y=20 мм;

5.130. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Болград - Сарата у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.74x + 6.28$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=20 мм; n=40.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=23 мм;

5.131. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Болград - Вилкове у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.63x + 10.85$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=20 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.132. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Болград – Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.76x + 5.86$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=20 мм; n=39.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.133. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Ізмаїл – Затишшя у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.38x + 15.90$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=25 мм; n=39.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=18 мм;

5.134. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Ізмаїл – Роздільна у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.51x + 13.30$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=25 мм; n=39.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.135. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Ізмаїл – Сарата у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.75x + 4.03$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=25 мм; n=39.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=22 мм;

5.136. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Затишшя – Роздільна у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.84x + 4.87$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=18 мм; n=40.

$\bar{y}$=27 мм; S_y=20 мм;

5.137. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Затишшя - Сарата у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.83x + 2.63$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=18 мм; n=40.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=23 мм;

5.138. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Затишшя - Вилкове у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.64x + 9.47$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=18 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.139. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Затишшя - Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.79x + 3.62$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=18 мм; n=39.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.140. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Роздільна - Сарата у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.83x + 1.96$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=20 мм; n=40.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=23 мм;

5.141. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Роздільна - Вилкове у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.65x + 8.68$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=20 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.142. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Роздільна - Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.66x + 6.23$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=20 мм; n=39.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.143. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Сарата - Вилкове у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.76x + 7.52$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=23 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.144. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Сарата - Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.74x + 5.87$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=24 мм; S_x=23 мм; n=39.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.145. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Вилкове - Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.86x + 1.36$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=20 мм; n=39.

$\bar{y}$=24 мм; S_y=20 мм;

5.146. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Любашівка - Затишшя у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.74x + 6.39$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=27 мм; S_x=21 мм; n=40.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=18 мм;

5.147. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Ізмаїл - Вилкове у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.73x + 6.77$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=25 мм; n=39.

$\bar{y}$=26 мм; S_y=20 мм;

5.148. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами місячної кількості опадів на ст. ст. Ізмаїл - Кілія у жовтні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 0.73x + 4.33$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=26 мм; S_x=25 мм; n=38.

$\bar{y}$=23 мм; S_y=20 мм;

5.149. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами відносної вологості повітря на ст. ст. Одеса - Очаков у січні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 1.08x - 8.08$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=76 %; S_x=6 %; n=30.

$\bar{y}$=74 %; S_y=6 %;

5.150. Лінійний кореляційний зв'язок між рядами відносної вологості повітря на ст. ст. Одеса - Вилкове у січні описується рівнянням регресії $\bar{y}(x) = 1.38x - 34.30$. На рівні значущості α=0.05 перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність цієї регресійної моделі, якщо відомо:

$\bar{x}$=85 %; S_x=2 %; n=45.

$\bar{y}$=83 %; S_y=3 %;

5.4. Побудова нелінійних рівнянь регресії

Основні теоретичні положення

Крім лінійної зустрічаються й *нелінійні кореляційні зв'язки*, які відбиваються відповідними рівняннями регресії. Серед них для гідрометеорологічних випадкових величин часто реалізується, насамперед, *квадратичне рівняння регресії*:

$$\bar{y}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ . \qquad (5.55)$$

Відповідно до методу найменших квадратів, критерій якості такої моделі дорівнює:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)]^2 = \min \ . \qquad (5.56)$$

Систему нормальних рівнянь отримаємо за допомогою операцій :

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_0} = 0; \qquad \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_1} = 0; \qquad \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_2} = 0, \qquad (5.57)$$

які дають систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \end{cases} . \qquad (5.58)$$

Розв'язок цієї системи дає шукані коефіцієнти регресії a_0, a_1 і a_2.

Аналогічним чином знаходяться і коефіцієнти кубічного рівняння регресії.

Розв'язання типової задачі. Приклад 1. ***Побудова параболічного рівняння регресії між двома випадковими величинами.***

Як показали дослідження, на метеорологічній станції Миколаїв на визначених глибинах ґрунту середня місячна температура у червні має значення, які представлені в табл. 5.3.

Таблиця 5.3 – Середня місячна температура ґрунту (Y) на різних глибинах (X) (ст. Миколаїв, червень)

X, м	0.2	0.4	0.8	1.2	1.6	2.4	3.2
Y, °C	22.7	21.6	19.2	17.7	16.4	14.0	12.4

Розв'язання цієї задачі треба починати з побудови діаграми кореляційного поля. За даними табл. 5.3 побудовано графік (рис. 5.3), який дає підстави за методом найменших квадратів скласти рівняння регресії вигляду (5.55), що відбиває зазначену залежність між температурою і глибиною ґрунту на ст. Миколаїв у червні.

Застосування методу найменших квадратів приводить до системи нормальних рівнянь (5.58). Розрахунки коефіцієнтів при невідомих a_0, a_1 і a_2 у рівняннях системи (5.58) наводяться в табл. 5.4.

Таблиця 5.4 – Порядок розрахунків коефіцієнтів системи нормальних рівнянь (ст. Миколаїв, червень)

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0.2	0.04	0.008	0.0016	22.7	4.54	0.908
2	0.4	0.16	0.064	0.0256	21.6	8.64	3.456
3	0.8	0.64	0.512	0.4096	19.2	15.36	12.288
4	1.2	1.44	1.728	2.0736	17.7	21.24	25.488
5	1.6	2.56	4.096	6.5536	16.4	26.24	41.984
6	2.4	5.76	13.824	33.1776	14.0	33.60	80.64
7	3.2	10.24	32.768	104.86	12.4	39.68	126.98
$\sum$	9.8	20.84	53.000	147.10	124.00	149.30	291.71

Отже маємо таку систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} 20.84a_0 + 53.00a_1 + 147.10a_2 = 291.74 \\ 9.80a_0 + 20.84a_1 + 53.00a_2 = 149.30 \\ 7.00a_0 + 9.80a_1 + 20.84a_2 = 124.00 \end{cases} . \qquad (5.59)$$

Розв’язання цієї системи будемо будувати за таким *алгоритмом*:

– розділимо обидві частини кожного рівняння на відповідний коефіцієнт при a_0.

Будемо мати:

$$\begin{cases} a_0 + 2.54a_1 + 7.06a_2 = 14.00 \\ a_0 + 2.13a_1 + 5.41a_2 = 15.23 \\ a_0 + 1.40a_1 + 2.98a_2 = 17.71 \end{cases} ; \qquad (5.60)$$

– віднімемо від першого рівняння системи друге рівняння, а від другого - третє, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0.44a_1 + 1.65a_2 = -1.23 \\ 0.73a_1 + 2.43a_2 = -2.48 \end{cases} ; \qquad (5.61)$$

– з першого рівняння системи маємо:

$$a_1 = 3.75a_2 + 2.80 \; ; \qquad (5.62)$$

– підставимо значення a_1 з (5.62) у друге рівняння системи (5.61). Отримаємо:

$$5.17a_2 = -4.52 \quad . \tag{5.63}$$

Звідки

$$a_2 = -0.87 \ ;$$

– тепер за допомогою рівняння (5.62) розраховуємо коефіцієнт a_1 , а за допомогою, наприклад, третього рівняння системи (5.60) коефіцієнт a_0. Вони дорівнюють: $a_1 = -0.46$; $a_0 = 20.94$.

Таким чином, шукане рівняння регресії має вигляд:

$$\overline{y}(x) = 20.94 - 0.46x - 0.87x^2. \tag{5.64}$$

Щоб удосконалитися у тому, що аналітична апроксимація (5.55) задовільно вирівнює експериментальні дані, треба за формулою (5.64) у відповідній системі координат побудувати графік функції (5.64) в області значень змінних x та y, що визначаються з табл. 5.3, і на нього нанести експериментальні точки.

Як видно з рис. 5.3, експериментальні дані не дуже відрізняються від значень, отриманих за рівнянням регресії (5.64), хоча з форми залежностей, що описуються функцією регресії, з одного боку, і експериментальною кривою, з іншого, розрізняються у значній мірі. Більш правильно було б застосувати для апроксимації екпериментальних значень цієї залежності експоненціальну функцію регресії. Вона має вигляд:

$$\overline{y}(x) = ae^{bx}. \tag{5.65}$$

Логарифмічне перетворення рівняння регресії (5.65) зводить його до лінійного вигляду:

$$\ln \overline{y}\left(x\right) = \ln a + bx \quad . \tag{5.66}$$

Якщо до останнього застосувати метод найменших квадратів, то отримаємо такі формули для статистичного оцінювання коефіцієнтів регресії:

$$b = r_{\ln y, x} \frac{S_{\ln y}}{S_x} \ , \tag{5.67}$$

$$a = e^c \ , \tag{5.68}$$

$$c = \overline{\ln y} - b\overline{x} \ , \tag{5.69}$$

де $r_{\ln y,x}$–коефіцієнт кореляції між значеннями натуральних логарифмів випадкової величини Y і відповідними значеннями випадкової величини X;

$S_{\ln y}$ – середній квадратичний відхил логарифмів величини y;

$\overline{\ln y}$ – середнє значення логарифмів величини y;

$\bar{x}$ і S_x – середнє значення і середній квадратичний відхил випадкової величини X, відповідно.

Розв'язання типової задачі. Приклад 2. ***Побудова експоненціального рівняння регресії.***

Побудову експоненціального рівняння регресії будемо проводити за даними попередньої задачі, а всі розрахунки зведемо в табл. 5.5.

Статистичне оцінювання необхідних параметрів наводиться нижче :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{9.8}{7} = 1.4; \qquad \ln y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n} = \frac{19.997}{7} = 2.854;$$

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} = \frac{7.12}{7} = 1.017; \quad S_x = \sqrt{1.017} = 1.0085;$$

$$S_{\ln y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - \overline{\ln y}\right)^2}{n} = \frac{0.2987}{7} = 0.04267;$$

$$S_{\ln y} = \sqrt{0.04267} = 0.2065;$$

$$K_{\ln y,x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - \overline{\ln y}\right) \cdot \left(x_i - \bar{x}\right)}{n} = \frac{-1.4328}{7} = -0.2045;$$

$$r_{\ln y,x} = \frac{K_{\ln y,x}}{S_{\ln y} \cdot S_x} = -0.98.$$

За формулами (5.67)–(5.69) отримаємо шукані коефіцієнти регресії:

$$b = -0.98 \frac{0.2065}{1.0085} = -0.20;$$

$$c = 2.854 - \left(-0.20\right) \cdot 1.40 = 3.134;$$

$$a = e^{3.134} = 22.96.$$

Таблиця 5.5 – Порядок розрахунків коефіцієнтів експоненціального рівняння регресії (ст. Миколаїв, червень)

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	$\ln y_i - \overline{\ln y}$	$\left(\ln y_i - \overline{\ln y}\right)^2$	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$\left(\ln y_i - \overline{\ln y}\right)\times$ $\times\left(x_i - \overline{x}\right)$	$\overline{y}\left(x_i\right)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	0.2	22.7	3.122	0.268	0.07182	-1.20	1.44	-0.3216	22.04
2	0.4	21.6	3.073	0.219	0.04796	-1.00	1.00	-0.2190	21.19
3	0.8	19.2	2.955	0.101	0.01620	-0.60	0.36	-0.0606	19.6
4	1.2	17.7	2.873	0.019	0.00036	-0.20	0.04	-0.0004	18.6
5	1.6	16.4	2.797	-0.057	0.00325	0.20	0.04	-0.0114	16.7
6	2.4	14.0	2.639	-0.215	0.04623	1.00	1.00	-0.2150	14.2
7	3.2	12.4	2.518	-0.336	0.11290	1.80	3.24	-0.6048	12.1
$\sum$	9.8		19.997		0.2987		7.12	-1.4328	

Отже маємо експоненціальне рівняння регресії, яке описує нелінійний кореляційний зв'язок між рядами середньої місячної температури ґрунту та глибинами на ст. Миколаїв:

$$\overline{y}(x) = 22.96e^{-0.20x}. \qquad (5.70)$$

Значення умовного середнього випадкової величини Y, що отримані за рівнянням регресії (5.70), наводяться в останньому стовпчику табл. 5.5. На рис. 5.3 утримується й графік функції (5.70). Порівняння експериментальних значень випадкової величини Y для величин $x_i (i = \overline{1.7})$ з відповідними значеннями умовних середніх $\overline{y}(x_i)$ свідчить про те, що вони незначно відрізняються одне від одного.

Побудова експоненціального рівняння регресії проводилася на основі тих же вихідних даних, що і квадратичного рівняння регресії. З рис. 5.3 видно, що дійсно експоненціальне рівняння регресії більш точно описує кореляційний зв'язок між двома рядами випадкових величин, що розглядалися, ніж квадратичне рівняння.

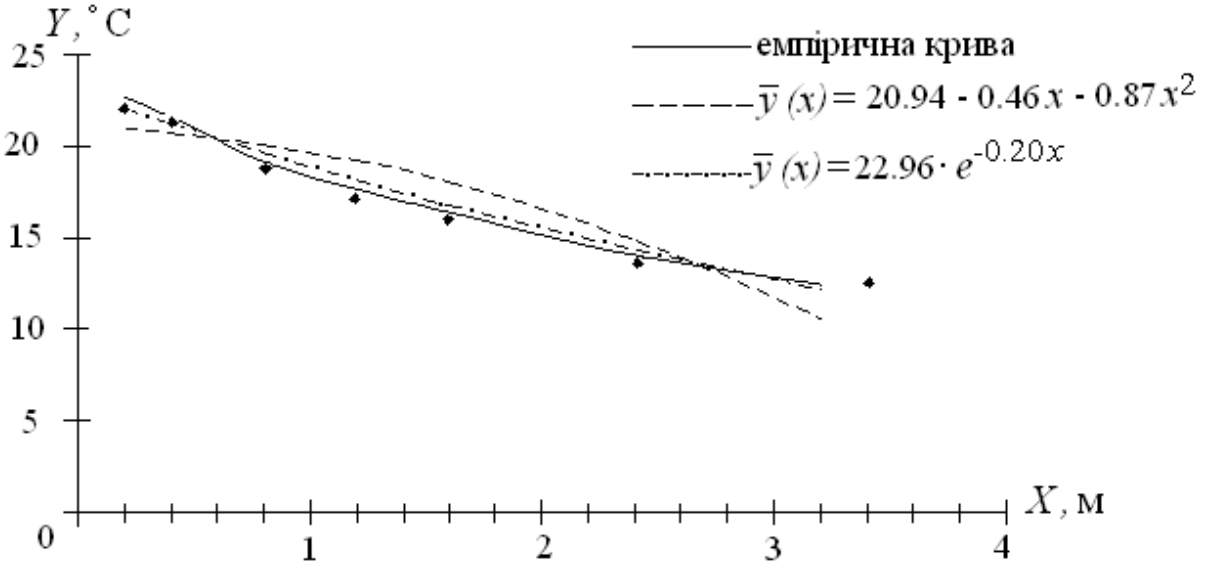


Рисунок 5.3 – Графік кореляційного зв’язку та рівняння регресії між середньою місячною температурою грунту (Y) та глибиною (X)

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення кореляційної залежності між двома випадковими величинами.
2. Що є якісною характеристикою тісноти та форми кореляційного зв'язку між двома випадковими величинами?
3. Що є кількісною мірою тісноти та форми кореляційного зв'язку між двома випадковими величинами?
4. Які форми кореляційного зв'язку між двома випадковими величинами Вам відомі?
5. Які види нелінійних рівнянь регресії зустрічаються при дослідженнях статистичної залежності між двома випадковими величинами? Навести приклади.
6. Який метод використовується при розрахунках коефіцієнтів рівнянь регресії?
7. Що є критерієм якості регресійної моделі?
8. Записати метод найменших квадратів для параболічного рівняння регресії.
9. Як знайти коефіцієнти експоненціального рівняння регресії?
10. Що є умовним математичним сподіванням та як отримати його статистичну оцінку?

Задачі

5.151. Побудувати рівняння регресії між рядами відносної вологості повітря (%) у двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	73	54	85	59	90	63	64	93	50	68
Y	62	45	72	48	82	50	52	89	48	55

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	80	60	68	92	90	95	65	86	85	69	79	78	55	75
Y	68	50	52	85	75	90	55	75	68	59	65	62	49	58

5.152. Побудувати рівняння регресії між рядами місячної кількості опадів (мм) у двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	42	46	39	55	50	10	33	20	50	48
Y	30	35	30	55	37	8	18	10	45	40

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	57	20	30	40	56	24	53	25	28	55	35	43	37	45
Y	50	15	20	25	55	13	50	20	15	46	26	34	25	30

5.153. Побудувати рівняння регресії між рядами швидкості вітру (м/с) у двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	5.5	3.0	12.0	7.0	1.0	10.0	9.0	4.8	5.0	8.1
Y	2.8	3.5	0.5	1.0	9.0	0.7	0.8	2.3	2.0	1.1

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17
X	6.0	2.5	6.4	1.1	2.1	6.5	1.8
Y	1.5	4.0	1.5	10.1	4.5	1.3	5.5

5.154. Побудувати рівняння регресії між рядами середньодобової температури повітря (°С) у двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	22.0	20.0	15.5	17.0	16.4	19.0	18.1	16.5	13.0	16.0
Y	10.5	10.7	12.8	11.0	11.5	10.8	11.1	11.3	13.5	11.5

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17
X	14.8	15.0	11.8	11.1	12.5	11.0	12.1
Y	12.3	12.0	15.5	20.1	14.0	19.0	14.5

5.155. Побудувати рівняння регресії між рядами швидкості вітру (м/с) в двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	10.0	9.5	7.2	2.0	8.2	9.0	2.0	8.5	2.5	3.5
Y	2.0	4.0	6.8	9.0	5.0	5.8	9.5	5.5	10.0	8.5

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	3.0	7.0	8.0	7.0	6.5	7.8	4.0	3.0	6.0	5.0
Y	10.0	7.0	6.2	7.2	7.8	6.5	9.1	9.5	8.0	8.5

5.156. Побудувати рівняння регресії між рядами середньої місячної температури повітря (°С) у двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	18.3	19.5	12.3	17.0	18.1	20.1	12.6	13.1	12.1	14.2
Y	15.2	14.1	19.4	16.8	15.1	12.2	20.0	19.5	19.6	19.3

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	15.1	19.1	17.7	13.5	13.2	18.2	16.7	16.2	17.1	17.2
Y	18.6	15.9	16.5	18.5	20.3	16.3	17.9	18.1	16.7	17.4

5.157. Побудувати рівняння регресії між рядами швидкості вітру (м/с) в двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	2.4	2.8	4.2	3.0	5.5	1.5	2.0	2.5	3.5	1.0
Y	2.1	1.5	1.3	1.9	0.7	3.7	2.7	2.8	1.7	6.6

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
X	3.8	3.9	4.4	1.0	1.9	3.4	4.0	4.7	1.5	1.2	4.9
Y	1.0	1.4	1.8	6.0	3.5	1.3	1.8	1.3	4.5	5.0	0.8

5.158. Побудувати рівняння регресії між рядами меридіональної складової швидкості вітру (м/с) в двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0.9	-0.7	-1.6	-1.0	-5.0	-3.0	-2.6	-1.2	-3.7	-2.5
Y	-1.6	-3.1	-1.1	-2.2	-0.4	-0.5	-1.1	-1.3	-1.0	-0.6

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	-1.8	-1.1	-0.8	-0.4	-2.2	-3.1	-3.5	-2.3	-0.6	-0.5
Y	-1.5	-2.0	-1.7	-5.1	-0.7	-1.0	-0.5	-1.2	-3.9	-4.5

5.159. Побудувати рівняння регресії між рядами швидкості вітру (м/с) в двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3.7	3.3	6.3	4.5	6.1	6.2	1.3	4.1	3.8	5.0
Y	1.7	2.0	6.3	2.5	4.9	5.3	0.8	2.1	2.5	3.2

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
X	4.8	5.7	5.1	5.8	5.5	4.3	1.5	2.5	1.8	3.2	2.6
Y	3.5	5.0	4.1	4.5	4.0	3.0	1.3	1.3	0.9	1.5	1.7

5.160. Побудувати рівняння регресії між рядами зональної складової швидкості вітру (м/с) в двох пунктах вимірювань (X і Y), якщо відомо:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-12.5	-13.4	-11.0	-10.5	-13.0	-10.6	-12.0	-11.3	-10.6	-14.9
Y	-11.2	-10.5	-11.5	-15.0	-10.4	-14.0	-11.6	-11.2	-13.2	-10.3

№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	-13.1	-13.7	-12.6	-12.1	-10.4	-10.8	-11.5	-10.9	-11.2	-12.2
Y	-11.1	-11.0	-10.6	-10.8	-14.4	-11.8	-11.0	-12.2	-11.9	-11.5

5.5. Задачі *

5.161. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Одеса – Миколаїв за період з 1936 – 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.18, Б.20.

5.162. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Миколаїв - Вознесенськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.19, Б.20.

5.163. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Одеса - Вознесенськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.18, Б.19.

5.164. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Комісарівка - Кіровоград за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.12, Б.13.

5.165. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Кіровоград - Вознесенськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.12, Б.19.

5.166. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Лубни - Ромни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.15, Б.16.

5.167. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Лубни - Чернігів за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.15, Б.17.

5.168. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Ромни - Чернігів за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.16, Б.17.

5.169. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Рівне - Чернігів за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.11, Б.17.

5.170. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Старобільськ - Ромни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.14, Б.16.

5.171. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Старобільськ - Миколаїв за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.14, Б.20.

5.172. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Рівне - Кіровоград за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.11, Б.12.

5.173. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Комісарівка - Старобільськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.13, Б.14.

5.174. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Комісарівка - Лубни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.13, Б.15.

5.175. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у липні на ст. ст. Кіровоград - Лубни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.12, Б.15.

5.176. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Одеса - Миколаїв за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.8, Б.10.

5.177. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити заключення про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Миколаїв - Вознесенськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.9, Б.10.

5.178. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Одеса - Вознесенськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.8, Б.9.

5.179. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Комісарівка - Кіровоград за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.2, Б.3.

5.180. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Кіровоград - Вознесенськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.2, Б.9.

5.181. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Лубни - Ромни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.5, Б.6.

5.182. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Лубни - Чернігів за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.5, Б.7.

5.183. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Ромни - Чернігів за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.6, Б.7.

5.184. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Рівне - Чернігів за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.1, Б.7.

5.185. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Старобільськ - Ромни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.4, Б.6.

5.186. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Старобільськ - Миколаїв за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.4, Б.10.

5.187. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Рівне - Кіровоград за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.1, Б.2.

5.188. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Комісарівка - Старобільськ за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.3, Б.4.

5.189. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Комісарівка - Лубни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.3, Б.5.

5.190. Використовуючи алгоритм дослідження статистичної залежності між двома випадковими величинами, з ймовірністю 95% зробити висновок про форму та тісноту кореляційного зв'язку між рядами місячної кількості опадів у січні на ст. ст. Кіровоград - Лубни за період з 1936 - 1990 рр. Якщо знайдений зв'язок не є випадковим, виразити його рівнянням регресії. Вихідні дані для розв'язання задачі містяться в таблицях Б.2, Б.5.

6. ІНТЕРВАЛЬНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ

Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності, що розглядалися у попередніх розділах, називають *точковими оцінками*. Така їх назва обумовлюється тим, що в результаті їх розрахунків на основі вибірки ми отримуємо відповідне число. Як відомо, кожному дійсному числу відповідає точка на числовій осі.

Точкові оцінки того чи іншого параметра генеральної сукупності є *випадковими величинами*. Їх випадковість обумовлюється тим, що вони отримані на основі випадково вилученої з генеральної сукупності вибірки. Тому неможливо зробити висновок про те, у якій мірі оцінка параметра, що отримана на основі даної вибірки, відрізняється від параметра генеральної сукупності, нам, взагалі кажучи, невідомого. Інша річ, коли ми з визначеною ймовірністю можемо отримати числовий інтервал, в якому розташовується параметр генеральної сукупності. Це дає можливість прийти до висновку про якість статистичної оцінки параметра. Ясно, що оцінка тим краща, чим більш вузьким є цей інтервал, і навпаки. Такий інтервал називають *довірчим інтервалом*, а процес побудови його називають *інтервальним оцінюванням параметра генеральної сукупності*.

Довірчим інтервалом $[\theta_1; \theta_2]$ для параметра θ називається такий інтервал, відносно котрого можна з наперед вибраною ймовірністю, близькою до одиниці $(p = 1 - \alpha)$, стверджувати, що він утримує невідоме значення параметра θ. Це визначення можна записати так:

$$P[\theta_1 < \theta < \theta_2] = 1 - \alpha . \qquad (6.1)$$

Оскільки межі довірчого інтервалу θ_1 і θ_2 залежать від елементів вибірки, то їх значення можуть змінюватися від вибірки до вибірки.

Ймовірність $p = 1 - \alpha$ називається *довірчою ймовірністю*,

а α – *рівнем значущості*, який задається дослідником.

6.1. Довірчий інтервал для математичного сподівання і дисперсії випадкової величини

Основні теоретичні положення

Точковою оцінкою "$\wedge$" математичного сподівання m_x випадкової величини X є, як відомо, *середнє значення цієї величини* $\left(\hat{m}_x = \overline{x}\right)$. Довірчий інтервал для математичного сподівання визначається такою нерівністю:

$$\overline{x} - t_{кр}\left(\alpha,\nu\right)\sigma_{\overline{x}} < m_x < \overline{x} + t_{кр}\left(\alpha,\nu\right)\sigma_{\overline{x}} \ , \tag{6.2}$$

де

$\sigma_{\overline{x}}$ – середня квадратична похибка середнього значення випадкової величини *X*.

Вона визначається формулою:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \ , \tag{6.3}$$

у якій S_x – середній квадратичний відхил випадкової величини X .

Якщо підставити рівність (6.3) у нерівність (6.2), то будемо мати вираз для інтервального оцінювання математичного сподівання випадкової величини *X:*

$$\overline{x} - t_{кр}\left(\alpha,\nu\right)\frac{S_x}{\sqrt{n}} < m_x < \overline{x} + t_{кр}\left(\alpha,\nu\right)\frac{S_x}{\sqrt{n}} \ . \tag{6.4}$$

У нерівностях (6.2) та (6.4) $t_{кр}\left(\alpha,\nu\right)$ – критичне значення критерію Стьюдента за умов рівня значущості α і числа степенів вільності $\nu = n$, де n – об'єм вибірки.

Оскільки статистична оцінка дисперсії випадкової величини X (S_x^2) має χ^2 – розподіл, то у загальному випадку довірчий інтервал для дисперсії генеральної сукупності σ_x^2 будують саме за допомогою цього розподілу:

$$\frac{S_x^2 n}{\chi_2^2} < \sigma_x^2 < \frac{S_x^2 n}{\chi_1^2} \ , \tag{6.5}$$

де

n – об'єм вибірки;

χ_1^2 і χ_2^2 – відповідні критичні точки χ^2–розподілу, що утримуються в додатку М.

Точка χ_2^2 визначається за умов рівня значущості $\frac{\alpha}{2}$ та числа степенів вільності $\nu = n-1$, а точка χ_1^2 – за умов того ж числа степенів вільності та рівня значущості $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Для середнього квадратичного відхилу випадкової величини X довірчий інтервал має вигляд:

$$\sqrt{\frac{n\,S_x^2}{\chi_2^2}} < \sigma_x < \sqrt{\frac{n\,S_x^2}{\chi_1^2}}\ . \tag{6.6}$$

За умови великих значень числа степенів вільності розподіл $f\left(\chi^2\right)$ наближається до нормального розподілу. Отже, за такої умови оцінка S_x має розподіл, близький до нормального, з параметрами $M\left[S_x\right] = \sigma_x$ і $\sigma_{S_x}^2 = \frac{S_x^2}{2(n-1)}$.

Звідки

$$\sigma_{S_x} = \frac{S_x}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{6.7}$$

і довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилу випадкової величини X за умови великих об'ємів вибірки має вигляд:

$$S_x - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_{S_x} < \sigma_x < S_x + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_{S_x}\,. \tag{6.8}$$

Для побудови у цьому разі довірчого інтервалу для дисперсії генеральної сукупності σ_x^2 треба підвести до квадрату всі частини нерівності (6.8):

$$\left[S_x - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_{S_x}\right]^2 < \sigma_x^2 < \left[S_x + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_{S_x}\right]^2 \tag{6.9}$$

Розв'язання типових задач

1. ***Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання випадкової величини.***

На основі вибірки місячної кількості опадів у грудні за період 1940–1991 рр. (n=52) на ст. Вознесенськ отримані такі статистичні оцінки моментів цього розподілу: $\overline{x} = 35$ мм; $S_x = 25$ мм. З імовірністю 0.95 знайти інтервальну оцінку математичного сподівання цієї кліматичної характеристики.

Інтервальну оцінку m_x знайдемо за формулою (6.4). Оскільки $t_{кр} = (0.05;52) = 2.01$ (додаток П), маємо:

$$35 - 2.01\frac{25}{\sqrt{52}} < m_x < 35 + 2.01\frac{25}{\sqrt{52}}.$$

Прості розрахунки дозволяють отримати довірчий інтервал для математичного сподівання:

$$28 \text{ мм} < m_x < 42 \text{ мм}.$$

2. ***Побудова довірчого інтервалу для дисперсії та середнього квадратичного відхилу випадкової величини.***

По даних вимірювань сформовані ряди місячної кількості опадів у грудні на ст. Роздільна за період 1940–1991 рр. (n = 52) та розраховані статистичні оцінки моментів цього розподілу: $\overline{x}$ = 36 мм; S_x^2 = 484 мм^2; S_x = 22 мм. Треба побудувати з ймовірністю 0.95 довірчий інтервал для дисперсії цієї кліматичної характеристики. Будемо визначати його за допомогою формули (6.5).

По таблицях критичних точок χ^2 – розподілу (додаток М) знайдемо χ_2^2 і χ_1^2:

$$\chi_2^2\left\{\frac{\alpha}{2};(n-1)\right\} = \chi_2^2(0.025;51) = 72.6;$$

$$\chi_1^2\left\{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right);(n-1)\right\} = \chi_1^2(0.975;51) = 33.2.$$

Отже:

$$\frac{52 \cdot 484}{72.6} < \sigma_x^2 < \frac{52 \cdot 484}{33.2} \quad ;$$

$$347 \text{ мм}^2 < \sigma_x^2 < 758 \text{ мм}^2.$$

Очевидно, для середнього квадратичного відхилу σ_x довірчий інтервал є таким:

$$19 \text{ мм} < \sigma_x < 28 \text{ мм} .$$

3. Побудова довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилу та дисперсії випадкової величини за умови великих об'ємів вибірок.

Як показали розрахунки, на основі вибірки середньої місячної температури повітря у квітні на ст. Одеса об'ємом n =85, точкова статистична оцінка середнього квадратичного відхилу цієї характеристики дорівнює 1.5°С. Треба визначити інтервальну оцінку середнього квадратичного відхилу σ_x та дисперсії σ_x^2.

Оскільки об'єм вибірки складає більше п'ятидесяти значень, довірчий інтервал можна отримати за формулою (6.8). Для цього знайдемо, по-перше, $t_{кр}$:

$$t_{кр}(\alpha, \nu) = t_{кр}(\alpha; n-1) = t_{кр}(0.05; 84) = 1.99$$

і, по-друге, параметр σ_{S_x} за формулою (6.7):

$$\sigma_{S_x} = \frac{1.5}{\sqrt{2 \cdot 84}} = 0.12.$$

Таким чином, маємо:

$$1.5 - 1.99 \cdot 0.12 < \sigma_x < 1.5 + 1.99 \cdot 0.12;$$

$$1.3°\text{C} < \sigma_x < 1.7°\text{C}.$$

Довірчий інтервал для дисперсії ряду середньої місячної температури повітря у квітні на ст. Одеса є таким:

$$1.7(°\text{C})^2 < \sigma_x^2 < 2.9\ (°\text{C})^2.$$

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає фізичний сенс математичного сподівання випадкової величини та з яким моментом розподілу воно має зв'язок?
2. Яка статистична оцінка параметра генеральної сукупності називається точковою та яку кількість точкових статистичних оцінок можна отримати з однієї генеральної сукупності?
3. Що називається довірчим інтервалом параметра генеральної сукупності?
4. Який сенс рівня значущості та довірчої ймовірності?
5. Як знайти інтервальні оцінку математичного сподівання випадкової величини?
6. Як знайти довірчий інтервал для дисперсії та середнього квадратичного відхилу випадкової величини за умови невеликих $(n < 50)$ та великих $(n > 50)$ об'ємів вибірок?

Задачі

*Побудувати довірчі інтервали для математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилу ряду середньої місячної відносної вологості повітря на рівні значущості α, який зазначено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Вихідна інформація до розв'язання задач

Задача	**Станція, місяць**	**Характеристика статистичного ряду**			α
		n	$\overline{x}$, %	S_x, %	
1	Одеса, січень	15	83	3.4	0.2
2	Одеса, квітень	15	76	5.1	0.1
3	Одеса, липень	15	68	5.0	0.05
4	Одеса, жовтень	15	74	6.2	0.02
5	Вилкове, січень	15	85	2.1	0.01
6	Вилкове, квітень	15	75	4.0	0.005
7	Вилкове, липень	15	71	2.7	0.002
8	Вилкове, жовтень	15	76	4.3	0.001
9	Очаків, січень	15	84	3.8	0.2
10	Очаків, квітень	15	75	5.1	0.1
11	Очаків, липень	15	67	4.8	0.05
12	Очаків, жовтень	15	76	5.7	0.02

**Знайти інтервальні оцінки математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилу ряду середньої місячної температури повітря на ст. Одеса за два різні періоди вимірювань. Рівень значущості α зазначено в табл. 6.2. Зробити висновок про розбіжності між отриманими інтервальними оцінками, що розраховувалися по одних і тих же вибірках різних об'ємів.

Таблиця 6.2 – Вихідна інформація до розв'язання задач

Задача	**Місяць**	**Характеристика статистичного ряду**			α
		n	$\overline{x}$, °C	S_x, °C	
1	Січень	35	-1.8	3.1	0.2
		85	-2.1	3.2	
2	Лютий	33	-1.4	2.5	0.1
		85	-1.7	3.0	
3	Березень	35	2.3	2.0	0.05
		85	2.1	1.9	
4	Квітень	35	8.3	1.4	0.02
		85	8.5	1.5	
5	Травень	35	15.2	1.5	0.01
		85	15.1	1.6	
6	Червень	35	19.5	1.3	0.005
		85	19.6	1.4	
7	Липень	35	22.2	1.1	0.002
		85	22.1	1.4	
8	Серпень	35	21.4	1.4	0.001
		85	21.4	1.3	
9	Вересень	35	16.9	1.6	0.2
		85	17.0	1.5	
10	Жовтень	35	11.5	2.2	0.1
		85	11.2	2.0	
11	Листопад	35	5.2	2.8	0.05
		85	5.4	2.4	
12	Грудень	35	0.3	2.4	0.02
		85	0.7	2.4	

***На рівні значущості $\alpha =$ 0.05 знайти інтервальні оцінки математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилу на основі двох рядів середньої місячної температури повітря на ст. Одеса. Точкові статистичні оцінки моментів розподілу цієї випадкової величини розраховувалися по вихідних рядах з об'ємами n та рядах, що складалися тільки з однорідних членів (їх об'єми m).

Провести аналіз отриманих результатів.

Таблиця 6.3 – Вихідна інформація до розв'язання задач

Задача	**Місяць**	**Характеристика статистичного ряду**					
		вихідного			**однорідного**		
		n	$\bar{x}$, **°C**	S_x,**°C**	m	$\bar{x}$,**°C**	S_x,**°C**
1	Січень	50	-2.2	3.2	43	-1.3	2.3
2	Лютий	50	-1.3	2.8	45	-0.7	1.8
3	Березень	50	2.1	1.8	49	2.2	1.6
4	Квітень	50	8.6	1.5	48	8.8	1.4
5	Травень	50	15.1	1.6	49	15.0	1.5
6	Червень	50	19.7	1.4	46	19.2	1.2
7	Липень	50	22.1	1.6	45	21.8	1.2
8	Серпень	50	21.4	1.2	47	21.4	1.1
9	Вересень	50	17.0	1.4	46	17.0	1.2
10	Жовтень	50	11.1	1.9	49	11.2	1.9
11	Лютий	35	-2.0	3.2	33	-1.4	2.5
12	Вересень	35	16.9	1.6	27	16.2	1.0

6.2. Довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції

Основні теоретичні положення

Статистична оцінка коефіцієнта кореляції, що розрахована за формулою (5.23), є точковою оцінкою генерального коефіцієнта кореляції ρ_{xy}. Для обгрунтування вірогідності такої оцінки потрібно побудувати довірчий інтервал.

Коефіцієнт кореляції r_{xy}, особливо коли *об'єми* вибірок ***невеликі***, не підпорядковується нормальному закону. Але логарифмічне $z-$перетворення

$$\hat{z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} \qquad (6.10)$$

має розподіл, близький до нормального, з параметрами:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho_{xy}}{1-\rho_{xy}} + \frac{\rho_{xy}}{2(n-1)} \tag{6.11}$$

та

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3} \ . \tag{6.12}$$

Цей факт дає можливість таким же чином побудувати довірчий інтервал для параметра z, як і для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини (див. підрозділ 6.1), а саме:

$$\hat{z} - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_z < z < \hat{z} + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_z \tag{6.13}$$

або

$$z_1 < z < z_2 \ , \tag{6.14}$$

де

$$z_1 = \hat{z} - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_z \ , \tag{6.15}$$

$$z_2 = \hat{z} + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_z \ , \tag{6.16}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} . \tag{6.17}$$

Після обчислення z_1 і z_2 на заданому рівні значущості α та числі степенів вільності $\nu = n$ треба для меж z_1 і z_2 отримати відповідні довірчі межі для коефіцієнта кореляції, тобто r_{xy_1} та r_{xy_2}. Для цього необхідно скористатися оберненим перетворенням. Воно має вигляд:

$$r_{xy_i} = \frac{e^{2z_i} - 1}{e^{2z_i} + 1} \qquad (i = 1,2) \ . \tag{6.18}$$

Отже, довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції визначається нерівністю:

$$r_{xy_1} < \rho_{xy} < r_{xy_2} \ . \tag{6.19}$$

Якщо об’єми вибірок, на основі яких оцінюється коефіцієнт кореляції r_{xy}, є ***великими***, то оцінка коефіцієнта кореляції має розподіл,

близький до нормального з параметрами ρ_{xy} і σ_r^2. Довірчий інтервал за таких умов можна побудувати за допомогою нерівності:

$$r_{xy} - t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_r < \rho_{xy} < r_{xy} + t_{кр}(\alpha,\nu)\sigma_r. \qquad (6.20)$$

Стандартний відхил коефіцієнта кореляції σ_r розраховується за формулою (6.20):

$$\sigma_r = \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n-1}} \quad . \qquad (6.21)$$

Розв'язання типових задач

1. Побудова довірчого інтервалу для коефіцієнта кореляції за умови невеликих об'ємів вибірок $(n < 50)$**.**

За даними вимірювань місячної кількості опадів у квітні на ст.ст. Роздільна та Любашівка з 1948 по 1990 рр. (n = 43) розрахована точкова статистична оцінка коефіцієнта кореляції r_{xy}. Вона дорівнює 0.72. Треба з ймовірністю 0.95 побудувати довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції ρ_{xy}.

Інтервальне оцінювання будемо проводити, використовуючи формули (6.10) та (6.13) – (6.19).

Нелінійне логарифмічне z–перетворення Фішера дорівнює:

$$\hat{z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + r_{xy}}{1 - r_{xy}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + 0.72}{1 - 0.72} = 0.91.$$

Оскільки $$t_{кр}(\alpha,\nu) = t_{кр}(\alpha,n) = t_{кр}(0.05;43) = 2.02,$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{40}} = 0.16,$$

то за формулою (6.13) отримаємо довірчий інтервал для перетворення z:

$$0.91 - 2.02 \times 0.16 < z < 0.91 + 2.02 \times 0.16$$

або

$$0.59 < z < 1.23.$$

Враховуючи обернене перетворення (6.18), знайдемо за допомогою додатку С ліву та праву межі інтервалу:

$$r_{xy1} = \frac{e^{2\cdot 0.59} - 1}{e^{2\cdot 0.59} + 1} = 0.53; \qquad r_{xy2} = \frac{e^{2\cdot 1.23} - 1}{e^{2\cdot 1.23} + 1} = 0.84 \ .$$

Отже, довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції має вигляд:

$$0.53 < \rho_{xy} < 0.84 .$$

2. Побудова довірчого інтервалу для коефіцієнта кореляції, розрахованого по вибірках великих об'ємів.

Точкова статистична оцінка коефіцієнта кореляції, що розрахована по рядах місячної кількості опадів у травні (період 1894–1990 рр.) на ст.ст. Одеса та Миколаїв (n = 89) дорівнює 0.59. Знайти з ймовірністю 0.95 інтервальну оцінку генерального коефіцієнта кореляції ρ_{xy}.

Оскільки об'єми вибірок, на основі котрих виконувалися розрахунки, великі, будемо будувати довірчий інтервал за методом, якому відповідають формули (6.20) і (6.21).

По додатку П знаходимо критичне значення критерію Стьюдента:

$$t_{кр}(\alpha, \nu) = t_{кр}(\alpha, n) = t_{кр}(0.05; 89) = 1.99 .$$

Середній квадратичний відхил коефіцієнта кореляції дорівнює:

$$\sigma_r = \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n-1}} = \frac{0.65}{\sqrt{88}} = \frac{0.65}{9.38} = 0.07.$$

Отже, довірчий інтервал для параметра ρ_{xy} має вигляд:

$$0.59 - 1.99 \times 0.07 < \rho_{xy} < 0.59 + 1.99 \times 0.07$$

або

$$0.45 < \rho_{xy} < 0.73 \ .$$

Запитання для самоперевірки

1. Яку статистичну оцінку параметра генеральної сукупності називають точковою? Навести приклади.
2. Яку кількість точкових статистичних оцінок можна отримати з однієї генеральної сукупності?
3. Які категорії статистичних сукупностей Вам відомі?
4. Що називається довірчим інтервалом параметра генеральної сукупності?
5. Який сенс рівня значущості та довірчої ймовірності?
6. Дайте визначення кореляційної залежності між двома випадковими величинами.
7. Який зв'язок між випадковими величинами є стохастичним?
8. Що є якісною характеристикою тісноти та форми кореляційного зв’язку між двома випадковими величинами?
9. Який параметр визначає кількісну міру тісноти та форми лінійного (нелінійного) кореляційного зв’язку?
10. Які статистичні оцінки та яких моментів розподілу необхідно знайти, щоб розрахувати коефіцієнт кореляції?
11. В яких межах змінюється коефіцієнт кореляції? За умови яких значень коефіцієнта кореляції лінійний кореляційний зв'язок буде прямим? оберненим?
12. Як знайти інтервальну оцінку коефіцієнта кореляції за умови великих (малих) об’ємів вибірок?
13. В якому випадку використовується логарифмічне $z-$перетворення Фішера при побудові довірчого інтервалу для коефіцієнта кореляції?
14. Як знайти критичні значення критерію Стьюдента для інтервального оцінювання коефіцієнта кореляції?
15. Який вигляд має рівняння регресії, що характеризує лінійний кореляційний зв'язок між двома випадковими величинами?

Задачі

На рівні значущості α, використовуючи інформацію табл. 6.4, знайти інтервальну оцінку коефіцієнта кореляції, розрахованого по двох рядах місячної кількості опадів у січні (задачі 1 – 8) та у квітні (задачі 9 – 32).

Таблиця 6.4 – Інформація до розв’язання задач

Задача	**Станція**		r_{xy}	n, m	α
	X	Y			
1	Любашівка	Ізмаїл	0.83	40	0.2
2	Любашівка	Вилкове	0.77	40	0.1
3	Любашівка	Кілія	0.86	40	0.05
4	Болград	Вилкове	0.88	40	0.02
5	Ізмаїл	Затишшя	0.88	40	0.01
6	Ізмаїл	Вилкове	0.88	40	0.005
7	Затишшя	Вилкове	0.83	40	0.002
8	Роздільна	Вилкове	0.86	40	0.001
9	Любашівка	Болград	0.69	37	0.2
10	Любашівка	Ізмаїл	0.62	37	0.1
11	Любашівка	Роздільна	0.77	37	0.05
12	Любашівка	Сарата	0.80	37	0.02
13	Любашівка	Вилкове	0.71	37	0.01
14	Любашівка	Кілія	0.66	37	0.005
15	Болград	Затишшя	0.68	37	0.002
16	Болград	Роздільна	0.77	37	0.001
17	Болград	Сарата	0.86	37	0.2
18	Болград	Вилкове	0.85	37	0.1
19	Болград	Кілія	0.85	37	0.05
20	Ізмаїл	Затишшя	0.57	37	0.02
21	Ізмаїл	Роздільна	0.62	37	0.01
22	Ізмаїл	Сарата	0.76	37	0.005
23	Ізмаїл	Вилкове	0.86	37	0.002
24	Затишшя	Роздільна	0.82	37	0.001
25	Затишшя	Сарата	0.79	37	0.2
26	Затишшя	Вилкове	0.70	37	0.1
27	Затишшя	Кілія	0.64	37	0.05
28	Роздільна	Сарата	0.82	37	0.02
29	Роздільна	Вилкове	0.71	37	0.01
30	Роздільна	Кілія	0.68	37	0.005
31	Сарата	Вилкове	0.85	37	0.002
32	Сарата	Кілія	0.81	37	0.001

*На заданому рівні значущості α побудувати довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції, який відбиває лінійну статистичну залежність між двома рядами середньої місячної температури повітря.

Таблиця 6.5 – Вихідна інформація до розв'язання задач

Задача	n, m	r_{xy}	**Задача**	n, m	r_{xy}	α
1	55	-0.59	**16**	100	-0.40	0.2
2	58	-0.80	**17**	97	-0.49	0.1
3	60	-0.77	**18**	99	-0.58	0.05
4	62	-0.65	**19**	51	-0.60	0.02
5	65	-0.57	**20**	120	-0.75	0.01
6	70	-0.88	**21**	150	-0.70	0.005
7	71	-0.87	**22**	70	-0.88	0.002
8	80	-0.92	**23**	80	-0.83	0.001
9	82	-0.54	**24**	75	-0.72	0.2
10	84	-0.83	**25**	81	-0.73	0.1
11	90	-0.49	**26**	85	-0.65	0.05
12	88	-0.55	**27**	90	-0.77	0.02
13	85	-0.94	**28**	92	-0.59	0.01
14	75	-0.87	**29**	104	-0.63	0.005
15	63	-0.51	**30**	84	-0.80	0.002

6.3. Довірчий інтервал для коефіцієнтів лінійного рівняння регресії. Довірчий коридор

Основні теоретичні положення

Коефіцієнти a і b лінійного рівняння регресії

$$\bar{y}(x) = ax + b \tag{6.22}$$

є точковими оцінками коефіцієнтів A і B генерального рівняння

$$m_{y/x} = Ax + B. \tag{6.23}$$

Для останніх також є сенс отримати інтервальні оцінки.

Довірчий інтервал для коефіцієнта A будують за такою формулою:

$$a - t_{кр}(\alpha, \nu)\frac{S_y}{S_x\sqrt{n}} < A < a + t_{кр}(\alpha,\nu)\frac{S_y}{S_x\sqrt{n}}. \qquad (6.24)$$

У цій нерівності множник

$$\sigma_a = \frac{S_y}{S_x\sqrt{n}} \qquad (6.25)$$

є *стандартним відхилом кутового коефіцієнта регресії,* а $t_{кр}(\alpha, \nu)$ – критичне значення параметра Стьюдента за умов рівня значущості α та числа степенів вільності $\nu = n$.

Нерівність (6.26) дає можливість отримати довірчий інтервал для B:

$$b - t_{кр}(\alpha,\nu)\frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{1}{C_{\text{v}x}^2}\right]^{1/2} < B < b + t_{кр}(\alpha,\nu)\frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{1}{C_{\text{v}x}^2}\right]^{1/2}. \qquad (6.26)$$

У нерівності (6.26) множник

$$\sigma_в = \frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{1}{C_{\text{v}x}^2}\right]^{1/2} \qquad (6.27)$$

є стандартним відхилом вільного члена рівняння регресії.
Параметр

$$C_{\text{v}x} = \frac{S_x}{|\overline{x}|} \qquad (6.28)$$

є *коефіцієнтом варіації* випадкової величини X, який характеризує мінливість цієї величини.

Інтервальні оцінки коефіцієнтів лінійної регресії характеризують точність їх оцінювання. У деяких випадках ставиться задача окреслити ту смугу, у межах якої з визначеною довірчою ймовірністю p розташовується лінія регресії, що відповідає цьому рівнянню. Якщо ця смуга достатньо вузька, то загальна оцінка рівняння регресії задовольняє дослідника. У протилежному випадку, до результатів розрахунків, що робляться по такому рівнянню регресії, відносяться критично.

Довірчий коридор для лінійного рівняння регресії будують за допомогою такої нерівності:

$$ax+b-t_{кр}(\alpha,\nu)\frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_y^2}\right]^{1/2}<Ax+B<$$
$$<ax+b+t_{кр}(\alpha,\nu)\frac{S_y}{\sqrt{n}}\left[1+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_y^2}\right]^{1/2}. \qquad (6.29)$$

Надаючи в нерівності (6.29) змінній x послідовно її значення з інтервалу $[x_{\min};x_{\max}]$, отримаємо верхню (права частина нерівності) і нижню (ліва частина нерівності) межі довірчого коридору. Таким чином, будемо мати смугу, у межах якої з довірчою ймовірністю p розташовується генеральне рівняння регресії.

Формули, що наводяться вище, можна використати і для отримання уявлень про якість екпоненціального та гіперболічного рівнянь регресії. Але для цього треба за допомогою логарифмічного перетворення звести ці рівняння регресії до лінійних.

Розв'язання типових задач

1. Побудова довірчих інтервалів для коефіцієнтів лінійного рівняння регресії.

По рядах місячної кількості опадів у травні з об'ємами $m=n=43$ на ст. Роздільна (випадкова величина X) і на ст. Любашівка (випадкова величина Y) отримані такі статистичні оцінки параметрів: $\bar{x}$ = 49 мм; $\bar{y}$ = 49 мм; S_x^2 = 650 мм^2 ; S_y^2 = 677 мм^2; S_x = 26 мм; S_y = 26 мм; r_{xy} = 0.63 та побудовано рівняння регресії, яке має вигляд:

$$\bar{y}(x)=0.64x+17.64.$$

Треба з ймовірністю 0.95 побудувати довірчі інтервали для коефіцієнтів генерального рівняння регресії

$$m_{Y/X}=Ax+B.$$

Оскільки по додатку П критичне значення критерію Стьюдента дорівнює:

$$t_{кр}(\alpha,\nu)=t_{кр}(\alpha,n)=t_{кр}(0.05;43)=2.02,$$

за формулою (6.24) маємо довірчий інтервал для коефіцієнта A:

$$0.64-2.02\frac{26}{25.5\sqrt{43}}<A<0.64+2.02\frac{26}{25.5\sqrt{43}}$$

або

$$0.33<A<0.95.$$

Таким же чином за формулою (6.26) визначимо інтервальну оцінку для B:

$$17.64-2.02\frac{26}{\sqrt{43}}\left(1+\frac{49^2}{650}\right)^{1/2}<B<17.64+2.02\frac{26}{\sqrt{43}}\left(1+\frac{49^2}{650}\right)^{1/2},$$

тобто:

$$0.31<B<34.97$$

2. Побудова довірчого коридора для лінійного рівняння регресії.

Для рівняння регресії, що розглядалося у попередній задачі, побудувати довірчий коридор на рівні значущості $\alpha = 0.05$.

Довірчий коридор розраховувався за формулою (6.29):

$$0.64x+17.64-2.02\frac{26.0}{\sqrt{43}}\left[1+\frac{(x-49)^2}{650}\right]^{1/2}<Ax+B<0.64x+$$

$$+17.64+2.02\frac{26.0}{\sqrt{43}}\left[1+\frac{(x-49)^2}{650}\right]^{1/2}.$$

Щоб отримати ліву та праву межі коридора, будемо надавати змінній x такі значення місячної кількості опадів: 20, 40, 60, 80, 100 мм .

За умови:

$x = 20$ мм: нижня межа 18.3 мм ,
верхня межа 42.6 мм .

$x = 40$ мм: нижня межа 37.8 мм ,
верхня межа 51.8 мм .

$x = 60$ мм: нижня межа 47.3 мм ,
верхня межа 64.8 мм .

$x = 80$ мм: нижня межа 56.2 мм ,
верхня межа 81.4 мм .

$x = 100$ мм: нижня межа 63.7 мм ,
верхня межа 99.5 мм .

Для отриманого в типовій задачі підрозділу 5.3 рівняння регресії $\bar{y}(x) = 0.64x + 17.64$ треба побудувати довірчий коридор. Для цього наносимо на кореляційний графік значення нижніх та верхніх меж за умов конкретних значень змінної x (рис 6.1). Тепер з ймовірністю p = 0.95 можна стверджувати, що генеральна лінія регресії знаходиться у межах цього коридора.

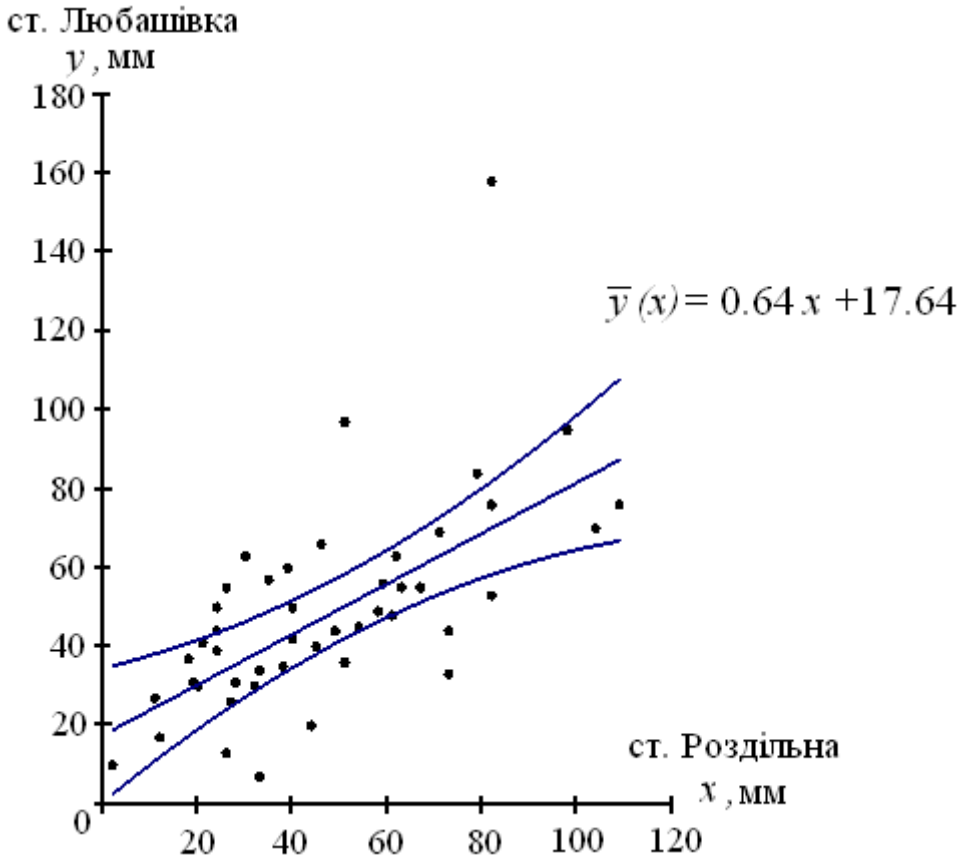


Рисунок 6.1 – Довірчий коридор для лінійного рівняння регресії (до типової задачі)

Запитання для самоперевірки

1. Як можна класифікувати зв’язки між двома випадковими величинами?
2. Який розподіл називається умовним? Що є умовним математичним сподіванням? умовною дисперсією?
3. Який вигляд має рівняння регресії, що характеризує лінійний кореляційний зв'язок між двома випадковими величинами?
4. Який метод використовується при розрахунках коефіцієнтів рівнянь регресії? Що є критерієм якості регресійної моделі?
5. Яку статистичну оцінку параметра генеральної сукупності називають точковою? Навести приклади.
6. Що називається довірчим інтервалом параметра генеральної сукупності?
7. Який сенс рівня значущості та довірчої ймовірності?
8. Який параметр називається коефіцієнтом варіації?
9. Який сенс діаграми розсіювання точок при дослідженні кореляційної залежності між двома випадковими величинами?
10. Як побудувати довірчий коридор для лінійного рівняння регресії?

Задачі

У цьому підрозділі, використовуючи умови задач 5.121–5.150 (розділ 5), знайти інтервальні оцінки для коефіцієнтів лінійного рівняння регресії та побудувати для нього довірчий коридор.

7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ. СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЙМОВІРНОСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Основні теоретичні положення

Випадковою функцією $X(t)$ аргументу t називається функція, ординати якої для будь-яких фіксованих значень аргументу є випадковими величинами. У загальному випадку випадкова функція складається з *системи реалізацій* $x_i(t)\left(i=\overline{1,k}\right)$, які відбивають результати окремих експериментів. Перерізи випадкової функції за умови $t=t_j\left(j=\overline{1,l}\right)$ при перетині реалізацій приводять до сукупності точок $x_1(t_j); x_2(t_j); ....x_k(t_j)\ \left(j=\overline{1,l}\right)$, які являються випадковими величинами.

Випадкові функції можуть бути *скалярними* або *векторними;* у загальному випадку – *тензорними*. Прикладом скалярної випадкової функції може бути температура повітря в деякій точці простору, а векторною – швидкість вітру. Аргумент t може приймати будь-які дійсні значення у заданому інтервалі або тільки визначені дискретні. У першому випадку функцію $X(t)$ називають *випадковим процесом*, у другому – *випадковою послідовністю*.

В якості аргументу t не обов'язково розглядають час. Він може мати смисл будь-якої координати трьохвимірного простору. Випадкову функцію декількох аргументів називають *випадковим полем.* В метеорології, наприклад, розглядаються поля температури, атмосферного тиску, швидкості вітру, геопотенціалу тощо. Випадкове поле може бути також або скалярним, або векторним.

Властивості випадкових функцій визначаються їх ***імовірносними характеристиками***: *математичним сподіванням випадкової функції* – $m_x(t)$, *дисперсією випадкової функції* – $Д_x(t)$, *коваріаційною функцією* – $K_x(t_i,t_j)$, *кореляційною функцією* – $R_x(t_i,t_j)$. Останні дві ймовірносні характеристики визначають характер взаємозв'язку між різними перерізами випадкової функції $X(t)$. Якщо треба провести дослідження взаємозв'язку між двома випадковими функціями, наприклад, $X(t)$ і $Y(t)$, то його характер визначають *взаємна коваріаційна* – $K_{xy}(t_i,t_j)$ і *взаємна кореляційна* – $R_{xy}(t_i,t_j)$ функції.

Велику роль відіграють випадкові процеси, які протікають однорідно за часом. Такі *процеси* називають *стаціонарними*. *Стаціонарний процес* у

широкому смислі це такий процес, для якого математичне сподівання не залежить від аргументу, тобто є постійною величиною:

$$m_x(t) = m_x = const \ , \tag{7.1}$$

а *коваріаційна функція* залежить тільки від різниці між значеннями аргументу:

$$K_x(t_i, t_j) = K_x(t_i - t_j) = K_x(\tau), \tag{7.2}$$

де

$$\tau = t_i - t_j .$$

Оскільки в більшості випадків будемо цікавитися тільки характеристиками випадкової функції $m_x(t)$ і $K_x(\tau)$, то далі будемо розглядати тільки випадкові функції, стаціонарні в широкому смислі.

Стаціонарність випадкової функції означає, що випадковий процес протікає однорідно зі змінюванням аргументу t, при цьому стаціонарна випадкова функція повинна існувати в області аргументу $(-\infty;\infty)$.

Як випливає з визначення, *коваріаційна функція* стаціонарної випадкової функції *є функцією тільки одного аргументу* τ. Це значно спрощує всі операції з характеристиками стаціонарних випадкових функцій.

Оскільки в загальному випадку коваріаційна функція симетрична відносно її аргументів t_i та t_j, то *коваріаційна функція* стаціонарної випадкової функції *є парною функцією*, тобто

$$K(\tau) = K(-\tau). \tag{7.3}$$

Також *коваріаційна функція* стаціонарного процесу *постійна* для всіх

$$t_i - t_j = const .$$

Парною функцією є й кореляційна функція:

$$R_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{Д_x}, \tag{7.4}$$

оскільки, як зазначалося, коваріаційна функція $K_x(\tau)$ – функція парна.

Дисперсію стаціонарної випадкової функції отримаємо, коли у виразі для коваріаційної функції припустимо, що $t_i = t_j = t$.

Тоді маємо:

$$Д_X(t) = K_X(t,t) = K_X(t-t) = K_X(0) = const. \qquad (7.5)$$

Отже *дисперсія стаціонарної випадкової функції є постійною величиною*, яка дорівнює коваріаційній функції за умови нульового значення аргументу.

Стаціонарні випадкові функції в «чистому» вигляді зустрічаються дуже рідко, оскільки для цього необхідно існування однорідності випадкового процесу при нескінченному змінюванні аргументу t. Але нас, як правило, цікавить протікання випадкового процесу на невеликому інтервалі значень t і, якщо умови стаціонарності виконуються для цього інтервалу, то можна вважати таку випадкову функцію стаціонарною.

Дуже важливою для практики є *ергодична властивість стаціонарної випадкової функції*. Ця властивість полягає у тому, що для такої функції операція осереднення за часом від будь-якої реалізації дорівнює осередненню по множині реалізацій, тобто:

$$m_X(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \overline{x(t)}; \qquad (7.6)$$

$$Д_X(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t)-m_X(t)\right]^2 dt = \overline{\left[x(t)-m_X(t)\right]^2}; \qquad (7.7)$$

$$K_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \left[x(t+\tau)-m_X(t)\right]\cdot\left[x(t)-m_X(t)\right]dt = \overline{\left\{\left[x(t)-m_X(t)\right]\cdot\left[x(t+\tau)-m_X(t)\right]\right.}, \qquad (7.8)$$

де рискою зверху позначені середні за часом;

$x(t)$ – будь-яка реалізація випадкової функції $X(t)$.

Ознакою ергодичності випадкового процесу є збігання до нуля коваріаційної (кореляційної) функції при наближенні аргументу до нескінченності:

$$K_X(\tau) \to 0 \quad \text{за умови} \quad \tau \to \infty.$$

Властивості випадкових функцій можна визначити, впроваджуючи спектральне розкладання часових послідовностей.

Спектральним розкладанням деякої функції називається зображення її сумою гармонічних коливань, які мають різні амплітуди гармонік.

Залежність амплітуд від частоти називають *спектром функції*. Для втілення спектрального розкладання використовується перетворення Фур'є.

Розглянемо яким чином можна отримати спектральне розкладання стаціонарної випадкової функції.

На рис. 7.1 умовно зображається випадкова функція $X(t)$ на інтервалі $(-T;T)$, яку будемо позначати $X_T(t)$. Ця функція може бути розкладеною у ряд Фур'є:

$$X_T(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t) \ , \qquad (7.9)$$

де $\omega_i = i\Delta\omega;$

$\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{2T} = \dfrac{\pi}{T};$

A_{1i} і A_{2i} – випадкові коефіцієнти ряду Фур'є.

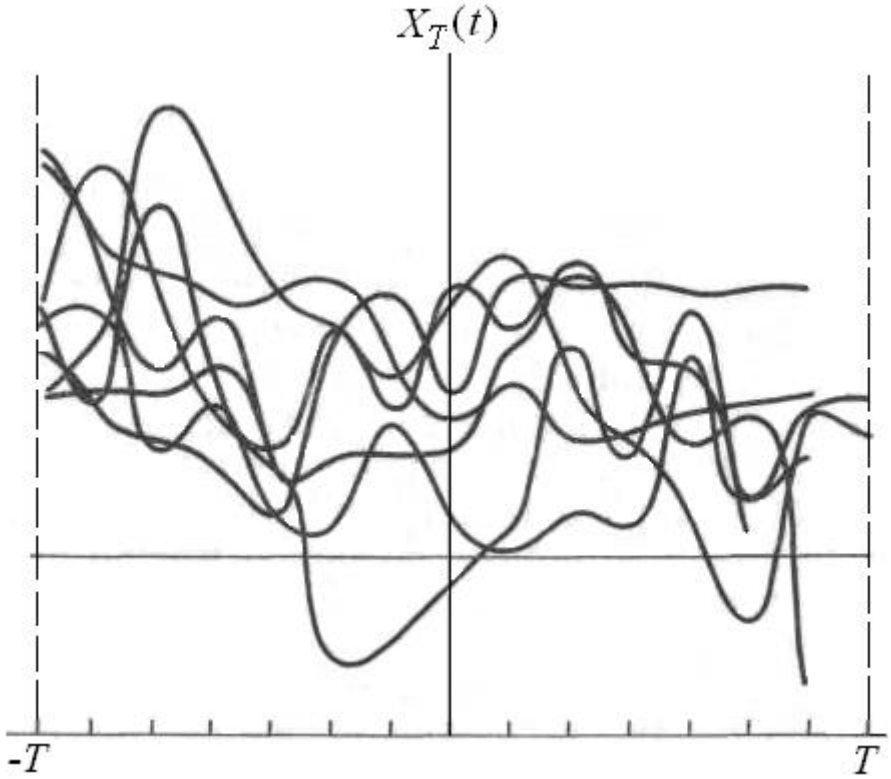


Рисунок 7.1 – Зображення випадкової функції $X(t)$ на інтервалі $(-T;T)$

Визначимо дисперсію випадкової функції $X_T(t)$:

$$Д_{X_T} = M\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(A_{1i}\cos\omega_i t + A_{2i}\sin\omega_i t)\times(A_{1j}\cos\omega_i t + A_{2j}\sin\omega_j t)\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}[M(A_{1i}{}^2)\cos^2\omega_i t + M(A_{2i}{}^2)\sin^2\omega_i t] + \{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[M(A_{1i}A_{1j})\cos\omega_i t\cos\omega_j t +$$

$$+M(A_{2i}A_{2j})\sin\omega_i t\sin\omega_j t] + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[M(A_{1i}A_{2j})\cos\omega_i t\sin\omega_j t +$$

$$+M(A_{2i}A_{1j})\sin\omega_i t\cos\omega_j t]\} \quad i \neq j. \qquad (7.10)$$

Оскільки *функції* $\cos\omega t$ та $\sin\omega t$ – є *ортогональними*, останній член рівності (7.10) дорівнює нулю. Крім того, функція $X(t)$ – стаціонарна. Тому дисперсія її повинна бути постійною, тобто незалежною від аргументу t. Це можливо, коли виконуються умови:

$$M[A_{1i}{}^2] = M[A_{2i}{}^2] = Д_i \ , \qquad (7.11)$$

$$M[A_{1i}A_{1j}] = M[A_{2i}A_{2j}] = 0 \ . \qquad (7.12)$$
$$i \neq j$$

Якщо запровадити ці умови до рівності (7.10), то будемо мати:

$$Д_{X_T} = \sum_{i=0}^{\infty} Д_i \ . \qquad (7.13)$$

Умова (7.12) є умовою *незв'язності коефіцієнтів розкладання функції* (7.9).

Якщо врахувати умови (7.11), (7.12) та (7.13), то можна отримати коваріаційну функцію стаціонарної випадкової функції $X_T(t)$:

$$K_{X_T}(t_\nu - t_\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\left\{M[A_i{}^2\cos\omega_i t_\nu\cos\omega_i t_\mu]\right\} + \left\{M\left[A_{2i}{}^2\sin\omega_i t_\nu\sin\omega_i t_\mu\right]\right\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} Д_i(\cos\omega_i t_\nu\cos\omega_i t_\mu + \sin\omega_i t_\nu\sin\omega_i t_\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} Д_i\cos\omega_i(t_\nu - t_\mu). \qquad (7.14)$$

Позначимо $t_\nu - t_\mu = \tau$ й приходимо до рівняння:

$$K_{X_T}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} Д_i\cos\omega_i\tau \ , \qquad (7.15)$$

яке визначає розкладання парної функції $K_{X_T}(\tau)$ у ряд Фур'є на інтервалі $[-T,T]$.

Коефіцієнти розкладання визначаються формулами:

$$Д_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K_{X_T}(\tau)d\tau, \tag{7.16}$$

$$Д_i = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} K_{X_T}(\tau)\cos\omega_i\tau d\tau\ ,\ \ i = 1,2,3,\ldots. \tag{7.17}$$

Таким чином, для опису стаціонарної випадкової функції можна використовувати залежність дисперсії $Д_i$ коефіцієнтів розкладення випадкової функції від частоти ω_i в ряд Фур'є замість коваріаційної функції $K_{X_T}(\tau)$. Залежність коефіцієнтів $Д_i$ від частоти ω_i називається *спектром випадкової функції.* Якщо випадкова функція розглядається на обмеженому інтервалі аргументів, то частота приймає дискретні значення з проміжком $\Delta\omega$. За таких умов *спектр випадкової функції* називається *дискретним* або *лінійчастим*. Приклад лінійчастого спектру наводиться на рис. 7.2. Лінійчастий спектр отримується у разі розкладання в ряд Фур'є і періодичної випадкової функції.

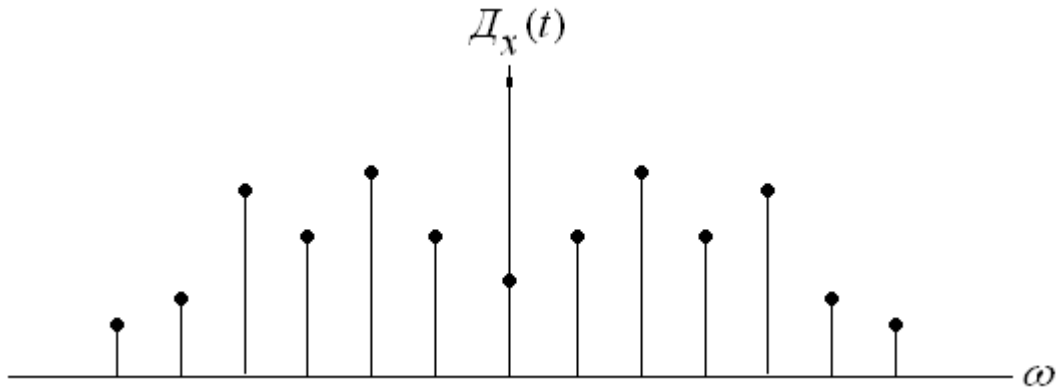


Рисунок 7.2 – Дискретний спектр випадкового процесу

Спектральне розкладання випадкової функції на обмеженому інтервалі $[-T;T]$ дає лише наближений опис випадкової функції. Більш повне уявлення про випадкову функцію при її спектральному розкладанні можна отримати при збільшенні T, тобто за умови $T \to \infty$. У цьому випадку частота з дискретної величини перетворюється на безперервну, а замість дисперсій амплітуд для кожної частоти необхідно розглядати щільність дисперсій амплітуд на одиницю частоти. Отже дискретний спектр перетворюється у безперервний.

Знайдемо відношення $\frac{Д_i}{\Delta\omega}$, яке має сенс *середньої щільності дисперсії на одиницю частоти* і позначимо її через $S_{X_T}(\omega_i)$:

$$S_{X_T}(\omega_i) = \frac{Д_i}{\Delta\omega}. \tag{7.18}$$

З урахуванням рівняння (7.17), а також залежності між інтервалом дискретності частоти $\Delta\omega$ та інтервалом задання процесу T, маємо:

$$S_{X_T}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2T}^{2T} K_{X_T}(\tau)\cos\omega_i\tau d\tau \ . \tag{7.19}$$

За умови $T \to \infty$ приходимо до рівняння:

$$S_x(\omega) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ (\Delta\omega\to 0)}} S_{X_T}(\omega_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau . \tag{7.20}$$

Функція $S_x(\omega)$ визначає щільність розподілу дисперсії гармонічних коливань у залежності від частоти і тому називається *спектральною щільністю випадкової функції* $X(t)$.

За допомогою формули (7.20) спектральна щільність стаціонарної випадкової функції однозначно визначається її коваріаційною функцією. Справедливим виявляється й обернене перетворення Фур'є, яке показує залежність між коваріаційною функцією й спектральною щільністю випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega \ . \tag{7.21}$$

Рівності (7.20) і (7.21) є частинними випадками перетворення Фур'є – "косинус перетворенням Фур'є".

У загальному випадку для функцій $S_x(\omega)$ і $K_x(\tau)$ можна записати такі співвідношення:

$$S_x(\omega) == \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \tag{7.22}$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\tau \ . \qquad (7.23)$$

Оскільки за відомою формулою Ейлера

$$e^{-i\omega\tau} = \cos\omega t - i\sin\omega t \ ,$$

$$e^{i\omega\tau} = \cos\omega t + i\sin\omega t \ ,$$

а функції $K_X(\tau)$ та $S_X(\omega)$ – парні, то формули (7.20), (7.21) та (7.22), (7.25) – еквівалентні.

Розглянемо ***основні властивості спектральної щільності стаціонарної випадкової функції.***

- *Спектральна щільність є парною функцією,* тобто

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \ . \qquad (7.24)$$

- *Інтеграл від спектральної щільності по всіх значеннях частоти дорівнює дисперсії випадкової функції.*

  Дійсно, вважаючи що $\tau = 0$, із (7.21) маємо:

$$Д_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \ . \qquad (7.25)$$

- *Спектральну щільність випадкової функції можна розглядати як "енергетичний спектр" цієї функції.* Це пояснюється тим, що в якості випадкової функції часто розглядаються такі величини як: швидкість вітру, швидкість течії в океані, напруження та багато інших. В такому випадку розподіл дисперсій, які мають квадрат розмірності амплітуди, пропорційний щільності розподілу енергії сигналу по частотах.
- Подібно нормованій коваріаційній функції (кореляційній функції) може використовуватися і *нормована спектральна щільність,* яка визначається таким чином:

$$S(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{Д_X} \ . \qquad (7.26)$$

Нормована спектральна щільність зв'язана з кореляційною функцією такими ж співвідношеннями, як і спектральна щільність $S_x(\omega)$ з коваріаційною функцією $K_x(\tau)$.

Нормована спектральна щільність має всі властивості, притаманні спектральній щільності випадкового процесу. Крім того

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)d\omega}{Д_x} = \frac{1}{Д_x}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega = \frac{Д_x}{Д_x} = 1.$$

- При збільшенні масштабу аргументу коваріаційної функції масштаб аргументу спектральної щільності і сама спектральна щільність зменшується у таке ж саме число разів. Іншими словами, якщо коваріаційній функції $K_x(\tau)$ відповідає спектральна щільність $S_x(\omega)$, то коваріаційній функції з аргументом $K_x(\alpha\tau)$ відповідає спектральна щільність $\frac{1}{\alpha}S_x\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$.

Дійсно, якщо позначити $\alpha\tau = z$, то будемо мати:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha\tau)\cos\omega\tau d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(z)\cos\frac{\omega\tau}{\alpha}d\frac{z}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(z)\cos\frac{\omega}{\alpha}zdz = \frac{1}{\alpha}S_x\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \qquad (7.27)$$

Ця властивість означає, що при стискуванні коваріаційної функції вздовж осі τ ($\alpha < 1$) спектр випадкової функції розширюється, і навпаки, за умови $\alpha > 1$. Така «поведінка» функцій $K_x(\tau)$ і $S_x(\omega)$ фізично пояснюється тим, що якщо мають перевагу у сигналі високі частоти, коваріаційна функція швидко зменшується, а спектральна щільність розтягується в сторону високих частот; якщо у сигналі переважають низькі частоти, то маємо обернену картину.

Використовуючи формулу (7.20) або (7.22), можна *отримати аналітичний вираз для спектральної щільності*, якщо є змога апроксимувати коваріаційну функцію прийнятною формулою.

Приведемо деякі важливі приклади.

1. Нехай стаціонарний випадковий процес $X(t)$ має коваріаційну функцію вигляду:

$$K_x(\tau) = Д_x e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \alpha > 0. \qquad (7.28)$$

Відповідно до рівності (7.22) спектральна щільність цього процесу дорівнює:

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Д_x e^{-\alpha|\tau|}e^{-i\omega\tau}=\frac{Д_x}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau}d\tau\right\}=$$

$$=\frac{Д_x}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha-i\omega}+\frac{1}{\alpha+i\omega}\right]=\frac{Д_x\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}. \qquad (7.29)$$

Як видно з виразу (7.29), це парна функція, яка досягає найбільшого значення $\frac{Д_x}{\pi\alpha}$ за умови значення частоти $\omega=0$. Але, як і коваріаційна функція (7.28) у точці $\tau=0$, спектральна щільність (7.29) не має похідної у точці $\omega=0$.

Величина α, як випливає з рівності (7.28), має сенс масштабу аргументу, при якому коваріаційна функція зменшується в e разів. Тому її називають *декрементом затухання коваріаційної функції.*

На рис. 7.3 наводяться графіки кореляційних функцій, що відповідають коваріаційній функції (7.28), та відповідні спектральні щільності за умов $\alpha=0.5$; $\alpha=1$; $\alpha=3$.

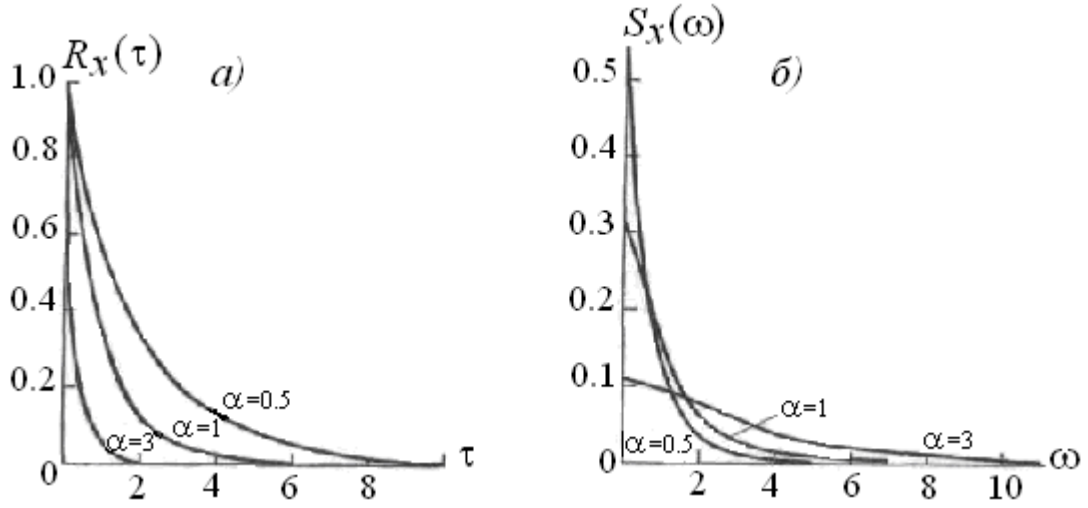


Рисунок 7.3 – Графіки кореляційної функції (а) та спектральної щільності (б) (до прикладу 1)

Порівняння кривих показує, що при малих α кореляційна функція зменшується повільніше, ніж при великих, а спектральна щільність швидко зменшується зі збільшенням частоти ω. Це свідчить про те, що у спектрі випадкового процесу мають місце малі частоти (або великі масштаби флуктуацій фізичної величини). Процеси такого типу мають назву *вузькосмугових*, оскільки енергія таких процесів зосереджена у вузькій смузі частот. Отже, вузькосмуговому процесу відповідає великий

час кореляції, тобто наявність кореляційного зв'язку між перерізами випадкового процесу, який повільно зменшується зі збільшенням інтервалу між перерізами.

При збільшенні α, тобто зі зменшенням часу кореляції, спектральна щільність змінюється більш плавно. Для великих α спектральна щільність змінюється при зростанні ω дуже повільно. Такі процеси називають *широкосмуговими*. Вони характеризуються *швидким падінням* кореляційного зв'язку між перерізами випадкового процесу.

Із рис. 7.3а видно, що кореляційна функція зі збільшенням параметра α зменшується швидше, тобто кореляційна залежність між перерізами випадкової функції $X(t)$ та $X(t+\tau)$ з однаковим інтервалом τ зменшується зі зростанням α.

Випадковий процес, для якого спектральна щільність є величиною незмінною на всьому інтервалі частот: ($S_X(\omega) = S_X(0) = const$) називають ***"білим шумом"*** по аналогії з білим світлом, який утворюється при рівномірному змішуванні всіх кольорів видимого спектру. Такий випадковий процес характеризується рівномірним розподілом енергії по всіх частотах. Реально такі процеси не існують, оскільки енергія таких процесів (інакше кажучи їх дисперсія) повинна бути нескінченною, але вони є зручною абстракцією для тих випадків, коли спектральна щільність приблизно незмінна на діапазоні частот, який нас цікавить.

Інколи випадковий процес, спектральна щільність якого мало змінюється на достатньо великому діапазоні частот, приблизно розглядають як "білий шум ", нехтуючи великими частотами. *"Білий шум"* це випадковий процес, всі перерізи котрого некорельовані і такий процес називають *чисто випадковим процесом.*

Коваріаційна функція "білого шуму" дорівнює нулю всюди, крім точки $\tau = 0$, де вона дорівнює дисперсії $Д_X$. Це означає, що для "білого шуму" цілком є відсутнім кореляційний зв'язок між значеннями випадкової функції при будь-яких значеннях аргументу t.

2. Як відомо, коваріаційна функція (7.28) не має похідної в точці $\tau = 0$. При розв'язанні деяких задач це є суттєвою завадою. Тому кращою апроксимацією (якщо це можливо) є апроксимація для коваріаційної функції вигляду:

$$K_X(\tau) = Д_X e^{-\alpha^2\tau^2}, \qquad \alpha > 0 . \tag{7.30}$$

За таких умов спектральна щільність дорівнює:

$$S_X(\omega) = \frac{Д_X}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2\tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{Д_X}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha^2\tau^2 + i\omega\tau)} d\tau . \tag{7.31}$$

Доповнимо показник степеня до повного квадрата

$$\alpha^2\tau^2 + i\omega\tau = (\alpha\tau + i\frac{\omega}{2\alpha})^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \qquad (7.32)$$

і підставимо результат (7.32) до рівності (7.31).

Будемо мати:

$$S_X(\omega) = \frac{Д_X}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha\tau + i\frac{\omega\tau}{2\sqrt{\alpha}})^2} d\tau\right) e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \qquad (7.33)$$

Інтеграл у дужках формули (7.33) є інтеграл Пуассона і дорівнює $\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$.

Отже,

$$S_X(\omega) = \frac{Д_X}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}. \qquad (7.34)$$

На рис. 7.4 містяться кореляційна функція й спектральна щільність такого випадкового процесу за умови різних значень α:

$$\alpha = 0.5; \quad \alpha = 1; \quad \alpha = 3.$$

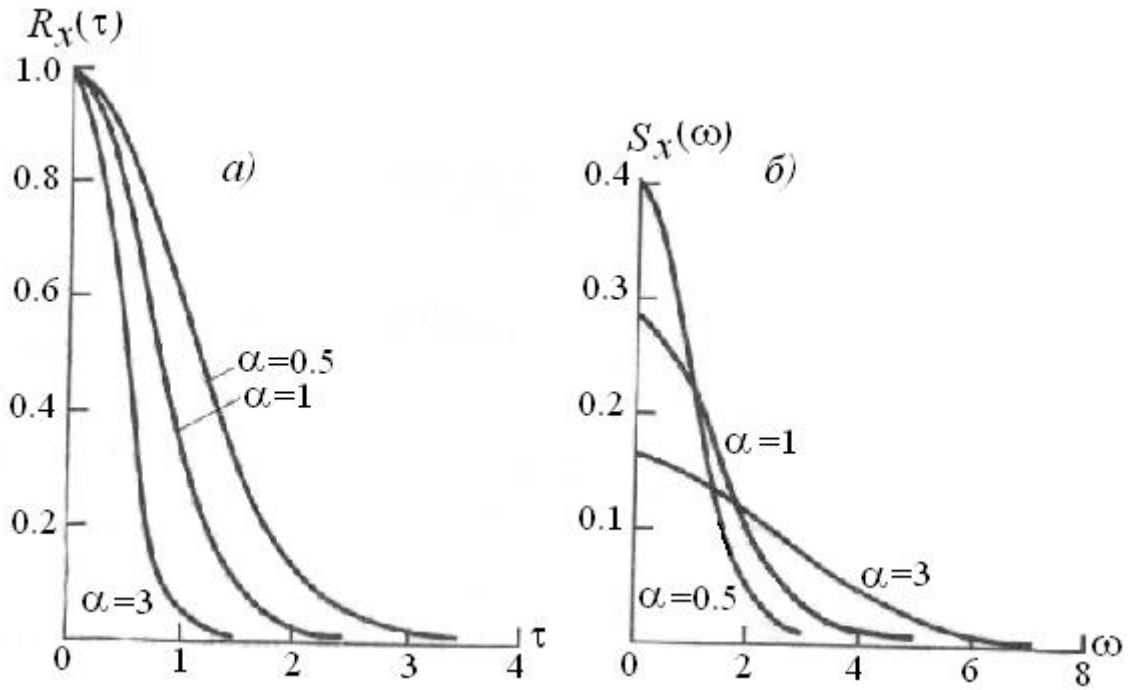


Рисунок 7.4 – Графіки кореляційної функції (а) та спектральної щільності (б) (до прикладу 2)

З рис.7.4 видно, що характер залежностей $R_x(\tau)$ і $S_x(\omega)$ якісно подібний попередньому прикладу, змінився тільки вигляд кривих.

3. Розглянемо тепер *випадкову функцію з лінійною коваріаційною функцією.*

Нехай коваріаційна функція описується на інтервалі від 0 до τ_0 лінійною функцією:

$$K_x(\tau) = \begin{cases} Д_x\left(1 - \dfrac{\tau}{\tau_0}\right) & \text{за умови } 0 \le \tau \le \tau_0, \\ 0 & \text{за умови } \tau > \tau_0 \ . \end{cases} \qquad (7.35)$$

Графік такої функції наводиться на рис. 7.5б.

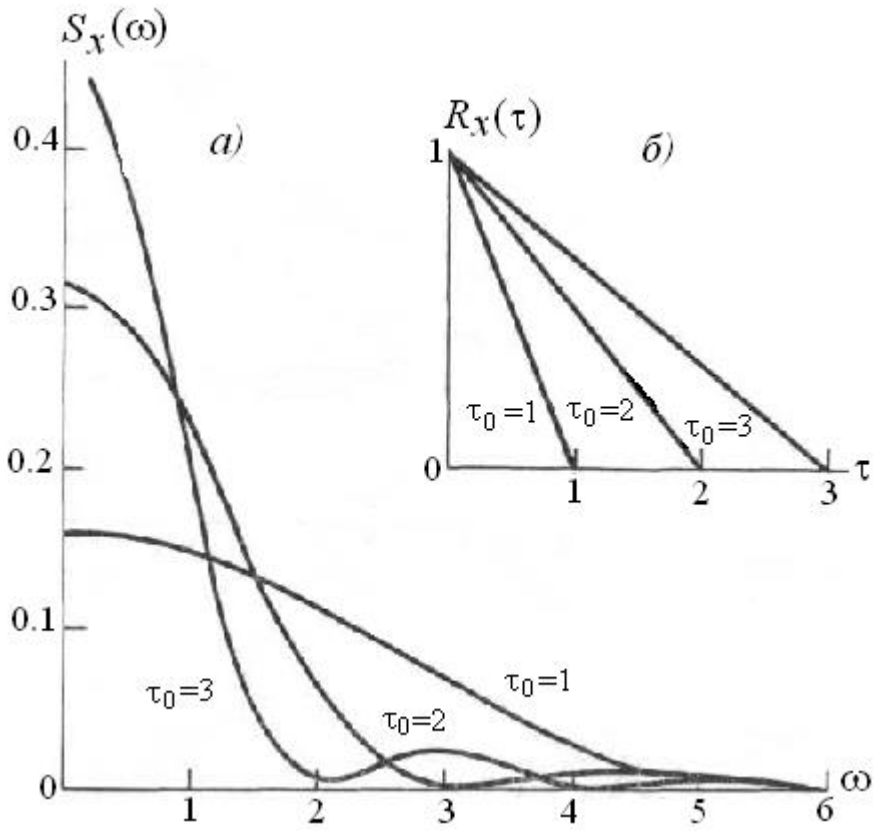


Рисунок 7.5 – Графіки кореляційної функції (б) та спектральної щільності (а) (до прикладу 3)

Вона може використовуватися для апроксимації швидко згасаючої монотонної коваріаціоної функції.

Розрахуємо *спектральну щільність* цієї випадкової функції:

$$S_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau=\frac{Д_x}{\pi}\int_0^{\tau_0}(1-\frac{\tau}{\tau_0})\times\cos\omega\tau d\tau=\frac{Д_x}{\pi\omega}\int_0^{\tau_0}(1-\frac{\tau}{\tau_0})d\sin\omega\tau=$$

$$=\frac{Д_x}{\pi\omega}\left[\int_0^{\tau_0}d\sin\omega\tau-\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0}\tau\cos\omega\tau d\tau\right]=\frac{Д_x}{\pi\omega^2\tau_0}(1-\cos\omega\tau_0)\,. \qquad (7.36)$$

Графік спектральної щільності (7.36) наводиться на рис. 7.5а за умов значень параметра $\tau_0=1,2,3$.

Із рис. 7.5 видно, що змінювання спектральної щільності з частотою є коливальним процесом: $S_x(\omega)$ приймає мінімальні значення $S_x(\omega)=0$ за умови $\omega=\frac{2k\pi}{\tau_0}$, $k=1,2,3\ldots$ 3і збільшенням параметра τ_0 збільшуються значення відносних максимумів спектральної щільності, і більш чітко переважаючими у спектрі випадкового процесу є окремі дискретні частоти, а саме $\omega=0$.

Аналізуючи функції (7.35) та (7.36) разом, можна побачити, що коли кореляційна функція стискується (τ_0 зменшується), спектральна щільність розтягується, і навпаки.

4. Часто при дослідженні гідрометеорологічних процесів ми отримуємо *коваріаційну функцію, яка згасає по експоненціальному закону.* Прикладом такої коваріаційної функції є функція вигляду:

$$K_x(\tau)=Д_x e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau \qquad \alpha>0\,. \qquad (7.37)$$

Для цього випадку знайдемо спектральну щільність:

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Д_x e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau\ . \qquad (7.38)$$

Якщо представити $\cos\omega_0\tau$ показниковими функціями за відомими формулами Ейлера, будемо мати:

$$\cos\omega_0\tau=\frac{e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau}}{2}\ . \qquad (7.39)$$

Тоді

$$S_x(\omega)=\frac{Д_x}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau+i\omega_0\tau}+\\ +e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau-i\omega_0\tau}\end{pmatrix}d\tau=\frac{Д_x}{4\pi}\left[\begin{matrix}\int_{-\infty}^{0}\begin{pmatrix} e^{\alpha\tau-i(\omega_0-\omega)\tau}+\\ +e^{\alpha\tau-i(\omega_0+\omega)\tau}\end{pmatrix}d\tau+\\ +\int_{0}^{\infty}\begin{pmatrix} e^{-\alpha\tau-i(\omega_0-\omega)\tau}+\\ +e^{-\alpha\tau-i(\omega_0+\omega)\tau}\end{pmatrix}d\tau\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{Д_x}{4\pi}\left[\frac{1}{\alpha^2+(\omega_0-\omega)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega_0+\omega)^2}\right]=\frac{Д_x\alpha}{4\pi}\frac{\alpha^2+\omega_0^2+\omega^2}{(\alpha^2+\omega_0^2+\omega^2)-4\omega_0^2\omega^2}.\quad(7.40)$$

Характер коваріаційкої функції та спектральної щільності залежить від двох параметрів α і ω_0. Параметр α визначає швидкість затухання амплітуди коливань кореляційної функції. Параметр ω_0 визначає період цього коливального процесу.

На рис. 7.6 наведені графіки функцій $R_x(\tau)$ та $S_x(\omega)$ відповідно для трьох випадків: 1) $\alpha=0.5$; $\omega_0=2$ (крива I); 2) $\alpha=1$; $\omega_0=1$ (крива II); 3) $\alpha=2$; $\omega_0=0.5$ (крива III).

Якщо кореляційна функція має різко виражений коливальний характер, тобто ω_0 − велике, то спектральна щільность $S_x(\omega)$ буде мати максимум приблизно в точці $\omega=\omega_0$ (рис. 7.6). Якщо основну роль в коваріаційній функції $K_x(\omega)$ грає показникова функція (тобто α велике), то функція $S_x(\omega)$ буде мати максимальне значення в точці $\omega=0$.

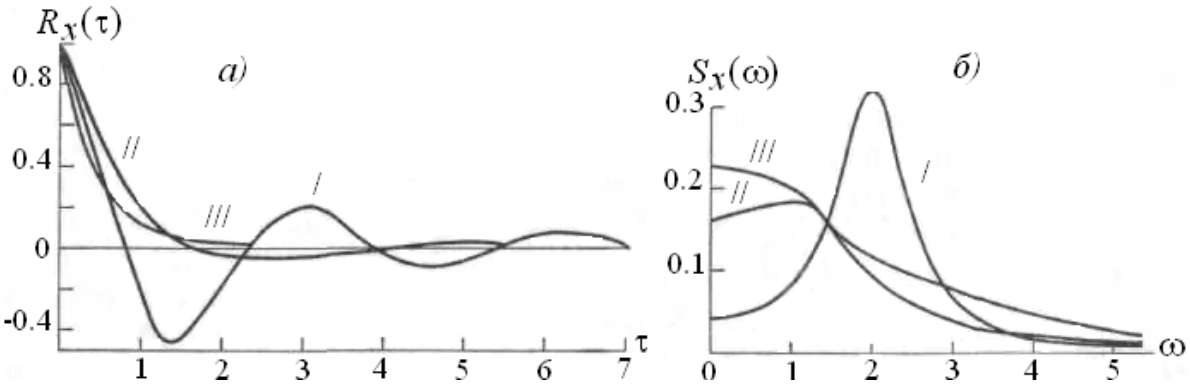


Рисунок 7.6 − Графіки кореляційної функції (а) та спектральної щільності (б) (до прикладу 4)

Із рис. 7.6 випливає, що за умови малої величини відношення $\frac{\alpha}{\omega_0}$ (крива I, $\frac{\alpha}{\omega_0} = 0.25$) графік кореляційної функції наближається до гармонічних коливань частоти ω. У цьому випадку спектральна щільність має чітко виражений максимум за умови $\omega = \omega_0$, у спектрі випадкового процесу переважають частоти, близькі до частоти ω_0, тобто маємо вузькосмуговий процес, спектральна щільність якого має чітко виражений максимум за умови $\omega = \omega_0$, основна енергія процесу зосереджена на частотах близьких до ω_0. При цьому графік спектральної щільності витягується, а ширина смуги спектра зменшується зі зменшенням α, тобто зі збільшенням амплітуди коливань кореляційної функції.

Зі зростанням відношення $\frac{\alpha}{\omega_0}$ прискорюється загасання кореляційної функції, максимум спектральної щільності є більш розмитим. При великих значеннях $\frac{\alpha}{\omega_0}$ (крива III, $\frac{\alpha}{\omega_0} = 4$) кореляційна функція практично відрізняється від нуля тільки за умови невеликих значень τ. При цьому спектральна щільність зі зростанням частоти ω змінюється повільно, залишаючись на значному діапазоні частот близькою до початкового значення $S_x(0)$, процес стає широкосмуговим.

Інколи на практиці зустрічаються випадкові процеси, коваріаційні функції яких не можуть бути з достатньою точністю апроксимовані аналітичними виразами і для обчислення спектральних щільностей використовуються чисельні методи.

Щоб отримати ***статистичні оцінки ймовірносних характеристик*** стаціонарної випадкової функції, інтеграли (7.6)–(7.8) замінюють кінцевими сумами. Для цього інтервал спостережень T роздрібнюють на n рівних частин довжиною Δt, а за значення випадкової функції $X(t)$ на відрізках Δt приймають значення на їх серединах. Таким чином отримаємо статистичні оцінки імовірносних характеристик цієї функції:

$$\hat{m}_x(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_i); \tag{7.41}$$

$$\hat{Д}_x(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x(t_i) - \hat{m}_x(t)\right]^2; \tag{7.42}$$

$$\hat{K}_x(m) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \left[x(t_i) - \hat{m}_x(t) \right] \cdot \left[x(t_{i+m}) - \hat{m}_x(t) \right]; \qquad (7.43)$$

$$\hat{R}_x(m) = \hat{K}_x(m) \Big/ \hat{Д}_x(t). \qquad (7.44)$$

Приріст аргументу τ, що знаходиться у формулі (7.8), пов'язаний з кількістю точок на осі τ простою формулою: $m = \frac{\tau \cdot n}{T}$.

Точність статистичних оцінок $\hat{m}_x(t)$, $\hat{Д}_x(t)$, $\hat{K}_x(m)$, $\hat{R}_x(m)$ буде визначатися тривалістю спостережень T (величиною n при визначеному Δt), величиною Δt, максимальним зсувом аргументу ($\tau_{\max}$). Під $\tau_{\max}$ будемо вважати той інтервал часу, за який графік кореляційної функції (7.44) увійде в трубку допустимих похибок, тобто $\left| r(\tau_{\max}) \right| \le \delta$.

Треба зробити деякі рекомендації щодо попереднього вибору $\tau_{\max}$ і T, якщо виходити з можливості зображення стаціонарного випадкового процесу суперпозицією простих гармонік:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \qquad (7.45)$$

де

a_k – некорельовані випадкові величини з нульовим середнім значенням;

φ_k – випадкова фаза;

ω_k – частота k-тої гармоніки.

У цьому випадку

$$\tau_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_{\min}} \qquad (7.46)$$

і період самої низької гармоніки спектра випадкового процесу не повинен перебільшувати $\tau_{\max}$.

При виборі T також необхідно приймати до уваги нижчу частоту спектра. При цьому можна користуватися полуемпіричною формулою:

$$T \geq \frac{1}{\omega_{\min}\delta} \quad . \tag{7.47}$$

Для величин δ=0.02 ... 0.05 будемо мати $T \geq {(20\ldots50)}/{\omega_{\min}}$ або з урахуванням (7.46) :

$$T = (4{,}5\ldots10)\tau_{\max} \ . \tag{7.48}$$

Вибір величини Δt *визначається самою високочастотною складовою* $\omega_{\max}$ *випадкової функції* $X(t)$. При цьому можливо рекомендувати вибирати довжину елементарної ділянки Δt таким чином, щоб на повний період $\frac{2\pi}{\omega_{\max}}$ приходилося до 5 . . . 10 точок, тобто:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_{\max}}(5\ldots10). \tag{7.49}$$

Значення $\omega_{\min}$ та $\omega_{\max}$ можуть оцінюватися, наприклад, на підставі даних про процеси, які схожі з тим, що розглядається, а також на підставі вивчення фізичного змісту останнього. Отримані попередні значення Δt, T, $\tau_{\max}$ можна потім уточнювати в процесі побудови кореляційної функції.

У деяких випадках $\tau_{\max}$ визначають, виходячи з умови:

$$\tau_{\max} = 0{,}1\,N, \tag{7.50}$$

де

N – число точок у випадковій послідовності.

Від вибору $\tau_{\max}$ залежить і результат розрахування ***статистичної оцінки спектральної щільності випадкового процесу*** – $\hat{S}(\omega)$, яка отримується за формулою:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} e^{-i\omega\tau}\lambda(\tau)\hat{K}(\tau)d\tau, \tag{7.51}$$

де

$\lambda(\tau)$ – *згладжуюча функція* (*«кореляційне вікно»*);

i – уявна одиниця.

За умови малих $\tau_{\max}$ буде відбуватися зсунення оцінки спектральної щільності, за умови великих $\tau_{\max}$ – збільшення дисперсії оцінки.

Спектральні щільності, що розраховані по вибіркових даних, будуть відрізнятися від спектра генеральної сукупності. Для оцінки значущості спектра використовується перевірка статистичної гіпотези на заданому рівні значущості. Нульова гіпотеза H_0 полягає у тому, що в спектрі часової послідовності відсутні гармонічні коливання на фоні спектра реалізації «***білого шуму***» (його спектр характеризується умовою $S(\omega)=S_x(0)=const$) або «***червоного шуму***» (спектром якого є експоненціально спадаюча крива).

Вважається, що вихідна вибірка має нормальний розподіл. Тоді значення спектральної щільності мають χ^2 – розподіл з числом степенів вільності ν. Перевірка H_0 полягає у порівнянні $\hat{S}_x(\omega)$ зі значеннями $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності, що приймаються в якості меж довірчого інтервалу $I_\alpha\left[S_x(0)\right]$ або $I_\alpha\left[S_q(\omega)\right]$. У цьому випадку:

$$S_{кр}(\omega)=\frac{\chi^2(\alpha,\nu)}{\nu}, \tag{7.52}$$

де

$$\nu=\frac{2N-0.5\tau_{\max}}{\tau_{\max}}. \tag{7.53}$$

Тоді для побудови довірчого інтервалу використовується рівність:

$$I_\alpha\left[S_x(0)\right]=\bar{S}_x(\omega)\frac{\chi^2(\alpha,\nu)}{\nu}, \tag{7.54}$$

де

$\bar{S}_x(\omega)$ – середній рівень спектральної щільності, що відповідає «*білому шуму*».

При значному внеску у випадковий процес «*червоного шуму*» спектр випадкової функції порівнюється з довірчим інтервалом, який будується на основі рівності:

$$I_\alpha\left[S_q(\omega)\right]=S_q(\omega)\frac{\chi^2(\alpha,\nu)}{\nu}, \tag{7.55}$$

де

$$S_q(\omega)=\bar{S}_x(\omega)\frac{1-r_x^2(\tau_1)}{1+r_x^2(\tau_1)-2r_x(\tau_1)\cos\pi k/m} \quad (k=\overline{1,m}) \tag{7.56}$$

Рівняння (7.56) утримує значення кореляційної функції одиничного зсуву $\left[r_x(\tau_1)\right]$ і максимального зсуву (m) на спектрограмі ($m \sim 2\tau_{\max}$).

Вихід піків (сплесків) спектральної щільності за верхню межу довірчого інтервалу свідчить про вірогідність частот, на яких відбуваються періодичні коливання випадкового процесу.

Розв'язання типових задач

На рівні значущості α перевірити статистичну гіпотезу про вірогідність оцінки спектральної щільності, яка отримана в результаті спектрального розкладання випадкової стаціонарної функції.

1. Враховуючи алгоритм дослідження стаціонарного випадкового процесу, який реалізовано на ПЕОМ, були отримані оцінки автокореляційної функції та спектральної щільності меридіональної складової швидкості вітру на висоті 5 км за 11-річний період радіозондування атмосфери помірних широт з дискретністю даних один тиждень (табл. 7.1).

Таблиця 7.1 – Інформація до розв'язання типової задачі 1

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	3.264	16	0.088	1.442	32	2.082	48	1.820
1	0.068	3.209	17	0.036	1.199	33	2.204	49	1.953
2	0.025	3.060	18	-0.023	1.102	34	2.320	50	2.075
3	0.062	2.857	19	-0.016	1.187	35	2.335	51	2.138
4	0.098	2.649	20	0.056	1.434	36	2.214	52	2.116
5	0.026	2.467	21	0.026	1.767	37	2.001	53	2.015
6	-0.041	2.319	22	-0.089	2.079	38	1.777	54	1.865
7	0.025	2.199	23	-0.022	2.282	39	1.604	55	1.705
8	-0.021	2.109	24	0.030	2.352	40	1.509	56	1.566
9	0.089	2.065	25	-0.023	2.335	41	1.487	57	1.474
10	0.076	2.084	26	0.019	2.299	42	1.518	58	1.442
11	0.023	2.150	27	0.037	2.277	43	1.573		
12	-0.066	2.207	28	-0.026	2.247	44	1.622		
13	-0.008	2.178	29	-0.019	2.181	45	1.649		
14	-0.021	2.019	30		2.091	46	1.671		
15	-0.016	1.748	31		2.040	47	1.721		

За даними табл. 7.1 побудовані графіки автокореляційної функції (рис. 7.7) та спектральної щільності (рис. 7.8).

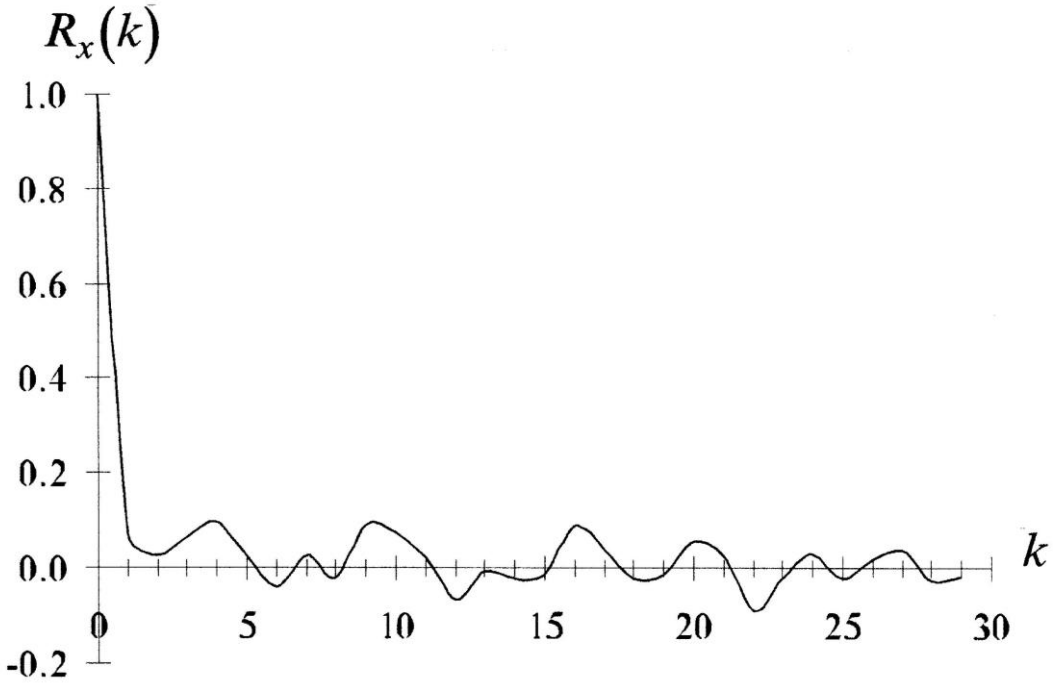


Рисунок 7.7 – Кореляційна функція меридіональної складової швидкості вітру на висоті 5 км

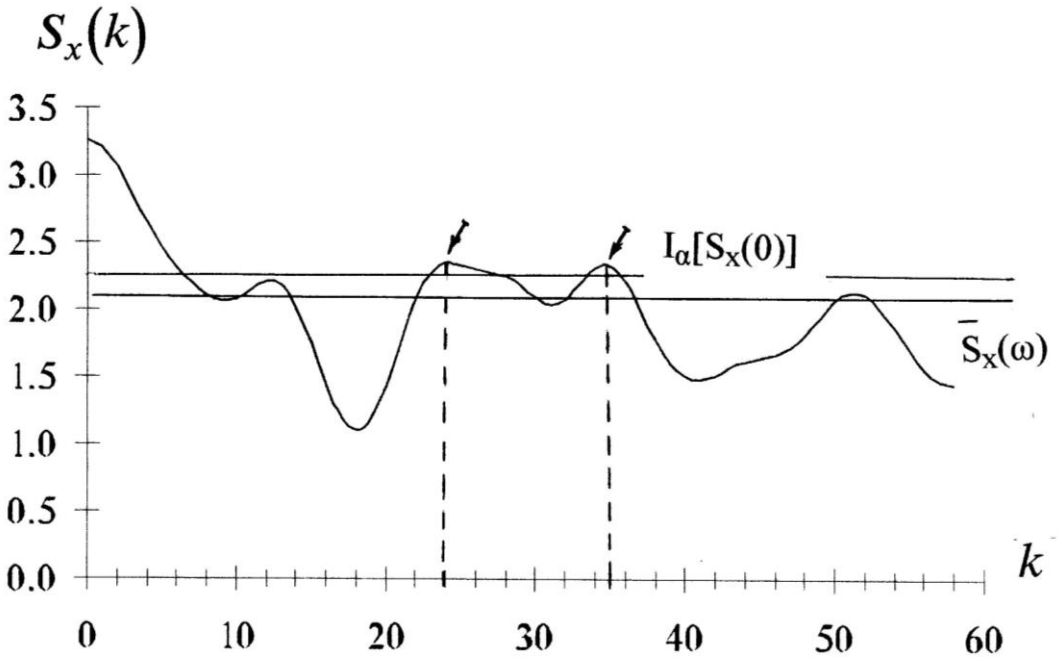


Рисунок 7.8 – Спектральна щільність меридіональної складової швидкості вітру на висоті 5 км

Треба з ймовірністю 70% знайти статистично значущі періодичності в цьому випадковому процесі.

Для визначення вірогідності оцінки спектральної щільності, яка представлена на рис. 7.8, використовується довірчий інтервал, в межах якого значення оцінки спектра попадає з заданою ймовірністю $P = 0.70$. Нуль-гіпотеза формулюється таким чином: припустимо, що на рівні значущості $\alpha = 0.30$ відсутні гармонічні коливання у спектрі меридіональної складової швидкості вітру на фоні спектру реалізації «білого шуму». Перевірка цієї статистичної гіпотези полягає у порівнянні оцінки спектральної щільності $\hat{S}_x(\omega)$ із значенням $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності $P = 70\%$, які приймаються в якості меж довірчого інтервалу. Для нього використовується рівність (7.54), де $\bar{S}_x(\omega)$ – середній рівень спектральної щільності, який прирівнюється до «білого шуму», і розраховується за формулою (7.57) в інтервалі значень автокореляційної функції в межах зсувів (запізнювань) від 1 до $\tau_{\max}$:

$$\bar{S}_x(\omega) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} S_{x_k}(\omega) . \qquad (7.57)$$

Для знаходження $S_{кр}(\omega)$ необхідно розрахувати число степенів вільності ν, використовуючи рівність (7.53). Але перш ніж почати розрахунки необхідних характеристик, внесемо деякі пояснення.

По-перше, дискретність даних, які були отримані в результаті радіозондування атмосфери, складає 1 тиждень. Тому кожний рік задавався 48-ми, а весь період – 528 значеннями.

По-друге, вибір максимального часового зсуву автокореляційної функції ($\tau_{\max}$) приймався з урахуванням можливої точності оцінювання спектральної щільності, а саме за відомою формулою (за умови $\delta = 0.05$):

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot \pi \cdot N}{120} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 528}{120} \approx 30.$$

Розрахунок числа степенів вільності ν:

$$\nu = \frac{2 \cdot N - 0.5 \cdot \tau_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{2 \cdot 528 - 0.5 \cdot 30}{30} \approx 35.$$

По таблиці додатку М знаходимо $\chi^2_{кр}(\alpha, \nu)$. За умов $\alpha = 0.30$ та $\nu = 35$ $\chi^2_{кр}(0.30; 35) = 38.9$.

Тоді маємо: $S_{кр}(\omega) = 1.11$.

Верхня ж межа довірчого інтервалу при $\bar{S}_x(\omega) = 2.007$ складає:

$$I_\alpha\left[S_x(0)\right] = 2.007 \times 1.11 = 2.228 .$$

Коливання спектральної щільності, які виходять за межу знайденого інтервалу з ймовірністю 70 % є статистично значущими в даному процесі. Їх треба позначити на графіку спектральної щільності (рис. 7.8), а для вершин цих коливань знайти частоту (період), яким вони відповідають.

За умови k=24 статистична оцінка спектральної щільності дорівнює: $\hat{S}_x(\omega) = 2.352$. Другий пік ($k$=35): $\hat{S}_x(\omega) = 2.335$.

Діапазон частот, які аналізуються, праворуч по осі τ є обмеженим ***частотою Найквіста*** (це *мінімальний період коливань, який може бути виявленим у випадковому процесі*).

Відомо, що

$$f = \frac{k}{2 \cdot m \cdot \Delta t}, \tag{7.58}$$

де

$k = 0,1,2,\ldots,m$. Число m визначається із загального числа точок N, тобто $N = 2m + 1$ для непарного числа точок і, якщо вибірка має парне число точок, то $m = \frac{N}{2}$.

Частота Найквіста (або ***частота накладень***) утворюється за умови $k = m$, тобто:

$$f_н = \frac{m}{2 \cdot m \cdot \Delta t} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}. \tag{7.59}$$

В нашому випадку Δt дорівнює одному тижню, а мінімальний період коливань, який при цьому може бути знайденим, дорівнює двом тижням.

Таким чином, за допомогою спектрального аналізу в меридіональній складовій швидкості вітру в середній тропосфері були виявлені з ймовірністю 70% статистично значущі періодичності, а саме – квазіпіврічна (довгоперіодна), з періодом коливань 22 тижні (5.5 місяців) та чотирьохмісячна (середньоперіодна), з періодом 15.1 тижня (3.8 місяця).

2. За допомогою спектрального аналізу на рівні значущості $\alpha = 0.20$ виявити періодичності в зональній складовій швидкості вітру на висоті 55 км за 8-річний період. Часовий ряд сформовано за результатами ракетного зондування атмосфери тропічних широт. Дискретність даних складає також 1 тиждень. На основі зазначеної вихідної інформації, реалізуючи відомий алгоритм, були отримані статистичні оцінки кореляційної функції та спектральної щільності даного стаціонарного випадкового процесу, які представлені в табл. 7.2:

Таблиця 7.2 – Інформація до розв'язання типової задачі 2

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	7.691	16	-0.143	1.211	32	1.012	48	0.740
1	0.555	7.868	17	-0.064	1.378	33	1.024	49	0.728
2	0.404	8.329	18	0.019	1.528	34	1.049	50	0.689
3	0.372	8.838	19	0.080	1.591	35	1.099	51	0.642
4	0.272	9.018	20	0.108	1.546	36	1.169	52	0.607
5	0.190	8.523	21	0.139	1.423	37	1.231	53	0.589
6	0.147	7.292	22	0.163	1.278	38	1.250	54	0.583
7	0.044	5.637	23	0.182	1.154	39	1.198	55	0.582
8	-0.076	4.054	24	0.204	1.064	40	1.077	56	0.579
9	-0.097	2.899	25	0.174	1.000	41	0.916	57	0.576
10	-0.134	2.218	26	0.142	0.953	42	0.759	58	0.574
11	-0.149	1.832	27	0.129	0.926	43	0.648		
12	-0.107	1.551	28	0.063	0.924	44	0.602		
13	-0.163	1.310	29	0.002	0.944	45	0.616		
14	-0.169	1.146	30		0.973	46	0.665		
15	-0.139	1.114	31		0.998	47	0.716		

За цими даними побудовані графіки кореляційної функції (рис. 7.9) та спектральної щільності (рис. 7.10) процесу, що підлягає дослідженню.

Для визначення вірогідності оцінки спектральної щільності зональної компоненти швидкості вітру використовувався довірчий інтервал, в межах якого значення оцінки спектра попадає з заданою ймовірністю $P = 80\%$. Нуль-гіпотеза формулюється таким чином: припустимо, що на рівні значущості $\alpha = 0.20$ відсутні гармонічні коливання у спектрі зональної складової швидкості вітру на фоні спектру реалізації «червоного шуму».

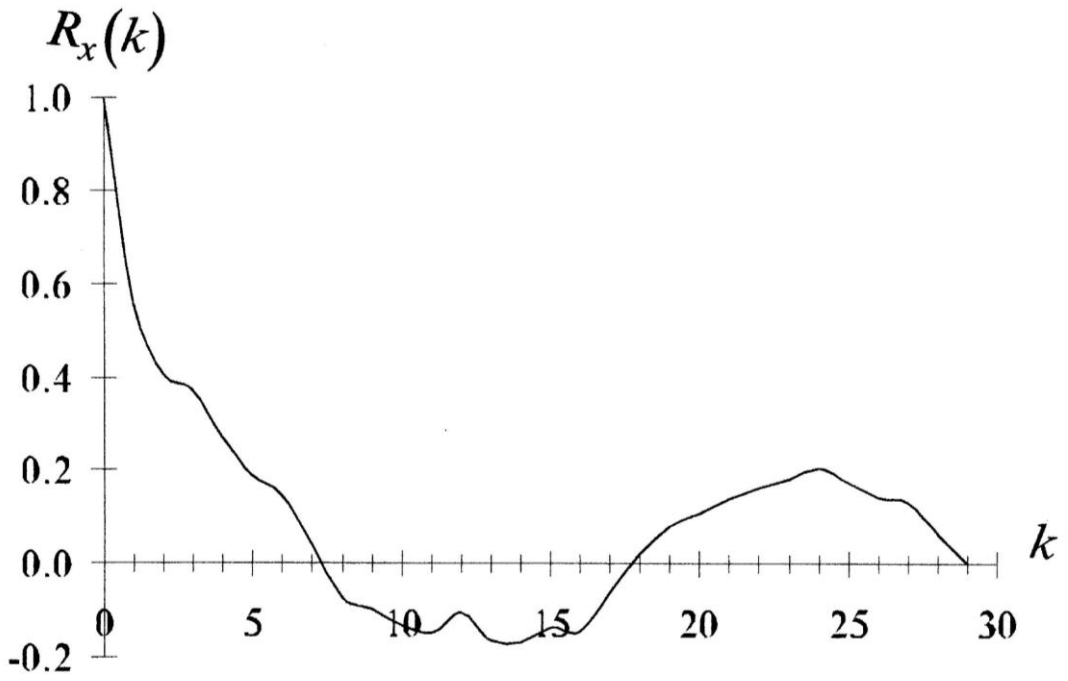


Рисунок 7.9 – Кореляційна функція зональної складової швидкості вітру на висоті 55 км

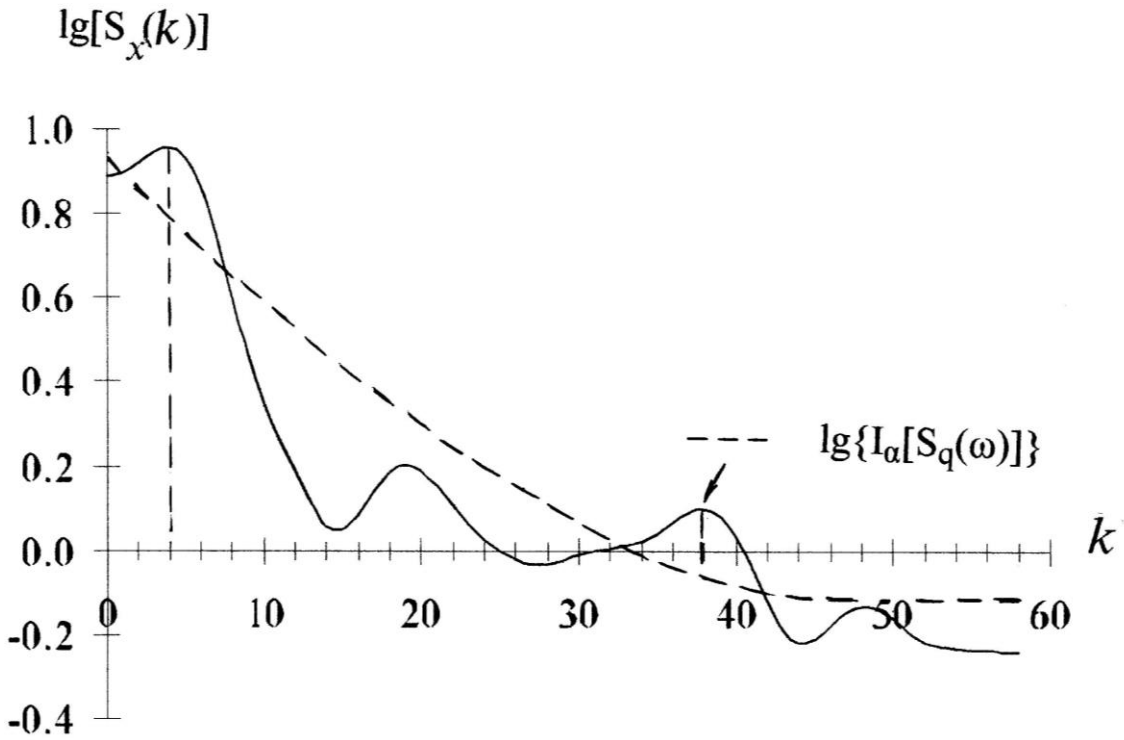


Рисунок 7.10 – Спектральна щільність зональної складової швидкості вітру на висоті 55 км

При значному внеску в випадковий процес «червоного шуму» (*коливань з внутрішньорядовою зв'язністю*), в силу стаціонарності випадкового процесу, лінійний середній рівень спектральної щільності перетворюється у нелінійний, спадаючий до низьких частот.

В даному випадку перевірка статистичної гіпотези полягає у порівнянні оцінки спектральної щільності $\hat{S}_x(\omega)$ із значенням $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності $P = 0.80$, які приймаються в якості меж довірчого інтервалу. Тепер він будується на основі рівності (7.55), $S_{кр}(\omega)$ та $S_q(\omega)$ визначаються відповідно за формулами (7.52) та (7.56) . ***Величина*** $S_q(\omega)$ ***є оцінкою континууму «червоного шуму».***

Число степенів вільності ν у цьому прикладі дорівнює:

$$\nu = \frac{2 \cdot 384 - 0.5 \cdot 30}{30} = 25.$$

По таблиці додатку М за умов $\alpha = 0.20$ та ν=25 знаходимо $\chi^2_{кр}(\alpha, \nu)$.

$$\chi^2_{кр}(0.20; 25) = 30.7 \text{ , а } \quad S_{кр}(\omega) = 1.228.$$

Середній рівень спектральної щільності, який прирівнюється до «білого шуму», розраховувався в інтервалі значень автокореляційної функції в межах зсувів від 1 до 30 і дорівнює 2.04.

Щоб отримати верхню межу довірчого інтервалу за формулою (7.55), краще всі розрахунки занести в таблицю (табл. 7.3).

Таблиця 7.3 – Розрахунки довірчих інтервалів (до типової задачі 2)

k	$S_q(\omega)$	$I_\alpha\left[S_q(\omega)\right]$	$\lg\left[S_q(\omega)\right]$	$\lg\left\{I_\alpha\left[S_q(\omega)\right]\right\}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
0	7.23	8.68	0.85	0.94
10	4.00	4.80	0.60	0.68
20	1.78	2.14	0.25	0.33
30	1.02	1.22	0.09	0.09
40	0.72	0.87	-0.14	-0.06
50	0.60	0.72	-0.22	-0.14
58	0.58	0.69	-0.24	-0.16

Крім того, щоб наочно представити графік спектральної щільності та показати межі довірчого інтервалу, доцільно використати логарифмічну шкалу спектральної щільності.

Для виділених точок (k) значення оцінки континууму «червоного шуму» та довірчого інтервалу нанесли на графік спектральної щільності (рис. 7.10). Коливання, які вийшли за верхню межу отриманого довірчого інтервалу з ймовірністю 80% є статистично значущими.

Таким чином, за допомогою спектрального аналізу з ймовірністю 80% в зональній складовій швидкості вітру на висоті 55 км в тропічних широтах виявлені дві статистично значущі періодичності. Це – квазідворічна (96 тижнів) та короткоперіодна (10.1 тижні), відома як хвиля Маддена-Джуліана.

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення випадкової функції, випадкового процесу, випадкової послідовності.
2. Якими ймовірносними характеристиками описують випадкові функції?
3. Яка функція є стаціонарною випадковою функцією та якими ймовірносними характеристиками вона володіє?
4. Що називають спектральним розкладанням стаціонарної випадкової функції?
5. Дати визначення спектральної щільності випадкової функції та якими основними властивостями вона володіє?
6. Як отримати нормовану спектральну щільність випадкового процесу?
7. Які різновиди випадкових процесів, в залежності від кореляційної функції, Вам відомі?
8. Як розрахувати статистичні оцінки ймовірносних характеристик випадкової функції?
9. Якою умовою характеризується спектр «білого шуму»? «червоного шуму»?
10. Як розрахувати статистичну оцінку спектральної щільності випадкового процесу?
11. Що називають статистичною гіпотезою та в чому полягає основний принцип її перевірки?
12. Що називають рівнем значущості та довірчою ймовірністю?
13. Як удосконалитися, що отримана на основі окремої реалізації статистична оцінка спектральної щільності випадкового процесу є вірогідною?
14. Що називають частотою Найквіста та за яких умов вона утворюється?

Задачі

Для розв'язання задач цього розділу використовуються заздалегідь розраховані на ПЕОМ для складових швидкості вітру статистичні оцінки автокореляційної функції ($R_x(\tau)$ за умови $\tau = \overline{0, \tau_{\max}}$) та спектральної щільності ($\hat{S}_x(\omega)$ за умови $\tau = k \cdot \Delta\tau$, де k=0, 1, 2, . . .). Вихідною інформацією для оцінювання цих функцій є дані радіо- та ракетного зондування тропосфери і стратосфери екваторіальних, субтропічних та помірних широт Північної півкулі. Дискретність часових рядів зональної та меридіональної компонент швидкості вітру складає один тиждень, а їх загальний об'єм (N) змінюється в залежності від періоду зондування атмосфери.

Використовуючи наведені в задачах 7.1-7.15 оцінки перелічених функцій, побудувати, а потім проаналізувати графіки автокореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу, який досліджується. На рівні значущості α = 0.20 виявити статистично значущі періодичності в складових швидкості вітру та відповісти на ряд запитань викладача.

7.1. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 35 км (N=528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	17.656	16	-0.339	0.601	32	0.390	48	0.312
1	0.834	17.861	17	-0.413	0.589	33	0.345	49	0.320
2	0.759	17.894	18	-0.459	0.561	34	0.305	50	0.319
3	0.692	16.633	19	-0.491	0.520	35	0.272	51	0.309
4	0.639	13.611	20	-0.517	0.482	36	0.246	52	0.290
5	0.563	9.553	21	-0.541	0.460	37	0.226	53	0.268
6	0.465	5.781	22	-0.568	0.451	38	0.208	54	0.249
7	0.403	3.210	23	-0.577	0.446	39	0.195	55	0.234
8	0.311	1.898	24	-0.585	0.440	40	0.188	56	0.225
9	0.219	1.355	25	-0.579	0.436	41	0.189	57	0.220
10	0.132	1.102	26	-0.565	0.439	42	0.200	58	0.218
11	0.051	0.923	27	-0.551	0.449	43	0.219		
12	-0.027	0.786	28	-0.527	0.462	44	0.242		
13	-0.112	0.695	29	-0.493	0.468	45	0.264		
14	-0.192	0.640	30		0.458	46	0.283		
15	-0.267	0.612	31		0.430	47	0.299		

7.2 Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 55 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	17.960	16	-0.357	0.400	32	0.285	48	0.223
1	0.884	18.222	17	-0.408	0.395	33	0.270	49	0.201
2	0.820	18.417	18	-0.455	0.377	34	0.250	50	0.171
3	0.755	17.379	19	-0.479	0.343	35	0.230	51	0.142
4	0.662	14.555	20	-0.508	0.302	36	0.214	52	0.123
5	0.571	10.575	21	-0.527	0.262	37	0.202	53	0.117
6	0.473	6.716	22	-0.518	0.228	38	0.194	54	0.121
7	0.385	3.930	23	-0.523	0.204	39	0.191	55	0.130
8	0.283	2.355	24	-0.522	0.190	40	0.192	56	0.142
9	0.175	1.576	25	-0.514	0.185	41	0.195	57	0.150
10	0.096	1.143	26	-0.497	0.186	42	0.196	58	0.154
11	0.012	0.839	27	-0.485	0.196	43	0.196		
12	-0.059	0.625	28	-0.466	0.215	44	0.200		
13	-0.144	0.497	29	-0.443	0.243	45	0.209		
14	-0.212	0.433	30		0.270	46	0.221		
15	-0.284	0.407	31		0.285	47	0.229		

7.3. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 50 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	16.988	16	-0.368	0.469	32	0.308	48	0.228
1	0.877	17.365	17	-0.419	0.447	33	0. 301	49	0.239
2	0.804	17.860	18	-0.460	0.415	34	0.293	50	0.236
3	0.737	17.191	19	-0.481	0.373	35	0.282	51	0.218
4	0.649	14.683	20	-0.508	0.327	36	0.264	52	0.190
5	0.550	10.879	21	-0.522	0.285	37	0.238	53	0.162
6	0.447	7.040	22	-0.528	0.251	38	0.207	54	0.139
7	0.367	4.157	23	-0.533	0.229	39	0.179	55	0.123
8	0.248	2.447	24	-0.538	0.222	40	0.160	56	0.114
9	0.148	1.563	25	-0.528	0.229	41	0.151	57	0.109
10	0.053	1.092	26	-0.513	0.247	42	0.149	58	0.108
11	0.034	0.811	27	-0.505	0.269	43	0.150		
12	-0.106	0.648	28	-0.482	0.290	44	0.156		
13	-0.184	0.565	29	-0.455	0.306	45	0.167		
14	-0.252	0.520	30		0.314	46	0.185		
15	-0.321	0.490	31		0.314	47	0.207		

7.4. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 40 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	16.333	16	-0.361	0.456	32	0.317	48	0.351
1	0.831	16.700	17	-0.419	0.426	33	0.277	49	0.342
2	0.769	17.175	18	-0.467	0.396	34	0.253	50	0.330
3	0.698	16.505	19	-0.492	0.368	35	0.240	51	0.315
4	0.621	14.040	20	-0.499	0.351	36	0.231	52	0.297
5	0.535	10.335	21	-0.514	0.346	37	0.225	53	0.279
6	0.414	6.645	22	-0.528	0.348	38	0.223	54	0.260
7	0.337	3.939	23	-0.525	0.353	39	0.226	55	0.244
8	0.252	2.399	24	-0.519	0.365	40	0.236	56	0.232
9	0.155	1.645	25	-0.524	0.387	41	0.251	57	0.225
10	0.062	1.242	26	-0.524	0.419	42	0.272	58	0.223
11	-0.018	0.967	27	-0.511	0.453	43	0.296		
12	-0.088	0.768	28	-0.499	0.472	44	0.320		
13	-0.165	0.635	29	-0.464	0.464	45	0.339		
14	-0.246	0.549	30		0.427	46	0.350		
15	-0.308	0.493	31		0.371	47	0.354		

7.5. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 20 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	19.366	16	-0.360	0.452	32	0.369	48	0.321
1	0.816	19.497	17	-0.445	0.448	33	0.384	49	0.340
2	0.767	19.262	18	-0.490	0.449	34	0.335	50	0.353
3	0.731	17.480	19	-0.554	0.452	35	0.338	51	0.354
4	0.698	13.755	20	-0.623	0.457	36	0.354	52	0.344
5	0.638	9.025	21	-0.653	0.470	37	0.371	53	0.329
6	0.560	4.824	22	-0.682	0.491	38	0.373	54	0.317
7	0.479	2.135	23	-0.697	0.517	39	0.355	55	0.311
8	0.389	0.917	24	-0.706	0.539	40	0.325	56	0.310
9	0.311	0.545	25	-0.699	0.545	41	0.295	57	0.310
10	0.204	0.460	26	-0.686	0.529	42	0.276	58	0.311
11	0.098	0.438	27	-0.651	0.494	43	0.271		
12	0.006	0.446	28	-0.616	0.455	44	0.274		
13	-0.094	0.470	29	-0.567	0.425	45	0.280		
14	-0.185	0.481	30		0.405	46	0.289		
15	-0.273	0.468	31		0.388	47	0.302		

7.6. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 15 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	31.137	16	0.348	0.260	32	0.259	48	0.200
1	0.884	28.999	17	0.321	0.270	33	0.275	49	0.204
2	0.868	23.423	18	0.291	0.285	34	0.286	50	0.210
3	0.849	16.405	19	0.273	0.291	35	0.287	51	0.219
4	0.824	9.977	20	0.246	0.280	36	0.277	52	0.230
5	0.788	5.300	21	0.235	0.255	37	0.260	53	0.238
6	0.766	2.505	22	0.219	0.226	38	0.240	54	0.240
7	0.732	1.117	23	0.224	0.204	39	0.222	55	0.235
8	0.684	0.556	24	0.228	0.191	40	0.210	56	0.228
9	0.642	0.396	25	0.223	0.186	41	0.203	57	0.224
10	0.606	0.382	26	0.234	0.186	42	0.205	58	0.221
11	0.536	0.387	27	0.259	0.191	43	0.205		
12	0.516	0.366	28	0.268	0.199	44	0.202		
13	0.476	0.326	29	0.289	0.210	45	0.198		
14	0.426	0.288	30		0.224	46	0.196		
15	0.383	0.265	31		0.241	47	0.197		

7.7. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 30 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	8.681	16	0.082	0.890	32	1.379	48	1.298
1	0.215	8.250	17	0.050	0.924	33	1.448	49	1.357
2	0.194	7.116	18	0.010	1.030	34	1.607	50	1.432
3	0.245	5.660	19	0.098	1.193	35	1.804	51	1.518
4	0.247	4.283	20	0.005	1.393	36	1.961	52	1.604
5	0.200	3.234	21	0.020	1.606	37	2.014	53	1.669
6	0.179	2.567	22	0.045	1.805	38	1.959	54	1.678
7	0.085	2.198	23	0.047	1.965	39	1.847	55	1.610
8	0.080	1.998	24	0.030	2.057	40	1.742	56	1.483
9	0.183	1.857	25	0.053	2.069	41	1.674	57	1.359
10	0.136	1.710	26	0.052	2.005	42	1.627	58	1.307
11	0.118	1.535	27	0.062	1.889	43	1.566		
12	0.086	1.347	28	0.060	1.750	44	1.475		
13	0.132	1.169	29	0.047	1.612	45	1.373		
14	0.058	1.023	30		1.490	46	1.297		
15	0.077	0.926	31		1.402	47	1.272		

7.8. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в субтропічних широтах на висоті 20 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	2.838	16	0.000	1.866	32	1.570	48	2.427
1	0.109	2.841	17	0.062	1.989	33	1.558	49	2.410
2	0.095	2.844	18	-0.090	2.106	34	1.590	50	2.210
3	0.000	2.839	19	0.003	2.193	35	1.621	51	1.942
4	0.041	2.841	20	-0.017	2.237	36	1.617	52	1.736
5	0.043	2.876	21	-0.046	2.223	37	1.575	53	1.662
6	-0.031	2.947	22	-0.029	2.147	38	1.514	54	1.708
7	0.010	3.007	23	-0.032	2.029	39	1.450	55	1.807
8	-0.074	2.981	24	-0.056	1.907	40	1.379	56	1.894
9	-0.046	2.822	25	0.043	1.828	41	1.297	57	1.944
10	0.014	2.550	26	0.053	1.810	42	1.221	58	1.958
11	-0.048	2.237	27	0.003	1.833	43	1.205		
12	0.106	1.967	28	-0.026	1.851	44	1.308		
13	-0.110	1.794	29		1.823	45	1.555		
14	0.029	1.733	30		1.741	46	1.900		
15	0.016	1.768	31		1.640	47	2.233		

7.9. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в екваторіальній зоні на висоті 40 км (N =384):

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	22.387	16	0.240	0.563	32	0.398	48	0.500
1	0.758	21.001	17	0.274	0.605	33	0.394	49	0.521
2	0.714	17.500	18	0.327	0.660	34	0.402	50	0.513
3	0.662	13.341	19	0.352	0.706	35	0.428	51	0.483
4	0.630	9.736	20	0.372	0.729	36	0.468	52	0.445
5	0.583	7.046	21	0.402	0.722	37	0.509	53	0.419
6	0.528	5.004	22	0.422	0.696	38	0.532	54	0.416
7	0.451	3.321	23	0.427	0.661	39	0.522	55	0.440
8	0.373	1.987	24	0.249	0.625	40	0.480	56	0.478
9	0.340	1.126	25	0.411	0.586	41	0.421	57	0.513
10	0.293	0.732	26	0.414	0.543	42	0.365	58	0.428
11	0.244	0.626	27	0.390	0.498	43	0.331		
12	0.247	0.610	28	0.366	0.458	44	0.328		
13	0.197	0.558	29	0.317	0.430	45	0.354		
14	0.210	0.588	30		0.414	46	0.402		
15	0.218	0.546	31		0.405	47	0.456		

7.10. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ зональної складової швидкості вітру в екваторіальній зоні на висоті 10 км (N =384):

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	10.209	16	-0.147	1.525	32	1.328	48	0.926
1	0.484	10.218	17	-0.197	1.387	33	1.335	49	0.866
2	0.335	10.021	18	-0.225	1.271	34	1.368	50	0.788
3	0.377	9.197	19	-0.132	1.183	35	1.413	51	0.711
4	0.276	7.604	20	-0.221	1.139	36	1.429	52	0.655
5	0.248	5.595	21	-0.234	1.146	37	1.378	53	0.619
6	0.214	3.774	22	-0.184	1.194	38	1.268	54	0.585
7	0.214	2.570	23	-0.228	1.253	39	1.154	55	0.536
8	0.178	2.034	24	-0.235	1.288	40	1.091	56	0.472
9	0.155	1.939	25	-0.221	1.285	41	1.091	57	0.415
10	0.123	2.015	26	-0.208	1.253	42	1.119	58	0.393
11	0.050	2.086	27	-0.226	1.224	43	1.128		
12	-0.014	2.081	28	-0.213	1.225	44	1.098		
13	-0.038	1.993	29	-0.164	1.259	45	1.046		
14	-0.095	1.847	30		1.302	46	0.999		
15	-0.123	1.681	31		1.325	47	0.964		

7.11. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в екваторіальній зоні на висоті 25 км (N =384):

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	7.365	16	0.070	1.898	32	1.501	48	1.047
1	0.235	6.828	17	0.074	1.766	33	1.599	49	1.075
2	0.101	5.466	18	0.135	1.721	34	1.704	50	1.147
3	0.167	3.860	19	0.071	1.733	35	1.845	51	1.219
4	0.030	2.557	20	0.044	1.759	36	2.033	52	1.255
5	0.042	1.818	21	0.186	1.759	37	2.226	53	1.240
6	0.129	1.620	22	0.161	1.718	38	2.349	54	1.174
7	0.077	1.805	23	0.067	1.661	39	2.354	55	1.072
8	0.120	2.206	24	0.076	1.629	40	2.252	56	0.962
9	0.233	2.670	25	0.118	1.632	41	2.097	57	0.877
10	0.174	3.043	26	0.087	1.638	42	1.935	58	0.844
11	0.208	3.201	27	0.158	1.600	43	1.774		
12	0.167	3.106	28	0.125	1.510	44	1.600		
13	0.151	2.819	29	0.050	1.415	45	1.409		
14	0.084	2.460	30		1.376	46	1.227		
15	0.079	2.134	31		1.414	47	1.097		

7.12. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в помірних широтах на висоті 35 км (N =528):

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	12.318	16	-0.019	1.551	32	0.887	48	1.037
1	0.507	11.961	17	-0.037	1.486	33	0.992	49	1.982
2	0.410	10.912	18	-0.061	1.410	34	1.100	50	0.902
3	0.377	9.276	19	-0.071	1.342	35	1.180	51	0.820
4	0.307	7.313	20	-0.069	1.298	36	1.213	52	0.753
5	0.302	5.397	21	-0.076	1.279	37	1.194	53	0.712
6	0.278	3.866	22	-0.074	1.276	38	1.133	54	0.701
7	0.244	2.862	23	-0.075	1.269	39	1.050	55	0.713
8	0.181	2.314	24	-0.076	1.243	40	0.967	56	0.738
9	0.178	2.044	25	-0.084	1.188	41	0.902	57	0.761
10	0.173	1.894	26	-0.067	1.105	42	0.870	58	0.770
11	0.074	1.786	27	-0.068	1.003	43	0.878		
12	0.079	1.706	28	-0.073	0.903	44	0.920		
13	0.062	1.655	29	-0.041	0.826	45	0.979		
14	0.038	1.624	30		0.793	46	1.031		
15	0.009	1.595	31		0.814	47	1.055		

7.13. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в помірних широтах на висоті 40 км (N =528):

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	9.990	16	-0.017	2.196	32	0.976	48	1.113
1	0.475	9.732	17	-0.033	2.122	33	1.064	49	1.093
2	0.334	8.969	18	-0.042	1.993	34	1.127	50	1.044
3	0.266	7.779	19	-0.051	1.838	35	1.152	51	0.973
4	0.194	6.348	20	-0.062	1.690	36	1.140	52	0.889
5	0.228	4.952	21	-0.055	1.577	37	1.100	53	0.807
6	0.205	3.833	22	-0.070	1.502	38	1.046	54	0.736
7	0.207	3.089	23	-0.058	1.448	39	0.990	55	0.677
8	0.127	2.662	24	-0.052	1.386	40	0.943	56	0.633
9	0.124	2.422	25	-0.044	1.294	41	0.918	57	0.604
10	0.110	2.267	26	-0.046	1.171	42	0.991	58	0.593
11	0.050	2.165	27	-0.052	1.036	43	0.945		
12	0.039	2.119	28	-0.080	0.920	44	0.989		
13	0.052	2.131	29	-0.038	0.850	45	1.037		
14	0.051	2.174	30		0.842	46	1.079		
15	0.016	2.207	31		0.892	47	1.107		

7.14. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в помірних широтах на висоті 45 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	6.129	16	0.030	2.919	32	1.644	48	1.081
1	0.383	5.973	17	-0.003	2.796	33	1.810	49	1.073
2	0.131	5.536	18	-0.045	2.587	34	1.921	50	1.035
3	0.120	4.904	19	-0.055	2.354	35	1.930	51	0.964
4	0.052	4.222	20	-0.031	2.150	36	1.824	52	0.870
5	0.046	3.645	21	-0.016	1.988	37	1.628	53	0.765
6	0.085	3.273	22	-0.008	1.856	38	1.395	54	0.669
7	0.150	3.101	23	-0.008	1.740	39	1.178	55	0.593
8	0.034	3.040	24	-0.035	1.636	40	1.016	56	0.542
9	0.049	2.986	25	-0.036	1.544	41	0.921	57	0.514
10	0.074	2.891	26	-0.048	1.464	42	0.886	58	0.504
11	0.013	2.781	27	0.006	1.394	43	0.895		
12	0.020	2.720	28	-0.018	1.342	44	0.930		
13	0.072	2.747	29	-0.031	1.327	45	0.978		
14	0.070	2.840	30		1.371	46	1.026		
15	0.028	2.923	31		1.482	47	1.063		

7.15. Значення автокореляційної функції $R_x(k)$ та спектральної щільності $S_x(k)$ меридіональної складової швидкості вітру в помірних широтах на висоті 50 км (N =528) :

k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$R_x(k)$	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$	k	$S_x(k)$
0	1.000	4.273	16	-0.044	2.709	32	1.176	48	1.768
1	0.274	4.300	17	-0.036	2.604	33	1.229	49	1.749
2	0.149	4.329	18	-0.070	2.407	34	1.263	50	1.666
3	0.048	4.259	19	-0.031	2.179	35	1.247	51	1.564
4	0.001	4.039	20	-0.036	1.997	36	1.177	52	1.455
5	0.105	3.714	21	-0.038	1.909	37	1.081	53	1.335
6	-0.001	3.384	22	-0.029	1.915	38	1.004	54	1.195
7	0.062	3.119	23	-0.052	1.970	39	0.989	55	1.039
8	0.015	2.930	24	-0.051	2.011	40	1.052	56	0.887
9	0.022	2.788	25	-0.068	1.987	41	1.178	57	0.773
10	0.011	2.672	26	-0.068	1.875	42	1.331	58	0.731
11	-0.042	2.586	27	-0.081	1.693	43	1.477		
12	-0.062	2.549	28	-0.050	1.486	44	1.599		
13	0.0,28	2.573	29	-0.084	1.303	45	1.694		
14	0.028	2.644	30		1.187	46	1.764		
15	-0.014	2.709	31		1.150	47	1.802		

8. ВЗАЄМНИЙ СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Основні теоретичні положення

Спектральний аналіз є одним із важливих методів статистичного дослідження випадкових часових рядів. Він всебічно використовується в різних галузях науки та техніки, у тому числі в гідрометеорології для фізико – статистичного моделювання складних атмосферних процесів.

Важливою вимогою використання цього методу при дослідженнях евквідістантних часових рядів є стаціонарність випадкових послідовностей. Спектральний аналіз дає можливість отримати важливі характеристики статистичної структури часових гідрометеорологічних рядів, які є, як відомо, випадковими. Він дозволяє детально визначити особливості розвитку атмосферних процесів, встановити важливі взаємозв'язки між різними їх сторонами.

У попередньому розділі розглядалися основні теоретичні положення щодо випадкових функцій, їх класифікацій та статистичного оцінювання окремих параметрів.

Відомо, що властивості випадкових функцій визначаються їх ймовірносними характеристиками. Автоковаріаційна $K_x(t_i;t_j)$ та автокореляційна $R_x(t_i;t_j)$ функції дають можливість встановити характер взаємозв'язку між різними перерізами випадкової функції $X(t)$.

Якщо треба дослідити взаємозв'язок між двома випадковими функціями, наприклад, $X(t)$ та $Y(t)$, то його характер визначають взаємна коваріаційна – $K_{xy}(t_i;t_j)$ та взаємна кореляційна – $R_{xy}(t_i;t_j)$ функції.

При спектральному розкладенні випадкової функції можна отримати спектр функції, тобто представлення її сумою гармонічних коливань, які мають різні амплітуди гармонік.

Важливою характеристикою випадкового процесу є спектральна щільність, яка визначає щільність розподілу дисперсії гармонічних коливань у залежності від частоти та виступає енергетичним спектром випадкової функції.

Для системи стаціонарних випадкових процесів $X_1(t), X_2(t),..., X_n(t)$, крім спектральних щільностей $S_{x_i}(\omega)$ кожного процесу, розглядаються й взаємні спектральні щільності $S_{x_i x_j}(\omega)$, які є перетвореннями Фур'є від відповідних взаємних коваріаційних функцій:

$$S_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_i x_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau . \qquad (8.1)$$

Навпаки, взаємні коваріаційні функції є оберненими перетвореннями Фур'є від взаємних спектральних щільностей, тобто:

$$K_{x_i x_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_i x_j}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \qquad (8.2)$$

Взаємна коваріаційна функція не має властивостей парності. Позначимо через $K^{(+)}_{x_i x_j}(\tau)$ – *парну частину взаємної коваріаційної функції* $K_{x_i x_j}(\tau)$, а через $K^{(-)}_{x_i x_j}(\tau)$ – її *непарну частину*.

Отже,

$$K_{x_i x_j}(\tau) = K^{(+)}_{x_i x_j}(\tau) + K^{(-)}_{x_i x_j}(\tau), \qquad (8.3)$$

де

$$K^{(+)}_{x_i x_j}(\tau) = \frac{1}{2}\left[K_{x_i x_j}(\tau) + K_{x_i x_j}(-\tau)\right], \qquad (8.4)$$

$$K^{(-)}_{x_i x_j}(\tau) = \frac{1}{2}\left[K_{x_i x_j}(\tau) - K_{x_i x_j}(-\tau)\right]. \qquad (8.5)$$

Якщо підставити рівняння (8.3) в рівняння (8.1) та використати відому формулу Ейлера, отримаємо:

$$S_{x_i x_j}(\omega) = C_{x_i x_j}(\omega) - iQ_{x_i x_j}(\omega), \qquad (8.6)$$

де

$$C_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^{(+)}_{x_i x_j}(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (8.7)$$

називається ***ко-спектром***, а функція

$$Q_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^{(-)}_{x_i x_j}(\tau)\sin\omega\tau d\tau \qquad (8.8)$$

квадратурним спектром випадкових процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$.

Ко-спектр, як косинус-перетворення Фур'є від парної функції $K^{(+)}_{x_i x_j}(\tau)$, ***є парною функцією***.

Якщо підставити рівняння (8.6) в рівняння (8.2) і застосувати для функції $e^{i\omega t}$ формулу Ейлера, то отримаємо формулу для *взаємної коваріаційної функції у вигляді:*

$$K_{x_i x_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega)\cos\omega\tau d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega)\sin\omega\tau d\omega. \qquad (8.9)$$

За умови $\tau = 0$ взаємна коваріаційна функція визначається рівнянням (8.10):

$$K_{x_i x_j}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) d\omega \ . \qquad (8.10)$$

Формула (8.10) свідчить про те, що *ко-спектр* дає розкладання по різних частотах взаємної коваріаційної функції двох випадкових процесів при нульовому зсуві аргументу і *має смисл середнього добутку процесів* $X_i(t)$ *та* $X_j(t)$ *у вузькому інтервалі частот* $\omega + d\omega$, *поділеному на частотний інтервал.* Ко-спектр характеризує розкладання по частотах енергії синхронної взаємодії процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$.

Квадратурний спектр $Q_{x_i x_j}(\omega)$ показує внесок різних гармонік у сумарну коваріацію за умови, коли всі гармоніки часової послідовності $X_i(t)$ зсунуті по фазі на чверть періоду назад, а послідовність $X_j(t)$ залишається незмінною. Квадратурний спектр характеризує розподіл по частотах енергії несинхронної взаємодії процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$.

Дійсно, за умови $\tau = \dfrac{\pi}{2\omega} = \dfrac{T}{4}$ отримаємо на основі формули (8.9) коваріаційну функцію у вигляді:

$$K_{x_i x_j}(\frac{T}{4}) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) d\omega \ . \qquad (8.11)$$

За умови $\tau = 0$ на основі формули (8.9) будемо мати:

$$K_{x_i x_j}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) d\omega. \qquad (8.12)$$

З останньої рівності виходить, що *ко-спектр* дає розкладання по різних частотах взаємної коваріаційної функції двох випадкових процесів при нульовому зсуві аргументу.

Аналогічно, якщо $\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$ отримаємо:

$$K_{x_i x_j}(\frac{T}{4}) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) d\omega. \qquad (8.13)$$

Отже, *квадратурний спектр* характеризує внесок у загальну взаємну кореляцію двох випадкових процесів гармонік, що в них утримуються, при зсуві фаз цих гармонік на чверть періоду. Приклад квадратурного спектру наведено на рис. 8.2 (див. типову задачу).

Комплексну функцію (8.6) *можна записати у показниковій формі:*

$$S_{x_i x_j}(\omega) = \left| S_{x_i x_j}(\omega) \right| e^{\psi_{x_i x_j}(\omega)}. \qquad (8.14)$$

Модуль взаємної спектральної щільності:

$$\left| S_{x_i x_j}(\omega) \right| = \sqrt{C^2_{x_i x_j}(\omega) + Q^2_{x_i x_j}(\omega)} \qquad (8.15)$$

називають ***амплітудним спектром*** (див. рис. 8.3 до типової задачі), а функцію

$$\psi_{x_i x_j}(\omega) = arctg\left[\frac{Q_{x_i x_j}(\omega)}{C_{x_i x_j}(\omega)}\right] \qquad (8.16)$$

фазовим спектром.

При частотному зображенні процесів з'являється можливість порівняти взаємну енергію на фіксованій частоті з енергіями кожного з процесів на цій же частоті за допомогою такого співвідношення:

$$\Gamma(\omega) = \frac{C^2_{x_i x_j}(\omega) + Q^2_{x_i x_j}(\omega)}{S_{x_i}(\omega) S_{x_j}(\omega)}. \qquad (8.17)$$

Величина

$$\gamma(\omega) = \sqrt{\Gamma(\omega)} \qquad (8.18)$$

має *сенс спектрального коефіцієнта взаємної кореляції* процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$, який визначає тісноту кореляційного зв'язку між цими процесами на фіксованих частотах. Вона має назву ***когерентності*** й може приймати значення від 0 до 1.

Корегентність одночасно являє собою міру стійкості різниці фаз. Якщо різниця фаз двох процесів є стійкою, $\gamma(\omega) \to 1$, якщо різниця фаз нестійка, то $\gamma(\omega) \to 0$. Приклад графіка когерентності наводиться у типовій задачі (рис. 8.4).

При визначенні міри взаємозв'язку спектральних компонентів двох процесів важливо з'ясувати, яким є співвідношення між взаємною енергією синхронної та несинхронної взаємодії, оскільки саме від характеру цієї взаємодії залежить різниця фаз коливань на фіксованій частоті.

Із рівняння (8.16) виходить, що за умов $C_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$ та $Q_{x_i x_j}(\omega) = 0$, різниця фаз коливань повинна дорівнювати нулю, оскільки взаємозв'язок процесів буде існувати за рахунок синхронної їх взаємодії.

За умов $C_{x_i x_j}(\omega) = 0$ та $Q_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$ різниця фаз спектральних компонент дорівнює $\frac{\pi}{2}$ (чверті періоду). Це означає, що взаємозв'язок коливань відбувається тільки в результаті несинхронної взаємодії процесів $X_i(t)$ і $X_j(t)$.

У всіх інших випадках, тобто за умов $C_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$ і $Q_{x_i x_j}(\omega) \neq 0$, різниця фаз спектральних компонентів (фазовий спектр) визначається рівнянням (8.16).

Фазовий спектр визначає відставання по фазі процесу $X_j(t)$ від процесу $X_i(t)$ за умови, що величину $\psi_{x_i x_j}(\omega)$ вважають додатною від 0° до 180° і від'ємною від 180° до 360°. Зсув фаз в 0 відповідає додатній кореляції між процесами ("*у фазі*"), а зсув фаз в 180° – від'ємній кореляції ("*у протифазі*").

Інколи зручніше аналізувати фазовий зсув не в градусах, а в одиницях часу (секунда, година, доба, тиждень . . .). Щоб перейти до одиниць часу використовують формулу:

$$\psi^{\tau}_{x_i x_j}(\omega) = \frac{T_k}{360^{\circ}} \psi^{\circ}_{x_i x_j}, \qquad (8.19)$$

де $\psi^{\circ}_{x_i x_j}(\omega)$ – зсув фаз між двома процесами в градусах;

T_k – період коливання в одиницях часу, який відповідає частоті f_k і розраховується як:

$$T_k = \frac{N_1 \triangle t}{k}, \text{ де} \tag{8.20}$$

$$N_1 = 2^m, \quad m = 1, 2, \ldots 3 \ldots$$

Розв'язання типової задачі. ***Дослідження зв'язків між двома випадковими процесами за допомогою взаємного спектрального аналізу.***

Алгоритм дослідження стаціонарних випадкових процесів заздалегідь було реалізовано на ПЕОМ (комп'ютерна програма "Spektr"). Це дало можливість отримати статистичні оцінки взаємної спектральної щільності атмосферного тиску на двох станціях, що розташовані в Північній Атлантиці. Оскільки взаємна спектральна щільність є комплексною функцією, будемо її характеризувати дійсними функціями (табл. 8.1).

Часові ряди середнього місячного атмосферного тиску на ст. Понта – Делгада (37° 44′ пн.ш. 25°40′ з.д., Азорські острови) за лютий [процес $X_i(t)$] та на ст. Рейк'явік (64° пн.ш. 22° з.д., о. Ісландія) за лютий [процес $X_j(t)$] були сформовані за період 1868 – 2000 рр. ($N = 133$) й мають дискретність 1 рік.

За даними табл. 8.1 побудовані графіки функцій: ко-спектра $C_{x_i x_j}(\omega)$ (рис. 8.1), квадратурного спектра $Q_{x_i x_j}(\omega)$ (рис. 8.2), амплітудного спектра $A(\omega) = \left| S_{x_i x_j}(\omega) \right|$ (рис. 8.3) та когерентності $\gamma(\omega)$ (рис. 8.4).

На основі отриманих результатів зробити висновок про особливості взаємозв'язку між періодичними складовими в часових рядах середнього місячного атмосферного тиску субтропічних та полярних широт Північної Атлантики.

Вірогідність статистичних оцінок взаємної спектральної щільності визначити по когерентності за умови $\gamma(\omega) \geq 0.90$. Також з'ясувати, на яких частотах (періодах) енергія взаємозв'язку в рядах атмосферного тиску на станціях, що розглядаються, є найбільшою. За допомогою фазового спектра визначити, на яких широтах Північної Атлантики починається випадковий процес.

Таблиця 8.1 – Статистичні оцінки взаємної спектральної щільності двох рядів атмосферного тиску в районі Північної Атлантики

№ п/п	$C_{x_i x_j}(\omega)$	$Q_{x_i x_j}(\omega)$	$A(\omega)$	$\gamma(\omega)$	$T_к, рік$	$\psi_{x_i x_j}(\omega)$, град.	$\psi, рік$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	0	0	0		270	
2	-45.7	-19.8	49.80	0.95		23.42	
3	-56.6	-16.0	58.79	0.92		15.74	
4	-58.3	-6.0	58.62	0.91		5.88	
5	-24.0	13.2	27.43	0.88		331.2	
6	-46.4	7.9	47.01	0.76		350.4	
7	-30.4	-2.7	30.56	0.54		5.1	
8	-45.5	16.8	48.50	0.63		339.8	
9	-9.67	45.9	46.92	0.74		281.9	
10	-6.07	64.6	64.87	0.84		275.4	
11	-2.16	36.6	36.70	0.58		273.4	
12	-19.7	-32.4	37.88	0.49		58.71	
13	-30.4	-63.2	70.16	0.92	9.9	64.28	1.7
14	-34.9	-64.6	73.41	0.76		61.65	
15	-20.5	-25.8	32.99	0.60		51.48	
16	-8.36	-10.0	13.01	0.25		50.01	
17	-43.8	4.7	44.06	0.70		353.9	
18	-52.7	17.4	55.46	0.73		341.7	
19	-74.1	19.6	76.69	0.92	6.7	345.2	6.4
20	-31.6	5.9	32.11	0.84		349.4	
21	-30.3	2.8	30.47	0.83		354.7	
22	-46.2	-7.9	46.84	0.87		9.74	
23	-50.7	4.2	50.91	0.89		355.3	
24	-45.5	-6.2	45.91	0.91	5.3	8.64	0.1
25	-49.0	2.4	49.07	0.92	5.1	357.2	5.1
26	-37.7	-4.4	37.94	**0.94**	4.9	6.6	0.1
27	-59.1	14.5	60.89	0.85		346.2	
28	-48.9	36.8	61.22	0.88		323	
29	-64.5	46.8	79.63	0.90	4.4	324	4.0
30	-46.7	31.7	56.44	**0.96**	4.3	325.9	3.9
31	-34.1	20.7	39.87	0.79		328.7	
32	-27.8	30.3	41.06	0.78		312.5	
33	-27.0	17.7	32.30	0.46		326.7	

Продовження таблиці 8.1

№ п/п	$C_{x_i x_j}(\omega)$	$Q_{x_i x_j}(\omega)$	$A(\omega)$	$\gamma(\omega)$	$T_к, рік$	$\psi_{x_i x_j}(\omega)$, град.	$\psi, рік$
34	-11.0	19.4	22.34	0.34		299.5	
35	-3.25	10.8	11.25	0.21		286.8	
36	-7.45	31.2	32.08	0.72		283.4	
37	-44.6	34.0	56.03	0.86		322.7	
38	-57.0	21.1	60.75	0.89		339.7	
39	-42.9	5.4	43.20	0.69		352.9	
40	-30.1	-5.3	30.54	0.60		9.92	
41	-16.8	-0.1	16.83	0.43		0.44	
42	-19.7	-2.1	19.79	0.48		6.2	
43	-11.4	-20.6	23.56	0.72		61.08	
44	-0.05	-26.8	26.81	0.66		89.9	
45	-39.2	-20.8	44.42	0.66		27.97	
46	-32.6	-3.4	32.72	0.57		5.87	
47	-71.0	-14.4	72.39	**0.94**	2.7	11.44	0.1
48	-21.0	-1.8	21.04	0.40		5.01	
49	-2.47	-14.5	14.78	0.23		80.35	
50	-7.26	3.3	7.99	0.12		335.4	
51	-33.7	8.3	34.70	0.48		346.2	
52	-76.2	23.8	79.83	0.92	2.5	342.7	2.4
53	-56.7	20.9	60.38	**0.96**	2.4	339.8	2.3
54	-40.8	12.5	42.67	0.79		342.9	
55	-26.3	1.6	26.32	0.61		356.6	
56	-14.6	5.7	15.70	0.44		338.6	
57	-33.3	9.9	34.74	0.89		343.4	
58	-19.8	14.3	24.36	0.92	2.2	324.2	2.0
59	-27.9	3.5	28.07	0.85		352.8	
60	-24.0	2.4	24.16	0.83		354.3	
61	-24.1	-1.6	24.16	0.63		3.88	
62	-48.8	-2.4	48.89	0.79		2.8	
63	-50.0	1.5	50.06	0.78		358.3	
64	-44.0	35.8	56.72	1		320.9	

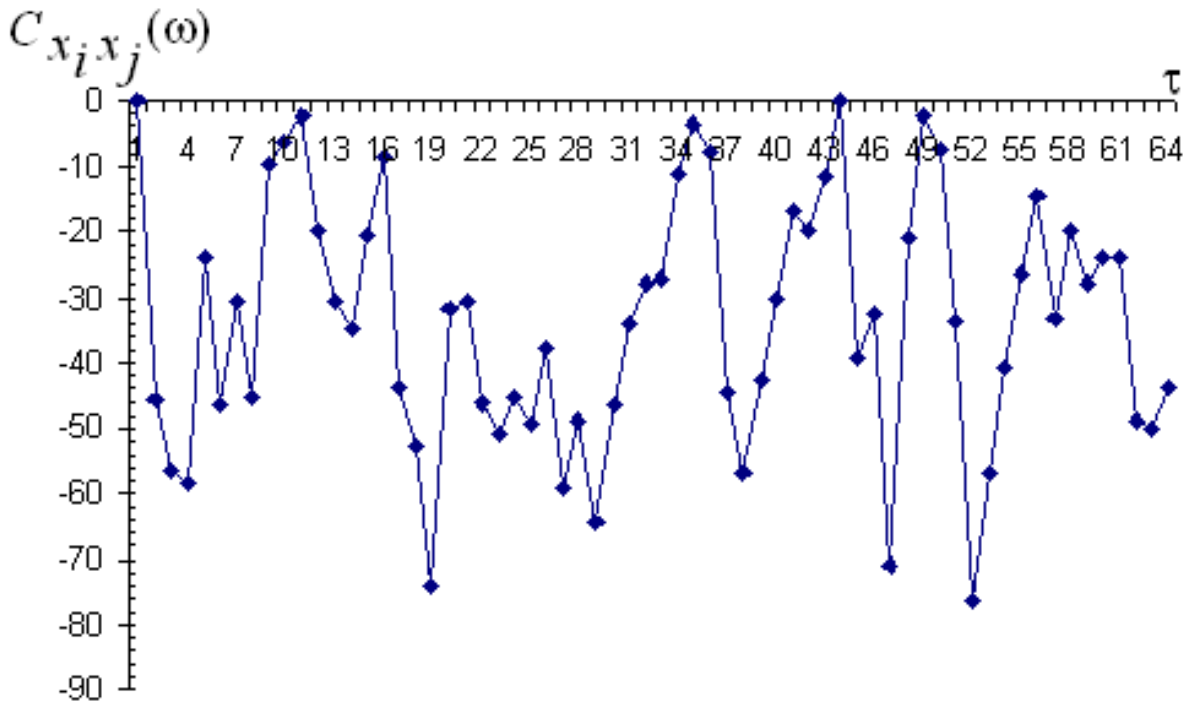


Рисунок 8.1 – Ко-спектр випадкових процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$ (до типової задачі)

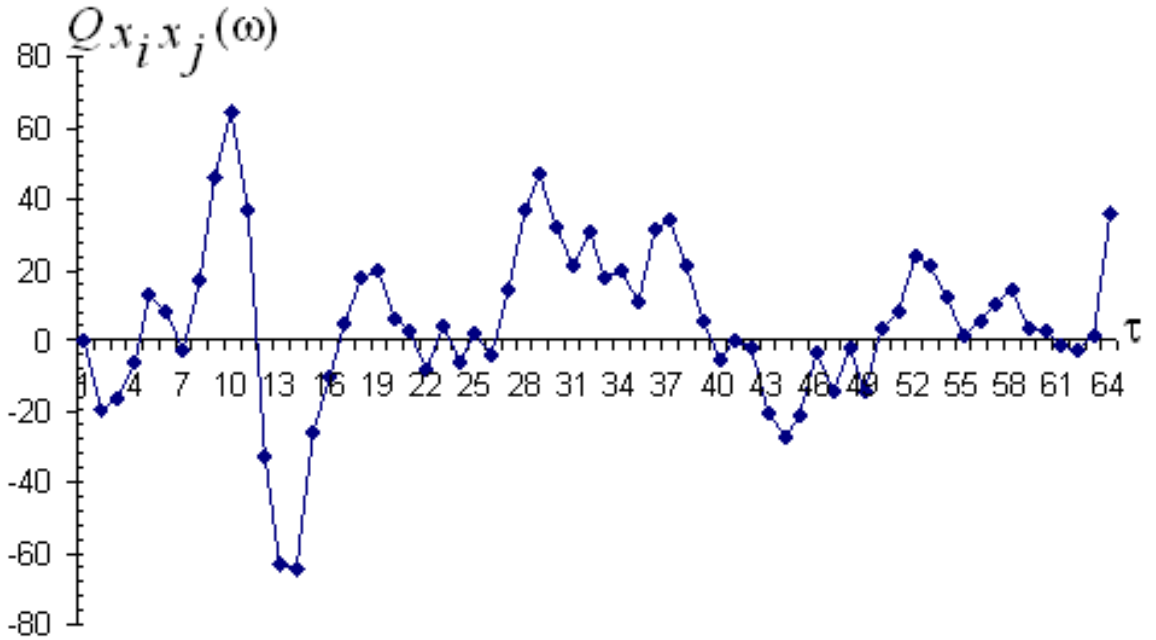


Рисунок 8.2 – Квадратурний спектр випадкових процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$ (до типової задачі)

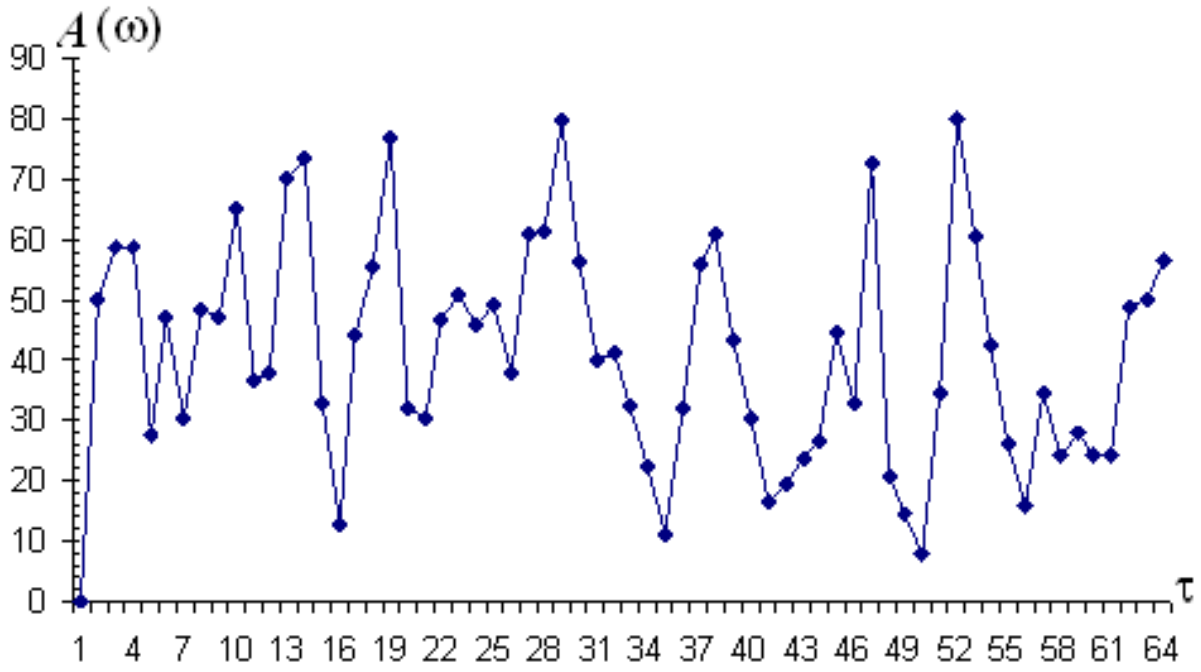


Рисунок 8.3 – Амплітудний спектр випадкових процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$ (до типової задачі)

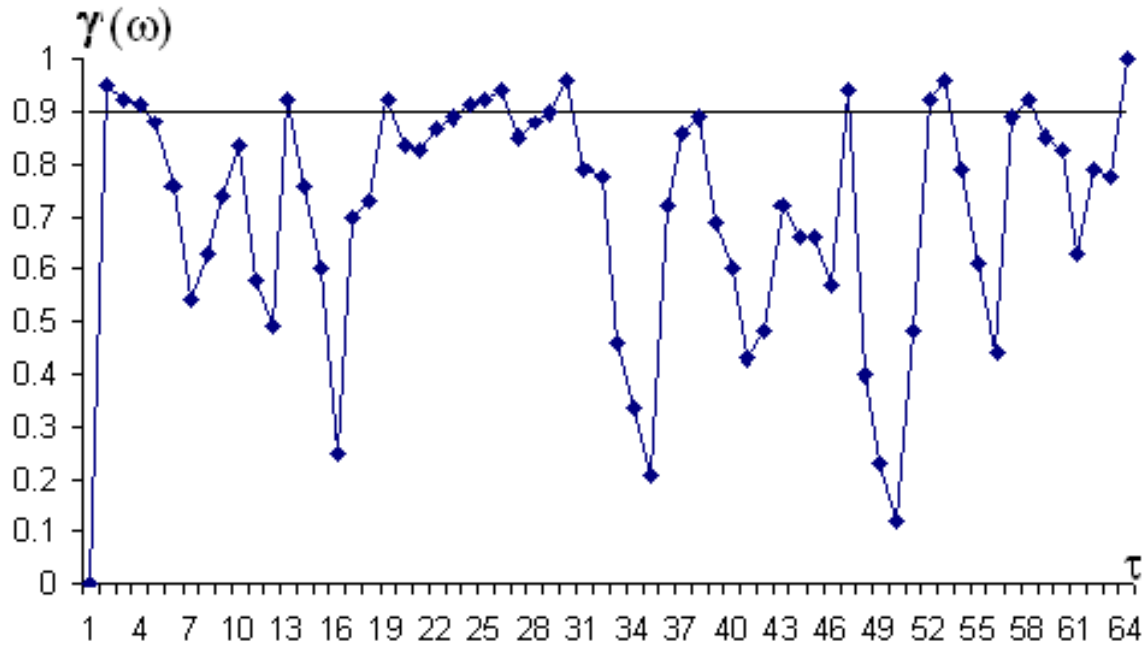


Рисунок 8.4 – Когерентність процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$ (до типової задачі)

За допомогою методики, що була викладена у 7-му розділі, нами були розраховані спектральні щільності окремих випадкових процесів, а саме середнього місячного атмосферного тиску за лютий на ст. П.-Делгада [процес $X_i(t)$] та ст. Рейк'явік [процес $X_j(t)$]. На рис. 8.5 та 8.6 представлені відповідні спектрограми. Для визначення вірогідності статистичної оцінки спектральної щільності використовували довірчий інтервал, для якого значення оцінки спектра попадає з заданою ймовірністю. Нуль гіпотеза формулювалась таким чином: на рівні значущості 0.05 (та 0.10) відсутні гармонічні коливання в спектрі атмосферного тиску на фоні спектра реалізації «білого шуму». В даному випадку перевірка статистичної гіпотези складалася з порівняння оцінки спектральної щільності $\hat{S}_x(\omega)$ зі значенням $S_{кр}(\omega)$ заданої ймовірності, які приймалися в якості меж довірчого інтервалу.

В табл. 8.2 представлені основні статистичні характеристики для розрахунків меж довірчих інтервалів на заданих рівнях значущості $\alpha = 0.05$ та $\alpha = 0.10$ при визначенні періодичних компонент в спектральній щільності окремих випадкових процесів, що розглядаються.

Таблиця 8.2 – Основні характеристики для розрахування довірчих інтервалів та їх меж (до типової задачі)

Характеристика	Рівень значущості α	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
$\chi^2_{кр}(\alpha,\nu)$	25.0	22.3
$S_{кр}(\omega)$	1.67	1.49
$I_\alpha\left[S_{x_i}(0)\right]$	61.5	54.7
$I_\alpha\left[S_{x_j}(0)\right]$	159.4	142.2

$\nu = 15$; $\bar{S}_{x_i}(\omega) = 36.8$; $\bar{S}_{x_j}(\omega) = 95.4$.

Вихід піків спектральної щільності за верхню межу довірчого інтервалу свідчить про вірогідність частот (періодів) максимальної енергії періодичних коливань, що притаманні окремому випадковому процесу.

Як випливає з рис. 8.5, з ймовірністю 95% в спектральній щільності середньомісячного атмосферного тиску у лютому на ст. П.-Делгада за період з 1868 по 2000 рр. виявлені 18-ти, 10-ти та 9-ти річні коливання. З ймовірністю 90% статистично значущими ще були й коливання з періодами близько 25-ти, 3-4-х та двох років.

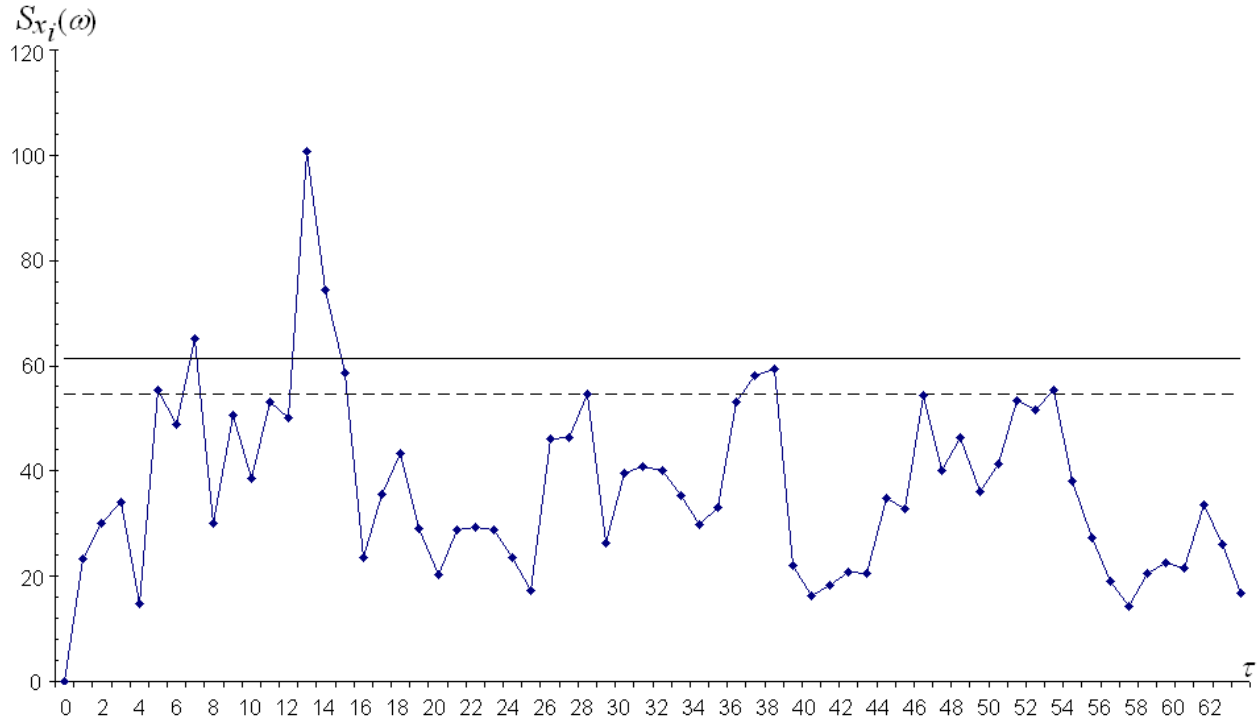


Рисунок 8.5 – Спектрограма випадкового процесу $X_i(t)$ і довірчі інтервали, які побудовані з ймовірністю 95% (—) та 90% (---) (до типової задачі)

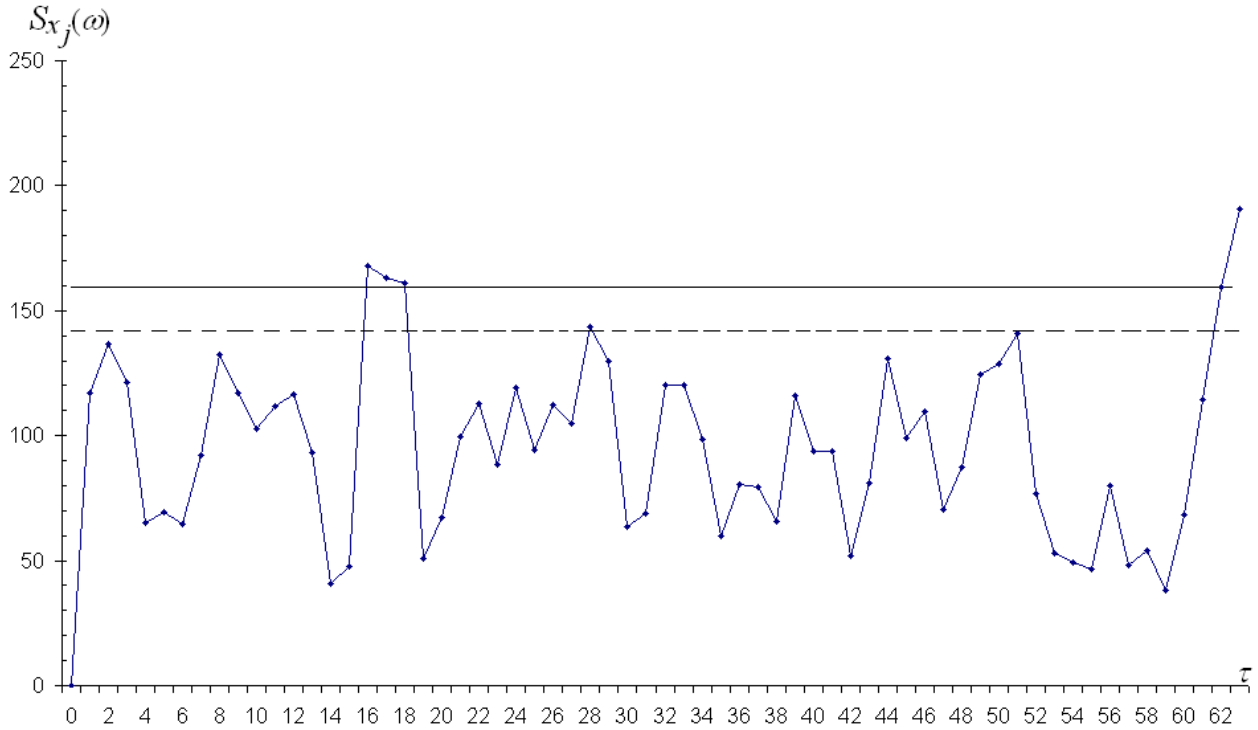


Рисунок 8.6– Спектрограма випадкового процесу $X_j(t)$ і довірчі інтервали, які побудовані з ймовірністю 95% (—) та 90% (---) (до типової задачі)

Спектральна щільність атмосферного тиску на ст. Рейк'явік у лютому за той же період досліджень включає з ймовірністю 95% періодичні коливання з періодами близько 7-8 років та двох років, а з ймовірністю 90% статистично значущими гармоніками були ще й 5-ти-річні коливання, які притаманні випадковому процесу $X_j(t)$ (рис. 8.6).

Приблизна оцінка довірчого значення когерентності на рівні значущості $\alpha = 0.05$ визначалась за формулою Гудмана (табл. 8.3).

Таблиця 8.3 – Довірчі межі когерентності γ (ω)

Рівень значущості α	Число степенів вільності			
	4	10	20	40
0.01	0.89	0.63	0.46	0.33
0.05	0.80	0.53	0.38	0.27

Число степенів вільності розраховували таким чином:

$$\nu = \frac{2N - 0.5\tau_{\max}}{\tau_{\max}},$$

де $N = 133$ (об'єм статистичної сукупності);

$\tau_{\max}$ – число точок максимального зсуву кореляційної функції, яка визначалася, виходячи з точності розрахунків за умови $\delta = 2\%$ [19]:

$$\tau_{\max} = \frac{2\pi N}{50} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 133}{50} = 17.$$

Тоді

$$\nu = \frac{2 \cdot 133 - 0.5 \cdot 17}{17} = 15.$$

За умов рівня значущості $\alpha = 0.05$ та числа степенів вільності $\nu = 15$, $\gamma_0 = 0.46$. Тому когерентність є значущою за умови $\gamma(\omega) > 0.46$.

Аналізу підлягали тільки ті частоти, для яких $\gamma(\omega) \geq 0.90$.

Сплески на графіку когерентності, що лежали вище цього рівня (рис. 8.4) відповідали періодам (частотам) значущої взаємодії процесів $X_i(t)$ та $X_j(t)$.

Періоди значущої взаємодії двох процесів (T_k, рік) представлені в табл. 8.1 (6-й стовпчик) і визначалися за формулою:

$$T_к = \frac{N_1 \Delta t}{k},$$

де k – номер точки значущої взаємодії на осі OX;

Δt – 1 рік (дискретність даних);

$N_1 = 2^7 = 128$.

$$T_{\kappa=13} = \frac{128 \cdot 1}{13} = 9.9, \qquad \gamma(\omega) = 0.92;$$

$$T_{\kappa=19} = \frac{128 \cdot 1}{19} = 6.7, \qquad \gamma(\omega) = 0.92;$$

$$T_{\kappa=24} = \frac{128 \cdot 1}{24} = 5.3, \qquad \gamma(\omega) = 0.91;$$

$$\ldots$$

$$T_{\kappa=58} = \frac{128 \cdot 1}{58} = 2.2, \qquad \gamma(\omega) = 0.92.$$

Аналіз фазового спектра дозволив визначити відставання (випередження) процесу $X_j(t)$ по відношенню до $X_i(t)$, який представлено в градусах (табл. 8.1, 7-й стовпчик) та в одиницях часу, виходячи з дискретності даних (табл. 8.1, 8-й стовпчик) на основі рівності (8.19):

$$\psi^{\tau}_{x_i x_j}(\omega) = \frac{T_{\kappa=13} \ \psi^{\circ}_{x_i x_j}(\omega)}{360^{\circ}} = \frac{9.9 \cdot 64.28}{360} = 1.7 \text{ років}$$

і т.п.

Аналіз когерентності дав змогу визначити статистичний зв'язок гармонік приблизно 10-ти, 7-ми, 5-ти, 4-х, 3-х та 2-х років, що присутні в процесах $X_i(t)$ та $X_j(t)$. Це дозволило порівняти взаємну енергію процесів $X_i(t)$ (атмосферний тиск на ст. Понта-Делгада) та $X_j(t)$ (атмосферний тиск на ст. Рейк'явік) на фіксованій частоті з енергією кожного з цих процесів на тій же частоті.

Визначили початкову фазу кожного з процесів. Як показали розрахунки, тільки для гармонік 9.9, 5-ти та 2.7 років спостерігається запізнювання процесу $X_j(t)$ по відношенню до $X_i(t)$. Всі останні періодичні коливання характеризуються випередженням процесу $X_j(t)$ по відношенню до $X_i(t)$ (табл. 8.1, 8-й стовпчик).

Таким чином, взаємний спектральний аналіз дав можливість визначити вклад коливань різної частоти (періоду) в загальну дисперсію двох процесів. Він дозволив довести існування тісного кореляційного зв'язку між періодичними складовими в часових рядах атмосферного тиску на ст. Понта-Делгада і Рейк'явік. Отримані висновки ще раз підтверджують існування статистично значущих міжширотних зв'язків крупномасштабних атмосферних процесів в районі Північної Атлантики.

Запитання для самоперевірки

1. Дати визначення випадкової функції, випадкового процесу, випадкової послідовності?
2. Якими ймовірносними характеристиками описують випадкові функції?
3. Яка функція є стаціонарною випадковою функцією та якими ймовірносними характеристиками вона володіє?
4. Що називають спектральним розкладанням стаціонарної випадкової функції?
5. Дати визначення спектральної щільності випадкової функції та якими основними властивостями вона володіє?
6. За яких умов можна використовувати взаємний спектральний аналіз при дослідженні статистичних зв'язків між двома випадковими процесами?
7. Який сенс взаємної спектральної щільності при дослідженні двох випадкових процесів?
8. Якими функціями може бути описана взаємна спектральна щільність?
9. Як визначити степінь взаємозв'язку спектральних компонент двох процесів?
10. Як отримати вірогідні статистичні оцінки взаємної спектральної щільності?

Задачі

Для розв'язання задач цього розділу використовуються заздалегідь розраховані на ПЕОМ оцінки взаємної спектральної щільності рядів атмосферного тиску за період 1868-2000 рр.: ко-спектра, квадратурного спектра, когерентності та оцінки спектральних щільностей окремих процесів. Вихідною інформацією послужили ряди середніх місячних значень атмосферного тиску на станціях Понта-Делгада та Рейк'явік (задачі 8.1–8.10). Дискретність даних складає 1 рік, а їх об'єми N=133.

Використовуючи наведені в задачах 8.1-8.10 результати реалізації алгоритму взаємного спектрального аналізу, провести дослідження міжширотних зв'язків між двома рядами атмосферного тиску субтропічних та полярних широт Північної Атлантики за допомогою двох дійсних функцій.

На рівні значущості $\alpha = 0.05$ виявити статистично значущі періодичні компоненти в спектральних щільностях атмосферного тиску за умови $\tau_{\max} = 17$ ($\delta_{2\%} = \dfrac{2\pi N}{50}$) та відповіти на ряд запитань викладача.

8.1 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрального аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (січень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (січень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	21.67	34.41	40.96	46.61	40.24	42.97	37.64	39.42	31.56
21.77	19.66	8.75	9.14	6.09	15.36	41.06	44.56	34.76	14.10
19.21	33.95	51.10	50.47	45.48	22.79	19.82	18.49	19.29	16.61
20.60	18.76	20.83	47.53	69.81	63.51	44.24	36.49	46.97	38.60
24.66	33.48	27.93	27.65	8.94	4.99	9.87	48.30	77.98	78.68
40.03	24.83	39.69	39.59	28.23	12.71	16.61	17.71	19.61	14.43
18.01	19.45	29.77	31.22						

Середня спектральна щільність процесу X 30.46

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	100.65	109.37	77.89	43.93	143.98	143.89	138.24	103.44	176.17
164.01	91.98	41.56	46.25	65.76	53.74	85.89	104.65	102.06	56.16
35.25	73.53	114.04	175.36	135.34	104.51	78.50	173.08	203.10	153.75
63.82	46.28	45.51	40.07	67.90	146.43	157.05	173.34	91.58	84.67
61.29	94.52	100.43	55.39	21.70	9.99	7.14	121.98	136.77	137.75
25.82	7.21	77.91	103.43	112.18	95.34	89.69	93.47	40.94	24.29
30.96	28.15	28.89	22.94						

Середня спектральна щільність процесу Y 86.58

Дисперсії: по X 13.3800 по Y 45.7730

КО-СПЕКТР

0.00	-43.05	-46.18	-23.56	-16.87	-33.48	-40.26	-39.05	-40.55	-68.22
-47.79	-23.70	1.41	-1.10	-11.78	-12.99	-48.16	-54.72	-50.57	-10.85
-7.62	-31.08	-59.50	-76.45	-58.62	-37.84	-17.38	-37.40	-24.28	-18.25
-1.78	-11.28	-14.64	-10.66	-43.80	-32.18	-44.30	-29.54	-39.98	-32.29
-18.67	-37.38	-35.64	-30.87	-8.44	0.98	-0.68	-67.89	-87.13	-85.60
-19.40	-3.27	-43.70	-45.74	-38.17	-16.92	-11.86	-25.61	-3.75	-6.05
-4.49	-5.74	1.04	19.25						

КВ.-СПЕКТР

0.00	16.50	26.57	17.29	-8.49	-35.98	-38.23	-27.89	-22.80	-17.50
-8.92	5.32	7.04	9.45	5.84	-4.71	-27.44	-33.11	-22.57	-10.59
-13.21	-23.91	-44.20	-24.49	-9.44	19.60	-9.59	-27.41	-32.19	-17.77
1.42	-2.47	5.47	14.26	34.67	38.58	22.39	-22.27	-29.35	-30.10
5.16	-8.59	-3.23	-11.69	1.17	-6.19	-7.23	-16.65	3.07	9.26
17.77	5.01	4.34	0.90	-8.64	-11.88	4.60	12.22	16.12	5.85
16.42	12.82	18.32	18.59						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.99	0.87	0.52	0.42	0.65	0.71	0.67	0.73	0.94
0.81	0.57	0.38	0.46	0.66	0.48	0.93	0.94	0.93	0.54
0.59	0.78	0.97	0.85	0.76	0.87	0.50	0.82	0.64	0.50
0.06	0.39	0.51	0.41	0.81	0.52	0.60	0.47	0.76	0.77
0.50	0.68	0.68	0.84	0.61	0.89	0.86	0.91	0.84	0.83
0.82	0.45	0.79	0.71	0.70	0.59	0.33	0.70	0.58	0.45
0.72	0.60	0.63	1.00						

8.2 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (березень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (березень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	56.32	62.01	48.05	17.81	14.21	7.15	13.76	28.04	29.86
25.11	9.20	8.51	9.26	16.01	23.57	29.99	39.84	31.77	61.38
49.48	69.88	41.69	61.58	36.70	36.75	23.41	25.23	23.42	19.90
23.28	22.65	14.97	36.93	42.80	62.42	48.09	38.24	23.65	11.98
14.52	11.56	12.94	6.13	27.76	33.05	33.82	31.08	23.27	33.80
26.09	28.75	25.63	18.65	19.16	21.06	36.21	40.11	31.22	11.32
4.07	3.02	12.13	33.53						

Середня спектральна щільність процесу X 27.87

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	55.25	68.40	56.87	21.07	11.58	8.68	14.72	39.31	44.82
53.61	76.59	79.76	79.26	58.62	104.37	123.45	103.78	61.43	51.73
48.95	67.44	39.86	44.25	24.49	60.72	60.53	91.11	84.50	76.72
49.60	22.62	24.32	13.08	70.77	106.69	121.54	62.48	91.28	79.33
98.78	39.61	50.58	33.11	35.58	37.37	48.23	56.33	55.71	93.34
93.96	75.98	27.32	6.74	62.39	59.18	80.35	72.47	82.84	97.69
56.96	68.58	34.59	13.33						

Середня спектральна щільність процесу Y 58.35

Дисперсії: по X 14.5277 по Y 23.6766

КО-СПЕКТР

0.00	-50.15	-55.83	-43.04	-8.66	-4.59	-1.91	-10.21	-21.76	-26.59
-23.37	-14.19	-2.22	-4.73	-12.87	-45.94	-58.09	-58.31	-38.40	-50.65
-43.96	-65.22	-36.18	-48.05	-19.16	-35.33	-22.30	-30.19	-7.27	-5.37
-3.92	-13.57	-10.23	-14.41	-35.68	-63.38	-69.04	-44.81	-37.39	-20.82
-25.43	-2.13	-4.58	3.05	-4.62	-12.19	-16.16	-32.30	-23.35	-44.71
-38.56	-38.75	-10.04	4.71	-5.46	-11.47	-31.37	-40.08	-33.67	-23.45
-5.52	-10.67	-7.67	-17.43						

КВ.-СПЕКТР

0.00	-20.59	-27.11	-11.35	-3.49	0.79	-3.23	2.87	-11.89	-15.36
-24.99	-5.27	-0.74	8.53	14.38	12.14	7.80	-6.61	-2.56	-12.75
-3.72	-6.62	5.63	5.07	2.64	-7.05	-20.83	-13.09	-21.42	-4.72
-3.94	12.50	5.32	-2.49	11.39	1.96	0.18	-15.44	-7.82	-8.04
4.36	11.84	21.42	9.25	-12.98	-28.71	-23.94	-14.66	-8.12	-7.90
12.15	15.60	16.76	1.65	-9.04	-15.07	-23.59	-14.08	-14.35	-0.52
-0.35	-2.80	-0.15	11.97						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.97	0.95	0.85	0.48	0.36	0.48	0.74	0.75	0.84
0.93	0.57	0.09	0.36	0.63	0.96	0.96	0.91	0.87	0.93
0.90	0.95	0.90	0.93	0.65	0.76	0.81	0.69	0.51	0.18
0.16	0.81	0.60	0.67	0.68	0.78	0.90	0.97	0.82	0.72
0.68	0.56	0.86	0.68	0.44	0.89	0.72	0.85	0.69	0.81
0.82	0.89	0.74	0.45	0.31	0.54	0.73	0.79	0.72	0.71
0.36	0.77	0.37	1.00						

8.3 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (квітень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (квітень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	19.10	23.19	20.76	9.10	11.39	9.10	11.40	6.95	7.23
2.54	4.38	5.56	7.31	18.99	20.16	21.59	12.11	13.03	13.49
8.00	6.67	13.36	30.11	28.07	17.85	4.86	8.67	11.99	15.21
11.65	9.75	8.44	10.59	12.04	25.85	23.94	23.72	7.02	7.53
4.65	17.82	22.65	27.43	11.58	7.88	4.72	10.26	12.07	15.59
19.20	18.42	16.41	9.63	18.94	18.14	18.23	10.29	11.56	9.51
7.53	9.20	8.46	0.71						

Середня спектральна щільність процесу X 13.02

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	12.59	53.03	62.40	70.06	48.82	38.73	53.89	39.52	35.77
14.81	19.42	21.20	14.29	8.97	10.35	12.81	13.91	10.32	12.09
7.59	37.28	43.44	67.81	45.90	37.32	15.12	9.02	9.06	8.03
12.43	12.49	16.51	18.04	16.50	13.47	9.00	9.36	19.84	16.86
25.46	51.71	99.39	89.06	57.45	8.34	12.85	22.74	27.75	35.48
28.82	35.53	31.57	30.86	23.72	16.58	10.44	10.31	29.42	27.72
23.37	3.02	7.62	21.77						

Середня спектральна щільність процесу Y 26.70

Дисперсії: по X 8.5353 по Y 11.1478

КО-СПЕКТР

0.00	-10.45	-23.05	-23.41	-24.45	-11.88	-6.21	-10.65	-7.72	-8.13
3.07	-4.60	-5.22	-7.43	-10.34	-10.42	-10.68	-6.41	-6.72	-9.53
-5.66	-5.14	-11.37	-31.39	-31.80	-21.91	-5.63	-1.48	-2.60	-3.00
-7.65	-5.76	-0.45	-3.38	-5.42	-13.80	-7.55	-3.99	1.86	1.31
0.73	-22.08	-33.82	-35.49	-12.88	-1.85	1.88	4.69	2.43	-8.51
-20.52	-24.37	-20.81	-6.35	-4.70	0.18	-6.40	-6.63	-14.85	-14.04
-9.77	-2.27	-1.22	-1.69						

КВ.-СПЕКТР

0.00	-9.04	-6.41	-3.53	4.26	-9.43	-11.78	-5.71	4.39	4.28
-0.15	4.38	2.92	1.89	0.44	-0.97	1.75	4.04	9.18	6.42
1.66	8.29	10.34	17.72	9.72	7.89	-0.34	-2.81	-6.04	-5.43
-3.09	-2.82	3.57	4.09	6.02	3.64	4.01	6.55	9.67	9.65
6.38	9.25	21.61	22.29	11.09	-2.84	-3.22	8.90	5.29	6.64
-1.92	4.36	6.61	8.53	12.80	11.93	10.98	3.39	-2.30	-4.97
-3.06	1.57	2.70	3.54						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.89	0.68	0.66	0.98	0.64	0.71	0.49	0.54	0.57
0.50	0.69	0.55	0.75	0.79	0.72	0.65	0.58	0.98	0.90
0.76	0.62	0.64	0.80	0.93	0.90	0.66	0.36	0.63	0.56
0.69	0.58	0.30	0.38	0.57	0.76	0.58	0.51	0.83	0.86
0.59	0.79	0.85	0.85	0.66	0.42	0.48	0.66	0.32	0.46
0.88	0.97	0.96	0.62	0.64	0.69	0.92	0.72	0.81	0.92
0.77	0.52	0.37	1.00						

8.4 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (травень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (травень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	9.08	13.19	9.58	8.07	5.63	4.58	2.59	2.10	2.83
5.65	8.39	10.19	13.89	18.23	16.04	11.32	7.13	18.37	16.69
12.90	2.10	2.33	2.07	2.68	3.24	10.50	8.70	8.25	2.45
7.40	7.58	12.59	13.98	13.85	7.42	3.65	3.24	3.71	3.89
4.92	6.97	5.50	5.30	3.40	4.98	8.54	11.51	12.20	7.85
7.25	3.35	4.20	3.85	7.27	9.48	7.34	9.63	7.62	7.99
3.43	5.38	4.83	1.19						

Середня спектральна щільність процесу X 7.34

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	10.94	19.85	23.88	18.73	17.42	13.65	10.91	3.42	4.42
3.80	16.67	16.20	17.33	23.85	27.66	43.13	25.98	31.95	14.05
12.36	3.86	7.62	11.16	21.49	22.21	18.14	21.23	17.27	25.04
12.16	12.42	7.90	17.74	64.29	73.09	60.91	14.87	36.55	37.26
35.43	2.80	7.29	13.93	13.42	23.84	18.40	22.96	18.67	22.54
32.25	43.56	43.03	32.15	11.41	7.88	15.25	20.41	19.12	11.61
5.28	19.04	23.00	23.81						

Середня спектральна щільність процесу Y 20.76

Дисперсії: по X 3.6459 по Y 9.4685

КО-СПЕКТР

0.00	-4.22	-7.65	-8.83	-5.95	-4.64	-2.50	-2.50	-0.31	-1.71
-2.56	-4.11	-4.41	-7.07	-15.35	-14.17	-16.17	-7.44	-17.50	-12.14
-11.40	0.05	-0.29	0.08	-5.28	-6.74	-5.85	-2.59	-1.23	-5.58
-8.15	-7.25	-8.20	-12.77	-14.05	-9.36	-0.78	0.35	1.77	0.61
1.11	-1.57	1.23	-1.41	-1.19	1.04	1.35	-2.28	-7.67	-5.88
-7.56	-7.72	-5.48	-2.83	-3.37	-7.28	-2.87	-5.43	-3.71	-6.13
-2.68	-8.19	-5.79	3.16						

КВ.-СПЕКТР

0.00	5.94	0.96	2.07	0.10	7.93	6.87	3.80	1.29	0.38
2.35	-4.96	-4.26	-9.23	-10.37	-8.51	-4.44	0.76	2.88	1.50
4.72	-1.60	-0.41	-0.97	-1.81	-2.33	-2.11	-1.75	-2.56	-3.03
-1.02	0.20	-1.06	3.02	-2.98	-2.05	-7.13	-2.70	2.01	5.04
5.94	3.61	-0.77	-2.51	-4.12	4.75	7.89	7.16	7.72	4.98
2.64	-4.04	-3.72	-0.63	1.31	2.96	0.67	3.35	2.32	3.27
-1.51	-5.07	-2.25	4.28						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.73	0.48	0.60	0.48	0.93	0.92	0.86	0.49	0.50
0.75	0.54	0.48	0.75	0.89	0.78	0.76	0.55	0.73	0.80
0.98	0.56	0.12	0.20	0.74	0.84	0.45	0.23	0.24	0.81
0.87	0.75	0.83	0.83	0.48	0.41	0.48	0.39	0.23	0.42
0.46	0.89	0.23	0.34	0.64	0.45	0.64	0.46	0.72	0.58
0.52	0.72	0.49	0.26	0.40	0.91	0.28	0.46	0.36	0.72
0.72	0.95	0.59	1.00						

8.5 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (червень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (червень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	3.16	10.28	11.29	10.36	4.43	2.16	2.36	1.73	3.52
8.01	7.68	6.17	0.75	1.32	5.16	5.32	7.25	4.60	8.25
11.35	12.99	9.91	6.61	3.92	6.41	9.22	11.97	9.95	5.28
3.37	2.20	3.24	4.36	5.01	3.43	1.26	2.12	3.80	5.29
4.39	3.17	1.55	0.82	4.81	5.28	6.20	7.94	10.78	11.46
5.66	5.96	4.95	5.57	3.25	3.45	2.62	2.01	1.61	5.02
4.56	5.14	4.41	8.96						

Середня спектральна щільність процесу X 5.39

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	14.64	32.60	27.45	30.06	12.71	7.34	1.69	3.95	5.83
6.58	10.35	12.06	12.47	9.42	9.99	16.88	16.47	21.83	13.83
24.73	16.49	28.01	14.77	14.68	6.54	16.03	21.11	21.28	11.29
14.80	17.54	21.78	13.02	7.88	24.34	26.87	27.13	9.65	9.24
8.87	8.81	12.11	11.10	19.87	15.11	15.56	10.04	19.17	25.87
21.18	11.48	11.56	11.17	14.36	7.82	6.39	12.07	22.85	22.75
13.78	2.73	3.16	1.62						

Середня спектральна щільність процесу Y 14.42

Дисперсії: по X 2.4385 по Y 9.8326

КО-СПЕКТР

0.00	-0.30	-3.67	-4.97	-7.27	-3.33	-1.97	1.44	2.12	2.07
-1.90	-2.82	-1.71	1.55	0.37	-4.58	-3.04	-5.08	-4.64	-8.36
-14.49	-13.08	-14.50	-5.06	-3.71	-4.22	-10.03	-13.77	-10.60	-5.67
-4.35	-3.46	-2.54	-0.99	-2.41	-1.31	0.49	-0.05	-4.12	-6.09
-3.88	-2.57	-0.24	-0.36	-6.31	-7.83	-8.95	-8.27	-13.30	-16.09
-10.01	-1.91	1.38	2.36	-0.95	-1.23	-1.98	-3.00	-1.34	-1.62
0.01	0.16	-0.66	-3.80						

КВ.-СПЕКТР

0.00	6.42	17.21	10.26	7.93	-2.24	1.04	0.16	-0.46	1.43
1.31	0.15	-1.35	-0.11	2.50	0.58	-0.59	-2.48	0.45	0.48
0.26	-1.26	0.00	2.05	2.07	1.59	-4.90	-5.19	-7.90	-2.74
-0.80	2.98	5.68	3.73	3.04	0.95	0.44	-1.25	-1.66	0.78
0.56	-0.47	-1.43	-0.38	-1.82	-2.14	-0.97	0.53	1.39	-0.64
1.02	0.34	-1.01	-3.21	-5.84	-4.53	-3.48	0.40	-0.81	-1.09
-2.87	-0.19	0.35	0.18						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.95	0.96	0.65	0.61	0.53	0.56	0.72	0.83	0.56
0.32	0.32	0.25	0.51	0.72	0.64	0.33	0.52	0.47	0.78
0.86	0.90	0.87	0.55	0.56	0.70	0.92	0.93	0.91	0.82
0.63	0.73	0.74	0.51	0.62	0.18	0.11	0.16	0.73	0.88
0.63	0.50	0.33	0.17	0.67	0.91	0.92	0.93	0.93	0.94
0.92	0.23	0.23	0.50	0.87	0.90	0.98	0.61	0.26	0.18
0.36	0.07	0.20	1.00						

8.6 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (липень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (липень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	7.75	7.97	0.89	1.19	2.21	2.13	2.40	2.16	2.10
1.77	1.30	1.49	1.66	1.18	1.81	1.80	3.55	6.92	9.22
7.78	3.93	2.02	1.70	1.40	1.29	1.26	1.84	0.96	0.94
2.52	5.42	6.04	4.64	1.57	3.09	2.21	5.67	5.39	7.01
3.77	1.89	0.50	1.27	1.53	1.89	2.09	2.93	3.57	2.70
1.61	0.42	0.45	0.69	1.33	3.10	2.99	2.50	4.23	4.81
4.65	2.19	1.82	1.01						

Середня спектральна щільність процесу X 2.81

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	22.02	23.79	23.13	11.63	11.66	9.45	6.51	6.03	12.81
8.96	7.89	4.77	7.03	7.63	4.56	5.27	5.85	4.50	3.66
5.17	7.23	17.60	16.30	15.07	15.18	15.27	43.38	31.01	34.67
6.55	7.57	8.24	10.77	13.47	11.52	8.70	5.87	2.46	11.23
12.71	13.96	4.81	14.70	14.17	14.59	16.53	24.82	28.69	15.79
9.29	9.53	12.10	9.02	9.45	8.12	8.28	5.06	3.15	4.66
8.64	10.53	9.73	2.91						

Середня спектральна щільність процесу Y 11.65

Дисперсії: по X 1.0900 по Y 5.1572

КО-СПЕКТР

0.00	-6.93	-6.31	-2.38	-0.27	0.48	0.91	-0.83	-3.33	-2.65
-0.81	0.28	-1.11	-2.07	-1.81	-1.35	-1.03	-0.28	0.12	-1.72
-3.57	-3.76	-4.78	-3.66	-3.16	-2.92	-3.18	-7.94	-4.88	-5.02
0.10	-0.58	-2.36	-4.62	-3.66	-3.96	-2.28	-4.13	-0.74	-2.10
0.06	-1.15	0.24	-0.49	0.17	-0.30	-2.91	-4.35	-5.81	-3.55
-2.80	-1.41	-1.88	-1.69	-1.46	-1.75	-2.01	-1.31	-0.68	-1.53
-1.25	0.70	1.60	-0.33						

КВ.-СПЕКТР

0.00	0.64	0.67	-1.03	-1.68	-1.13	-1.81	-0.20	-0.91	0.25
1.06	1.54	1.22	1.93	1.63	0.01	-2.33	-1.10	-0.13	2.04
0.20	-0.70	-3.00	-2.24	-0.96	2.19	2.22	1.24	-0.29	-0.65
-1.33	0.39	0.73	2.06	0.27	-1.86	-1.73	-0.76	1.23	-2.60
-2.97	-2.94	0.95	3.78	3.55	3.01	2.40	-0.60	1.09	-1.75
1.36	0.38	0.52	0.44	1.99	-0.18	-0.13	-1.43	-1.20	-0.66
-1.73	1.68	1.77	1.68						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.53	0.46	0.57	0.46	0.24	0.45	0.21	0.96	0.51
0.34	0.49	0.62	0.83	0.81	0.47	0.83	0.25	0.03	0.46
0.56	0.72	0.95	0.82	0.72	0.83	0.88	0.90	0.89	0.89
0.33	0.11	0.35	0.72	0.80	0.73	0.65	0.73	0.39	0.38
0.43	0.61	0.63	0.88	0.76	0.58	0.64	0.52	0.58	0.61
0.80	0.73	0.84	0.70	0.70	0.35	0.41	0.55	0.38	0.35
0.34	0.38	0.57	1.00						

8.7 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (серпень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (серпень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	8.48	11.38	3.56	4.69	2.25	3.28	2.72	3.71	3.56
4.02	2.70	5.92	9.00	9.53	6.81	4.47	5.65	5.14	4.34
2.65	1.48	4.04	4.99	5.71	2.56	1.61	2.41	4.64	5.02
4.68	3.18	2.82	2.98	2.52	4.44	3.71	3.16	1.67	1.01
1.28	1.32	3.82	3.85	3.94	2.31	2.80	4.32	3.76	2.79
0.93	0.95	2.33	2.50	2.16	0.97	1.40	1.80	2.43	1.81
1.79	4.49	5.72	4.85						

Середня спектральна щільність процесу X 3.61

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	19.92	20.85	21.66	6.95	13.01	17.55	17.53	12.06	7.00
12.42	14.74	19.65	24.06	23.97	14.72	5.18	6.70	8.95	9.10
9.37	12.97	15.98	12.83	10.77	6.62	7.09	4.56	5.31	3.94
7.75	10.29	13.61	23.73	25.69	23.87	12.55	12.31	19.53	17.04
16.64	9.34	7.87	15.51	12.87	17.96	12.25	22.50	18.92	17.60
11.97	11.84	9.66	5.17	7.45	9.66	9.88	11.58	6.33	14.28
17.80	28.56	23.81	11.42						

Середня спектральна щільність процесу Y 13.48

Дисперсії: по X 1.7233 по Y 3.3954

КО-СПЕКТР

0.00	-3.72	-5.10	-4.40	-3.40	-1.71	-0.92	-0.78	-0.96	0.56
-1.20	-1.40	-8.43	-11.55	-13.05	-6.64	-2.12	-3.48	-5.65	-5.83
-3.90	-2.80	-5.69	-6.23	-3.80	-0.15	2.05	1.74	1.66	1.68
-2.13	-3.20	-3.90	-3.10	-1.94	-3.55	-0.39	-0.96	0.59	-0.85
-0.88	-1.68	-2.07	-3.74	-3.30	-1.45	-1.26	-5.34	-6.47	-4.69
-1.57	-2.70	-4.08	-2.23	-1.95	0.89	0.58	1.49	0.20	-1.26
-3.85	-8.58	-9.60	-7.01						

КВ.-СПЕКТР

0.00	4.97	4.08	-2.23	-2.58	-3.48	-6.40	-4.85	-4.54	1.34
-0.79	-0.06	-4.86	-7.40	-6.30	-3.75	1.57	2.35	2.12	0.28
-1.05	-0.14	0.80	0.36	0.12	-0.38	0.10	-0.54	1.28	0.86
-0.07	-0.23	-0.64	-3.94	-7.60	-4.71	-0.76	2.18	2.78	3.63
4.16	0.56	0.29	-0.42	0.73	-0.77	-0.24	1.55	3.59	2.01
0.35	-0.71	0.59	0.22	0.24	-1.71	-2.32	-3.36	-2.48	-0.45
0.68	4.45	4.03	2.51						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.48	0.42	0.56	0.75	0.71	0.85	0.71	0.69	0.29
0.20	0.22	0.90	0.93	0.96	0.76	0.55	0.68	0.89	0.93
0.81	0.64	0.72	0.78	0.48	0.10	0.61	0.55	0.42	0.42
0.35	0.56	0.64	0.60	0.98	0.57	0.13	0.38	0.50	0.90
0.92	0.51	0.38	0.49	0.47	0.25	0.22	0.56	0.88	0.73
0.48	0.83	0.87	0.62	0.49	0.63	0.64	0.80	0.63	0.26
0.69	0.85	0.89	1.00						

8.8 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (вересень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (вересень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	11.36	12.36	4.27	5.17	4.66	6.04	5.08	6.31	5.94
4.83	3.91	3.56	3.42	3.08	3.27	3.73	4.23	3.45	10.74
9.96	8.70	0.90	3.35	6.49	8.38	8.70	11.07	9.41	8.98
3.34	4.42	2.39	4.33	5.08	6.30	4.26	6.18	4.68	5.64
4.20	4.27	3.61	2.57	2.69	3.74	2.31	3.80	2.95	2.65
6.67	6.49	6.71	1.09	1.10	2.52	2.34	3.67	2.70	5.61
6.60	7.64	5.01	1.18						

Середня спектральна щільність процесу X 5.00

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	8.82	11.03	17.78	14.13	29.09	27.92	29.56	25.90	17.70
18.99	5.84	5.49	24.21	35.05	34.49	14.78	7.65	19.60	52.83
49.00	40.27	8.46	21.90	18.27	24.66	21.89	55.25	49.24	55.87
42.11	48.68	37.41	17.46	11.58	10.10	11.69	13.56	19.26	27.34
25.67	24.05	26.95	28.86	21.26	16.52	13.45	21.16	54.14	51.15
45.63	8.53	14.64	11.82	9.33	5.46	8.58	7.35	4.05	2.69
4.11	10.41	10.62	7.80						

Середня спектральна щільність процесу Y 22.17

Дисперсії: по X 1.2562 по Y 11.1916

КО-СПЕКТР

0.00	-1.35	-0.97	-5.19	-4.05	-5.29	-7.54	-8.09	-11.92	-8.72
-6.60	-2.32	-1.09	-4.62	-6.38	-6.66	-4.34	-4.14	-7.34	-23.56
-21.53	-17.93	-1.96	-4.42	-4.18	-7.84	-11.09	-24.39	-20.60	-18.95
-6.10	-9.30	-7.06	-6.11	-4.75	-5.62	-5.31	-6.67	-4.65	-2.67
1.79	2.44	-1.68	-5.56	-6.31	-2.49	0.89	-0.57	-7.07	-6.38
-8.70	-5.22	-3.82	0.28	1.77	-1.96	-0.96	-1.86	-0.20	-3.47
-1.53	-4.23	-0.66	2.76						

КВ.-СПЕКТР

0.00	5.17	3.74	-0.10	0.99	-0.34	-2.73	-3.23	-1.57	-1.85
0.32	1.79	0.29	-1.17	-0.87	1.56	0.29	-0.39	-0.55	1.02
0.85	-0.61	-0.37	5.31	4.80	3.43	-2.51	0.76	2.91	-1.95
-5.39	-7.64	-2.43	-1.64	-2.79	-3.85	-3.35	2.25	2.04	-0.06
0.38	0.17	1.53	-1.90	-0.19	-2.05	-1.18	-4.83	-1.04	-2.81
1.19	-0.32	0.07	-0.23	-0.37	1.15	0.69	1.55	-0.03	0.74
2.00	0.21	0.12	1.27						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.53	0.33	0.60	0.49	0.46	0.62	0.71	0.94	0.87
0.69	0.61	0.25	0.52	0.62	0.64	0.58	0.73	0.90	0.99
0.98	0.96	0.72	0.81	0.58	0.59	0.82	0.99	0.97	0.85
0.69	0.82	0.79	0.73	0.72	0.85	0.89	0.77	0.53	0.22
0.18	0.24	0.23	0.68	0.83	0.41	0.26	0.54	0.57	0.60
0.50	0.70	0.39	0.10	0.56	0.61	0.26	0.47	0.06	0.91
0.48	0.47	0.09	1.00						

8.9 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (жовтень),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (жовтень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	13.09	17.89	18.26	16.18	19.89	19.38	22.72	19.66	17.94
13.44	8.89	9.00	9.30	15.90	18.42	10.44	3.42	9.76	18.13
17.92	12.87	17.04	26.13	22.33	10.12	8.97	9.54	10.44	8.19
7.46	6.47	8.97	11.91	12.89	9.88	7.27	5.93	5.65	18.25
20.72	16.76	8.36	12.93	20.43	22.94	20.20	11.86	6.31	1.95
4.34	3.39	4.24	3.63	11.88	13.68	12.15	4.46	3.39	4.48
5.57	9.49	11.59	11.40						

Середня спектральна щільність процесу X 11.97

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	52.71	66.72	17.18	31.90	27.21	27.23	43.66	39.46	43.94
14.18	11.55	6.59	5.12	43.42	77.17	93.88	57.51	100.05	96.18
96.63	33.01	24.18	23.06	32.58	48.08	78.17	65.87	46.28	16.93
17.37	26.96	42.24	57.97	65.54	46.11	24.64	5.72	13.94	24.68
26.02	18.19	12.78	24.95	30.64	33.93	29.92	23.68	24.47	23.13
39.54	41.49	51.31	34.77	28.37	22.51	34.69	30.33	19.20	23.54
59.77	92.44	88.13	36.78						

Середня спектральна щільність процесу Y 39.00

Дисперсії: по X 5.7863 по Y 21.7578

КО-СПЕКТР

0.00	-13.75	-21.55	-11.34	-16.38	-15.76	-16.68	-23.33	-21.42	-21.64
-9.16	-3.50	-3.48	2.00	-15.84	-14.84	-17.42	-0.25	-27.18	-34.91
-35.61	-16.85	-17.16	-14.17	-7.70	-1.31	-18.91	-17.06	-14.35	5.92
5.42	7.68	-8.09	-16.55	-13.58	-3.75	3.26	-1.84	1.69	-10.18
-12.69	-15.52	-5.54	-12.88	-17.67	-20.83	-16.43	-11.17	-9.45	-4.46
-11.10	-6.74	-10.31	-3.41	-12.87	-10.04	-12.86	-5.89	-3.52	3.88
4.23	-10.74	-19.43	-11.88						

КВ.-СПЕКТР

0.00	1.20	3.73	0.10	-5.13	-2.41	-1.67	18.59	13.20	12.87
4.64	3.34	2.51	2.68	4.97	-4.43	-6.85	-9.11	5.02	10.68
11.58	7.25	-1.79	-6.84	-9.21	-9.97	-10.27	-5.58	-1.40	6.63
4.54	2.37	6.80	2.14	2.34	-4.63	-1.52	-1.27	-7.14	-12.36
-12.22	-6.72	5.78	2.45	-2.02	-0.49	6.75	11.72	6.13	2.55
2.32	3.23	4.13	4.89	2.31	-5.02	-5.94	-5.44	-0.50	-2.28
-12.72	-9.29	-1.32	16.68						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.53	0.63	0.64	0.76	0.69	0.73	0.95	0.90	0.90
0.74	0.48	0.56	0.48	0.63	0.41	0.60	0.65	0.88	0.87
0.90	0.89	0.85	0.64	0.44	0.46	0.81	0.72	0.66	0.75
0.62	0.61	0.54	0.64	0.47	0.28	0.27	0.38	0.83	0.75
0.76	0.97	0.77	0.73	0.71	0.75	0.72	0.97	0.91	0.76
0.87	0.63	0.75	0.53	0.71	0.64	0.69	0.69	0.44	0.44
0.73	0.48	0.61	1.00						

8.10 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ в секторі Північної Атлантики:

$X(t)$ – атмосферний тиск на ст. П.-Делгада (листопад),

$Y(t)$ – атмосферний тиск на ст. Рейк'явік (листопад).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

0.00	16.50	32.74	23.08	18.17	8.27	13.74	13.17	9.51	4.95
7.27	6.25	10.18	8.18	12.40	8.56	17.32	12.66	17.13	9.82
14.38	13.43	11.06	16.61	16.73	25.51	18.82	16.13	21.07	16.45
14.84	3.90	25.85	25.67	28.65	14.24	14.06	12.76	23.99	28.43
24.09	8.58	6.57	16.97	16.02	21.37	19.20	21.96	14.00	32.20
29.77	31.65	5.99	4.25	8.64	8.57	11.36	8.17	12.12	13.41
13.66	8.85	4.07	0.62						

Середня спектральна щільність процесу X 14.92

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

0.00	23.95	68.36	70.98	92.51	69.91	64.48	53.35	31.83	23.23
17.77	24.84	23.40	24.86	26.08	73.06	68.15	62.45	5.96	13.52
55.15	63.13	56.38	20.31	14.69	22.67	39.89	115.63	156.22	156.73
78.47	29.07	9.80	17.42	83.24	88.10	81.51	19.66	8.75	15.18
32.47	56.86	50.53	52.30	38.08	65.09	81.94	71.56	46.04	61.48
90.67	89.99	36.66	8.47	21.02	52.98	58.13	62.24	50.51	73.84
62.06	43.13	17.32	13.02						

Середня спектральна щільність процесу Y 50.11

Дисперсії: по X 7.7822 по Y 18.9815

КО-СПЕКТР

0.00	-17.52	-34.78	-18.94	-18.83	-11.79	-15.47	-11.27	-1.78	-0.21
-6.07	-1.97	-7.65	-1.14	-11.51	-12.80	-12.95	-5.82	1.00	-6.39
-17.26	-20.64	-15.37	-13.88	-12.22	-11.90	-8.82	-16.73	-42.40	-36.49
-25.67	-2.28	-14.21	-14.54	-30.21	-15.45	-14.95	3.59	-2.56	2.87
3.74	-1.40	-7.09	-24.46	-20.76	-35.44	-36.78	-33.13	-17.86	-40.16
-47.73	-48.24	-11.75	-3.69	-3.25	2.05	-1.87	-9.14	-1.57	-7.74
-5.03	-14.65	-4.64	-2.80						

КВ.-СПЕКТР

0.00	-0.75	19.82	17.63	12.10	-2.65	-10.14	-1.90	-8.22	5.76
5.08	6.53	4.45	4.06	4.42	5.38	-0.42	-3.61	-4.75	1.25
15.08	17.95	15.04	6.36	0.14	11.31	17.06	26.49	6.11	-3.76
-11.57	-3.48	-4.64	-2.32	-11.19	-18.25	-19.47	-3.02	7.94	10.70
8.16	3.58	2.26	-7.32	-3.72	-6.67	-9.72	-9.38	-9.20	-6.02
-7.12	-8.65	-2.05	-1.31	-8.93	-2.87	-2.20	4.69	-5.52	-12.62
-11.84	-8.88	-3.19	0.43						

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

0.00	0.88	0.85	0.64	0.55	0.50	0.62	0.43	0.48	0.54
0.70	0.55	0.57	0.30	0.69	0.56	0.38	0.24	0.48	0.56
0.81	0.94	0.86	0.83	0.78	0.68	0.70	0.73	0.75	0.72
0.83	0.39	0.94	0.70	0.66	0.68	0.73	0.30	0.58	0.53
0.32	0.17	0.41	0.86	0.85	0.97	0.96	0.87	0.79	0.91
0.93	0.92	0.80	0.65	0.70	0.17	0.11	0.46	0.23	0.47
0.44	0.88	0.67	1.00						

Для розв’язання задач (8.11-8.15) цього розділу використовуються заздалегідь розраховані на ПЕОМ оцінки взаємної спектральної щільності двох випадкових рядів за період 1901-2000 рр.: ко-спектра, квадратурного спектра, когерентності та оцінки спектральних щільностей окремих процесів.

Дискретність даних складає 1 рік.

Використовуючи наведені в задачах (8.11-8.15) результати реалізації алгоритму взаємного спектрального аналізу, провести дослідження зв’язків між рядами середньої місячної кількості опадів на ст. Одеса та індексом Південного Коливання (SOI) за допомогою двох дійсних функцій.

На рівні значущості $\alpha = 0.05$ виявити статистично значущі періодичні компоненти в спектральних щільностях окремих процесів, що розглядаються, та відповісти на ряд запитань викладача.

8.11 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$:

$X(t)$ – індекс Південного Коливання (січень),

$Y(t)$ – середня місячна кількість опадів (ст. Одеса, січень).

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  45.75  48.16  71.26  42.13  63.65  64.16  75.86  72.30 102.16
   123.44 129.02  82.13  82.02  95.70 113.79  87.37  68.36  43.77  38.56
    61.56 111.25 181.58 149.11  98.56  27.34  39.04 123.80 131.34 109.13
    70.84 165.67
 Середня спектральна щільність процесу X      84.96
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00  32.611204.531365.001364.43 214.36 251.85 582.75 661.63 570.24
   252.88 361.20 257.64 248.66 168.92 263.72 295.07 178.96 192.86 161.60
   231.13 159.08 310.60 299.85 318.28 271.75 510.82 814.94 799.08 560.47
   277.21 292.73

 Середня спектральна щільність процесу Y    421.09
 Дисперсії: по X   22.8041  по  Y   138.5258
```

КО-СПЕКТР

```
     0.00  -4.80 -32.67 -85.64 -92.13 -44.43 -62.56  16.34  -3.95  73.95
    -4.18 -77.37 -88.64 -85.59 -48.53  23.18  36.31  89.36  35.68   6.22
    22.49  52.07  80.11  19.68  11.12   3.16  34.63 -48.06 -96.52-107.18
    21.54 203.61
```

КВ.-СПЕКТР

```
     0.00  25.00  70.28  27.25  15.83 -40.86 -14.00 -26.90  29.81 130.65
   101.12  57.08 -24.27 -17.76 -80.56-119.61-111.47 -48.77  18.42  31.31
   -20.25-105.95  13.53  57.87  94.25 -48.83  41.45 234.02 269.78 185.40
    34.73  83.91
```

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

```
     0.00   0.66   0.32   0.29   0.39   0.52   0.50   0.15   0.14   0.62
     0.57   0.45   0.63   0.61   0.74   0.70   0.73   0.92   0.44   0.40
     0.25   0.89   0.34   0.29   0.54   0.57   0.38   0.75   0.88   0.87
     0.29   1.00
```

8.12 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$:

$X(t)$ – індекс Південного Коливання (лютий),

$Y(t)$ – середня місячна кількість опадів (ст. Одеса, лютий).

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  11.56  69.10  35.97   1.06   1.14  27.61 129.87  16.90  84.52
   204.66 294.73 322.37  27.41  46.41  99.98  27.20  82.19 348.32  49.71
   136.87   5.42  57.01   6.25  10.41  80.21  32.41  98.79  60.88   0.19
    53.61  33.26
```

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ Y

```
     0.002147.89 294.60 772.69 249.321262.751669.181561.43 271.99  73.88
    64.731163.39 813.68  81.95  50.35 537.55 491.08 284.481180.00  31.93
   160.89 723.23 134.28 754.49 538.48 224.74 586.57 359.99 887.80 488.00
   147.40  78.33
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  26.89  38.88  35.37  12.72   9.94  52.87  58.12  77.10 102.03
   194.64 273.92 214.84 132.06  57.93  57.86  69.79 152.57 160.07 178.30
    64.00  66.43  22.89  24.55  32.29  41.01  70.47  64.03  53.29  38.23
    29.02  33.26
 Середня спектральна щільність процесу X     76.42
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00 814.161071.73 438.87 761.591060.421497.791167.53 635.77 136.87
   434.00 680.60 686.34 315.33 223.28 359.66 437.70 651.85 498.81 457.61
   305.35 339.47 537.33 475.75 505.91 449.93 390.44 611.45 578.60 507.74
   237.91  78.33

 Середня спектральна щільність процесу Y   542.13
 Дисперсії: по X   23.2112  по  Y   178.8856
```

КО-СПЕКТР

```
     0.00 -57.77 -91.87 -62.97 -38.62  37.43 105.61 129.58 112.39  79.66
   -44.77-176.06-216.45-103.96 -73.87 -96.16 -81.02-215.66-197.85-200.24
    31.63  37.19  36.69  39.65  79.14  81.31 117.76  14.71  -7.13 -65.95
    17.23  38.12
```

КВ.-СПЕКТР

```
     0.00 -81.63 -37.75  -0.53  26.83 -75.01  64.69  75.17 124.16 -31.64
  -195.99-320.42-286.24-107.61  37.15  47.34  -8.85 -53.60 -81.98 -81.60
   -49.91 -17.01  24.65  34.00  36.35  -0.26 -25.96 -24.42  13.57  61.23
    17.69 -33.94
```

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

```
     0.00   0.68   0.49   0.51   0.48   0.82   0.44   0.58   0.76   0.73
     0.69   0.85   0.93   0.73   0.73   0.74   0.47   0.70   0.76   0.76
     0.42   0.27   0.40   0.48   0.68   0.60   0.73   0.14   0.09   0.65
     0.30   1.00
```

8.13 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$:

$X(t)$ – індекс Південного Коливання (березень),

$Y(t)$ – середня місячна кількість опадів (ст. Одеса, березень).

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  19.40  57.45  96.61  21.82  55.44 104.31 243.20  80.23 258.24
    14.69  25.26 129.24   8.04 121.96  57.68  65.76 156.02 548.66  95.23
    43.76  56.76  49.53  61.09  64.53 125.99  42.20  22.30  15.11  39.56
     1.82 251.04
```

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00 310.72 199.98  32.91 271.32 220.98  19.57 274.24 669.45 186.59
   251.13 237.20 636.52  46.30   2.01 188.85  50.78 176.68 516.86 218.01
     9.52 426.28 223.61 209.12 727.74 498.02 217.88 257.30  58.64 112.14
   200.71 224.14
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  25.62  57.82  58.62  57.96  60.52 134.32 142.58 193.89 117.72
    99.40  56.40  54.18  86.41  62.56  81.80  93.15 256.82 266.64 229.22
    65.25  50.02  55.79  58.38  83.87  77.57  63.50  26.54  25.66  18.83
    97.47 251.04
 Середня спектральна щільність процесу X     94.05
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00 170.23 181.20 168.07 175.07 170.63 171.60 321.09 376.76 369.06
   224.98 374.95 306.67 228.28  79.05  80.55 138.77 248.11 303.85 248.13
   217.94 219.80 286.34 386.82 478.29 481.21 324.40 177.94 142.69 123.83
   179.00 224.14

 Середня спектральна щільність процесу Y   236.86
 Дисперсії: по X   28.6334  по  Y   76.1145
```

КО-СПЕКТР

```
     0.00 -56.66 -50.80  -5.87  57.85  39.03 -62.13 -79.05 -14.55  43.08
    56.48 -64.26 -42.81 -63.76 -26.08  -9.69  10.60 -97.79-163.53-190.62
   -59.89 -44.21  -4.23  71.65 186.18 118.79  64.29 -28.41  -8.79 -26.40
    51.54 204.05
```

КВ.-СПЕКТР

```
     0.00 -15.88   1.98  26.24   2.87  -7.33 -54.56  45.94 -13.67  19.14
   -49.13 -63.14 -51.63 -55.97  24.68  12.59  58.70 153.24 151.59  95.67
    37.46  59.99  57.45 -21.33 -25.38  -7.91  -2.27 -13.37  -3.08  22.39
   -17.72-120.97
```

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

```
     0.00   0.89   0.50   0.27   0.57   0.39   0.54   0.43   0.07   0.23
     0.50   0.62   0.52   0.60   0.51   0.20   0.52   0.72   0.78   0.89
     0.59   0.71   0.46   0.50   0.94   0.62   0.45   0.46   0.15   0.72
     0.41   1.00
```

8.14 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$:

$X(t)$ – індекс Південного Коливання (квітень),

$Y(t)$ – середня місячна кількість опадів (ст. Одеса, квітень).

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  22.52 350.07  24.94 154.19   0.31  56.94 233.30 315.31  93.84
   195.08  88.79 145.09 141.79 153.25  70.84 132.84  14.79 594.17 175.66
   116.79  91.95  88.44 124.58  38.16  48.17  97.98 103.52 283.70  51.54
    98.62 213.22
```

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00  80.281021.66  12.98 247.56 628.05 330.75  92.22  61.81 124.49
   320.50  48.72 627.06 410.41  14.44 241.83 136.77 108.45 369.73  38.27
   314.81  45.87 376.67 228.12 412.72 247.12 153.27  72.541035.13   2.66
   177.35 336.75
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

```
     0.00 124.20 132.51 176.40  59.81  70.48  96.85 201.85 214.15 201.41
   125.90 142.99 125.22 146.71 121.96 118.98  72.82 247.27 261.54 295.54
   128.13  99.06 101.65  83.72  70.30  61.43  83.22 161.73 146.25 144.62
   121.13 213.22
 Середня спектральна щільність процесу X    135.97
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00 367.31 371.64 427.40 296.19 402.12 350.34 161.60  92.84 168.93
   164.57 332.09 362.06 350.64 222.22 131.01 162.35 204.98 172.15 240.94
   132.98 245.78 216.89 339.17 295.99 271.04 157.64 420.32 370.11 405.05
   172.26 336.75

 Середня спектральна щільність процесу Y   260.79
 Дисперсії: по X   41.9555  по  Y    77.4579
```

КО-СПЕКТР

```
     0.00 184.51 183.35 115.02 -70.31-114.56 -35.82 -17.50  61.09  88.54
    92.90 157.36  37.63  33.45 -73.59 -29.72 -47.93-125.45 -96.05 -32.23
    39.58  13.77 -60.02 -69.17 -41.55  12.16   8.02 -13.43 -56.14 -26.55
   -81.50-239.76
```

КВ.-СПЕКТР

```
     0.00 -69.21 -75.09 -85.99  -5.18   6.09 -43.75 -85.86 -77.16-102.71
   -70.01-108.14 -18.66 -13.21  53.44   7.93  26.89-145.52-143.81-178.54
   -33.26  45.82 122.23  72.70  56.63  -6.31  22.64 165.35 176.59 225.76
    86.73 119.64
```

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

```
     0.00   0.92   0.89   0.52   0.53   0.68   0.31   0.49   0.70   0.74
     0.81   0.88   0.20   0.16   0.55   0.25   0.51   0.85   0.82   0.68
     0.40   0.31   0.92   0.60   0.49   0.11   0.21   0.64   0.80   0.94
     0.82   1.00
```

8.15 Результати реалізації алгоритму взаємного спектрально аналізу, що був застосований до двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$:

$X(t)$ – індекс Південного Коливання (травень),

$Y(t)$ – середня місячна кількість опадів (ст. Одеса, травень).

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ X

```
     0.00   9.49 107.50  71.55  19.05   6.57  14.83  76.25 203.56  98.95
   206.96 386.58 139.15 176.30  14.64  87.51 120.21 101.64 310.54 145.71
   154.29  15.95  98.07   8.32  90.85  16.49  32.37  71.51 110.81  25.42
    12.90 135.99
```

ПЕРІОДОГРАМА ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00 130.59 612.53 549.85 653.641269.831995.831167.62 468.281468.06
    91.981023.00 631.07 584.97 445.52 847.80 179.64 483.23 600.311399.48
    78.78  95.47  83.18 182.851798.25 599.03  46.62 204.69 474.82 280.31
   793.651001.48
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ X

```
     0.00  39.00  62.85  66.03  32.39  13.48  32.55  98.21 126.25 169.82
   230.83 244.23 234.01 110.03  92.82  74.12 103.12 177.46 185.96 203.51
   105.31  89.43  40.78  65.75  38.55  46.57  40.12  71.56  69.24  49.71
    58.10 135.99
 Середня спектральна щільність процесу X      97.12
```

СПЕКТРАЛЬНА ЩІЛЬНІСТЬ ПРОЦЕСУ Y

```
     0.00 247.70 430.99 605.34 824.441306.431477.761210.571034.65 676.10
   861.01 582.02 746.35 553.85 626.10 490.99 503.56 421.06 827.67 692.86
   524.58  85.81 120.50 688.10 860.04 814.63 283.44 242.04 319.94 516.26
   691.811001.48

 Середня спектральна щільність процесу Y   633.38
 Дисперсії: по X   29.3198  по  Y    207.8532
```

КО-СПЕКТР

```
     0.00  57.22 123.33 117.05  58.04  21.95  41.52 -34.73-117.09-154.24
   122.39 260.17 333.09 101.63 -64.87 -83.43 -69.99-130.08-262.92-243.10
   -98.23  44.93  20.65  -9.30 -48.99 -36.88  10.73  59.81  87.78  38.97
   117.89 354.78
```

КВ.-СПЕКТР

```
     0.00  56.13  57.05  85.66  62.96  13.17  79.60 -27.43 -94.31-163.60
   -93.61  71.73 -58.42 -65.98-156.44-101.32-159.16 -90.18  53.90 162.25
   121.70  19.32 -15.73 128.89 100.42 113.41 -52.94 -86.84-107.44 -53.62
   -21.93-101.61
```

ВЗАЄМНА КОГЕРЕНТНІСТЬ ПРОЦЕСІВ X ТА Y

```
     0.00   0.82   0.83   0.73   0.52   0.19   0.41   0.13   0.42   0.66
     0.35   0.72   0.81   0.49   0.70   0.69   0.76   0.58   0.68   0.78
     0.67   0.56   0.37   0.61   0.61   0.61   0.51   0.80   0.93   0.41
     0.60   1.00
```

9. ОСОБЛИВОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ СТРУКТУРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЧАСОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ. ВИЯВЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Основні теоретичні положення

Часові ряди метеорологічних величин, як показали численні дослідження, утримують періодичні компоненти, обумовлені хвильовою природою атмосферних процесів.

Існує ряд методів дослідження періодичностей, що містяться в часових рядах. Їх називають "*прихованими" періодичностями*. Зручним для реалізації на ПЕОМ є метод, оснований на інтегральному перетворенню Фур'є. Він дає можливість без будь-яких додаткових досліджень отримати частоти, амплітуди та початкові фази періодичних компонент, "прихованих" у часовій послідовності.

Часовий ряд $X(t)$, заданий на інтервалі $t \in [-\tau, \tau]$, можна розглядати як кусково-гладку функцію часу. Таку функцію у відповідності до теореми Діріхлє можна виразити суперпозицією простих гармонік:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \ , \tag{9.1}$$

де A_k – амплітуда k – тої гармоніки,

ω_k – її частота,

φ_k – початкова фаза.

Рівність (9.1) може бути переписаною таким чином:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t] \ , \tag{9.2}$$

якщо позначити

$$a_k = A_k \sin \varphi_k \ , \tag{9.3}$$

$$b_k = A_k \cos \varphi_k \ . \tag{9.4}$$

Як свідчать формули (9.3) та (9.4), початкова фаза розраховується за допомогою рівняння (9.5):

$$\varphi_k = arctg \frac{a_k}{b_k} \ . \tag{9.5}$$

Для кусково–гладкої функції $X(t)$, заданої на нескінченному інтервалі, справедливим є перетворення Фур'є:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \ , \tag{9.6}$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Але часові ряди гідрометеорологічних величин визначені на обмеженому інтервалі і можуть бути апроксимовані таким чином:

$$X(t) = \begin{cases} x(t), & за\ \ умови \quad t \in [-\tau, \tau] \ ; \\ 0, & за\ \ умови \quad |t| > \tau \ . \end{cases} \tag{9.7}$$

Для такої функції перетворення Фур'є має вигляд:

$$F_\tau(i\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} X(t)\, e^{-i\omega t} dt \tag{9.8}$$

Якщо впровадити відому формулу Ейлера, то інтеграл (9.8) приймає таку форму:

$$F_\tau(i\omega) = U(\omega) - iV(\omega) \ , \tag{9.9}$$

де

$$U(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} X(t) \cos \omega t dt \ , \tag{9.10}$$

$$V(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} X(t) \sin \omega t dt \ . \tag{9.11}$$

Рівності (9.10) та (9.11) є відповідно *косинус-* і *синус-перетворення Фур'є функції* $X(t)$, що апроксимована виразом (9.7). Якщо частоти гармонічних компонент, які утримуються в $X(t)$, не є близькими, то $U(\omega)$ і $V(\omega)$ мають вигляд кривих з різко вираженими піками в точках $\omega = \omega_k$. Висота піків приблизно дорівнює амплітудам парної (a_k) і непарної (b_k) складових періодичного коливання з частотою ω_k, "прихованого" в процесі $X(t)$. На тих самих частотах ω_k будуть

спостерігатися піки амплітуд $A_k = A(\omega_k)$, оскільки $a_k \approx U(\omega_k)$ і $b_k \approx V(\omega_k)$.

Амплітуду k-тої гармоніки в такому разі розраховують за формулою:

$$A(\omega_k) = [U^2(\omega_k) + V^2(\omega_k)]^{\frac{1}{2}}. \qquad (9.12)$$

З метою поліпшення селективних якостей перетворень Фур'є (9.10) та (9.11) в них вводять *множники ("вікна")*, які зменшують вплив значень $X(t)$, заданих поблизу меж інтервалу визначення функції. Одним з таких "вікон" *є множник Гіббса*:

$$g(t) = \frac{\sin\frac{\pi t}{\tau}}{\frac{2t}{\tau}} \quad . \qquad (9.13)$$

Очевидно, $g(\tau) = g(-\tau) = 0$. Максимум цієї функції спостерігається за умови $\tau = 0$ і дорівнює:

$$g(0) = \frac{\pi}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\sin\frac{\pi t}{\tau}}{\frac{\pi t}{\tau}} = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Таким чином, графік функції $g(t)$ на інтервалі $[-\tau, \tau]$ має вигляд, зображений на рис. 9.1.

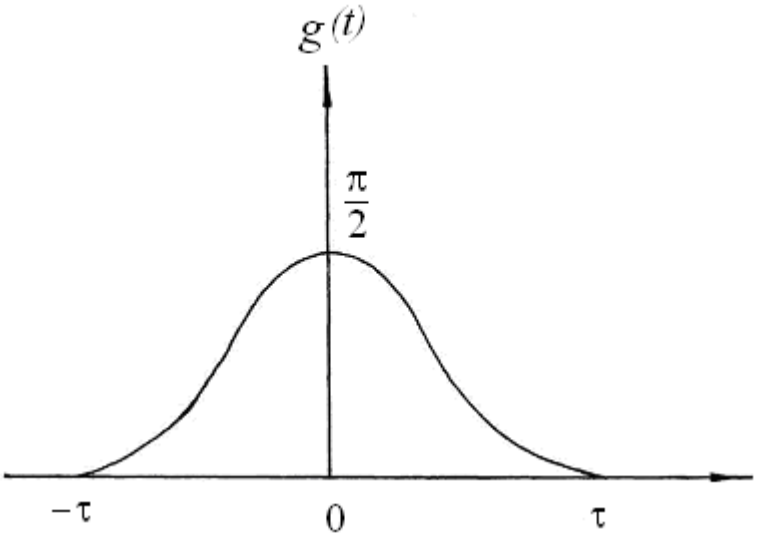


Рис. 9.1 – «Вікно» Гіббса

Отже, з врахуванням «вікна» Гіббса косинус- та синус-перетворення Фур'є описуються рівняннями (9.14) і (9.15) відповідно:

$$U(\omega)=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\frac{\sin\frac{\pi t}{\tau}}{\frac{2t}{\tau}}X(t)\cos\omega t dt\ , \qquad (9.14)$$

$$V(\omega)=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\frac{\sin\frac{\pi t}{\tau}}{\frac{2t}{\tau}}X(t)\sin\omega t dt\ . \qquad (9.15)$$

Інтеграли (9.14) і (9.15) обчислюються одним із наближених методів.

Із-за обмеженості інтервалу й скінченної кількості точок задання функції, інформації про функцію недостатньо для визначення параметрів гармонік з періодом $T>2\tau$ і $T<\frac{\tau}{m}$.

Отже, мінімально і максимально можливі гармоніки, які можуть бути виявлені, мають частоти, що розташовані в інтервалі $(\omega_{\min},\omega_{\max})$, де $\omega_{\min}=\frac{\pi}{\tau}$, $\omega_{\max}=\frac{m\pi}{\tau}$.

Інтервал дискретності частоти $\Delta\omega$ при чисельному інтегруванні вибирається з урахуванням властивостей множника Гіббса. При його впровадженні у перетворення Фур'є можна гарантувати, що вплив амплітуд сусідніх за частотою гармонік не перебільшує 0,05 від амплітуди, за умови $\Delta\omega\tau\geq 4.5$. Звідси випливає, що крок при обчисленнях $U(\omega)$ та $V(\omega)$ визначається рівністю:

$$\Delta\omega=\frac{4.5}{\tau}\ . \qquad (9.16)$$

Періодичності, що утримуються у випадковому процесі, визначаються по піках амплітуд $A(\omega_i)$ на *періодограмі (амплітудно-частотній характеристиці),* приклад якої наводиться у типовій задачі (рис. 9.2). На періодограмі існує ряд малозабезпечених піків, ускладнюючих аналіз. Для їх ліквідації застосовують *фільтр Тьюккі* :

$$\tilde{A}(\omega_i)=0.25A(\omega_{i-1})+0.5A(\omega_i)+0.25A(\omega_{i+1})\ . \qquad (9.17)$$

Визначення статистично значущих періодичностей, характерних для процесу $X(t)$, основується на побудові верхньої довірчої межі для амплітуд з заданою ймовірністю за умови, що амплітуди підпорядковуються нормальному розподілу. Періоди T_k гармонік ω_k, які відповідають пікам амплітуд, що виходять за довірчу межу,

ототожнюються з періодами гармонічних коливань, які утримуються у випадковому процесі $X(t)$. Для кожного з них знаходять *початкову фазу*:

$$\varphi_k = arctg\frac{U(\omega_k)}{V(\omega_k)} \ . \tag{9.18}$$

Початкова фаза дає можливість знайти точку h_k на осі часу, яка є *початком коливання*, тобто:

$$h_k = \begin{cases} \dfrac{(\pi + \varphi_k)}{2\pi} \cdot T_k & \textit{за умови} \quad \varphi_k \le 0; \\ \dfrac{\varphi_k \cdot T_k}{2\pi} & \textit{за умови} \quad \varphi_k > 0, \end{cases} \tag{9.19}$$

де φ_k – початкова фаза гармонічного коливання в радіанах;

T_k – період гармонічного коливання в одиницях часу, який розраховується за формулою:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}. \tag{9.20}$$

Треба мати на увазі, що у деяких випадках на амплітудно-частотних характеристиках спостерігаються сплески амплітуд (найчастіше на низьких частотах), які значно відрізняються від загального рівня коливань амплітуд гармонік. Це означає, що ці гармоніки характеризуються найбільшою, порівняно до інших, енергією. У таких випадках насамперед треба перевірити гіпотезу про те, що такі сплески амплітуд належать до тієї ж генеральної сукупності, що й амплітуди інших гармонік. У разі неприйняття цієї гіпотези такі сплески при розрахунках середнього значення амплітуди $\bar{A}$ й середнього квадратичного відхилу амплітуд σ_A треба виключити із сукупності амплітуд і після цього розрахувати для неї довірчу межу з тією чи іншою ймовірністю для визначення статистично значущих періодичностей.

Розв'язання типової задачі. ***Виявлення періодичностей у випадковому процесі за допомогою інтегрального перетворення Фур'є.***

Заздалегідь до ряду середньомісячного атмосферного тиску на ст. Рейк'явік у жовтні за період 1866–2000 рр. впроваджено інтегральне перетворення Фур'є. Алгоритм дослідження нестаціонарних часових рядів було реалізовано за допомогою комп'ютерної програми та отримані такі

характеристики: амплітуда i-тої гармоніки (A_i), її частота (ω_i), початкова фаза (φ_i), косинус- та синус-перетворення Фур'є – $U(t)$ та $V(t)$ відповідно (табл.9.1).

Таблиця 9.1 – Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, жовтень)

i	ω_i, *рік*$^{-1}$	T, *рік*	A_i, *гПа*	φ_i, *рад.*	$U(t)$	$V(t)$
4	0.316	19.912	20.906	1.544	-19.336	-0.521
5	0.383	16.418	25.014	1.526	-28.204	-1.278
6	0.450	13.967	24.224	-1.569	-24.248	0.055
7	0.517	12.152	22.095	-1.561	-20.167	0.196
8	0.584	10.755	23.214	1.564	-23.795	-0.173
9	0.651	9.646	24.183	-1.559	-25.095	0.292
10	0.719	8.744	23.462	1.514	-22.709	-1.282
11	0.786	7.997	23.126	-1.529	-23.239	0.979
12	0.853	7.367	22.979	-1.533	-23.223	0.875
13	0.920	6.829	22.446	-1.478	-22.084	2.050
14	0.987	6.365	22.339	-1.513	-22.151	1.279
15	1.054	5.959	22.731	-1.560	-22.801	0.251
16	1.122	5.602	23.018	-1.561	-23.130	0.227
17	1.189	5.286	23.180	1.558	-23.006	-0.297
18	1.256	5.003	23.179	1.491	-23.497	-1.882
19	1.323	4.749	22.852	1.525	-22.540	-1.041
20	1.390	4.520	22.621	-1.544	-22.699	0.615
21	1.457	4.311	22.858	1.548	-22.499	-0.514
22	1.525	4.121	23.445	1.561	-23.714	-0.239
23	1.592	3.948	23.903	-1.570	-23.846	0.031
24	1.659	3.788	23.965	-1.517	-24.170	1.291
25	1.726	3.640	23.688	-1.507	-23.561	1.496
26	1.793	3.504	23.358	-1.552	-23.326	0.448
27	1.860	3.377	23.086	-1.554	-23.162	0.382
28	1.927	3.260	23.097	-1.543	-22.674	0.635
29	1.995	3.150	23.512	-1.556	-23.854	0.346
30	2.062	3.047	23.795	1.561	-23.652	-0.241
31	2.129	2.951	24.040	1.529	-23.995	-1.012
32	2.196	2.861	24.327	1.570	-24.474	-0.018
33	2.263	2.776	24.235	-1.521	-24.312	1.223
34	2.330	2.696	23.721	-1.548	-23.776	0.553
35	2.398	2.621	23.152	1.515	-22.941	-1.292
36	2.465	2.549	22.879	1.550	-22.866	-0.473
37	2.532	2.482	22.887	1.555	-22.794	-0.358
38	2.599	2.417	23.040	1.501	-23.028	-1.611
39	2.666	2.357	23.314	1.542	-23.187	-0.673
40	2.733	2.299	23.483	-1.556	-23.777	0.350
41	2.801	2.243	23.512	-1.525	-23.149	1.071
42	2.868	2.191	23.457	-1.565	-23.920	0.145
43	2.935	2.141	23.219	-1.514	-22.777	1.292
44	3.002	2.093	23.642	-1.502	-23.274	1.605
45	3.069	2.047	24.229	1.537	-25.081	-0.839
46	3.136	2.003	24.233	1.566	-23.396	-0.116

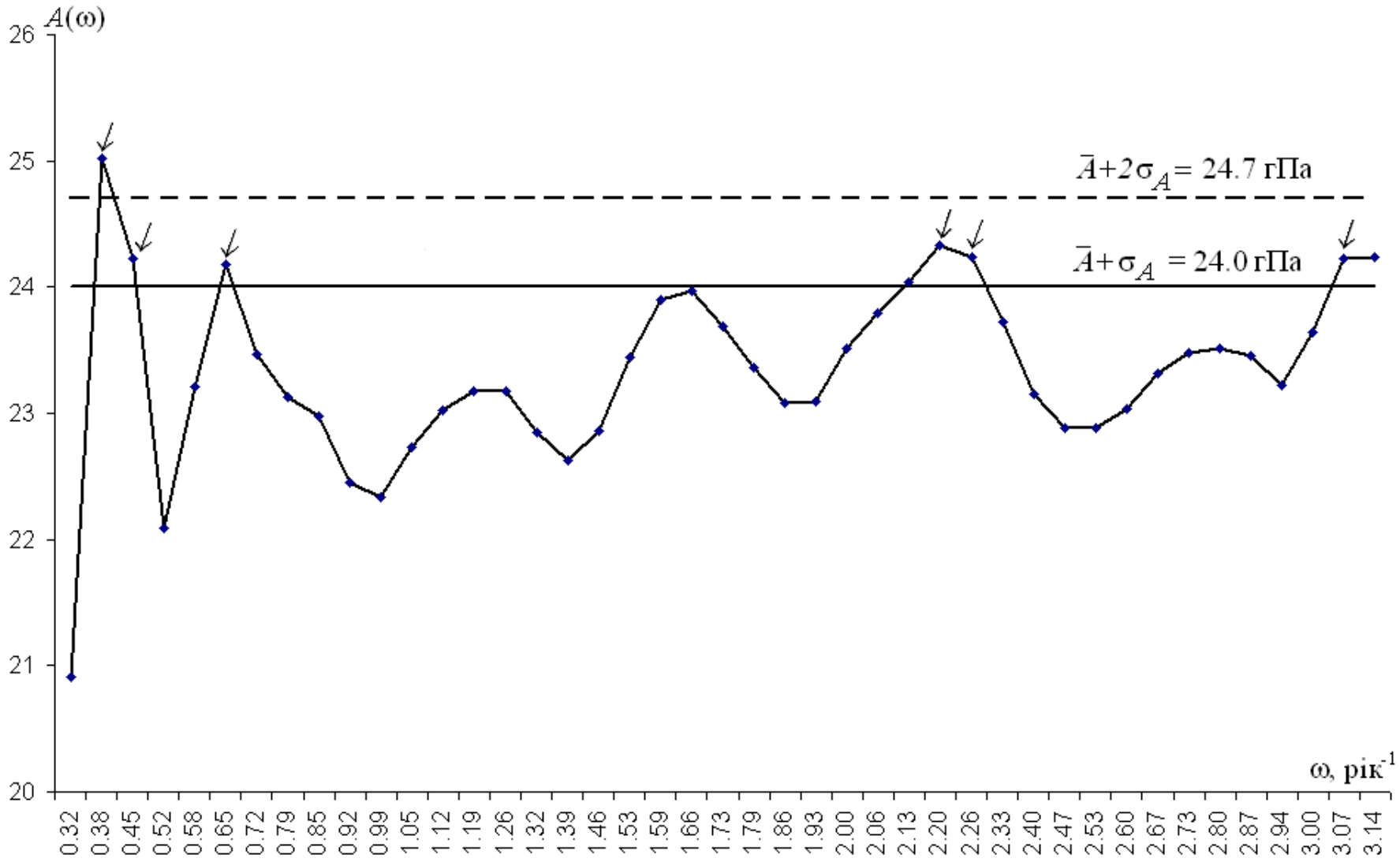


Рисунок 9.2 – Амплітудно-частотна характеристика середнього місячного атмосферного тиску (ст. Рейк’явік, жовтень)

Розраховані статистики амплітуди: $\bar{A}$ = 23.3 гПа та σ_A = 0.7 гПа. Використовуючи наведені в табл. 9.1 дані (2-й та 4-й стовпчики), була побудована амплітудно–частотна характеристика випадкового процесу, що розглядається (рис. 9.2).

Дискретність вихідних даних складає 1 рік. Визначення статистично значущих періодичностей, характерних для цього процесу, основувалися на побудові верхньої довірчої межі для амплітуд з ймовірністю 68 та 95% за умови, що амплітуди підпорядковуються нормальному розподілу.

З рис. 9.2 випливає, що в процесі який розглядається, утримуються статистично значущі коливання, характеристики котрих наводяться в табл. 9.2.

Таблиця 9.2 – Характеристики періодичних компонент, що виявлені в процесі $X(t)$ за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

k	ω, рік $^{-1}$	A_k, гПа	T_k, рік	Початкова фаза (φ_k)		$U(t)$	$V(t)$
				φ_k, рад	φ_k, рік		
5	0.383	25.01	**16.4**	1.526	4.0	-28.20	-1.28
6	0.450	24.22	14.0	-1.569	3.5	-24.25	0.06
9	0.651	24.18	9.7	-1.559	2.4	-25.10	0.29
32	2.196	24.33	2.9	1.570	0.7	-24.47	-0.02
33	2.263	24.24	2.8	-1.521	0.7	-24.31	1.22
46	3.136	24.23	2.0	1.566	0.5	-23.40	-0.12

З ймовірністю 68% часовий ряд середньомісячного атмосферного тиску на ст. Рейк'явік у жовтні вміщує статистично значущих 6 гармонік: 16-річну, чотирнадцятирічну, десяти, трьох (2.9 та 2.8) та дворічну періодичності. І тільки одна з них (16-річна) спостерігається у цьому випадковому процесі з ймовірністю **95%**. Усі вони потребують фізичного обґрунтування і врахування при прогнозуванні крупномасштабних атмосферних процесів.

Запитання для самоперевірки

1. Чому гідрометеорологічні процеси вважаються нестаціонарними часовими процесами?
2. Які методи використовуються при дослідженні періодичностей, що містяться в часових рядах?
3. Якими перевагами володіє інтегральне перетворення Фур'є для дослідження "прихованих" періодичностей?
4. З якою метою в перетворення Фур'є вводять множники («вікна»)?
5. В якому частотному інтервалі лежать мінімально і максимально можливі гармоніки, які можуть бути виявлені в нестаціонарному випадковому процесі за допомогою перетворення Фур'є?
6. Як по амплітудно-частотній характеристиці визначити з заданою ймовірністю статистично значущі періодичності у випадковому процесі?
7. Які характеристики "прихованих" гармонік у випадковому процесі можна отримати за допомогою перетворення Фур'є?
8. Дати визначення випадкової функції, випадкового процесу, випадкової послідовності.
9. Якими ймовірносними характеристиками описують випадкові функції?
10. Яка функція є стаціонарною випадковою функцією та якими ймовірносними характеристиками вона володіє?
11. Як розрахувати статистичні оцінки ймовірносних характеристик випадкової функції?
12. Що називають статистичною гіпотезою та в чому полягає основний принцип її перевірки?
13. Що називають рівнем значущості та довірчою ймовірністю?
14. Як розрахувати початкову фазу (в радіанах та в одиницях часу) періодичного коливання, що міститься у часовій послідовності?
15. Як отримати період гармонічного коливання, що міститься у випадковому процесі?
16. Як розрахувати амплітуду k-тої гармоніки, яка притаманна випадковому процесу?
17. За допомогою яких відомих методів можна отримати періодичні складові у випадковому процесі?

Задачі

Задача 9.1 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, січень).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.240	26.153	14.683	-1.481	-12.322	1.111
5	0.291	21.563	19.546	-1.478	-23.555	2.185
6	0.343	18.344	18.665	-1.506	-18.462	1.194
7	0.394	15.961	15.744	-1.529	-13.992	0.582
8	0.445	14.126	17.120	1.545	-16.461	-0.421
9	0.496	12.670	19.335	1.552	-21.541	-0.405
10	0.547	11.485	18.455	1.542	-17.778	-0.504
11	0.598	10.503	17.540	1.506	-16.673	-1.077
12	0.649	9.676	18.196	1.546	-18.954	-0.476
13	0.700	8.970	17.913	-1.571	-18.156	0.002
14	0.752	8.360	16.948	-1.532	-16.367	0.632
15	0.803	7.827	17.042	1.544	-16.870	-0.451
16	0.854	7.358	17.651	1.523	-18.013	-0.867
17	0.905	6.943	17.929	1.518	-17.635	-0.933
18	0.956	6.571	17.675	-1.552	-18.359	0.340
19	1.007	6.238	16.928	1.555	-16.313	-0.266
20	1.058	5.936	16.839	-1.569	-16.719	0.026
21	1.110	5.663	17.717	-1.426	-17.415	2.545
22	1.161	5.413	18.781	-1.489	-18.885	1.541
23	1.212	5.185	18.619	-1.497	-19.573	1.440
24	1.263	4.975	17.133	1.529	-16.262	-0.682
25	1.314	4.781	17.040	-1.501	-16.312	1.138
26	1.365	4.602	18.223	-1.457	-19.054	2.185
27	1.416	4.436	18.324	1.496	-18.132	-1.365
28	1.468	4.282	18.015	1.513	-17.721	-1.031
29	1.519	4.137	18.068	1.549	-18.369	-0.399
30	1.570	4.003	18.001	-1.517	-17.746	0.949
31	1.621	3.876	17.559	-1.565	-18.086	0.109
32	1.672	3.758	16.774	1.555	-16.289	-0.254
33	1.723	3.646	16.807	1.519	-16.407	-0.847
34	1.774	3.541	17.451	1.472	-17.993	-1.793
35	1.825	3.442	17.507	-1.491	-17.156	1.376
36	1.877	3.348	17.445	-1.452	-17.401	2.082
37	1.928	3.259	17.559	-1.560	-17.519	0.188
38	1.979	3.175	17.285	1.555	-17.667	-0.286
39	2.030	3.095	16.776	1.528	-16.266	-0.692
40	2.081	3.019	16.657	-1.520	-16.852	0.849
41	2.132	2.947	16.914	-1.505	-16.564	1.095
42	2.183	2.878	17.403	1.553	-17.578	-0.313
43	2.235	2.812	17.765	-1.506	-17.811	1.161
44	2.286	2.749	18.190	1.558	-17.780	-0.233
45	2.337	2.689	18.793	1.525	-19.328	-0.882
46	2.388	2.631	18.638	1.538	-18.685	-0.606

$$\bar{A} = 17.7; \qquad \sigma_A = 0.90.$$

Задача 9.2 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, лютий).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.240	26.153	14.869	1.493	-13.217	-1.032
5	0.291	21.563	18.800	-1.530	-22.029	0.904
6	0.343	18.344	18.583	-1.568	-17.848	0.059
7	0.394	15.961	17.753	-1.548	-16.583	0.374
8	0.445	14.126	19.245	-1.496	-19.934	1.497
9	0.496	12.670	18.935	-1.549	-20.407	0.437
10	0.547	11.485	16.537	1.482	-14.868	-1.321
11	0.598	10.503	16.157	-1.566	-15.883	0.079
12	0.649	9.676	17.605	1.545	-17.930	-0.469
13	0.700	8.970	18.197	1.512	-18.631	-1.106
14	0.752	8.360	17.976	-1.552	-17.523	0.338
15	0.803	7.827	17.763	1.450	-18.055	-2.199
16	0.854	7.358	17.573	1.538	-17.141	-0.557
17	0.905	6.943	17.747	1.568	-17.804	-0.052
18	0.956	6.571	18.303	-1.492	-18.174	1.436
19	1.007	6.238	18.563	-1.529	-18.932	0.794
20	1.058	5.936	18.238	-1.468	-18.031	1.857
21	1.110	5.663	17.925	-1.498	-17.704	1.291
22	1.161	5.413	17.393	1.549	-18.067	-0.389
23	1.212	5.185	16.418	-1.507	-15.649	0.995
24	1.263	4.975	16.711	-1.571	-16.239	0.005
25	1.314	4.781	17.978	1.524	-18.665	-0.870
26	1.365	4.602	17.991	1.467	-18.205	-1.889
27	1.416	4.436	17.513	-1.558	-16.672	0.217
28	1.468	4.282	17.875	-1.515	-18.374	1.020
29	1.519	4.137	18.519	-1.539	-18.013	0.566
30	1.570	4.003	19.197	-1.476	-19.542	1.867
31	1.621	3.876	19.006	-1.480	-19.422	1.772
32	1.672	3.758	17.922	-1.532	-17.377	0.667
33	1.723	3.646	17.837	1.525	-17.387	-0.798
34	1.774	3.541	18.725	-1.537	-19.136	0.649
35	1.825	3.442	18.925	-1.562	-19.200	0.160
36	1.877	3.348	17.860	-1.476	-18.070	1.712
37	1.928	3.259	16.516	-1.541	-15.930	0.481
38	1.979	3.175	16.209	1.565	-16.039	-0.088
39	2.030	3.095	16.784	1.541	-16.816	-0.493
40	2.081	3.019	17.487	1.556	-17.451	-0.259
41	2.132	2.947	18.375	-1.488	-18.160	1.499
42	2.183	2.878	19.175	1.540	-19.596	-0.596
43	2.235	2.812	18.564	-1.557	-19.265	0.266
44	2.286	2.749	16.956	-1.527	-16.103	0.703
45	2.337	2.689	16.562	1.563	-16.320	-0.131
46	2.388	2.631	16.944	1.548	-17.483	-0.396

$$\bar{A} = 17.7; \qquad \sigma_A = 0.91.$$

Задача 9.3 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, березень).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.316	19.912	20.204	1.558	-18.957	-0.240
5	0.383	16.418	24.625	1.560	-27.247	-0.303
6	0.450	13.967	24.792	1.507	-24.993	-1.605
7	0.517	12.152	22.995	-1.563	-21.829	0.172
8	0.584	10.755	23.602	1.522	-23.249	-1.140
9	0.651	9.646	24.518	-1.563	-26.021	0.197
10	0.719	8.744	22.899	-1.486	-22.671	1.920
11	0.786	7.997	21.623	1.549	-20.066	-0.447
12	0.853	7.367	22.914	1.503	-23.545	-1.598
13	0.920	6.829	23.862	1.509	-24.341	-1.502
14	0.987	6.365	23.877	1.487	-22.993	-1.939
15	1.054	5.959	24.402	-1.571	-24.972	0.001
16	1.122	5.602	24.343	-1.569	-24.587	0.045
17	1.189	5.286	23.794	1.514	-23.188	-1.326
18	1.256	5.003	23.738	1.491	-24.058	-1.929
19	1.323	4.749	23.557	-1.565	-23.456	0.143
20	1.390	4.520	22.903	-1.524	-23.152	1.088
21	1.457	4.311	22.375	1.530	-21.783	-0.883
22	1.525	4.121	22.759	-1.535	-22.705	0.806
23	1.592	3.948	23.357	1.559	-23.797	-0.273
24	1.659	3.788	23.365	1.561	-23.109	-0.229
25	1.726	3.640	23.576	-1.479	-23.343	2.139
26	1.793	3.504	23.750	-1.525	-24.288	1.104
27	1.860	3.377	22.990	1.566	-22.933	-0.104
28	1.927	3.260	22.625	1.536	-21.766	-0.761
29	1.995	3.150	23.447	1.535	-23.992	-0.853
30	2.062	3.047	23.879	1.493	-23.921	-1.869
31	2.129	2.951	23.468	1.538	-23.509	-0.760
32	2.196	2.861	23.469	1.552	-22.829	-0.421
33	2.263	2.776	24.230	-1.550	-24.682	0.525
34	2.330	2.696	24.281	-1.560	-24.710	0.273
35	2.398	2.621	23.132	-1.564	-23.014	0.158
36	2.465	2.549	22.372	1.492	-21.719	-1.720
37	2.532	2.482	22.891	1.561	-22.899	-0.226
38	2.599	2.417	23.272	1.552	-23.971	-0.450
39	2.666	2.357	22.773	-1.526	-22.215	0.987
40	2.733	2.299	23.156	-1.541	-22.632	0.663
41	2.801	2.243	24.315	-1.529	-25.080	1.043
42	2.868	2.191	23.813	-1.565	-24.415	0.133
43	2.935	2.141	22.930	-1.547	-21.312	0.510
44	3.002	2.093	23.664	-1.542	-24.661	0.707
45	3.069	2.047	24.162	-1.546	-23.991	0.597
46	3.136	2.003	23.976	-1.570	-23.979	0.008

$$\bar{A} = 23.4; \qquad \sigma_A = 0.83.$$

Задача 9.4 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, листопад).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.316	19.912	21.385	1.528	-20.312	-0.860
5	0.383	16.418	25.131	-1.566	-28.150	0.138
6	0.450	13.967	24.015	-1.539	-23.881	0.763
7	0.517	12.152	21.860	-1.511	-20.086	1.197
8	0.584	10.755	22.926	-1.526	-23.281	1.034
9	0.651	9.646	24.026	-1.521	-24.943	1.250
10	0.719	8.744	23.023	-1.555	-22.848	0.361
11	0.786	7.997	22.544	-1.505	-21.368	1.417
12	0.853	7.367	23.573	1.556	-24.493	-0.361
13	0.920	6.829	23.812	1.553	-23.884	-0.417
14	0.987	6.365	23.267	1.569	-22.979	-0.051
15	1.054	5.959	23.298	-1.500	-23.165	1.651
16	1.122	5.602	23.386	-1.557	-23.766	0.319
17	1.189	5.286	22.937	1.533	-22.769	-0.850
18	1.256	5.003	22.685	1.526	-22.388	-1.011
19	1.323	4.749	22.959	-1.508	-23.088	1.457
20	1.390	4.520	23.067	-1.453	-22.998	2.728
21	1.457	4.311	23.084	1.560	-22.815	-0.247
22	1.525	4.121	23.378	1.567	-23.542	-0.089
23	1.592	3.948	23.511	-1.558	-23.610	0.290
24	1.659	3.788	23.469	1.567	-23.276	-0.093
25	1.726	3.640	23.553	-1.463	-23.577	2.541
26	1.793	3.504	23.419	-1.551	-23.507	0.472
27	1.860	3.377	23.009	-1.559	-22.938	0.279
28	1.927	3.260	23.153	-1.555	-22.644	0.350
29	1.995	3.150	24.219	-1.552	-24.377	0.449
30	2.062	3.047	24.951	1.562	-25.468	-0.234
31	2.129	2.951	24.571	-1.570	-24.486	0.014
32	2.196	2.861	23.808	-1.546	-23.835	0.579
33	2.263	2.776	23.630	1.553	-23.059	-0.410
34	2.330	2.696	23.773	-1.551	-24.546	0.495
35	2.398	2.621	22.843	1.565	-22.926	-0.124
36	2.465	2.549	21.820	1.552	-20.966	-0.396
37	2.532	2.482	22.117	-1.522	-22.386	1.098
38	2.599	2.417	22.843	-1.551	-22.667	0.456
39	2.666	2.357	23.184	1.551	-23.612	-0.469
40	2.733	2.299	22.886	-1.538	-22.820	0.753
41	2.801	2.243	22.227	-1.526	-22.240	1.000
42	2.868	2.191	22.087	-1.530	-21.534	0.884
43	2.935	2.141	22.888	1.509	-22.937	-1.415
44	3.002	2.093	23.413	1.566	-24.038	-0.109
45	3.069	2.047	23.560	1.559	-22.593	-0.271
46	3.136	2.003	23.893	-1.569	-25.012	0.037

$$\bar{A} = 23.2; \qquad \sigma_A = 0.77.$$

Задача 9.5 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску за допомогою перетворення Фур'є (ст. Рейк'явік, грудень).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.240	26.153	14.502	1.568	-13.143	-0.031
5	0.291	21.563	19.279	-1.548	-22.888	0.524
6	0.343	18.344	18.733	-1.569	-18.185	0.038
7	0.394	15.961	16.935	-1.546	-15.662	0.391
8	0.445	14.126	17.826	1.563	-18.222	-0.149
9	0.496	12.670	18.665	-1.541	-19.184	0.564
10	0.547	11.485	18.301	-1.522	-18.031	0.873
11	0.598	10.503	18.309	-1.540	-17.900	0.553
12	0.649	9.676	18.984	1.527	-19.347	-0.851
13	0.700	8.970	18.481	1.543	-19.287	-0.535
14	0.752	8.360	17.305	1.526	-15.953	-0.721
15	0.803	7.827	17.386	1.478	-17.911	-1.670
16	0.854	7.358	17.778	1.527	-17.583	-0.772
17	0.905	6.943	17.701	-1.518	-17.898	0.945
18	0.956	6.571	17.787	-1.551	-17.354	0.347
19	1.007	6.238	18.188	1.547	-18.503	-0.449
20	1.058	5.936	18.029	1.476	-18.294	-1.745
21	1.110	5.663	17.344	1.507	-16.820	-1.079
22	1.161	5.413	16.984	1.526	-17.272	-0.778
23	1.212	5.185	16.760	-1.547	-16.500	0.395
24	1.263	4.975	16.759	1.555	-16.741	-0.261
25	1.314	4.781	17.156	-1.516	-17.019	0.938
26	1.365	4.602	17.979	-1.550	-17.789	0.364
27	1.416	4.436	18.626	1.568	-19.285	-0.045
28	1.468	4.282	18.061	-1.533	-18.130	0.679
29	1.519	4.137	17.209	1.556	-16.673	-0.245
30	1.570	4.003	17.356	1.523	-17.325	-0.827
31	1.621	3.876	18.070	1.523	-18.042	-0.866
32	1.672	3.758	18.261	-1.527	-18.792	0.825
33	1.723	3.646	18.055	-1.570	-17.361	0.018
34	1.774	3.541	18.177	1.565	-18.686	-0.104
35	1.825	3.442	18.258	-1.553	-17.969	0.311
36	1.877	3.348	18.073	1.503	-18.361	-1.247
37	1.928	3.259	17.723	-1.552	-17.510	0.337
38	1.979	3.175	17.441	1.551	-17.459	-0.344
39	2.030	3.095	17.698	1.564	-17.327	-0.110
40	2.081	3.019	17.822	1.521	-18.652	-0.927
41	2.132	2.947	17.551	1.539	-16.600	-0.527
42	2.183	2.878	17.581	-1.563	-18.310	0.139
43	2.235	2.812	17.495	-1.562	-17.095	0.149
44	2.286	2.749	17.690	-1.496	-17.428	1.309
45	2.337	2.689	18.326	-1.499	-18.661	1.342
46	2.388	2.631	18.272	-1.546	-18.404	0.460

$$\bar{A} = 17.7; \qquad \sigma_A = 0.79.$$

Задача 9.6 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску в районі Азорських островів (ст. Понта-Делгада, січень).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.320	19.615	20.742	1.524	-19.293	-0.895
5	0.389	16.173	25.745	1.566	-29.291	-0.152
6	0.457	13.758	25.271	-1.540	-25.072	0.776
7	0.525	11.971	22.996	-1.548	-21.619	0.497
8	0.593	10.595	23.717	-1.556	-23.650	0.361
9	0.661	9.502	24.736	-1.555	-25.936	0.399
10	0.729	8.614	24.092	-1.547	-23.408	0.548
11	0.798	7.878	23.923	1.550	-23.597	-0.499
12	0.866	7.257	24.693	1.548	-25.069	-0.572
13	0.934	6.727	24.852	1.568	-25.019	-0.063
14	1.002	6.270	24.536	-1.552	-24.290	0.455
15	1.070	5.870	24.708	-1.505	-24.484	1.617
16	1.139	5.519	24.493	-1.536	-25.447	0.886
17	1.207	5.207	23.547	-1.555	-22.507	0.360
18	1.275	4.928	23.898	-1.554	-23.700	0.392
19	1.343	4.678	24.978	1.547	-25.668	-0.619
20	1.411	4.452	24.836	-1.567	-24.857	0.085
21	1.479	4.247	24.122	-1.571	-23.954	0.002
22	1.548	4.060	23.760	-1.542	-23.713	0.681
23	1.616	3.889	23.158	1.536	-23.627	-0.827
24	1.684	3.731	22.465	1.533	-21.611	-0.812
25	1.752	3.586	22.654	1.566	-22.966	-0.099
26	1.820	3.452	23.081	1.531	-23.037	-0.918
27	1.889	3.327	23.591	-1.553	-23.241	0.424
28	1.957	3.211	24.212	-1.552	-24.816	0.468
29	2.025	3.103	24.105	-1.557	-23.961	0.340
30	2.093	3.002	23.739	-1.565	-23.674	0.131
31	2.161	2.907	23.604	1.565	-23.642	-0.141
32	2.229	2.818	23.863	1.560	-23.455	-0.252
33	2.298	2.735	24.484	-1.567	-24.898	0.100
34	2.366	2.656	24.421	1.519	-24.651	-1.286
35	2.434	2.581	24.013	1.559	-23.415	-0.281
36	2.502	2.511	24.482	1.570	-24.534	-0.011
37	2.570	2.445	25.006	1.563	-25.445	-0.190
38	2.639	2.381	24.705	1.530	-24.578	-1.006
39	2.707	2.321	24.373	1.529	-24.156	-1.002
40	2.775	2.264	24.339	1.571	-24.542	-0.003
41	2.843	2.210	24.370	1.558	-24.093	-0.302
42	2.911	2.158	24.407	1.567	-24.747	-0.101
43	2.979	2.109	24.226	-1.532	-24.022	0.944
44	3.048	2.062	24.302	-1.525	-24.054	1.105
45	3.116	2.017	24.582	-1.567	-25.008	0.097
46	3.184	1.973	24.231	1.560	-24.230	-0.254

$$\bar{A} = 24.1; \qquad \sigma_A = 0.85.$$

Задача 9.7 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску в районі Азорських островів (ст. Понта-Делгада, лютий).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.320	19.615	20.921	1.508	-19.001	-1.191
5	0.389	16.173	25.757	1.559	-29.875	-0.364
6	0.457	13.758	24.819	-1.523	-24.209	1.152
7	0.525	11.971	22.557	1.552	-20.924	-0.384
8	0.593	10.595	24.185	1.529	-24.118	-1.005
9	0.661	9.502	25.785	-1.501	-27.466	1.927
10	0.729	8.614	24.678	-1.543	-23.926	0.664
11	0.798	7.878	23.812	1.535	-23.295	-0.825
12	0.866	7.257	24.227	1.545	-24.688	-0.629
13	0.934	6.727	24.117	1.538	-24.194	-0.799
14	1.002	6.270	23.993	1.562	-23.359	-0.195
15	1.070	5.870	24.623	-1.517	-25.009	1.344
16	1.139	5.519	24.846	-1.539	-25.028	0.793
17	1.207	5.207	24.473	1.536	-24.242	-0.847
18	1.275	4.928	24.415	1.543	-24.330	-0.673
19	1.343	4.678	24.375	1.487	-24.636	-2.080
20	1.411	4.452	23.960	1.561	-23.712	-0.238
21	1.479	4.247	23.825	1.567	-23.692	-0.087
22	1.548	4.060	24.048	1.499	-24.140	-1.747
23	1.616	3.889	23.940	1.559	-24.091	-0.279
24	1.684	3.731	23.671	-1.551	-23.369	0.468
25	1.752	3.586	23.548	-1.552	-23.842	0.453
26	1.820	3.452	23.405	-1.507	-23.079	1.464
27	1.889	3.327	23.458	1.534	-23.507	-0.866
28	1.957	3.211	23.620	-1.561	-23.658	0.240
29	2.025	3.103	23.612	1.555	-23.635	-0.369
30	2.093	3.002	23.662	-1.550	-23.509	0.479
31	2.161	2.907	23.520	1.554	-23.981	-0.399
32	2.229	2.818	23.591	1.547	-22.593	-0.534
33	2.298	2.735	24.469	-1.529	-25.161	1.042
34	2.366	2.656	24.525	1.563	-24.913	-0.182
35	2.434	2.581	23.569	1.526	-23.065	-1.042
36	2.502	2.511	23.701	1.544	-23.178	-0.628
37	2.570	2.445	24.829	1.526	-25.319	-1.137
38	2.639	2.381	25.040	-1.529	-25.417	1.069
39	2.707	2.321	24.611	-1.540	-23.926	0.729
40	2.775	2.264	24.622	-1.539	-25.118	0.800
41	2.843	2.210	24.244	1.570	-24.289	-0.030
42	2.911	2.158	23.678	1.527	-23.243	-1.024
43	2.979	2.109	23.768	1.544	-23.883	-0.638
44	3.048	2.062	23.908	1.513	-23.984	-1.387
45	3.116	2.017	23.764	1.547	-23.684	-0.574
46	3.184	1.973	23.648	-1.530	-23.629	0.956

$$\bar{A} = 24.1; \qquad \sigma_A = 0.79.$$

Задача 9.8 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску в районі Азорських островів (ст. Понта-Делгада, березень).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.320	19.615	20.982	-1.563	-19.452	0.159
5	0.389	16.173	25.794	-1.550	-29.067	0.604
6	0.457	13.758	25.266	-1.525	-25.551	1.179
7	0.525	11.971	22.879	-1.539	-20.826	0.663
8	0.593	10.595	23.684	1.570	-24.265	-0.018
9	0.661	9.502	24.525	1.541	-25.358	-0.754
10	0.729	8.614	23.951	1.529	-23.073	-0.976
11	0.798	7.878	24.334	1.544	-24.239	-0.652
12	0.866	7.257	25.210	-1.537	-25.731	0.864
13	0.934	6.727	25.063	-1.525	-25.073	1.145
14	1.002	6.270	24.088	-1.529	-24.287	1.026
15	1.070	5.870	23.839	-1.530	-22.616	0.918
16	1.139	5.519	24.674	-1.557	-25.778	0.366
17	1.207	5.207	24.667	-1.557	-24.497	0.343
18	1.275	4.928	23.898	-1.566	-23.889	0.121
19	1.343	4.678	23.453	1.547	-23.305	-0.560
20	1.411	4.452	23.453	1.546	-23.290	-0.577
21	1.479	4.247	23.779	1.556	-23.902	-0.346
22	1.548	4.060	24.149	1.522	-23.979	-1.181
23	1.616	3.889	24.317	1.541	-24.663	-0.730
24	1.684	3.731	23.916	1.504	-23.859	-1.590
25	1.752	3.586	23.435	-1.545	-23.158	0.591
26	1.820	3.452	23.611	-1.569	-23.495	0.041
27	1.889	3.327	23.994	1.558	-24.286	-0.318
28	1.957	3.211	24.104	1.556	-23.901	-0.348
29	2.025	3.103	24.164	-1.545	-24.313	0.639
30	2.093	3.002	23.971	-1.543	-24.099	0.681
31	2.161	2.907	23.482	-1.569	-23.346	0.045
32	2.229	2.818	23.472	1.552	-23.123	-0.431
33	2.298	2.735	24.172	-1.563	-24.288	0.183
34	2.366	2.656	24.542	1.564	-24.984	-0.159
35	2.434	2.581	24.147	1.539	-23.898	-0.757
36	2.502	2.511	23.758	1.515	-23.747	-1.319
37	2.570	2.445	23.796	-1.538	-23.540	0.780
38	2.639	2.381	23.982	-1.547	-24.286	0.587
39	2.707	2.321	24.258	-1.565	-23.786	0.146
40	2.775	2.264	24.784	-1.546	-25.158	0.635
41	2.843	2.210	24.751	-1.548	-25.010	0.569
42	2.911	2.158	24.046	1.569	-23.804	-0.038
43	2.979	2.109	23.659	1.570	-23.558	-0.021
44	3.048	2.062	23.694	1.557	-23.715	-0.325
45	3.116	2.017	23.644	1.557	-23.781	-0.329
46	3.184	1.973	23.294	-1.551	-23.290	0.468

$$\bar{A} = 24.0; \qquad \sigma_A = 0.74.$$

Задача 9.9 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску в районі Азорських островів (ст. Понта-Делгада, листопад).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.320	19.615	21.138	1.562	-19.875	-0.166
5	0.389	16.173	25.683	1.566	-29.030	-0.152
6	0.457	13.758	25.081	1.557	-24.794	-0.336
7	0.525	11.971	23.132	1.549	-21.696	-0.463
8	0.593	10.595	23.961	-1.569	-24.332	0.036
9	0.661	9.502	24.578	1.565	-25.478	-0.136
10	0.729	8.614	23.811	-1.545	-23.015	0.597
11	0.798	7.878	24.051	1.558	-23.717	-0.304
12	0.866	7.257	24.794	1.563	-25.742	-0.208
13	0.934	6.727	24.220	-1.550	-23.966	0.490
14	1.002	6.270	23.686	1.568	-23.194	-0.057
15	1.070	5.870	24.306	1.539	-24.371	-0.774
16	1.139	5.519	24.906	-1.554	-25.258	0.432
17	1.207	5.207	24.634	-1.568	-24.719	0.068
18	1.275	4.928	24.187	-1.552	-23.833	0.447
19	1.343	4.678	24.009	1.549	-24.350	-0.519
20	1.411	4.452	23.714	1.533	-23.469	-0.879
21	1.479	4.247	23.553	1.566	-23.526	-0.118
22	1.548	4.060	23.639	1.564	-23.671	-0.170
23	1.616	3.889	23.702	-1.531	-23.666	0.952
24	1.684	3.731	23.802	-1.544	-23.756	0.629
25	1.752	3.586	24.107	-1.529	-23.974	0.999
26	1.820	3.452	24.687	-1.568	-24.674	0.075
27	1.889	3.327	25.051	1.537	-25.390	-0.852
28	1.957	3.211	24.757	1.545	-24.713	-0.638
29	2.025	3.103	24.351	-1.568	-24.181	0.061
30	2.093	3.002	24.351	-1.557	-24.317	0.325
31	2.161	2.907	24.275	-1.546	-24.575	0.603
32	2.229	2.818	24.176	1.557	-23.614	-0.337
33	2.298	2.735	24.458	1.567	-24.887	-0.089
34	2.366	2.656	24.265	1.552	-24.435	-0.449
35	2.434	2.581	23.587	1.524	-23.268	-1.088
36	2.502	2.511	23.499	1.557	-23.320	-0.318
37	2.570	2.445	23.782	-1.555	-24.053	0.379
38	2.639	2.381	23.717	-1.564	-23.692	0.172
39	2.707	2.321	23.571	1.545	-23.417	-0.610
40	2.775	2.264	23.708	1.553	-23.737	-0.418
41	2.843	2.210	23.987	-1.550	-23.920	0.501
42	2.911	2.158	24.276	-1.570	-24.357	0.010
43	2.979	2.109	24.381	1.563	-24.467	-0.190
44	3.048	2.062	24.421	-1.560	-24.232	0.250
45	3.116	2.017	24.495	-1.570	-24.749	0.010
46	3.184	1.973	24.250	1.569	-24.250	-0.032

$$\bar{A} = 24.1; \qquad \sigma_A = 0.69.$$

Задача 9.10 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду середнього місячного атмосферного тиску в районі Азорських островів (ст. Понта-Делгада, грудень).

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1866-2000 рр.

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
4	0.320	19.615	21.441	-1.569	-19.948	0.037
5	0.389	16.173	25.832	-1.546	-29.369	0.715
6	0.457	13.758	24.730	1.560	-24.622	-0.261
7	0.525	11.971	22.250	-1.551	-20.291	0.401
8	0.593	10.595	23.192	-1.570	-23.788	0.013
9	0.661	9.502	24.015	1.548	-24.889	-0.579
10	0.729	8.614	23.397	1.556	-22.478	-0.328
11	0.798	7.878	23.788	1.536	-23.715	-0.834
12	0.866	7.257	24.599	1.524	-25.182	-1.174
13	0.934	6.727	24.145	1.563	-24.248	-0.178
14	1.002	6.270	23.453	1.567	-22.873	-0.076
15	1.070	5.870	23.955	1.520	-23.786	-1.198
16	1.139	5.519	24.898	1.537	-25.299	-0.864
17	1.207	5.207	24.823	-1.555	-25.145	0.395
18	1.275	4.928	24.128	-1.549	-23.677	0.526
19	1.343	4.678	24.046	-1.536	-23.984	0.842
20	1.411	4.452	24.045	-1.561	-24.504	0.234
21	1.479	4.247	23.688	-1.562	-23.171	0.214
22	1.548	4.060	23.912	1.552	-23.901	-0.458
23	1.616	3.889	24.492	1.569	-24.665	-0.037
24	1.684	3.731	24.610	1.562	-24.734	-0.218
25	1.752	3.586	24.475	-1.555	-24.302	0.383
26	1.820	3.452	24.586	-1.563	-24.554	0.196
27	1.889	3.327	24.448	1.532	-24.909	-0.974
28	1.957	3.211	23.932	1.549	-23.374	-0.513
29	2.025	3.103	24.045	1.568	-24.039	-0.072
30	2.093	3.002	24.484	1.569	-24.724	-0.034
31	2.161	2.907	24.424	-1.564	-24.447	0.171
32	2.229	2.818	24.453	-1.541	-24.065	0.712
33	2.298	2.735	24.733	1.566	-25.215	-0.109
34	2.366	2.656	24.275	1.551	-24.422	-0.496
35	2.434	2.581	23.315	1.556	-23.029	-0.347
36	2.502	2.511	23.128	-1.557	-22.769	0.322
37	2.570	2.445	23.455	1.536	-23.921	-0.838
38	2.639	2.381	23.459	-1.563	-23.175	0.181
39	2.707	2.321	23.644	1.537	-23.535	-0.793
40	2.775	2.264	24.199	1.511	-24.260	-1.453
41	2.843	2.210	24.632	1.529	-24.622	-1.017
42	2.911	2.158	24.568	-1.565	-24.937	0.147
43	2.979	2.109	24.171	-1.556	-23.751	0.357
44	3.048	2.062	24.274	-1.571	-24.241	0.003
45	3.116	2.017	24.624	-1.553	-24.855	0.442
46	3.184	1.973	24.536	1.553	-24.533	-0.441

$$\bar{A} = 24.1; \qquad \sigma_A = 0.73.$$

Задача 9.11 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду індексу Північно-Атлантичного Коливання (NAO)

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1901-2000 рр. (березень)

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
3	0.340	18.500	0.163	-0.431	-0.042	0.091
4	0.431	14.563	0.203	1.552	0.266	0.005
5	0.523	12.007	0.194	0.803	-0.131	-0.127
6	0.615	10.214	0.179	0.383	-0.054	-0.135
7	0.707	8.887	0.248	0.209	-0.051	-0.238
8	0.799	7.866	0.332	0.685	0.227	0.278
9	0.891	7.055	0.415	0.847	-0.276	-0.244
10	0.982	6.395	0.473	-1.193	-0.522	0.207
11	1.074	5.849	0.481	-1.009	0.338	-0.213
12	1.166	5.388	0.505	-0.998	0.475	-0.306
13	1.258	4.995	0.499	0.582	-0.270	-0.410
14	1.350	4.655	0.405	0.059	-0.026	-0.449
15	1.442	4.358	0.317	-0.162	-0.037	0.226
16	1.534	4.097	0.314	0.950	0.293	0.209
17	1.625	3.866	0.425	0.683	-0.192	-0.236
18	1.717	3.659	0.485	-0.003	0.002	-0.730
19	1.809	3.473	0.347	0.537	-0.089	-0.150
20	1.901	3.305	0.267	-1.066	0.273	-0.151
21	1.993	3.153	0.251	-0.429	-0.113	0.246
22	2.085	3.014	0.177	1.061	0.132	0.074
23	2.176	2.887	0.174	0.141	0.019	0.134
24	2.268	2.770	0.261	-0.561	-0.146	0.232
25	2.360	2.662	0.397	-0.570	-0.194	0.303
26	2.452	2.563	0.474	-0.104	-0.062	0.591
27	2.544	2.470	0.364	-0.275	-0.094	0.334
28	2.636	2.384	0.236	1.335	-0.162	-0.039
29	2.727	2.304	0.323	-1.267	0.250	-0.078
30	2.819	2.229	0.451	-0.854	0.452	-0.394
31	2.911	2.158	0.380	1.370	0.337	0.069
32	3.003	2.092	0.220	0.271	0.062	0.224
33	3.095	2.030	0.111	0.663	-0.044	-0.057
34	3.187	1.972	0.069	-0.586	-0.038	0.058

$$\bar{A} = 0.3; \qquad \sigma_A = 0.12.$$

Задача 9.12 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду індексу Північно-Атлантичного Коливання (NAO)

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1901-2000 рр. (жовтень)

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
0	0.064	98.000	0.308	-1.327	0.299	-0.074
1	0.156	40.290	0.376	-1.118	0.244	-0.118
2	0.248	25.357	0.481	-0.735	-0.438	0.484
3	0.340	18.500	0.368	0.022	0.008	0.349
4	0.431	14.563	0.200	-0.734	0.080	-0.089
5	0.523	12.007	0.152	1.030	0.180	0.108
6	0.615	10.214	0.109	0.208	-0.014	-0.065
7	0.707	8.887	0.087	-0.177	-0.017	0.092
8	0.799	7.866	0.211	0.161	0.015	0.090
9	0.891	7.055	0.449	1.570	0.568	0.000
10	0.982	6.395	0.515	-1.128	0.515	-0.244
11	1.074	5.849	0.347	-1.152	-0.322	0.144
12	1.166	5.388	0.280	-1.311	-0.108	0.029
13	1.258	4.995	0.445	0.791	-0.386	-0.381
14	1.350	4.655	0.450	0.970	-0.481	-0.330
15	1.442	4.358	0.235	1.192	-0.086	-0.034
16	1.534	4.097	0.209	0.969	-0.143	-0.098
17	1.625	3.866	0.320	-0.097	-0.038	0.393
18	1.717	3.659	0.277	-1.241	0.299	-0.102
19	1.809	3.473	0.207	0.685	-0.051	-0.063
20	1.901	3.305	0.327	-0.120	-0.042	0.349
21	1.993	3.153	0.426	-0.230	-0.120	0.512
22	2.085	3.014	0.402	1.245	0.287	0.097
23	2.176	2.887	0.398	-0.720	0.314	-0.358
24	2.268	2.770	0.351	0.072	0.024	0.335
25	2.360	2.662	0.312	-0.401	-0.100	0.237
26	2.452	2.563	0.308	-0.851	-0.300	0.263
27	2.544	2.470	0.225	0.618	-0.103	-0.144
28	2.636	2.384	0.177	-0.512	0.073	-0.130
29	2.727	2.304	0.224	-1.383	-0.228	0.043
30	2.819	2.229	0.214	0.168	-0.047	-0.279
31	2.911	2.158	0.259	1.029	0.049	0.029
32	3.003	2.092	0.454	0.054	0.034	0.640
33	3.095	2.030	0.514	-0.099	-0.047	0.474
34	3.187	1.972	0.461	0.098	-0.045	-0.459

$$\bar{A} = 0.3; \qquad \sigma_A = 0.11.$$

Задача 9.13 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду індексу Ель-Ніньо-Південне Коливання (SOI)

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1901-2000 рр. (вересень)

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
0	0.064	98.000	0.794	-0.777	-0.557	0.566
1	0.156	40.290	0.845	-1.138	-0.860	0.397
2	0.248	25.357	0.687	-0.585	0.381	-0.575
3	0.340	18.500	0.870	-0.393	-0.161	0.388
4	0.431	14.563	1.257	0.608	-1.113	-1.599
5	0.523	12.007	1.097	-0.172	0.122	-0.701
6	0.615	10.214	1.400	1.493	-1.014	-0.079
7	0.707	8.887	1.805	-0.979	-2.370	1.595
8	0.799	7.866	1.185	0.475	0.225	0.437
9	0.891	7.055	1.359	-1.562	0.903	-0.008
10	0.982	6.395	2.333	-0.379	1.162	-2.916
11	1.074	5.849	2.477	-0.745	1.460	-1.582
12	1.166	5.388	2.068	0.238	-0.582	-2.396
13	1.258	4.995	1.674	-0.932	0.954	-0.708
14	1.350	4.655	1.390	0.132	0.243	1.835
15	1.442	4.358	1.438	0.371	0.243	0.624
16	1.534	4.097	2.072	0.882	1.979	1.630
17	1.625	3.866	2.339	-0.360	-0.878	2.332
18	1.717	3.659	1.765	0.535	-0.923	-1.556
19	1.809	3.473	1.573	-0.084	0.079	-0.946
20	1.901	3.305	1.985	-0.347	-0.879	2.431
21	1.993	3.153	1.673	-1.181	-1.685	0.693
22	2.085	3.014	1.107	-0.385	0.174	-0.430
23	2.176	2.887	1.503	-1.040	1.448	-0.851
24	2.268	2.770	1.835	1.500	2.184	0.155
25	2.360	2.662	1.661	0.430	-0.535	-1.165
26	2.452	2.563	1.468	-0.855	1.426	-1.242
27	2.544	2.470	1.626	0.183	-0.147	-0.794
28	2.636	2.384	2.437	-0.817	2.186	-2.052
29	2.727	2.304	2.689	-0.038	0.113	-2.943
30	2.819	2.229	2.330	-0.593	-1.044	1.548
31	2.911	2.158	2.447	0.964	-2.170	-1.505
32	3.003	2.092	2.148	-0.087	0.229	-2.629
33	3.095	2.030	1.173	-1.119	-0.607	0.294
34	3.187	1.972	0.705	1.116	-0.634	-0.310

$$\bar{A} = 1.7; \qquad \sigma_A = 0.53.$$

Задача 9.14 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду індексу Ель-Ніньо-Південне Коливання (SOI)

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1901-2000 рр. (листопад)

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
0	0.064	98.000	0.803	0.131	0.104	0.796
1	0.156	40.290	1.489	-0.716	-1.118	1.286
2	0.248	25.357	1.868	1.388	1.717	0.318
3	0.340	18.500	2.239	0.370	0.824	2.123
4	0.431	14.563	2.367	0.606	-1.513	-2.184
5	0.523	12.007	1.788	-0.024	0.045	-1.875
6	0.615	10.214	1.311	0.966	0.612	0.423
7	0.707	8.887	1.400	-0.647	-1.134	1.501
8	0.799	7.866	1.397	1.157	-1.003	-0.441
9	0.891	7.055	1.790	1.301	-1.462	-0.404
10	0.982	6.395	1.964	0.447	-1.312	-2.734
11	1.074	5.849	1.408	-0.881	-0.212	0.175
12	1.166	5.388	1.480	-0.577	1.118	-1.719
13	1.258	4.995	1.741	-0.576	0.840	-1.294
14	1.350	4.655	1.927	-0.758	-1.257	1.327
15	1.442	4.358	2.417	-0.111	-0.277	2.494
16	1.534	4.097	2.201	0.740	1.903	2.083
17	1.625	3.866	1.444	-0.939	-0.526	0.385
18	1.717	3.659	1.397	-0.461	-0.734	1.478
19	1.809	3.473	1.488	1.113	-1.468	-0.723
20	1.901	3.305	1.037	1.142	0.936	0.429
21	1.993	3.153	0.877	0.682	0.286	0.352
22	2.085	3.014	1.571	0.688	-0.997	-1.214
23	2.176	2.887	2.241	-0.672	1.675	-2.103
24	2.268	2.770	2.003	0.143	0.287	1.995
25	2.360	2.662	1.720	-0.783	-0.912	0.916
26	2.452	2.563	1.839	-1.406	2.246	-0.373
27	2.544	2.470	1.928	-0.933	-1.212	0.898
28	2.636	2.384	1.961	-0.768	1.682	-1.741
29	2.727	2.304	1.815	-0.983	1.244	-0.829
30	2.819	2.229	1.462	0.085	0.157	1.844
31	2.911	2.158	1.272	1.546	-0.651	-0.016
32	3.003	2.092	1.420	0.113	-0.218	-1.920
33	3.095	2.030	1.359	0.251	0.289	1.127
34	3.187	1.972	1.177	-0.284	0.329	-1.130

$$\bar{A} = 1.7; \qquad \sigma_A = 0.39.$$

Задача 9.15 Результати реалізації алгоритму дослідження нестаціонарного часового ряду індексу Ель-Ніньо-Південне Коливання (SOI)

Вихідні дані мають дискретність 1 рік і сформовані за період 1901-2000 рр. (вересень, жовтень, листопад)

i	$\omega_i, рік^{-1}$	$T, рік$	$A_i, гПа$	$\varphi_i, рад.$	$U(t)$	$V(t)$
0	0.064	98.000	0.677	-0.001	-0.001	0.677
1	0.156	40.290	1.183	-0.616	-0.802	1.132
2	0.248	25.357	1.404	1.229	1.205	0.428
3	0.340	18.500	1.669	0.297	0.489	1.600
4	0.431	14.563	1.718	0.689	-1.304	-1.584
5	0.523	12.007	1.260	-0.077	0.085	-1.094
6	0.615	10.214	1.230	1.438	-0.787	-0.105
7	0.707	8.887	1.341	-0.974	-1.851	1.257
8	0.799	7.866	0.787	0.878	-0.074	-0.061
9	0.891	7.055	1.130	-0.965	0.591	-0.409
10	0.982	6.395	1.924	-0.121	0.361	-2.964
11	1.074	5.849	1.832	-0.829	0.743	-0.680
12	1.166	5.388	1.715	-0.092	0.214	-2.317
13	1.258	4.995	1.670	-0.490	0.564	-1.058
14	1.350	4.655	1.636	-0.641	-1.169	1.567
15	1.442	4.358	1.864	-0.149	-0.213	1.419
16	1.534	4.097	2.016	0.867	2.005	1.701
17	1.625	3.866	1.596	-0.783	-0.967	0.971
18	1.717	3.659	1.183	0.847	-0.761	-0.672
19	1.809	3.473	1.141	0.571	-0.719	-1.120
20	1.901	3.305	1.085	-0.354	-0.308	0.832
21	1.993	3.153	1.045	-1.463	-1.230	0.133
22	2.085	3.014	1.218	0.041	-0.033	-0.817
23	2.176	2.887	1.575	-1.031	1.716	-1.028
24	2.268	2.770	1.457	0.582	0.814	1.237
25	2.360	2.662	1.246	-1.133	-0.786	0.368
26	2.452	2.563	1.201	-1.303	1.705	-0.469
27	2.544	2.470	1.376	-1.491	-0.399	0.032
28	2.636	2.384	2.013	-0.825	2.155	-1.991
29	2.727	2.304	2.061	-0.381	0.663	-1.658
30	2.819	2.229	1.788	-0.302	-0.517	1.661
31	2.911	2.158	1.858	1.047	-1.634	-0.944
32	3.003	2.092	1.631	0.102	-0.195	-1.910
33	3.095	2.030	1.081	0.573	0.431	0.669
34	3.187	1.972	0.811	-0.592	0.452	-0.673

$$\bar{A} = 1.5; \qquad \sigma_A = 0.35.$$

10. ЗГЛАДЖУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Основні теоретичні положення

Більшість метеорологічних величин являють собою *нестаціонарні випадкові процеси.* Основною причиною цього є те, що під впливом різного надходження до земної поверхні кількості сонячної радіації протягом доби, сезону і року величини мають добовий, сезонний, річний хід і т.п.

Багаторічні змінення характеру кліматоутворювальних факторів приводять до виникнення *трендів*, тобто *однонаправлених змін метеорологічних величин* протягом тривалого часу.

Дослідження статистичної структури гідрометеорологічних характеристик основуються на послідовності їх значень у вигляді *еквідистантних* часових рядів. Останні можуть бути зображені як сума *детермінованої* $\hat{X}(t)$ і *випадкової* $X_3(t)$ *компонент.* У свою чергу, *детермінована компонента складається з тренду* $X_1(t)$ і *періодичної компоненти* $X_2(t)$, яка відбиває віковий, річний або добовий хід процесу $X(t)$ в залежності від *інтервалу дискретності* часового ряду.

Отже,

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t). \qquad (10.1)$$

При правильному вилученні з випадкового процесу $X(t)$ детермінованої складової $\hat{X}(t)$, випадкова компонента може розглядатися як стаціонарні випадкові прирощення.

Детермінована основа випадкового процесу вилучається шляхом фільтрації (або згладжування) вихідного часового ряду. Позначимо *оператор згладжування* через L і застосуємо його до рівності (10.1):

$$L\left[X(t)\right] = L\left[X_1(t)\right] + L\left[X_2(t)\right] + L\left[X_3(t)\right]. \qquad (10.2)$$

Припустимо, що оператор L точно вилучає трендову компоненту, тобто

$$L[X_1(t)] = X_1(t). \qquad (10.3)$$

Якщо відняти від рівності (10.1) рівність (10.2), то з урахуванням (10.3) будемо мати:

$$X(t) - L\left[X(t)\right] = X_2(t) - L\left[X_2(t)\right] + X_3(t) - L\left[X_3(t)\right]. \qquad (10.4)$$

Важливим є питання про те, у якій мірі члени $L[X_2(t)]$ і $L[X_3(t)]$ можуть спотворювати справжні коливання залишкового ряду (10.4) та індукувати хибні коливання.

Одним з видів згладжування є *ковзне осереднення*, яке у загальному вигляді може бути зображене таким чином:

$$\hat{X}(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=k-n/2}^{k+n/2} \alpha_i X(t_i) \ , \qquad (10.5)$$

де α_i – ваговий множник;

n – кількість точок, по яких проводиться згладжування:

$$k = 1 + \frac{n}{2}; 2 + \frac{n}{2}; ...; N' + \frac{n}{2}; \quad N' = N(n-1);$$

N – число членів ряду.

Якщо в рівності (10.5) $\alpha_i = 1 \ \forall \ i = \overline{1,n}$, то оператор згладжування визначає *просте ковзне осереднення,* в якому вага всіх точок, котрі приймають участь при розрахунках середнього значення на інтервалі $\left[k - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2}\right]$, однакова. Більш коректними є фільтри, що утримують *тригонометричні*

$$\alpha_i = 1 + \cos\frac{2\pi(k-i)}{n} \qquad (10.6)$$

або *експоненціальні*

$$\alpha_i = \exp\left[-\frac{|k-i|}{n}\right] \qquad (10.7)$$

вагові множники. Вони зменшуються по відзначених формулами (10.6) і (10.7) законах від середини інтервалу згладжування до його кінців.

Дійсно, нехай в рівності (10.6) величина i приймає такі значення: $i = k - \frac{n}{2}$; $i = k$; $i = k + \frac{n}{2}$. Тоді, очевидно, α_i мають значення $\alpha_{k-\frac{n}{2}} = 0$; $\alpha_k = 2$; $\alpha_{k+\frac{n}{2}} = 0$.

На рис. 10.1 наводиться залежність вагового множника (10.6) від положення точок i на інтервалі $\left[k - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2}\right]$.

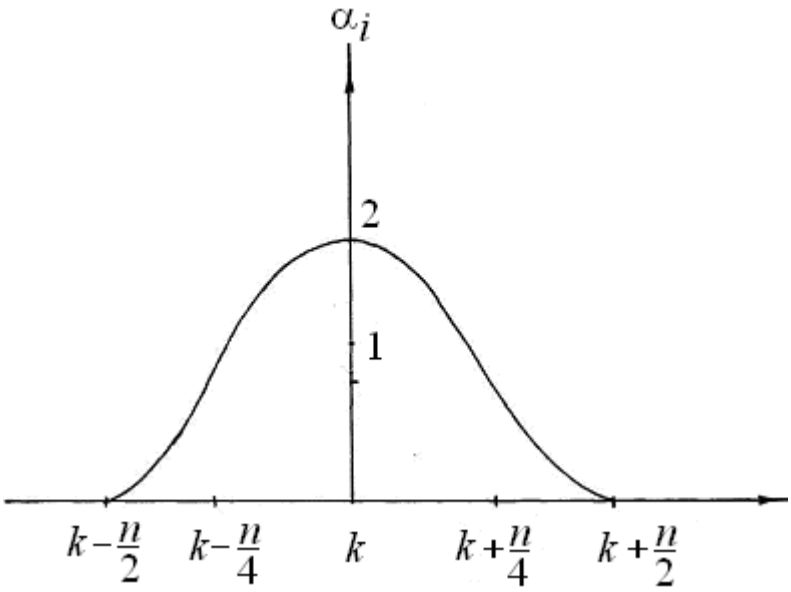


Рис. 10.1 – Косинус-фільтр

Окрім виду вагового множника, *результат фільтрації залежить й від кількості точок* (n)*, по яких виконується згладжування.* Вона, очевидно, визначається рівністю:

$$n = \frac{\tau}{\Delta t}\ , \tag{10.8}$$

де Δt – інтервал дискретності ряду.

Чим більше n, тим швидше реакція фільтра, але тим гірші його фільтруючі якості, і навпаки. Отже, задача полягає у правильному виборі періоду згладжування.

Означені вище особливості ковзного осереднення приводять до того, що при надто великому періоді згладжування з детермінованої основи $\hat{X}(t)$ процесу $X(t)$ відфільтровується визначна частина періодичної компоненти $X_2(t)$, яка переходить до випадкової компоненти $X_3(t)$. Навпаки, за умови малого періоду осереднення, частина випадкової складової процесу $X(t)$ переходить до детермінованої частини процесу, а випадкова компонента $X_3(t)$ набуває властивостей *"білого шуму"* (див. розділ 7).

Для вибору періоду згладжування випадкової послідовності $X(t)$ при ковзному осередненні, треба дотримуватися таких рекомендацій. По-перше, необхідно, щоб період згладжування відповідав періодичності, яка існує в процесі $X(t)$. По-друге, значення періоду згладжування повинно відповідати періодичності, яку досліджувач хоче зберегти в

детермінованій складовій випадкової послідовності. Наприклад, якщо треба у складовій $\hat{X}(t)$ зберегти річний хід метеорологічної величини $\hat{X}(t)$, а коливання з меншими періодами необхідно відфільтрувати з вихідного часового ряду, то ковзне осереднення проводять при такому числі значень випадкової величини n, яке відповідає річному інтервалу. Тоді на виході з фільтра ми отримаємо процес, який утримує, крім трендів, коливання з періодом один рік і більше, а коливання з меншими періодами перейдуть у випадкову складову. Остання має, як правило, властивості квазістаціонарного процесу. Тому для дослідження її статистичної структури використовують розглянуті вище методи кореляційного або спектрального аналізів.

Важливо при побудові згладженого ряду враховувати початкову фазу коливання (h_i) тієї періодичності процесу $X(t)$, по якій проводилося згладжування часового ряду, а також величину періоду осереднення. Тобто при проведенні згладжування за допомогою тригонометричних множників не враховується k_i початкових точок та kk точок у кінці вихідного часового ряду.

Початок коливання в детермінованій основі (k_1) приходиться на значення часового ряду, яке розраховується так:

$$k_1 = h_i + n/2, \tag{10.9}$$

де

h_i – початкова фаза гармонічного коливання в одиницях часу, по якому проводилося згладжування;

n – період гармонічного коливання (кількість точок), по якому проводилося згладжування.

$$h_i = \begin{cases} \dfrac{(\pi + \varphi_i)}{2\pi} \cdot n & \text{за умови } \varphi_i \le 0; \\ \dfrac{\varphi_i \cdot n}{2\pi} & \text{за умови } \varphi_i > 0. \end{cases} \tag{10.10}$$

Початкова фаза гармонічного коливання (в радіанах), по якому проводиться згладжування, розраховується за допомогою рівняння:

$$\varphi_i = arctg \frac{U(t)}{V(t)}, \tag{10.11}$$

де

$U(t)$ та $V(t)$ – відповідно косинус- і синус-перетворення Фур'є (див. розділ 9).

Кількість точок, які не враховуються в кінці вихідного часового ряду (kk) при побудові згладженого ряду, дорівнює половині періоду того періодичного коливання, по якому проводилося згладжування, тобто $kk = n/2$.

Розв'язання типової задачі. ***Згладжування нестаціонарних часових рядів.***

Приклад 1. В результаті ракетного зондування атмосфери був сформований ряд зональної складової швидкості вітру на висоті 35 км над ройоном Форт Шерман (приекваторіальна зона Північно–Американського континенту). За допомогою ковзного осереднення (косинус-фільтра) отримана детермінована основа зональної компоненти, яка наводиться на рис. 10.2. Період осереднення дорівнює одному року $(n = 48)$. На цьому рисунку зображається також й вихідний випадковий процес. Дискретність даних складає один тиждень.

З рис. 10.2 випливає, по-перше, що вихідний випадковий процес, який досліджується, не є стаціонарним. По-друге, в результаті ковзного осереднення, крім слабко вираженої однорічної періодичності, чітко проявляється коливання з періодом два роки, яке називається квазідворічною періодичністю швидкості вітру. У багатьох роботах, які присвячені квазідворічним коливанням швидкості вітру в стратосфері приекваторіальної зони, стверджується наявність західної й східної фаз коливань, що проявляються через один рік кожна. Рис. 10.2 ілюструє той факт, що західна фаза, яка відбивається максимуми функції, що утворюються в результаті ковзного осереднення і відповідають малим значенням східної (від'ємної) зональної складової швидкості вітру, не є таким періодом, протягом якого спостерігається виключно західна (додатна) компонента зонального вітру. Протягом західної фази квазідворічної періодичності західні вітри часто змінюються на східні. Більш того, східна компонента дає більший внесок при осередненні, результатом чого й є той факт, що практично вся детермінована складова західної компоненти розташовується у від'ємній півплощині, тобто має східний напрямок. Навпаки, в період східної фази квазідворічної періодичності спостерігається виключно східний зональний вітер.

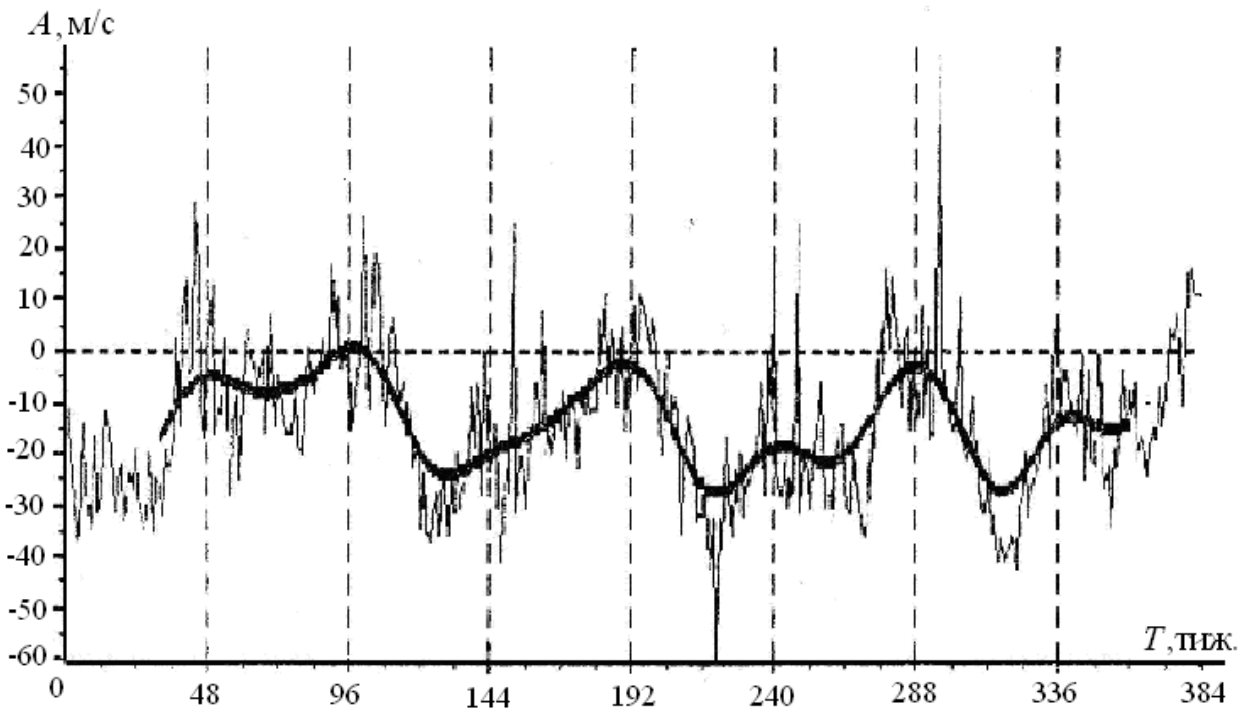


Рисунок 10.2 – Часовий та згладжений ряди зональної компоненти швидкості вітру на висоті 35 км над районом Форт Шерман (приекваторіальна зона західної півкулі)

Приклад 2. В якості другого прикладу на рис.10.3 зображається детермінована складова зональної компоненти швидкості вітру на висоті 10 км над районом Уайт Сендз (субтропічна зона Північно-Американського континенту), що отримана також шляхом ковзного осереднення результатів радіозондування атмосфери (з періодом осереднення один рік), що проводилося над цим районом на протязі десяти років. На графіку детермінованої основи виразно відбивається однорічна періодичність коливання швидкості зонального вітру з максимумами, що припадають на холодні місяці року. Коливання з меншими періодами, які для цього випадкового процесу виявляються з досить великою ймовірністю на амплітудно-частотній характеристиці, відфільтровуються й переходять, як зазначалося вище, у випадкову складову вихідного процесу. Цікавим є й те, що крім річного коливання в детермінованій основі процесу проявляється також і дворічне коливання (рис.10.3). Воно визначається збільшенням через кожні два роки максимумів амплітуди річного коливання.

Детерміновані складові наведених прикладів характеризуються наявністю тільки періодичних коливань. Трендова компонента практично не проявляється. Різниця між вихідним процесом $X(t)$ і детермінованою його складовою $\hat{X}(t)$ дає випадкову компоненту $X_3(t)$, яка має властивості, близькі до стаціонарного процесу.

Наведені приклади свідчать про те, що за допомогою викладених вище методів статистичного аналізу нестаціонарних часових послідовностей є можливість отримати важливі характеристики статистичної структури гідрометеорологічних процесів. Тому вони знаходять широке використання при проведенні відповідних наукових досліджень.

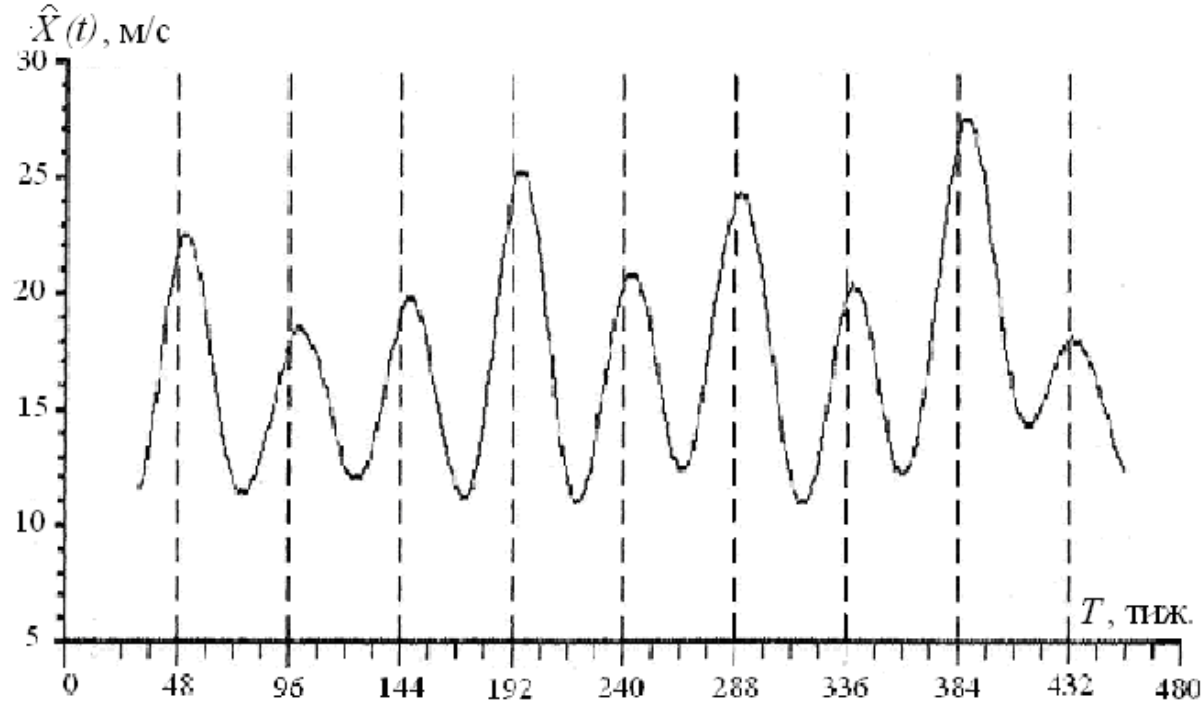


Рис. 10.3 – Згладжений ряд зональної компоненти швидкості вітру на висоті 10 км над районом Уайт Сендз (субтропічна зона західної півкулі)

Запитання для самоперевірки

1. Чому гідрометеорологічні процеси вважаються нестаціонарними часовими процесами?
2. Які методи використовуються при дослідженні періодичностей, що містяться в часових рядах?
3. Якими складовими можна представити випадкову часову послідовність?
4. Як отримати детерміновану основу випадкового процесу $X(t)$?
5. Які вагові множники використовуються при фільтрації часових рядів?
6. Від яких величин залежить результат фільтрації часових послідовностей?
7. Як вибирають період згладжування випадкової послідовності $X(t)$?

Задачі

В задачах цього розділу (10.1–10.10) використати (в залежності від варіанта) дані вихідного та згладженого рядів індексу Північно–Атлантичного Коливання (NAO), які були отримані в результаті ковзного осереднення за допомогою косинус-фільтра. Вихідні дані мають дискретність 1 рік та сформовані за період 1901-2000 рр.

Треба побудувати (дані записані по рядках) і проаналізувати вихідний ряд та отриману детерміновану складову і відповісти на ряд запитань викладача.

Задача 10.1 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (січень).

Вихідний ряд

0	-0.3	0.1	1.8	0.4	1.8	0.8	0.9	1.4	2
0.8	-1.1	0.5	-0.5	0.8	2	-2.3	-4.5	0	2.3
1.6	0.6	1.5	0.4	1	0.3	1.9	3	-4.1	1.4
-0.1	1.1	1.5	1.7	-0.1	-3	0.6	2.2	-2.1	-2.6
-2.9	1.6	-0.7	1	-2.2	1.4	-0.2	0.6	0.9	0
1	2	-1.2	0.3	-2	-0.8	1.8	-0.6	-3	-2
0.9	2.1	-5.1	-1.5	-0.2	-3.5	-1.6	0.5	-3.3	-2.9
-1.2	0.4	0.5	2.2	1.3	0.7	-1.7	1.6	-2.6	-1.7
1	-1.3	2.6	3.4	-2.7	2.4	-3.5	1.1	2.4	3
0.7	-1	2.1	2	1.4	-1.8	-2.4	-0.7	1.3	0.1

Згладжений ряд $n = 4.7;\quad \varphi_i = -1.124$.

0.9	1.1	1.2	1.2	1.1	1.5	1.5	0.7
0.0	-0.0	0.2	0.6	0.4	-1.7	-2.4	-0.4
1.1	1.1	1.1	1.2	1.0	0.7	1.1	1.6
0.8	-0.5	-0.3	0.8	0.6	1.5	1.0	-0.2
-1.0	0.1	0.4	-1.3	-2.3	-1.4	-0.5	0.1
-0.5	-0.2	-0.1	0.5	0.3	0.7	0.5	1.0
0.9	0.1	-0.6	-0.8	-0.5	0.3	-0.8	-2.0
-1.2	0.2	-0.5	-2.2	-2.0	-1.4	-2.4	-1.7
-1.2	-2.4	-2.5	-1.2	-0.3	0.7	1.3	1.3
0.3	0.0	-0.4	-1.1	-1.3	-0.2	0.2	1.5
1.5	0.2	-0.3	-0.3	0.1	2.2	1.8	1.0
0.6	1.5	1.8	0.6	-0.8	-1.5	-0.5	

Задача 10.2 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (лютий).

Вихідний ряд

-2.9	-2.8	1.8	0.9	1.4	1.8	1.6	2	-0.1	3.4
0.8	-2.4	0.3	1.4	0.9	1.9	-1.2	2.5	-2.7	1
0.3	2.6	0.8	-0.8	2	0.4	0.3	1.7	-0.3	-0.2
1.8	-3.5	-2.1	0.6	2.2	-2.6	0.1	-0.8	2.2	-2.1
-0.9	-2.7	2.7	-0.2	2.5	-0.2	-4.2	-0.5	1.9	1.5
1.4	-1.2	0.6	1.6	-2.2	-2.2	-1	-2.4	1.6	-3.3
1	0.9	-1.2	-1.5	-3.7	-2.5	1.4	-1.7	-3.2	1.1
1	0.6	2.3	1.1	-0.6	1.2	-1	-3.1	-1	0.5
1.2	1.7	-1.1	1.6	-1.5	-2.7	-0.7	0.3	3.2	3.2
0.5	2	0.3	-0.4	2.3	0.9	3.7	0.7	2.2	3.1

Згладжений ряд $n = 4.7; \quad \varphi_i = 0.271.$

0.2	1.0	1.1	1.8	1.8	1.5	1.6	1.8
0.8	-0.7	0.2	1.0	1.0	0.8	0.7	0.2
-0.1	-0.2	1.2	1.2	0.9	0.5	1.0	0.9
0.6	0.9	0.3	0.3	-0.1	-1.6	-1.6	0.3
0.1	-0.7	-0.7	0.3	-0.0	-0.6	-1.6	-0.6
0.3	1.1	0.7	-0.3	-1.9	-0.6	1.0	1.1
0.7	0.2	0.5	0.3	-1.2	-1.8	-1.5	-1.2
-1.0	-0.9	-0.4	0.4	-1.0	-1.9	-2.6	-1.8
-0.8	-1.5	-1.7	-0.0	0.7	0.9	1.5	1.0
0.4	0.2	-0.9	-1.9	-1.0	0.2	0.8	0.7
0.4	0.1	-0.8	-1.8	-0.8	0.7	2.1	2.3
1.7	1.4	0.9	0.6	1.4	2.0	2.1	2.1

Задача 10.3 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (березень).

Вихідний ряд

-0.6	0.7	3.6	0.6	1.7	-0.4	3.2	2.3	-1.9	1.7
0.2	1.9	3.1	1.3	-3.2	-3	-0.4	0.8	-0.4	3.6
3.1	0.5	0	-3.5	-1.1	0.2	1.9	-1	-1.4	-1.1
-3.4	-1.3	0.7	2.2	0.2	-0.9	-2	2.4	0.7	-1.5
-0.9	-2	0.7	-1.8	0.8	0.2	-2.8	2	-0.2	0
-2.1	-2.1	0.5	0.7	-2.6	0.6	-1.7	-2.5	1.7	-0.8
0.3	-4.2	0.9	-1.3	-1.2	0.4	2.4	1.7	-2.6	-1.3
0.2	1.1	0.9	0.3	-0.3	2.3	-0.5	2.9	1.2	0
-1.1	2.5	2	-1.9	0.6	3.9	-0.1	0.9	3.2	2.3
-0.1	2	1.2	4.4	1.8	-2.6	1.2	0.5	0.2	0.4

Згладжений ряд $n = 5.4; \quad \varphi_i = -0.998$.

1.1	1.3	1.7	1.3	0.5	0.5	1.1	1.7
1.8	0.4	-1.5	-1.9	-0.9	0.1	1.1	2.1
2.2	1.0	-0.6	-1.5	-1.1	0.0	0.3	-0.3
-1.1	-1.8	-1.9	-1.1	0.3	0.8	-0.2	-1.3
-0.8	0.3	0.3	-0.6	-1.1	-1.0	-0.7	-0.4
-0.3	-0.4	-0.5	-0.0	0.2	-0.6	-1.3	-1.2
-0.4	-0.4	-0.7	-1.0	-1.2	-1.0	-0.3	-0.2
-1.1	-1.3	-1.1	-0.8	-0.5	0.5	1.2	0.5
-0.7	-0.9	-0.1	0.6	0.7	0.5	0.6	0.8
1.2	1.4	1.1	0.3	0.5	1.1	0.9	0.3
0.9	1.5	1.4	1.5	2.0	1.8	1.3	1.4
2.2	2.4	1.3	0.1	0.1	0.4		

Задача 10.4 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (квітень).

Вихідний ряд

1.3	-1.9	-0.1	4.1	-1.7	2.5	1.6	-1.2	0.4	-1
-0.7	1.1	2.7	1.4	3.1	1	-2.6	-0.4	1	-1.8
-0.5	-0.1	0.5	-2.2	2.1	0.9	0.9	0.8	-3	-0.3
1.1	0.7	-1.9	-2	-2	-0.9	1	-1.9	-0.4	-0.5
-1.7	-0.4	3.4	-0.4	-2.2	3	3.3	1.6	2.5	1.6
-1.6	2.2	-2.7	0.9	0.8	-1.6	1	1.5	0.8	1.5
-1.3	0.4	-0.9	1.2	3	-1.1	0.7	-1.9	1.5	0.9
-1.8	1.2	-3.3	-0.4	0.1	0.4	0.6	-1.9	-1.5	-0.2
-1.2	-0.6	-1.2	-1	0.2	0	0.6	-2.4	0.8	3.1
1.1	1.8	1.5	1.1	-1.9	-1	-1.8	0.7	0	-2.5

Згладжений ряд $n = 5.4; \quad \varphi_i = 0.817$.

1.1	1.1	1.1	0.9	0.1	-0.3	-0.4	-0.1
1.0	1.8	2.1	1.8	0.6	-0.6	-0.6	-0.4
-0.6	-0.6	-0.3	-0.3	-0.1	0.5	1.0	0.7
-0.2	-0.9	-0.5	0.2	-0.1	-1.1	-1.7	-1.5
-0.8	-0.5	-0.7	-0.8	-0.8	-0.7	0.2	0.8
0.3	0.2	1.5	2.4	2.3	1.9	1.1	0.4
-0.1	-0.2	-0.1	0.0	-0.0	0.4	1.0	1.0
0.5	0.0	-0.3	0.2	0.9	1.1	0.5	-0.2
-0.1	0.2	0.2	-0.3	-0.8	-1.1	-0.9	-0.1
0.2	-0.3	-0.9	-1.1	-0.9	-0.8	-0.9	-0.9
-0.7	-0.2	-0.0	-0.4	-0.3	0.6	1.6	1.8
1.6	1.3	0.4	-0.7	-1.2	-0.8	-0.4	

Задача 10.5 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (травень).

Вихідний ряд

-1.7	0.9	1.2	0.8	1.4	-2.9	-2.8	1.1	-2.1	2.6
3.2	0.6	1.3	2.8	-2.7	-0.3	-2.8	0.4	-0.7	2.3
2.8	1.4	-0.8	-0.3	1.8	-1.4	-2.3	-3.1	2.3	2.5
-0.7	-1.5	0.3	2.8	-1.8	0.9	1.7	1.1	0.3	-0.2
0.3	-0.1	0.6	0.7	-0.3	-2.5	-0.2	-0.4	-0.1	-2.2
-1.8	-2	-1.2	-1.6	0	4.9	0.3	-0.6	-0.4	0
-1.2	-0.3	5.2	1.6	-0.7	2.3	-0.4	-0.8	-1.3	2
2.4	2.7	-0.8	-0.3	-1	2.6	-0.4	1.5	-0.1	-2.1
0.1	1	-0.4	1.6	-0.9	2.4	-1.8	-0.4	0.3	-2
1	0.3	-3.6	-0.5	-0.8	-1.8	-1.9	-0.2	0.4	1.4

Згладжений ряд $n = 7.1; \quad \varphi_l = -0.997$.

-0.9	-1.2	-0.8	0.3	1.1	1.6	1.8	1.2
0.5	-0.3	-1.0	-1.1	-0.4	0.4	1.3	1.4
1.1	0.5	0.2	-0.2	-0.9	-1.7	-1.8	-1.1
-0.5	-0.2	-0.0	0.1	0.4	0.6	0.7	0.8
0.9	0.5	0.2	0.2	0.2	0.3	-0.0	-0.5
-0.8	-0.8	-0.7	-0.9	-1.4	-1.7	-1.7	-1.3
-0.5	0.6	1.2	1.0	0.3	-0.3	-0.3	0.1
1.0	1.6	1.7	1.2	0.5	0.1	-0.1	0.2
1.0	1.5	1.3	0.5	0.1	0.2	0.6	0.7
0.3	-0.2	-0.3	-0.2	0.2	0.4	0.5	0.4
0.2	-0.1	-0.4	-0.5	-0.3	-0.5	-0.8	-1.1
-1.4	-1.4	-1.3	-1.1				

Задача 10.6 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (весняний сезон).

Вихідний ряд

-0.5	-0.1	3.1	2.9	0.9	-0.2	2.1	1.7	-2	1.8
1.1	2.3	4.2	2.8	-1.9	-1.9	-2.8	0.5	0	2.6
3.2	0.9	0	-3.9	1.1	0	1	-1.6	-1.6	0.1
-2.3	-1.2	-0.3	1.7	-1.6	-0.9	-0.3	1.2	0.4	-1.4
-1.4	-1.7	2.5	-1.3	-0.7	0.7	-0.5	2.2	1.1	0
-3.1	-1.3	-1.4	0.3	-1.5	1.6	-0.7	-1.4	1.5	0.2
-0.9	-3.1	2.3	0.3	0.4	0.7	1.9	0	-1.7	0.4
0.2	2.6	-1.4	0	-0.6	3	-0.2	1.8	0.1	-1
-1.4	1.9	0.7	-1.3	0.2	3.9	-0.5	-0.7	2.9	2.5
0.8	2.5	0.1	3.6	0.1	-3.2	-0.8	0.6	0.4	-0.4

Згладжений ряд $n = 5.9; \quad \varphi_i = -0.270.$

1.0	1.0	0.7	0.4	0.7	1.6	2.5	2.7
1.6	-0.3	-1.6	-1.5	-0.5	0.8	1.8	2.0
1.0	-0.4	-1.0	-0.5	0.1	-0.1	-0.7	-1.0
-1.2	-1.2	-0.9	-0.3	-0.1	-0.4	-0.6	-0.1
0.3	-0.1	-0.8	-1.1	-0.6	-0.1	-0.1	-0.2
0.0	0.6	1.0	0.7	-0.4	-1.4	-1.6	-1.1
-0.6	-0.2	-0.1	-0.2	-0.1	0.1	-0.1	-0.7
-0.7	0.0	0.6	0.7	0.8	0.7	0.1	-0.3
-0.0	0.6	0.6	0.1	-0.1	0.4	1.0	1.1
0.7	0.1	-0.4	-0.2	0.3	0.3	0.2	0.7
1.1	0.9	0.9	1.5	1.9	1.8	1.6	1.6
1.6	1.6	1.2	0.1	-0.9			

Задача 10.7 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (липень).

Вихідний ряд

1.2	-2.4	-0.3	-1.6	0.5	2.9	-2.4	-0.4	3.3	-0.6
-1.8	-0.7	-1	-0.5	0.3	0.4	-1.7	-3	-1.2	3.1
-1.2	2	2.4	1.5	2.7	0.7	-0.3	0.8	-0.1	-0.5
2.1	1.8	2.3	0.4	3.8	1.1	-0.1	2.2	-0.6	0.6
1.7	1.5	0.4	-3	0.2	2.3	0.5	-0.6	-0.8	-0.1
-0.3	0.9	2.2	3.3	1.4	-0.8	-1.6	-2.1	1.9	2
0.3	-2.4	-2.3	1.6	-0.9	0.8	-0.5	-3.6	1.2	-0.5
-1.9	-0.8	0.5	1.1	-0.7	-3	0.5	-2.3	0.5	-1.6
1.6	-0.8	-0.5	-1.7	0.3	0.6	0	0.8	-0.6	-0.1
-1.4	-0.2	-0.2	0.7	-1.4	1.2	1.1	0.3	-1.8	-2.9

Згладжений ряд $n = 6.4; \quad \varphi_i = 1.301.$

0.3	0.2	0.2	0.2	0.4	0.2	-0.8	-1.0
-0.6	-0.4	-0.3	-0.6	-1.3	-1.3	-0.6	0.3
0.9	1.2	1.7	2.1	1.5	1.1	0.6	0.3
0.3	0.6	1.2	1.7	1.8	1.9	1.9	1.6
1.2	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	-0.1	-0.4
0.1	0.6	0.5	-0.2	-0.4	-0.2	0.3	1.0
1.8	1.9	1.1	-0.1	-0.8	-0.3	0.5	0.7
-0.1	-1.0	-0.9	-0.3	0.0	-0.4	-0.9	-0.9
-0.9	-0.7	-0.8	-0.7	0.0	-0.1	-0.7	-1.1
-1.1	-0.9	-0.6	-0.4	-0.1	-0.4	-0.6	-0.7
-0.1	0.1	0.3	0.1	-0.1	-0.4	-0.6	-0.4
-0.2	-0.1	0.0	0.4	0.4			

Задача 10.8 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (вересень).

Вихідний ряд

1.2	-2.2	-0.6	1.1	1.3	1.2	-0.1	0.3	-1.6	-1.3
-0.1	-2.3	-1.6	-0.2	-2	-1.1	1.8	0.8	0.8	1.3
-0.2	1.7	1.8	1.2	-0.1	-1.1	0	-1	1.3	-2.8
-1.4	0.3	-0.4	2.1	0.4	-2.3	1.4	1.6	-4	0.1
-1.2	2.1	2.6	1.1	0.5	1.3	2.4	0.1	-0.8	3
0.2	-1.8	1.4	2.4	3.7	-0.7	-1.9	-1.3	-0.2	1.4
2.1	-0.6	2	-0.9	-0.2	-1.2	0.1	-1	1.8	0.3
-1.8	-3.1	-0.3	1	2	-4.6	-0.9	0.2	0.4	1.6
-0.3	0.5	-1.9	0.4	-1.7	-3.3	-0.4	0.6	-0.4	-0.7
-0.5	-0.5	-2.6	-0.1	0.6	-0.6	-0.8	-2	0.9	0.2

Згладжений ряд $n = 8.9; \quad \varphi_l = -0.667$.

-0.2	-0.6	-1.0	-1.1	-1.2	-1.3	-1.1	-0.8
-0.3	0.2	0.6	0.8	0.9	1.0	1.1	1.0
0.7	0.3	-0.1	-0.3	-0.5	-0.7	-0.8	-0.6
-0.3	-0.0	0.2	0.2	0.1	-0.2	-0.5	-0.5
-0.3	0.1	0.7	1.2	1.3	1.3	1.1	1.0
1.0	0.8	0.6	0.5	0.8	1.1	1.1	1.0
0.4	-0.2	-0.3	-0.0	0.5	0.7	0.7	0.4
0.0	-0.2	-0.3	-0.2	-0.1	-0.2	-0.5	-0.8
-0.8	-0.7	-0.6	-0.6	-0.7	-0.7	-0.3	0.1
0.3	0.1	-0.2	-0.6	-1.0	-1.2	-1.2	-0.9
-0.7	-0.5	-0.5	-0.7	-0.8	-0.8	-0.6	-0.6
-0.5							

Задача 10.9 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (листопад).

Вихідний ряд

-2.4	0	0.8	-0.5	0.9	0.1	1.8	0.2	-1.9	-1.9
0.5	0.9	3.6	0.1	-2.8	-0.3	1.7	0.3	-1.6	2.1
-0.6	-0.3	0.2	0.6	-1.6	2.1	0.5	1.7	1.9	1
2.4	0.5	0.3	-0.5	1.7	1.9	-3.1	2.1	1.5	1.5
-0.2	-1.5	1.6	0.5	-2.9	-0.9	-1.9	-1.6	1.6	-0.6
-0.1	-1.8	2.1	2.1	-3.1	1.7	-1.9	1.7	1.2	0.5
-0.2	-0.4	-1.2	0.5	-1.9	0.7	1	-1.7	-0.6	0
1.1	1.3	-1.2	0.8	1.2	1.2	-0.7	2.7	1.3	-2.7
-0.8	2.2	-3.6	0.3	-2.4	3.3	0.1	-2.2	-1.4	-1.1
1.6	2.2	2.5	0.2	-3	1	0.1	0.9	0.8	0

Згладжений ряд $n = 4.7$; $\varphi_i = -0.145$.

0.3	0.8	0.8	0.1	-1.2	-1.0	0.0	1.3
1.6	0.3	-1.1	-0.1	0.6	-0.0	-0.1	0.5
0.2	-0.3	0.3	-0.1	0.0	0.7	1.3	1.3
1.8	1.6	1.6	1.1	0.3	0.6	1.1	0.5
-0.3	0.7	1.7	0.7	0.2	-0.1	0.5	-0.2
-1.5	-1.5	-1.5	-1.0	-0.0	-0.1	-0.7	-0.1
0.9	0.6	-0.5	-0.3	0.2	0.3	1.2	0.3
0.1	0.2	0.5	0.0	-0.5	0.1	0.2	-0.8
-0.6	0.2	0.6	0.5	0.1	0.5	1.1	0.6
0.8	1.4	0.6	-1.0	-0.3	-0.1	-1.2	-1.4
0.0	0.5	0.3	-1.4	-1.2	-0.4	0.8	1.9
1.6	0.2	-0.7	-0.1	0.5	0.4		

Задача 10.10 Вихідний та згладжений ряди індексу Північно-Атлантичного Коливання (осінній період).

Вихідний ряд

0.1	-0.7	-0.2	0.2	0.1	1.4	1.4	-0.3	-0.7	-2.4
-0.1	0.6	0.6	-0.3	-2	0.8	3.1	1.8	-1.4	1.9
-1.2	-1.7	1.8	1.4	-2.2	-0.6	-1.6	1.9	3	-0.2
0.4	1.6	-1.2	1.2	3.5	1.8	-1.9	4.4	-1	1
-1.3	0.5	2.7	2	-3	-1.6	-0.3	-0.2	0.8	1.6
0.9	-2.2	3	3	-1.4	1.4	-0.7	1.7	1.6	-0.8
1.8	-0.5	1.2	0.7	-1.7	-2	2	-3.6	0.7	-0.2
-0.2	-1.3	-1.6	0.9	1.1	-0.3	-0.4	1.8	1.2	-2
-0.5	2.4	-2.1	1.2	-2.7	3	0.4	-2.2	-0.6	-0.8
0.7	0.6	0.1	-0.7	-2	1.5	-1.9	0.4	1.2	2.8

Згладжений ряд $n = 5.0$; $\varphi_i = -1.341$.

0.1	0.4	0.5	-0.0	-0.9	-1.1	-0.5	0.2
0.1	-0.4	-0.5	0.7	1.8	1.2	0.5	0.2
-0.3	-0.5	0.6	0.3	-0.7	-1.0	-0.2	1.0
1.6	0.9	0.7	0.6	0.4	1.2	2.3	2.3
2.5	2.2	1.1	0.1	0.1	0.6	1.6	0.6
-1.0	-1.3	-0.6	-0.1	0.6	1.0	0.3	0.3
1.5	1.6	0.6	0.3	0.7	0.9	1.0	0.6
0.6	0.6	0.5	0.1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.9
-0.7	-0.1	-0.6	-0.9	-0.7	0.2	0.5	0.1
0.4	0.9	0.4	-0.5	-0.1	0.3	-0.1	-0.6
0.0	0.5	0.3	-1.0	-0.9	-0.3	0.1	0.3
-0.3	-1.1	-0.9	-0.5	-0.4	0.1		

В задачах цього розділу (10.11 – 10.17) використати (в залежності від варіанта) дані вихідного та згладженого рядів індексу Південного Коливання (SOI), які були отримані в результаті ковзного осереднення за допомогою косинус-фільтра. Вихідні дані мають дискретність 1 рік та сформовані за період 1901-2000 рр.

Треба побудувати (дані записані по рядках) і проаналізувати вихідний ряд та отриману детерміновану складову і відповісти на ряд запитань викладача.

Задача 10.11 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (травень).

Вихідний ряд

-0.3	7.6	7.6	9.2	-37.4	1.3	10	-1.1	2.1	0.5
-8.2	-13	-8.2	-0.3	-12.2	6.8	21.8	10	-7.4	-2.7
2.1	-5.1	2.1	11.5	-1.1	-2.7	6	-2.7	-12.2	2.1
13.1	2.8	6	-7.4	-6.6	4.4	-0.3	13.1	-1.1	-14.5
-6.6	5.2	2.8	-1.1	-0.3	-11.4	-13.7	3.6	-5.8	7.6
-6.6	6	-31.9	4.4	13.1	17.9	-12.2	-8.2	2.8	5.2
1.3	12.3	2.8	2.8	-0.3	-9	-3.5	14.7	-6.6	2.1
9.2	-16.1	2.8	10.7	6	2.1	-11.4	16.3	3.6	-3.5
7.6	-8.2	6	-0.3	2.8	-6.6	-21.6	10	14.7	13.1
-19.3	0.5	-8.2	-13	-9	1.3	-22.4	0.5	1.3	3.6

Згладжений ряд $n = 5.9; \quad \varphi_1 = -0.969.$

-8.8	-5.8	0.7	2.8	0.7	-2.5	-6.4	-8.6
-7.7	-5.7	-1.5	5.5	10.2	7.4	1.2	-1.9
-1.7	-0.0	2.4	3.6	2.5	1.0	-0.3	-2.5
-2.8	1.0	5.2	5.4	1.4	-2.1	-2.6	0.2
3.7	3.3	-1.3	-5.5	-4.5	-0.4	1.4	-0.2
-4.1	-7.2	-7.1	-4.0	-0.7	0.2	-1.7	-6.7
-7.8	-1.4	6.7	6.0	-0.5	-3.4	-0.6	3.1
5.3	5.9	4.8	1.8	-1.7	-2.7	-0.3	1.9
2.4	1.3	-0.7	-1.5	0.8	4.8	4.6	1.5
1.5	3.5	4.2	2.3	0.4	0.3	0.7	1.0
-2.0	-6.2	-5.2	2.2	7.7	4.1	-2.7	-6.8
-8.1	-8.7	-8.4	-8.5	-7.8	-4.8		

Задача 10.12 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (червень).

Вихідний ряд

19.6	2.6	-0.6	-7.1	-31.4	-3.9	8.3	-2.3	22.8	22
-12	-6.3	-3.9	-16.8	6.6	9.1	21.2	-4.7	-10.4	6.6
22	5.8	1	8.3	-4.7	-7.1	8.3	-7.9	1	-5.5
18.8	-4.7	-3.9	10.7	-2.3	-1.5	3.4	18	-1.5	-19.3
-14.4	8.3	-7.9	-3.9	8.3	-9.6	2.6	-4.7	-12	26.9
5	7.4	-2.3	-1.5	16.4	12.3	-2.3	0.2	-6.3	-2.3
-3.1	5	-9.6	7.4	-12.8	1	6.6	12.3	-0.6	9.9
2.6	-12	12.3	2.6	15.5	0.2	-17.7	5.8	5.8	-4.7
11.5	-20.1	-3.1	-8.7	-9.6	10.7	-20.1	-3.9	7.4	1
-5.5	-12.8	-16	-10.4	-1.5	13.9	-24.1	9.9	1	-5.5

Згладжений ряд $n = 5.9; \quad \varphi_l = 1.299$.

-12.9	-7.9	0.6	8.5	12.5	9.6	1.3	-5.8
-7.6	-4.9	1.7	8.5	8.1	2.3	0.3	5.3
9.9	8.9	5.2	1.8	-0.6	-1.5	-1.2	-1.3
-0.9	2.1	3.6	2.6	1.5	1.6	1.5	2.0
5.0	5.0	-1.7	-8.6	-8.4	-4.6	-2.1	-1.3
-1.0	-1.2	-3.0	-2.6	2.1	7.6	9.3	5.2
2.4	4.6	8.0	7.7	3.2	-1.3	-3.1	-2.8
-1.6	-1.1	-1.4	-2.7	-2.5	0.3	4.6	6.6
6.1	3.9	1.3	0.6	3.2	7.0	5.6	0.2
-2.9	-1.4	1.8	1.6	-2.1	-5.8	-8.2	-6.9
-4.6	-4.8	-5.3	-3.6	-0.2	-0.5	-5.5	-10.5
-11.9	-7.9	-2.7	-1.8	-2.3	-1.8		

Задача 10.13 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (липень).

Вихідний ряд

14.6	1.6	6.1	-8.9	-21.3	6.8	-4.3	2.2	10.7	20.5
-12.8	-0.4	-1.7	-18	14	25.7	28.3	-14.1	-8.9	9.4
2.9	2.2	-11.5	7.4	-13.4	-1	6.1	-0.4	1.6	-4.3
9.4	-5	3.5	2.9	-0.4	4.2	-5.6	18.5	8.1	-15.4
-20.6	-1	2.9	-8.9	3.5	-10.2	9.4	0.9	-1.7	21.1
-8.2	3.5	-1	4.2	19.2	12.6	0.9	2.2	-5	4.8
2.2	-0.4	-1	6.8	-22.6	-1	1.6	7.4	-6.9	-5.6
1.6	-18.6	6.1	12	21.1	-12.8	-14.7	6.1	-8.2	-1.7
9.4	-19.3	-7.6	2.2	-2.3	2.2	-18.6	11.3	9.4	5.5
-1.7	-6.9	-10.8	-18	4.2	6.8	-9.5	14.6	4.8	-3.7

Згладжений ряд $n = 5.9; \quad \varphi_i = 1.448$.

-7.7	-4.7	-0.0	4.5	8.1	6.6	1.4	-3.6
-5.1	-1.1	8.8	17.0	13.0	2.8	-1.8	0.8
2.3	-0.1	-2.3	-3.7	-3.4	-1.6	0.8	1.4
0.6	0.9	1.3	1.4	1.4	1.7	1.5	1.6
4.4	6.1	1.5	-7.1	-10.3	-6.7	-2.8	-2.3
-2.7	-0.9	1.0	3.1	5.1	5.1	3.2	0.8
2.5	7.3	10.8	9.9	5.1	1.1	0.3	1.1
1.4	1.1	-0.3	-3.7	-6.2	-4.5	-0.1	0.7
-1.7	-4.1	-5.6	-3.9	2.2	8.5	6.3	-1.4
-5.7	-4.8	-2.1	-1.3	-3.3	-6.1	-6.4	-3.1
-1.7	-3.5	-2.4	2.1	5.9	4.2	-1.0	-6.5
-9.8	-7.8	-3.0	0.7	2.8	4.0		

Задача 10.14 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (серпень).

Вихідний ряд

9.8	-8.9	0.1	0.8	-7.6	15.5	-8.2	5.3	9.8	9.8
-12.1	-7.6	-7.6	-17.2	7.2	16.2	34.8	-4.4	-6.9	5.3
-6.9	-1.2	-18.5	10.4	-10.8	-7.6	-5	9.8	0.1	-1.8
0.1	-6.9	-0.5	-22.4	2.1	-8.9	3.3	13	-0.5	-18.5
-19.1	4	7.8	3.3	11.7	-4.4	7.2	-4.4	-4.4	12.3
-0.5	-3.7	-17.2	10.4	14.9	11	-9.5	7.8	-5	6.6
0.1	4.6	-2.4	14.3	-11.4	4	5.9	0.1	-4.4	4
14.9	-8.9	12.3	6.6	20.7	-12.1	-12.1	1.4	-5	1.4
5.9	-23.6	0.1	2.7	8.5	-7.6	-14	14.9	-6.3	-5
-7.6	1.4	-14	-17.2	0.8	4.6	-19.8	9.8	2.1	5.3

Згладжений ряд $n = 8.9; \quad \varphi_i = 1.564$.

3.0	3.7	2.9	0.5	-2.5	-5.6	-5.6	-1.5
4.3	8.3	9.4	7.2	2.9	-1.2	-3.5	-4.0
-4.9	-5.2	-4.5	-3.3	-1.7	-0.7	0.2	-0.5
-2.5	-4.7	-6.1	-6.5	-5.1	-2.3	-0.6	-1.1
-3.7	-5.3	-5.3	-2.6	1.2	3.8	4.1	2.7
1.7	1.3	1.0	0.3	-0.8	-0.7	0.5	2.4
4.4	4.7	3.7	1.9	1.5	1.8	2.4	2.4
2.4	1.9	1.8	1.4	1.2	1.6	2.4	2.8
4.0	5.6	6.4	5.4	3.3	0.5	-2.3	-3.0
-3.1	-2.9	-3.6	-3.5	-2.7	-2.1	-1.3	-0.9
-1.8	-2.2	-2.6	-3.3	-5.3	-7.2	-7.2	-7.2
-6.2	-4.4						

Задача 10.15 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (вересень).

Вихідний ряд

-16	-17.8	8.7	0.2	-7	18.3	0.2	17.7	0.8	15.3
-8.8	-4	-9.4	-12.4	7.5	4.5	29.7	-8.2	-5.8	5.1
5.1	5.1	-14.8	8.1	-6.4	1.4	-0.4	8.1	-0.4	-7
5.1	-8.8	2	-6.4	6.3	2.6	0.8	7.5	-9.4	-19.6
-8.2	8.7	5.7	2.6	8.7	-16	11.7	-7.6	2	6.9
-7	-3.4	-13	4.5	14.1	0.2	-10.6	-3.4	0.2	6.9
0.8	5.1	-5.2	14.1	-14.2	-2.2	5.1	-2.8	-10.6	12.9
15.9	-14.8	13.5	12.3	22.5	-13	-9.4	0.8	1.4	-5.2
7.5	-21.4	9.9	2	0.2	-5.2	-11.2	20.1	5.7	-7.6
-16.6	0.8	-7.6	-17.2	3.2	6.9	-14.8	11.1	-0.4	9.9

Згладжений ряд $n = 5.9$; $\varphi_l = -0.745$.

5.9	8.7	8.9	7.9	4.3	-0.8	-5.7	-7.4
-4.7	2.1	9.3	9.3	4.0	-0.1	1.3	2.7
0.3	-1.8	-2.1	-1.0	0.0	1.7	2.1	0.5
-1.3	-2.1	-2.3	-2.3	-0.6	1.4	2.8	2.6
-0.9	-6.8	-9.9	-5.8	1.0	4.8	4.0	0.9
-0.7	-1.1	0.2	0.9	0.3	-2.4	-5.3	-3.6
1.6	4.2	1.0	-3.3	-3.2	0.2	2.7	2.9
2.3	2.0	0.2	-1.9	-2.2	-1.4	-1.5	0.6
4.4	5.2	4.3	7.0	11.1	7.8	-0.1	-4.4
-3.1	-0.8	-1.1	-3.3	-3.2	-0.9	1.2	-0.9
-2.8	0.4	4.5	2.9	-3.7	-7.5	-7.8	-7.8
-6.4	-3.2	-1.0	-0.3	1.3			

Задача 10.16 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (грудень).

Вихідний ряд

-1.9	-3	15.9	2.6	-13.1	4.7	8.8	-5.5	4.7	15.9
-1.4	-8	-7	-1.4	9.8	15.4	22.5	-8	-9.1	9.8
8.2	11.8	2.1	5.2	-7	6.2	7.7	11.8	5.7	-1.4
4.7	3.2	8.2	-2.4	-4	0.6	6.7	13.8	-8.6	-29.4
-8.6	13.8	-8.6	4.2	6.7	-5.5	5.2	-5.5	7.7	23
-3	-12.6	-4	12.8	9.3	10.3	-3.5	-6.5	8.2	6.7
13.8	0.6	-11.6	-3	1.6	-4	-5.5	2.1	3.7	17.4
2.1	-12.1	16.9	-0.9	19.5	-3	-10.6	-0.9	-7.5	-0.9
4.7	-21.3	0.1	-1.4	2.1	-13.6	-4.5	10.8	-5	-2.4
-16.7	-5.5	1.6	-11.6	-5.5	7.2	-9.1	13.3	12.8	7.7

Згладжений ряд $n = 5.9$; $\varphi_i = -1.001$.

-0.7	0.3	2.2	3.1	4.8	5.2	1.3	-3.7
-4.1	0.8	8.1	12.7	9.6	2.6	-0.3	3.4
7.7	7.8	5.1	1.9	1.3	3.6	7.1	7.8
5.5	3.3	3.1	4.1	3.1	0.5	-0.7	1.8
4.9	2.0	-7.0	-12.3	-8.2	-1.6	1.4	1.6
1.7	1.0	0.1	2.7	7.2	7.7	1.9	-3.3
-0.8	5.5	8.4	5.5	1.1	0.3	3.7	7.4
6.3	1.1	-3.4	-3.8	-2.5	-2.4	-2.0	1.3
5.9	6.6	3.7	1.9	4.2	7.7	6.2	1.1
-3.7	-5.2	-3.5	-2.7	-4.6	-6.3	-5.2	-2.6
-3.4	-4.5	-2.5	0.1	-1.2	-5.9	-8.0	-6.8
-5.5	-4.8	-3.6	-1.1	2.6	6.6		

Задача 10.17 Вихідний та згладжений ряди індексу Південного Коливання (січень).

Вихідний ряд

-0.1	17	-9.2	14.1	-9.2	-3.5	5.1	-10.6	-2.5	5.6
3.2	-9.7	-3.5	-5.4	-21.6	5.6	5.1	14.6	-14.9	1.8
10.8	8	5.6	-5.4	5.6	-5.4	5.1	-10.1	16	12.7
7	1.8	-11.1	6.5	6.5	-2	9.4	7.5	17	-0.1
-9.7	-13	9.4	-8.2	5.1	-2.5	-4.9	-3	-7.3	5.1
16.5	-9.2	2.2	6	-5.4	11.3	5.6	-16.8	-8.7	0.3
-2.5	17	9.4	-4	-4	-12	14.6	4.1	-13.5	-10.1
2.7	3.7	-3	20.8	-4.9	11.8	-4	-3	-4	3.2
2.7	9.4	-30.6	1.3	-3.5	8	-6.3	-1.1	13.2	-1.1
5.1	-25.4	-8.2	-1.6	-4	8.4	4.1	-23.5	15.6	5.1

Згладжений ряд $n = 5.9$; $\varphi_i = 1.112$.

1.2	-0.8	-2.0	-2.7	-2.8	-1.5	0.5	-0.4
-3.4	-6.4	-8.5	-7.2	-1.5	4.0	3.1	0.3
1.3	5.5	6.6	3.8	1.2	0.0	-0.3	-0.5
2.4	7.1	9.5	6.4	1.1	-0.6	1.1	3.2
4.4	6.4	9.1	7.7	1.4	-4.6	-5.2	-2.5
-0.4	-0.6	-1.7	-3.2	-3.9	-1.1	3.1	4.2
2.4	0.8	1.4	3.1	3.1	-0.6	-5.6	-6.9
-2.7	3.6	7.3	6.0	0.4	-3.5	-1.4	1.6
-0.0	-4.8	-5.6	-2.0	2.0	5.0	6.3	6.0
3.2	0.2	-1.9	-1.4	1.3	1.4	-3.5	-7.8
-6.8	-1.7	0.3	0.3	1.9	3.9	2.2	-4.6
-9.7	-9.5	-4.9	0.0	0.9	-1.5	-2.0	

Додаток А

Середня місячна температура повітря (1939 – 2000 рр.)

Таблиця А.1 – Середня місячна температура повітря **(Одеса, обсерваторія)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	1.0	1.4	1.6	9.7	15.0	21.1	24.1	22.4	16.7	10.3	4.8	0.3
40	-6.4	-2.4	-0.7	6.7	12.3	19.4	21.9	20.1	16.2	16.4	8.0	-3.4
41	-4.3	0.4	1.6	9.3	13.7	-	-	-	-	-	-	-
44	-	-	-	-	12.7	19.1	21.3	20.8	18.1	13.3	7.5	-0.8
45	-3.0	-2.5	1.7	7.4	14.3	19.7	21.4	21.0	17.5	10.7	4.2	-1.1
46	-3.2	-0.7	3.0	9.7	17.6	22.2	23.0	24.3	19.3	7.2	4.3	-2.8
47	-8.2	-2.7	3.8	11.0	15.5	21.0	23.2	20.1	16.9	7.6	5.3	2.5
48	3.0	-1.5	0.7	8.9	16.0	19.6	20.6	22.0	16.7	11.6	4.0	-3.9
49	0.4	-1.1	1.7	7.5	16.7	17.2	21.0	20.3	16.4	9.6	7.6	3.9
1950	-8.1	0.1	2.9	10.7	16.8	19.7	22.1	20.2	18.5	9.9	6.3	3.9
51	-1.2	-1.8	2.9	10.9	15.9	21.1	23.3	22.9	18.2	7.9	7.0	2.1
52	2.1	0.7	-0.5	9.3	12.8	17.6	21.4	22.8	18.7	13.3	6.3	1.8
53	-2.1	-1.5	1.8	8.1	13.9	21.3	22.9	22.4	16.4	11.1	1.0	-1.5
54	-9.0	-11.3	1.3	6.3	15.1	22.2	22.4	23.0	19.9	11.8	6.7	2.0
55	1.2	1.3	1.7	6.3	13.9	17.2	22.2	21.1	18.3	14.4	3.0	1.9
56	-0.1	-7.7	-0.5	7.3	13.9	19.4	20.1	21.1	15.0	10.9	1.0	0.6
57	-1.8	1.9	1.7	9.5	13.9	20.3	22.7	21.8	17.6	10.4	6.2	-1.0
58	-0.6	2.8	1.8	7.4	17.4	17.4	21.1	21.0	15.0	10.5	4.5	3.3
59	1.2	-1.4	2.9	8.5	14.5	19.2	24.7	21.8	13.9	8.0	4.4	-0.2
1960	0.0	-1.8	0.2	8.1	13.9	20.1	22.0	20.8	15.3	14.0	4.2	6.9

Продовження таблиці А.1

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	-1.2	0.0	5.5	10.7	13.8	21.3	21.1	21.6	17.0	11.1	7.0	0.2
62	1.2	-1.0	2.2	10.2	15.3	19.1	20.6	22.3	16.5	11.7	8.3	0.2
63	-9.4	-1.4	-0.3	8.8	17.1	19.5	23.9	23.0	19.1	12.0	8.6	-2.0
64	-4.8	-2.6	-0.5	8.3	12.9	21.3	22.0	19.8	16.9	12.4	5.7	4.0
65	0.0	-3.8	2.3	5.1	13.1	19.8	20.3	19.6	17.4	9.8	3.7	3.8
66	0.7	3.4	4.9	11.7	15.5	17.4	23.2	22.4	15.6	14.8	6.4	1.8
67	-4.0	2.6	2.8	9.5	15.8	19.1	22.0	18.3	22.8	13.3	7.7	0.5
68	-3.8	-0.5	3.7	10.6	17.4	19.8	20.5	20.4	17.6	10.4	5.4	-0.7
69	-4.4	-3.5	-0.6	7.4	14.4	19.2	20.4	21.8	16.9	10.4	8.9	-0.5
1970	-0.3	0.2	3.8	10.8	14.4	18.4	23.1	19.9	16.1	9.0	6.6	1.7
71	1.3	-0.5	1.2	8.6	15.9	18.9	21.3	22.8	15.4	9.2	5.6	2.5
72	-7.0	-2.8	2.5	11.2	16.0	21.3	23.4	22.4	16.4	10.4	6.8	1.8
73	-3.7	1.0	2.5	9.5	14.4	18.6	21.5	20.0	16.2	10.9	3.7	0.6
74	-3.1	0.7	2.9	7.2	13.3	18.6	19.9	22.0	18.4	14.6	6.8	3.4
1975	2.4	-0.4	4.3	10.7	17.4	21.6	23.0	22.3	17.4	11.4	4.4	1.4
76	-1.2	-5.5	0.9	9.8	13.7	18.4	20.5	18.2	15.6	8.2	5.5	2.7
77	-2.6	3.5	3.7	9.6	8.6	18.2	20.4	20.5	14.9	9.6	5.5	-0.8
78	-2.1	-0.6	4.3	8.6	13.5	18.4	20.3	19.6	15.3	11.6	6.5	-1.2
79	-1.0	-0.1	3.0	7.9	18.2	21.2	19.9	21.4	17.7	9.2	5.4	3.5
1980	-2.7	-1.0	0.1	7.6	12.7	18.1	20.6	19.7	15.6	11.8	5.8	2.7

Продовження таблиці А.1

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	0.8	-1.2	4.4	7.7	14.6	21.4	22.0	21.3	16.8	13.4	4.4	3.6
82	-1.4	-2.7	2.9	7.5	15.5	18.7	19.9	21.5	19.2	11.5	6.8	4.6
83	1.9	0.7	4.0	10.5	17.0	19.6	21.9	20.2	18.2	11.5	3.8	1.2
84	1.7	-1.9	2.0	8.4	15.1	17.8	20.3	20.2	18.6	13.6	4.3	-1.0
85	-3.8	-9.2	-2.3	8.9	15.8	18.0	20.0	20.2	15.5	9.5	4.1	2.0
86	0.8	-3.9	1.9	10.5	16.5	20.7	21.0	22.5	17.5	10.3	3.9	-0.8
87	-6.4	-1.8	-3.4	6.1	12.5	19.5	22.9	19.3	17.0	10.2	6.0	0.4
88	-1.1	-0.3	3.4	8.8	15.0	19.3	23.3	21.7	16.1	9.9	1.1	0.1
89	1.8	3.9	6.5	11.2	15.3	19.0	21.7	23.2	16.4	12.1	3.9	2.5
1990	1.2	4.3	8.2	9.9	14.4	19.0	21.8	21.3	16.3	11.3	9.2	2.4
91	-2.5	-2.8	-2.3	9.4	13.8	20.0	23.8	21.8	16.9	12.3	5.9	-0.8
92	-0.4	-0.4	4.3	7.9	14.7	18.9	22.1	24.4	16.2	11.5	6.1	-1.0
93	0.2	-0.4	1.5	8.1	15.2	18.7	19.6	21.4	15.8	11.5	-0.5	2.8
94	2.5	-1.6	4.2	11.0	13.6	18.8	23.9	22.2	20.6	12.5	4.5	0.4
95	-1.0	3.6	4.4	9.7	14.1	21.1	23.9	21.8	16.9	11.3	2.9	-2.0
96	-5.4	-3.1	-0.6	8.5	17.5	20.5	22.6	21.7	14.4	11.5	10.4	0.2
97	-3.5	0.6	3.6	7.0	16.6	19.7	21.1	20.3	14.4	9.7	6.0	0.6
98	1.1	2.3	3.2	11.6	15.2	21.1	22.8	22.1	17.2	12.3	2.8	-2.5
99	0.1	1.9	4.8	10.8	14.0	22.8	25.3	22.5	18.5	11.5	4.5	3.8
2000	-2.4	1.7	4.6	11.3	16.7	19.8	21.5	22.9	15.7	11.4	8.7	4.0

Таблиця А.2 – Середня місячна температура повітря **(ст. Полтава)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	-3.7	-2.0	-1.8	8.5	15.9	19.4	22.7	22.0	14.1	5.0	1.4	-3.7
40	-11.7	-7.7	-3.8	6.0	14.1	18.4	20.0	19.6	14.5	5.1	4.8	-5.7
41	-10.1	-3.0	-2.7	8.2	11.5	16.0	21.3	18.2	-	-	-	-
44	-3.6	-2.4	0.5	7.3	13.3	17.9	19.8	18.4	16.2	8.8	3.0	-5.2
45	-7.3	-8.6	-2.4	6.0	12.5	17.3	18.9	19.0	14.1	6.4	-0.4	-6.9
46	-6.3	-3.8	-1.2	8.9	16.7	22.8	20.7	22.9	15.2	3.2	-0.6	-6.3
47	-11.8	-6.5	0.6	9.0	14.6	20.1	22.3	19.3	14.4	4.3	2.0	-0.6
48	-2.1	-5.1	-2.5	9.0	17.2	20.8	19.1	20.0	13.2	7.8	-0.2	-6.2
49	-2.8	-5.8	-1.4	6.5	18.5	17.1	19.5	18.6	14.9	6.6	4.0	-1.9
1950	-15.2	-3.8	0.5	13.4	15.5	17.2	18.5	16.9	15.5	6.5	1.9	-1.9
51	-7.2	-9.2	0.3	12.0	14.6	19.4	21.2	21.1	15.4	4.1	0.6	-1.4
52	-1.4	-3.9	-6.9	8.3	13.6	18.1	19.8	20.6	15.8	9.0	1.8	-3.8
53	-5.3	-9.0	-2.4	7.4	14.3	20.3	21.7	20.9	13.8	7.9	-3.7	-5.5
54	-14.5	-16.1	-1.0	5.3	16.5	22.9	22.1	22.3	16.7	7.9	2.6	-2.6
55	-2.6	-2.4	0.2	4.5	13.7	16.8	21.2	20.2	16.7	10.8	-1.3	-4.4
56	-5.0	-14.4	-3.4	7.0	13.7	21.8	18.5	19.5	12.1	7.8	-3.4	-3.3
57	-6.1	-0.4	-2.3	10.0	16.3	19.6	21.4	21.1	15.0	7.1	2.1	-3.2
58	-4.4	-2.5	-1.0	5.8	16.7	16.6	19.7	19.1	12.0	7.2	0.1	-1.5
59	-2.2	-4.1	-0.8	7.5	14.2	19.1	24.1	19.6	11.2	4.5	-1.9	-6.2
1960	-4.4	-5.6	-2.5	7.6	15.1	20.2	22.7	19.1	12.4	9.0	2.6	3.0

Продовження таблиці А.2

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	-4.8	-2.6	2.4	8.9	17.6	20.1	20.6	19.8	14.4	7.5	2.0	-4.4
62	-3.1	-4.7	0.2	10.7	15.9	18.7	19.7	20.1	14.4	9.3	3.6	-4.8
63	-15.4	-5.2	-5.4	5.8	17.9	17.7	22.8	21.4	17.1	8.3	3.6	-8.1
64	-8.8	-9.2	-4.3	8.0	13.7	21.7	20.9	18.1	15.2	8.9	1.2	0.4
65	-6.8	-7.5	-0.5	4.8	13.1	18.2	20.1	18.8	14.8	6.1	-1.9	0.6
66	-2.2	-2.0	3.3	11.7	16.4	17.0	22.4	21.8	13.5	10.7	2.8	-3.6
67	-9.6	-8.9	-0.6	9.9	17.7	18.5	20.5	20.8	15.5	10.7	3.3	-5.1
68	-9.8	-5.1	0.1	10.8	16.6	20.3	18.8	20.8	14.9	6.4	0.9	-2.6
69	-9.8	-7.8	-3.3	7.5	14.7	18.2	19.6	20.0	13.4	6.6	4.8	-6.7
1970	-6.4	-4.6	0.2	10.5	16.0	17.3	23.1	18.1	13.9	7.0	2.4	-3.7
71	-2.3	-5.5	-1.9	6.8	15.8	18.7	20.0	20.1	14.0	6.9	2.9	-1.1
72	-13.6	-7.3	-0.5	11.3	16.2	21.6	22.9	22.2	14.0	6.8	2.2	-1.0
73	-8.4	-0.8	-0.1	10.4	14.8	17.6	20.0	17.4	11.1	6.8	0.1	-2.7
74	-7.3	-1.2	1.4	6.3	12.5	17.6	18.6	19.1	16.0	11.1	2.4	-0.7
75	-1.1	-4.0	2.6	12.7	18.4	23.0	21.2	20.6	17.2	7.0	1.1	-3.0
76	-7.1	-11.7	-2.2	10.3	12.8	16.5	17.7	16.8	13.3	3.0	1.4	-1.7
77	-8.7	-1.4	2.2	9.6	15.6	17.5	19.0	18.2	12.3	5.8	4.5	-7.0
78	-8.3	-5.6	2.4	8.4	12.9	15.9	17.9	18.0	12.7	7.3	3.6	-7.5
79	-6.7	-7.0	1.6	6.7	19.2	21.3	18.4	20.0	15.0	5.3	0.3	-1.3
1980	-9.0	-6.2	-4.8	6.8	12.5	17.6	19.6	17.5	13.3	7.9	0.9	-0.9

Продовження таблиці А.2

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	-3.1	-2.3	0.5	5.2	15.8	22.0	21.9	19.9	14.4	9.5	1.4	-0.4
82	-4.8	-7.6	0.6	6.8	14.4	16.3	18.5	19.8	15.6	7.1	2.3	1.5
83	-2.2	-3.2	1.5	11.9	17.6	18.1	20.0	18.8	15.8	8.6	0.8	-2.2
84	-3.1	-7.4	0.5	9.4	17.9	17.0	18.8	18.5	15.8	8.8	0.4	-6.1
85	-7.7	-13.8	-4.3	9.2	17.9	17.1	18.2	21.0	12.8	7.3	1.5	-3.7
86	-3.0	-9.5	0.9	11.2	15.8	20.5	19.7	21.2	14.0	6.8	0.4	-3.9
87	-14.0	-5.5	-7.1	3.4	15.0	18.2	20.0	17.0	13.0	6.5	0.7	-4.7
88	-7.0	-4.7	-	-	14.5	18.9	21.3	19.1	13.7	6.8	2.8	-4.8
89	-1.1	1.2	5.1	10.1	14.5	19.8	19.4	21.1	14.9	8.9	0.2	-1.3
1990	-1.8	1.4	5.7	10.3	14.1	16.4	19.8	18.6	12.9	8.3	5.1	-2.5
91	-6.9	-6.7	-0.6	9.7	13.3	20.0	22.5	19.3	15.0	10.0	1.2	-3.9
92	-6.9	-3.4	3.7	7.5	13.6	18.6	20.2	22.7	13.7	6.0	1.6	-4.8
93	-3.2	-3.2	-0.3	7.7	15.8	16.6	19.1	18.7	11.6	7.3	-7.5	-1.6
94	-0.3	-7.8	-0.3	11.0	13.5	18.7	21.1	19.5	19.3	8.6	0.1	-6.0
95	-4.6	1.0	3.2	9.0	15.1	21.1	20.8	19.6	14.4	8.2	-0.1	-6.1
96	-9.9	-7.6	-3.6	8.6	18.7	19.1	21.3	19.7	11.8	7.5	5.4	-4.5
97	-7.1	-3.5	0.7	5.8	16.2	19.0	19.3	18.9	11.2	6.1	2.8	-5.0
98	-3.3	-2.2	0.9	10.2	15.5	21.4	21.3	19.1	15.2	8.2	-3.1	-6.1
99	-2.0	-1.2	3.0	12.1	12.6	22.2	24.2	19.9	15.6	8.7	-1.7	-0.5
2000	-6.0	-1.5	1.1	13.4	14.6	17.7	20.6	21.1	13.1	8.9	2.0	0.8

Таблиця А.3 – Середня місячна температура повітря **(ст. Умань)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	-2.2	-1.1	-0.7	9.2	15.3	19.2	21.4	20.8	14.3	6.2	2.0	-2.7
40	-10.1	-9.3	-4.0	5.8	13.5	18.3	19.2	18.0	13.5	6.0	5.1	-5.6
41	-9.6	-3.0	-1.3	8.5	12.0	-	-	-	-	-	-	-
44	-	-	-	6.1	12.8	17.5	19.3	18.6	14.9	9.6	3.8	-3.8
45	-7.5	-6.8	-0.3	6.5	13.0	17.3	19.0	19.0	14.3	6.6	0.6	-4.4
46	-6.2	-4.3	0.7	10.0	16.4	21.1	20.8	22.7	15.3	3.7	0.4	-5.9
47	-10.6	-6.6	0.7	9.5	14.7	19.0	20.7	17.9	14.4	3.8	1.6	-0.3
48	-0.6	-4.3	-1.4	10.0	15.8	18.6	17.8	19.0	12.7	8.4	0.2	-6.3
49	-1.6	-3.0	-0.5	7.2	16.7	15.7	18.9	17.5	14.0	5.6	4.0	0.6
1950	-12.1	-1.7	1.3	12.2	15.0	17.3	18.8	17.4	14.7	6.5	2.7	0.3
51	-5.5	-5.5	1.2	10.9	14.5	19.1	20.4	21.0	14.9	4.0	3.1	-0.7
52	-1.1	-2.7	-7.3	8.3	12.8	17.1	19.0	20.1	15.1	9.0	1.8	-2.9
53	-4.4	-6.7	-0.5	7.2	13.0	20.0	20.9	19.2	13.3	7.2	-2.8	-4.2
54	-12.7	-14.1	0.6	5.3	15.0	21.1	20.3	20.7	15.9	1.1	2.4	-2.3
55	-2.7	-3.2	-1.0	4.2	13.2	16.5	20.1	18.8	15.5	9.9	-0.8	-1.7
56	-3.4	-12.5	-13.8	7.7	12.9	19.5	18.5	19.0	11.8	7.8	-2.6	-2.7
57	-4.3	0.3	-0.2	8.5	14.0	18.8	20.9	19.2	14.3	6.8	3.0	-3.8
58	-3.7	-0.3	-0.7	5.9	17.3	16.2	19.5	18.4	11.9	7.6	0.9	0.6
59	-2.3	-3.0	1.4	7.3	12.9	18.1	22.5	19.0	10.8	5.2	0.0	-4.1
1960	-4.0	-4.9	-0.2	7.5	13.9	18.4	20.5	17.9	11.4	10.3	4.8	3.2

Продовження таблиці А.3

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	-5.3	-1.9	3.6	10.5	12.6	19.1	19.2	18.6	13.8	7.8	3.4	-3.3
62	-1.2	-3.2	-1.4	9.5	14.8	17.1	17.6	19.4	13.3	8.2	4.4	-4.0
63	-15.4	-4.8	-3.8	6.0	16.6	17.4	21.0	20.9	15.4	8.2	4.6	-7.4
64	-8.1	-7.8	-4.1	8.3	13.0	21.8	19.8	16.2	13.8	9.2	1.9	0.3
65	-4.2	-7.6	-0.2	4.5	12.8	17.5	18.8	17.2	14.3	6.3	-1.4	0.4
66	-3.3	-0.4	3.2	11.1	15.2	16.0	20.6	19.4	12.8	10.7	2.3	-2.6
67	-9.1	-6.7	1.0	9.6	16.1	17.6	18.5	20.0	15.1	10.4	4.5	-4.0
68	-7.9	-4.2	0.7	10.6	15.5	19.1	18.1	18.6	14.5	7.0	1.5	-3.9
69	-9.5	-7.0	-4.2	7.1	14.5	16.7	18.3	18.7	12.6	6.4	5.4	-6.2
1970	-6.0	-3.7	1.4	9.6	14.3	16.5	20.6	18.4	13.1	5.9	3.4	-1.4
71	-2.5	-3.4	-1.2	7.5	15.0	17.2	18.6	18.2	11.8	6.8	2.5	0.8
72	-12.7	-5.3	1.2	11.5	15.2	19.2	21.2	19.6	12.9	6.0	3.4	-1.2
73	-7.6	-1.1	-0.1	10.5	13.7	16.6	19.6	17.2	12.3	6.8	0.6	-3.4
74	-6.3	-0.7	2.1	6.7	12.3	16.9	17.8	18.6	15.1	9.9	2.8	0.2
75	0.0	-2.6	3.7	10.9	17.2	19.9	20.2	19.3	16.1	7.5	-0.6	-1.6
76	-5.4	-10.5	-0.6	10.5	12.4	15.7	17.7	15.8	13.2	4.7	2.6	-1.2
77	-7.3	0.4	2.8	7.6	14.3	17.1	18.3	17.8	11.6	6.8	4.4	-4.9
78	-6.5	-0.5	1.8	7.7	11.9	16.5	16.9	16.8	12.2	7.5	4.0	-5.5
79	-5.0	-5.2	2.5	6.4	17.2	19.8	16.6	18.4	14.0	4.3	1.2	-0.4
1980	-7.4	-5.2	-3.7	6.4	11.5	16.5	18.2	16.8	12.6	8.1	1.2	-1.6

Продовження таблиці А.3

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	-4.4	-2.4	1.6	5.3	14.7	20.0	20.2	17.9	13.3	9.4	1.2	-2.4
82	-4.1	-5.0	1.2	6.2	14.7	16.2	17.5	18.4	14.8	7.6	2.8	1.7
83	-1.1	-2.7	2.9	10.7	16.5	17.6	18.6	17.1	14.6	7.9	0.6	-1.7
84	-2.2	-5.5	0.0	8.7	15.6	15.6	17.2	17.1	15.0	9.1	0.2	-4.6
85	-9.4	-13.8	-3.7	8.9	16.5	16.4	17.5	19.7	12.4	7.2	-0.5	-1.0
86	-2.7	-8.6	0.2	10.1	15.4	18.8	18.5	20.5	13.1	7.0	0.8	-4.3
87	-12.0	-4.4	-6.7	4.8	13.7	17.6	20.3	16.2	13.5	8.9	2.5	-3.5
88	-4.8	-3.3			14.6	17.8	21.1	18.6	14.0	6.4	-2.9	-2.7
89	-0.2	2.0	5.0	11.6	14.3	18.6	19.0	19.7	14.0	9.1	0.1	-0.4
1990	-0.8	2.1	6.7	9.1	14.0	16.8	18.6	18.1	12.7	8.0	5.7	-2.2
91	-1.9	-5.9	0.8	8.7	12.6	18.2	20.9	18.2	13.9	8.9	2.4	-3.3
92	-2.5	-2.6	3.3	7.3	13.2	17.6	19.7	22.0	12.8	7.0	2.4	-4.4
93	-1.9	-2.7	0.6	7.6	16.0	16.5	17.7	17.7	12.0	8.2	-5.1	0.2
94	0.5	-4.5	2.2	10.9	13.4	16.2	20.3	18.7	17.4	8.0	1.0	-3.0
95	-3.8	1.7	3.2	8.5	13.7	19.5	20.6	19.1	13.5	7.9	-0.5	-5.5
96	-9.6	-7.1	-2.9	8.4	17.9	18.6	18.9	19.1	10.9	8.3	7.0	-3.4
97	-6.2	-1.5	1.9	5.8	15.5	18.0	19.0	18.2	11.0	5.7	3.3	-2.9
98	-1.1	0.1	0.8	11.4	14.1	19.5	20.0	18.4	14.2	8.0	-2.3	-6.8
99	-2.7	-1.4	3.4	11.1	12.9	21.7	22.3	19.6	15.6	8.4	0.2	-0.4
2000	-4.1	-0.1	2.0	12.4	14.9	17.7	19.2	20.1	12.5	8.5	5.3	0.8

Таблиця А.4 – Середня місячна температура повітря **(ст. Київ)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	-2.8	-1.0	-0.5	9.1	15.2	19.5	21.5	22.0	14.5	5.0	1.9	-3.2
40	-11.2	-9.5	-3.5	5.6	14.3	19.0	19.5	18.2	13.8	5.1	4.6	-5.7
41	-9.9	-3.3	-1.6	7.3	11.4	16.0	20.4	18.4	13.8	7.6	1.4	-3.6
42	-15.0	-8.9	-6.9	4.3	13.2	15.3	19.0	20.0	15.9	8.2	-0.9	-3.3
43	-9.6	-3.3	0.7	9.6	12.6	17.9	17.9	20.2	13.8	7.6	1.4	-3.6
44	-2.1	-2.1	0.3	5.1	13.5	17.5	19.9	19.3	15.8	9.3	3.2	-4.1
45	-7.7	-6.1	-0.4	6.9	12.8	17.1	19.2	19.1	14.3	6.6	0.6	-4.8
46	-5.5	-3.9	0.2	9.6	16.5	21.2	20.5	22.8	15.3	3.2	-0.6	-5.8
47	-9.7	-8.2	0.3	9.3	15.3	19.9	21.5	17.8	14.9	4.2	1.2	-0.4
48	-1.2	-5.4	-1.0	10.2	16.7	19.9	18.5	19.6	13.8	8.3	0.6	-5.3
49	-1.8	-2.9	-0.3	7.5	17.5	16.5	19.1	18.2	14.8	7.0	4.4	0.0
1950	-12.4	-1.2	1.1	12.9	15.8	17.5	18.9	17.2	14.6	6.5	2.4	-0.7
51	-5.1	-6.6	0.7	10.7	13.9	19.3	20.4	20.6	15.3	4.6	2.2	-0.4
52	-1.6	-3.1	-6.4	9.3	12.7	17.4	19.5	20.8	14.5	8.1	1.1	-3.1
53	-4.7	-7.4	0.5	7.9	13.7	20.9	22.1	19.2	13.6	7.9	-1.6	-3.7
54	-12.5	-13.0	0.9	5.3	15.4	21.8	20.3	20.4	16.0	7.9	1.8	-1.8
55	-3.6	-3.1	-0.8	5.0	13.4	16.9	21.0	19.8	16.6	9.9	-0.2	-3.1
56	-4.3	-13.1	-2.8	7.0	13.4	20.9	18.2	18.1	12.2	8.0	-2.8	-3.3
57	-4.1	0.6	-0.3	9.3	14.6	18.9	20.3	19.1	13.7	8.0	3.0	-3.3
58	-3.8	-1.0	-0.6	5.8	17.6	16.7	19.8	18.3	12.2	8.1	1.0	-0.5
59	-2.1	-2.6	1.8	8.0	13.3	19.0	23.4	19.7	10.9	5.5	-0.3	-5.1
1960	-4.8	-5.0	-2.2	7.4	14.4	19.3	21.3	17.9	12.0	9.3	3.7	2.8

Продовження таблиці А.4

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	-4.6	-1.3	3.5	9.7	13.2	20.2	20.4	18.4	13.7	8.2	2.8	-3.9
62	-1.3	-3.8	-1.5	10.4	14.6	16.7	17.4	18.7	13.4	8.8	4.2	-4.1
63	-13.9	-5.6	-3.8	6.5	18.2	17.3	21.6	20.9	16.7	8.8	4.4	-7.1
64	-6.6	-7.4	-4.1	8.5	13.0	22.2	20.2	16.4	14.3	9.2	2.1	-0.1
65	-4.9	-7.2	-0.1	5.3	12.7	17.5	18.6	17.1	14.8	6.5	-1.7	0.1
66	-3.9	-1.8	3.3	11.5	16.4	16.9	20.7	19.5	12.7	11.5	1.2	-3.5
67	-9.8	-6.3	1.6	9.6	17.5	18.2	20.4	18.5	15.6	11.2	4.4	-4.5
68	-9.0	-4.4	1.0	10.4	15.1	20.1	18.0	19.4	14.1	7.0	1.0	-3.4
69	-9.8	-7.0	-3.5	7.4	14.8	17.3	18.8	18.1	13.2	7.5	5.7	-6.5
1970	-5.5	-4.9	0.5	9.4	15.0	17.2	20.8	17.7	13.4	6.4	3.2	-2.0
71	-3.0	-3.6	-1.7	7.4	16.1	18.1	18.4	19.1	12.1	7.2	2.1	0.9
72	-10.9	-4.4	1.5	10.9	16.0	19.7	22.0	20.8	13.4	6.8	3.4	-0.5
73	-6.9	-0.2	1.6	10.6	14.4	17.9	20.1	18.5	12.1	7.3	0.9	-2.6
74	-5.7	-0.1	2.7	6.9	12.6	17.0	17.9	18.7	15.6	9.6	2.9	0.4
75	0.4	-2.0	3.7	11.2	19.0	20.7	20.3	19.5	16.9	7.6	-0.3	-1.2
76	-5.8	-8.7	0.0	10.2	12.6	16.2	18.1	16.5	13.3	4.2	2.6	-0.8
77	-6.4	-1.0	2.8	8.3	15.2	17.2	19.0	16.9	11.7	7.7	4.1	-4.3
78	-5.8	-5.2	2.3	8.7	12.6	16.6	17.1	18.0	11.9	8.1	4.7	-6.1
79	-5.4	-6.3	2.2	6.5	17.6	21.5	16.9	19.1	14.9	5.9	0.9	-0.1
1980	-7.2	-4.4	-3.6	7.0	11.3	17.1	18.8	17.3	13.7	8.8	1.3	-1.3

Продовження таблиці А.4

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	-5.5	-2.2	2.0	5.4	16.1	21.1	20.8	18.3	14.2	9.6	1.8	-1.5
82	-3.1	-4.9	2.0	7.0	15.1	16.9	18.5	19.3	15.7	8.7	4.0	2.2
83	-0.5	-2.6	3.2	10.9	17.9	18.2	19.2	18.9	16.2	8.3	1.2	-1.4
84	-2.4	-5.9	0.4	9.8	16.7	15.7	17.6	18.7	15.4	10.1	0.5	-5.0
85	-9.5	-12.5	-3.3	9.4	17.0	16.7	17.9	20.7	12.5	8.1	-1.4	-1.3
86	-2.7	-9.2	0.2	10.7	16.7	19.3	19.0	19.9	12.5	7.3	1.7	-3.5
87	-13.7	-3.9	-5.7	5.0	14.2	18.2	20.3	16.4	13.3	6.8	2.2	-3.0
88	-4.8	-3.4	1.3	8.1	15.2	18.3	21.7	18.5	14.1	7.2	-2.2	-3.1
89	0.5	2.5	5.2	10.1	15.2	19.4	19.5	19.6	14.5	9.1	0.2	-0.2
1990	-0.1	2.7	6.9	9.4	14.6	16.9	18.4	18.5	12.0	8.6	5.2	-2.3
91	-1.6	-5.8	0.5	7.4	12.8	18.5	21.2	18.9	14.8	8.8	2.4	-2.8
92	-1.8	-1.7	3.7	7.0	13.6	18.7	20.7	22.9	13.5	6.4	1.6	-3.6
93	-1.2	-2.4	0.9	8.0	16.5	16.7	17.9	17.5	11.5	7.8	-6.0	-0.2
94	0.1	-5.8	1.4	10.9	13.1	16.3	21.1	19.1	17.8	8.0	1.1	-3.4
95	-3.9	2.2	3.5	8.8	14.0	20.1	20.5	19.8	13.6	9.6	-0.3	-5.4
96	-9.8	-7.1	-3.0	9.2	18.6	18.8	19.3	19.1	11.2	8.6	6.7	-3.9
97	-5.7	-1.1	2.1	6.1	16.1	18.3	19.4	19.2	11.8	6.2	3.2	-4.2
98	-1.0	0.4	1.3	10.3	15.2	19.8	19.5	18.3	14.2	7.7	-3.3	-5.1
99	-2.2	-1.5	3.2	11.7	12.8	22.6	22.7	19.3	15.8	8.2	-0.2	-0.2
2000	-4.1	0.0	1.7	12.7	15.4	17.9	19.1	20.5	12.3	9.5	4.5	1.3

Таблиця А.5 – Середня місячна температура повітря **(ст. Херсон)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	0.6	0.7	1.6	10.6	16.6	21.8	24.3	22.3	16.1	9.0	3.9	0.5
40	-6.6	-2.4	0.1	8.4	14.2	20.4	22.6	20.5	16.2	9.2	7.6	-3.6
41	-4.0	0.3	1.5	11.3	14.7	18.7	22.4	21.9	16.8	10.5	4.1	-0.8
42	-10.8	-3.0	-2.2	6.4	15.8	20.0	21.6	21.7	17.5	11.0	4.1	-0.8
43	-3.2	-2.6	2.2	9.3	16.2	20.0	23.0	21.9	16.8	10.5	4.1	-0.8
44	-3.2	-2.6	2.2	9.3	16.2	20.1	22.3	21.9	17.8	12.2	6.8	-1.3
45	-3.2	-3.7	0.8	7.7	14.7	19.7	21.8	21.7	16.7	9.2	2.1	-2.3
46	-4.0	-0.4	2.5	10.1	18.6	23.4	23.2	24.8	18.5	6.5	3.8	-3.7
47	-10.2	-2.4	4.9	10.9	16.4	22.0	23.8	21.1	16.3	6.3	4.8	2.1
48	2.3	-2.3	-0.1	10.2	18.1	21.2	21.4	22.7	15.9	10.0	2.4	-5.6
49	-1.0	-3.3	2.2	7.6	18.4	18.4	21.7	21.1	16.4	8.6	6.9	2.7
1950	-10.7	-0.9	3.2	13.7	17.6	19.7	22.1	20.3	18.0	9.2	5.4	3.0
51	-2.4	-2.1	3.9	13.1	16.7	21.6	23.5	23.5	17.6	6.2	5.3	1.1
52	2.1	0.7	-1.2	10.8	14.1	18.5	21.9	23.0	18.6	13.2	6.4	0.9
53	-1.6	-2.1	1.4	9.1	15.1	21.8	23.6	23.2	15.9	9.7	-1.4	-3.8
54	-12.1	-13.3	1.4	7.1	17.1	23.6	23.2	23.8	19.5	11.1	6.3	0.4
55	0.9	2.0	1.7	6.6	15.0	18.5	22.9	21.4	18.4	14.2	1.4	0.6
56	-1.6	-8.4	-0.4	9.3	14.7	20.2	20.7	22.1	14.3	10.4	0.3	-0.5
57	-2.8	1.6	0.8	10.7	15.1	21.2	23.4	23.3	17.9	9.4	5.2	-0.6
58	-0.7	2.6	2.4	8.5	18.6	18.7	22.4	22.3	14.3	9.5	2.5	2.9
59	0.4	-2.2	2.4	9.0	15.4	20.1	25.3	21.9	13.5	6.8	3.3	-1.5
1960	-0.7	-1.7	0.5	10.0	15.7	21.0	22.4	20.3	14.7	13.3	7.2	6.4

Продовження таблиці А.5

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	-1.8	-0.9	4.5	11.3	14.3	21.9	22.2	22.4	16.6	9.9	5.8	-0.2
62	0.2	-0.9	3.3	11.5	17.0	20.0	21.5	22.6	16.7	10.6	6.8	-0.9
63	-10.2	-1.0	-0.8	9.4	18.4	20.5	24.2	23.1	19.1	10.8	7.3	-3.0
64	-5.8	-3.2	0.2	8.8	13.7	22.2	22.6	19.7	16.8	11.8	4.4	3.8
65	-1.1	-5.2	2.9	6.1	14.6	20.8	21.3	20.4	17.2	8.2	3.0	4.1
66	1.6	3.4	5.4	12.8	16.4	18.3	24.0	23.1	15.8	13.5	6.0	1.6
67	-5.1	-4.2	2.5	11.2	17.4	19.3	23.1	22.3	18.0	12.3	6.8	-0.5
68	-4.6	-1.0	3.9	12.0	18.7	20.6	21.3	21.0	17.4	9.3	3.6	-1.5
69	-6.5	-4.4	-0.8	8.4	15.2	19.6	20.8	22.0	15.7	8.5	7.1	-1.6
1970	-1.4	-0.4	3.8	12.4	15.4	18.4	24.3	19.6	15.7	8.2	5.2	0.0
71	0.0	-2.0	1.0	9.2	16.5	19.4	22.0	22.6	15.8	8.7	5.5	1.8
72	-9.9	-3.6	2.1	13.3	17.5	22.2	24.0	23.0	15.9	9.4	5.4	0.0
73	-5.9	1.6	2.6	10.6	14.9	18.6	21.8	19.3	14.6	9.4	1.8	0.4
74	-5.0	0.5	3.2	7.3	14.3	19.4	20.5	21.5	17.4	13.4	4.9	1.7
75	0.9	-1.4	4.9	12.7	18.2	23.2	23.0	22.4	18.6	9.9	2.2	-0.3
76	-2.8	-7.2	0.9	11.2	14.3	18.2	20.1	18.4	15.4	6.1	3.6	0.6
77	-5.7	3.3	3.9	9.6	15.5	18.4	21.1	20.2	14.4	8.1	7.2	-0.1
78	-4.0	-0.7	4.8	9.6	14.1	18.4	20.3	19.7	16.0	10.4	4.9	-2.9
79	-1.3	-1.6	4.7	8.8	19.4	22.1	20.0	21.6	16.8	7.4	4.1	2.0
1980	-4.5	-1.8	-0.1	6.7	13.9	18.7	21.7	19.8	14.9	10.6	5.0	2.3

Продовження таблиці А.5

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	0.0	0.8	3.6	7.3	15.1	22.5	22.9	21.6	16.5	12.1	4.3	3.4
82	-2.8	-3.7	2.3	8.6	16.3	18.9	19.9	21.7	17.9	9.4	4.0	3.4
83	0.1	-0.5	3.7	11.9	16.1	19.7	21.7	20.0	17.4	9.7	2.4	-1.0
84	0.9	-3.2	1.9	9.3	17.4	18.6	20.7	19.5	18.2	11.8	2.5	-3.2
85	-4.0	-12.3	-3.5	9.8	17.9	18.4	20.0	22.6	14.4	8.5	2.8	-0.5
86	0.4	-5.4	2.7	11.5	16.1	20.4	21.6	23.0	11.3	9.3	1.9	-2.2
87	-8.3	-3.1	-5.2	5.8	14.8	19.6	23.2	19.4	15.3	8.6	4.0	-1.9
88	-3.1	-1.1	3.6	9.5	15.4	19.8	23.6	22.1	16.0	8.7	-0.6	-1.3
89	0.1	2.5	6.4	12.4	15.4	20.1	21.5	23.4	16.2	10.8	2.5	-0.8
1990	0.0	2.9	6.8	10.6	14.9	19.2	22.7	20.8	15.4	10.0	8.0	0.7
91	-0.1	-4.6	2.1	10.1	14.7	21.2	24.4	21.5	16.7	12.3	3.9	-2.1
92	-1.5	-2.1	4.4	8.8	14.6	19.5	21.7	24.9	15.0	10.2	4.5	-2.4
93	-1.5	-1.6	2.8	9.1	16.5	19.1	20.8	21.8	14.8	9.8	-3.9	-0.1
94	1.9	-3.1	3.4	12.0	15.5	18.9	24.0	22.2	20.8	11.7	2.6	-1.4
95	-2.3	3.6	4.6	9.6	15.0	22.2	23.1	21.5	16.5	10.1	2.2	-2.6
96	-6.1	-3.5	-0.2	9.4	19.0	20.4	23.7	21.8	14.0	10.3	8.3	-1.3
97	-6.0	-2.1	2.4	7.6	16.8	20.6	21.3	19.8	13.5	8.8	5.1	-0.3
98	-0.9	0.4	2.9	12.2	16.1	21.2	23.6	22.2	17.2	11.1	1.5	-2.9
99	0.1	1.7	5.1	11.3	13.4	23.0	25.7	22.4	17.5	10.2	2.1	3.4
2000	-3.2	0.7	3.7	13.0	15.9	19.7	22.4	22.7	14.9	10.0	5.6	3.1

Таблиця А.6 – Середня місячна температура повітря **(ст. Вінниця)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	-10.2	-7.8	0.6	8.8	14.4	18.3	19.7	16.9	14.5	3.4	1.7	-0.4
40	-0.5	14.8	-1.1	9.7	15.0	17.5	17.2	18.1	12.9	8.1	0.3	-6.4
41	-2.3	-2.7	-1.2	7.0	16.1	14.8	18.2	16.7	13.7	6.3	4.6	0.4
42	-11.7	-2.0	1.2	11.3	15.0	16.9	19.0	17.3	14.1	6.4	2.5	0.3
43	-4.5	-5.2	1.3	9.7	13.5	18.4	19.4	19.9	14.6	4.0	3.6	-1.0
44	-1.6	-2.9	-7.3	8.3	12.1	16.5	18.7	19.8	14.1	8.6	1.3	-3.1
45	-5.0	-6.4	-0.3	7.1	12.4	19.9	20.7	18.4	13.2	7.7	-1.9	-3.9
46	-12.7	-13.1	0.4	4.6	14.2	20.1	18.7	19.0	15.0	7.4	1.4	-1.7
47	-3.5	-4.2	-1.1	4.1	12.3	16.1	18.8	18.0	14.7	9.0	-0.1	-2.0
48	-4.1	-13.3	-4.5	6.8	12.4	18.5	17.8	17.8	11.7	7.9	-2.7	-3.2
49	-4.2	0.3	-0.4	8.1	12.9	18.2	19.3	18.0	13.2	6.8	2.6	-3.6
1950	-3.8	-0.4	-1.1	5.5	16.7	15.7	19.0	17.6	11.6	8.1	1.5	0.2
51	-2.9	-2.9	2.0	7.1	12.3	17.3	22.1	17.9	10.1	5.4	0.4	-4.0
52	-4.4	-5.0	-5.0	7.1	13.2	17.6	19.2	16.6	11.1	9.9	4.7	3.0
53	-5.8	-1.7	3.3	9.6	12.2	18.9	18.1	17.5	13.0	7.6	3.2	-4.0
54	-1.6	-4.1	-2.5	9.3	13.8	15.5	16.4	18.4	12.4	7.8	4.7	-4.6
55	-14.5	-5.6	-3.8	6.1	17.0	17.2	20.9	20.2	15.1	7.9	4.8	-7.1
56	-8.2	-7.4	-4.4	8.0	12.7	21.7	19.0	15.8	12.9	8.8	2.3	-0.8
57	-4.4	-7.8	-0.4	4.1	12.2	16.9	17.8	16.0	14.3	6.4	-2.3	-1.0
58	-4.4	-1.0	2.6	10.6	15.0	15.8	19.7	18.3	12.5	11.4	1.2	-3.2
59	-9.0	-5.9	1.4	9.0	15.3	17.3	19.6	17.9	15.4	10.8	4.3	-4.1
1960	-7.3	-3.6	0.5	10.2	14.9	19.0	17.6	18.0	13.7	7.1	1.7	-4.8

Продовження таблиці А.6

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	-10.4	-7.7	-4.8	6.2	14.6	16.4	17.7	18.1	13.0	7.2	5.8	-6.8
62	-5.2	-4.4	0.8	9.0	13.7	16.5	20.1	17.0	13.2	6.0	2.9	-1.6
63	-3.7	-2.9	-1.5	7.2	15.2	16.8	17.7	18.2	11.5	7.1	2.1	0.8
64	-11.6	-5.2	1.6	10.5	14.8	18.3	20.3	18.8	12.5	5.6	3.3	-1.1
65	-6.4	-0.7	-0.3	9.8	13.7	16.3	18.9	17.3	12.6	7.1	0.4	-3.1
66	-6.0	0.0	2.0	6.4	12.0	16.1	17.0	18.0	14.8	9.3	2.1	0.3
67	0.2	-2.5	3.6	9.4	16.8	18.7	19.5	18.5	16.1	7.4	-0.6	-1.3
68	-5.2	-9.9	-0.9	9.4	12.2	15.6	17.8	15.5	13.1	5.0	2.9	-1.4
69	-6.4	-0.2	2.6	6.9	14.0	16.9	18.1	16.7	11.0	7.6	4.2	-4.0
1970	-5.7	-5.6	1.8	7.1	11.7	16.0	16.7	17.0	11.7	8.1	4.3	-4.8
71	-5.2	-5.8	2.1	6.3	15.8	19.9	16.3	18.2	14.9	5.1	1.0	0.0
72	-8.6	-4.9	-4.5	5.9	11.0	16.0	17.8	16.8	12.8	8.2	0.7	-1.5
73	-5.0	-2.9	1.7	5.2	14.3	19.6	19.0	17.4	13.4	9.5	1.3	-2.1
74	-4.1	-4.3	1.1	5.8	14.8	16.2	17.4	18.1	15.6	7.8	2.3	1.5
75	-0.5	-2.8	3.5	10.2	16.1	16.7	18.0	17.1	14.6	7.2	0.1	-2.3
76	-2.5	-5.6	-0.8	8.3	14.5	14.5	16.3	17.0	14.9	9.6	0.5	-4.3
77	-10.1	-13.5	-3.0	8.3	15.7	15.7	17.0	19.2	12.2	7.1	-0.5	-1.0
78	-3.3	-8.8	0.3	9.7	14.9	17.7	18.0	19.2	12.8	6.3	1.8	-4.7
79	-13.5	-4.5	-6.3	4.8	13.2	17.4	19.7	15.1	12.9	6.6	2.5	-2.9
1980	-3.9	-3.2	0.4	6.6	14.3	16.8	20.2	17.9	13.6	6.1	-3.2	-2.9

Продовження таблиці А.6

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	-0.3	1.7	4.2	10.3	13.8	17.0	18.0	18.7	13.3	8.6	-0.3	-0.7
82	-0.8	2.0	6.1	8.3	13.7	16.3	17.3	17.8	11.8	8.1	4.8	-2.4
83	-6.0	-5.8	0.8	7.6	11.7	17.4	19.8	17.5	13.7	9.5	2.4	-3.9
84	-6.0	-2.5	2.7	6.7	12.4	17.4	19.3	22.3	12.2	6.6	1.7	-4.3
85	-2.4	-3.1	0.0	7.0	15.6	15.8	16.9	16.8	11.7	8.2	-4.9	-0.2
86	-0.1	-4.6	2.3	9.8	13.4	15.6	20.2	18.7	17.1	7.2	0.8	-2.6
87	-4.6	1.2	2.6	7.5	12.6	18.2	19.6	18.5	12.8	8.3	-1.0	-6.1
88	-10.6	-8.2	-4.4	7.6	17.6	17.9	17.6	18.1	10.2	8.1	6.1	-4.5
89	-0.3	1.7	4.2	10.3	13.8	17.0	18.0	18.7	13.3	8.6	-0.3	-0.7
1990	-0.8	2.0	6.1	8.3	13.7	16.3	17.3	17.8	11.8	8.1	4.8	-2.4
91	-6.0	-5.8	0.8	7.6	11.7	17.4	19.8	17.5	13.7	9.5	2.4	-3.9
92	-6.0	-2.5	2.7	6.7	12.4	17.4	19.3	22.3	12.2	6.6	1.7	-4.3
93	-2.4	-3.1	0.0	7.0	15.6	15.8	16.9	16.8	11.7	8.2	-4.9	-0.2
94	-0.1	-4.6	2.3	9.8	13.4	15.6	20.2	18.7	17.1	7.2	0.8	-2.6
95	-4.6	1.2	2.6	7.5	12.6	18.2	19.6	18.5	12.8	8.3	-1.0	-6.1
96	-10.6	-8.2	-4.4	7.6	17.6	17.9	17.6	18.1	10.2	8.1	6.1	-4.5
97	-6.5	-1.6	1.1	4.6	15.2	17.2	17.9	17.5	11.2	5.4	2.4	-3.6
98	-1.4	0.4	0.1	10.5	13.4	18.6	18.9	17.7	15.3	7.2	-3.5	-6.1
99	-2.6	-2.3	2.5	10.2	12.1	20.8	21.5	18.4	14.7	7.8	-0.2	-1.4
2000	-5.0	-0.7	1.4	11.6	14.9	17.2	17.9	19.3	11.7	8.6	5.5	0.4

Таблиця А.7 – Середня місячна температура повітря **(ст. Ялта)**

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1939	7.7	4.9	5.7	10.6	16.6	22.0	26.0	23.8	18.5	13.8	8.8	7.0
40	2.0	4.5	4.7	9.7	13.6	21.1	24.6	23.2	18.2	13.6	11.4	5.3
41	4.2	6.8	5.5	11.0	15.2	20.3	23.6	22.6	16.4	-	-	-
42	0.2	4.5	2.3	8.3	15.3	20.3	23.1	23.6	19.4	14.4	9.3	5.6
43	3.6	2.9	4.4	9.3	14.6	20.3	21.6	23.6	18.4	15.5	11.6	6.8
44	4.1	6.1	6.2	9.8	14.1	19.8	22.5	21.9	19.3	15.4	11.4	5.4
45	4.8	2.3	3.8	8.2	14.4	19.4	23.1	23.0	18.6	11.8	7.3	4.1
46	1.9	4.6	5.7	9.2	16.8	23.2	24.5	25.4	21.0	11.2	9.2	4.5
47	0.7	4.8	7.6	12.1	16.1	22.2	24.8	22.8	18.3	11.0	9.2	9.0
48	7.9	3.7	3.3	10.3	15.6	20.8	22.6	24.3	18.5	12.5	6.8	2.2
49	3.2	1.5	4.7	8.4	16.3	18.5	21.9	22.3	18.0	11.6	11.2	7.1
1950	-1.0	3.6	5.6	13.2	17.6	20.0	23.5	21.8	20.0	13.1	9.0	8.1
51	4.7	4.5	7.8	12.4	16.3	20.8	23.4	24.2	19.5	9.9	10.0	5.1
52	6.0	5.1	5.2	10.7	13.7	18.6	23.2	24.2	20.8	16.3	11.6	8.7
53	6.1	5.0	4.5	9.7	14.6	21.4	24.4	24.2	18.1	13.1	4.1	2.7
54	0.6	-0.7	5.2	8.0	15.9	21.7	24.0	24.8	21.3	15.0	11.8	7.5
55	7.0	7.2	5.7	9.4	13.8	19.3	24.1	23.2	18.0	8.9	6.3	13.6
56	6.1	1.2	3.6	10.4	14.6	19.3	21.8	24.1	17.4	13.5	6.1	4.5
57	3.1	6.1	4.9	10.3	14.2	22.1	24.3	25.3	21.2	14.1	10.1	6.8
58	5.0	7.3	5.8	9.9	16.2	18.0	23.3	23.9	17.6	13.9	9.5	7.4
59	6.2	1.7	4.6	10.6	14.8	20.1	25.6	24.4	16.6	10.8	9.1	6.8
1960	6.9	3.8	4.3	9.9	15.1	20.9	23.6	22.2	18.0	16.9	12.7	10.8

Продовження таблиці А.7

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1961	5.0	4.7	7.2	11.9	15.3	22.2	23.7	25.0	19.1	14.2	11.5	7.6
62	5.7	5.0	8.4	12.2	16.1	20.7	23.1	24.5	19.6	15.5	12.7	7.2
63	2.8	6.4	4.4	9.7	16.7	20.6	25.3	24.5	20.8	13.5	10.3	4.9
64	1.1	3.4	5.4	10.8	13.0	22.4	23.4	21.6	19.5	15.0	8.9	7.6
65	4.5	2.5	6.5	7.8	13.8	21.1	23.0	22.9	19.9	11.9	9.9	8.5
66	-5.9	0.6	2.4	9.4	14.2	15.9	18.1	17.0	12.1	11.9	1.6	-2.1
67	-7.2	-3.1	3.5	8.0	13.7	16.4	19.4	17.6	16.5	10.8	4.2	-3.0
68	-5.2	-1.3	1.6	10.1	13.3	18.3	16.6	16.9	13.7	7.8	3.8	-4.6
69	-7.9	-5.2	-2.8	6.2	15.0	15.6	17.6	16.6	13.2	7.9	6.1	-6.8
1970	-4.7	-	0.9	8.2	11.9	16.0	17.4	17.0	11.8	6.6	4.1	-0.3
71	-3.3	-1.7	-1.1	7.6	15.0	15.7	17.4	18.4	10.8	7.2	1.8	1.1
72	-7.6	-1.5	3.0	8.8	13.9	16.8	19.8	16.7	11.3	5.4	3.5	-1.5
73	-3.9	0.0	1.9	7.8	12.9	15.2	17.6	17.2	13.2	7.0	0.7	-1.8
74	-3.2	1.2	4.0	6.4	10.1	14.1	16.0	18.1	14.8	6.5	1.9	1.0
75	1.2	-2.3	4.4	7.4	15.2	16.5	18.4	17.5	15.8	7.8	0.6	-1.7
76	-4.8	-6.8	-1.8	8.4	12.2	14.9	17.7	14.9	12.9	6.9	3.8	-2.0
77	-2.9	0.7	4.5	8.7	13.3	16.4	16.6	16.3	11.1	9.1	4.1	-3.2
78	-3.7	-4.8	2.9	6.7	11.3	14.9	15.9	15.3	10.7	8.3	2.9	-3.8
79	-4.9	-5.3	2.3	6.2	14.6	19.0	14.6	16.8	13.4	5.5	1.8	0.4
1980	-7.6	-2.1	-2.1	5.9	9.7	14.8	16.4	15.7	12.1	8.7	0.8	-1.7

Продовження таблиці А.7

Рік	Місяць											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1981	6.1	5.2	6.3	9.3	13.8	21.7	23.9	22.9	19.1	16.5	8.8	9.2
82	4.4	2.8	5.1	10.0	16.3	19.5	21.1	22.4	20.8	13.3	8.7	7.2
83	4.3	4.2	6.1	11.5	16.8	19.8	23.0	21.4	19.4	13.4	7.9	5.7
84	6.3	4.2	6.4	9.9	16.4	19.4	22.6	21.4	20.4	15.0	9.3	4.0
85	4.3	-1.1	3.2	9.7	16.8	18.6	20.5	24.2	17.0	12.2	8.6	5.2
86	-2.4	-8.0	0.1	9.9	14.7	16.3	16.6	17.8	12.0	7.3	3.2	-2.9
87	-10.9	-2.5	-4.0	6.9	11.7	16.5	19.0	14.5	13.1	7.9	3.7	-1.8
88	-1.0	-1.0	-0.4	7.0	13.7	15.5	18.9	16.7	13.0	7.2	-1.9	-1.1
89	-0.2	2.3	4.7	9.7	13.6	15.3	17.6	17.3	13.3	9.1	1.2	0.5
1990	-0.3	3.0	5.5	8.4	12.9	15.8	16.1	16.7	10.6	9.5	4.3	-1.8
91	4.3	1.7	5.1	10.4	14.1	20.2	25.2	23.8	17.8	15.6	9.5	4.8
92	3.1	2.1	5.8	8.7	15.2	19.9	22.3	25.6	18.2	13.7	7.9	3.5
93	3.9	2.2	6.1	9.7	15.2	19.8	22.3	23.7	17.7	12.9	3.9	6.2
94	5.4	2.3	5.6	12.6	15.1	19.5	24.7	24.0	23.3	16.7	7.7	4.2
95	4.7	6.0	7.5	9.9	15.4	21.9	24.4	23.1	19.4	13.3	8.2	4.5
96	2.7	4.1	4.5	9.9	16.8	20.7	25.4	22.6	16.7	13.3	12.0	7.3
97	3.5	3.5	4.0	8.7	16.9	20.2	22.6	22.3	16.0	12.4	8.8	6.2
98	4.6	3.9	5.7	12.5	16.0	21.5	24.8	25.1	19.7	14.6	9.1	5.1
99	5.8	5.8	7.5	11.4	14.1	14.1	26.2	24.7	19.6	13.8	8.1	8.2
2000	2.1	4.6	5.4	13.2	16.7	20.0	24.1	25.0	18.8	14.1	12.0	7.5

Додаток Б

Місячна сума опадів (1936 – 1990 рр., січень, липень)

Таблиця Б.1 – Місячна сума опадів **(ст. Рівне, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	50	12	35	40	28	25	66	51	24	62	16
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	23	54	15	26	24	54	36	49	98	25	43
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади	54	47	29	10	16	31	10	46	82	45	56
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	22	52	22	21	4	20	27	64	23	19	69
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	23	35	16	26	26	20	25	41	26	16	11

Таблиця Б.2 – Місячна сума опадів **(ст. Кіровоград, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	35	-	23	45	14	29	-	26	6	30	8
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	16	32	5	8	16	17	25	12	42	25	12
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	22	46	58	53	15	38	9	25	130	54	66
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	18	40	25	12	24	9	10	32	41	10	64
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	34	44	21	12	21	36	36	44	13	10	9

Таблиця Б.3 – Місячна сума опадів **(ст. Комісарівка, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	31	4	14	29	9	-	41	40	-	34	10
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	9	32	7	9	14	36	36	12	44	19	23
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	41	46	69	59	24	49	16	17	104	69	12
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	28	58	9	7	31	12	10	91	26	12	70
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	52	56	38	22	43	47	73	50	15	11	13

Таблиця Б.4 – Місячна сума опадів **(ст. Старобельськ, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	34	23	43	46	20	37	26	23	25	36	16
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	29	47	23	10	44	35	42	27	60	74	16
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	40	89	45	31	30	37	10	25	98	106	96
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	24	30	17	2	3	13	36	93	24	44	70
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	27	36	63	30	70	57	116	60	21	32	36

Таблиця Б.5 – Місячна сума опадів **(ст. Лубни, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	50	18	24	23	25	22	38	-	19	48	7
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	17	46	12	18	27	38	31	32	66	28	34
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	44	44	79	53	26	53	22	26	142	88	97
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	18	107	31	7	45	15	22	36	58	21	69
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	73	50	27	38	47	61	68	60	24	22	33

Таблиця Б.6 – Місячна сума опадів **(ст. Ромни, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	50	12	35	40	28	25	66	51	24	62	16
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	23	54	15	26	24	54	36	49	98	25	43
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	54	47	91	46	30	35	17	27	132	81	83
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	20	101	37	4	37	15	40	51	52	13	85
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	62	58	38	36	40	71	55	74	23	27	44

Таблиця Б.7 – Місячна сума опадів **(ст. Чернігів, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	56	23	32	39	38	24	32	-	35	54	14
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	24	54	20	30	12	45	37	28	52	22	30
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	34	35	42	39	26	31	18	34	102	64	63
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	34	74	53	17	23	12	40	38	42	11	52
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	61	26	19	47	41	66	60	71	15	21	46

Таблиця Б.8 – Місячна сума опадів **(ст. Одеса, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	41	36	10	44	19	-	-	32	10	15	7
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	9	18	11	5	22	18	50	54	21	32	44
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	43	59	40	44	28	64	1	11	13	73	110
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади.мм	34	58	34	17	26	24	25	33	24	18	65
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	48	55	16	11	42	48	68	61	69	4	3

Таблиця Б.9 – Місячна сума опадів **(ст. Вознесенськ, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	18	12	11	26	12	15	12	36	29	3	17
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	23	6	9	23	16	48	32	26	16	21	29
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	46	6	5	51	9	53	4	9	126	57	105
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	47	44	42	34	19	19	15	46	36	24	85
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	43	44	18	17	30	51	36	49	11	5	8

Таблиця Б.10 – Місячна сума опадів **(ст. Миколаїв, січень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	29	27	20	36	8	29	-	-	-	44	3
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	20	25	8	11	23	22	53	40	17	18	25
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	42	64	55	47	15	57	2	7	4	77	100
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	26	40	28	18	21	14	7	42	27	16	85
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	32	46	20	12	39	40	61	45	17	3	15

Таблиця Б.11 – Місячна сума опадів **(ст. Рівне, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	18	57	42	78	66	163	28	93	73	122	83
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	28	112	72	67	47	76	81	50	22	106	65
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	74	91	98	45	129	100	44	124	69	56	13
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	94	120	112	33	114	122	42	20	73	94	46
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	107	93	90	50	89	54	110	32	89	33	114

Таблиця Б.12 – Місячна сума опадів **(ст. Кіровоград, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	6	17	100	11	93	-	38	93	69	87	64
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	48	89	162	57	28	57	40	154	105	41	26
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	93	18	35	70	78	28	38	120	55	1	61
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	93	84	57	76	79	95	69	52	68	93	40
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	57	56	135	66	82	151	87	57	90	7	33

Таблиця Б.13 – Місячна сума опадів **(ст. Комісарівка, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	42	46	90	12	43	54	43	39	13	85	39
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	46	131	97	39	23	85	19	61	37	56	53
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	45	11	44	4	14	49	91	78	11	12	33
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	54	22	73	95	128	112	37	82	77	53	59
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	50	64	51	45	68	114	48	52	56	24	22

Таблиця Б.14 – Місячна сума опадів **(ст. Старобельськ, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	41	35	27	29	87	56	16	43	64	40	65
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	38	21	84	105	62	41	19	31	12	54	33
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	63	23	34	33	17	6	83	45	72	14	30
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	77	24	73	126	57	77	96	49	103	34	92
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	53	53	50	47	55	52	23	45	50	68	-

Таблиця Б.15 – Місячна сума опадів **(ст. Лубни, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	34	31	99	87	106	98	34	-	67	64	35
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	42	190	152	45	49	47	41	41	23	46	23
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	95	38	37	83	25	18	86	91	24	124	
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	39	20	94	79	77	97	93	104	157	74	95
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	101	54	66	10	95	145	70	13	77	25	69

Таблиця Б.16 – Місячна сума опадів **(ст. Ромни, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	18	57	42	78	66	163	28	93	73	122	83
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	29	112	79	39	47	76	81	50	22	107	65
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	74	91	97	59	80	26	131	114	125	15	131
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	94	39	120	39	78	91	75	90	111	103	107
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	79	46	153	43	107	110	117	16	83	27	92

Таблиця Б.17 – Місячна сума опадів **(ст. Чернігів, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	24	47	59	62	11	71	49	124	133	38	42
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	119	121	109	68	35	57	35	46	22	73	77
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	105	20	43	23	111	41	16	95	78	34	102
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	169	46	123	21	35	165	30	65	46	126	84
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	155	62	77	43	125	122	62	16	106	44	46

Таблиця Б.18 – Місячна сума опадів **(ст. Одеса, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	10	26	23	7	5	-	29	94	15	60	21
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	62	15	60	18	37	9	2	46	30	47	125
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	97	6	53	57	21	25	34	143	107	25	61
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	24	42	23	9	76	56	73	73	78	46	35
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	49	30	39	74	7	61	66	32	142	10	44

Таблиця Б.19 – Місячна сума опадів **(ст. Вознесенськ, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	11	21	10	24	81	47	162	77	94	47	39
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	75 2	5	95	36	27	38	11	93	112	38	35
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	37	31	39	10	50	47	30	85	57	55	53
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	69	57	71	166	106	62	62	50	144	89	47
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	43	24	62	54	43	149	-	37	110	31	43

Таблиця Б.20 – Місячна сума опадів **(ст. Миколаїв, липень)**

Рік	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946
Опади,мм	21	16	25	12	67	-	-	-	79	55	36
Рік	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Опади,мм	81	26	71	18	27	28	55	60	73	53	37
Рік	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
Опади,мм	92	7	42	6	126	36	63	93	16	2	81
Рік	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Опади,мм	39	32	18	67	134	24	96	42	136	49	52
Рік	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
Опади,мм	59	76	118	84	63	87	54	26	49	14	41

Додаток В

Місячна сума опадів (1951-1990 рр.)

Таблиця В.1 – Місячна сума опадів **(січень)**

Рік	Станція							
	Люба-шівка	Бол-град	Ізмаїл	Затиш-шя	Розділь-на	Сарата	Вилкове	Кілія
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1951	24	12	18	18	23	18	23	22
52	16	12	18	14	16	10	24	20
53	40	47	33	40	38	41	46	27
54	27	27	19	40	30	25	47	17
55	36	26	36	32	32	23	33	39
56	24	24	48	15	18	24	43	33
57	12	19	29	16	14	17	35	24
58	21	34	24	13	16	22	59	22
59	36	23	33	32	40	38	69	54
1960	47	25	26	60	40	21	32	30
61	37	34	44	35	40	34	44	42
62	10	13	23	14	20	15	33	18
63	44	55	43	55	52	36	60	58
64	5	0	1	3	4	0	3	0
65	24	25	24	20	13	24	22	20
66	164	162	165	172	171	134	146	140
67	56	35	53	37	36	36	47	64
68	78	66	80	78	75	65	118	94
69	50	37	31	46	34	27	33	23
1970	46	20	17	44	43	28	15	17
71	44	22	24	44	22	18	34	25
72	37	12	21	22	16	18	20	19
73	9	25	32	8	15	19	34	27
74	19	9	8	14	17	16	22	16
75	27	27	19	27	26	16	19	20
1976	45	30	25	38	45	18	24	25
1977	26	22	23	34	25	24	33	35
78	33	8	6	16	13	14	4	6
79	97	55	50	66	62	68	49	58
1980	44	49	4	33	36	46	51	34
81	51	46	54	62	45	33	54	45
82	19	7	11	16	13	14	22	16
83	19	6	4	12	8	6	6	4
84	44	34	50	56	46	42	54	46
85	59	68	63	48	48	59	55	46

Продовження таблиці В.1

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
86	36	36	37	47	55	61	60	54
87	42	35	34	44	46	40	48	36
88	20	44	64	40	34	49	57	41
89	7	3	5	6	8	3	5	3
1990	4	5	8	12	13	7	7	6

Таблиця В.2 – Місячна сума опадів **(квітень)**

Рік	Станція							
	Люба-шівка	Бол-град	Ізмаїл	Затиш-шя	Розділь-на	Сара-та	Вил-кове	Кілія
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1951	21	27	22	23	12	15	24	14
52	10	4	7	9	3	1	1	0
53	51	27	32	50	29	67	43	48
54	28	28	24	26	14	12	24	23
55	76	54	61	81	52	48	73	57
56	37	30	22	36	65	34	25	28
57	34	37	49	33	28	16	36	42
58	70	101	137	48	65	91	95	93
59	32	6	1	30	32	9	7	3
1960	10	26	31	12	12	19	15	16
61	46	68	38	44	72	79	67	39
62	45	31	30	35	28	28	21	18
63	24	35	34	30	28	21	47	48
64	37	16	19	21	36	8	22	19
65	54	30	41	55	52	46	41	44
66	9	31	29	26	15	13	46	42
67	14	15	10	10	12	11	8	11
68	14	3	7	3	8	8	7	4
69	35	42	40	20	24	25	32	30
1970	33	26	23	32	13	16	14	10
71	14	4	8	19	3	2	10	4
72	17	28	33	17	23	10	29	27
73	8	15	32	7	6	23	45	38
74	20	31	55	22	24	28	41	43
75	28	54	64	17	24	30	56	59

Продовження таблиці В.2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1976	56	26	20	25	22	11	12	16
77	110	66	78	79	84	83	118	94
78	83	54	50	76	47	71	66	47
79	64	38	24	63	50	46	27	21
1980	51	59	54	47	76	56	46	49
81	38	34	12	24	20	22	12	15
82	64	40	43	45	48	51	42	35
84	68	75	67	86	120	73	70	62
85	54	23	39	52	32	20	17	18
86	18	8	11	12	8	4	6	8
1987	19	22	15	25	27	21	18	12

Таблиця В.3 – Місячна сума опадів **(липень)**

Рік	Станція							
	Люба-шівка	Бол-град	Ізмаїл	Затиш-шя	Роздільна	Сара-та	Вил-кове	Кілія
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1951	29	19	16	73	19	68	16	11
52	24	21	6	59	46	28	8	32
53	29	22	7	21	2	9	12	8
54	86	72	100	37	62	82	62	95
55	29	62	160	63	70	94	65	82
56	28	8	11	29	28	14	7	20
57	44	7	51	43	52	58	59	80
58	50	27	29	34	18	14	71	27
59	53	63	50	31	68	40	9	74
1960	12	10	80	16	43	25	22	73
61	58	46	18	81	24	31	50	33
62	156	28	36	69	74	16	3	15
63	46	76	31	41	23	40	41	42
64	112	53	28	23	56	38	48	29
65	105	66	123	71	40	95	84	73
66	42	22	95	31	25	94	87	-
67	1	57	28	13	53	29	36	16
68	114	42	59	123	97	52	38	42
69	73	80	140	44	136	55	38	37

Продовження таблиці В.3

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1970	103	57	30	70	71	46	28	7
71	98	54	54	11	76	65	38	49
72	51	22	37	85	58	17	53	33
73	50	72	53	18	76	198	102	100
74	128	73	119	30	111	46	37	46
75	23	112	63	1	46	77	70	68
76	87	71	15	104	46	100	64	15
77	164	68	50	69	98	62	59	69
78	244	20	12	31	101	66	26	44
79	47	34	31	61	57	42	59	30
1980	60	69	50	18	66	23	24	64
81	48	92	38	44	68	73	78	24
82	71	32	36	42	78	46	33	32
83	100	37	63	52	122	85	37	19
84	60	36	46	38	23	73	41	33
85	89	21	63	35	76	38	36	32
86	58	46	71	50	70	41	46	-
87	34	86	34	84	93	133	30	20
88	122	43	36	69	89	43	53	46
89	46	34	33	68	48	46	7	9
1990	41	38	17	37	35	26	12	16

Таблиця В.4 – Місячна сума опадів **(жовтень)**

Рік	Станція							
	Люба-шівка	Бол-град	Ізмаїл	Затиш-шя	Розділь-на	Са-рата	Вил-кове	Кілія
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1951	12	1	1	12	4	0	11	4
52	36	54	120	34	79	102	98	74
53	2	14	3	12	9	7	8	1
54	27	14	36	24	16	15	22	26
55	18	6	24	21	8	8	53	23
56	11	8	9	14	12	10	24	12
57	10	33	34	17	12	16	28	19
58	54	32	42	51	47	46	38	46
59	1	1	1	2	1	1	2	1

Продовження таблиці В.4

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1960	59	21	38	43	46	31	26	35
1961	10	36	41	28	17	56	38	37
62	2	6	10	2	32	11	5	9
63	2	6	3	3	2	22	14	11
64	41	62	46	38	33	22	18	28
1965	4	2	2	4	6	11	13	2
66	67	29	12	36	26	16	11	-
67	31	20	36	26	30	25	44	40
68	27	19	10	20	65	3	19	4
69	6	5	3	3	6	2	4	5
1970	24	11	19	13	12	8	29	14
71	6	18	11	6	7	6	14	10
72	61	106	86	48	40	50	62	72
73	28	15	9	31	21	17	12	12
74	16	27	14	20	20	14	15	18
75	22	36	38	19	15	15	25	21
76	6	33	44	20	23	21	22	41
77	13	8	4	16	11	2	4	3
78	14	26	13	14	35	24	15	13
79	44	18	20	28	24	19	17	18
1980	51	46	36	44	51	70	50	35
81	93	38	36	84	77	52	49	58
82	32	13	20	18	29	13	17	19
83	6	9	14	8	7	4	18	16
84	21	9	8	22	12	9	7	8
85	44	13	15	39	47	30	17	11
86	18	39	-	37	42	58	44	49
87	26	41	59	39	42	57	52	51
88	33	20	16	45	31	28	25	20
89	47	38	57	54	51	54	62	57
1990	36	33	18	44	24	15	8	15

Таблиця В.5 – Місячна сума опадів **(ст. Миколаїв)**

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1891	27	4	13	31	55	104	9	34	6	12	31	32	251	107
92	54	28	24	10	28	93	101	6	0	57	22	76	295	204
93	34	30	17	27	62	72	25	2	30	12	27	12	230	120
94	1	6	63	22	97	54	20	20	62	42	0	20	317	90
95	73	80	14	12	34	40	3	13	10	16	33	28	128	228
96	11	9	15	28	40	12	14	23	8	1	18	20	126	73
97	22	27	23	27	68	82	64	24	4	61	5	0	320	77
98	15	65	20	44	60	41	37	4	27	36	5	11	249	116
99	5	25	26	5	12	44	51	135	52	9	4	9	308	69
1900	32	14	39	47	9	64	43	19	3	60	2	27	245	114
01	8	66	13	52	17	109	48	83	19	42	1	42	370	130
02	5	23	32	18	86	88	48	25	16	43	1	36	324	97
03	7	4	22	26	39	112	25	13	0	8	48	28	223	109
04	10	26	27	25	42	20	13	12	28	17	35	11	157	109
05	23	2	30	44	11	117	45	21	23	86	32	11	347	98
06	45	27	50	17	66	39	137	23	21	18	17	64	321	203
07	9	9	45	29	6	154	8	14	16	6	48	36	233	146
08	26	53	12	28	10	74	53	40	60	7	33	7	281	131
09	33	45	47	8	22	162	6	10	20	8	55	12	236	192
1910	56	12	8	33	20	91	102	31	1	89	35	4	367	115

Продовження таблиці В.5

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1911	16	13	58	15	20	46	27	80	51	3	13	8	242	108
12	32	18	18	25	41	47	51	50	64	53	19	33	331	120
13	39	7	4	17	31	27	87	32	18	8	45	27	220	122
14	37	5	37	18	23	18	139	45	122	55	24	38	420	141
15	63	19	24	15	38	16	31	23	7	59	59	21	189	186
16	19	24	22	36	37	69	49	7	24	36	24	25	258	114
17	32	24	24	47	4	138	88	53	50	46	41	38	136	426
18	-	-	-	39	50	81	53	53	36	43	-	-	-	355
19	-	-	-	42	55	90	59	59	39	47	-	-	-	391
1920	-	-	-	34	43	72	46	46	31	37	-	-	-	309
21	-	-	-	25	33	54	35	35	23	28	-	-	-	233
22	-	-	-	39	49	81	52	52	35	42	-	-	-	350
23	74	29	12	18	16	-	13	8	30	10	11	38	-	164
24	16	11	23	82	12	32	44	53	4	18	22	2	245	74
25	7	16	11	16	153	72	50	58	36	3	47	38	468	119
26	26	12	37	44	61	108	35	50	7	23	2	60	328	137
27	18	11	8	39	40	20	62	44	23	12	21	41	240	99
28	6	9	1	19	17	21	12	47	16	42	27	75	174	118
29	20	2	8	62	29	19	23	11	63	47	16	19	254	65
1930	13	17	12	52	117	102	27	78	24	27	53	73	427	168
31	47	2	43	44	19	67	13	90	88	23	29	20	344	141
32	25	19	24	57	83	87	53	10	14	47	31	37	351	136

Продовження таблиці В.5

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1933	15	32	23	40	50	129	77	43	53	70	27	22	462	119
34	23	8	6	1	13	42	58	32	29	7	49	3	182	89
35	18	22	13	51	13	48	26	64	16	42	24	78	260	155
36	29	14	7	50	3	31	21	58	26	15	41	52	202	143
37	27	51	17	14	8	32	16	60	6	62	44	41	197	180
38	20	11	9	33	31	42	25	47	15	85	15	20	277	75
39	36	4	57	3	20	19	12	47	41	120	8	40	261	145
1940	8	44	41	31	34	34	67	53	26	77	20	23	321	134
41	29	68	14	18	43	85	-	-	-	-	-	-	-	-
42	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
44	-	-	-	48	43	47	79	12	0	3	110	13	232	-
45	44	11	20	40	22	23	55	48	2	37	13	15	227	103
46	3	25	19	15	56	152	36	23	2	62	31	36	346	114
47	20	24	34	15	2	76	81	94	1	26	64	84	294	226
48	25	19	14	0	23	139	26	13	10	26	9	4	237	71
49	8	11	29	16	15	85	71	16	51	0	22	42	254	112
1950	11	10	28	36	27	42	18	61	21	49	33	27	254	109
51	23	23	81	41	42	19	27	170	24	2	45	6	325	178
52	22	57	47	4	133	65	28	37	20	70	127	26	359	278
53	53	44	2	39	59	67	55	31	22	3	11	9	276	119
54	40	10	7	14	62	212	60	2	7	19	104	36	376	197
55	17	52	18	44	39	204	73	157	13	5	49	24	535	160

Продовження таблиці В.5

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1956	18	21	36	41	19	82	53	27	69	16	12	12	307	99
57	25	15	18	9	37	1	37	6	38	16	48	34	144	140
58	42	31	21	87	8	66	92	68	38	43	8	20	374	122
59	64	6	12	51	18	34	7	53	85	12	46	17	261	155
1960	55	32	4	3	59	36	42	84	21	74	27	58	319	176
61	47	16	19	47	91	20	10	5	25	27	34	25	233	141
62	15	42	38	12	38	61	5	18	61	19	43	69	213	207
63	57	65	25	17	63	78	18	43	13	1	6	87	232	240
64	2	34	11	17	43	33	32	89	15	5	23	28	234	98
65	7	35	16	61	30	13	171	175	4	16	92	41	469	191
66	4	37	23	13	28	24	16	24	22	17	43	112	144	218
67	77	44	27	6	63	76	2	32	10	12	30	64	201	242
68	100	29	21	2	6	15	81	29	75	13	22	32	220	204
69	26	82	34	38	28	84	39	22	52	6	20	64	268	225
1970	40	42	52	14	95	63	2	29	7	49	44	32	295	210
71	28	26	42	12	40	88	83	36	91	5	26	32	357	154
72	18	0	3	53	16	106	67	23	68	33	39	2	325	63
73	21	37	43	35	59	37	134	44	8	13	36	29	347	166
74	14	30	26	21	61	74	24	37	39	28	33	52	382	156
75	7	6	13	24	62	41	96	7	38	3	61	13	278	100
76	42	3	30	104	20	91	42	179	46	4	14	39	406	128
77	27	42	8	41	26	82	136	82	10	12	30	77	451	184
78	16	71	57	45	68	44	49	30	56	23	14	31	311	189

Продовження таблиці В.5

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1979	85	34	42	54	65	10	52	17	9	42	55	17	239	232
1980	32	11	89	52	32	75	59	17	56	30	70	42	324	244
81	46	43	40	36	68	11	76	26	21	35	110	73	290	312
82	20	25	14	9	24	44	118	27	12	27	8	15	288	82
1983	12	42	15	59	59	29	83	35	6	16	6	29	237	102
84	3	42	63	35	4	65	63	26	29	29	73	11	275	227
85	40	70	8	17	55	121	87	6	50	22	53	19	376	190
86	61	49	4	43	9	64	54	13	-	58	4	44	225	-
87	59	10	21	35	31	27	26	55	86	9	43	29	286	94
88	17	28	75	-	49	28	126	-	22	46	-	-	181	380
89	3	19	20	33	10	66	14	11	141	28	6	5	103	288
1990	15	25	5	24	50	41	40	52	31	13	85	271	117	271
91	28	17	2	19	90	48	25	45	10	36	4	26	159	273
92	28	13	17	5	37	53	5	18	16	45	37	8	241	179
93	5	29	37	43	69	61	40	30	47	6	30	35	94	296
94	10	3	16	26	16	36	3	62	2	40	26	20	64	185
95	44	21	30	64	40	39	36	25	53	19	44	38	179	276
96	27	37	28	27	23	4	8	18	106	2	33	41	164	188
97	7	19	38	42	59	89	83	141	10	46	40	62	112	470
98	21	11	40	38	47	37	47	31	25	61	56	13	144	286
99	38	35	19	28	36	57	49	6	14	23	42	59	160	213
2000	33	16	8	46	5	26	55	29	107	3	18	12	68	271

Таблиця В.6 – Місячна сума опадів **(Одеса, обсерваторія)**

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1867	43	13	19	20	7	27	27	11	11	13	23	54	116	152
68	5	2	64	38	25	9	34	20	30	11	8	8	167	87
69	17	2	43	40	12	154	11	36	16	1	63	12	270	137
70	19	68	72	12	13	75	14	104	43	44	3	93	305	255
71	14	23	31	22	45	69	18	29	4	39	60	33	226	161
72	3	16	24	8	18	68	40	27	9	12	6	7	182	56
73	14	16	1	26	40	25	15	13	47	21	20	3	187	54
74	0	25	34	22	68	77	33	34	1	24	90	42	259	191
75	36	30	10	40	26	40	129	29	106	66	94	19	436	189
76	29	36	23	1	42	84	75	5	48	9	73	65	264	226
77	7	21	51	68	50	1	131	1	42	74	39	82	367	200
78	32	3	67	79	54	29	62	65	14	8	31	135	311	268
79	95	48	21	33	78	71	23	40	20	38	95	22	303	281
80	32	4	4	6	47	20	103	61	96	51	35	3	378	84
81	45	13	36	102	122	80	90	2	29	27	2	14	452	110
82	3	6	7	2	18	59	38	31	8	104	91	82	260	189
83	14	22	27	29	38	53	24	5	22	15	3	36	186	102
84	3	9	11	62	0	124	18	13	81	56	77	31	354	131
85	8	17	12	3	29	12	90	44	50	55	35	48	283	120
86	58	7	50	1	31	167	47	58	12	29	7	17	345	139
87	14	23	44	21	17	52	30	6	91	42	45	95	259	221
88	35	32	24	24	10	62	62	86	17	80	2	25	341	118
1889	62	50	64	31	18	52	20	79	71	8	37	36	279	249

Продовження таблиці В.6

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1890	11	3	45	13	67	76	57	4	30	31	60	18	378	137
91	37	13	9	34	11	45	53	33	25	9	33	24	210	111
92	30	24	32	2	20	28	58	28	0	53	35	53	187	174
93	27	16	12	29	54	46	43	51	26	12	32	17	263	104
94	1	8	42	15	65	48	6	20	20	66	1	26	240	70
95	80	50	13	13	24	16	5	24	4	16	24	35	102	202
96	5	7	11	22	36	39	27	25	12	6	32	23	167	78
97	22	26	18	17	46	113	43	0	2	95	18	2	316	86
98	10	29	17	36	49	94	34	4	22	20	4	9	259	69
99	8	9	24	3	3	12	43	33	20	26	8	18	140	67
1900	31	32	54	36	15	84	36	18	17	40	9	36	246	162
01	6	63	30	53	13	77	26	19	29	24	0	33	241	132
02	3	26	30	35	58	27	33	22	10	33	0	48	218	105
03	7	3	24	37	35	69	29	14	0	5	43	41	189	110
04	5	-	-	-	-	-	11	32	14	8	33	8	-	-
05	14	7	10	35	9	36	25	6	25	40	28	6	176	65
06	45	22	26	27	22	41	78	51	9	9	13	59	237	165
07	10	13	15	23	7	33	21	7	29	1	30	24	121	92
08	20	23	9	27	11	59	91	45	73	4	20	11	310	83
09	20	12	58	9	19	96	7	15	40	61	39	15	247	144
10	45	31	4	31	22	50	62	46	3	73	22	4	287	106
11	24	7	17	22	37	35	7	53	26	6	13	37	186	98
12	31	18	35	33	32	57	72	55	87	87	27	20	423	133
1913	33	10	7	18	51	22	41	36	19	1	14	15	188	79

Продовження таблиці В.6

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1914	50	5	39	11	22	26	85	45	139	48	39	25	376	158
15	70	19	36	14	44	26	66	93	5	44	38	18	292	181
16	13	26	37	18	31	36	52	7	14	76	19	25	234	120
17	40	16	18	16	25	91	29	25	21	65	42	14	272	130
18	2	3	5	21	19	36	53	44	39	49	59	34	261	103
19	7	28	25	19	95	97	94	16	4	109	52	33	436	145
1920	36	1	13	19	9	62	6	30	34	2	2	11	162	63
21	3	2	0	24	15	20	24	17	22	8	57	0	133	62
22	65	3	13	23	38	10	14	14	80	53	60	25	232	166
23	29	40	18	15	42	40	12	7	3	4	7	54	432	148
24	10	32	21	52	12	6	18	29	37	19	20	2	173	85
25	10	12	29	13	37	37	12	24	46	37	47	33	206	131
26	7	11	18	34	39	113	59	34	8	20	5	46	307	87
27	17	3	10	22	71	31	47	53	6	26	27	40	256	97
28	7	9	6	29	24	68	12	40	4	41	37	54	218	113
29	38	1	3	53	25	35	20	1	42	84	30	13	260	85
1930	15	15	4	50	46	84	41	18	10	29	26	94	278	154
31	43	13	45	33	2	35	1	84	62	19	36	10	236	147
32	19	9	20	30	70	109	33	34	2	65	16	34	344	98
33	27	25	23	54	72	73	27	59	52	47	36	21	325	132
34	18	4	2	11	20	37	8	77	32	11	53	32	196	79
35	35	37	7	30	50	56	14	11	34	25	49	59	175	187
1936	41	31	6	40	1	28	10	9	11	28	44	38	126	160

Продовження таблиці В.6

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1937	36	42	23	21	5	21	26	33	13	49	27	46	168	174
38	10	14	5	31	12	29	23	89	40	46	32	17	271	78
39	44	5	28	10	24	3	7	45	64	194	4	45	345	126
1940	19	39	31	47	58	69	5	20	3	64	12	30	265	131
41	-	-	26	16	43	-	-	-	5	29	-	-	-	-
42	-	-	-	-	-	46	29	8	30	24	67	9	-	-
43	32	14	9	28	103	32	94	5	6	29	42	54	297	151
44	10	47	31	51	45	5	15	7	0	7	99	23	130	210
45	15	7	15	58	25	25	60	35	4	21	15	27	229	79
46	7	17	23	9	7	9	21	57	0	76	20	44	180	111
47	9	15	30	7	1	51	62	94	2	21	44	74	239	172
48	18	6	8	1	41	110	15	6	13	21	4	0	211	36
49	11	5	31	17	3	58	60	139	29	1	22	55	307	124
1950	5	8	28	30	29	11	18	27	7	57	24	26	178	91
51	22	22	26	13	20	21	37	23	58	4	37	4	176	111
52	10	72	44	0	58	111	9	8	11	89	150	20	287	296
53	50	70	1	17	72	53	2	13	15	7	9	4	378	134
54	54	18	3	14	54	51	46	1	38	14	110	32	220	217
55	21	42	16	57	29	80	30	42	33	7	34	29	278	142
56	32	46	21	42	50	70	47	36	61	13	5	37	319	141
57	44	8	10	15	24	2	125	8	57	10	49	34	239	145
58	43	40	43	54	4	78	97	16	97	38	24	11	383	161
1959	59	6	10	30	30	5	6	50	52	3	75	39	176	189

Продовження таблиці В.6

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1960	40	21	6	7	70	46	52	23	50	45	87	71	293	225
61	44	23	20	52	82	11	57	12	10	33	29	63	255	179
62	28	48	47	11	65	26	21	13	42	8	68	53	185	244
63	64	102	34	24	10	34	25	13	14	5	4	99	126	303
64	1	27	16	10	56	34	18	40	43	14	8	19	144	142
65	11	32	23	55	13	15	143	23	16	14	89	57	279	212
66	139	24	21	16	43	30	15	107	42	25	35	112	278	331
67	73	88	33	9	29	20	25	30	12	16	19	72	140	285
68	111	37	23	8	7	31	61	70	77	21	42	60	274	273
69	26	135	44	38	59	66	24	4	53	5	15	96	249	316
1970	58	48	43	23	134	46	42	140	2	23	36	36	410	221
71	34	56	37	14	42	48	23	7	166	7	41	46	309	214
72	17	5	4	23	30	35	9	86	63	35	38	3	238	110
73	26	58	57	40	52	20	76	12	6	13	44	37	217	222
74	24	11	36	33	63	29	56	10	24	24	89	29	237	189
75	25	5	17	29	16	33	73	5	7	8	91	10	169	148
76	33	11	32	19	51	45	74	90	64	14	24	61	346	172
77	24	52	8	138	19	38	78	51	13	4	31	72	342	187
78	18	58	56	44	62	46	46	25	27	29	12	49	279	193
79	66	23	31	44	46	37	35	31	12	38	111	13	230	244
80	48	4	85	75	40	78	49	18	34	42	80	63	336	280
1981	55	40	38	27	46	11	30	37	36	54	115	72	241	320

Продовження таблиці В.6

Рік	Місяць													
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Т.П**	**Х.П**
1982	16	32	20	38	9	54	39	25	1	70	6	19	244	84
83	11	26	7	20	24	37	74	16	1	3	7	20	175	71
84	42	68	48	63	5	128	7	29	11	20	50	1	261	223
85	48	66	44	27	34	63	61	7	26	41	46	45	258	189
86	68	55	3	15	5	60	66	18	2	60	8	46	226	180
87	61	13	15	23	32	16	32	47	5	29	58	18	184	165
88	69	15	91	40	46	32	142	14	56	64	29	67	391	271
89	4	10	12	14	13	65	10	4	140	27	7	4	273	37
1990	9	20	1	28	48	52	44	26	65	32	6	73	295	109
91	7	24	1	31	80	61	16	51	18	27	2	26	175	284
92	8	23	27	14	34	58	54	20	11	44	44	13	245	235
93	5	33	64	37	35	54	42	4	30	3	27	23	127	205
94	10	2	10	8	18	65	19	113	0	47	28	28	49	270
95	51	20	63	51	29	42	4	25	80	4	56	35	199	235
96	27	74	26	23	23	15	6	20	108	7	36	47	188	202
97	15	18	50	53	31	99	124	111	2	48	60	63	137	468
98	22	17	40	14	34	38	88	38	31	64	83	18	155	307
99	28	47	19	35	37	57	5	23	10	15	53	67	188	182
2000	61	40	12	21	28	58	39	41	108	5	61	6	124	300

Додаток Г

Повторюваність(%) за місяць швидкості вітру (V, м/с) по градаціях

V, м/с	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	ст. Івано-Франківськ (Г.1)											
0- 1	43.3	40.3	32.0	37.4	39.1	41.0	47.5	50.6	44.0	50.5	46.7	43.9
2- 3	24.4	20.9	24.1	26.7	29.6	28.6	27.5	24.7	22.8	20.8	20.0	20.6
4- 5	13.8	13.1	17.3	16.7	16.0	15.4	12.5	12.2	15.7	13.8	13.7	11.3
6- 7	7.3	9.1	10.6	9.2	7.7	7.8	6.5	7.2	7.7	6.5	9.2	7.7
8- 9	4.4	5.2	5.7	3.7	3.8	3.8	3.0	2.9	5.4	3.4	5.5	5.6
10-11	2.0	3.4	2.5	2.7	2.0	1.0	1.4	1.0	1.7	1.7	2.2	1.9
12-13	1.3	2.4	3.4	2.2	1.0	1.4	0.7	0.7	1.1	1.6	1.7	1.7
14-15	1.2	1.8	1.3	0.3	0.4	0.1	0.4	0.2	0.9	0.6	0.5	0.6
16-17	1.2	2.1	2.1	0.7	0.4	0.9	0.4	0.4	0.5	1.0	0.5	1.0
18-20	0.4	0.5	0.9	0.4	0.1		0.1	0.1		0.1		
	ст. Дніпропетровськ (Г.2)											
2- 3	26.2	25.4	23.2	24.4	24.3	29.6	27.7	28.9	26.6	26.4	25.1	25.8
4- 5	22.2	22.7	22.6	20.3	24.6	21.4	24.2	20.9	21.4	22.7	22.2	21.8
6- 7	12.5	13.5	15.1	14.9	14.1	10.7	10.5	9.2	10.2	12.2	16.0	13.0
8- 9	11.5	11.5	9.4	8.8	8.5	5.9	5.8	4.3	4.9	6.4	10.0	10.4
10-11	4.5	4.1	4.2	2.3	2.9	1.9	1.3	0.9	1.1	2.6	2.6	3.7
12-13	2.5	2.2	3.1	2.1	1.5	1.1	0.4	0.7	1.0	1.2	1.5	2.0
14-15	1.0	1.3	1.5	0.9	0.4	0.2	0.1	0.5	0.1	0.2	0.6	1.0
16-17	1.2	1.2	1.2	0.2	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.4	0.8	0.3
18-20		0.4	0.2	0.5	0.1					0.1	0.1	0.2

Продовження додатку Г

V, м/с	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	ст. Харків (Г.3)											
0- 1	14.6	11.6	12.6	15.5	19.4	24.9	24.7	25.0	24.4	19.7	12.2	13.6
2- 3	24.0	21.9	25.2	24.5	24.7	28.4	28.6	30.2	31.4	28.1	28.1	26.7
4- 5	27.6	25.7	24.6	28.1	26.2	26.6	26.7	25.9	23.3	27.6	28.9	29.9
6- 7	21.3	22.5	24.3	23.0	21.4	15.3	15.3	15.6	15.9	18.7	23.6	21.0
8- 9	10.5	14.4	12.2	7.7	7.8	4.5	4.5	3.3	4.8	4.5	6.8	7.8
10-11	0.9	1.8	0.8	0.7	0.2	0.2	0.1	0.0	0.2	0.3	0.3	0.6
12-13	0.8	1.1	0.3	0.5	0.2	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.1	0.3
14-15	0.2	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1
16-17	0.1	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0
	ст. Вилкове (Г.4)											
0- 1	31.8	29.2	26.6	28.0	28.1	32.3	35.2	38.5	39.3	39.4	34.7	36.8
2- 3	21.2	20.2	19.6	22.2	20.7	21.5	24.1	22.3	21.7	21.3	21.8	20.6
4- 5	15.6	17.6	15.8	17.8	19.3	20.5	20.5	18.5	17.7	15.6	17.0	14.5
6- 7	11.4	12.8	12.2	12.4	13.3	12.2	10.5	10.0	10.2	9.0	9.8	9.1
8- 9	8.1	8.3	9.9	8.3	8.2	6.5	5.5	5.6	5.6	7.0	6.2	8.3
10-11	2.7	2.6	3.7	2.8	3.7	2.7	1.4	1.2	1.9	2.2	2.4	2.8
12-13	5.3	5.4	6.3	4.6	4.5	2.7	2.0	2.5	2.5	3.7	4.8	4.8
14-15	1.6	1.2	1.8	1.2	0.7	0.9	0.3	0.6	0.5	0.8	1.1	1.3
16-17	1.5	2.3	3.0	1.5	0.6	0.3	0.3	0.4	0.5	0.8	1.4	1.3
18-20	0.8	1.2	1.1	0.6	0.3	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2	0.8	0.5

Продовження додатку Г

V, м/с	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	ст. Чернівці (Г.5)											
0- 1	20.5	16.8	18.2	18.9	21.3	22.3	22.7	26.4	28.1	24.7	20.3	22.1
2- 3	30.9	30.2	31.2	30.6	33.4	35.7	37.2	35.7	33.9	34.5	31.4	33.5
4- 5	19.5	24.5	24.3	24.1	24.5	22.9	23.1	22.9	20.5	21.8	21.9	22.2
6- 7	14.6	16.0	16.3	15.5	12.9	12.5	11.0	11.1	10.9	10.5	13.4	11.3
8- 9	8.7	7.6	6.9	7.9	5.5	5.1	4.5	2.8	4.7	5.3	6.1	6.1
10-11	3.0	2.4	1.8	1.9	1.7	0.9	1.0	0.8	1.1	1.6	1.6	2.0
12-13	1.7	1.4	0.9	1.0	0.4	0.4	0.3	0.3	0.4	0.7	1.1	1.5
14-15	0.8	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.0	0.2	0.6	0.9	0.9
16-17	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.2	0.2	0.2	0.3
18-21	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1
	ст. Одеса (Г.6)											
0- 1	7.5	8.4	9.0	11.1	9.9	11.0	9.2	8.4	8.4	8.5	7.5	7.1
2- 3	30.4	34.7	35.0	40.9	43.1	49.6	50.3	49.2	49.3	44.9	36.3	34.4
4- 5	27.5	28.2	28.2	29.6	31.0	26.9	29.0	27.8	27.0	26.6	28.3	31.3
6- 7	17.4	13.7	15.3	13.4	11.3	9.0	9.4	11.4	9.7	11.1	14.9	15.7
8- 9	8.7	8.1	7.5	3.9	4.0	2.3	1.6	2.6	3.4	4.9	6.6	7.4
10-11	5.2	4.0	3.1	0.7	0.6	1.0	0.4	0.5	1.6	2.4	4.3	2.4
12-13	2.0	1.6	1.3	0.3	0.1	0.2	0.0	0.2	0.5	1.2	1.5	1.2
14-15	0.9	1.1	0.4	0.1	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.3	0.5	0.5
16-17	0.3	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0

Продовження додатку Г

V, м/с	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	ст. Ізмаїл (Г.7)											
0- 1	26.6	26.0	21.8	21.6	23.9	27.0	32.6	37.2	36.4	37.4	34.0	30.7
2- 3	23.5	22.6	25.1	24.0	24.4	26.3	25.7	26.0	26.9	26.3	26.4	27.5
4- 5	19.9	20.6	22.7	21.4	23.5	22.9	22.5	19.7	19.9	17.5	19.4	21.0
6- 7	11.5	11.7	14.4	13.8	13.3	12.4	10.3	9.6	9.3	9.6	449	10.0
8- 9	12.0	11.4	11.8	14.2	11.3	8.6	6.5	5.8	5.8	6.3	6.8	6.6
10-11	2.6	4.1	2.3	3.2	2.7	2.1	1.1	1.6	1.3	2.4	2.6	2.6
12-13	1.9	1.7	1.3	1.1	0.6	0.4	0.9	0.3	0.2	0.3	1.0	0.9
14-15	0.9	0.9	0.5	0.5	0.2	0.2	0.3	0.0	0.1	0.1	0.3	0.4
16-17	0.8	1.0	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.1	0.1	0.1	0.2
18-21	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0 0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1
	ст. Асканія-Нова (Г.8)											
0- 1	8.1	6.6	8.3	10.4	13.4	15.5	16.4	17.2	17.1	18.8	11.1	9.6
2- 3	28.1	22.7	25.8	30.7	33.2	38.0	38.5	35.7	35.5	32.7	29.5	30.5
4- 5	27.9	26.2	27.0	29.1	27.9	25.4	26.0	26.1	26.1	24.0	28.7	2123
6- 7	14.1	16.5	15.4	14.4	11.3	10.1	10.4	10.7	9.9	11.9	13.9	15.2
8- 9	13.6	15.6	14.2	10.3	10.6	8.6	5.7	8.6	8.7	9.1	11.4	11.2
10-11	4.3	5.2	5.1	3.1	2.6	1.8	1.3	1.0	1.8	2.3	3.7	2.9
12-13	2.1	3.0	2.4	1.5	0.7	0.4	0.5	0.4	0.5	0.9	1.3	1.0
14-15	0.9	2.3	1.3	0.4	0.2	0.2	0.3	0.2	0.3	0.2	0.3	0.3
16-17	0.7	1.9	0.5	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

Продовження додатку Г

V, м/с	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	ст. Генічеськ (Г.9)											
0- 1	13.7	12.2	13.1	15.0	16.0	18.3	19.0	19.7	18.1	19.5	16.2	15.5
2- 3	30.2	28.2	30.5	33.8	34.4	36.0	39.2	40.4	39.3	37.8	33.9	34.1
4- 5	23.7	25.8	26.8	28.1	27.4	26.2	26.4	27.2	24.4	21.7	24.2	25.1
6- 7	14.7	13.1	13.1	12.5	12.2	10.6	9.3	8.3	10.3	10.4	12.1	13.4
8- 9	10.6	13.2	11.5	8.5	6.9	5.8	4.7	3.4	7.1	7.3	10.0	8.2
10-11	2.9	2.3	1.8	1.0	1.5	1.2	0.8	0.6	0.6	1.5	2.3	2.6
12-13	1.5	1.3	0.9	0.2	0.7	0.4	0.2	0.3	0.1	0.6	0.5	0.7
14-15	1.9	2.7	1.7	0.6	0.5	0.3	0.2	0.1	0.1	0.9	0.5	0.4
16-17	0.7	1.2	0.6	0.1	0.2	0.2	0.2	0.0	0.0	0.2	0.2	0.0
18-21	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0 0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0
	ст. Карадаг (Г.10)											
0- 1	13.2	14.2	13.5	23.3	24.9	23.8	20.6	12.2	7.7	12.0	15.0	17.2
2- 3	20.2	21.9	21.6	24.0	23.5	27.3	26.5	28.4	28.2	28.1	25.8	25.7
4- 5	22.5	21.6	22.6	19.5	23.8	23.6	27.3	29.1	29.3	27.5	21.5	18.4
6- 7	17.9	16.5	17.0	16.2	14.1	15.0	15.1	18.5	21.0	17.6	17.0	15.4
8- 9	13.5	11.8	11.3	9.1	5.0	7.1	8.0	8.7	9.6	9.0	11.5	10.0
10-11	4.0	4.6	4.5	2.3	1.5	1.5	1.4	1.5	2.4	2.8	3.2	3.7
12-13	5.6	5.1	5.0	3.2	1.1	1.1	0.7	0.9	1.2	2.0	3.1	6.0
14-15	1.4	1.7	2.3	0.5	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4	1.1	1.6
16-17	1.5	1.8	1.6	0.9	0.1	0.3	0.2	0.4	0.1	0.4	0.8	1.6

Додаток Д

Кількість днів з опадами (1945 – 1985 рр.)

Таблиця Д.1 – Кількість днів з опадами **(ст. Одеса)**

Рік	Місяць									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	>5 мм				>10 мм					
1945	1	1	2	7	2	1	1	2	0	2
46	1	5	2	5	1	0	2	1	0	4
47	0	1	1	2	0	0	1	0	1	3
48	2	3	2	1	2	0	0	0	1	1
49	2	1	1	2	0	0	1	0	0	0
1950	1	2	0	1	0	1	0	0	0	2
51	1	3	2	1	0	3	1	1	0	0
52	3	4	4	1	3	2	2	2	2	1
53	3	5	2	0	1	1	2	1	0	0
54	5	0	0	3	1	0	1	2	1	0
55	3	7	0	2	1	1	0	1	0	1
56	6	1	1	7	2	3	3	1	4	3
57	1	3	4	2	2	1	2	2	2	4
58	6	5	4	7	1	3	4	1	0	1
59	5	1	2	3	0	2	0	1	1	1
1960	4	1	1	1	1	2	1	3	1	0
61	1	3	5	2	1	1	0	0	0	2
62	2	0	3	1	1	2	2	1	2	1
63	9	3	1	3	1	1	0	2	1	0
64	1	5	0	2	3	1	3	0	0	0
65	1	5	0	2	1	1	1	0	0	1
66	3	4	1	5	2	4	1	0	0	1
67	8	3	1	3	1	1	0	3	1	1
68	6	3	1	0	1	2	1	1	3	5
69	3	1	3	1	0	3	3	1	3	2
1970	7	6	2	0	4	2	2	1	0	1
71	1	2	6	0	2	3	1	0	1	1
72	0	0	1	4	0	0	2	3	2	1
73	2	5	3	4	2	4	2	3	0	0
74	0	0	1	4	2	2	5	2	1	2
75	3	1	3	4	2	0	2	0	2	0
76	7	0	2	2	2	3	3	1	3	0
77	0	4	3	7	1	2	5	3	1	0
78	4	2	0	8	4	2	1	2	1	0
1979	2	6	3	0	0	0	0	2	1	2

Продовження таблиці Д.1

Рік	Місяць									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	>5 мм				>10 мм					
1980	7	4	4	7	2	1	1	1	1	1
81	3	4	5	5	1	1	0	0	1	2
82	2	3	3	6	0	1	3	4	0	1
83	3	2	4	3	2	0	3	0	0	1
84	2	1	3	2	0	1	0	3	1	0
1985	7	5	1	1	0	0	1	0	4	0

Таблиця Д.2 – Кількість днів з опадами **(ст. Біла Церква)**

Рік	Місяць									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	>5 мм				>10 мм					
1945	0	0	0	1	2	0	2	0	0	0
46	1	0	0	0	3	1	1	0	1	1
47	0	1	2	1	1	2	4	7	3	3
48	0	3	1	0	3	7	3	1	0	0
49	0	0	0	2	1	5	7	2	0	0
1950	0	1	0	2	0	1	4	3	1	2
51	0	0	2	2	1	2	0	0	1	0
52	0	0	2	2	1	2	0	0	2	0
53	0	1	3	0	0	4	3	0	1	5
54	2	1	0	3	3	0	1	2	0	1
55	0	0	0	3	2	1	2	2	1	0
56	3	1	1	3	2	1	3	4	0	1
57	0	1	0	1	0	2	3	5	2	0
58	1	0	1	1	2	2	1	1	1	0
59	1	3	1	1	0	2	2	4	2	1
1960	1	0	1	1	1	2	1	2	0	0
61	1	1	0	1	2	1	0	3	0	0
62	0	1	2	3	0	0	5	1	0	0
63	0	3	0	1	0	3	3	2	0	0
64	0	1	3	3	0	1	7	3	0	2
65	0	2	0	4	0	1	3	3	1	0
66	0	3	6	3	3	1	3	2	0	1
67	4	2	1	3	0	3	0	3	0	1
68	3	2	0	2	0	0	1	1	4	2
1969	2	1	4	3	0	6	4	0	0	1

Продовження таблиці Д.2

Рік	Місяць									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	>5 мм				>10 мм					
1970	3	3	2	4	3	6	2	2	0	0
71	3	2	2	1	2	2	2	2	4	0
72	1	1	0	3	2	2	3	0	2	2
73	0	4	1	1	2	1	1	0	0	0
74	1	1	0	1	2	1	2	1	0	1
75	1	0	0	4	0	3	0	0	0	1
76	1	0	2	5	0	1	1	3	3	0
77	2	7	1	7	0	0	6	2	1	0
78	1	2	1	3	2	3	4	1	2	0
79	4	0	4	7	0	0	4	3	0	2
1980	2	0	5	1	0	2	5	3	0	0
81	2	1	3	1	2	3	3	1	1	2
82	1	1	1	10	0	2	4	2	0	0
83	1	1	3	2	2	2	4	4	1	0
84	2	3	2	1	4	1	6	0	2	1
85	5	1	0	5	3	5	3	0	0	1

Таблиця Д.3 – Кількість днів з опадами **(ст. Харків)**

Рік	Місяць									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	>5 мм				>10 мм					
1945	0	0	2	2	1	1	2	3	3	2
46	0	0	2	2	1	0	3	4	4	0
47	0	2	4	2	0	2	1	1	2	0
48	1	1	1	1	2	1	3	1	1	0
49	0	0	3	1	2	4	4	3	0	0
1950	0	0	0	0	1	2	4	3	2	1
51	0	0	3	2	3	0	3	6	0	0
52	2	2	1	1	0	0	5	2	1	5
53	1	1	0	0	2	0	3	4	3	2
54	0	0	2	1	2	1	2	0	4	3
55	1	0	1	4	1	1	1	1	0	0
56	2	0	0	3	2	1	0	4	1	1
57	1	3	1	0	0	5	3	2	1	0
58	0	1	3	1	1	4	1	2	2	3
59	2	1	1	1	1	3	1	2	2	0

Продовження таблиці Д.3

Рік	Місяць									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
	>5 мм				>10 мм					
1960	3	1	0	1	3	2	3	2	3	1
61	0	2	2	5	2	1	3	7	2	0
62	6	1	0	1	4	1	3	4	0	3
63	0	2	0	2	0	4	3	2	1	0
64	0	0	1	2	5	2	1	1	1	0
65	3	0	0	1	3	2	5	1	3	1
66	1	4	5	4	1	0	0	2	0	0
67	0	0	2	4	2	1	0	3	1	0
68	4	1	0	3	1	0	1	2	0	2
69	0	2	0	3	1	3	0	2	2	0
1970	5	5	4	6	0	3	1	0	1	4
71	2	1	2	3	1	1	3	5	4	6
72	0	0	3	3	2	2	1	2	2	1
73	1	6	1	4	0	0	3	5	2	3
74	1	1	2	3	3	5	5	1	0	4
75	0	3	0	3	1	2	1	2	2	1
76	1	1	0	2	3	2	2	2	0	3
77	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
78	1	0	1	2	0	3	2	1	2	3
79	5	1	2	0	0	3	6	1	4	0
1980	0	1	0	2	4	4	3	3	2	1
81	2	0	3	1	1	3	2	9	5	3
82	4	0	0	5	1	4	2	2	1	2
83	3	4	2	7	0	2	2	1	2	4
84	0	0	0	1	1	2	3	1	5	2
85	4	1	0	3	0	2	3	0	2	1

Додаток Е

Значення інтеграла ймовірності $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0.00	0.00000	0.30	0.23582	0.60	0.45149	0.90	0.63188
01	00798	31	24344	61	45814	91	63718
02	01596	32	25103	62	46474	92	64243
03	02393	33	25860	63	47131	93	64763
04	03191	34	26614	64	47783	94	65278
0.05	0.03988	0.35	0.27366	0.65	0.48431	0.95	0.65789
06	04784	36	28115	66	49075	96	66294
07	05581	37	28862	67	49714	97	66795
08	06376	38	29605	68	50350	98	67291
09	07171	39	30346	69	50981	99	67783
0.10	0.07966	0.40	0.31084	0.70	0.51607	1.00	0.68269
11	08759	41	31819	71	52230	01	68750
12	09552	42	32552	72	52848	02	69227
13	10348	43	33280	73	53461	03	69699
14	11134	44	34006	74	54070	04	70166
15	11924	45	34729	75	54675	1.05	70628
16	12712	46	35448	76	55275	06	71086
17	13499	47	36164	77	55870	07	71538
18	14285	48	36877	78	56461	08	71986
19	15069	49	37587	79	57047	09	72429
0.20	0.15852	0.50	0.38292	0.80	0.57629	1.10	0.72867
21	16633	51	38995	81	58206	11	73300
22	17413	52	39694	82	58778	12	73729
23	18191	53	40389	83	59346	13	74152
24	18967	54	41080	84	59909	14	74571
25	19741	55	41768	85	60468	15	74986
26	20514	56	42452	86	61021	16	75395
27	21284	57	43132	87	61570	17	75800
28	22052	58	43809	88	62114	18	76200
29	22818	59	44481	89	62653	19	76595

Продовження додатку Е

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
1.20	0.76986	1.55	0.87886	1.90	0.94257	2.25	0.97555
21	77372	56	88124	91	94387	26	97618
22	77754	57	88358	92	94514	27	97679
23	78130	58	88589	93	94639	28	97739
24	78502	59	88817	94	94762	29	97798
25	78870	1.60	0.89040	95	94882	2.30	0.97855
26	79233	61	89260	96	95000	31	97911
27	79592	62	89477	97	95116	32	97966
28	79945	63	89690	98	95230	33	98019
29	80295	64	89899	99	95341	34	98072
1.30	0.80640	65	90106	2.00	0.95450	35	98123
31	80980	66	90309	01	95557	36	98172
32	81316	67	90508	02	95662	37	98221
33	81648	68	90704	03	95764	38	98269
34	81975	69	90897	04	95865	39	98315
35	82298	1.70	0.91087	05	95964	2.40	0.98360
36	82617	71	91273	06	96060	41	98405
37	82931	72	91457	07	96155	42	98448
38	83241	73	91637	08	96247	43	98490
39	83547	74	91814	09	96338	44	98531
1.40	0.83849	75	91988	2.10	0.96427	45	98571
41	84146	76	92159	11	96514	46	98611
42	84439	77	92327	12	96599	47	98649
43	84728	78	92492	13	96683	48	98686
44	85013	79	92655	14	96765	49	98723
45	85294	1.80	0.92814	15	96844	2.50	0.98758
46	85571	81	92970	16	96923	51	98793
47	85844	82	93124	17	96999	52	98826
48	86113	83	93275	18	97074	53	98859
49	86378	84	93423	19	97148	54	98891
1.50	0.86639	1.85	0.93569	2.20	0.97219	2.55	0.98923
51	86696	86	93711	21	97289	56	98953
52	87149	87	93852	22	97358	57	98983
53	87398	88	93989	23	97425	58	99012
54	87644	89	94124	24	97491	59	99040

Продовження додатку Е

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
2.60	0.99068	2.95	0.99682	3.30	0.99903	3.65	0.99974
61	99095	96	99692	31	99907	66	99975
62	99121	97	99702	32	99910	67	99976
63	99146	98	99712	33	99913	68	99977
64	99171	99	99721	34	99916	69	99978
65	99195	3.00	0.99730	35	99919	3.70	0.99978
66	99219	01	99739	36	99922	71	99979
67	0.99241	02	99747	37	99925	72	99980
68	99263	03	99755	38	99928	73	99981
69	99285	04	99763	39	99930	74	99982
2.70	0.99307	05	99771	3.40	0.99933	75	99982
71	99327	06	99779	41	99935	76	99983
72	99347	07	99786	42	99937	77	99984
73	99367	08	99793	43	99940	78	99984
74	99386	09	99800	44	99942	79	99985
75	99404	3.10	0.99806	45	99944	3.80	0.99986
76	99422	11	99813	46	99946	81	99986
77	99439	12	99819	47	99948	82	99987
78	99456	13	99825	48	99950	83	99987
79	99473	14	99831	49	99952	84	99988
2.80	0.99489	15	99837	3.50	99953	85	99988
81	99505	16	99842	51	99955	86	99989
82	99520	17	99848	52	99957	87	99989
83	99535	18	99853	53	99958	88	99990
84	99549	19	99858	54	99960	89	99990
85	99563	3.20	0.99863	55	99961	3.90	0.99990
86	99576	21	99867	56	99963	91	99991
87	99590	22	99872	57	99964	92	99991
88	99602	23	99876	58	99966	93	99992
89	99615	24	99880	59	99967	94	99992
2.90	0.99627	25	99855	3.60	0.99968	95	99992
91	99639	26	99889	61	99969	96	99992
92	99650	27	99892	62	99971	97	99993
93	99661	28	99896	63	99972	98	99993
94	99672	29	99900	64	99973	99	99993

Додаток Ж

Значення функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3700	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315

Продовження додатку Ж

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0203	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Додаток К

Значення гамма – функції $\Gamma(x)$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1.00	1.00000	1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906
1.01	0.99433	1.26	0.90440	1.51	0.88659	1.76	0.92137
1.02	0.98884	1.27	0.90250	1.52	0.88704	1.77	0.92376
1.03	0.98355	1.28	0.90072	1.53	0.88757	1.78	0.92623
1.04	0.97844	1.29	0.89904	1.54	0.88818	1.79	0.92877
1.05	0.97350	1.30	0.89747	1.55	0.88887	1.80	0.93138
1.06	0.96874	1.31	0.89600	1.56	0.88964	1.81	0.93408
1.07	0.96415	1.32	0.89464	1.57	0.89049	1.82	0.93685
1.08	0.95973	1.33	0.89338	1.58	0.89142	1.83	0.93969
1.09	0.95546	1.34	0.89222	1.59	0.89243	1.84	0.92261
1.10	0.95135	1.35	0.89115	1.60	0.89352	1.85	0.94561
1.11	0.94740	1.36	0.89018	1.61	0.89468	1.86	0.94869
1.12	0.94359	1.37	0.89931	1.62	0.89592	1.87	0.95184
1.13	0.93993	1.38	0.88854	1.63	0.89724	1.88	0.95507
1.14	0.93642	1.39	0.88785	1.64	0.89864	1.89	0.95838
1.15	0.93304	1.40	0.88726	1.65	0.90012	1.90	0.96177
1.16	0.92980	1.41	0.88676	1.66	0.90167	1.91	0.96523
1.17	0.92670	1.42	0.88636	1.67	0.90330	1.92	0.96877
1.18	0.92373	1.43	0.88604	1.68	0.90500	1.93	0.97240
1.19	0.92089	1.44	0.88581	1.69	0.90678	1.94	0.97610
1.20	0.91817	1.45	0.88566	1.70	0.90864	1.95	0.97988
1.21	0.91558	1.46	0.88560	1.71	0.91057	1.96	0.98374
1.22	0.91311	1.47	0.88563	1.72	0.91258	1.97	0.98768
1.23	0.91075	1.48	0.88575	1.73	0.91467	1.98	0.99171
1.24	0.90852	1.49	0.88595	1.74	0.91683	1.99	0.99581
1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906	2.00	1.00000

Значення гамма-функції для $x < 1 (x \neq 0, -1, -2, ...,)$ та для $x > 2$ розраховуються за допомогою формул:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \; ; \qquad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \; .$$

Приклади. 1. $\Gamma(0.7) = \Gamma(1.7) / 0.7 = 0.90864 / 0.7 = 1.2981$;

2. $\Gamma(3.5) = 2.5 \; \Gamma(2.5) = 2.5 \cdot 1.5 \; \Gamma(1.5) =$

$= 2.5 \cdot 1.5 \cdot 0.88623 = 3.32336$.

Додаток Л

Значення функції Пуассона $P(X=i)=\dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i\ !}$

i	λ									
	0.1	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0253
5	-	-	-	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6	-	-	-	-	-	-	0001	0002	0003	0005
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0001

Продовження додатку Л

i	λ									
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1805
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0063	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0013	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8	-	-	0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9	-	-	-	-	-	-	0001	0001	0001	0002

Продовження додатку Л

i	λ									
	2.1	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	1108	1003	0903	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1964	2083	2090	2136	2176	2205	2225	2234	2240
4	0992	1087	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0941	1008
6	0146	0175	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0004	0055	0068	0083	0099	0118	0140	0163	0188	0216
8	0012	0015	0020	0025	0031	0039	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	018	0022	0027
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008

Продовження додатку Л

i	λ									
	3.5	**4.0**	**4.5**	**5.0**	**6.0**	**7.0**	**8.0**	**9.0**	**10.0**	**11.0**
0	0.0302	0183	0111	0067	0025	0009	0003	0001	-	-
1	1057	0733	0500	0333	0149	0064	0027	0011	0005	0002
2	1850	1465	1125	0842	0446	0223	0107	0050	0023	0010
3	2158	1954	1687	1404	0892	0521	0286	0150	0076	0037
4	1888	1954	1898	1755	1339	0912	0573	0338	0189	0102
5	1327	1563	1708	1755	1606	1277	0916	1277	0916	0224
6	0771	1042	1281	1462	1606	1490	1221	0911	0631	0411
7	0386	0595	0824	1044	1377	1490	1396	1171	0901	0646
8	0169	0298	0463	0653	1033	1304	1396	1318	1126	0888
9	0066	0132	0232	0363	0638	1014	1241	1318	1251	1058
10	0023	0053	0104	0181	0413	0710	0993	1186	1251	1194
11	0007	0019	0043	0082	0225	0452	0722	0970	1137	1194
12	0002	0006	0016	0034	0113	0264	0481	0728	0948	1094

Додаток М

Значення $\chi^2(\alpha,\nu)$ для різних чисел степенів вільності ν та рівня значущості α

ν \ α	0.995	0.990	0.975	0.95	0.90	0.80	0.70	0.30
1	0.0393	0.0157	0.0982	0.0393	0.0158	0.0642	0.148	1.07
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713	2.41
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42	3.67
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	2.19	4.88
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00	6.06
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	7.23
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	8.38
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	9.52
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	10.7
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	11.8
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	12.9
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	14.0
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	15.1
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	16.2
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	17.3
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	18.4
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	19.5
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	20.6
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	21.7
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	22.8
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	23.9
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	24.9
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	26.0
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	27.1
25	10.5	10.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	28.2
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	29.2
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	30.3

Продовження додатку М

α / ν	0.995	0.990	0.975	0.95	0.90	0.80	0.70	0.30
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	31.4
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	32.5
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	33.5
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2	38.9
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9	44.2
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6	49.5
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.1	44.3	54.7
75	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1	80.9
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1	106.9

Продовження додатку М

α / ν	0.20	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	19.3	22.3	25.0	27.6	30.9	32.8	37.7

Продовження додатку М

α / ν	0.20	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
16	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	23.9	27.0	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	26.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	27.3	30.8	33.9	36.0	40.3	42.8	48.3
23	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	29.6	33.0	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	31.8	35.6	38.9	41.0	45.6	48.3	54.1
27	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
75	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
100	111.7	118.5	124.3	129.6	135.6	140.2	149.4

Додаток П

Значення критерію Стьюдента для рівня значущості α і числа степенів вільності ν

ν	Двостороння критична область, α							
	0.2	**0.1**	**0.05**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.002**	**0.001**
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.03	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.20	2.68	3.05	3.43	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	3.85	4.22
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98	3.33	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	3.69	4.02
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.22	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.20	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.17	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.15	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.14	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.12	3.51	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.10	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.90	3.09	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.08	3.45	3.73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.44	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.06	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.05	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.04	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	2.91	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	2.85	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	2.81	3.09	3.29

Додаток Р

Значення критерію Фішера F
для рівня значущості 0.05
ν_1 – число степенів вільності для більшої дисперсії
ν_2 – число степенів вільності для меншої дисперсії

ν_2	ν_1							
	15	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
10	2.845	2.774	2.737	2.700	2.661	2.621	2.580	2.538
11	2.179	2.646	2.609	2.571	2.531	2.490	2.448	2.405
12	2.617	2.544	2.506	2.466	2.426	2.384	2.341	2.296
13	2.533	2.459	2.420	2.380	2.339	2.297	2.252	2.206
14	2.463	2.388	2.349	2.308	2.266	2.223	2.178	2.131
15	2.404	2.328	2.288	2.247	2.204	2.160	2.114	2.066
16	2.352	2.276	2.235	2.194	2.151	2.106	2.059	2.010
17	2.308	2.230	2.190	2.148	2.104	2.058	2.010	1.960
18	2.269	2.191	2.150	2.107	2.063	2.017	1.968	1.917
19	2.234	2.156	2.114	2.071	2.026	1.980	1.930	1.878
20	2.203	2.124	2.083	2.039	1.994	1.946	1.896	1.843
21	2.176	2.096	2.054	2.010	1.965	1.917	1.866	1.812
22	2.151	2.071	2.028	1.984	1.938	1.890	1.838	1.783
23	2.128	2.048	2.005	1.961	1.914	1.865	1.813	1.757
24	2.108	2.027	1.984	1.939	1.892	1.842	1.790	1.733
25	2.089	2.008	1.964	1.919	1.872	1.822	1.768	1.711
26	2.072	1.990	1.946	1.901	1.853	1.803	1.749	1.691
27	2.056	1.974	1.930	1.884	1.836	1.785	1.731	1.672
28	2.041	1.959	1.915	1.869	1.820	1.769	1.714	1.654
29	2.028	1.945	1.901	1.854	1.806	1.754	1.698	1.638
30	2.015	1.932	1.987	1.841	1.792	1.740	1.684	1.622
40	1.925	1.839	1.793	1.744	1.693	1.637	1.577	1.509
60	1.836	1.748	1.700	1.649	1.594	1.534	1.467	1.389
120	1.751	1.659	1.608	1.554	1.495	1.429	1.352	1.254
∞	1.666	1.571	1.517	1.459	1.394	1.318	1.221	1.000

Додаток С

Значення величини r для значень Z від 0.00 до 2.99

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090
0.1	0.100	0.110	0.119	0.129	0.139	0.149	0.159	0.168	0.178	0.188
0.2	0.197	0.207	0.217	0.226	0.236	0.245	0.254	0.264	0.273	0.282
0.3	0.291	0.300	0.310	0.319	0.328	0.336	0.345	0.354	0.363	0.371
0.4	0.380	0.389	0.397	0.405	0.414	0.422	0.430	0.438	0.446	0.454
0.5	0.462	0.470	0.478	0.485	0.493	0.501	0.508	0.515	0.523	0.530
0.6	0.537	0.544	0.551	0.558	0.565	0.572	0.578	0.585	0.592	0.598
0.7	0.604	0.611	0.617	0.623	0.629	0.635	0.641	0.647	0.653	0.658
0.8	0.664	0.670	0.675	0.681	0.686	0.691	0.696	0.701	0.706	0.711
0.9	0.716	0.721	0.726	0.731	0.735	0.740	0.744	0.749	0.753	0.757
1.0	0.762	0.766	0.770	0.774	0.778	0.782	0.786	0.790	0.793	0.697
1.1	0.801	0.804	0.808	0.811	0.814	0.818	0.821	0.824	0.828	0.831
1.2	0.834	0.837	0.840	0.843	0.846	0.848	0.851	0.854	0.857	0.859
1.3	0.862	0.864	0.867	0.869	0.872	0.874	0.876	0.879	0.881	0.883
1.4	0.885	0.888	0.890	0.892	0.894	0.896	0.898	0.900	0.902	0.903
1.5	0.905	0.907	0.909	0.910	0.912	0.914	0.915	0.917	0.919	0.920
1.6	0.922	0.923	0.925	0.926	0.928	0.929	0.930	0.932	0.933	0.934
1.7	0.935	0.937	0.940	0.939	0.940	0.941	0.943	0.944	0.945	0.946

Продовження додатку С

z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.8	0.947	0.948	0.949	0.950	0.951	0.952	0.953	0.954	0.955	0.955
1.9	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.960	0.961	0.962	0.963	0.963
2.0	0.964	0.965	0.965	0.966	0.967	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970
2.1	0.970	0.971	0.972	0.972	0.973	0.937	0.974	0.974	0.975	0.975
2.2	0.976	0.976	0.977	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.979	0.980
2.3	0.980	0.981	0.981	0.981	0.982	0.982	0.982	0.983	0.983	0.983
2.4	0.984	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986	0.986	0.986	0.986
2.5	0.987	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.6	0.989	0.989	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991
2.7	0.991	0.991	0.991	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993
2.8	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994	0.994	0.994	0.994
2.9	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995

Додаток Т

Значення величини z для значень r_{xy} від 0.00 до 0.99

r	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0.0	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090
0.1	0.100	0.111	0.121	0.131	0.141	0.151	0.161	0.172	0.182	0.192
0.2	0.203	0.213	0.224	0.234	0.245	0.255	0.266	0.277	0.288	0.297
0.3	0.310	0.321	0.332	0.343	0.354	0.365	0.377	0.388	0.400	0.412
0.4	0.424	0.436	0.448	0.460	0.472	0.485	0.497	0.510	0.523	0.536
0.5	0.549	0.563	0.576	0.590	0.604	0.618	0.633	0.648	0.663	0.678
0.6	0.693	0.709	0.725	0.741	0.758	0.775	0.793	0.811	0.829	0.848
0.7	0.867	0.887	0.908	0.929	0.951	0.973	0.996	1.020	1.045	1.071
0.8	1.099	1.127	1.157	1.188	1.221	1.256	1.293	1.333	1.376	1.422
0.9	1.472	1.528	1.589	1.658	1.738	1.832	1.946	2.092	2.298	2.647

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Виленкин С.Д. Статистическая обработка результатов исследований случайных функций. – М.: Энергия, 1979.
2. Гончарова Л.Д. Вертикальная статистическая структура скорости ветра в тропо-стратосфере Североамериканского континента //Метеорология, климатология и гидрология. – Одесса: МИДИНА, 1995. – Вып. 32 – С. 17 – 28.
3. Груза Г.В., Рейтенбах Р.Г. Статистика и анализ гидро-метеорологических данных. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
4. Груза Г.В., Ранькова Э.Я. Вероятностные метеорологические прогнозы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1983.
5. Исаев А.А. Статистика в метеорологии и климатологии. – М.: Изд. МГУ, 1988.
6. Казакевич Д.И. Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989.
7. Коняев К.В. Спектральный анализ случайных океанологических полей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
8. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971.
9. Полард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. – М.: Финансы и статистика, 1982.
10. Рождественский А.В., Чеботарев А.И. Статистические методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
11. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968.
12. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994.
13. Школьний Є.П., Лоєва І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації. – Одеса, 1999.
14. Школьний Є. П., Гончарова Л. Д., Миротворська Н. К. Методи обробки та аналізу гідрометеорологічної інформації (збірник задач і вправ): Навчальний посібник. – Одеса, 2000. – 420 с.
15. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Б

«Білий шум» – 281, 289, 361

В

«Викид» – 6, 174
Випадкова
— величина – 5
— функція – 271
— процес – 271
— послідовність – 271
— поле – 271

Г

Гамма – функція неповна – 104
Генеральна сукупність – 5
Гістограма – 9, 37
Гіпотеза
— статистична – 122
— нульова (основна) – 122
— конкуруюча – 122

Д

Детермінована основа випадкового процесу – 359
Дисперсія стаціонарної випадкової функції – 273
Довірча
— ймовірність – 252
— інтервал – 252

Е

Ергодична властивість стаціонарної випадкової функції – 273

З

Закон розподілу
— Пірсона – 36, 37
— нормальний – 41
— Пуассона – 144
— Фішера-Снедекора – 125
— експоненціальний – 284
Залежність
— функціональна – 198
— стохастична – 198
Згладжуюча функція («кореляційне вікно») – 288

І

Інтервальна частота – 8

К

Квадратурний спектр – 307, 308
Ковзне осереднення – 360
Когерентність – 310
Коефіцієнт
— асиметрії – 18, 39
— варіації – 266
— детермінації – 202
— ексцесу – 19, 39
— кореляції – 202, 213, 220
— регресії – 222, 266
Ко-спектр – 307, 308
Кореляційний зв'язок
— гіперболічний –200
— нелінійний – 200, 236
— обернений – 200, 203
— параболічний – 200
— показниковий – 200
— прямий – 200
Кореляційне відношення – 201
«Кореляційне вікно» – 288
«Критерій згоди» – 126, 135

Критерій
— Пірсона – 126
— параметричний – 187
— непараметричний Вілкоксона – 188, 192

М

Математичне сподівання – 39, 199
Медіана – 19, 39
Множник Гіббса – 337
Мода – 19, 39
Момент
— початковий – 14
— центральний – 14, 16
— основний – 14, 18

Н

Незв'язність членів ряду – 6

О

Область
— припустимих значень – 122
— критична – 122, 123
Об'єм вибірки – 5
Однорідність членів – 174
Оцінка
— ефективна – 17, 36
— зсунена – 16
— незсунена – 17, 36
— точкова – 252, 253
— умотивована – 17, 37
Оцінка параметра – 5
— початкового моменту – 14
— центрального моменту – 16, 17

П

Параметр
— масштабу – 38, 58, 73, 88, 103
— форми – 38, 58, 73, 88, 103
Перетворення Фур'є – 336
Правило трьох сигм – 40, 41
"Прихована" періодичність – 335
Представництво ряду – 6
Полігон – 9, 37

Р

Рівень значущості – 123, 252
Рівняння регресії – 199
— експоненціальне – 200
— квадратичне – 236
— лінійне – 200, 218
Розподіл Стьюдента – 125
Ряд (вибірка)
— статистичний – 5, 15
— згрупований – 7, 8, 9
— однорідний – 6
— простий – 6, 7
— ранжований – 7

С

Спектр
— амплітудний – 309
— фазовий – 309
— функції – 274, 276
Спектральна щільність
— випадкової функції – 277, 278
— нормована – 278
Спектральне розкладання – 273
Стаціонарний процес – 271, 272

Т

Тіснота кореляційного зв'язку –200, 201

Ф

Форма кореляційного зв'язку – 200
Фільтр Тьюккі – 338

Ч

Число степенів вільності – 124, 127
«Червоний шум» – 289, 296
Частота Найквіста – 293

ЗМІСТ

Передмова ……... 3

1. Форма зображення гідрометеорологічної інформації .....……. 5

Основні теоретичні положення..... 5
Розв'язання типової задачі..... 9
Задачі..... 13

2. Статистичні оцінки параметрів 14

Основні теоретичні положення..... 14
Розв'язання типової задачі..... 20
Задачі 25

3. Закони розподілу гідрометеорологічних величин та алгоритми їх дослідження 36

3.1. Нормальний розподіл 38
Основні теоретичні положення..... 38
Розв'язання типової задачі..... 43
Задачі 50
3.2. Перший тип розподілів Пірсона 57
Основні теоретичні положення..... 57
Розв'язання типової задачі..... 61
Задачі 65
3.3. Другий тип розподілів Пірсона 73
Основні теоретичні положення..... 73
Розв'язання типової задачі..... 76
Задачі 80
3.4. Третій тип розподілів Пірсона 88
Основні теоретичні положення..... 88
Розв'язання типової задачі..... 91
Задачі 95
3.5. Гамма-розподіл 103
Основні теоретичні положення..... 103
Розв'язання типової задачі..... 105
Задачі 108

3.6. Розподіл Пуассона 114
Основні теоретичні положення..... 114
Розв'язання типової задачі..... 115
Задачі 118

4. Перевірка статистичних гіпотез 122

4.1. Перевірка статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу до теоретичного 126

4.1.1. Основні теоретичні положення 126
4.1.2. Розв'язання типових задач 129
4.1.3. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу нормальному закону 138
4.1.4. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу I типу розподілів Пірсона 150
4.1.5. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу II типу розподілів Пірсона 158
4.1.6. Задачі до перевірки статистичної гіпотези про відповідність емпіричного розподілу III типу розподілів Пірсона 166
4.1.7. Задачі 173

4.2. Задача перевірки гіпотези про однорідність членів статистичної сукупності 174
Основні теоретичні положення..... 174
Розв'язання типової задачі..... 176
Задачі 179

4.3. Перевірка статистичної гіпотези про однорідність двох нормально розподілених рядів 180
Основні теоретичні положення..... 180
Розв'язання типової задачі..... 183
Задачі 186

4.4. Перевірка гіпотези про однорідність двох рядів випадкових величин за допомогою непараметричного критерію Вілкоксона 187

4.4.1. Інверсійний критерій Вілкоксона 188
Основні теоретичні положення..... 188
Розв'язання типової задачі..... 189
Задачі 191
4.4.2. Ранговий варіант критерію Вілкоксона 192
Основні теоретичні положення..... 192
Розв'язання типової задачі..... 193
Задачі 197

5. Кореляційний зв'язок між двома випадковими величинами..... 198

5.1. Поняття про форму та тісноту кореляційного зв'язку 198
Основні теоретичні положення..... 198
Розв'язання типової задачі..... 203
Задачі 207
5.2. Перевірка гіпотези про статистичну значущість коефіцієнта кореляції 211
Основні теоретичні положення..... 211
Розв'язання типових задач..... 213
Задачі 215
5.3. Побудова лінійного рівняння регресії та перевірка гіпотези про статистичну значущість його коефіцієнтів 218
Основні теоретичні положення..... 218
Розв'язання типової задачі..... 222
Задачі 226
5.4. Побудова нелінійних рівнянь регресії 236
Основні теоретичні положення..... 236
Розв'язання типової задачі..... 237
Задачі 243
5.5. Задачі 246

6. Інтервальні оцінки параметрів 252

6.1. Довірчий інтервал для математичного сподівання і дисперсії випадкової величини 253
Основні теоретичні положення..... 253
Розв'язання типових задач..... 255
Задачі 257
6.2. Довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції 259
Основні теоретичні положення..... 259
Розв'язання типових задач..... 261
Задачі 263

6.3. Довірчий інтервал для коефіцієнтів лінійного рівняння регресії. Довірчий коридор 265
Основні теоретичні положення..... 265
Розв'язання типових задач..... 267
Задачі 270

7. Елементи теорії стаціонарних випадкових функцій. Статистичне оцінювання ймовірносних характеристик та спектральної щільності випадкового процесу 271

Основні теоретичні положення..... 271
Розв'язання типових задач..... 290
Задачі 298

8. Взаємний спектральний аналіз двох випадкових процесів 306

Основні теоретичні положення..... 306
Розв'язання типової задачі..... 311
Задачі 320

9. Особливості дослідження статистичної структури нестаціонарних часових послідовностей. Виявлення періодичностей за допомогою інтегрального перетворення Фур'є 336

Основні теоретичні положення..... 336
Розв'язання типової задачі..... 340
Задачі 345

10. Згладжування нестаціонарних часових рядів 360

Основні теоретичні положення..... 360
Розв'язання типової задачі..... 364
Задачі 367

Додаток А Середня місячна температура повітря (1939–2000 рр.)…..... 379

Додаток Б Місячна сума опадів (1936–1990 рр., січень, липень)..... 400

Додаток В Місячна сума опадів (1951–1990 рр.)..... 410
ст. Миколаїв (1891–2000 рр.)..... 415

Додаток Г Повторюваність (%) за місяць швидкості вітру
(V, м/с) по градаціях 426

Додаток Д Кількість днів з опадами
(1945–1985 рр.) 431

Додаток Е Значення інтеграла ймовірності
$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-t^2/2}dt$ 435

Додаток Ж Значення функції $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ 438

Додаток К Значення гамма–функції $\Gamma(x)$ 440

Додаток Л Значення функції Пуассона $P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ 441

Додаток М Значення $\chi^2(\alpha,\nu)$ для різних чисел
степенів вільності ν та рівня значущості α 443

Додаток П Значення критерію Стьюдента 446

Додаток Р Значення критерію Фішера 447

Додаток С Значення величини r для значень z
від 0.00 до 2.99 448

Додаток Т Значення величини z для значень r_{xy}
від 0.00 до 0.99 450

ЛІТЕРАТУРА 451

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 452

Гончарова Л.Д., Школьний Є.П.
Г-65 Методи обробки та аналізу гідрометеорологічної інформації (збірник задач і вправ): Навчальний посібник. – Одеса: Екологія, 2007. – 458 с.
ISBN

Навчальний посібник є збірником задач і вправ, який містить основні розділи по статистичній обробці гідрометеорологічної інформації. Велика увага приділяється статистичному оцінюванню параметрів розподілу гідрометеорологічних величин, їх апроксимації відомими теоретичними законами; вирішуються задачі з використанням кореляційного та спектрального аналізів; наводяться алгоритми дослідження нестаціонарних часових рядів гідрометеорологічних величин за допомогою інтегрального перетворення Фур'є та застосування до них ковзного осереднення.

Навчальний посібник розрахований на студентів, магістрів, аспірантів гідрометеорологічних та екологічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також фахівців – гідрометеорологів.

ББК 26.23
УДК 551.501

Підписано до друку Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. Тираж 200 прим. Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета, підготовленого
в Одеському державному екологічному університеті
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Видавництво і друкарня “Екологія”
(Свідоцтво ДК № 1873 від 20.07.2004 р.)
65045, вул. Базарна, 106.
Тел.: (0482) 33-07-18, 37-14-25, 37-07-95.